Om kurserna i matematik på latingymnasiet.

Af Agne Wahlgren.

Följande uppsats innehåller några förslag till en reformering af kurserna i matematik på latingymnasiet, särskildt med hänsyn till frågan, i hvad mån man från dessa kurser skulle kunna utgallra kapitel, som för lärjungarna äro värdelösa. Närmast kommer den därför att blifva en kritisk granskning af läroverkskommitténs förslag till kursplaner, men speciellt i fråga om kursernas omfattning har man att granska ej så mycket de föreslagna kursplanerna, utan fastmera de problem, som gifvas vid de skriftliga profven i studentexamen. Ty de förra lämna med sina kortfattade uppgifter endast en antydan i stort om hvilka delar af matematiken som skola studeras. Däremot blir det de skriftliga studentproblemen, som bestämma hur pass omfattande studiet af hvarje kapitel skall blifva och hvilka detaljer som skola medtagas. Kommittén har emellertid i sitt förslag ej gifvit någon antydan om önskvärdheten af en reduktion af de nuvarande kurserna, och man måste därför antaga att den velat bibehålla dem i den omfattning, som de så småningom erhållit genom studentproblemens inflytande. Om man genomgår dessa problem, gör man med nödvändighet den reflexionen, att i våra skolor läses mycket, som ej är af minsta värde för eleverna, utan har uteslutande teoretiskt, vetenskapligt intresse. Vid uppsättandet af dessa problem tycks man följa den principen, att de skola väljas tillräckligt svåra, för att endast de, som äro värda högsta betyget, skola kunna lösa alla. Men å andra sidan anser hvarje lärare såsom sin plikt att lära *alla* eleverna *alla* de formler och handgrepp, som erfordras för att lösa *alla* de problem, som kunna tänkas förekomma vid de skriftliga profven. Följden har blifvit den, att matematikundervisningen urartat till inpluggandet af en oformlig massa af detaljkunskaper. För att genast taga ett exempel: i Rydberg, Algebraiska uppgifter gifna i de skriftliga afgångsexamina på latinlinjen v. t. 1896—v. t. 1901, lyder ex. 1:

Lös ekvationssystemet

$$x + y = a$$
$$x^3 + y^3 = b^3.$$

Att ett dylikt ekvationssystem är praktiskt värdelöst, visar sig redan däraf, att vederbörande ej lyckats uppställa något problem, som leder till detta ekvationssystem. Men denna synpunkt tyckes man konsekvent lämna åsido. Emellertid, afsikten med denna uppgift är väl att pröfva examinandens så att säga matematiska fantasi och kombinationsförmåga, och uppgiften kan därför ej klandras i och för sig. Men nu vet läraren, att dylika ekvationssystem af högre gradtal förekomma i studentskrifningarna, och som dessa ekvationssystem äro af mycket olika typer, hvilka kräfva hvar sitt tillvägagångssätt, så blir den olyckliga följden den, att läraren plikttroget inpluggar metoderna för lösningen af en 6, 7, 8 olika typer af ekvationssystem. På detta sätt har kursen blifvit ökad upprepade gånger genom studentproblemen. Det ges problem, som ej utgöra direkt tillämpning af inlärda regler, utan afse att pröfva examinandens förmåga af själfständigt tänkande. Så småningom uppträda flera sådana problem af likartad typ. De samlas till en grupp och man fastslår en metod för dem, och så upptages den nya teorien i den obligatoriska kursen. På detta sätt ha vi t. ex. fått in de löjligt invecklade exponential- och logaritmekvationerna.

