Andra årgången

av Tidskrift för Skolmatematik startar i och med detta nummer. Tidskrift för Skolmatematik är ett nytt pedagogiskt initiativ, som allt mer uppskattas, och den når nu lärare från vårt skolväsendes alla kategorier: småskollärare, folkskollärare, läroverkslärare, seminarister, seminarielärare o. a. Härigenom ställes stora krav på tidskriften, som får till uppgift att tillfredsställa de skiftande intressena från olika lärarhåll och olika skolstadier. Självklart kan denna svåra uppgift inte lösas utan en intim samverkan med läsekretsen. Därför finnes nu anledning att ånyo understryka de krav tidskriften ställer på sina läsare — i synnerhet som detta läsår en mängd nya vänner till TfS slutit upp.

Tidskrift för Skolmatematik har för avsikt att behandla räknemetodiska spörsmål inom enhetsskolans och realskolans område. TfS söker därför ständigt kontakt med representanter för de olika lärarkategorierna. Betrakta inte tidskriften som ett dukat bord, vars gåvor man kräset kritiserar, utan snarare som ett bord, Du själv skall hjälpa till att duka! Eller för att fortsätta liknelserna: betrakta Dig själv som en välkommen gäst till en bjudning! Som bekant beror det minst lika mycket på gästerna som på värden, om festen blir lyckad!

Var och en bör dra sitt strå till den räknemetodiska stacken. TfS blir vad Du gör den till! Var och en bör kunna bidraga med sådana saker som t. ex. en rolig räknehistoria eller ett enkelt, praktiskt tips för någon detalj i ett kursmoment. Skicka in till TfS Dina räknemetodiska funderingar! Bara att skriva till redaktionen och framställa önskemål om tidskriftens innehåll är ett värdefullt bidrag.

Vi lärare talar så mycket om aktivitetspedagogik, vi strävar att sätta våra elever i självständigt, aktivt arbete. Här har vi i TfS:s forum ett strålande tillfälle att själva föregå med gott exempel genom att aktivt delta i diskussionerna och generöst ge ut av vår erfarenhet!

TfS är det enda forum, där alla vår skolas många olika lärarkategorier mötas. Vi har säkert alla nytta av att lyssna på varandra och att studera de olika stadiernas problem — det ger oss överblick och fördjupning. Ingen falsk blygsamhet bör därför hindra oss från att oprententiöst ge ut av våra erfarenheter och funderingar. Ju mer Du ger TfS, ju mer har TfS att ge! Låt oss skapa ett teamwork, som låter TfS utvecklas mer och mer till ett gemensamt, innehållsrikt och omväxlande forum!

Red.

NÅGRA TERMINOLOGISKA OCH RÄKNEMETODISKA REFLEKTIONER

Av Rektor B. Wahlström

I nr 1 av TfS har lektor Ferner till diskussion upptagit ett av de mest omstridda problemen vid den elementära räkneundervisningen, *division*, och i en senare artikel även framlagt ett förslag till metodisk behandling. Att den under senare tid framkomna metodiken, i vilken subtraktion även inblandats, behöver diskuteras och revideras, därom vittnar den påtagliga förvirring, som råder i frågan. Redan från början vill jag deklarera, att jag helt ansluter mig till F:s åsikt, att division, *även beträffande tankegången vid problemlösning*, är så intimt sammanknuten med multiplikation, att det tycks mig oriktigt att inte redan på ett rätt tidigt stadium vänja barnen vid att — populärt uttryckt — division är »omvänd multiplikation» och att senare slå fast, att division är en fråga om att finna den ena faktorn i en produkt av två faktorer, då man känner produkten och den andra faktorn. Därmed har jag också deklararat min uppfattning, att antalet konventionella *räknesätt* bör vara fyra, inte fem. Med räknesätt avser jag därvid de *tekniska uppställningarna* och *uträkningsförfarandena.*

Ehuru givetvis inövandet av dessa tekniska tillvägagångssätt tar sin rundliga tid, en tid som *måste* vara rundligt tillmätt för att bibringa barnen den säkerhet och snabbhet, som nu tyvärr ofta saknas, torde dock de största svårigheterna möta, då det gäller att *få barnen att inse vilket av de fyra tekniska räknesätten som vid en problemlösning skall komma till användning.* Relativt lätt går detta vid problem, som för till addition, subtraktion och multiplikation, varvid jag tillsvidare avser lösning av problem, där mätetalen är hela tal. Erfarenheten säger däremot, dels att det är svårare för barnen att bestämma räknesättet, då det gäller problem, som kräver ett divisionsförfarande, dels att svårigheter än mer uppstår vid val av räknesätt, då det gäller såväl multiplikation som division, om mätetalen är bråktal (allm. bråk och decimalbråk) och speciellt om mätetalen är mindre än 1 (egentliga bråk). Bl. a. med tanke på det senare anser jag mig ha funnit, att avgörandet beträffande val av framför allt (det tekniska) räknesättet division väsentligt underlättas, om sambandet mellan multiplikation och division tidigt nog inpräntas. (Att man här även har stor nytta av träning i »dimensionsbedömning» enligt S.Ö:s metodiska anvisningar för läroverken, en fråga som berörs i Överlärare Åbergs artikel i häfte nr 3 av TfS, är en annan sak.)

Innan jag går vidare vill jag förutskicka att jag helt naturligt förutsätter, att barnen på lågstadiet genom åskådning och eget arbete med föremål bringats att förstå vad de gör, då de företar en delning, antingen en »innehållsdelning» eller en »likadelning». Att t. ex. den förra delningen *kan* byggas på en upprepad subtraktion är sant och starkt motiverat. Men sedan bör det väl vara nog! Att bibehålla denna tankegång, då det gäller uppgifter där divisorn är ett bråktal, synes mig absurt och orealistiskt. Det för till resonemang, som ungdomar och vuxna inte bör använda längre fram och ute i livet.

Jag förutsätter även att multiplikationstabellen är väl inövad (hur långt beror på stadiet). Att övergå till division utan denna förutsättning syns mig olyckligt. I korthet således: Man bör snart nog söka komma ifrån de två skilda »divisionstankegångarna», sammanföra dem till en enda, och detta genom anknytning till multiplikation. Jag återkommer nedan med belysande exempel.

Dessförinnan vill jag emellertid anföra ett (flera finns) starkt vägande skäl för denna min åsikt. — Barnen har på låg och mellan-stadierna lärt sig inse, när de i ett problem skall använda divisionsförfarande, såväl då det gäller innehålls- som delningsdivision (hemskt ord!). Sedan — eller parallellt — har de också med hjälp av multiplikationstabellen lärt sig det tekniska divisionsförfarandet med rena siffertal. Och det är härvid som såväl läroböcker som lärare tanklöst — förlåt uttrycket — ofta använder en terminologi, uttryckssätt, som hänför sig till såväl innehålls- som delningsdivision. Den som under en mångfald av år tagit emot en klass 1^5 eller 1^4, där barn kommer från en mängd olika skolor och lärare, har funnit en rik flora av »uttrycksblomster», vilka bl. a. orsakat att mycken dyrbar tid gått förlorad, innan man får barnen att förstå varandra och »den nya magistern».

Hur sägs det t. ex. vid uträkning av divisionsuppställningen 28:7?

I. 28 *delat med* 7 (är 4). II. 28 *delat i* 7. Här underförstås »delat i 7 lika delar», men tyvärr används detta förkortade och förvirrande uttryckssätt ofta. III. 28 *dividerat med* 7. IV. 7 *dividerat i* 28. V. Ja, t.o.m. 28 *dividerat i* 7. VI. 7 *går i* 28 (4 ggr.) VII. 7 *innehålles i* 28 osv.

Här skiljer man *inte* på innehålls- och delningsdivision, även om det problem, som fört till uppställningen, borde ge den ena eller andra av de två tankegångarna, som man så ivrigt skilt på!

Ex. 1. »28 kulor skall delas i högar, som vardera innehåller 7 kulor. Hur många högar blir det?» *Uppställning:* 28 kulor : 7 kulor = 7 gånger. *Tankegång:* Hur många gånger innehålles 7 kulor i 28 kulor?

Ex. 2. »28 kulor skall delas i 7 högar med lika många i varje hög. Hur många blir det i varje hög?» *Uppställning:* 28 kulor : 7 = 4 kulor. Men vid *uträkningen* låter det oftast även här: Hur många gånger går (innehålles) 7 i 28, fastän det här var fråga om en lika-delning.

Jag vill härmed ha sagt, att det i praktiken är ogörligt att, då det gäller det tekniska utförandet, skilja på s. k. innehålls- och delningsdivision, framför allt då det gäller räkning med större tal och med bråktal. Det naturligaste — och barn tänker enligt min erfarenhet så — av de nämnda uttryckssätten torde väl vara »7 går i 28 4 gånger» — om man nu inte vill använda det korrekta: »24 dividerat med 7 är 4 (ty 4 gånger 7 är 28)»; ty då frågar sig barnen: »Hur många gånger skall jag ta, dvs. varmed skall jag multiplicera 7, för att få 28?» Detta är en direkt multiplikationstankegång — och bör så vara! (Varför då inte lika gärna använda det korrekta uttryckssättet?)

Det korrekta uttrycksättet vid uppställningen 28 : 7 eller $\frac{28}{7}$ eller $28 \underline{|7}$ är således 28 *dividerat* med 7, och det kan kanske inte vara ur vägen med en erinran om att undervisningsplanen för folkskolorna (U 55) i kap. matematik, mom. 18, s. 129, uttryckligen framhåller, *dels* att »det är av vikt, att en fast terminologi med tiden utbildats», *dels* »att de svenska uttrycken (lägga samman, minska, dela mellan osv.) bör *relativt tidigt* ersättas av mera allmänt använda matematiska termer (addera, subtrahera, multiplicera, dividera osv.).»

Det är f. ö. ganska egendomligt, att man i en del räkneläror finner *rubrikerna* addition, subtraktion, multiplikation, division, men att man ofta i utredande text och uppgifter förgäves får leta efter orden addera, subtrahera och dividera; multiplicera används däremot. Vissa böcker har t. ex. division som rubrik och använder orden *dividend* och *divisor*. Men i förklarande text och uppgifter undviks verbet dividera (med) och substantivet division. Man använder dela med (dela i), ofta utan poängtering av att det gäller »likadelning»; och division ersätts som sagt med delning, även om det är fråga om »innehållsdivision». Jag återkommer härtill nedan.

Jag återgår så till kärnpunkten i lektor Ferners artiklar. Skall man ha två eller ett »divisionsräknesätt»? I första klassen i läroverk (största svårigheten möter ej sällan i klass 1[4], där de två »divisionstankegångarna» är väl intränade, ofta in absurdum, således också då det gäller bråkräkning) har jag, sedan jag undersökt barnens rikt varierande sätt att uttrycka sig, sökt länka in dem på den enligt min mening riktiga tankegången med exempel av följande art.

