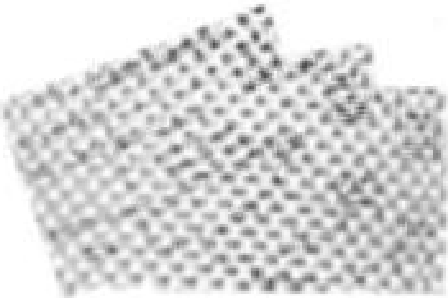
Tidskrift
FÖR SKOLMATEMATIK

ÅRGÅNG 2 · Dec. 1956
Nr 2



Tre små blanketter

kan avgöra TfS:s öde! För att kunna hålla sin höga klass ifråga om innehåll och utformning måste Tidskrift för Skolmatematik nu få effektivt stöd av sina läsare, så att tidskriften blir alltmer spridd bland lärarna. *Sök därför placera åtminstone någon av de bifogade prenumerationsblanketterna hos någon kollega och övertyga honom vänligt men bestämt om nyttan och nöjet av att vara prenumerant på TfS!*

Tidskrift för Skolmatematik är ett nytt, intressant pedagogiskt initiativ, som borde intressera varje lärare, som har med räkneundervisningen att göra. Varje lärare, som gör anspråk på att vilja följa med utvecklingen och hålla sig à jour med de aktuella problemställningarna i ett av skolans viktigaste ämnen, kan inte gärna undandra sig ansvaret att stödja TfS och dess idé.

En ursäkt, som möjligen kan tas på allvar, för att man försummar att prenumerera på TfS är att det finns så många andra tidskrifter och kårorgan. »Vi hinner inte med ytterligare att studera en specialtidskrift». Häremot kan med skärpa invändas, att vi *borde ha* och också *har* både råd och tid att ägna en liten stund var tredje månad åt ett av vårt skolschemas allra viktigaste ämnen!

Tidskrift för Skolmatematik är den enda tidskrift i vårt land, som når och tjänar lärare från våra många olika lärarkategorier. Den utnyttjar dock icke något ekonomiskt stöd från några kårer eller fonder. Den ynka prenumerationsfemman skall inte behöva subventioneras! Tidskriften räknar med att kunna lita på den enskilde lärarens stöd och intresse.

De lärare, som redan intresserat slutit upp kring TfS, har nu möjlighet till en avgörande insats för tidskriften. Sprid TfS med hjälp av postgiroblanketterna! Så här i starten har TfS ingen ekonomisk möjlighet till någon mer omfattande reklam och annonsering. Dess spridning beror främst på läsarnas villighet att föra tidskriften vidare till sina kolleger. Först härigenom kan tidskriftens idé definitivt förverkligas. Några små blanketter kan avgöra tidskriftens öde! Hjälp till!

Matematik-kurs i Jönköping

Den 6—11 augusti i år hölls en kurs i matematik-metodik på Södra Vätternbygdens Folkhögskola i Jönköping. Kursdeltagare var ett trettiotal lärare från småskole- och folkskoleseminarierna. Att Kungl. Skolöverstyrelsen ansett det angeläget att anordna en så pass omfattande kurs som denna, vittnar om ett alltmer ökat intresse för räkneundervisningen och ett erkännande av dess vitala betydelse.

Mången undrade nog före kursen, om det inte skulle bli väl drygt med en hel vecka med långa arbetsdagar med enbart räknemetodik. Men återigen visade matematiken sina inre, rika möjligheter! Det blev en stimulerande och givande vecka! De intressanta, omväxlande föredragen och de givande diskussionerna skänkte kursdeltagarna bestående impulser för den praktiska räkneundervisningen.

Ledare för den förnämliga kursen var Lektor Charles Hultman, Lärarhögskolan, Stockholm, med medarbetarna seminarielärarna Viola Käll, Jönköping och Helga Nilsson, Stockholm.

Följande föredrag ingick i kursen: Docent O. Magne: Nya metodiska rön. Docent E. Vanäs: Terminologiutredningen — rön och problemställningar. Seminarielärare G. Wahlberg: Diagnostiska prov contra provräkningar. Lektor T. Ljunggren: En matematiker ser på låg- och mellanstadiets matematikundervisning. Seminarielärare Helga Nilsson: Lågstadieproblem. Lektor Charles Hultman: Mellanstadieproblem. Fil. mag. O. Carli: Högstadieproblem. Folkskollärare Sven Olsson: Granskarens syn på matematikläroböckerna — ros och ris.

Ett av de många skälen för startandet av Tidskrift för Skolmatematik var att skapa ett forum, där föredrag och diskussioner från olika kurser kunde presenteras för en vidare krets av lärare. Därför kommer detta och följande nummer av TfS att i stor utsträckning ägnas åt Jönköpings-kursen.

EN MATEMATIKER SER PÅ LÅG- OCH MELLANSTADIETS MATEMATIKUNDERVISNING

Av Lektor Torbjörn Ljunggren.

När jag tar till orda vid detta tillfälle för att säga något om en matematikers syn på låg- och mellanstadiets matematikundervisning, måste jag nog börja med att tala om, att jag är tveksam, om jag uppfyller de villkor, man bör ställa på en matematiker i egentlig mening. Hela min verksamhet utöver elementärstadiet vid universitetet har jag ägnat den teoretiska fysiken; det innebär, att jag aldrig varit i tillfälle att skapa någon ny matematik. Däremot har jag flitigt använt andra »riktiga» matematikers resultat vid studiet av de problem, som den omgivande naturen furnerar oss med. När jag trots detta vågat åta mig att tala om det förelagda ämnet, beror det på att jag vet, att man för att kunna använda en matematisk teori måste grundligt sätta sig in i dess förutsättningar och innebörden av dess resultat.

Ofta har man då anledning att fundera över de fundamenter, matematiken vilar på, och då kan man inte gärna undgå att syssla med talbegreppet och det axiomsystem som räknandet med tal bygger på. Därmed är man inne på något, som för den fråga, jag skall yttra mig i, är väsentligt. De metodiska anvisningarna för folkskolans första klass betonar, och det med rätta, att stor vikt skall läggas vid att klargöra talföreställningar och räkneförlopp. Vare det mig fjärran att tro, att man för de små liven i sjuårsåldern kan eller bör presentera en sträng och modern teori för vad tal är! Men för oss, som sitter i katedern, finns det all anledning att sätta sig in i de mera moderna teorierna. Här och var kan man komma att dra slutsatser, som påverkar det metodiska handlandet redan på begynnelsestadiet. När jag säger detta, har jag ett par pedagogiska principer i tankarna, som gäller för all pedagogisk verksamhet, och som jag vill formulera så:

1) Eleverna får aldrig bibringas en begränsad kurs i något ämne på ett sådant sätt, att ett senare inhämtande av en större kurs på något sätt försvåras.