Att mycket onödigt medtages vid undervisningen i matematik, det erkänna de flesta matematiklärare själfva. Men man försvarar bibehållandet häraf med att framhålla matematikstudiernas stora betydelse för uppöfningen af elevernas förmåga af logiskt tänkande. Häremot kan dock invändas, att denna egenskap är gemensam för alla grenar af matematiken och kan väl ej med fog påstås i högre grad tillkomma just de partier af matematiken, som sakna praktisk betydelse. För öfrigt, skulle man ej lyckas välja ut tillräckligt undervisningsstoff för att därmed fylla ut den åt matematiken anslagna tiden, utan att gå in på områden af matematiken, som sakna allt intresse utom det rent teoretiska, så dess bättre. Ämnena trängas på skolschemat, och naturvetenskaperna behöfva allt för väl den tid, som matematiken skulle kunna afstå. Hvad beträffar betydelsen för tankens logiska skolning, stå naturvetenskaperna med sina orsakskedjor, sina hvarför och därför, föga efter matematiken, såvida undervisningen bedrifves rätt och man ej äfven här drunknar i detaljer. För öfrigt måste man ju tillerkänna äfven grammatikundervisningen stor betydelse i detta hänseende. Och dock går ju utvecklingen numera därhän att inskränka densamma, emedan den ej tillfredsställer praktiska kraf.

En annan invändning, som gjorts för att försvara bibehållandet af ett eller annat från praktisk synpunkt värdelöst kapitel i matematiken, är, att matematikstudierna främja elevernas självverksamhet och sätta deras uppfinnings- och kombinationsförmåga i rörelse. Detta skäl synes mig viktigare än det föregående. Men det kan sägas gälla i lika hög grad om en praktiskt bedrifven undervisning i naturvetenskap. Skulle man emellertid af denna anledning vilja bibehålla ett och annat, som i och för sig är oviktigt, bör det dock absolut uteslutas från examensskrifningarna. Man måste skarpt skilja mellan hufvudsak och bisak, mellan hvad som är af vikt att *lära* sig och hvad som, på grund af sitt nära samband med dessa viktigare partier, genomgås endast såsom en öfning och för att gifva mera omväxling åt undervisningen. Det är nödvändigt att de problem, som höra till dessa oviktiga områden, uteslutas från examensproblemen. Ty, tiden är kort, och med tanken riktad på studentexamen frestas — för att icke säga tvingas — allt för många lärare att äfven här lägga hufvudvikten på resultaten, på inlärandet af de formler och handgrepp, som äro nödvändiga vid problemens lösande, i stället för att vid dessa problem vikten uteslutande ligger på elevernas själfständiga arbete att leta sig fram till resultaten. Jag tänker härvid på t. ex. de redan omnämnda ekvationssystemen af högre grad, ekvationer af högre grad än andra eller exponential- och logaritmekvationer af den invecklade form, de fått i studentproblemen m. m. Såsom exempel på de sistnämnda vill jag ur Rydberg, Algebraiska uppgifter etc., endast anföra följande:

Ex. 56. Lös ekvationen $\sqrt[x]{x^{\log x}} = 10$.

Ex. 61. Lös ekvationen $^{x}\log (2x + 12) = 3 + {}^{x}\log 2$, då man vet, att x är ett positivt helt tal!

Finnes det någon möjlighet att uttänka problem, som skulle leda till dylika ekvationer?

I den mån jag i det följande kommer att behandla kursernas *omfattning*, skall således den ledande principen vara den, att undervisningen, för så vidt den fastställes i kursplanerna och genom studentproblemen, bör endast omfatta sådant, som på ett eller annat sätt kan anses vara af praktiskt intresse. Härvid vill jag ej gå så långt, att endast det skulle medtagas, som flertalet af eleverna *själfva* finna användning för, vare sig i det praktiska lifvet eller i de naturvetenskapliga studierna i skolan. Till matematiska metoder af praktiskt intresse räknar jag alla metoder, som på kulturens olika områden tagas i praktikens tjänst. Däremot böra de områden af matematiken, hvilka ha uteslutande teoretiskt intresse, utestängas från undervisningsplaner och studentproblem och endast medtagas såsom en öfning i den mån tiden tillåter och eleverna visa sig mottagliga för desamma.

