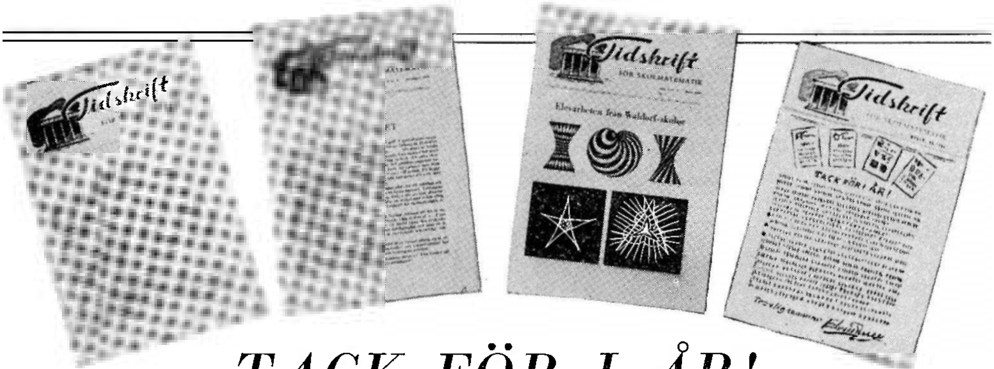
Tidskrift FÖR SKOLMATEMATIK

ÅRGÅNG 1 · Maj 1956
Nr 4



TACK FÖR I ÅR!

Tidskrift för skolmatematik presenterar här sitt för läsåret 1955—56 fjärde och sista nummer. Därmed är den nya tidskriftens första årgång avslutad. Det första viktiga steget är därmed också taget mot skapandet av ett forum, som kontinuerligt och allsidigt tager upp räkneundervisningen i våra skolor till behandling.

TfS vill vid detta tillfälle rikta ett hjärtligt »Tack för i år!» till alla dem, som på olika sätt stött och uppmuntrat tidskriften.

- Särskilt glädjande har varit den spontana generositet, med vilken bidrag ställts till tidskriftens förfogande. TfS har redan från början accepterats som ett värdefullt specialforum för räkneundervisningens problem.
- Lärare och lärarinnor av alla kategorier har verksamt stött TfS genom prenumeration. Ett speciellt tack vill TfS i detta sammanhang rikta till lärarkandidaterna vid landets seminarier: Ni har givit TfS ett avgörande stöd!
- Landets förnämsta bokförlag har uppmärksammat TfS som ett effektivt annonsorgan — TfS når ju också de lärare, som är speciellt intresserade av räkneundervisningen och därmed också lyhörda för de nyheter, bokförlagen kan erbjuda på detta viktiga område.

Den första årgången av Tidskrift för Skolmatematik ligger nu färdig. Men därmed är TfS långt ifrån färdig vare sig i fråga om innehåll eller format. Många utvecklingsmöjligheter finnas, många områden inom skolans räkneundervisning är ännu ej behandlade, matematikundervisningen är ett så rikt fasetterat gebit, att intressanta problem och problemställningar dyker upp på varje stadium, i varje kursmoment. TfS har därför alla möjligheter att utvecklas.

Ett läsår är slut. Efter en sommar börjar åter ett nytt. TfS fortsätter och startar i september en ny intressant årgång. Försäkra Eder (Dig) redan nu om nästa läsårs nummer av TfS genom prenumerationsfemman på postgironummer 49 02 82! Så möts vi i höst igen!

Trevlig sommar!

Edvin Tornell

RÄKNEFÄRDIGHETEN

av Docent Olof Magne

Den, som först ger sig in på frågan om vad som kan avses med räknefärdighet, är benägen att betrakta frågan som lätt att besvara. Man kan efter allt att döma anse säkerheten och snabbheten med uppställningar i de fyra räknesätten — obenämnda uppgifter utan sorter och utan text — såsom räknefärdighet. Det är kanske så de flesta matematiklärare i vårt land menar, men det är uppenbart, att den distinktionen är synnerligen obestämd. Bör vi exempelvis inskränka oss till heltalsräkning? Om icke: vad för andra tal bör vi inbegripa? Kan vi verkligen med fog påstå, att all räkning med uppgifter utan text och sorter tillhör räknefärdigheten? Det är onödigt att söka besvara dessa frågor, eftersom svaren blir retoriska. För att ange, vad vi avser med räknefärdighet, är vi tydligen tvungna att genom uppräkning ange, vad som tillhör densamma. Och jag vill hävda den uppfattningen, att vi för ögonblicket inte är i stånd att ge en definition av räknefärdighet, därför att varje klassstadium bör ha sin speciella typ och grad av räknefärdighet.

Det tycks emellertid vara en av våra uppgifter att söka utreda, vad som är räknefärdighet. Låt mig föreslå, att vi begränsar oss till en bestämd ålder och en bestämd klass, t. ex. klass 3 i folkskolan.

Med räknefärdighet för denna klass skulle jag vilja avse följande:

1) säkerhet i taluppfattning och talskrivning inom talområdet 1—10.000 (men icke snabbhet).

2) förmåga att snabbt *och* felfritt eller nästan felfritt klara räkning med sådana ental och tiotal, som ingår i vanliga uppställningar — jag föreslår, att vi kallar sådana numeriska element som 4+2, 4—2, 4·2 och 4:2 för *enkla kombinationer.* Termen förekommer bl. a. i engelskspråkig litteratur.

3) snabbhet *och* säkerhet i sorttabellerna (sortkombinationerna). Vi bör säkert tillägga, att endast de allra mest gångbara sorterna (måtten) kan anses höra hemma på detta stadium. Norrmännen har således icke på motsvarande klassstadium med dm och hg. Bland de sorter, jag i klass 3 vill utmönstra, befinner sig dussin och tjog samt dm, mil och hl.

4) förmåga att automatiskt och utan direkt viljeinsats (men ej nödvändigtvis snabbt) arbeta med vissa enkla uppställningar för sifferberäkning med heltal mellan 1 och 10.000.

Men inte heller en översikt som denna är fullständig utan att man också tar hänsyn till vad för användning den så definierade räknefärdigheten kan ha. Det tycks mig vara självklart, att räknefärdigheten är meningsfull endast i den mån den är till nytta för eleven, inte under skoltiden utan under den framtida yrkesverksamheten. Accepterar vi denna uppfattning, är det tydligt att vi måste ta ställning både till målsättningen för vår matematikundervisning och till våra undervisningsmetoder.

I 1919 års plan utsades det med stor tydlighet, att undervisningen borde syfta till att ge eleverna praktisk färdighet i räkning. 1955 års plan uttrycker sig med mindre pregnans på denna punkt, men det förefaller vara riktigt att lägga in den meningen, att undervisningen även i fortsättningen skall ge praktiska kunskaper. Frågan är tyvärr icke riktigt väl utredd i vårt land. Gör man en jämförelse med andra länder, kan man finna, att bl. a. i USA sedan ett par decennier tillbaka målsättningsfrågan betraktats som synnerligen väsentlig (jfr O. Magne, Matematikundervisningens mål. På försök 1955: 4, nr 3). Hos oss är förhållandet ett annat. Under 1940-talets utredningsarbete sköt man frågan ifrån sig med motiveringen, att den inte var någon specifikt pedagogisk fråga. Utan tvivel är detta ett olämpligt betraktelsesätt, i det att kursplaneringen måste utgå från näringslivets behov för att skolans arbete skall kunna betraktas som meningsfullt, men utom till de olika yrkesgruppernas önskemål måste man ta hänsyn till frågan om samordning mellan högre och lägre undervisning och till skolbarnens intressen, möjligheter att lära samt till att deras anspassning underlättas. Man kommer knappast att vilja påyrka någon radikal förändring av matematikens målsättning inom svenska skolor. Men det råder ingen tvekan om, att det finns sociala aspekter på matematikundervisningen, som vi försummat att ta ställning till. Det vore därför lämpligt, att en utredning om undervisningens anknytning till förvärvslivet kom till stånd. En sådan utredning är viktig ur den synpunkten, att vi knappast kan föreslå förändringar i undervisningsmetoder, såvida man inte först gjort klart för oss, vilka mål som vi bör undervisa för.

Jag skall exemplifiera detta med ett par iakttagelser, som jag haft tillfälle att göra. Vid slutet av vårterminen 1954 studerade jag en grupp göteborgsbarn i klass 3, tillsammans 238 elever, vilka kan anses representera en genomsnittsgrupp i begåvningshänseende. Experimentet är mera i detalj beskrivet hos O. Magne, Ett experiment med två divisionsuppställningar, I—II (Folkskolan—Svensk lärartidning 1955:9 Nr 11 och 12). Härvid användes bl. a. två prov, som avsåg de enkla kombinationerna. Det ena kallades »Enkla kombinationer 1» och det andra »Enkla kombinationer 2».

ENKLA KOMBINATIONER 1.

Tabell. 1

Poäng.

Klasser poäng i provet	Kontroll-grupp	Experiment-grupp
208—199	53	77
198—189	35	31
188—179	12	9
178—169	4	3
168—159	4	3
158—149	2	2
148—139	2	—
138—129	—	—
128—119	—	—
118—109	1	—
S:a	113	125

$\overline{X}=193{,}06\pm1{,}44$ $\overline{X}=197{,}1\pm0{,}95$

Diff. 4,04—1,73

Tabell 2.

Tid.

Klasser (tid i minuter)	Kontroll-grupp	Experiment-grupp
99—104	—	1
93— 98	—	—
87— 92	—	—
81— 86	1	1
75— 80	—	—
69— 74	—	—
63— 68	1	1
57— 62	2	—
51— 56	3	3
45— 50	6	6
39— 44	9	6
33— 38	12	13
27— 32	28	33
21— 26	27	27
15— 20	21	29
9— 14	3	5
S:a	113	125

$\overline{X}=29{,}87\pm1{,}13$ $\overline{X}=28{,}64\pm1{,}16$

Diff. $=1{,}23$—1,62

Enkla kombinationer 1 innehöll 208 uppgifter med enkla additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner (tab. 1 och 2) I additionsuppgifterna kunde summan ej överstiga 18, i subtraktionsuppgifterna var minuenden aldrig mer än 19. I multiplikations- och divisionsuppgifterna användes inga faktorer, vars produkt översteg 40, och det gällde i de fallen att den ena faktorn var 5. Provet var inte tidsbegränsat, men tid togs för varje elev.