2) Den använda metodiken får aldrig stå i vägen för kunskapsinhämtandet. M.a.o. man får inte väja för en något svårare lärogång, om man på det viset kan ge eleverna bättre kunskaper och färdigheter.

Detta låter som självklarheter. Men jag skulle vilja träffa den lärare, som, på vilket stadium han än undervisa månde, vågar påstå, att han aldrig syndat emot dem.

De begrepp och övriga föreställningar, som en teori sysslar med, kan indelas i två slag, de som kan definieras och de som inte kan det. Men vad menar man då med att definiera? Ofta menar man sig klara ut ett begrepp, när man uppdelar det i dess beståndsdelar. Men inom matematiken kan man inte nöja sig med en så diffus uppfattning om definitionens roll; där gäller i stället följande syn. Man väljer ut en serie beteckningar (d.v.s. storheter och relationer mellan dessa). Vi betecknar denna serie med P. Sedan tar vi något (x) som ej tillhör P. Om x kan beskrivas med hjälp av beteckningarna i P på ett sådant sätt, att icke samtidigt något annat beskrives, är x definierbart inom den föreställningsvärld, där begreppen P valts som de odefinierbara.

Hur är det nu med talen? Skall man uppfatta dem som odefinierbara eller ej? Det vore oriktigt att utan vidare avfärda det ena eller andra av de båda möjliga svaren på den frågan. Det beror på att referenssystemet P i viss utsträckning är godtyckligt valbart. Det man dock måste begära är, att P ej innehåller några motsättningar, vidare att det är fullständigt, samtidigt som det ej skall innehålla någon beteckning som är definierbar med hjälp av resten av P.

Emellertid talar åtskilligt för att man ej bör låta talen och dess räknelagar ingå i P. Kroneckers berömda aforism »Gud skapade de hela talen, allt annat är människoverk» blir inte sämre för det. Men det har visats, att alla områden av ren matematik kan byggas upp med hjälp av en liten grupp begrepp och relationer mellan dessa hämtade från logiken; Russell kallar dem logiska konstanter. Den förste, som var inne på tanken, att det skulle kunna förhålla sig så, var Leibniz, och den egentliga orsaken till att han inte drog ut de fulla konsekvenserna av sin åsikt var, att han hade svårt att få geometrien att passa in i schemat; det var oundvikligt på en tid, då man ännu inte kunde tro annat, än att den euklidiska geometrien var den enda tänkbara. Det blev därför en senare tids och andra mäns verk att genomföra detta återförande av matematiken på logiska principer. Jag nämner namnen på några av dem, som betytt mest i detta arbete: Cantor, Dedekind, Peano, Whitehead, Russell.

Som en opponent mot denna strävan antecknar jag Felix Klein. Det han var rädd för, var att det intuitiva momentet i matematiken skulle försvinna. Så här faller hans ord i hans »Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus»: »Det synes mig, som om man måste bibehålla något, om än aldrig så litet av intuition. Man måste alltid använda en viss intuition i de mest abstrakta formuleringar med de symboler, man använder i operationer, för att kunna åter känna igen symbolerna.» Som ni märker, är det en uppehållande försvarskamp, han för, och något senare skriver han: »Naturligtvis måste de logiska förknippningarna, man skulle kunna säga det stela skelettet i den matematiska organismen, bestå för att ge den dess artegna tillförlitlighet. Men det som lever i matematik, dess mest betydande stimulans, ..., beror helt på dess användningar, d.v.s. på de ömsesidiga relationerna mellan dessa rent logiska ting och alla andra domäner.» I det senare av dessa citat instämmer jag helt, det utsäger något mycket väsentligt, men icke i det förra. Intuitionen har sin väsentliga roll kvar ändå: den är metodfinnaren och problemlösaren, under det att logiken får komma efter och se till, att de misstag, dess geniala släkting eventuellt begått, rättas till.

Ett av matematikens grundläggande begrepp är *mängden*. Med en sådan menar man sammanfattningen av ett antal åtskilda föremål. Ni, som sitter här, och som jag hoppas hör på mig, utgör sålunda en mängd. De ord, som jag släpper utanför mina tänders galler i detta föredrag, är en annan mängd, med litet fler termer. Alla heltal är ett tredje exempel, denna gång på en mängd med oändligt många termer. Om man slår upp en lärobok i matematik för första klassen, finner man fullt med exempel på mängder: äpplen, leksaker, barn, fåglar, slantar. Till varje sådan mängd kan man nu ordna ett tal, angivande antalet termer i mängden. Det är ju så man introducerar talbegreppet i skolan, naturligtvis utan att explicit omnämna mängdbegreppet. För att inte något missförstånd eventuellt skall uppstå på den punkten, är det väl bäst, att jag säger ifrån, att jag inte tror att det ens vore möjligt. Man låter barnen räkna föremålen i mängden. Men *rent teoretiskt* måste man invända två saker mot den metoden. För det första kan man på det viset endast handskas med mängder med ett ändligt antal termer. För det andra är det inte så alldeles lätt att komma underfund med vad man gör, då man räknar. Undersökningen av den processen är en uppgift för psykologien. Huruvida den varseblivning av föremålen, som måste äga rum, är »samtidig i rummet» eller »eftervartannat i tiden», skall vi inte här gå in på; vi slår bara fast, att redan räknandet av ett litet antal föremål är en mycket komplicerad process och icke av logisk art.

Det är därför fördelaktigt att betrakta mängden själv; man slipper då gå utanför de logiska begreppen för att göra reda för vad talen skall uppfattas som. Men då måste man först klara ut, vad man skall fordra av två mängder, för att de skall kunna representeras av samma tal. Villkoret är, att mellan elementen i den ena och den andra mängden skall föreligga, vad man kallar en (1,1)-korrespondens. Därmed menas, att mot varje element i den ena mängden skall svara ett och endast ett element i den andra mängden, och vice versa. Men här måste man se upp! Så som vi här formulerar villkoret har vi använt räkneordet ett. Och det får vi strängt taget inte! Lyckligtvis är det dilemmat endast av språklig art. Så här kan man uttrycka villkoret, litet mera omständligt och abstrakt men utan räkneord: Sådan korrespondens föreligger mellan mängderna X och Y (med elementen x resp. y), om ur sambanden $x=f(y)$ och $x'=f(y)$ följer att $x=x'$ samt om ur sambanden $x=f(y)$ och $x=f(y')$ följer att $y=y'$. Om nu denna korrespondens föreligger, säger man, att mängderna är ekvivalenta. Betrakta nu en viss mängd och alla med denna mängd ekvivalenta mängder! Då har man försökt att definiera det för dessa mängder representativa talet som den för dem gemensamma egenskapen. Gör man så har man definierat talen genom abstraktion; en analys av förfaringssättet i skolan ger väl vid handen att den metod, som där används, mer eller mindre implicit är just en sådan procedur.