I. *Huvudräkning.* Modell: »28 dividerat med 7 är 4, ty 4 gånger 7 är 28.» (Även: ty 7 multiplicerat med 4, eller 4 multiplicerat med 7, och: ty produkten av 7 och 4 (4 och 7) är 28.) Barnen får själva säga *hela meningen* i under ganska lång tid givna exempel.

II. *Problemställningar*, samtidigt givna av följande modell (enkla tal).

1. Du har 7 högar med 4 kulor i varje hög. Hur många kulor har du då?

2. Du har 28 kulor, som du skall dela upp i högar, så att det blir 7 kulor i varje hög. a) Är det *möjligt* att göra det, och *varför* är det möjligt? b) Hur många högar blir det då?

3. Du har 28 kulor, som du skall dela upp i 7 högar, så att det blir lika många kulor i varje hög. a) Är det *möjligt* att göra det, och *varför* är det möjligt? b) Hur många kulor blir det då i varje hög?

4. Är det *möjligt* att dela upp 29 (30 ... 35, 27 ... 21; se även inspektör Haages artikel i nr 3 av TfS) kulor på de sätt, som du gjorde i uppg. 2 och 3? Om du inte lyckas skall du förklara *varför* det inte var möjligt.

Uppg. 1 är för de följande ett stöd som rätt fort kan undvaras, men som i början är bra. Genom »ledfrågorna» i uppg. 2, 3 och 4 inriktas barnen på att *undersöka möjliheterna genom användning av den inlärda multiplikationstabellen.*

Jag anser mig ha funnit, att man på bl.a. detta sätt leder barnen in på en tankegång, vilken de som sagt, då det gäller division vid andra tal än heltal, bör följa och som de följer vid det tekniska divisionsförfarandet vid heltal. Barnen får således *teckna* en uppdelning enligt i uppg. 2, 3 och 4 nämnda slag genom att skriva 28:7 osv., men man bör hålla fast vid tanken, att *denna* uppställning innebär en fråga: Varmed skall jag multiplicera osv.

III. *Huvudräkning och skriftlig räkning.* Orden produkt och faktor inlärda. Uppgifter av modellen: Produkten av två faktorer (tal) är 28. Den ena faktorn (det ena talet) är 7. *Hur* skall du finna den (det) andra? — Liknande övningar är lämpliga även då det gäller *sättet* att beräkna ett av talen i en känd summa (skillnad) av (mellan) två tal, då det andra talet är känt. — Vill man *dessutom* skriva uppgifterna i ekvationsform: $7 \cdot ? = 28$; $7 \cdot x = 28$ eller $? \cdot 7 = 28$ ($x \cdot 7 = 28$) är det givetvis tacknämligt. Därigenom markeras ju än mer sambandet mellan multiplikation och division.

Därmed slutar jag mitt inlägg i diskussionen i vad det rör division vid hela tal. Kanske jag då skall »spetsa till» frågan om antalet räknesätt genom att relatera vad en erfaren »räknemagister» ungefär yttrade, då vi en gång samtalade om dessa saker: »Det finns *fyra tekniska räknesätt.* Men det finns egentligen bara *två* tankegångar som vid problemlösning leder fram till dem: addition och multiplikation. Vid subtraktion tänker de flesta via addition och vid division via multiplikation. Och det gör de även, då de räknar ut 'rena' sifferexempel på subtraktion och division.»

En medveten inträning — med korrekt terminologi — av det ovannämnda är som sagt nödvändig, då det gäller för barnen att bestämma sig för det tekniska räknesättet i problem, där mätetalen är angivna i bråk, särskilt om mätetalen är mindre än 1 (egentliga bråk). Redan uppgiften: »Hur mycket kostar 0,2 kg av en vara, om 1 kg kostar 0,85 kr?» vållar svårigheter. Att barnen förr eller senare måste vänja sig vid att *multiplicera* 0,85 (kr/kg) med 0,2 (kg) torde vara klart. Men svårt är det, därför att multiplikation »sedan gammalt» för dem är ett »mångfaldigande».

Att här en grundlig genomgång, baserad på hela tal, måste göras innan man kommer fram till det »riktiga» i att betrakta uppställningen 0,2·0,85 som en multiplikation, är givet. Jag går inte in på metodiken härvidlag. Men sedan bör man vänja barnen vid »att tänka i hela tal». Detta rekommenderas f.ö. i de metodiska anvisningarna för realskolan (S.Ö.:s skriftserie nr 16), där mycket av värde finns att hämta. Än mer befogad är denna rekommendation, då det gäller för barnen att inse, när de bör använda division: »Hur mycket kostar 1 kg av en vara, om 0,2 kg kostar 0,17 kr?» Här bör intränas »vanan», att man skall dividera 0,17 (kr) med 0,2 (kg), varvid barnen, då de beslutar sig för division t. ex. »ersätter» 0,17 kr med 17 kr och 0,2 kg med 2 kg; därvid blir *räknesättet* klart för dem, och detta tillämpar de sedan »mekaniskt» på de givna mätetalen 0,17 (kr) : 0,2 (kg) = 0,85 (kr/kg). (Se även ovan den parentetiska anvisningen om »dimensionstänkande», som ger ett utmärkt stöd vid val av räknesätt.) En dylik träning är tacknämlig med tanke på högre stadier i skolan och på det praktiska livet. Givetvis bör man även här anknyta till ekvationsuppställning: 0,2 (kg) · x (kr/kg) = 0,17 (kr).

Några reflektioner med anledning av bl. a. Överlärare Åbergs artikel i häfte 3 av TfS må också vara mig tillåtna.

Enligt gängse skrivsätt behandlas ex. 1 rörande de 28 kulorna med 7 kulor i varje hög ofta på följande sätt: 28 kulor : 7 kulor = 4 *gånger*. Jag har med avsikt kursiverat ordet gånger. »Innehållsdivision!» Resonemanget är som nämnt, att 7 kulor »innehålles i» (»kan tas av» etc.) 28 kulor 4 gånger. Ej sällan sägs det också att svaret (= kvoten) *inte innehåller någon sort*. Men ändå blir svaret: Det blir 4 *högar*. Inkonsekvent och förvirrande, särskilt om eleverna (i t. ex. 1[4]) kommer från olika lärare och har använt olika läroböcker.

I ex. 2 skrivs det däremot 28 kulor : 7 = 4 kulor. Likadelning och ofta regeln, att svaret (= kvoten) skall ha samma sort som dividenden!

Vill man nu — på vilket stadium? — följa Åbergs intentioner, borde man här »med dimensioner» skriva:

Ex. 1. $x \cdot 7 \frac{\text{kulor}}{\text{hög}} = 28 \text{ kulor}; \; x = \frac{28 \text{ kulor} \cdot \text{hög(ar)}}{7 \text{ kulor}} = 4 \text{ högar}$

Ex. 2. $x \cdot 7 \text{ högar} = 28 \text{ kulor}; \; x = \frac{28 \text{ kulor}}{7 \text{ högar}} = 4 \frac{\text{kulor}}{\text{hög(ar)}}$

Vore man mer konsekvent borde det i ex. 1 stå $x \cdot \frac{7 \text{ kulor}}{1 \text{ hög}} = 28 \text{ kulor}$.

Det stöter dock *dels* att ha sorter i en ekvation eller annan liknande uppställning — jag har därför i artikeln ovan satt sorterna inom parentes — *dels* att ekvationens båda led formellt inte har samma »dimension», detta då det sökta av Åberg betecknats som x utan dimension; man *räknar sig fram till dimensionen*. Mer tillfredsställande skulle det kanske ur den synpunkten vara med $x \text{ (högar)} \cdot \frac{7 \text{ kulor}}{1 \text{ hög}} = 28 \text{ kulor}$, varvid den inom parentes satta sorten anger resultatets sort, samtidigt som ekvationens båda led har samma dimension.

Principiellt torde man väl böra undvika sorter i en ekvation, ehuru det inte råder någon tvekan om att vid problemlösning en kontroll av att alla termerna i en erhållen ekvation har samma dimension (sort) är viktig nog. Därmed sammanhänger också frågan om man vid problemlösning utan ekvationsuppställning skall ha med sorterna i uppställningen eller räkna med *talen*, *mätetalen*, och låta frågeställning och omdöme avgöra, hur man bör svara. Ett exempel: »Hur mycket kostar 5 kg av en vara, om 1 kg kostar 7 kr?» Här skrivs i allmänhet: 5 kg kostar $5 \cdot 7$ kr $= 35$ kr. Med dimensioner borde man skriva att kostnaden är $5\,\text{kg} \cdot \frac{7\,\text{kr}}{1\,\text{kg}}$ vilket efter förkortning med 1 kg blir $5 \cdot 7\,\text{kr} =$ 35 kr.

Vill man emellertid gå än längre i stringensen borde man t. ex. i Åbergs ex. 4, avd. II (häfte 3, s. 20) skriva

Kostnad	Mängd	Pris
$x \cdot (1\,\text{kr})$	$5 \cdot 1\,\text{kg}$	$\frac{24 \cdot 1\,\text{kr}}{3 \cdot 1\,\text{kg}}$

detta då de valda *enheterna* är 1 kr och 1 kg, under det att x, 5 och 24 är de *mätetal*, med vilka man *räknar*. I Åbergs avd. III erhålles då $x \cdot (1\,\text{kr}) = \frac{5 \cdot 1\,\text{kg} \cdot 24 \cdot 1\,\text{kr}}{3 \cdot 1\,\text{kg}}$ som efter förkortning med 1 kg ger $x \cdot (1\,\text{kr}) = \frac{5 \cdot 24 \cdot 1\,\text{kr}}{3} = 40$ kr.

Dessa frågor kan, som Åberg framhåller, diskuteras. För mig är frågan den: När är ungdomar mogna för allt detta?

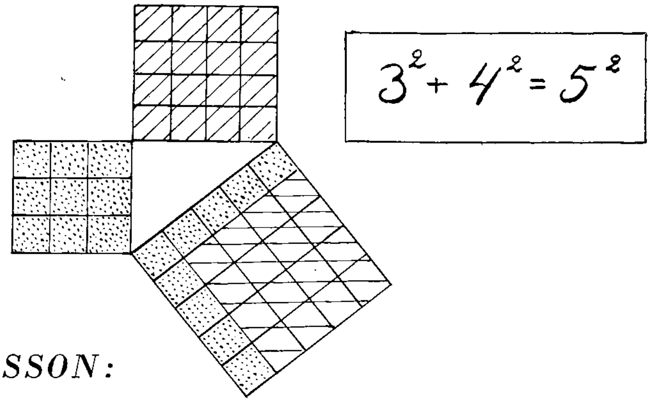
Ovan har jag tagit upp frågor om terminologi, uttryckssätt. Må det tillåtas mig att här beröra ett par, tre av dessa.