Studerar man först antal rätt besvarade uppgifter i detta prov, finner man felfrekvensen vara betydande, endast 130 når så hög poäng som 199 eller högre poäng, 66 189—198 och de återstående 42 har färre rätt än 189.

Ett studium av arbetstiderna ger vid handen, att många barn arbetade långsamt, för att inte säga synnerligen långsamt. 7 elever hade längre tid än 60 min.; och över hälften behövde mer än 25 minuter för detta prov som vuxna kan göra på omkring 5 min.

Enkla kombinationer 2 innehöll 150 uppgifter med enkla multiplikationer och divisioner (tab. 3 och 4). Om detta prov kan ytterligare några upplysningar lämnas. I detta prov ingick endast multiplikationer och divisioner, nämligen de högre entalskombinationerna, dock inga med produkten, resp. dividenden högre än 42.

ENKLA KOMBINATIONER 2.

Tabell 3.

Poäng.

Klasser poäng i provet	Kontroll-grupp	Experiment-grupp
150—143	51	50
142—135	17	28
134—127	16	20
126—119	11	12
118—111	3	6
110—103	5	2
102— 95	1	2
94— 87	1	1
86— 79	2	1
78— 71	2	1
70— 63	—	2
62— 55	2	—
54— 47	—	—
46— 39	2	—
S:a	113	125

$\overline{X}=131{,}35\pm2{,}13$ $\overline{X}=134{,}08\pm1{,}47$

Diff. 2,73—2,59

Tabell 4.

Tid.

Klasser (tid i minuter)	Kontroll-grupp	Experiment-grupp
171—183	1	—
158—170	—	—
145—157	—	—
132—144	1	—
119—131	—	—
106—118	3	3
93—105	3	1
80— 92	3	9
67— 79	3	6
54— 66	11	17
41— 53	9	14
28— 40	22	29
15— 27	41	38
2— 14	14	8
S:a	111	125

$\overline{X}=38{,}10\pm2{,}38$ $\overline{X}=41{,}38\pm2{,}19$

Diff. 3,28—3,58

Om poängsummorna kan nämnas, att 101 hade högre poäng än 142 och endast hälften hade mer än 130 rätt.

Om arbetstider: c:a 60 elever behövde hålla på längre än 60 minuter — en inte mindre än 180 min., men vuxna kan göra uppgifterna felfritt på 3 minuter.

I fråga om kombinationerna kan jag gå med på, att en träning i fråga om *både* snabbhet *och* säkerhet kan vara befogad. Amerikanen Wilson* menar, att man aldrig

*) Guy M. Wilson, Teaching the new arithmetic, 1951.

bör nöja sig med mindre än hundraprocentig säkerhet i fråga om de enkla kombinationerna. Detta säger han med motiveringen, att en färdighet i dessa, som är 75-procentig eller 80-procentig, saknar praktiskt värde. Var och en kan ju inse, att felchanserna är betydande vid beräkning av ett additionsexempel med fyra tresiffriga termer, ifall säkerheten i de enkla kombinationerna är 90-procentig. Det är då sannolikt att knappast mer än vart annat räkneexempel blir rätt uträknat.

Ett annat exempel är detta. Samma elever, som jag här nämnt, studerades också vid höstterminens början, och då gavs ett prov första räknelektionen, vilket avsåg behållningen av räkneundervisningen med uppställningar i klass 3. Jag kan nämna, att samtliga räknesätt var representerade och att eleverna hade räknat exakt samma uppgifter i slutet av maj månad och i slutet av augusti. En jämförelse från vår till höst visade en allmän nedgång i antalet rätt. Nedgången var minst påtaglig i addition. Men redan för subtraktionen var den så stor, att den var statistiskt säkerställd. För multiplikation var nedgången ännu större, och störst var den för divisionen. För det sistnämnda räknesättet var lösningsfrekvensen speciellt låg för en grupp av 110 elever, vilka räknat på det mest brukade sättet med italiensk divisionsuppställning, såsom i exemplet

$$\begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ \hline -49 & 7 \\ \hline \end{array}$$

För dessa elever var inte mera än vart fjärde exempel rätt räknat, närmare bestämt 28%. Liknande lösningsfrekvenser för samma eller liknande divisionsuppgifter har f. ö. iakttagits för andra studerade grupper av elever i klass 3 (jfr O. Magne, Inlärningsmetoden i division. Folkskolan—Svensk lärartidning, antagen för publicering).

Låt mig emellertid tillägga, att dessa elever räknat division sedan mitten av mars månad fram till examen den 10 juni och att de under denna tid räknat omkring 1.000 divisionsuppgifter och därvid begagnat en av de våra dagar mest använda och uppskattade räknelärorna. Då jag nämnt härom för lärare, har de betygat sin överraskning, men samtidigt också sin känsla av nedstämdhet. Som en av dem sade: »Det är något fel med ett undervisningssystem, när man efter att ha räknat 1.000 uppgifter inte kan göra mer än var fjärde provuppgift rätt.» Jag skulle vilja tillägga följande: Vilken ogynnsam utgångspunkt har inte läraren, då han i fjärde klass i februari har att återuppta arbetet med division och därvid inom kort skall låta eleverna dividera med flersiffrig divisor.

Ett annat drastiskt exempel är väl detta. Jag prövade ett antal femteklasser inom det område av Göteborg, som brukar leverera de högsta begåvningarna. Dessa klasser hade undervisats om division med flersiffrig divisor under våren i fyran och under hösten i femman. Omedelbart före provet demonstrerades f. ö. ett exempel med tresiffrig divisor. Det visade sig, att frekvensen rätt räknade uppgifter i division med två- eller flersiffrig divisor var omkring 50 %, d. v. s. att varannan uppgift var fel, och detta omedelbart efter det att genomgången var avslutad.

Det finns enligt *min* mening exempel på iögonfallande brister i räknefärdigheten hos våra elever, redan då de går i skolans lägre klasser.

Vad som emellertid behöver framhållas är, att denna mening är representativ endast för mig personligen, och jag frågar mig, om man inte har anledning att utreda, vad för räknefärdighet som bör anses vara uppnådd i olika klasser. Såvitt jag kan inse, är detta i klarhetens intresse påkallat. Vilken annan person som helst kan ju om de här nämnda prestationerna påstå, antingen att de är goda för åldersstadiet eller att proven avsett oväsentliga kursmoment.

Det heter således i folkskolestadgan § 45, 1, att »lärjungar, som vid läsårets slut inhämtat klassens lärokurs, skola då uppflyttas till högre klass». Detta kan givetvis inte tolkas så, att eleverna skall klara alla de fall, som motsvarar vad som i undervisningsplanen säges rörande lärokursen för en bestämd klass. Emedan det inte meddelas, hur väl eleverna bör klara en kurs, blir det i realiteten provräkningsförfattarna (t. ex. de som skrivit räkneläran), som kommer att bestämma, vad eleven skall kunna eller inte kunna. Emellertid synes det finnas risk för att vissa element av kursen i så fall utelämnas samt att olika klasser eller klassavdelningar bedöms olika, beroende på vilken lärobok som kommit till användning.

Lösningen ur detta dilemma tycks endast kunna givas, genom att man noggrant preciserar vad för hänseenden en elev bör prövas i, ev. också vad för prestationsgrad han därvid bör uppnå.

Det mest rationella tillvägagångssättet kanske kan anses vara, att konstruera vissa kunskapsprov, som ansluter sig till en målsättningutredning rörande de moment, som kan tänkas komma i fråga, och bedöma en elevs prestationer med utgångspunkt från hans poäng i detta prov. Standardproven bygger f. ö. på denna tankegång — men tycks inte i sin hittillsvarande form ansluta sig till en målsättningsutredning.

Men vi bör otvivelaktigt söka oss vidare och inte stanna vid det konstaterandet, att bristfälligheter föreligger. En fråga av betydelse är, om vi måste nöja oss med en räknefärdighet sådan som den nu diskuterade, eller om vi genom ekonomiska och praktiska åtgärder kan förbättra prestationerna.

Av allt att döma finns det två möjliga kunskapskällor att ösa ur, nämligen 1) teoretiska överväganden vunna genom lärareerfarenhet samt 2) pedagogiska experiment.

Jag har den uppfattningen, att särskilt genom den senare metoden det kan bli möjligt att komma fram till förbättrade undervisningsförfaranden. Det experiment, som jag redan till en del redogjort för, avsåg i själva verket att pröva en metodisk jämförelse mellan den gamla kända divisionsuppställningen och en annan, som används bl. a. i de anglosaxiska länderna (anglosaxisk uppställning). Vår gamla invanda uppställningsform bedömdes därvid vara vida underlägsen den anglosaxiska på nybörjarstadiet och speciellt med svagt begåvade elever.

Vad jag i det här sammanhanget vill speciellt framhålla, det är, att vi kan tänkas förbättra elevernas räknefärdighet i fler hänseenden än det anförda. Det finns utan tvivel en uppsjö av problem, och varje lärare, som vill göra en kritisk prövning av undervisningsmetoder, borde stödas och uppmuntras.

Jag skulle vilja nämna vissa önskemål, som jag tror delas av många lärare i detta land.

1) Det förhåller sig ju så, att vi än så länge befinner oss i en övergångsperiod för skolan, under vilken vår gamla undervisningsplan delvis fungerar, 1955 års plan gäller men inte kan fullt ut tillämpas och försöksverksamhetens kursplaner är föremål för fortskridande redigering. Vore det då inte lämpligt att just nu söka göra en grundlig översyn av ett skolans nyckelämne sådant som matematiken? Jag skulle vilja uttala det allmänna önskemålet, att man noga utredde räknefärdighetens målsättning och grundligt analyserade kursplanen i matematik. Det förefaller som om såväl 1955 års plan som enhetsskolans plan innehåller diskutabla punkter.