Nu lider denna metod av en mycket allvarlig brist. Den klarlägger på intet sätt, att ett och endast ett ting skulle satisfiera definitionen. Vi måste tvärtom räkna med att vi får en mängd (i ordets matematiska mening) av gemensamma egenskaper, och vi vet inte ens utan vidare, hur många element denna mängd har. I själva verket har den oändligt många. Vilken av dessa egenskaper, som skall definiera talet, kan man icke på logisk väg avgöra. En aldrig så liten gnutta intuition klarar visserligen den saken, men i en teori, som vi söker bygga upp på logisk grund, måste det ändå uppfattas som mindre tillfredsställande. Det dilemma, som vi här råkar in i, har förresten sin motsvarighet, närhelst man söker definiera något genom abstraktion; idealiseringen från »oväsentligheter» är ingen logisk operation.

För att undvika denna svårighet har man nu tvingats till ett steg, som vid första påseende verkar chockerande. Vi talade nyss om en mängd, som vi kan kalla X, och alla med denna ekvivalenta mängder. På det viset får vi en mängd av mängder, och det visar sig naturligt att definiera det för X representativa talet som just denna mängd av mängder. De krav, vi ställer på en definition, blir nu uppfyllda; medlemskapet i mängden är tydligen en gemensam egenskap för alla X men för inga andra mängder. Vidare är relationen mellan X och mängden sådan att X inte står i samma relation till något annat. Det paradoxala i definitionen försvinner nog, när man gjort sig litet mera förtrogen med vad den innebär. Låt oss ta ett enkelt exempel! En pokerspelare, som blir synad, säger, att han har fyrtal i kungar, som synes en ganska lycklig situation. Logiskt sett är detta påstående en produkt av de båda enklare: »Jag har ett fyrtal» och »Detta fyrtal består av kungar». Anslutning till den syn på talbegreppet, som jag just lagt fram för er, får man, om man transformerar hans uttalande till detta: »Jag har en mängd av kungar på min hand, och denna mängd tillhör den mängd av mängder, som innehåller alla fyrtal.» Det är logiskt sett ett alldeles oantastligt sätt att uttrycka sig på, men jag kan mycket väl förstå, om en pokerspelare, som använder de ordalagen, i alla fall blir missförstådd. Dock icke av logiska skäl. Likaväl som en klass alldeles säkert skulle tycka, att det vore knas på den nya magister, som på en matematiklektion skulle eftersträva ett sådant övermått av tydlighet.

Nu undrar kanske många, om allt detta krångel verkligen är nödvändigt. Då måste jag säga, att den anvisade vägen är den enda, jag känner till, som på ett invändningsfritt sätt inför talbegreppet. Den allvarligaste konkurrenten är väl det förfaringssätt, som går tillbaka till Hilbert, och som på det bästa sätt jag vet utförts av Peano. Denne bygger upp ett talbegrepp av rent formell art utan att i förstone bekymra sig, om det har någon motsvarighet eller användning i verkligheten. Utgående från tre odefinierbara begrepp (talet O, ändligt tal, begreppet omedelbart efterföljande tal) och fem axiom för dessa, som jag inte här skall redovisa, härleder han de räknelagar, som gäller för tal. Mot denna metod finns det nu en mycket allvarlig invändning, nämligen den, att det kan konstrueras många system av kvantiteter, som satisfierar de fem axiomen. Sålunda kan man företa en »translation» av det vanliga talsystemet, och låta talet 1 (eller något annat heltal) spela nollans roll. Nu skall onekligen talen också kunna användas till något, nämligen att räkna föremål med, och då bör man nog begära av teorien för talbegreppet, att den inte skall sväva på målet i detta avseende. Den mängdteoretiska definitionen klarar den svårigheten: mängden av alla mängder, som ingenting innehåller, är förvisso igenkännbar och representerar talet noll.

Hur skall man nu definiera räkneprocedurerna med de på så vis införda talen? Alldeles tydligt är att man måste börja med de direkta räknesätten addition och multiplikation, alltså dem, som alltid ur två eller flera heltal leder fram till ett nytt heltal.

Addition

Med den logiska additionen av två påståenden menas, att antingen det ena eller andra gäller. Summan av »Han är svensk» och »Han är norrman» är alltså »Han är svensk eller norrman». Härur fås motsvarande definition av den logiska summan av mängder: Betrakta en mängd k av mängder! Den logiska summan av mängderna i k är då den mängd, som innehåller alla element som ingår i de mängder som tillhör k. Men därmed är även begreppet aritmetisk addition klarlagt. Varje element i k representerar ju ett tal. Summan av de tal som motsvarar mängderna i k är då det tal som motsvarar den mängd som är den logiska summan av mängderna i k. Ett villkor måste emellertid vara uppfyllt: mängderna i k får inte ha någon gemensam term. Denna definition är alldeles generell: den håller, även om någon eller alla termer är oändliga, eller om antalet termer är oändligt. Enda begränsningen är att den endast talar om positiva heltal. Den inskränkningen skall jag snart komma tillbaka till och motivera.

Här kan vi notera en del viktiga omständigheter. För det första blir additionens kommutativitet en omedelbar följd av definitionen: de enskilda mängderna i k är ju på intet sätt numrerade, och kan i det allmänna fallet inte med någon metod numreras. Att man måste påpeka, att $a+b=b+a$, framstår som enbart en brist i den använda symbolen.