Den första rör begreppet *kvot*. Vid den vanliga divisionsuppställningen 28 : 7 är med gängse uttryckssätt *kvoten* = 4. Vid divisionen 30 : 7 blir *kvoten* 4 och *resten* 2. Detta är gängse språkbruk och torde vara svårt att komma ifrån på låg- och mellanstadiet. Men då man finner (i räkneböcker och hos ungdomar), att man kan, — sedan man räknat med bråk — *förvandla resten till bråkdelar*, så att kvoten blir 4 och resten 2/7, då blir man mer än betänksam, särskilt då man samtidigt eller något senare säger att *kvoten* är $4\frac{2}{7}$ eller $\frac{30}{7}$. Här föreligger en dualism i uttryckssätten och uppfattningen som behöver rättas till.

Ytterligare ett par exempel kan belysa situationen. Vid divisionen 2700 : 40 erhåller man, sedan barnen lärt sig »stryka» en nolla i dividend och divisor, på »kvotplatsen» talet 67 och på »restplatsen» talet 2. Fastän »resten» egentligen är 20, får man ofta (i 1^5 och 1^4) svaret, att den är 2, vilket vållar en hel del trassel. Många ungdomar anger kvoten till $67\frac{2}{4}$ eller $67\frac{20}{40}$ $(= 67\frac{1}{2})$.

Vid divisionen 0,88 : 7 erhålles på kvotplatsen 0,12 och på restplatsen 4. Här anges av barnen lika ofta resten vara 4 som 0,04. Här kan man ju inte skriva att kvoten är $0{,}12\frac{4}{7}$ vilket skrivsätt jag dock mött någon gång!

Att resten anges till 20 resp. 0,04 i de båda exemplen sammanhänger väl med regeln från division vid hela tal: dividenden = kvoten · divisorn + resten. Fråga är om man inte fortast möjligt bör släppa allt tal om »rest», så snart man kommit över låg- och en del av mellanstadiet och radikalt gå in för att kvoten mellan två tal *a* och *b* är $\frac{a}{b}$ »uträknat» eller »icke uträknat». Att strecken mellan *a* och *b* är ett *divisionstecken* ,synes mig också böra inläras på ett tidigt stadium. Att det senare även kan kallas bråkstreck är inget hinder — tvärtom! Och att barnen skall lära sig utläsa $\frac{a}{b}$ som »*a genom b*» är lika klart. Det uttryckssättet är förr eller senare nödvändigt. (*Forts. å sid. 15*)



Rektor BÖRJE SVENSSON:

Undervisningsmateriel i matematik

I modern undervisning har undervisningsmaterielens betydelse alltmer beaktats. I de naturvetenskapliga ämnena är undervisningsmaterielen en nödvändig förutsättning för en effektiv undervisning, men även i många andra läroämnen t. ex. i matematik är den på väg att bli oumbärlig. I metodiska anvisningar framhålles också alltmer, att matematikundervisningen så långt som möjligt bör göras åskådlig. Man ansåg emellertid förr, att i matematikundervisningen allt skulle byggas upp genom logisk bevisföring. Man bör dock härvid taga med i beräkningen, att alla elever inte har tillräckliga förutsättningar att i detalj kunna följa en invecklad, strängt logisk lärogång.

I den grundläggande räkneundervisningen användes numera rikligt med åskådningsmateriel för att belysa de elementära räkneoperationerna. I de högre klasserna däremot användes åskådningsmateriel i allt mindre omfattning, och i realskolan och gymnasiet tillämpas den åskådliga metoden i synnerligen ringa omfattning. Det torde kunna i frågasättas, om man inte inom matematikundervisningen i viss omfattning skulle kunna följa samma principer som t. ex. i fysikundervisningen, där experimentet får vara beviset. Med hjälp av särskilt utformad undervisningsmateriel kan många av de matematiska bevisen konkretiseras. Det kan ifrågasättas, om inte de experimentella metoderna kan utvecklas och fullkomnas inom realskolan, särskilt med tanke på de elever, som inte skall fortsätta med gymnasiestudier. Flera av geometrins satser kan således visas experimentellt. Ett typiskt exempel är beviset för Pythagoras' sats. Det experimentella beviset, som framgår av ovanstående figur, må vara tillfyllest för sådana elever, som inte skall fortsätta med teoretiska studier.

Ett område inom matematiken, som ställer särskilt stora krav på åskådlighet, är rymdgeometrin. Inövandet av rymdgeometriska begrepp och beräkningar inom detta område underlättas väsentligt genom användning av genomskinliga modeller i plastmateriel. Projektioner av linjer och ytor kan lätt visas med hjälp av dessa åskådliga modeller; diagonaler och formen hos olika snittytor kan lätt och åskådligt demonstreras.

All konkretisering av matematikundervisningen i antydd riktning underlättar förståelsen. Alla medel, som står till buds för att förenkla matematikundervisningen, bör prövas.

★

HANDELSRÄKNING
EN RÄKNEKONSTENS TILLÄMPNING

Av Civilekonom Elisabeth Larberg, Karlstad.

Undervisningen i handelsräkning vid handelsgymnasier o. handelsskolor är en del av den rent praktiska yrkesutbildningen. Eleverna skall lära sig att använda siffrorna och räknekonsten på bestämda arbetsuppgifter, som de kommer att stöta på i sin yrkesutövning. Förr i världen fordrade man av en god kontorsman en stor skicklighet i bland annat huvudräkning, addition för hand — han skulle helst kunna addera ner flersiffriga kolumner i ett svep —, snabbräkning och skönskrift av siffror. Räknemaskiner och skrivmaskiner har helt förändrat dessa krav, och skolorna måste försöka följa med i den utvecklingen. Det räcker emellertid inte att bara köpa maskiner och låta eleverna räkna på dem i stället för att räkna i huvudet och för hand. De måste också lära sig att använda de nya hjälpmedlen på ett rationellt sätt. Därigenom kan de få en träning i att överblicka och planera ett arbete, vilket kan ge avkastning även för andra typer av arbetsuppgifter.

Under hela sin tidigare skoltid har eleverna ställts inför räkneuppgifter och problem där siffrorna varit »hyfsade», tillrättalagda för att ge jämna och bekväma uträkningar och jämna svar. I handelsräkningen ställs de plötsligt inför ett osorterat siffermaterial, sådant som det möter dem i verkligheten. Det kan lätt skapa förvirring och en känsla av hopplöshet. Svaren stämmer så sällan med facit. Det gäller att gå varligt fram vid omställningen.

Man har härvid god hjälp av att från början låta eleverna göra överslagsberäkningar, låta dem runda av de ojämna och svårhanterliga talen och i huvudet beräkna storleksordningen av svaret. Ex. $158 \cdot 2345$. Svaret måste ligga mellan $150 \cdot 2000 = 300.000$ och $160 \cdot 2500 = 400.000$. Man kan göra överslagsberäkningen något noggrannare genom att endast avrunda den ena faktorn t. ex. $158 \cdot 2000 = 316.000$ och $158 \cdot 2500 = 395.000$

Vid division bör överslagsberäkningen gå ut på att fastställa antalet heltalssiffror i svaret eller antalet nollor före den första siffran, om svaret visar sig bli mindre än 1. Det är för de flesta en mycket naturlig uppgift:

Ex. 455,5 : 122,4 ger 1 heltalssiffra i svaret.

1 6 3 5 4 : 22,5 ger 3 heltalssiffror i svaret.
↑ ↑ ↑
1 2 3 st. heltalssiffror.

Även när det gäller att bestämma förhållandet mellan två tal är överslagsmetoden utmärkt. Den kan så småningom även användas för att beräkna ett tal i % av ett annat.

Överslagsberäkningar av detta slag kan göras så, att eleverna presenteras för en hel lista med tal-par, där det första skall räknas ut i procent eller som del av det andra. De får i uppgift att på en begränsad tid skriva ned så många svar som möjligt utan att försöka göra formella uträkningar. Svar av typen ligger emellan 3/4 och 5/6 godtas. Vid uträkning i % anger man, vilken avvikelse i % som kan godkännas. Övningen ger sinne för relationer mellan tal.

En annan konsekvens av att få ett oarbetat siffermaterial presenterat för sig är

svårigheten att avgöra, hur många siffror som måste tas med i uträkningarna. Detta är för de flesta något alldeles nytt. Vid avrundning av tal måste man veta vad man gör, d.v.s. man måste veta vilka konsekvenser en avrundning medför och om den spelar någon roll för slutresultatet. En annan omdömesfråga uppstår, när det gäller att avrunda svar med hänsyn till siffermaterialets kvalitet.

Ex. Om man avrundar 1,546 till 1,55 har man gjort ett fel på 4/1000. Hur stort tal kan man multiplicera med, innan något fel uppstår i heltalssiffrorna? Tydligen 1000/4 = 250. Multiplicerar man det avrundade värdet 1,55 med 250 eller mer, kan man alltså inte lita på entalssiffran.

Dessa övningar i överslagsberäkning är ett nödvändigt komplement till undervisningen i maskinräkning. När eleverna får en räknemaskin till hjälpmedel, uppstår mycket snart frågorna: Var skall decimalkommat stå? Hur många siffror behöver jag slå in? Dessa frågor uppträder, hur bra de än lärt sig behärska räknemaskinen rent tekniskt.

Den nuvarande kursplanen i handelsräkning medför inte några rent teoretiska kunskaper utöver realexamen. Men räkneuppgifterna växer i omfång och svårighetsgrad. Dessutom fordras det så småningom en viss snabbhet. Detta nödvändiggör en arbetsplanering, som syftar till att lösa uppgiften på det mest *praktiska* sättet,. Här gäller det alltså att besvara frågorna: Vilka sifferuppgifter skall jag använda? I vilken ordning skall uträkningarna göras? Vilka resultat behöver antecknas? Vilka regler gäller för detta slag av uträkningar i praktiken? Vilken tabell är användbar?

Det dröjer inte länge, förrän eleverna upptäcker regeln »skynda långsamt!». De behöver göra en ordentlig uppställning för att kunna följa sina egna uträkningar och för att i efterhand kunna kontrollera dem. Ännu tydligare kommer kravet på dokumentering av uträkningar och resultat fram, om man låter dem kontrollräkna varandras lösningar. Först efter kontroll har man ett färdigt arbetsresultat.

Handelsräkningsundervisningen — åtminstone vid handelsgymnasierna — har kommit att lida av en viss stelhet. I stället för att låta eleverna skapa behövliga schemor och uppställningar, serverar man dessa färdiglagade som typexempel, som påtvingade förebilder. Med denna uppläggning är det också givet, att det område, varifrån exemplen hämtas, blir ganska begränsat. Det är t. ex. vissa formbundna uträkningar, såsom diskontnotor, avräkningsnotor för värdepappersaffärer, kontokurranter och checkräkningar, som blir föremål för behandling. Eleverna får alltså hjärnorna fulla med formulär, som det gäller att nöjaktigt kunna ifylla. Dessvärre överensstämmer dessa formulär inte ens med dem som finns »i verkligheten», och reglerna för deras ifyllande kan inte heller direkt kopieras efter »praktiken». Denna typ av övningar kan inte jämföras med något annat än det stereotypa frammumlandet av latinska böjningsmönster, och sedan man övergivit tanken på »medövning», kan de inte anses fylla någon annan funktion än ritnings-, välskrivnings- och mekanisk uträkningsövning.