2) Vidare skulle jag vilja förorda, att vi ställde undervisningsmetodiken i matematikämnet under debatt. Lektor Vanäs gör i sin uppsats i nr 2 av denna tidskrift gällande, att våra nuvarande räkneuppställningar bygger på sekelgamla traditioner och att vi släpar på undervisningsförfaranden, vilkas pedagogiska värde kan ifrågasättas. Det finns säkert många viktiga undervisningsmoment, där vi arbetar slentrianmässigt men utan att bygga på någon som helst säker grund. Jag skall inskränka mig till endast ett par frågor: Kan någon ge klara bevis för att barnen i folkskolan lär sig räkna division bättre genom att vi styckar upp räknesättet i innehållsdivision och delningsdivision? Kan någon ge bestämda bevis för att våra elever skall lära in divisionsuppställningarna genom att räkna ett stort antal övningar? Vilken nytta gör huvudräkning? Varför måste elever med pedantisk noggrannhet »teckna» uppgifter?

Hur skolarbetet i praktiken bedrivs är en fråga, som är så litet studerad, att vi inte vet något om hur genomsnittsläraren går till väga. Vilken detaljfråga vi än går till, så finner vi, att vi måste konstatera vår okunnighet. Och frågar vi oss, i vilken grad den ena eller den andra pedagogiska åtgärden befordrar inlärandet och påverkar behållningen, så kan vi lika öppet förklara, att våra undervisningsmetoder bygger på tradition och tro, men knappast på kunskap.

3) För det tredje skulle jag vilja ifrågasätta läroböckernas effektivitet. Vad vet man om dem? Man skulle lätt kunna ge exempel på högt skattade — och vida spridda — räkneläror, som visar sig innehålla de mest iögonfallande brister, bl. a. i fråga om divisionsräkning. Vi bör bl. a. observera, att det varje år ges ut nya läroböcker och att det åtminstone i några skoldistrikt blivit ett problem, hur man bör förfara med de nya läroböcker, som utkommer. På en del håll arbetar en särskild kommitté, som på lärares förslag företar en prövning av nyutkommen undervisningsmateriel. För att lärobok eller undervisningsmateriel skall godkännas fordras, att prövningen i vissa klasser utfallit till förmån för densamma. — Är det inte så, att det är ett samhällsintresse att få till stånd en effektivitetsprövning av undervisningsmateriel — inte endast i matematik utan i alla skolämnen? Man förstår ju att de största skoldistrikten kan arbeta på så sätt, som nu nämndes, men hur skall de mindre distrikten kunna fundera ut, vilken lärobok, som bör föredras?

4) Sist och framför allt vill jag kraftigt uttala som min åsikt, att forskning rörande undervisningen i matematik behövs. Det är ofta så lätt att ställa ett problem. Och har man en gång ställt ett problem, bör det vara möjligt att också finna en metod, som gör det möjligt att studera den väckta frågan. Eftersom vi rör oss om ett huvudämne, bör en ökning av effektiviteten direkt kunna uppskattas i form av förbättrad kunskapsutrustning för eleven, då han träder ut i förvärvslivet. På lång sikt rör det sig troligen om en god samhällsinvestering, ifall årligen pengar satsas på forskning som gör eleverna mera skickade att gå i land med praktiska värv och yrkesverksamhet.

Men jag tror också, att vi tills vidare bör undvika att engagera oss i ett alltför yvigt och okontrollerat prövande av uppslag och hugskott. Man bör acceptera en viss återhållsamhet i både tekniskt och didaktiskt avseende för att möjliggöra en angelägen enhetlighet beträffande metoder, beteckningar och uppställningar.

———★———

TRÄNA TABELLER

— rolig lek med hjälp av Winnetkakort

Enligt 1955 års undervisningsplan för rikets folkskolor ska numera inte endast multiplikationstabellen utan såväl additions- som subtraktionstabellerna inläras.

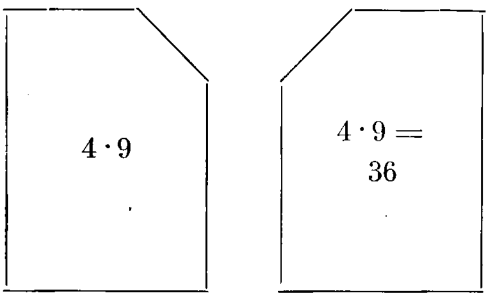
För många lärare och barn har tragglet med multiplikationstabellen känts tråkigt tidsödande och enformigt. Ska det nu bli ännu mera tragglande?

Det behöver det inte bli. Varken inlärandet av »gamla» eller »nya» tabeller blir intresselöst rabblande, om man använder Winnetkakorten. Tabellträningen blir i stället en rolig lek, som »trollar in tabellerna i huvudet» och gör övningstimmarna efterlängtade och spännade.

Winnetkakorten, som utarbetats efter exempel från de berömda skolorna i Winnetka, finns för såväl multiplikations- som additions- och subtraktionstabellerna.

På ett korts ena sida står en uppgift, t. ex. 4·9, och på kortets andra sida svaret 4 · 9 = 36. För att man lätt ska kunna ordna korten, så att alla frågorna kommer åt samma håll och alla svaren åt det motsatta, är ett hörn av korten avskuret.

Så här ser de ut:



Och så här kan de användas:

I. Ett barn får en packe kort och »förhör sig självt» genom att se på sidan med uppgiften, tänka efter, om det kan svaret och kontrollera, genom att vända på kortet, om svaret var rätt. Om det var rätt, läggs kortet i en hög. Om det var fel, läggs det i en annan. När alla korten är slut, tar barnet itu med de kort, vars uppgifter det inte klarat, och arbetar igenom dem på nytt, tills alla korten hamnar i »rätt» hög.

II. Två och två barn kan kontrollera varandra: A håller upp ett kort med uppgiften vänd mot B, som säger eller skriver svaret. Är det rätt får B behålla kortet. Är det fel byter de roller och A får svara. De håller på tills den ene vunnit alla korten.

Leken kan varieras men är alltid lika spännande. Det blir roligt, och det går fort att träna in tabellerna.

Winnetkakorten passar för individuellt arbete och för grupparbete. De är billiga och lätthanterliga. Med Winnetkakortens hjälp vinner läraren tid, barnen känner arbetsglädje, och »tragglet» kan sättas på avskrivning.

Winnetkakorten finns i satser om 65 st. kort för addition, 80 st. för subtraktion och 64 st. för multiplikation. Pris per sats kr 3: 20.

BERGVALLS FÖRLAG

Drottninggatan 108

STOCKHOLM VA

DEN NUMERISKA BEGÅVNINGEN

av Fil. lic. Ingvar Werdelin

Författaren till denna artikel har ett antal år sysslat med att undersöka den matematiska begåvningens faktorsstruktur. En framställning av en del av de funna resultaten gavs i TfS nr 1. Där visades att den matematiska begåvningen betingades av följande fem från varandra skilda *begåvningsfaktorer*:

1) Den allmänna resonemangsfaktorn, som betingar vår förmåga att förstå ett problems natur.

2) Den deduktiva begåvningen, som betingar vår förmåga att, sedan vi väl förstått problemet, deduktivt resonera oss fram till en lösning.

3) Den verbala faktorn, som ger oss förmågan att förstå ord och språkliga sammanhang.

4) Den visuella eller spatiala begåvningen, som är en förutsättning för att vi skall kunna operera med och i fantasien vrida och vända på figurer av olika slag, t. ex. geometriska.

5) Den numeriska faktorn, som betingar vår förmåga att lösa rent numeriska problem: enkla additioner, multiplikationer o. s. v.

Sambandet mellan dessa faktorer och matematikbetyget varierar. Starkast är det, som naturligt är, mellan betyget och den allmänna resonemangsfaktorn. Korrelationen*) mellan dem varierar mellan 0,5 och 0,8. Därnäst starkast samband finner man mellan betygen och den numeriska faktorn (0,2—0,6). Övriga faktorers korrelation med matematikbetyget varierar mellan 0 och 0,5. Sambandet mellan betygen i övriga skolämnen och dessa begåvningsfaktorer är rätt svagt, utom för den verbala faktorn, som helt naturligt visar hög korrelation med svenskbetyget (omkr. 0,5) och även med läsämnena, och för resonemangsfaktorn, vars korrelation med de olika skolämnena är ganska hög men rätt varierande.

För att mäta dessa fem faktorer har förf. färdigställt ett testbatteri med nära 20 test, vilka tar tre lektionstimmar att ge. Då den psykologiska forskningen på detta område ännu är ganska »outvecklad», är det givet att ett sådant testbatteri är rätt vanskligt att använda, men i varje fall ur forskningssynpunkt äger det ett stort intresse. Enstaka exemplar av detta testbatteri kan erhållas — så långt upplagan räcker — hos förf. till självkostnadspris (c:a 5 kr; adress Brommag. 21, Hälsingborg).