Man bör dessutom minnas, att definitionen talar om mängder utan gemensamma termer. Glömmer man det, kan man ofta komma till felaktiga resultat. Tänk t. ex. på den gamla räknegåtan om ett sällskap av två fäder och två söner, som tillsammans utgör tre personer. Men man behöver inte tillgripa ett så artificiellt exempel på detta. Följande problem taget från en bok i Unterhaltungsmathematik är bra mycket mera verklighetsbetonat:

En herre köpte i en juveleraraffär en kråsnål för 35 kr. I likviden ingick en nål av oäkta metall. Han betalade med en 100-kronesedel. Juveleraren måste för att kunna ge tillbaka växla i en grannaffär, och gav sedan kunden 66:50 kr varpå denne försvann. Snart visade det sig emellertid att sedeln var falsk och juveleraren måste ersätta grannen med en äkta sedel. Trots att juveleraren för att egga den polis som spanade efter bedragaren gav honom den oäkta kråsnålen, kunde man inte få tag på denne. Juveleraren påstod sig nu ha gjort en förlust på 204:50 kr, nämligen:

1 nål	35: —
1 nål beräknad till	1: 50
Kontanta pengar till tjuven	66: 50
Nålen till polisen........................	1: 50
100 kr till grannen	100: —
Summa kr	204: 50

Hur stor var förlusten i verkligheten?

Säkerligen finns det ändå mer närliggande exempel. I varje fall bör eleverna någon gång, och det ganska tidigt, konfronteras med att $2+2=4$ ej är en *absolut förutsättningslös* sanning.

Multiplikation

Det vanliga sättet att definiera multiplikation är väl att utgå från en upprepad addition men i längden kan man inte stanna vid en så okomplicerad metod. Den kan ej användas, om någon eller några av faktorerna är oändliga, och ej heller, om de är annat än hela tal. Hur svårt detta problem faktiskt är, framgår tydligt av en uppsats från år 1917 i Elementa av lektor A. Meyer. Där presenterar han en egen definition baserad på begreppet proportionalitet efter att verkningsfullt ha kritiserat tidigare definitioner. Så vitt jag kan bedöma, har han dock inte själv lyckats undgå alla blindskär; det är något av en cirkeldefinition i hans artikel.

Den alldeles generella definitionen har Whitehead givit, och den är trots allt inte så komplicerad, som den vid första påseende verkar. Vi betraktar en mängd k av mängder och bildar härur den s. k. multiplikativa mängden K till k på följande sätt. Varje term i K är själv en mängd, vars termer har tagits ur mängderna i k med en och endast en term ur varje mängd. När man erhållit alla mängder, som bildats på detta vis är den multiplikativa mängden K färdigbildad. Det tal som K representerar, är produkten av de tal, som motsvarar de mängder som ingår i k.

Låt oss som exempel ta produkten 3·4! Mängden k kan då symboliseras av (1, 1, 1); (1, 1, 1, 1), där alltså ettorna anger elementen i mängderna i k. Den multiplikativa mängden K kan då tecknas (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) där varje etta denna gång symboliserar ett tvåtal taget ur mängderna i k. Sätter man här plustecken i stället för kommatecken och multiplikationstecken i stället för semikolon, finner man, att det hela återger ett mycket naivt men korrekt sätt att utföra räkningen 3·4.

Märk, att med denna definition blir även nu den kommutativa lagen självklar och ett uttryck för symbolernas otillräcklighet! Det är fullkomligt trivialt, om man skriver a·b eller b·a, och enligt denna uppfattning är det då ej heller meningsfyllt att i längden behålla de särskiljande beteckningarna multiplikator och multiplikand. Det enda ordet faktor bör räcka och få beteckna dem bägge. Det är en helt annan sak att den tankegång, som förorsakat räkneoperationen ev. framhävt den ena eller andra faktorns dominans i det *speciella problemet*. Men så snart funderandet över detta lett till slutsatsen, att det är lämpligt att multiplicera två tal a och b med varandra, är det en *tom sifferräkning*, som skall vidtaga, och den skall utföras utan påverkan av det speciella problemet. När räkningen utförts, får man tolka, vad resultatet betyder för det problem, man studerar. Vore det inte en fördel, om man mer än nu är fallet framhävde den kommutativa lagen och förde beteckningarna multiplikand och multiplikator i bakgrunden? Det är klart att detta kräver en abstraktionsprocess hos eleverna, som måste ta en rundlig tid. Men innan den är klar har barnen inte fått en riktig bild av vad multiplikation är.

De inversa räknesätten

Det enda logiska sättet att införa dessa räknesätt är genom att studera ekvationstyperna $x+a=b$ och $a \cdot x=b$. När man subtraherar eller dividerar utnyttjar man förresten alltid mer eller mindre implicit samma tankegångar som när man löser dessa ekvationer. Studiet av dessa ekvationer har ju dessutom konsekvenser för talsystemets utvidgning till bråk och negativa tal, men det skall jag inte denna gång fördjupa mig i, inte därför att dessa problem skulle vara mindre viktiga, utan helt enkelt av tidsnöd. Jag vill nämligen något mera ingående diskutera räknesättet division.

Det är naturligtvis den eventuella uppdelningen i delningsdivision och innehållsdivision, jag därvid tänker på. Här skulle jag visserligen kunna nöja mig med ett ganska kort resonemang på följande sätt. Eftersom multiplikation definieras så, att ingen skillnad kan upprätthållas mellan $a \cdot b$ och $b \cdot a$, kan man ej heller skilja på de bägge ekvationerna $a \cdot x = b$ och $x \cdot a = b$. De är identiska, och därav följer, att den räkneoperation, som löser den ena, även löser den andra. Men i förra fallet talar en del om delnings- och i det senare om innehållsdivision. Enligt det resonemang, jag nu för, skulle det vara en alldeles onödig komplikation att införa två namn på en och samma sak, och absolut förvirrande att tala om fem *räknesätt*. Men jag har en känsla, att tankegången är litet för abstrakt, och att en konkretisering därför är befogad.

Jag menar verkligen, att det inte är lämpligt att skilja på multiplikator och multiplikand. I det allt överväldigande antalet problem, som föranleder en multiplikation, är det inte ens i den speciella situationen möjligt att utan att ikläda tanken en artificiell tvångströja ge företräde för den ena faktorn. Vad är multiplikator när man multiplicerar (mätetalen för) basyta och höjd för att få (mätetalet för) en lådas volym? Eller när man ur volttal och amperetal beräknar wattal? Endast i den speciella grupp, där ena (men ej den andra) faktorn i det studerade problemet motsvarar ett dimensionslöst tal, kan tänkandet förleda en till att ge den ena faktorn en annan betydelse än den andra. Det är att beklaga, att just denna grupp problem har en så stor betydelse under de första årens matematikundervisning. Så stor, att den *metodik* man använt för att få barnen att fatta tydligen fått dominera allting annat.