Vända vi oss först till undervisningen i algebra, hafva vi till en början att konstatera en verkligt betydelsefull reform, som läroverkskommittén föreslagit. Denna består däri, att undervisningen i algebra inledes med lösning af problem, som leda till enklare ekvationer af första graden, hvaremot den systematiska behandlingen af den egentliga algebran uppskjutes till första ringen. Denna åtgärd har kommittén själf ägnat en så grundlig motivering, att jag ej anser mig hafva något ytterligare att tillägga härom. Men en del af de skäl, som kommittén anför, synas mig fortfarande äga sin giltighet ifråga om det systematiska studiet af den egentliga algebran, äfven sedan det flyttats upp till första ringen. Kommittén citerar följande uttalande af en tysk pedagog H. Bertram (se kommittébetänkandet sid. 154): »I skolundervisningen har inöfvandet af det algebraiska teckenspråket, d. v. s. den s. k. bokstafsräkningen, så småningom kommit att intaga ett allt för stort utrymme, och under det att nämnda teckenspråk egentligen är att betrakta som ett oumbärligt hjälpmedel till att noggrant uttrycka de algebraiska tankarna, äro undervisningsmetoderna uteslutande riktade på bibringandet af en mekanisk färdighet i det yttre bruket af detta hjälpmedel. Därpå beror det, att öfningsuppgifterna för Tertianer (fjärde- och femteklassister) ofta röra sig med algebraiska uttryck, nästan mera komplicerade än de, som förekomma i de matematiska expressioner, hvilka möta dem under deras framtida studier. Vi erinra blott om exemplen på division af polynom med polynom, sådana de återfinnas i många exempelsamlingar.» Denna anmärkning gäller, till hvilken klass man än förlägger ifrågavarande studium af algebran. Vid inlärandet af division af polynom vore det fullt tillräckligt att låta divisorn vara en binom och kvoten en binom, så att dividenden innehölle tre eller fyra termer. Vidlyftigare divisioner förekomma aldrig sedermera i skolkursen. Eleven kunde då hvarje gång hafva klart för sig betydelsen af de operationer han utför, under det att mera invecklade divisioner endast bidraga till att skymma bort tillvägagåendets verkliga innebörd för eleven, ity att han vid dessa längre räkningar uteslutande håller sig till den inlärda regeln och utför räkningen mekaniskt. I stället för att man enligt de nuvarande exempelsamlingarna måste fortast möjligt inlära reglerna för att sedan tillämpa dem på allt mera invecklade exempel, skulle eleverna genom att konsekvent sysselsättas med enkla exempel ej behöfva lära sig några särskilda regler, utan dessa regler skulle så småningom af sig självt införlifvas med deras medvetande. Samma anmärkning kan göras om kvadratrotutdragning ur polynom. Om man läte polynomen innehålla endast tre termer — det enda fall, som sedermera förekommer i skolan — bortfölle allt särskildt inlärande af rotutdragning ur polynom. Ty att se om en trinom är en jämn kvadrat, det ha eleverna redan förut lärt sig i annat sammanhang. Det kunde ifrågasättas, om icke äfven kvadratrotutdragningen ur siffertal kunde tagas bort. Det finnes ju många tabeller, innehållande kvadraterna (och kvadratrötterna) för talen 1—1000. Omvändt kunna således kvadratrötterna erhållas ur dessa tabeller med tre siffror, och om interpolation användes, med fyra siffror, hvilket ju är alldeles tillräckligt i de flesta fall.

Det kan visserligen invändas, att det är lika svårt att lära eleverna att interpolera, som att lära dem den vanliga metoden att draga kvadratroten ur siffertal. Men förmågan att handtera tabeller och draga största möjliga nytta af dem, är af mycket större praktiskt värde, än kunskapen om hur man drar kvadratroten ur siffertal. Skall man bibehålla den gamla metoden, bör man åtminstone vänja eleverna vid att genast taga de tre första siffrorna ur tabellen.