---

*) Sambandet mellan två variabler, t.ex. två test eller två betyg eller ett test och ett betyg mätes i ett mått som heter korrelation(skoefficient). En korrelation på +1 anger ett fullständigt samband. Den bäste i ett är bäst i det andra osv. En korrelation på ± 0 anger att man inte har något som helst samband; ur den ena variabeln kan man ej sluta något om den andra. En negativ korrelation anger en motsättning mellan de två variablerna. De korrelationer man finner inom det intellektuella området är vanligen positiva. Som ex. kan nämnas att korrelationen mellan två betyg brukar variera mellan 0,3 och 0,7, korrelationen mellan två på varandra följande provräkningar mellan 0,4 och 0,7. Två fullkomligt parallella test visar ofta korrelationen 0,8

DEN NUMERISKA FAKTORNS NATUR

Av de funna fem faktorerna skall här behandlas blott den numeriska. Den är sedan länge känd, och det har också varit känt sedan åtskilliga år tillbaka, att den spelar en icke oväsentlig roll för matematiken även på det högre skolstadiet. Detta är i viss mån överraskande, eftersom ett rent matematiskt test är oberoende av den numeriska begåvningen och eftersom det numeriska räknandet på det högre stadiet spelar en föga utslagsgivande roll. Sambandet är faktiskt så kraftigt att man redan ur detta kan sluta att den numeriska begåvningen *ej* är begränsad till det rena numeriska räknandet utan måste ha ett mera vidsträckt definitionsområde. Vid förf:s första undersökning visade det sig också att korrelationen mellan den numeriska testen och ett ekvationstest med uppgifter av typen $4x - 8 = 12$ blev så hög som 0,6, d. v. s. lika hög som eller högre än korrelationen mellan olika matematiska test. Denna höga korrelation kan ej tillfredsställande förklaras av det ganska ringa numeriska arbete som ingår i ekvationslösandet. Vidare framkom en korrelation på omkring 0,45 mellan de numeriska testen och förf:s *test 17,* där det gäller att efter varje bokstavspar av typen AB, YX, QP, skriva den sista bokstaven om paren står i bokstavsordning, den första om paren står i omvänd bokstavsordning. Detta icke-numeriska test visade sig alltså tydligt mättat med den numeriska faktorn. Det är tydligt att den numeriska begåvningen är någonting annat och mera än blott förmågan att behandla de fyra enkla räknesätten.

Vad är då den numeriska begåvningens natur? Den psykologiska vetenskapen har ännu ej sysslat med detta problem i någon större utsträckning. De enda för förf. kända teorierna är LANDAHLS åsikt att den har »serial-response-natur» och COOMBS' att den är förmågan att arbeta med en känd räkneregel i ett väl bekant symboliskt system. Med »serial-response» menas att varje svar på ett par siffror leder till nästa svar o. s. v. Den numeriska begåvningen skulle alltså vara den snabbhet med vilken dessa svar uppväckas. Coombs bevisade att Landahls teori är felaktig, eftersom additioner med två ensiffriga tal, där alltså »serial response» ej kan förekomma, är lika mättade med den numeriska faktorn som längre uppgifter. Sin egen huvudhypotes söker han bevisa genom att bevisa följande underhypoteser:

1) Ju mera bekant en räkneoperation är dess högre mättnad med den numeriska faktorn skall den få.

2) En väl bekant symbolism är mera mättad med den numeriska begåvningsfaktorn än en föga känd.

För att bevisa den första undertesen ger han samma test i olika form (ett tämligen komplicerat test där man skall räkna med bokstäver efter givna regler) tre gånger efter varandra. Han visar att korrelationen med den numeriska begåvningsfaktorn stiger, men denna stegring är ganska obetydlig.

För att bevisa den andra undertesen ger han ett test i olika form (samma regler som användes i förf:s nedan beskrivna ABC-test men med 2 bokstäver, med 5 bokstäver resp. med geometriska tecken i st. för med 3 bokstäver). De båda bokstavstesten visar något högre korrelation med den numeriska faktorn än testet med de geometriska tecknen, vilket Coombs förklarar med att bokstavssymboliken är mera välbekant. — Coombs anser att hans resultat »är i linje med» hans hypotes. Detta synes vara sant, även om stöden för den är mycket svaga. Han förbiser dock att många fakta utanför hans undersökning talar emot hypotesen. Ett test, där det gäller att t. ex. stryka ut alla a-n i en text, innefattar en väl bekant regel och en i hög grad inövad symbolism, men är inget numeriskt test.

EGNA EXPERIMENT

För förf. har det synts väsentligt att söka den numeriska faktorns natur, då detta skulle kunna förklara åtskilligt inom det matematiska begåvningsområdet. Den arbetshypotes som uppställdes var:

Den numeriska faktorn är till sin natur förmågan att kunna automatisera en intellektuell process (räkneprocess).

Det är väl för alla som syssla med matematik bekant att åtskilliga processer, som tidigare varit logiska eller i varje fall intelligenskrävande, med tiden automatiseras. Detta gäller det numeriska räknandet, som på lågstadiet innebär stor ansträngning och är ett ganska gott intelligenstest, men som sedan snabbt blir automatiserat. Det gäller det algebraiska räknandet, som av eleven i realskolan återföres till vissa bestämda regler, men som senare sker mer eller mindre automatiskt. Det gäller enkla problem av typen: »5 kg. äpplen kostar 75 öre; vad kostar 3 kg.? I folkskolans lägre klasser innebär detta problem en svår logisk uppgift, medan en tränad matematiker löser det utan överläggning. Och det gäller ekvationslösandet, som först erbjuder stora svårigheter, men som senare mer eller mindre automatiseras. Det är alltså förf:s hypotes att denna automatiseringsprocess skall ske i riktning mot den numeriska begåvningen; ju högre denna är dess längre kan automatiseringen drivas och dess snabbare och lättare arbetar man.

För att kunna bevisa denna hypotes har förf. ställt upp ett antal underhypoteser:

1) Om man låter en enkel icke-numerisk räkneprocess övas alltmera så att den så småningom närmar sig automatisering så skall den visa allt högre korrelation med de numeriska testen.

2) Den numeriska faktorn är *inte* en ren övningsfaktor. En intellektuell process som övas men som ej visar allt högre grad av automatisering skall *ej* visa allt högre grad av samband med de numeriska testen.

3) Ju snabbare automatiseringsprocessen går, dess snabbare bör korrelationen med de numeriska testen stiga. En process som ej lätt automatiseras skall endast visa måttlig stegring i korrelationen. Det bör påpekas att Coombs resultat är i full överensstämmelse med denna sista underhypotes.

Ett antal test, som bl. a. avsåg att bevisa dessa hypoteser gavs i ett testbatteri på närmare 50 test. Det är avsikten att ge dessa test till c:a 150 frivilliga försökspersoner (fp). Större delen av denna undersökning har redan utförts men ej hunnit bearbetas. Som helhet torde ej heller denna undersökning vara av särskilt stort intresse för tidskriftens läsare. Av större intresse är sannolikt den specialundersökning som utfördes i samband med den större undersökningen. Sjuttio försökspersoner gåvos bl. a. följande test:

ABC: Man skall räkna med bokstäverna A, B och C efter följande regler: två lika bokstäver ersättes med samma bokstav (BB=B), två olika bokstäver ersättes med den tredje (AB=C osv.). Testet omfattade trebokstaviga uppgifter, som alltså utfördes på följande sätt: AAB=AB=C, ACB=BB=B osv. — Försökspersonerna fick först en grundlig förklaring till testet med flera lösta uppgifter. Efter detta fick de fyra minuters prov på dylika uppgifter. Därefter kom fyra minuters övning på samma slags uppgifter. ett nytt prov på fyra minuter, nya fyra minuters övning osv. tills de utfört fem fyraminuters prov och fyra övningspass. Om förf:s hypotes är riktig skulle detta test, som innehåller en lätt automatiserbar räkneprocess, visa en snabbt stigande korrelation med de numeriska testen.

Alfabetet: Fp skall skriva den sista bokstaven i alfabetisk ordning efter varje bokstavspar av typen AB =, CB =, YZ = osv. Detta test gavs likadant som det föregående men med fyra egentliga prov och tre mellanliggande övningsuppgifter om vardera fyra minuter. — Detta test är från början ganska starkt automatiserat, men visar ingen tilltagande automatisering. Övningseffekten är betydande beroende på minnesfaktorer. Testet innefattar alltså ej en sådan automatisering av tänkandet som det föregående testet. Man kan vänta sig en ganska hög begynnelsekorrelation med de numeriska testen men ingen stegring i denna.

Syllogismer: Detta test omfattade uppgifter av följande typ:

Per är större än Nils, Nils är större än Erik.

Är Erik större än Per?

Testet gavs först en gång med grundlig instruktion. Därefter följde nära fyrtio olika test, en del av logisk natur. Därefter gavs fp. ånyo en kortfattad instruktion och ett par minuters träning på dylika uppgifter. Därefter mättes förmågan en andra gång, ett nytt träningspass insköts, förmågan mättes tredje gången, sedan kom ett sista träningspass och ett fjärde prov. — Detta test omfattar en intellektuell process som är svårare att automatisera än den i ABC-testet. Det borde alltså enligt den tredje underhypotesen visa en ganska måttlig stegring i korrelationen med de numeriska testen.

Ekvationer: För dessa ovan beskrivna test har valts sådana intellektuella uppgifter som fp. endera är helt obekant med (ABC och syllogismer) eller så pass väl bekant med att ingen större skillnad i deras bekantskap torde föreligga (Alfabetet). Förf. ville emellertid även ha med test som omfattar i skolan automatiserat räknande och har valt ekvationer. De första ekvationerna i test I hör till den allra enklaste typen ($4x—8=12$, o. dyl.), medan ekvationerna i test II är av mera komplicerad natur:

$$\frac{4x}{9} - \frac{3x-2}{12} = \frac{5+x}{6}$$

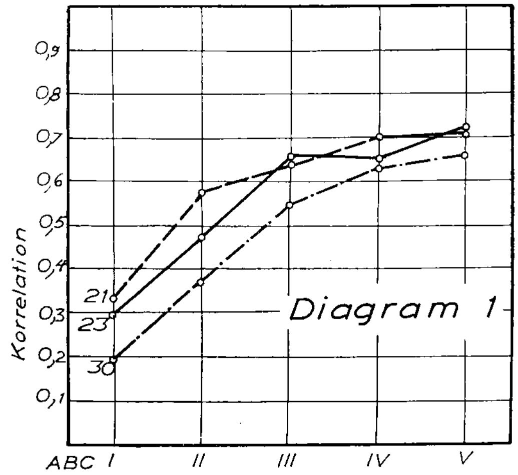
Det rent numeriska arbetet torde spela störst roll i dessa senare ekvationer. Om förf:s hypotes är riktig bör emellertid den första enkla typen, som löses mera »tankelöst» visa högre mättnad med den numeriska faktorn än den senare som löses mera med resonemang.