Det farliga med en artificiell uppdelning av ett räknesätt är enligt min mening följande. Den egentliga innebörden av ett påstående av arten »För att lösa detta problem skall jag företa följande innehållsdivision» framgår först när man upplöser det i de två, varav det utgör produkten: »För att lösa detta problem skall jag företa följande division; för att komma fram till det resultatet har jag måst tänka på det och det viset». Risken är nu, att man bibringar eleven den tron, att endast två skilda resonemang resulterar i att en division skall utföras, då väl sanningen är den, att ett mycket stort antal, från varandra vitt skilda tankegångar kan leda till en och samma räkneoperation. Låt oss ta ett par exempel! Antag, att man känner sannolikheten för att två av varandra oberoende händelser skall inträffa samtidigt och dessutom sannolikheten för att den ena av dem skall ske, samt söker sannolikheten för att den andra skall ske. Eller betrakta den division man får genom övergång från rot till potens: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ Jag efterlyser ett resonemang, som enkelt och *oomtvistligt* hänför dessa divisioner till antingen gruppen innehålls- eller gruppen delningsdivision.

Enligt min bestämda mening är ett särskiljande av två slags division inte förenligt med de principer, som jag talade om i början. Elevernas rätta förståelse för division försvåras, och metodiken har fått stå i vägen för ett inhämtande av korrekt kunskap. Man kan nog uttrycka det skarpare ändå. Just på denna punkt löper man fara att försitta ett utmärkt tillfälle att inpränta i sin klass en annan matematisk sanning av mycket stor räckvidd, den nämligen, att vitt skilda problem kan leda till precis samma räkningar. Det gäller här i begynnelsen, det gäller även i den mest avancerade matematik. Jag har ett lustigt och slående exempel på detta. En av mina vänner, som specialiserat sig på studiet av problem om neutroners spridning i en moderator, berättade att han en dag uppsöktes av en annan kamrat, som sysslade med biologiska problem. Nu var denne sysselsatt med fältförsök, där han släppte ut fjärilar på en äng. Han ville höra, om man på något sätt kunde beräkna sannolikheten för att hitta fjärilarna inom en viss yta vid en viss tidpunkt efter utsläppet. Min kamrat studerade problemet en stund — och fann, att efter en lämplig idealisering var detta »fjärilsproblem» förbluffande likt hans eget neutronproblem och möjligt att studera med samma ekvationer.

En fråga, som jag faktiskt vill ställa här, är denna: I vilken utsträckning sker egentligen denna uppdelning av divisionen »ute på fältet»? Hos de elever i klass 1[5], som jag tid efter annan har undervisat, har jag aldrig funnit någon benägenhet att särskilja de bägge sorterna. I folkskolans undervisningsplan har jag inte hittat något påbud om särskiljandet. I lektor Wigforss' lärobok i aritmetik faller hans ord så: »Vid undervisningen i skolans lägre klasser brukar man med hänsyn härtill dela upp division i . . . .». Någon fanatisk anhängare av uppdelningen var han tydligen icke.

Till dem som håller på uppdelningen vill jag säga att ett sådant förfaringssätt är *teoretiskt* omotiverat och felaktigt. Ej heller kan jag inse, att det kan försvaras med några metodiska fördelar av varaktig art. Har jag nu uttryckt mig tillräckligt tydligt på denna punkt, så att jag kan förvänta en debatt? Jag upprepar vad jag sade nyss. Här föreligger en sammanslagning av två led i tankegången, ett, som rör motiveringen för en räkning, och ett, som rör själva räkningen. De bör hållas i sär.

En reflexion till! Vill man på något sätt systematiskt hålla reda på de tankegångar, som leder fram till en viss räkneoperation, måste man lämna den rena matematikens fält och övergå till den tillämpades. Det nya, som då kommer till, är storheternas sorter; i den rena matematiken är allt rena tal, även ytor och sådant. Det man måste hålla reda på, är produktens dimension (i ordets fysikaliska mening). Så gör man med framgång i fysiken. Men all sådan systematik bedömer jag ligga långt ovanför de problem, varmed man kan sysselsätta elever på låg- och mellanstadiet.

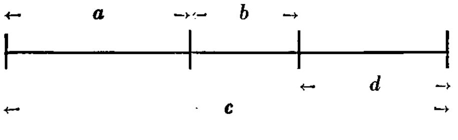
Att matematik är en abstrakt vetenskap, och att varje lärogång i detta ämne måste innehålla en träning i konsten att abstrahera, är ovedersägligt. Lika viktigt är emellertid att träna den omvända proceduren: att i en abstrakt matematisk formel eller räcka av operationer kunna läsa in ett konkret innehåll. Det sista är lika svårt om inte svårare än det förra. Hur ofta händer det t. ex. inte, att en gymnasist misslyckas med en uppgift därför att han inte sett eller förstått vad han själv har gjort. Problemets lösning har legat framför honom men han har inte »sett skogen för bara träd». Alltför sällan tränger det verkligen in i elevernas medvetande, att matematiken på sätt och vis är ett språk, men ett underligt, så att säga polyfont språk. Att läsa det språket det är att ge de abstrakta uttrycken ett konkret innehåll.

Den synpunkten är nu rikligt beaktad i lärogången för lågstadiet. Till små enkla uträkningar får barnen själva hitta på räknehistorier. Men hur blir det litet längre upp, när de uttryck, som man kan behärska, blir litet mer komplicerade? Samma fråga kan man ställa till dem, som undervisar på högre stadier också: realskolor, gymnasier, högskolor. Matematiken skall leva för eleverna men gör det beklagligt ofta inte.

Emellertid får denna synpunkt inte överdrivas. Det är så rätt, som Whitehead säger: »Det är en fullständig falsk truism, som ofta framföres av framstående människor, när de håller tal, att vi alltid skall öva vår vana att tänka på vad vi gör. Exakt det motsatta är fallet. Vår civilisation går framåt i samma mån, som vi kan öka antalet av de operationer, som vi kan utföra utan att behöva tänka på dem. Tankeoperationer är som kavallerichocker i ett fältslag — de är mycket begränsade till sitt antal,de kräver utvilade hästar och måste därför sättas in i de avgörande ögonblicken». — Det bör kanske talas om, att dessa ord skrevs något av åren strax före det första världskriget.

Nå, förhållandena i en skola är inte alldeles identiska med vår civilisations. Det gäller att få eleverna att förstå operationerna *om och när det behövs*. När läraren är säker på att hans elever verkligen begriper, vad det är de gör, kan han låta dem börja räkna mekaniskt.