För tjänstemannen, affärsmannen och medborgaren blir det allt nödvändigare att kunna bilda sig en uppfattning om det myller av siffror, som myndigheter, organisationer, tidningar och radio slungar ut. Även den som inte hör till sifferälskarna, kan behöva veta, vad konsumtionsprisindex är och hur det beräknas och vad som menas med medianlön. Och av personer, som gått igenom handelsgymnasium, fordrar man detta som en självklar sak. Vad som stryks ur kursplanerna av exercisövningar, kan ersättas med undervisning i de mest elementära statistiska metoderna, deras användbarhet och deras begränsning. Den som lärt sig något om ett siffermaterials framställning och bearbetning, har lättare att tillägna sig en sund skepsis i sifferuppgifternas värld.

Kort genmäle till civilekonom E. Larberg, Karlstad

(Jfr TfS nr 4/56)

Ett tyg kostar i England 2/4 (28 d) per yard. Vilket pris i svenska kronor per meter motsvarar denna notering? 11 m = 12 yards. 1 pund (240 d) = 14,50 kronor. Enligt min metod kan problemet lösas enligt nedan.

$$P = \frac{28\ \mathrm{d}}{\mathrm{y}};\ 11\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{y};\ \mathrm{y} = \frac{11\ \mathrm{m}}{12}$$

$$240\ \mathrm{d} = 14{,}5\ \mathrm{kr};\ \mathrm{d} = \frac{14{,}5\ \mathrm{kr}}{240}$$

(Sorterna behandlas som algebraiska uttryck. Värdet av »y» och »d» insättes i första ekvationen. $P = \frac{28\ \mathrm{d})}{\mathrm{y}}$

Man får då: $P = \frac{28 \cdot 14{,}5\ \mathrm{kr} \cdot 12}{240 \cdot 11\ \mathrm{m}}$ och får alltså »P» uttryckt i kronor per meter

Något »x» behöver icke förekomma — och skall för resten icke förekomma, då talet kan anses vara ett förvandlingstal med icke dekadiska sorter, närmast jämfört med »talet»: Uttryck 3 dussin i stycken! För övrigt håller jag med civilekonomen Larberg om att begreppet »kostnad» bättre kunde uttryckas med termen »utgift».

Staffan Åberg

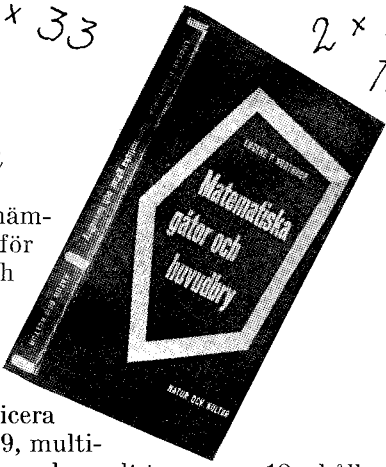
NÅGRA TERMINOLOGISKA . . .

(Forts. fr. sid. 8)

Slutligen återknyter jag till den missbrukade terminologi, där man använder *dela* i st. f. dividera, som nämnt ofta utan poängtering av att det gäller likadelning, och även i de fall då det är fråga om »innehållsdivision». Det vållar faktiskt en del besvär på ett högre stadium. Ett exempel kan belysa frågan. Då jag »på allvar» börjat med problem, som kan föra till ekvationer, har jag ofta ställt frågan: »A och B skall dela 16 kr. Hur mycket får var och en?» Svaret har oftast blivit: »De får 8 kr var.» Ordet *delning* är för en mängd barn genom långvarig träning detsamma som likadelning eller division. Att man kan dela 16 kr mellan A och B på ett otal skilda sätt har skymts bort av att barnen, så snart ordet dela (eller delning) dyker upp, är ensidigt inriktade på att det skall röra sig om en uträkning, där *division* bör vara med. — I det nämnda exemplet får man f. ö. fram sambandet mellan addition och subtraktion. Om A får x kr så får B (16—x) kr. — Ytterligare ett skäl bland många andra att fortast möjligt lämna orden delning och dela med (i) och övergå till de korrekta (och av S.Ö. föreskrivna) *division* och *dividera med.*

5+9 1000a+b + 5 −250 × 3576 7. 4
3×20−6 ? 20×33 2×3 %
7 9 7. 6
%

SIFFERLEKAR
i räkneundervisningen



Ur populära böcker i matematik kan en lärare ofta hämta problem och räknegåtor, som kan användas för att muntra upp räknelektionerna. De räknegåtor och sifferlekar, som här valts som typexempel och givit impulsen till denna artikel, är hämtade ur »Matematiska gåtor och huvudbry.» av Eugene P Northrop, utgiven av Natur och Kultur.

Läraren ber eleverna att tänka på ett tal, multiplicera det med 5, lägga till 6, multiplicera med 4, lägga till 9, multiplicera med 5 och därefter meddela resultatet. Om en elev valt t. ex. 12 erhåller han succesivt 60, 66, 264, 273, 1365. Han nämner alltså talet 1365. Läraren kan nu briljera som »tankeläsare» genom att från det uppgivna sluttalet alltid dra 165 och stryka nollorna — då erhålles det ursprungliga talet. I det nämnda fallet erhålles 1365 — 165 = 1200, nollorna tryckes — 12 var det tänkta talet. Det stämmer alltid. Utgå t. ex. från talet 7. Efter den nämnda räkneserien erhålles som sluttal 865. 865 — 165 = 700. Stryk nollorna och det ursprungliga talet erhålles. Hemligheten med detta räknetrick avslöjas genom en enkel algebraisk analys. Om vi betecknar det ursprungliga talet med x erhålles följande succesiva resultat:

Tänk på ett tal!	x
Multiplicera det med 5!	5x
Lägg till 6!	5x + 6
Multiplicera med 4!	20x + 24
Lägg till 9!	20x + 33
Multiplicera med 5!	100x + 165

Det är tydligt, att det ursprungliga talet x kommer fram, om man från slutresultatet 100x + 165 först drar bort 165 och sen delar resten med 100. Om x är ett heltal kommer alltid 100x att vara ett tal, som slutar med två nollor, varför divisionen med 100 utföres genom att stryka de två sista nollorna. När man komponerar dylika räknetricks gäller det att se till att man får ett slutresultat, varur man snabbt kan erhålla det ursprungliga talet. Därför ordnas ofta räkneserien så, att det ursprungliga talet x så småningom blir multiplicerat med 100. I exemplet ovan multiplicerades succesivt med 5,4 och 5, $5 \cdot 4 \cdot 5 = 100$. Det går lika bra att succesivt multiplicera med 20 och 5,4 och 25 eller 2 och 50 för att i slutresultatet få med $100 \times$ som term.

Genom att variera additionstermerna kan nya räkneserier erhållas.

Tänk på ett tal!	x
Multiplicera med 5!	5x
Lägg till b!	5x + b
Multiplicera med 4!	20x + 4b
Lägg till c!	20x + 4b + c
Multiplicera med 5!	100x + 20b + 5c

Varför inte låta eleverna själva få bestämma additionstermerna! Vad skall vi nu lägga till? Föreslå! På så sätt verkar räkneleken mer improviserad. Läraren får för varje gång särskilt räkna ut vad 20b + 5c blir. Om t. ex. b är 7 och c är 8 blir slutresultatet 100a+180 osv. (Om vi bestämmer b till 5 och c till 20 erhålles 100x+200=100 (x+2). Det ursprungliga talet erhålles då synnerligen lätt genom att stryka de två sista nollorna och dra ifrån 2.)

Sen läraren en stund briljerat som »tankeläsare» kan han lära ut till eleverna knepet att ur svaret härleda det ursprungliga talet. Eleverna får sedan pröva med olika ursprungstal, att regeln håller. På så sätt erhålles trevligare självständiga övningar med självkontroll!

Elevernas kännedom om och övning i dylika räknelekar kan komma till nytta i ekvationsläran. Enligt det ovan angivna schemat kan eleverna med utgångspunkt från ett tänkt tal x börja bygga upp ekvationen. Varje elev får utgå från ett valfritt tal. En elev, som tänker på t. ex. 7 kommer efter räkneserien fram till slutresultatet 865 och erhåller ekvationen 100x+165=865. Lösningen av ekvationen går till på precis samma sätt, som vi förut löste räknegåtan: vi minskar med 165 och dividerar med 100. Eleven skapar själv ekvationen och kan kontrollera svaret. Adjunkt Halfrid Stenmark anger i sin »Matematikundervisningen» (anmäld i detta nr av TfS) denna metod att introducera ekvationerna. Självklart startar man i så fall från räknegåtor som leder till enkla ekvationer: 2x=24, x+7=15, 2x+5=11 för att så småningom komma fram till mer avancerade räknegåtor och ekvationer, som de ovan nämnda.

Ett »tankeläsartrick», som man ofta ser omnämnt och som även återfinnes hos Northrop, är följande:

Multiplicera ert ålderstal i år med 2, lägg till 5, multiplicera resultatet med 50, lägg till antalet ören ni har i portmonnän, dra ifrån antalet dagar i ett år, och tala om vad ni fått. Om slutresultatet uppges t. ex. 3461 kan »tankeläsaren» omedelbart tala om, att Ni är 35 år och har 76 öre i portmonnän!

En algebraisk analys ger förklaringen. Om den tillfrågades ålder antages vara a år och om han har b öre i portmonnän, blir de succesiva operationerna följande: 2a, 2a+5, 100a+250 och till slut 100a+b—115. Precis som i det förut nämnda exemplet är räkneoperationerna komponerade så, att till slut 100a skall erhållas, i detta fallet genom succesiv multiplikation med först 2 och sedan 50. Om nu 115 lägges till slutresultatet, erhålles 100a+b. Om B:s ålder är ett tvåsiffrigt tal, är 100a+b ett fyrsiffrigt tal. De två första siffrorna från vänster ge a, de två sista ge b. — I det ovan angivna konkreta exemplet, där slutresultatet uppgavs till 3461, lägger man således till 115 och få 3576: 35 år och 76 öre.

Även denna sifferlek kan anpassas till en lämplig räkneövning med självkontroll. I stället för att dra ifrån antalet dagar i ett år, kan man sätta in en subtraktion, som ger slutresultatet 100a+b. Eleverna får godtyckligt välja två st. tvåsiffriga tal a och b och sen succesivt utföra räkneoperationer efter något av följande schema:

2·a ; +5 ; ·50 ; +b ; —250 (=5·50)
4·a ; +8 ; ·25 ; +b ; —175 (8·25)
5·2 ; +x ; ·20 ; +b ; —20x, där x kan vara ett tal, vilket som helst, liksom man i första och andra raden kan byta ut 5 och 8 mot vilka andra tal som helst.