Äfven i fråga om ekvationsteorien skulle jag vilja draga ut konsekvenserna af en af de principer, kommittén tillämpat vid sin reformering af algebraundervisningen i nederskolan. Denna princip kan formuleras sålunda: Man bör ej lära eleverna någon ny teori, innan de insett behofvet och nyttan af densamma. Enligt denna princip är det således oriktigt att låta hvarje kapitel af ekvationsteorien inledas med lösningen af en samling ekvationer och först sedan behandla problem, som leda till dylika ekvationer. Denna ordning följes dock i de flesta exempelsamlingar, och faktiskt är, att det finnes lärare, som i detta fall slafviskt följa exempelsamlingen. Dessa samlingar af ekvationsexempel sluta för öfrigt i allmänhet med så inkrånglade ekvationer, att det fordras en ovanligt stor uppfinningsförmåga för att åstadkomma problem, som skulle leda till dylika ekvationer. Men undervisningens förnämsta mål är ju ej mekanisk färdighet i ekvationslösning, utan praktiskt förstånd vid problemlösning. Undervisningen i ekvationsteori bör nästan uteslutande stå i samband med problemlösningen. Nu kan visserligen invändas, att det är svårt att uppställa förnuftiga problem, som leda till fullständiga ekvationer af andra graden. Jag har t. ex. genomgått i Möllers algebra de problem, som leda till fullständiga ekvationer af andra graden och af 47 problem (101—147) [f. o. m. ex. 148 äro problemen hämtade ur planimetrien] endast lyckats finna två (2), där icke kännedomen om den »obekanta» varit nödvändig för att erhålla de uppgifter, som i problemet anges såsom bekanta. M. a. o. problemen äro från praktisk synpunkt fullkomligt meningslösa. Jag skall anföra ett par exempel: Ex. 129. En person säljer en vara för 112 kr. och vinner därvid hälften så många procent, som varan kostat kronor i inköp. Hvad hade hon kostat? Anmärkning:

Hur kan man veta, att vinstprocenten var hälften af varans pris, om man ej först känner detta pris? Ex. 138. Afståndet mellan två orter A. och B. är $1^1/_5$ mil. Två personer afgå samtidigt från A. till B., men den ene framkommer till B. 36 min. senare än den andre, emedan han går 0,1 mil mindre i timmen än denne. Huru fort gå de i timmen? Anm.: Hur kan man veta, att den ene går 0,1 mil mindre i timmen än den andre, om man ej *redan* vet, hur fort hvardera går? Dessa problem öfverträffas dock nästan af följande, som gafs vid studentskrifningen höstterminen 1904: Hvarje kilogram af en vara kostar 12 kr. mindre än det antal kilogram, hela partiet innehåller. Detta åter kostar 6 kr. mindre än kilogramtalet för 10 gånger dess med 51 kg. ökade vikt. Huru mycket väger partiet?

Jag vågar ej framställa den fordran, att *hvarje* dylikt opraktiskt problem skall uteslutas. Erfarna lärare påstå t. o. m. att det är dessa meningslösa räknegåtor, som intressera eleverna mest (?). Men att problemens öfvervägande flertal utgöras af dylika räknegåtor, det måste anses oriktigt. I själfva verket är nog ej svårigheten att åstadkomma lämpliga problem så stor, om man nämligen gör klart för sig, att lösningen af andragradsekvationer i skolan har sin hufvudsakliga betydelse i planimetrien (och i fysiken på reallinjen). Om man således afstår från att ge problem på allt möjligt och redan från början ställer detta kapitel af ekvationsteorien i nära samband med planimetrien, skall man nog få tillräckligt med exempel. I fråga om system af ekvationer, där mer än en är af högre gradtal, skulle jag vilja ha denna förbindelse så fullständig, att dessa system *endast* behandlades i samband med planimetrien.