Man kan lägga en synpunkt till på detta. När Poincaré i en av sina populariseringar kommer in på frågan, vad matematik är, och hur den når sina resultat, betonar han det märkliga i att den överhuvud taget kan nå några som helst resultat. Vid sina deduktioner börjar dock en matematiker omedelbart eller medelbart med någon alldeles trivial sanning. Då borde väl också resultatet utmärkas av samma trivialitet. Det förklaras nu av matematikens förmåga att skapa nya begrepp; men ett av de många kraven på en matematiker är just att han skall kunna nyttiggöra till synes menlösa sammanhang. Ett exempel på detta, som i varje fall gjort ett visst intryck på mig, är



detta. Att man från likheten $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ kan komma till sambandet $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, är ju alldeles trivialt. Likafullt är det beviset för en alls inte trivial reciprocitetssats för harmoniska punktpar. Se figuren! Det är bättre ju tidigare man kan få in denna vana att läsa in ett konkret och icke betydelselöst innehåll i alldeles självklara matematiska sammanhang.

Men faror lurar förvisso vid denna konkretisering! Man måste tidigt lära sina elever att aldrig helt lita på de resultat, en matematisk kalkyl ger. Vid idealiseringen kanske något för problemet väsentligt gått till spillo. På den tiden, det fortfarande var inträdesprövningar till läroverken, brukade jag ofta som sista problem ge en uppgift av följande art: En man äger 18 stockar av tre meters längd. Han önskar därav förfärdiga stockar av bara två meters längd. Hur många får han? Ni får tro mig eller inte, men praktiskt taget alla som »löste uppgiften» fick antalet stockar till $\frac{18 \cdot 3}{2} = 27$. Det var först, när jag frågade efter receptet på det goda lim, de använt, som de kom på att de bort pröva lösningen genom att konfrontera den med verkligheten.

Problemet avkortning (eller, längre ned i klasserna division, som inte går jämnt ut) kan också vålla en hel del trassel. Jag har alltid revolterat mot den mekaniska regel, som säger, att man skall höja, om den första strukna siffran är 5 eller högre.

Jämför de båda problemen:

1) En handlande skall tappa upp 299 liter fotogen på dunkar, som vardera rymmer 6 liter. Hur många kan han försälja?

2) En åkare skall transportera 301 ton grus med en lastbil, som lastar 6 ton. Hur många lass måste han köra?

Vad jag vill ha sagt med detta, är att eleverna så tidigt som möjligt bör ges tillfälle att kritiskt bedöma värdet av det, de räknat fram. Jag har läst litet slarvigt, men i varje fall vimlar det inte av lämpliga problem av den arten i de räkneläror, jag har studerat före utarbetandet av det här föredraget.

Lusten att kritiskt bedöma, vad som sker på en matematiklektion, kan man också uppöva i ett annat avseende. Jag har en erfarenhet, som jag tror har en viss betydelse i detta avseende. Jag undervisade en gång för nu många år sedan en 2^1; det var en i alla avseenden alldeles ovanligt välartad klass. Disciplinen var perfekt, de lyssnade till varje ord, som sades, och trodde sin lärare om gott, bl. a. utgick de från, att han var felfri. Det gick mig till slut på nerverna, och en lektion slog det mig som en blixt, hur jag skulle få slut på detta tillstånd. Jag höll på att lösa en ekvation på tavlan, och beslöt mig för att räkna fel. Ingen reaktion från klassen. Jag gjorde ett fel till, ännu horriblare. Ett tredje. Folkets mummel hördes nog bakom min rygg, men ingen öppen revolt. Då vände jag mig om, slog näven i katedern och frågade dundrande, vilka fel jag egentligen skulle göra, innan de reagerade. Då brast äntligen fördämningarna, och sedan hade jag inte något besvär med den klassen i detta avseende heller: oppositionen var levande och aktiv. Det är nämligen en sanning värd att spilla mycken möda på vid utlärandet: Din hjärna är lika kapabel som någon annans att fatta detta (även om det tar tid ibland), och du skall icke acceptera något annat än det, du förstår. Det är framför allt viktigt att något sådant säges i ett ämne som matematik, där läraren faktiskt tid efter annan råkar ut för att inte vara bäst i klassen — och där det inte betyder något, bara han erkänner faktum.

Alla är väl ense om vikten av, att eleverna är säkra i numerisk räkning, och att detta kräver mycken övning. Hur mycket skall de då öva? Här skall jag påpeka två saker. För det första att en slentrianmässig »fri räkning» ger den den mesta träningen, som minst behöver den. Det dilemmat kan man komma ur endast om man byter kvantitet mot kvalitet genom att ha svårare problem för de duktigare. Och det sker väl, förmodar jag? Min andra anmärkning är jag litet tveksam om — över huvud taget är det vanskligt att yttra sig om ting och förhållanden, som man inte har självupplevd erfarenhet om. Men ett par goda vänner till mig, som är folkskollärare, har vid upprepade tillfällen sagt, att en stor grupp bland de intellektuellt sämre hade mekanisk räkning som sitt käraste ämne (läs: det enda tolerabla ämnet). Annars disciplinärt svårhanterliga pojkar i en gallrad sjua kunde sitta timvis och addera långa räckor med tal. Förklaringen är naturligtvis den, att eleverna gärna sysslade med något, som de behärskade och kunde utföra utan att tänka. Just mekanisk räkning skulle därigenom ha verkat lugnande; när vi diskuterade detta, var det t.o.m. någon av oss, som (medvetet överdrivet) undrade, om man inte kunde tala om ett »intellektuellt bedövningsmedel». Det vore mycket värdefullt, om jag i debatten kunde få höra, om den erfarenhet, jag här talat om, eventuellt gjorts på något mer håll.

Nu är det väl så, att det inte är lämpligt att låta barnen för mycket syssla med vad de redan kan. Undervisningen skall vara progressiv. Man bör i varje fall hesitera inför att ge alltför många alldeles likartade uppgifter. Säkerheten kan man säkert nå ändå, t. ex. genom att systematiskt träna huvudräkning. För min del anser jag att denna räkning utan papper och penna inte skall ske fristående utan i samband med »benämnda uppgifter».