I samtliga fall blir slutresultatet 100a+b d.v.s. de ursprungligen valda tvåsiffriga talen faller ut efter varandra i det fyrsiffriga slutresultatet; därigenom kan varje elev själv kontrollera riktigheten av sina uträkningar.

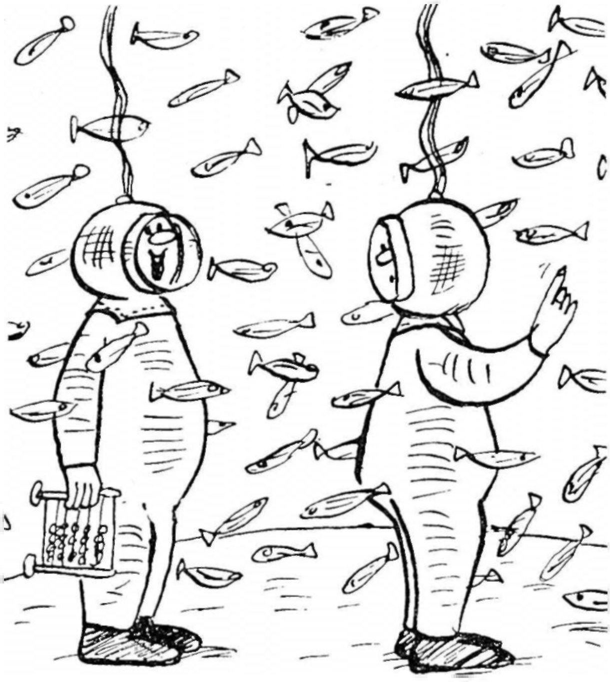
När man kritiserar räknefärdigheten hos våra skolelever är det inte minst den bristande mekaniska räknefärdigheten, som påtalas. Denna mekaniska, tekniska räknefärdigheten går nu en gång för alla ej att förvärva utan övning och åter övning och ständig tabelldrill. Genom dessa moment kan lätt en intressedödande monotoni komma in i räkneundervisningen, som självklart måste verka hämmande för utvecklingen av elevens räknefärdighet. Här skulle de nämnda sifferlekarna och liknande kunna spela rollen av ett stimulerande moment. De bör betraktas inte enbart som en lek med siffror och ett tillfälligt, roande inslag. Rätt använda kan de fungera som något så viktigt som ett effektivt, stimulerande medel att nå mekanisk räknefärdighet.

Låt oss till slut välja en uppgift, som även för läraren själv blir något att bita i! Sifferleken går till på följande sätt. Vi ber en person i tur och ordning utföra följande räkneoperationer: Tänk på ett tal, skriv en nolla efter talet, dra ifrån det ursprungliga talet, lägg till 54 och stryk en siffra i det resultat, som erhållits. Uppge slutresultatet! Om personen ursprungligen tänkt på t. ex. talet 5238 får han successivt 52380, 52380 — 5238 = 47142, 47142 + 54 = 47196. Om han nu stryker 7:an, uppger han som slutresultat 4196. Ur det uppgivna slutresultatet 4196 kan vi nu på följande sätt räkna ut *vilken siffra, som strukits!* Vi tar siffersumman av slutresultatet och drar detta från närmast högre multipel av 9 — och erhåller då alltid den strukna siffran. Siffersumman av 4196 är 20, närmast högre multipel av 9 över 20 är 27, 27 minus 20 är 7 — som ju var den strukna siffran. Ytterligare ett sifferexempel får visa att regeln håller. Vi utgår lämpligen från talet 490282 — TfS:s postgironummer — och erhåller (sen vi inbetalt en femma) succesivt 4902820, 4902820 — 490282 = 4412538, 4412538 + 54 = 4412592. Till slut stryker vi femman (den är ju redan inbetald!) och erhåller slutresultatet 441292. Siffersumman är 4, närmast högre multipel av 9 är 9, 9 — 4 = 5, som var den strukna siffran. Men *varför* går det att på detta sätt beräkna den strukna siffran? Som ledtråd för det algebraiska beviset kan nämnas, att det bygger på det kända förhållandet, att ett helt tal är delbart med 9, om dess siffersumma är delbar med 9 och tvärtom. Ja, det var läxan till nästa gång, då lösningen inflyter i TfS:s andra nummer!

———✶———

Den roliga sidan...

POUL STRØYER:



Sillen i Skagerack och Kattegatt ska räknas.
— Det är mycket lättare om man räknar ögonen och dividerar med två!

Ur Strøyers Dagbok — AWE-GEBERS

Lille Kalle, fem år, kommer in i butiken och lägger kavat upp en tvåöring och en ettöring på disken.
— Kan jag få en femöres kola!
Expediten tittar på pengarna, ser på Kalle och undrar:
— Men tvåöringen då?
För ett ögonblick ser Kalle konsternerad ut, men så kommer det snabbt:
— Tvåöringen?! Den kan jag få en skorpa för!

— Tjänare, gamle vän! Det var längesen!
— Ja. Med ränta på ränta blir det precis 117 kr 87 öre.

— Om femton man slår en äng på tre timmar, hur lång tid behöver då tjugo man för att göra det?
Svar: Om de femton redan slagit ängen, behöver de tjugo inte göra någonting.

METODISK INLÄRNING AV MULTIPLIKATIONSTABELLEN

Av Fil. Dr Lektor Edvin Ferner

Additions-, subtraktions- och multiplikationstabellerna är den nödvändiga grunden för allt räknande. Önskvärt vore givetvis att alla elever säkert behärskade dessa elementära ting, då de lämnade skolan. Så är faktiskt tyvärr inte fallet. Man tycker dock, att det borde ligga inom räkneundervisningens möjligheter att lära till och med de svagaste eleverna dessa tabeller, som ju är det oundvikliga villkoret för ett snabbt och säkert räknande. Vi kanske lär ut tabellerna på felaktigt sätt? Använder vi den rätta metodiken? Här skall nu närmast inlärandet av multiplikationstabellen tas upp till behandling dels genom en kritisk analys av det gängse inlärningssättet, dels genom presentation av ett nytt förslag till metodisk behandling av den viktiga tabellens genomgång.

Först skall då fastslås, att målet för inlärandet av multiplikationstabellen liksom av övriga tabeller är *en 100%-ig säkerhet.* Tabellen skall till slut kunnas rent mekaniskt utantill. Enligt den gamla förkättrade s.k. pluggskolans recept drillades och pluggades tabellen tanklöst in till säkerhet. Den moderna skolan däremot ställer rätt långtgående krav på att även den rent mekaniska sidan av räkneoperationerna skall av eleverna förstås, samtidigt som drillen och plugget kommit alltmer i skymundan. Vi bör dock inte glömma, att en viss grad härav aldrig helt kan undvaras i en effektiv räkneundervisning. Vill man som i den moderna undervisningen emellertid beskära detta drill- och pluggmoment till det minsta möjliga, måste man ha något att sätta i stället. Detta måste i så fall vara en ny, psykologiskt och metodiskt riktig inlärningsgång, så att eleverna inser det logiska och metodiska i det sätt, på vilket de lär in tabellerna. Inlärandet av tabellerna skulle på så sätt bli meningsfyllt. Det oundgängliga plugget skulle kunna inskränkas och bli så att säga »insiktsfullt plugg».

Det bör kanske understrykas, att den metodiska diskussionen i denna artikel rör den lärogång, som bäst skall kunna leda fram till ett säkert *mekaniskt* kunnande av tabellen. För att undvika ev. missförstånd vill jag också framhålla, att innan vi ställs inför denna metodiska fråga skall givetvis först själva begreppet multiplikation vara genomgånget.

Vilket metodiskt system man än i fortsättningen tillämpar, kan den allra första grunden i princip endast läggas upp på ett sätt. Barnen skall genom åskådlighet och aktivitet lära sig förstå innebörden av det nya multiplikationsbegreppet. Multiplikation är ingenting annat än en upprepad addition. I stället för $4+4+4+4+4$ kommer vi överens om att det är bekvämare att skriva på det kortare sättet $5 \cdot 4$. Vi övar även omvändningen: vad betyder $3 \cdot 7$? Självklart bör man lägga stor vikt vid dessa grundläggande övningar. Innan man börjar med någon systematisk behandling av multiplikationstabellens mångfald, bör barnen kunna självständigt med hjälp av upprepad addition lösa t.o.m. sådana uppgifter som $13 \cdot 3 = ?$, $4 \cdot 16 = ?$ osv.

Från första början bör begreppen gångersiffra och sortsiffra ordentligt inpräntas. Barnen lär sig sätta gångersiffran först och övas i att rätt tolka t. ex. figurer av detta slag:

o o   o o   o o   o o
 o   o   o   o
o o   o o   o o   o o

$4 \cdot 5 = 20$

o o   o o   o o   o o   o o

o o   o o   o o   o o   o o

$5 \cdot 4 = 20$

Barnen lär sig längre fram, att siffrorna i en produkt kan kastas om vid det tekniska uträknandet, $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$. Detta får emellertid inte undanskymma det viktiga kravet, att barnen vid tecknandet av talet alltid sätter gångersiffran först — förr har de inte riktigt lärt sig innebörden av begreppet multiplikation.

Barnen har nu lärt sig vad multiplikation är för något. De känner till multiplikationstecknet och dess innebörd, de bör känna till de båda siffrornas roll i en produkt och de kan självständigt med hjälp av upprepad addition räkna ut multiplikationsuppgifter. De skulle således redan nu själva kunna härleda hela multiplikationstabellen! Vad är egentligen kvar att »lära»?

Om multiplikationsbegreppen är väl genomgångna, återstår att lära utantill tabellens många kombinationer. Eleven kan redan härleda t. ex. $6 \cdot 7 = 42$, men nu gäller det att kunna detta så småningom rent mekaniskt. Uppgiften blir nu att söka leda eleverna på lämpligt sätt genom den pytagoreiska tabellens mångfald så, att de lättast kommer ihåg kombinationerna och även lättast kan härleda dem. Det skadar inte att fastslå, att detta i huvudsak är ett sifferteknisk problem, som till mål har säker minneskunskap.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fig. 1. Den pytagoreiska tabellen.

Vilken väg bör vi gå genom tabellen? Skall vi bäst inlära kombinationerna i vågrät eller lodrät riktning eller ev. på annat sätt? Vilka räknemetodiska knep kan vi tillgripa för att ge stöd åt minnet?

Låt oss då först titta litet närmare på det sätt, som oftast använts för att genomgå tabellens sifferkombinationer. Man börjar med gånger -två-tabellen $1 \cdot 2$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 2$. . . . $8 \cdot 2$, $9 \cdot 2$, $10 \cdot 2$, som inövas genom additionsserier: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. Sedan behandlas på liknande sätt gånger-tre-tabellen osv. Faran med detta tillvägagångssätt är att det lätt kan urarta till ett mekaniskt rabblande, varvid känslan för multiplikationsbegreppet skymmes bort. Det är ju ej heller dessa serier, som skall minnas. I stället skall t. ex. faktorerna 7 och 2 i minnet förknippas med produkten 14, $7 \cdot 2 = 14$. De alltför långa serierna är otympliga och barnet (det rör sig här om 8-åringar i klass 2) kan lätt tappa räkningen.