I nära samband med frågan om andragradsekvationer står frågan: Bör begreppet imaginära tal införas i skolan? Härpå svaras bestämdt: Nej! Att öfverhufvud de imaginära talen kunnat införas i skolan, måste bero på en missuppfattning af de imaginära talen. Det är alldeles riktigt, när man säger att ekvationen $x^2 = -1$ ej har någon rot. Att man i den högre matematiken påstår motsatsen, beror på en fullkomligt godtycklig öfverenskommelse, hvars innebörd skolynglingen omöjligt kan fatta. Först om man drefve studiet af de imaginära talen så långt, att man hunne fram till Moivres teorem och tillämpade detta t. ex. på härledningen af uttrycken för cos nx och sin nx, vore de imaginära talens förekomst i skolan berättigad. Denna härledning synes mig nämligen vara det första exemplet, som kan förklara, hvarför man använder komplexa tal. Man använder dem såsom ett *hjälpmedel* för att göra de matematiska kalkylerna enklare, mera symmetriska, mera allmängiltiga, *för att sedan, när man nått slutresultatet, återgå till specialfallet: reella värden.* Men detta kan ej klargöras för skolynglingen. För honom ställer sig saken i sin paradoxala enkelhet sålunda: Det finnes *intet* tal, hvars kvadrat är = — 1; *detta* tal kallas *i*. För öfrigt kan man ej konsekvent genomföra hänsynen till de imaginära talen i skolan. Om också en och annan lärare undviker att säga, att logaritmen för ett negativt tal finns ej, undrar jag dock, hur många som instruera eleverna att säga: Om två tal äro lika, äro deras *reella* logaritmer lika o. s. v. Låt oss därför lämna de imaginära talen å sido och säga, att en andragradsekvation har 2, 1 eller ingen rot. Om man tillämpar principen, att teorien för andragradsekvationer är till för problemens skull och ej problemen för att utgöra exempel till teorien, så blir ju detta helt naturligt. Ty vid ett problem är man ju aldrig betjänad af en imaginär lösning. Icke ens i de franska lycéerna, där dock matematikkurserna äro betydligt större än hos oss, behandlas de imaginära talen. I de år 1902 utfärdade studie planerna för lyceiundervisningen framhålles uttryckligen upprepade gånger, att de imaginära talen ej böra läsas. T. o. m. i kursplanen för Classe de Mathématiques (närmast motsvarande vår 7: 2 R), hvilken dock upptager t. ex. elementen af infinitesimalkalkylen, påpekas särskildt: On ne développera la théorie des imaginaires.

Undervisningen i andragradsekvationernas teori har kommittén fördelat på två årsklasser, i det att den skulle påbörjas i andra ringen för att afslutas i den tredje ringen. Detta har till följd, att de lärjungar, som välja att läsa grekiska i de två sista ringarna, få läsa en åtminstone skenbart oafslutad kurs. I verkligheten torde dock ej detta innebära någon olägenhet. Ty meningen är väl, at tillt tredje ringen skall uppskjutas sambandet mellan koefficienter och rötter samt de teoretiska tillämpningarna af andragradsekvationerna: andragradspolynoms upplösning i faktorer, reduktion af dubbelt irrationella uttryck och maxima och minima; och som dessa teorier äro från praktisk synpunkt tämligen värdelösa, innebär deras frånvaro från andra ringens kurs ingen förlust. Men i öfverensstämmelse med principen, att det, som saknar praktisk betydelse, bör strykas från skolkursen, anser jag, att dessa teorier böra tagas bort äfven ur tredje ringens kurs. Naturligtvis bör man påpeka sambandet mellan koefficienterna och rötterna; men man går för långt, när man sedan sätter ihop en samling mer eller mindre invecklade öfningsexempel — exempel, hvilka t. o. m. uppträda i studentskrifningarna — för att innöta detta, som självt endast bör vara ett öfningexempel. — Upplösningen af andragradspolynom förekommer aldrig sedermera vid de matematiska studierna i skolan annat än vid teorien för maxima och minima. Sistnämnda teori har visserligen ganska stor betydelse för att klara elevens matematiska begrepp, men den speciella metod, som vanligen användes och som förutsätter kännedom om andragradspolynoms upplösning i faktorer, kunde med fördel ersättas med den metod, som grundar sig på teorien om isoperimetriska produkter. Denna metod är enklare och naturligare och kan tillämpas på en stor del af de problem, som vanligen användas såsom tillämpning på den förra metoden. — Metoden att reducera dubbelt irrationella uttryck utmärker sig framför allt därigenom, att den endast undantagsvis låter använda sig. Det enda tillfälle, då dubbelt irrationella uttryck på ett naturligt sätt framkomma vid undervisningen i matematik, är vid teorien för reguliera månghörningar. Men jag har ej funnit mer än ett enda tillfälle, då ifrågavarande reduktionsmetod kan användas. Det är, då man får tolfhörningens sida.