Som numeriska test användes följande:
Test 21: addition av tre ensiffriga tal under tre minuter.
Test 23: multiplikation av tresiffriga tal med ensiffriga under tre minuter.
Test 30: Fp. skall avgöra vilka av de givna lösta additionerna med fem ensiffriga tal som är rätt lösta.

Resultat av undersökningarna:

I *tabell 1* och *diagram 1* visas det stigande sambandet mellan ABC-testen och de numeriska testen (ABC I, II osv. betyder det första, andra, osv. provet av denna typ). Det synes som om korrelationerna stabiliserades sig mellan 0,70 och 0,75. Då korrelationerna mellan två numeriska test är 0,72—0,85, är det tydligt att ABC-testet mycket snart närmar sig dessa värden och alltså visar sig som ett tämligen rent numeriskt test i nästan lika hög grad som ett additions- eller multiplikationstest.

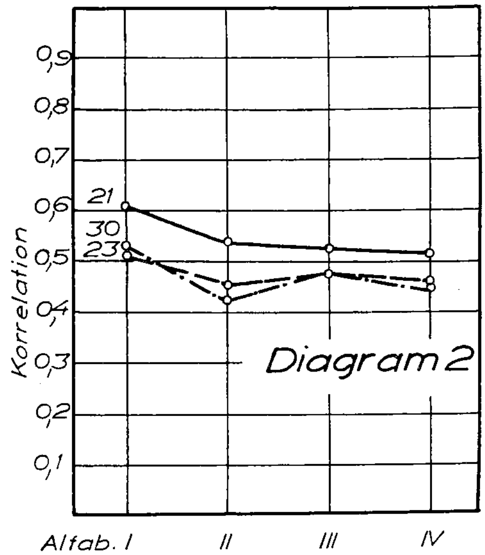
I *tabell 2* och *diagram 2* ges resultaten från alfabet-testen. Som synes har vi här ett ganska högt begynnelsevärde, vilket kan förklaras med att detta test innefattar en tämligen automatiserad intellektuell process. Trots att en kraftig övningseffekt gör



Test	21	23	30
ABC I	0,33	0,29	0,19
ABC II	0,57	0,47	0,37
ABC III	0,64	0,65	0,55
ABC IV	0,70	0,65	0,63
ABC V	0,71	0,72	0,66

Tabell 1

Stegringen i korrelationen mellan ABC-testet och de numeriska testen när det förra övas



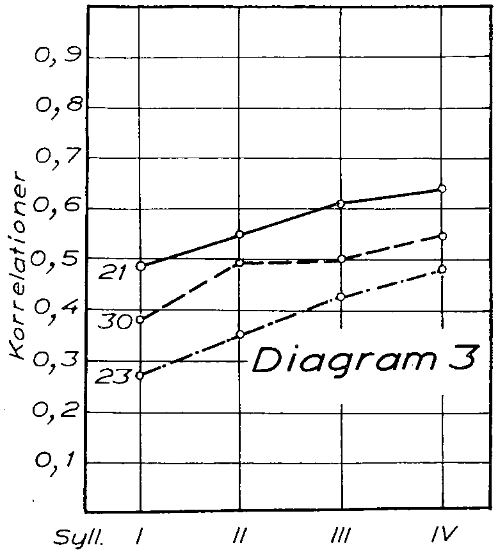
Test	21	23	30
Alf. I	0,61	0,51	0,52
Alf. II	0,54	0,46	0,43
Alf. III	0,53	0,48	0,48
Alf. IV	0,52	0,47	0,46

Tabell 2

Korrelationerna mellan de numeriska testen och alfabettesten

sig gällande — medelvärdet blir ungefär 1 ½ gång högre för varje mätning — så stiger ej korrelationen med de numeriska testen utan sjunker i stället något. Denna sänkning kan förklaras med att den automatiserade »räkneprocessen» av delvis numerisk natur till en del ersättes med en minnesprocess: fp. lär sig svaren på bokstavsparen.

I *tabell 3* och *diagram 3* ges resultaten från syllogismtesten. Som synes har vi även här en stegring, som emellertid är betydligt långsammare än för ABC-testen. Vi finner ej heller någon tendens hos kurvan att vika av. Att försöket med dessa test ej drevs längre beror på att testet verkar kraftigt uttröttande vilket gör att resultaten ganska snart blir osäkra.



Test	21	23	30
Syll. I	0,48	0,27	0,38
Syll. II	0, 55	0,35	0,49
Syll. III	0, 61	0,43	0, 50
Syll. IV	0,62	0,47	0,56

Tabell 3

Korrelationer mellan de numeriska testen och syllogismtesten

Korrelationen mellan de numeriska testen och ekvationsproven ges i *tabell 4*. Som synes är de ganska mycket högre för de enklare ekvationerna, som ju är mera automatiserade.

Test	21	23	30
Ekv. I	0, 59	0,49	0,53
Ekv. II	0, 52	0,43	0,48

Tabell 4

Korrelationerna mellan de numeriska testen och ekvationstesten

De av förf. utförda experimenten stöder alltså fullkomligt hypotesen. Förf. har ej heller utanför sina försök kunnat finna några fakta som talar emot det utan tvärtom åtskilliga stöd. Ett bevis i matematisk mening kan givetvis ej framläggas för en psykologisk hypotes, utan man måste nöja sig med att konstatera att alla tillgängliga fakta talar i en viss riktning.

Förf:s hypotes synes vara fruktbar ur forskningssynpunkt: vidare undersökningar får avgöra vilka processer det är som kan automatiseras på detta sätt, hur automatiseringen i varje fall sker, om det finns något samband mellan förmågan att automatisera snabbt och förmågan att driva automationen långt, osv.

Hypotesen synes vara fruktbar även ur den synpunkten att man med dess hjälp osökt kan förklara den numeriska faktorns stora betydelse för matematikbetyget: under hela skoltiden ges i matematiken olika intellektuella processer, som skall drivas till fulländning, t. ex. sifferräknandet, ekvationerna, det algebraiska räknandet, insättandet i en del formler, tillämpandet av räkneregler osv. Dessa är av väsentlig betydelse för framgången i skolmatematiken; ju längre de drives mot automatisering dess mera avlastas det rent intelligensmässiga tänkandet. Det synes inte orimligt att anta att det är vår numeriska begåvning som här kommer in. Det förtjänar dock att påpekas, att den numeriska begåvningen har en stark begränsning: den ger oss ingen förmåga att förstå en enda av de automatiserade processerna! Matematiken fordrar oundgängligen högre begåvningsfaktorer.

RÄKNENIVÅER

Problemet med det numeriska räknandet är ej uttömt blott genom hänsynstagande till den numeriska faktorn. Korrelationen mellan olika numeriska test, hur väl dessa än är konstruerade, blir ej fullständig. Vi har t. ex. funnit att korrelationen mellan vårt test 23 och test 30 blott är 0,72. Andra forskare har funnit än lägre värden. Det numeriska räknandet är alltså ej enbart beroende av den numeriska faktorn. Det har visat sig att det är ganska lätt för en driven matematikpedagog att på kort tid driva upp räknehastigheten (särskilt för additioner). Detta är i viss mån förvånande: det hade synts rimligt att man har drivit sin räkneförmåga till ett maximum efter några års skolmässig träning. Allt detta fordrar en förklaring. Förf. till denna artikel anser att åtminstone en del förklaras genom det sätt på vilket eleverna angriper en addition (eller annan enkel sifferräkningsuppgift).

Förf. har funnit att det numeriska räknandet av additioner kan ske på olika *nivåer*. Man skulle kunna tala om olika *typer* av räknare. Dessa nivåer utgöra från varandra skilda sätt att angripa uppgiften och har ingenting att göra med hur långt automatiseringen drivits. På var och en av dessa nivåer kan automatiseringen vara mer eller mindre fullständig. (Undantag gäller delvis den högsta nivån).

Den första nivån kännetecknas av att personen i fråga vid addition »delar upp» ett tal i lika många enheter som talet anger. Han räknar alltså 2+4+3 på följande sätt: ett-två—tre-fyra-fem-sex — sju-åtta-nio. I många fall utsättes prickar vid sidan av talet, i en del fall förklarar sig personen se dessa prickar utan att rita dem, i andra räknar han på fingrarna. Det är givet att denna metod är opraktisk; endast i få fall kommer man upp i någon högre hastighet. Ytterst få lärare torde ha en aning om hur många elever som — alltid eller ofta — använder sig av detta primitiva sätt att räkna additioner. Vid förf:s undersökning har av c:a 400 undersökta elever i realskolans högsta klasser minst 60 hört till denna typ! Troligen är antalet ännu större.

Den andra nivån kännetecknas av att additionen sker stegvis. Först adderas två siffror, sedan adderas resultatet med en tredje siffra, detta resultat med en fjärde osv. Uppgiften 3+7+5+6 löses alltså på följande sätt: tre och sju är tio — tio och fem är femton — femton och sex är tjugotre. I en del fall förklarar sig den undersökta personen se det mellanliggande resultatet liksom skrivet vid sidan om de andra siffrorna, andra uttalar det tyst, ett par elever skrev det faktiskt »för säkerhets skull» vid sidan om de andra siffrorna. Denna nivå omfattar säkerligen mera än hälften av alla elever. Den tillåter en högre hastighet vid räknandet än det förra, men är ej fullt tillfredsställande.

Den tredje nivån kännetecknas av serial-response, dvs. den räknande utför inga verkliga additioner i verklig mening. En addition av typen 4+3+7+9+5 (skriven som vanligt nedåt!) löses på följande sätt: fyra-sju-fjorton—tjugutre-tjuguåtta. De mellanliggande additionerna utföres alltså inte separat. Det är ofta svårt att avgöra om en person hör till nivå 2 eller nivå 3. I många fall har han ej klart för sig hur han egentligen räknar, särskilt om han hör till en visuell räknetyp. Bakom de båda nivåerna synes dock ligga i grunden skilda räknemetoder. Detta visar sig inte minst i den senare nivåens överlägsenhet när det gäller att räkna snabbt. Ungefär fjärdedelen av alla elever i realskolans högsta klasser synes höra till denna tredje nivå.