En annan viktig invändning mot detta sätt att lära in den pytagoreiska tabellen är att man härigenom avhänder sig ett av räknemetodikens förnämsta hjälpmedel omvändningsregeln eller den kommutativa lagen. Det är ur alla synpunkter, såväl räknemetodiska som psykologiska, direkt förkastligt att lära in $9 \cdot 2$ genom den långa serien $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$, då man med hjälp av omvändningsregeln kan göra uträkningen på det enkla sättet: $9 \cdot 2 = 2 \cdot 9 = 9 + 9 = 18$!

Detta inlärningssätt innebär också, att man ensidigt arbetar igenom den pytagoreiska tabellen i en enda *lodrät* riktning. Genom att inlära tabellen på olika vägar, i lodrät och vågrät riktning, skapas flera associationer och minneskunskapen förstärkes. Av flera starka skäl, som här närmare skall utredas, är det även lämpligast att vid den första kontakten med tabellen inöva den i *vågrät* riktning.

Vi börja således med 2-gånger-tabellen:

$2 \cdot 1 = 2$	$2 \cdot 6 = 12$
$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 7 = 14$
$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 8 = 16$
$2 \cdot 4 = 8$	$2 \cdot 9 = 18$
$2 \cdot 5 = 10$	$2 \cdot 10 = 20$

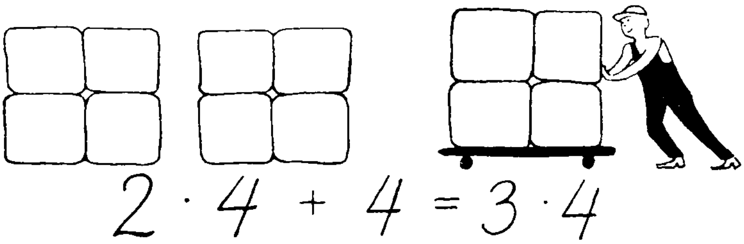
Minst två pedagogiska skäl motiverar att vi bör starta på detta sätt: den genetiska principen, att man bör anknyta i undervisningen till det närmast förut genomgångna, samt den kända regeln, att man bör gå från det lättare till det svårare. 2-gånger-tabellen är ju den lättaste tänkbara multiplikationstabell. Barnen har hela tabellen igenom endast två saker att hålla reda på, två fyror, två femmor osv. Det blir på så sätt lättare överskådligt för barnen. De kan också genom en enda enkel addition snabbt erhålla resultatet, $2 \cdot 7 = 7 + 7 = 14$. Jämför härmed motsvarande, otympligt långa serie i gånger-2-tabellen: $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14) = 14$! Härom kan endast en mening råda: 2-gånger-tabellen är den enklaste möjliga, och självklart bör man då också börja just med den.

Barnen har förut lärt sig addition med tiotalsövergång. 2-gånger-tabellen anknyter till denna räknekunskap och blir en nyttig repetition av denna. Av alla tabeller är det 2-gånger-tabellen, som naturligast och mest direkt anknyter till och utnyttjar den förut inlärda additionskunskapen. Enligt den genetiska principen bör då också just denna tabell genomgås först.

I 2-gånger-tabellen når man snabbt och därmed säkert kontakt mellan sifferfaktorerna och produktresultatet. $2 \cdot 8$ kan snabbt i huvudet uträknas, siffrorna 2, 8 och 16 förknippas utan några omvägar med långa additionsserier. Genom att 2-gånger-tabellen är så lätt, har man här en utmärkt möjlighet — som man inte bör försumma — att skapa en säker grund för det vidare multiplikationsräknandet. Även de i matematik svagare eleverna bör genom övning kunna tillägna sig denna grundläggande tabell. Om i det följande svårigheter skulle uppstå, är det värdefullt att ha denna första grundkunskap att falla tillbaka på.

Sedan 2-gånger-tabellen är övad och inlärd, är det naturligt att som nästa kursmoment gå igenom 3-gånger-tabellen. Vi ansluter då omedelbart till det föregående genom att bygga vidare på 2-gånger-tabellen:

2 gånger 5 är 10. 3 gånger 5 är en 5:a till: $10 + 5 = 15$ osv.



Här kommer den genetiska principen ännu tydligare till användning: eleverna bygger kontinuerligt på en nyss förvärvad räknekunskap. Samtidigt erhålles en repetition av den grundläggande 2-gånger-tabellen, som man vid de första räkneuppgifterna ständigt utgår från:

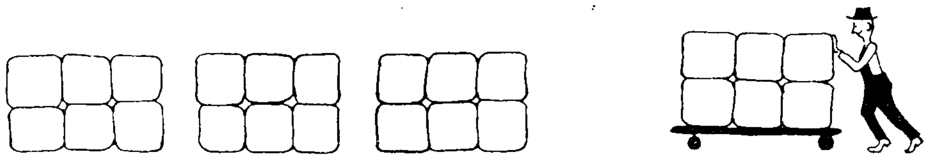
$2\cdot1=$	$2\cdot2=$	$2\cdot3=$	$2\cdot4=$	$2\cdot5=$	$2\cdot6=$	$2\cdot7=$	$2\cdot8=$	$2\cdot9=$	$2\cdot10=$
$3\cdot1=$	$3\cdot2=$	$3\cdot3=$	$3\cdot4=$	$3\cdot5=$	$3\cdot6=$	$3\cdot7=$	$3\cdot8=$	$3\cdot9=$	$3\cdot10=$

Nu kan man också börja öva s.k. korta serier:

1 gång 2 är 2	1 gång 3 är 3	1 gång 4 är 4	
2 gånger 2 är 4	2 gånger 3 är 6	2 gånger 4 är 8	osv.
3 gånger 2 är 6	3 gånger 3 är 9	3 gånger 4 är 12	

På detta sätt genomarbetar man den pytagoreiska tabellen i både vågrät och lodrät riktning. 3-gånger-tabellen motsvarar en vågrät rad i fig. 1, vid de korta serierna arbetar man lodrät i tabellen. Huvudvikten lägger man emellertid vid inövandet av 3-gånger-tabellen.

2-gånger- och 3-gånger-tabellerna är nu genomgångna. Dessa båda tabeller har ett intimt samband med varandra. Den ena tabellen bygger på och kan härledas ur den andra. Tabellerna är så att säga släkt med varandra, förknippade genom naturlig kontinuitet och matematiskt samband. Jämför härmed de multiplikationstabeller, som man oftast möter! Gånger-2- och gånger-3-tabellerna har inget som helst inre samband; man kan inte härleda t. ex. $7\cdot3$ ur $7\cdot2$. Tabellerna hjälper här inte varandra. För att lära in gånger-3-tabellen har man ingen nytta av att kunna den närmast föregående gånger-2-tabellen. Tabellerna är isolerade från varandra — det är ett räknemetodiskt vakuum mellan dem! Genom denna tabelluppställning förlorar man allt det, som nyss kom till så naturlig hjälp: kontinuitet, matematiskt samband och genetisk princip.



$$3\cdot6+6=4\cdot6$$

Förut byggde vi 3-gånger-tabellen på kunskapen av 2-gånger-tabellen. 4-gånger-tabellen härledes på liknande sätt.
Bygg vidare på 3-gånger-tabellen!
3 gånger 5 är 15.
4 gånger 5 är en 5:a till: $15+5=20$

$3\cdot1=$	$3\cdot2=$	$3\cdot3=$	$3\cdot4=$	$3\cdot5=$	$3\cdot6=$	$3\cdot7=$	$3\cdot8=$	$3\cdot9=$	$3\cdot10=$
$4\cdot1=$	$4\cdot2=$	$4\cdot3=$	$4\cdot4=$	$4\cdot5=$	$4\cdot6=$	$4\cdot7=$	$4\cdot8=$	$4\cdot9=$	$4\cdot10=$

Genom att även här öva korta serier, 1, 2, 3, 4 gånger ett tal, erhålles en repetition av de föregående 2-gånger- och 3-gånger-tabellerna.

5-gånger-tabellen bygges sedan på liknande sätt på den strax innan genomgångna 4-gånger-tabellen. Därmed är 50% av den pytagoreiska tabellen genomgången, och mer skall numera inte genomgås i andra klassen.

Det tredje skolåret är så tiden mogen för införandet av den kommutativa lagen (latin: commutare = växla). Eleverna får lära sig att siffrorna i en produkt kan kastas om, $7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$. Önskvärt vore att denna matematiska lag mer än vad som nu sker infördes i räkneundervisningen som ett särskilt kursmoment. Detta behändiga matematiska knep är också så lätt att åskådliggöra och inlära:

o o o o 2 vågräta rader med 4 ringar i var rad: $2 \cdot 4 = 8$
o o o o 4 lodräta rader med 2 ringar i var rad: $4 \cdot 2 = 8$

Vare sig man räknar vågrätt eller lodrätt blir det självklart lika många ringar!

o o o o
o o o o
o o o o

Räkna de vågräta raderna! $3 \cdot 4 = 12$
Räkna de lodräta raderna! $4 \cdot 3 = 12$

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$

Eleverna kan själva på liknande sätt kontrollera att regeln alltid håller. Med hjälp av de åskådliga talbilderna kommer regeln att stå klar för dem.

Sedan vi bekantat oss med omvändningsregeln och övat den, tar vi den i fortsättningen systematiskt i bruk. Vi börjar med att repetera 2-gånger-tabellen, men nu utnyttjar vi även omvändningsregeln. Vi erhåller på så sätt den fullständiga tabellen för tvåan:

$2 \cdot 1 = 2$	$1 \cdot 2 = 2$
$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 2 = 4$
$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$
$2 \cdot 4 = 8$	$4 \cdot 2 = 8$
$2 \cdot 5 = 10$	$5 \cdot 2 = 10$
$2 \cdot 6 = 12$	$6 \cdot 2 = 12$
$2 \cdot 7 = 14$	$7 \cdot 2 = 14$
$2 \cdot 8 = 16$	$8 \cdot 2 = 16$
$2 \cdot 9 = 18$	$9 \cdot 2 = 18$
$2 \cdot 10 = 20$	$10 \cdot 2 = 20$

Varje kombination och dess omvändning åskådliggöres lätt med en talbild, vars ringar vi räknar utefter vågräta och lodräta rader.

o o o o o o o o o Vågrätt: $2 \cdot 9 = 18$
o o o o o o o o o Lodrätt: $9 \cdot 2 = 18$

Vi inser nu den stora nyttan av omvändningslagen. I stället för att härleda $9 \cdot 2 = ?$ (om vi glömt bort resultatet) genom den långa additionsserien vänder vi på siffrorna $2 \cdot 9 = ?$ och kan då omedelbart ge svaret med hjälp av den kunskap, vi inhämtade redan i klass 2!