På dessa benämnda tal kan man ha anledning att lägga många synpunkter. Sålunda borde man nog kräva litet mer redovisning av tankegången. Från många föräldrar har jag hört, att de förgäves sökt att få sina telningar att skriva ett eller annat ord till förklaring, när de räknade sina hemuppgifter. Barnen har frenetiskt värjt sig med orden: »Det fordrar inte fröken.» Däremot är barnen ofta ålagda (eller tror sig vara det) att teckna hela uträkningen, och det kan vara svårt nog. Även om de tänkt (dimmigt men) rätt och fått riktigt svar, kan denna teckning vara felaktig. Där står t. ex. a — b i st. f. b — a. Hur skall ett sådant fel bedömas? Vore det inte enklare att dressera barnen till att skriva några förklarande ord i stället och räkna ut talet i etapper? Ett sådant tillvägagångssätt vore i varje fall matematiskt mera tillfredsställande.

Eleverna vänjes alltför mycket vid uppgifter, där hela det framlagda siffermaterialet skall användas. Kunde man inte ibland ge någon uppgift, som är litet längre och där man måste välja bland siffrorna. Det händer väl, att man skapar en uppgift så att säga laborationsmässigt, d.v.s. klassen får själva ta reda på vad olika saker kostar e.d. Men något av det, jag vill ha sagt, framgår på ett muntrande sätt av ett citat från Dagens Nyheter i oktober 1947, där man på slaskspalten skämtar med räknelärorna för realskolan och föreslår en reform. I allt skämtet innehåller detta en hel del värt att tänka på. Se figur på sid. 13.

Bland de benämnda talen finns det en grupp som man kan ha skäl att vara särskilt skeptisk mot. Det är den, som behandlas med reguladetri, »enkla praktiska problem», som de kallas. Många har riktat angrepp mot den metod, som har använts för att lösa dem; självklart ansluter jag mig till dem, som menar, att man måste resonera sig fram »över enheten». Men man kan även hysa betänkligheter mot själva det kunskapsinnehåll, metoden förmedlar. De problem, det gäller, är ju sådana, där mellan två storheter x och y råder ett samband av endera av formerna $y = kx$ och $y = \frac{k}{x}$ (med de generaliseringar som gäller för problem med flera oberoende variabler). Eleverna drillas ofta till en betydande skicklighet i att lösa dem. Men problemen är ibland varken enkla eller praktiska, och innehållet ligger klart utanför den unges erfarenhetsvärld. Föreligger det inte då en avsevärd risk, att eleverna tyr sig till de invanda formerna, och så kan det uppstå en oreflekterad tro på dessa funktionsformer som de enda tänkbara. Hur ställer sig en så drillad elev till en uppgift av följande typ:

1) 100° på en Celsiustermometer motsvarar 212° på en Fahrenheittermometer. Vad motsvarar då 80° på en Celsiustermometer?

Uppgiften är avsevärt underbestämd, men det hindrar inte en reguladetritänkande.

2) Genom ett elektriskt motstånd skickas en ström på 3A. Därvid utvecklas 300 W. Hur stor blir effekten om strömstyrkan ändras till 4A?

Ännu i studentexamen kan man någon gång hos mycket svaga elever i uppgifter av denna typ finna fel, som beror på felaktig användning av reguladetri. — Man kan också tänka på en ren vansinnesuppgift av typen:

3) Karin som är 6 år har fått 24 karameller. Hur många bör Lisa ha som är 8 år?

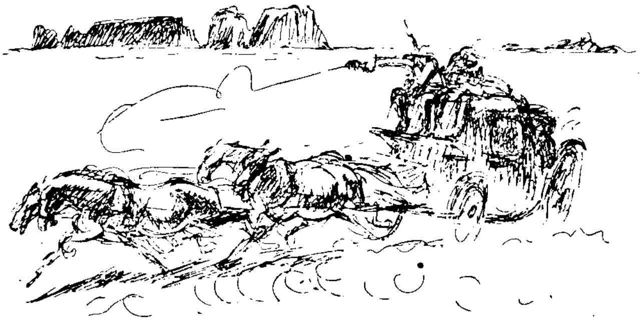
I fråga om dessa uppgifter har jag för min del inte kommit fram till någon färdig uppfattning, men det har varit min avsikt att påpeka en allvarlig och ofta bortglömd nackdel med nuvarande lärogång. Systematisk kan man inte bli här, förrän proportionsläran genomgåtts. Kanske är det därför skäl att hävda, att denna typ problem absolut inte får ta för mycken tid i anspråk.

Det kan istället vara lämpligt att ta den tid, man på det viset ev. kan vinna, till att tidigare, än nu sker, introducera ekvationsmetoden för problems lösande. De rena ekvationerna av enklaste typ (»med x på ett ställe») kan man enligt min erfarenhet börja med mycket tidigt, och många viktiga problemtyper kan lösas med hjälp av ekvationer av denna typ. *Om* det går, är vinsten den, att man vid resonemanget fram till ekvationen kan undvika att tala om divisioner; det är väl den räkning, som eleverna har svårast att besluta sig för.

Därmed har jag presenterat det axplock av synpunkter, som jag har valt ut. Emellertid vill jag avslutningsvis föra fram ett problem till, fastän det strängt taget inte hör till mitt ämnesområde. Det gäller frågan, vad som egentligen sker, när en elev löser ett problem. Det är naturligtvis ett mycket svårt psykologiskt spörsmål, men har jag fattat den litteratur rätt, som jag läst i ämnet, går det schematiskt talat till så här. Man sätter sig in i problemet. Under funderandet över det inträder en omstrukturering, och när denna fortskridit tillräckligt långt, inträder insikt i problemet. Därmed är detta löst. För denna verksamhet behövs nu psykisk energi. Dels skall denna disponeras så att den räcker till dess problemet är löst, dels skall den över huvud taget kunna disponeras för ändamålet. Inför varje problem har psyket ett slags tröskel att komma över, och är denna för hög, kan man inte alls komma i gång med lösandet. Försök har visat, att ett sätt att bygga upp en sådan tröskel är att inge en elev den föreställningen, att problemet är svårt. Ett hinder för omstruktureringen är även att lösarens tankar är fel inriktade: han är som man säger avbländad. För all pedagogisk verksamhet i matematik gäller nu att kämpa så att trösklarna blir låga och att elever-

(Forts. å sid. 31)

Sedan det blivit tydligt att stor brist på matematiklärare inom kort kommer att föreligga har Namn och nytt gått i författning om utgivande av den Realskolans räknebok för självstudium varav nedanstående utgör en provsida.