Den fjärde och högsta nivån kännetecknas av elevens förmåga att addera mera än två siffror åt gången. Detta är allmänt förekommande när det gäller additioner av typen: 1+2+1 o. dyl. Hos en del fp. kan denna förmåga utveckla sig till en förmåga att blott vid en blick avgöra om ett problem med 5 à 6 siffror är rätt löst. En elev som förf. undersökte kunde räkna 140 additioner med tre ensiffriga tal på tre minuter. Förutsättningen för detta är att han blott genom en blick på problemet fann lösningen. En dylik förmåga i något lägre grad visar sig hos de fp som låter blicken glida nedför additionsuppgiften och sedan, tillsynes utan att ha arbetat med uppgiften, har lösningen klar. Antalet elever som hör till denna nivå är rätt litet; högst någon procent av alla.

I tabell 5 visas ett urval av förf:s försökspersoner (de som prövats vid den sista undersökningen). Deras prestationer i test 23 och test 30 har ställts upp som funktion av deras räknenivå. Som synes är sambandet starkare för additionstestet än för multiplikationstestet. Dessa räknenivåer är definierade blott för additioner. Motsvarande har *ej* kunnat finnas för multiplikationer, även om en klar tendens är märkbar. Däremot påverkar de alltid multiplikationerna, eftersom additioner ingår som ett led i multiplikationen. Av tabellen framgår även att en hög räknenivå är en nödvändig men ej tillräcklig förutsättning för hög numerisk färdighet. Det finns som synes elever med hög nivå men låg additions- och multiplikationshastighet. Däremot finns det inga elever med låg nivå men hög numerisk färdighet!

Test 30

Antal additioner	Nivå 1.	Nivå 2.	Nivå 3.	Nivå 4.
55-			1	1
50-54			3	2
45-49			2	1
40-44			1	
35-39			3	
30-34		2	8	
25-29	2	13	16	
20-24	2	15	5	
15-19	7	5	13	
10-14	1	2		

Test 23

Nivå 1.	Nivå 2.	Nivå 3.	Nivå 4.	Antal multiplikationer
		2		36-
		1		33-35
		1		30-32
	2		1	27-29
	2	9	1	24-26
1	9	8	1	21-23
1	9	7	1	18-20
7	8	17		15-17
2	2	5		12-14
1	4	2		9-11

Tabell 5

Siffrorna i tabellen anger antalet fp. som tillhör en viss nivå och löst ett visst antal uppgifter

Man skulle kunna förmoda, att en elev skulle rätta sin räknenivå efter sin förmåga att räkna snabbt, och att alltså denna skulle bestämma över och förklara hans nivå. Så synes dock ej alltid vara fallet, även om det är tydligt att samtliga som tillhör nivå fyra äga hög numerisk färdighet, även frånsett nivån. I de fall då färdigheten inom additionerna är betydligt underlägsen färdigheten inom andra numeriska test, t. ex. multiplikationerna eller det högt tränade ABC-testet, har man anledning förmoda att en låg räknetyp spelar in. För att få ett verkligt bevis för att verkligen räknenivån spelar en bestämmande roll, har förf. tränat en del fp. med låg nivå (den första eller den andra) så att de flyttat upp på den tredje eller fjärde. Hittills har endast ett fåtal sådana försök gjorts, men de synes i mycket hög grad stöda antagandet: genomsnittligt får man en mycket högre numerisk förmåga, framför allt inom additionerna, men även inom multiplikationerna. Ett slumpmässigt urval av dessa försök åskådliggöres i diagram 4.

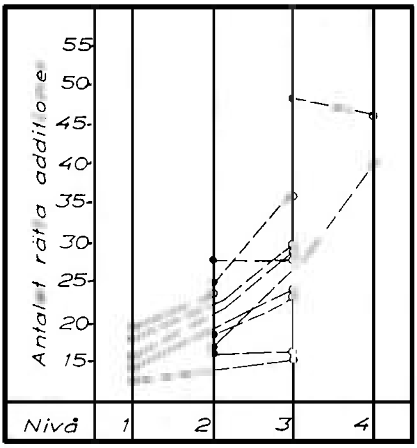


Diagram 4

Andringen i additionsförmåga (test 30) med förändring i räknenivån.

• = begynnelsevärde

o = slutvärde

Problemet med räknenivåns inverkan är mycket vanskligt att utreda. Man måste nämligen helt lita på elevens egen instrospektiva redogörelse, vilken ofta är oklar och tvetydig. Resultaten hittills är emellertid otvetydiga. Det är emellertid viktigt att problemet redes ut, då det har väsentliga pedagogiska aspekter. Det synes vara möjligt att verkligen lära eleverna att räkna på en hög nivå, den tredje eller i många fall den fjärde. Det är förf. bekant att många lärare systematiskt tränar sina elever att räkna snabbt numeriskt, och förf. skulle vara mycket intresserad av ett utbyte av erfarenheter.

MATEMATIK I SPRÅKUNDERVISNINGEN!

Den sällsamma historien om Bengt,

berättad av Adjunkt W. Göransson

Det händer väl varje läsare då och då, att han tycker sig ha gjort sitt allra yttersta för att förklara ett problem för en klass eller en enskild elev men misslyckats. Han har vridit och vänt på saken, belyst den ur olika synpunkter och använt alla de tjuvknep han med tiden lärt sig och ändå inte fått Andersson eller Pettersson eller Lundström att förstå.

Vad skall man då egentligen ta sig till?

Ja, vad var det hästen gjorde, som jagades av en vildsint tjur?

Han klättrade helt enkelt upp i ett träd och satte sig.

»Men inte kan hästar klättra i träd?»

»Nej, men vad skulle den stackarn göra?»

Jag fick en gång i tiden som privatelev en gosse vid namn Bengt. Denne gosse hade en ytterst ambitiös och dessutom välbärgad fader, och det var inte tal om annat än att Bengt skulle ta åtminstone realexamen. När han i elva år tillvuxit i ålder och visdom, sattes han också i realskolan. Där visade han emellertid huvudsakligen anlag för att tillväxa i ålder, och redan efter ett år ståtade han med C i tyska. Uppdraget att till varje pris läsa upp honom var alltså inte direkt lockande, men det visade sig lärorikt.

Till en början gick allt bra. Bengt var från hemmet van vid kadaverdisciplin, och att få honom att lyda var inte svårt. Och det räckte ganska långt på den tiden, när man skrev med lexika och grammatik. Vad som brast i fråga om språköra, kunde ofta kompenseras av manuell färdighet och noggrannhet. Dessutom var Bengt inte alldeles omöjlig i matematik och teckning.

Bengt fick alltså ett schema att slaviskt följa, och detta schema byggdes ut undan för undan:

A. Sätt i varje sats in ordet *icke.*

B. Om detta *icke* kommer till vänster om första verbet, drar du en cirkel kring detta verb. Sedan drar du från valfri punkt på denna cirkels periferi en rät linje åt höger, varefter du med en pil markerar, att det inringade verbet skall stå sist.

C. Finnes ytterligare ett verb i satsen, drar du en cirkel även kring detta och markerar med en ny rät linje och en ny pil, att detta verb skall stå näst sist.
Obs! De sålunda dragna räta linjerna få icke skära varandra!

Bengt var en ordningsmänniska av stora mått, och han medförde till varje tysk lektion passare och linjal. »Pilen» liknade mest ett välskapt rottecken.

Så småningom infördes nya matematiska tecken. Sådana kufiska ord som infinitiv, imperfekt och supinum ersattes med arabisk etta, tvåa och trea, positiv, komparativ och superlativ med romersk etta, tvåa och trea etc.

Och det hela gick bra, såtillvida att Bengt flyttade från klass till klass utan underbetyg i tyska.

Men så kom den dag, då det inte längre räckte med att lyda och vara noggrann, och det var när Bengt skulle lära sig konjunktivens bruk. Jag förklarade för honom, att nu fanns det inte fler geometriska figurer att tillgripa; nu måste han börja tänka.

Resultatet blev nedslående. Grammatiken sade ju, att det overkliga uttryckes med konjunktiv. Satsen »Jag är inte hungrig» måste alltså heta »Ich sei nicht hungrig», för om jag inte är hungerig, så måtte väl hungern vara overklig, menade Bengt. Alla nekade satser satte han alltså i konjunktiv, och det räckte följaktligen med fem à sex negationer i en stil för att Bengt skulle vara såld.

Det blev nya bittra tårar för Bengt och nya gråa hår för mig, tills vi slutligen kunde utropa vårt heureka!

Formeln var funnen och den löd:

$$M = F \cdot I,$$

där M = modus, F = formen och I = innehållet.

För formelns rätta tillämpning måste Bengt också veta, att indikativ = plus, konjunktiv = minus. Att lika tecken ger plus medan olika tecken ge minus, visste han reda från matematiken.

Låt oss ta några exempel:

	F	I	M
Magistern har tandvärk	+	+	+
Magistern har inte tandvärk	—	—	+
Ack om magistern hade tandvärk (vilket han tydligen inte har)	+	—	—
Ack om magistern inte hade tandvärk (vilket han tydligen har)	—	+	—

Så småningom klarade Bengt med tillhjälp av denna formel riktigt svåra fall:

Om jag hade tid, reste jag bort i morgon.	Form?	+ i båda satserna, eftersom negation saknas.
	Innehåll:	Reser han bort? Nej. (I = —) Varför inte? Han har inte tid. (I = —) M = — i båda satserna.
Om jag hade tid, brukade jag resa bort på lördagarna i somras.	Form?	+ i båda satserna.
	Innehåll:	Reste han bort? Ja. (I = +) När då? När han hade tid. (I = +) M = + i båda satserna.

Så kom slutligen det stora ögonblick, då Bengt skulle skriva i realexamen. Några minuter efter klockan 12 ringde det på dörren. Utanför stod Bengt med lexika, grammatik, passare, linjal och gradskiva. Han var svettdrypande, utmattad. Ingen hade haft en sån dag som han. Det tar nämligen tid att först skriva om hela texten på millimeterrutat papper av sådant format, att alla geometriska figurer få plats. Och det tar tid att en hel stil igenom i sats efter sats multiplicera form och innehåll. Men Bengt hade med uppbjudande av hela sin energi lyckats genomföra den bravaden, och den tyska översättning som jag nu mellan cirklar, rottecken, plus och minus lyckades leta fram på hans solkiga kladdpapper var mer än godkänd. Det blev t.o.m. ett gott Ba.