Även här råder ett intimt matematiskt samband mellan de båda tabeller, som skall inläras. De hör ihop, är släkt med varandra; den ena kan snabbt härledas ur den andra.

På liknande sätt repeteras de andra tabellerna, 3 ggr-, 4ggr- och 5 ggr-tabellerna, samtidigt som omvändningsregeln tillämpas.

Genom detta tillvägagångssätt har faktiskt inga nya moment att läras utantill och minnas införts. Med hjälp av omvändningsregeln faller vi hela tiden tillbaka på den minneskunskap, vi redan i klass 2 förvärvat (och ytterligare repeterat i 3:an). Men tack vare omvändningslagens förnämliga hjälp behärskar vi nu plötsligt som genom ett trollslag hela 75% av multiplikationstabellen! Om vi i den pytagoreiska tabellen i fig. 1 tar bort den inramade fjärdedelen i nedre högra hörnet, får vi den del av tabellen, som nu är genomgången.

Återstår nu den sista fjärdedelen av den pytagoreiska tabellen — den inrutade delen i fig. 1. Den är onekligen svår. Den reduceras emellertid omedelbart till hälften efter utnyttjande av den kommutativa lagen. Endast dessa kombinationer återstår att lära in:

6 · 6	6 · 7	6 · 8	6 · 9
	7 · 7	7 · 8	7 · 9
		8 · 8	8 · 9
			9 · 9

Övriga kombinationer i den sista fjärdedelen är kommutativa motsvarigheter, t. ex. 8 · 7 = 7 · 8. Vi arbetar även med dessa kombinationer enligt det föregående schemat i vågrät och lodrät riktning. Vi kan nu även vandra i diagonal riktning genom tabellen genom att särskilt inöva kvadraterna 6 · 6, 7 · 7, 8 · 8, 9 · 9.

Då detta är den svåraste delen av tabellen, bör naturligtvis speciellt mycken övning ägnas den. Barnen kan t. ex. få göra Winnetka-kort med dessa tio svåra kombinationer och öva på vanligt sätt.

Avsikten med det föregående har varit att föreslå och motivera en viss metodisk gång genom den pytagoreiska tabellens mångfald. Givetvis kan och bör denna lärogång — liksom vilken annan lärogång som helst — förknippas med och understödjas av olika metodiska hjälpgrepp. Hit hör t. ex. olika räknelekar och en mängd räknemateriel, som kan komma till värdefull hjälp vid inlärandet av multiplikationstabellen. I detta sammanhang bör nämnas framförallt Winnetkakorten och Pallins läggspel, vilka är oundgängliga vid en effektiv inlärning av tabellen. Viktigast av allt — synes det mig — är dock att man, vilken räknemateriel man än använder, tillämpar en riktig systematisk lärogång, som får gå som en ledtråd genom alla räkneövningar, och att övningarna med räknematerielen anpassar sig efter den tillämpade lärogången.

I TfS årgång 1, nr 2, sid. 21 har författaren av dessa rader föreslagit ett systematiskt införande av uppgifter av ekvationstyp i samband med inlärandet av multiplikationstabellen. För fullständighetens skull bör även här detta viktiga moment i korthet ytterligare beröras. I den förut skisserade lärogången bör varje moment förknippas med uppgifter av motsvarande ekvationstyp. Efter genomgång av 2-ggr-tabellen övas på ekvationsuppgifterna 2 · ? = 2, 2 · ? = 4 osv. Efter 3-ggr-tabellen övas uppgifterna 3 · ? = 3, 3 · ? = 6 osv. När i tredje klassen hela tvåans tabell är genomgången ges även uppgifterna ? · 2 = 2, ? · 2 = 4 osv. Övningar med även dessa typer av räkneuppgifter underlättar självklart ytterligare inlärandet av multiplikationstabellen. Men dessa uppgifter av ekvationstyp har också en annan, minst lika viktig mission att fylla: de förbereder och underlättar väsentligt genomgången av det svåraste räknesättet av alla: divisionen! Vid lösandet av divisionsuppgifter ställs vi ju just inför dessa nämnda ekvationstyper. Att räkna ut t. ex. 72/8 = ? innebär såväl matematiskt som praktiskt att lösa ekvationen 8x = 72 eller x · 8 = 72. Genom att sådana ekvationsuppgifter systematiskt inlägges vid inlärandet av multiplikationstabellen, måste självklart härigenom genomgången av divisionen väsentligt och effektivt underlättas. En icke föraktlig räknemetodisk förtjänst i detta sätt att förbereda divisionsräknandet, är att härigenom det matematiska, logiska sambandet mellan de närbesläktade räknesätten multiplikation och division framstår klart och enkelt.

—★—

ANMÄLAN

Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer

En handledning av Fil. lic. Halfrid Stenmark

Skrifter utg. av Sveriges yngre läroverkslärares förening nr 15
Gleerups Förlag, Lund

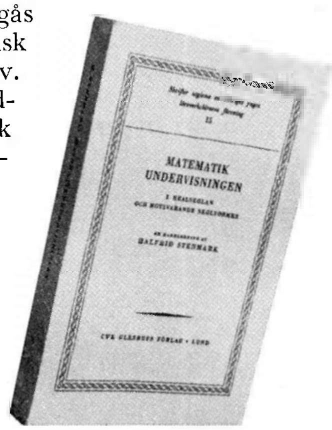
År 1924 utgavs Lektor Frits Wigfors' »Den grundläggande räkneundervisningen», som behandlar räkneundervisningen i småskolans och folkskolans alla klasser. Ännu ett tredjedels sekel efter utgivandet av den första upplagan är denna bok den enda, som mer omfattande behandlar räkneundervisningens metodik på olika stadier.

Något motsvarande metodiskt verk, som behandlar räkneundervisningen inom realskolans klasser, har hittills saknats. Därför är Adjunkt Stenmarks nu föreliggande handledning en pedagogisk insats av unikt och synnerligen stort värde. Handledningen har sitt värde för lärare, som arbetar inom realskolan samt inom enhetsskolans olika linjer i området klass 5 till klass 9.

Innehållsförteckning: Repetition i klass 5, Decimalbråk, Allmänna bråk, Regula de tri, Bolagsräkning, Ränteräkning, Rabatträkning, Den förberedande geometrikursen i klass 6, Ekvationer och ekvationssystem, Affärsproblem, Hastighetsproblem, Talproblem, Algebra, Kvadratrötter, Geometri, Stereometri, Matematiklaborationer i klass 6, Repetitioner, Träning, Huvudräkning, Om överslags- och närmevärdesräkning. Några tankar om undervisningsarbetet i allmänhet, Litteraturanvisningar.

Handledningen omfattar inte mindre än 322 sidor och det är svårt att i en kort anmälan söka fånga och analysera det digra innehållet. Det väsentligaste är sagt om man hänvisar till den citerade innehållsförteckningen med kommentaren: Allt detta är behandlat av en erfaren pedagog på ett förnämligt sätt, gack och läs!

Många metodiska handledningar föra ofta ett alltför allmänt resonemang om principer och metoder i undervisningen, Vad den unge lärare behöver är emellertid direkta praktiska anvisningar *hur* de metodiska principerna i varje särskilt fall skall tillämpas. Här är Adjunkt Stenmarks handledning föredömligt upplagd, då den ofta utförligt i detalj visar hur ett kursmoment skall genomgås i klassen. Den blir på så sätt en handledning av direkt praktisk nytta, som även en erfaren lärare har både nytta och nöje av.

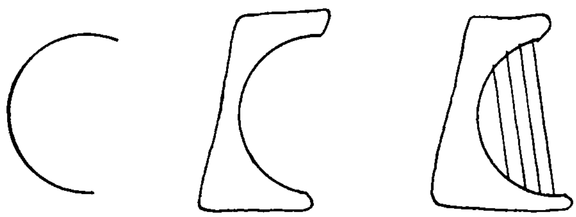


Några av de huvudlinjer, som genomgående tillämpas i handledningen, skall här i korthet beröras. Heuristisk, sokratisk metod utnyttjas: eleverna får (i de kursmoment, där så är möjligt och lämpligt) genom egna resonemang söka sig fram till den matematiska sanningen. Självverksamhet: eleverna få själva ofta skapa sina räkneuppgifter. Författaren lägger stor vikt vid den *språkliga* behandlingen av räkneuppgifterna. Vid klass undervisningen får så många elever som möjligt samtidigt sättas i verksamhet.

Vad den språkliga behandlingen beträffar gäller att man i småskolan lägger stor vikt vid detta moment: här får barnen i form av »räknesagor» berätta om siffrornas och räknetecknens innebörd: för att vara säker på att barnen förvärvat riktiga räknebegrepp övar man dem att tolka siffrornas språk på tydlig svenska. Dessa nyttiga övningar försvinner emellertid alltmer ju högre upp man kommer i klasserna — tyvärr. Man hälsar därför med glädje Adjunkt Stenmarks starka betoning av detta moment även i de högre klasserna. I förordet sätter S. som mål för räkneundervisningen bl. a. »att bibringa eleverna en viss säkerhet att på svenska hjälpligt uttrycka sina tankar» och han rekommenderar »ofta återkommande övning för eleverna i muntlig framställning, i konsten att med egna ord uttrycka sina tankar.» »För att eleverna skall kunna förstå, vad de sysslar med, måste de i ord kunna uttrycka det de gör. Det kan hända, att eleverna blivit vanda vid att *räkna* men inte att *tala om* det som skrives.» Eleverna bör läras »att förstå det enklaste matematiska språket och att själva uttrycka sig med hjälp därav.» S. går t.o.m. så långt att han i samband med hemläxorna ibland begär behandling med införande av fullständig text. Eleverna får med egna ord beskriva geometriska storheter, får själva söka formulera de matematiska reglerna och i ord beskriva räkneoperationerna; ytterligare god övning i att uttrycka sig på svenska erhålles genom att eleverna får finna text till förelagda sifferuppgifter. Självklart måste dylika övningar i »svenska» väsentligt underlätta förvärvandet av klara räknebegrepp.

Något som väl ofta underlåtes i räkneundervisningen är den språkliga förklaringen av de utländska uttryck, som kommer till användning. S. ger många trevliga exempel på hur man kan levandegöra de främmande uttrycken som t. ex. följande:

»Jag ritar på tavlan en cirkelbåge (1), fyller ut, så att jag får liksom ett stativ (2), och drar några parallella linjer (3), och så frågar jag, om klassen förstått, vad teckningen skall föreställa, och när det blir klart, att det skall vara en harpa och att de parallella linjerna skall föreställa strängar, så blir det fråga om vad man kan kalla det



1 2 3

som hörs, om man anslår strängarna. Det blir nog alltid någon, som kommer med förslaget ackord, och så talar vi om, att sträng på grekiska heter *korda* och på engelska cord.» På liknande sätt ges språkliga förklaringar till ord som radie, origo, rationella tal, segment, sektor o. d.

Ett värdefullt räknemetodiskt grepp, som ofta kommer till användning i handledningen, är elevernas eget konstruerande av räkneuppgifterna. Således får dessa t. ex. själva bygga upp ekvationer.