$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{r}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

Denna metod bör därför reduceras till ett öfningsexempel.

Rörande de algebraiska kurserna i öfrigt för de båda sista ringarna har jag endast det att anmärka, att exponential- och logaritmekvationerna borde helt och hållet utgå, så när som på de exponentialekvationer, som omedelbart kunna reduceras till formen $a^x = b$, då ju dessa förekomma vid ränteproblemen. Äfven bland serieproblemen kunde nog en utgallring göras af en del problem, som äro väl mycket konstruerade.

Jag öfvergår nu till geometriundervisningen. I fråga om denna har man ännu ej tillräckligt hunnit frigöra sig från den gamla fördom, som tillmäter åt den Euklideiska geometrien en dominerande plats inom undervisningen. Det är visserligen sannt, att planimetrien numera ingår såsom en ej oväsentlig del af geometriundervisningen. Men den betraktas fortfarande endast såsom en tillämpning af »proportionslärans tillämpning på geometrien», under det att det enligt förf:s åsikt borde vara tvärtom. För att taga ett exempel: först bevisar man med användning af proportionsläran, att 1) rektanglar med lika höjder förhålla sig såsom baserna, 2) rektanglar med lika baser förhålla sig såsom höjderna, 3) förhållandet mellan två rektanglar är sammansatt af basernas och höjdernas förhållanden; sedan kommer i förbigående, såsom ett korollarium ur dessa satser, att en rektangels yta är lika med produkten af bas och höjd, och först en eller två terminer senare återkommer satsen med en självständigare ställning i planimetrien. Men denna sats är ju den viktigaste, och de tre förstnämnda satserna böra endast härledas såsom korollarier ur denna. Man skall ej inbilla sig, att formeln för rektangelns yta blir strängare bevisad på det sätt, man nu använder. Så snart man infört begreppet irrationella tal, kan formeln bevisas så strängt, som det öfverhufvud är möjligt att bevisa den. Det hjälper ej, att man efter genomgången af proportionslärans tillämpning på geometrien samlar ihop de planimetriska satserna för att ge dem mera markerad betydelse och inöfvar dem medelst problemräkning. Detta åstadkommer endast ett åtskiljande af saker, som höra ihop. I andra ringen, till hvilken proportionslärans tillämpning på geometrien blifvit förlagd enligt kommitténs förslag, skulle sålunda undervisningen oupphörligt afbrytas just på den punkt, då man skulle ta itu med den praktiska tillämpningen af det inlärda, för att man sedan i tredje ringen skulle öfvergå till dessa praktiska tillämpningar, det är: planimetrien. Och hvad värre är, de lärjungar, som välja att läsa grekiska i de båda högsta ringarne, skulle aldrig få vara med om dessa tillämpningar. De skulle endast få vara med om de teoretiska förberedelserna. Planimetrien och proportionslärans tillämpning på geometrien böra sammangjutas till ett helt, men planimetrien bör blifva det centrala. Skall emellertid planimetrien bli ett afrundadt helt af praktiska kunskaper, bör man å ena sidan gallra ut en del satser med öfvervägande kuriositetsintresse, men å andra sidan bör planimetrien utvidgas till att omfatta äfven elementen af trigonometrien. Man skall invända, att detta är för svårt för andra ringens lärjungar. Men intet är för svårt, när det kommer på rätt ställe; och när kunna de trigonometriska begreppen klargöras bättre än just i omedelbar anslutning till teorien om trianglars