Bengt var naturligtvis överlycklig. En enda liten droppe malört fanns dock i glädjebägaren:

»Nog är det väl hårt, att det inte blev en enda minusprodukt i hela stilen!»

Det var Bengts benämning på konjunktiven.

Detta hände i maj 1942. Troligen var det sista gången Bengt ägnade en tanke åt tyska språket.

ATT LÄRA ELLER DRILLA

Av Seminarielärare Elof Åhlin, Luleå

Ett problem bland många andra i matematikundervisningen, som förefaller mig naturligt att ta upp till diskussion, är frågan angående den »mekaniska» sidan av den tillämpade räkningen (lösning av problemuppgifter). Ofta har det varit så, att dessa slag av uppgifter inte så mycket givit anledning till ett problemlösande som mera ett mekaniskt inplacerande av tal i en på förhand inlärd formel.

Jag skall här nöja mig med några exempel för att därmed belysa, vad jag avser. Det är lite svårt att förstå, varför man nödvändigt skall behöva frångå metoden att räkna ut ytan på t. ex. en rektangel ($5 \cdot 4$ cm² $= 20$ cm²) och låta eleverna inlära formeln $l \cdot b = Y$. Har man kommit så långt, att dessa *förstår* det förra, bör det vara naturligt att också låta dem beräkna ytorna på samma sätt åtminstone i folkskolan. Likaså har jag svårt att förstå, varför man, när eleverna kommit fram till att pelarens, kubens och cylinderns volym beräknas på samma sätt, nämligen höjden gånger bottenlagret ($6 \cdot 12$ cm² $= 72$ cm³), på redan tidigt stadium skall införa den tredimensionella formeln, (t. ex. för pelaren 2 cm · 3 cm · 12 cm = 72 cm³.)

Att pyramidens eller konens rymd är tredjedelen av pelarens resp. cylinderns volym, lär sig eleverna på egen iaktagelse, varför de lämpligen bör fortsätta att beräkna rymden på basis av den kunskapen. När man på samma sätt kommer fram till att halvklotets volym är tredjedelen av volymen på cylindern med samma diameter och höjd som klotets diameter och därav följer, att volymen på *hela* klotet är dubbelt så stor, bör likaså klotets volym enklast beräknas enligt den vunna erfarenheten. Det förefaller onödigt att krångla till saken genom att föra fram barnen till den i och för sig logiskt riktiga formeln $\frac{4 \pi r^3}{3}$. Även om eleverna bringas att förstå, hur vi kommit fram till den formeln, har denna »rationalisering» enbart till följd, att man medverkar till att sudda ut minnesbilden av sambandet mellan volymerna hos de olika kropparna och förhållandet dem emellan.

Dessa exempel ur geometrin kan sedan kompletteras med andra ur matematikundervisningen i övrigt.

Beträffande ränteräkningen var det förr självklart, att eleverna fick lära sig formeln

$$r = \frac{k\,p\,t}{100}$$

Det är en bekväm väg att på det sättet lära eleverna en slags »plocka-in-matetik». Krångligare ränteuppgifter behöver man inte ta med i folkskolans matematikundervisning, att inte eleverna mycket väl kan få fortsätta sin ränteberäkning direkt på basis av deras kunskaper om procentbegreppet.

Ofta får man det intrycket, att endast en väg leder till Rom. Det är helt viss naturligt, att man på det elementäraste stadiet inte kan och inte heller bör komma med varierande sätt att lösa ett och samma problem. Men någonstans bör den frågan föras in. I konsekvens med min grundtanke, att eleverna bör förstå, vad de håller på med, bör de vänjas att söka sig fram på olika vägar. För att belysa tankegången, ett exempel i anslutning till ränteräkning. Uppgiften är följande: Kapitalet 300 kr ger under ett år 15 kr i ränta. Hur stor är räntan i procent? Vi kan utgå från 15 kr på 300 kr och fråga oss, hur många kronor det blir på 100 kr, d. v. s. vi löser uppgiften med reguladetri. Vi kan också säga, att ränteprocenten är förhållandet 15:300 ($\frac{15}{300} = 0{,}05 = 5\ \%$). För det tredje kan vi lösa uppgiften som ekvation. Att man sedan överlåter åt eleverna själva att avgöra, hur de vill lösa uppgifterna i sitt eget arbete, bör vara lämpligt.

Många andra sidor av det här kortfattat behandlade ämnet kan kanske utgöra utgångspunkten för en fortsättning av en nog så intressant diskussion kring det problem, som jag endast fragmentariskt berört, nämligen om matematikundervisningens »förståndsmässiga» behandling contra ett mera mekaniskt behandlingssätt. Visserligen kan man med formler och drill nå bättre resultat i en klass, om man med bättre menar, att flertalet i klassen mer eller mindre hjälpligt klarar kursen.

Värdet av en sådan undervisning kan emellertid allvarligt ifrågasättas. Det är nämligen inte endast de obegåvade räknekarlarna, som mycket snart efter avslutad skolgång glömt det mesta av de mekaniskt inlärda formlerna.

Det bör nog inte vara så mycket att sörja över om det i en skolklass inte är möjligt att få *alla* att *förstå*. Tvärtom är frågan den, om inte den »förståndsmässiga» metoden bl. a. till slut har det goda med sig, att den för över till en mera differentierad undervisning (så långt nu de stora klasserna tillåter), där eleverna får nå så långt, som deras begåvningsutrustning tillåter. Mycket vore sannerligen vunnet, om vi lärare tvingades att pruta på ambitionen, att alla i klassen skall klara lika mycket.

HUR MÅNGA DECIMALER, MAGISTERN?

I läroböcker läses: »Beräkna med två decimaler». Läraren säger: »Resultatet skall anges med två decimaler». Eleverna frågar: »Hur många decimaler, magistern?»

Vore det inte lämpligt att utmönstra detta uttryckssätt och i stället angiva antalet siffror? Ett antal elever får i uppgift att mäta längden av en bordskiva. De får resultaten 1234 mm, 123,4 cm, 12,34 dm resp. 1,234 m. En skämtare svarar kanske t. o. m. 0,001234 km. Antalet decimaler varierar högst betydligt, men antalet siffror är i alla fallen fyra.

Vad jag syftar till med dessa rader är emellertid, att man på ett tidigt stadium bör vänja eleverna vid begreppet absolut och relativt fel och att det är det relativa felets storlek, som är det avgörande. Samma elever som mätte bordet och fann 1,234 m., mäter en annan gång avståndet mellan två punkter ute i samhället och finner 1234 m. De absoluta felen kan ju skilja sig högst väsentligt, men de relativa är de samma.

Under fysiklaborationerna kommer man ständigt in på detta krav. En laborationsgrupp, som bestämmer den Joulska konstanten till 0,21 tycker, att den fått ett utmärkt resultat, den som finner, att vattnets ångbildningsvärme är 560, beklagar att den gjort något fel, fastän rollerna borde varit omkastade. Av elever med realexamen träffar man sällan någon, som har känsla för att det är felets storlek i förhållande till mätresultatet som är avgörande och »antalet decimaler» är så ingrott i medvetandet, att det är ytterst svårt att utrota.

I folkskolans högre klasser borde det inte vara omöjligt att med ett antal exempel få eleverna att begripa, vilket fel som spelar den stora rollen och från första början kan man låta bli att använda uttrycket »antalet decimaler».

Hjalmar Trane

Lektor vid folkskoleseminariet
i Jönköping

SORTERNA SOM "VÄRDEENHETER",

ett apropå till överlärare Staffan Åbergs artikel

Av civilekonom Elisabeth Larberg, Karlstad

I nummer 3 av Tidskrift för Skolmatematik introducerar överlärare Åberg en metod för »kostnadsberäkningar», där man med utgångspunkt från en och samma formel kan lösa samtliga uppgifter inom området. Även svarets sort kan direkt erhållas ur uträkningen.

Vid handelsgymnasier och handelsskolor tillämpas en räknemetod, som kallas för kedjeräkning och närmast skulle kunna beskrivas som en utvidgad reguladetri. Metoden syftar till snabbhet, korrekthet och effektivitet och kan bäst illustreras med exempel:

Ett tyg kostar i England 2/4 (28 d) per *yard*. Vilket pris i *sv. kr.* per *meter* motsvarar denna notering?
11 m = 12 yards. 1 £ (240 d) = 14,50 sv. kr.

Man kan naturligtvis med utgångspunkt från reguladetrin få fram ekvation:

$$x = \frac{14{,}5 \cdot 28 \cdot 12}{240 \cdot 11}$$

men eftersom det är besvärligt att hålla fast vid det logiska resonemanget redan när man har med tre inbördes relaterade storheter att göra, är det snart sagt omöjligt här. Som hjälpmedel användes därför en kedjeuppställning, som i exemplet får 4 led, eftersom det finns 4 sorter eller värdeenheter.

$$\begin{aligned}
x \text{ kr} &= 1 \text{ m} \\
11 \text{ m} &= 12 \text{ yds} \\
1 \text{ yd} &= 28 \text{ d} \\
240 \text{ d} &= 14{,}5 \text{ kr}
\end{aligned}$$

Läs: × kr är utbytbart mot 1 meter eller × kr motsvarar 1 m o. s. v. Kedjan skall vara »sammanhängande» och »sluten», d.v.s. sorterna skall hela vägen gripa in i varandra, och samma sort skall börja och sluta kedjan. Sedan man multiplicerat samtliga vänsterled resp. högerled med varandra, får man en ekvation, där värdeenheterna kan förkortas bort.

$$x \text{ kr} \cdot 11 \text{ m} \cdot 1 \text{ yd} \cdot 240 \text{ d} = 1 \text{ m} \cdot 12 \text{ yds} \cdot 28 \text{ d} \cdot 14{,}5 \text{ kr}$$

$$\text{och} \qquad x \text{ kr} = \frac{1 \text{ m} \cdot 12 \text{ yds} \cdot 28 \text{ d} \cdot 14{,}5 \text{ kr}}{11 \text{ m} \cdot 1 \text{ yd} \cdot 240 \text{ d}}$$

Började man kedjan med x i stället för x kr, i enlighet med överlärare Åbergs metod, finge man även svarets *sort* direkt ur ekvationen. Nu bygger regeln om kedjans slutenhet just på att man sätter ut sorten, varför man i så fall skulle gå miste om en kontrollmöjlighet. Sorterna används alltså endast som ett hjälpmedel för att få en riktig uppställning.