»Vi bestämmer oss alltså för ett visst värde på x, t. ex. 2. Om sedan läraren skriver:

$$3x - 2 = 5x -$$

och så frågar klassen efter värdet av vänstra ledet och första termen i högra ledet och därpå för in resultatet på tavlan ovanför det nyss skrivna så här:

$$\begin{array}{ccc} 4 & & 10 \\ 3x - 2 & = & 5x \end{array}$$

blir helt naturligt nästa fråga: Vad skall vi dra bort från 5x, för att högra ledet skall bli lika med det vänstra? Det blir säkert inte svårt att få svaret 6.

Så här har vi då vår ekvation:

$$3x - 2 = 5x - 6$$

och kan börja tänka på lösningen.»

Eleverna får sedan självständigt arbeta på antytt sätt. Anmälaren instämmer helt i handledningens kommentar till detta tillvägagångssätt: »Det måste bestämt vara så, att elevens känslor gentemot uppgifterna (i detta fall ekvationerna) blir helt andra, om han blir van att själv tillverka dem, än om de skall hämtas ur en uppgiftssamling och han varje gång skall se efter i facit, om han har fått rätt svar. (Det blir nog tillfälle till det ändå.)»

Detta tillvägagångssätt, att eleverna själva skapa sina räkneuppgifter, tillämpas i handledningen även på mer komplicerade ekvationstyper. I regula de tri kan eleverna från en utgångsuppgift. t. ex. att 1 kg kaffe kostar 12 kr, genom förlängning erhålla nya relationer, varur räkneuppgifter kan skapas.

$$\frac{12\text{ kr}}{1\text{ kg}} = \frac{36\text{ kr}}{3\text{ kg}} = \frac{1{,}32 \cdot 12\text{ kr}}{1{,}32\text{ kg}} = \frac{15{,}84\text{ kr}}{1{,}32\text{ kg}}$$

Eleverna får själva komponera texten:

a) Om 3 kg kaffe kostar 36 kr, hur mycket kostar 7 kg?

b) Om 3 kg kaffe kostar 36 kr, hur mycket kaffe får man för 15 kr?

För en metod att sätta klassen i arbete har S. infört beteckningen *radräkning.* Det innebär att räkningarna på tavlan utföras av eleverna radvis, så att en elev tillverkar en uppgift (t. ex. på så sätt som här anförts i fråga om ekvationer och regula de tri), nästa elev utför räkningen och de övriga i raden kontrollerar uträkningen.

Dessa huvudlinjer i handledningens uppläggning: den språkliga behandlingen, elevernas självständiga skapande av uppgifterna och aktiviserandet av hela klassen i radräkningen, exemplifieras i det följande av ett par sidor ur handledningen, som samtidigt visar hur de besvärliga negativa talen på ett enkelt och naturligt sätt kan introduceras:

»Vi skriver nu på svarta tavlan:

$$2 - 7 - 8 + 5 - 3 + 12 =$$

Inkomster	Utgifter	Behållning
2	7	
5	8	19
+12	+ 3	—18
19	18	1

och alltså: $2 - 7 - 8 + 5 - 3 + 12 = 19 - 18 = 1$

Sedan blir det naturligt för elverna att på svenska uttrycka den enkla regeln: Lägg ihop alla inkomsttermer för sig och alla utgiftstermer för sig och minska sedan inkomsterna med utgifterna.

Räknearbetet bör också beskrivas på svenska

Men vi är i alla fall inte nöjda med behandlingen. Nu bör uppgiften och lösningen också beskrivas på svenska t. ex. så här:

Uppgiften är en algebraisk summa, som består av 6 termer, av vilka 3 är plustermer och 3 minustermer. Plustermerna är 2, 5 och 12, minustermerna 7, 8 och 3. Plustermernas summa är 19 och minustermernas 18. Den algebraiska summans värde är +1.

Har man kommit så långt och kanske ytterligare tillsammans med klassen räknat några uppgifter (både skriftligt och muntligt), kan det vara tid att sätta klassen lite mer i arbete.

Eleverna författar uppgifter

Har man en tavla över hela väggen, och det är så gott som nödvändigt för en effektiv undervisning, kan arbetet t. ex. fortsätta så här:

Sitter barnen radvis, kan man nu låta den förste på varje rad samtidigt författa var sin uppgift i stil med de nyss behandlade, men med tillsägelse, att den algebraiska summan inte får innehålla mer än t. ex. 6 termer.

Därvid inträffar alldeles säkert något nytt, ty i något fall kommer den författade uppgiften att ta sig ut någonting i den här stilen:

$$2 - 7 - 8 + 5 - 12 + 3$$

och när sedan eleven nr 2 på varje rad skall utföra räkningarna, under det att övriga elever kontrollerar det arbete, som radens representant utför, så kommer nästan säkert den som fått sig uppgiften $2 - 7 - 8 + 5 - 12 + 3$ förelagd att säga, att den uppgiften kan man inte räkna ut.

Då är det tid att låta allihop sitta ned och att behandla denna fråga med hela klassen Om man skriver som förut

$$\begin{array}{r}\text{Inkomster}\\ 2\\ 5\\ +3\\ \hline 10\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r}\text{Utgifter}\\ 7\\ 8\\ +12\\ \hline 27\end{array}$$

så ligger det göra till hands att säga till eleverna, att nu passar det inte att som tredje överskrift använda ordet *behållning*, och nog bör några i klassen kunna komma på att *skuld* eller eventuellt *brist* nu är det riktiga ordet. Till höger om de två föregående uppställningarna skriver vi.

$$\begin{array}{r}\text{Skuld}\\ 27\\ -10\\ \hline 17\end{array}$$

och behandlingen av uppgiften tar sig ut så här:

$$2 - 7 - 8 + 5 - 12 + 3 = 10 - 27 = -17$$

ty vi kommer överens om att en utgift, brist eller skuld betecknar vi med minustecken.

När så uppgiften behandlats tillsammans med hela klassen, kan arbetet fortsätta radvis.»

Ofta ges i handledningen tips på hur man kan stimulera elevernas matematiska nyfikenhet och intresse genom lämpliga frågor. Läraren kan t. ex. skriva upp följande på tavlan $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3$ (i klass 5) och be eleverna räkna ut det. Läraren noterar sedan på tavlan antalet elever, som fått resultatet 1,21 eller kanske 12. En sådan statistik får eleverna att på allvar börja undra, vilket som egentligen är det riktiga svaret — intresset är väckt!

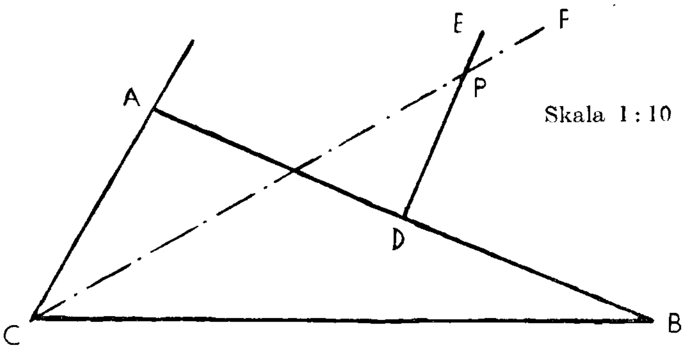
Ytterligare exempel på detta tillvägagångssätt är uppgiften

$$\begin{array}{c}2\\ \hline 3\\ \hline 4\\ \hline 5\end{array}$$

som kan ge fem olika svar, beroende på vilka bråkstreck, som betraktas som huvudbråkstreck. Dylika övningar stimulerar elevernas eftertanke och tvingar fram klara räknebegrepp.

Den förberedande geometrikursen i klass 6 liksom geometrin för de högre klasserna är utförligt behandlad i handledningen. Här skall endast omnämnas en enda, intressant detalj. Redan i klass 6 kan eleverna med hjälp av begreppet skala praktiskt lösa geometriska uppgifter, givna i studentexamen! Som typexempel härpå anger handledningen ex. 7 från studentexamen på latinlinjen vt. 1951:

I en triangel ABC är sidan b= 3 dm, sidan a 8 dm och C = 60^0. Bisektrisen (CF) till vinkeln C och mittpunktsnormalen (DE) till AB skära varandra i P. Bestäm av-



ståndet PC! Eleverna konstruerade figuren i skalan 1:10 och mäter sträckan PC och får PC = 63,5 mm. Svaret på den ursprungliga studentexamensuppgiften blir således 63,5 cm. (Uträknat med tabeller blir svaret 63,51 cm).

Dylika uppgifter kan hämtas från de planimetriska uppgifter, som givits i realexamen och s udentexamen på latinlinjen. Det måste onekligen vara roligt för eleverna att redan på ett tidigt stadium praktiskt kunna lösa avancerade examensuppgifter. Det slår anmälaren att man här skulle kanske finna en väg att överbygga klyftan mellan de praktiska och teoretiska linjerna i enhetsskolan. Man skulle kunna låta geometrikursen vara till innehåll i största möjliga utsträckning gemensam för de olika linjerna; skillnaden skulle endast vara de olika behandlingssätten. Rektor Börje Svensson är i en artikel i detta nummer av TfS (sid. 10) inne på samma tankegång. Han föreslår där för de icke teoretiska eleverna en s.k. experimentell matematik och nämner som exempel ett åskådligt bevis för den teoretiskt svårbevisade Pythagoras' sats. På samma sätt finns det en mängd vackra geometriska satser, som kan vara rätt svåra att strängt matematiskt bevisa men som lätt åskådliggöres medelst enkel konstruktion. För att nämna några enkla exempel: låt eleverna i en triangel dra samtliga höjder, bissektriser, medianer eller samtliga mittpunktsnormaler. Låt dem praktiskt medelst omsorgsfull konstruktion upptäcka denna fascinerande matematiska sanning, att de nämnda linjerna alltid stråla samman till en enda punkt, hur triangeln än är ritad. Exemplen kunna mångfaldigas. Det mesta, som tillhör geometrikursen på den teoretiska linjen, kunde på så sätt praktiskt visas även på den praktiska och allmänna linjen. På så sätt skulle de olika linjerna erhålla värdefulla bildningsmoment gemensamma — en av enhetsskolans grundtankar.

—★—

Till slut vill anmälaren citera och helt instämma i det uttalande, som Rektor Baltzar Wahlström avgivit i sin rescension i Tidning för Sveriges Läroverk nr 21:

Boken är behövlig. Den bör finnas på varje matematiklärares bord — inte stå bortglömd i ett referensbiblioteks hyllrader.

TIDSKRIFT FÖR SKOLMATEMATIK
Jungmansgatan 1, Karlstad. Tel. 163 13
utkommer med 4 nr per läsår

Prenumeration per läsår Kr. 5: —
Postgironummer 49 02 82

Redaktör och ansvarig utgivare:
Lektor Edvin Ferner

KARLSTAD 1956
Nya Wermlands-Tidningens Boktryckeri