likformighet? Härigenom skulle äfven denna sistnämnda teori vinna en åskådlighet, som den hittills saknat. Man skall äfven invända, att denna kurs blir för stor för att kunna medhinnas i andra ringen. Men med de inskränkningar, som förf. föreslagit i den algebraiska kursen, borde det öfvervägande timantalet i andra ringen kunna anslås åt geometrien. Vidare skulle ju algebraundervisningen i denna klass röra sig om lösningen af andragradsproblem, hvilka såsom förut påpekats just böra väljas ur planimetrien, hvarigenom för andra ringen skulle vinnas en värdefull koncentrering af undervisning. Slutligen bör undervisningen i planimetri kunna börja redan andra terminen i första ringen. Enligt kommitténs förslag skulle, i enlighet med hvad redan nu är fallet, geometriundervisningen i första ringen under hela året bestå i lösandet af geometriska öfningssatser såsom tillämpning på fjärde och femte klassens kurs. Detta får väl närmast anses såsom ett slags »på stället marsch», i afvaktan på att undervisningen i algebra skall hinna fram till proportionsläran. Låt vara att denna öfning är mycket nyttig för smältandet af de i fjärde och femte klasserna förvärfvade kunskaperna; men tiden för densamma skulle nog kunna inskränkas, så att man i stället kunde börja med planimetrien redan i första ringen. Omedelbart sedan begreppet irrationella tal blifvit infördt genom kvadratrötterna i algebran, borde man då genomgå formlerna för rektanglars, trianglars och parallelltrapezers ytor, pytagoreiska satsen och dess generalisering för trubbvinkliga och spetsvinkliga trianglar, beräkningen af en triangels yta, då alla tre sidorna äro kända m. m. När man sedan i algebran hunnit med proportionsläran, kunde man lämpligen börja dess tilllämpning på planimetrien genom att såsom korollarier af formlerna för rektanglars och trianglars ytor genomgå satserna om förhållandet mellan rektanglars och trianglars ytor. Därefter fortsättes med satsen om parallella transversaler, konstruktion af fjärde och tredje proportionaler samt bissektrissatsen (*omedelbart* åtföljd af beräkningen af bissektrisens längd, *om* öfverhufvud denna beräkning skall medtagas). Sedan följa satserna om trianglars likformighet och tillämpningen häraf på rätvinkliga triangeln samt konstruktion af medelproportionaler. I omedelbar anslutning till detta kapitel införas de trigonometriska funktionerna och tillämpas på rätvinkliga och likbenta trianglar samt reguliära månghörningar. Däremot är det onödigt att fästa någon vikt vid den *algebraiska* beräkningen af sidor och ytor hos de speciella vid en cirkel in- eller omskrifna reguliära månghörningar, för hvilka dylika beräkningar äro möjliga. Dessa beräkningar kunna genomgås mera i förbigående såsom öfningsexempel och ej så detaljeradt som för närvarande är fallet. Likaså kan teorien om månghörningars likställighet uteslutas eller åtminstone uppskjutas till tredje ringen för att ej upptaga tiden i andra ringen. Slutligen genomgås talförhållandena i en cirkel med satsen om produkten af kordors segment, samt beräkning af periferi, yta, bågar o. s. v.

Genom att sålunda planimetrien och elementen af trigonometrien flyttas ned i andra ringen och genom de inskränkningar, som förf. föreslagit i algebrakursen blir de båda sista ringarnas kurs så väsentligt förkortad, att en del af den till matematiken anslagna tiden skulle kunna öfverlämnas åt de experimentella naturvetenskaperna, t. ex. fysiken.