Slutligen en begreppsfråga:

Begreppet kostnad kanske i allmänna språkbruket understundom är liktydigt med »vad *det hela* kostar», vilket stöder överlärare Åbergs terminologi. Lika ofta syftar emellertid frågan »Vad kostar det?» på priset. I handel och industri betyder kostnad i detta sammanhang de totala uppoffringarna *per enhet*, och när man talar om kostnadsberäkningar avser man just att fastställa kostnaden per enhet av den sålda eller tillverkade varan. Konsumenten menar detsamma då hon frågar vad det kostar. Hennes kostnad = säljarens pris. Termen *utgift* (och inkomst där det ses ur säljarens synpunkt) vore enligt min mening riktigare och skulle före bygga missförstånd.

—★—

VILKET ÄR SVÅRAST 14—8 ELLER 13—7?

Av Lektor Anders Larson, Härnösand.

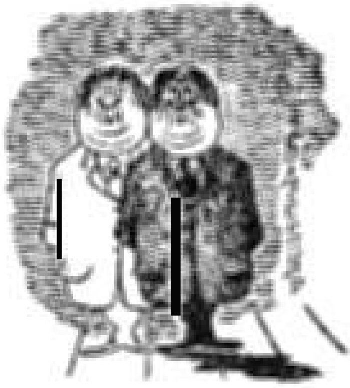
I samband med metodikundervisningen i matematik vid folkskoleseminariet i Härnösand vårterminen 1954 sammanställdes ett subtraktionsprov omfattande 36 uppgifter med tvåsiffriga minuender och subtrahender. Uppgifterna var så konstruerade, att subtraktionerna i entalsraderna blev exempel på de 36 subtraktionsuppgifterna i »subtraktionstabell 11» t. o. m. »subtraktionstabell 18». Provet förelades allt som allt 705 elever i folkskoleklasserna 3—8 vid skolor i Härnösand med omnejd och kunde genomföras tack vare välvillig medverkan av vederbörande lärare.

Resultatet framgår av följande diagram, som anger antalet begångna fel vid de olika subtraktionskombinationerna. Lägsta antal fel (8) erhölls således för 13—4, den svåraste kombinationen (30 fel) visade sig vara 14—8.

	—2	—3	—4	—5	—6	—7	—8	—9
11	10	20	20	9	19	18	12	14
12		15	15	12	13	13	15	13
13			8	10	21	23	14	23
14				17	11	16	30	21
15					14	17	13	18
16						18	14	17
17							13	19
18								27

Totala antalet fel enligt denna tabell utgör 582. Något överraskande var att finna, att antalet fel begångna i 10-talskolumnerna var 654, då här endast förekom subtraktioner inom talområdet 1 t. o. m. 8. Orsaken torde väl få sökas i svårigheter i samband med »lånemarkeringen» (praktiskt taget alla elever har använt den s. k. lånemetoden).

Av detta prov att döma bör man tydligen vid undervisningen i subtraktionsteknik lägga väl så stor vikt vid själva utläsandet av siffran, från vilken »lån» verkställts, som vid inlärandet av de i tabellen angivna subtraktionerna. Det torde vara uteslutet att få söka den höga felfrekvensen i 10-talskolumnerna i svårigheter med subtraktioner inom talområdet 1 t. o. m. 8.



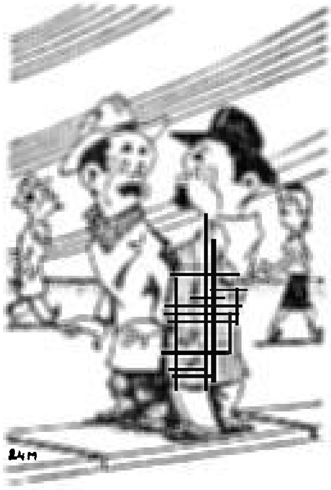
Snart har man inte råd att leva ett dubbelliv — så dyrt som allting blir.

Inflationen genom tiderna

Våra äldre räkneläror — från de allra första från början av 1600-talet fram till räknelärorna under 1800-talet — skiljer sig markant från våra dagars framförallt därigenom, att de innehåller ett mycket litet antal räkneexempel. De är mera s.a.s. metodik-böcker. Räkneexemplen får eleven själv skapa och i gengäld läres ut en mängd regler för kontroll av svaren. Under 1900-talet har räknelärorna i stället i vissa fall urartat till enbart exempelsamlingar. En omsvängning kan här emellertid skönjas i våra dagar. Bl. a. har från läroboksnämnden klart uttalats önskemålet, att våra räkneläror i större utsträckning borde innehålla metodiska anvisningar.

De äldre läroböckerna innehåller i stället för en mängd sifferexempel utförliga anvisningar, förklaringar och upplysningar. Som exempel härpå kunna vi studera kapitlet *Mynt* ur en räknelära från mitten av 1800-talet.

Skämtteckningarna i början av denna artikel får illustrera dagens kända läge på inflationsfronten. Den gamla läroboken får trösta oss med att penningvärdets ständiga försämring tydligen är en företeelse, som drabbat även våra förfäder ända sedan Olof Skötkonungs tid.



Det har blivit så dyrt att leva, att man knappt vet, om det lönar sej!

»I äldsta kända tider fanns intet pregladt mynt, utan handeln skedde genom varubyte, och såsom mellangift, äfvensom stundom till betalning, nyttjades släta stycken af silfver eller guld, antingen i form af ringar, eller tenar, af hvilka afhöggs så stort stycke, som ansågs i värde motsvara det öfverenskomna priset. Det äldsta svenska mynt, som omtalas, skall vara pregladt under Olof Skötkonungs och hans son Anund Jakobs regeringar; men uppgifterna härom äro icke fullt tillförlitliga. Det äldsta svenska myntnamn, som man med säkerhet känner, är *Mark*, hvars benämning uppkommit deraf, att ett sådant mynt i metall innehöll en lödig mark* silver. Detta fortfor likväl icke länge, och fastän namnet bi-

* En lödig mark silfer = ½ skålpund. En skålpund = 425 g.

behölls, *förändrades med tiden värdet.* Följande visar huru många mark penningar som motsvarade en mark silfver under vissa år och regeringar:

År 1000, Olof Skötkonung	1	År 1520, Christian II . .	12	År 1664, Carl XI	53½
» 1140, Sverker	1½	» 1521 Gustaf I	51½	» 1675, Densamme . .	76½
» 1260, Waldemar . . .	2	» 1527, Densamme . .	24	» 1715, Carl XII . . .	96
» 1282, Magnus Ladulås	3	» 1537, Densamme . .	25½	» 1752, Adolf Fredrik .	98½
» 1350, Magnus Smek. .	4½	» 1542, Densamme . .	35	» 1764, Densamme . .	256
» 1404, Erik XIII . . .	6	» 1585, Johan III . . .	128	» 1777, Gustaf III . . .	192
» 1450, Carl VIII . . .	8	» 1593, Sigismund . . .	32	» 1800, Gustaf IV Adolf	288
» 1480, Sten Sture d. ä. .	11½	» 1625, Gustaf II Adolf .	48	» Carl Johan	524½

Från början skulle hvarje mynt innehålla sitt fulla värde i metall; att detta icke fortfor synes af hvad ofvanföre är anfördt om mark, och att samma förhållande var med andra mynt blir tydligt t. ex. af närstående uppgifter.

1625	vägde	en	6	dalers	plåt	16	skålpund
1634	»	»	»	»	»	12	»
1661	»	»	»	»	»	10	»
1675	»	»	»	»	»	8	»
1710	»	»	»	»	»	6	»
1715	»	»	»	»	»	4	»

Emellertid emottogs hvarje myntförsämring *med ovilja af allmänheten,* och det nödmynt, som under Carl XII:s tid af brist på metall utkom, måste med maktspråk göras gällande.

År 1719, kort efter baron Görtz' afrättande, utkom en förordning om dessa myntteckens nedsättande från 1 daler silfvermynt till 1 öre kopparmynt, till otaliga medborgares stora förlust.

Obeqvämligheten af sådant mynt, der t. ex. vid en marknadsresa ett särskilt lass var nödvändigt för att kunna medföra behöfliga penningar, blef likväl slutligen erkänd, och år 1661 började första gången pappersmynt utgifvas. Under loppet af fyra år utgafs emellertid så mycket sådant mynt, att det vida öfversteg i banken befintliga metallvärdet, och då det således ej kunde inlösas, försvann dess kredit, och dess utgifvande måste upphöra. Detta blef sedan åtskilliga gånger förhållandet.

En betydlig statsskuld, som genom krig och andra omständigheter blifvit riket åsamkat, skulle godtgöras, och för detta ändamål inrättades år 1789 *Riksgäldskontoret,* som häraf fick sitt namn, jemte rättighet att äfven utgifva sedelmynt. — — — Vid 1800 års riksdag beslöts att Riksgäldskontorets sedlar skulle inlösas av banken, mot en rabatt af 33¼ procent, alltså med tvåtredjedelar af deras värde. — — — Från och med 1777 till 1809 förblefvo bankens sedlar i nästan orubbadt värde; men därefter förändrades, af åtskilliga orsaker, förhållandet så, att dessa sedlar nedföllo till mindre än hälften av nominalvärdet, och en mångårig brydsamhet uppstod för myntets reglering.»