BUFFALO BILL

kunde man räkna till 39 tomahawker, 17 skalperknivar och 8 räffelbössor, som insamlats från de fallna indianerna. De resande förfogade själva över 16 karbiner och 4 dubbelpipiga coltrevolvrar. Huru många vapen hade de nu sammanlagt? Det beslöts att skjutvapnen skulle fördelas lika mellan de 4 männen i diligensen, medan de båda flickorna skulle sättas i arbete med att ladda om. Krutdurkens återstående innehåll vägde endast 0,7 kg. Hur många skott skulle kunna avfyras mot indianerna, då till varje skott beräknades åtgå 15 gram svartkrut? Situationen var alltså, trots att indianerna för tillfället blivit tillbakaslagna, högst förtvivlad.

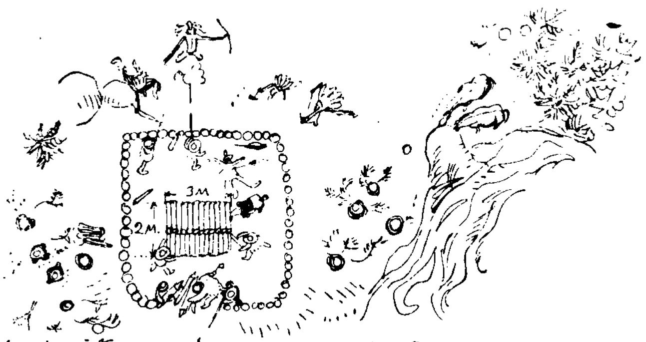
Medan de resande i bergspasset var sysselsatta med dessa beräkningar upptäckte de plötsligt i fjärran på den vidsträckta prärien en ensam ryttare, i vilken de lätt igenkände Buffalo Bill. Oförväget stormade han fram mot de tätt hopade indianerna, och en rökpuff från hans höjda revolver tillkännagav att han icke var att leka med. Precis 1 minut senare genljöd knallen av skottet mellan bergspassets väggar. Hur långt borta var han, då man vet att ljudet tillryggalägger 340 meter i sekunden?

I nästa ögonblick var han framme och svängde sin hatt till hälsning.

— Skynda! ropade han och hoppade vigt ur sadeln. — Prärien vimlar av rödskinn! Vi måste bygga ett blockhus medan tid är!

Han ryckte ett måttband ur sitt vänstra pistolhölster och begynte mäta ut grunden. Han gjorde ena sidan 3 meter lång och den andra 2 meter. Därpå tillsade han de skräckslagna diligenspassagerarna att skyndsamt fälla de träd som behövdes till blockhuset.

— Hur många träd måste vi fälla, sade O'Flanagan ängsligt,



BLOCKHUSET. INDIANERNA OCH DEN RESTERANDE SKOGEN.

ANMÄLAN:

Lancelot Hogben: **MATEMATIKEN I BILD**

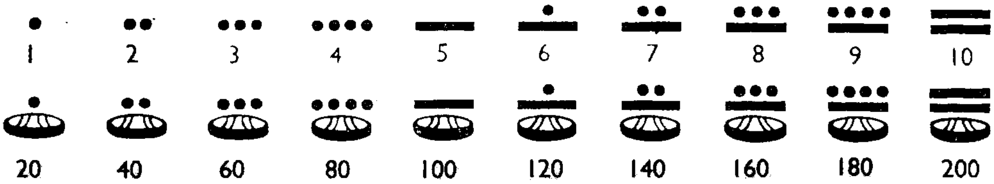
Vetenskap, magi och roande lek

Översättning: Conrad Lönnqvist

Almqvist & Wiksell, Stockholm

»Matematiken i bild» berättar för oss på 64 färgsprakande sidor den fascinerande historien om hur människan under årtusenden alltmer tagit matematiken i sin tjänst, och hur matematiken därvid själv utvecklats till ett allt finare instrument i vetenskapens och det praktiska livets bruk.

Räknemetodiskt intressant är bokens presentation av de gamla kulturfolkens olika siffersystem. Gemensamt för dem alla, det egyptiska, babyloniska, kinesiska, grekiska och romerska siffersystemet var, att de förutom tecken för de 9 första talen dessutom måste använda ytterligare tecken för 10, 50, 100, 500, 1000 osv. Märkligt är att maya-folket i Centralamerika årtusenden före den Gamla världens civilisation lyckades fundera ut ett system, där siffersymbolernas antal reducerades. Detta folk kunde skriva varje tal med hjälp av endast tre tecken: en prick, ett streck och en oval



Med dessa tre tecken kunde de bygga upp alla tal från ett till nitton 

Genom att lägga till en oval under en siffra gjorde de dess värde 20 gånger större. Om de lade till ännu en oval, blev talets värde multiplicerat med 20 en gång till. Motsvarande förenkling i den gamla världens siffersystem skedde först i och med upptäckten eller uppfinningen att man kunde markera en tom rad i abacusen med ett särskilt tecken. »Nollans intåg» har också fått ett eget kapitel, som berättar om nollans tillblivelse i Indien omkring 500 e. Kr. och dess vidare utbredning över Bagdad till västerlandet. Först under 1400-talet hade de indiska siffrorna och positionssystemet definitivt slagit igenom och kommit till användning vid navigering och köpenskap i hela västra Europa.

I »Matematiken i bild» har den engelske författaren Professor Hogben gjort konststycket att på relativt få sidor skriva en rikt illustrerad väldshistoria, som fångar väsentliga skeden i vår kulturs utveckling från hedenhös fram till modern tid. Boken kunde lika gärna ha titulerats »Kulturhistoria i bild». Matematiken är med som en röd tråd och får belysa människans strävan att söka bemästra sin omvärld genom observation, mätning, beräkning. Boken börjar med att en urtidsmänniska räknar sina spjutspetsar, i slutet av boken ges en populär framställning av matematikmaskinen. Däremellan har vi fått stifta bekantskap med de egyptiska och babyloniska kulturerna, mött det antika Grekland, följt de stora geografiska upptäckterna och upplevat Galileis och Newtons upptäckter, som lade grunden till modern vetenskap, som skapat betingelserna för den snabba tekniska utveckling, vi just nu står mitt uppe i.

Genom att på detta sätt matematikens och kulturens utveckling skildras sida vid sida och det ömsesidiga samspelet dem emellan klarläggeș, framhålles på ett slående sätt matematikens vitala betydelse för den mänskliga kulturen. På så sätt är det också praktisk matematik vi möter. Nya praktiska problem ställer nya krav på matematiken. I det gamla Egypten behövde man formler för ytberäkning av jordbrukens areal, vid de geografiska upptäckarfärderna uppkom behov av att kunna säkert beräkna longitud och latitud. Newton var tvungen att skapa en ny matematik för att kunna förklara och beräkna planeternas rörelser, vår tekniska tids stora krav på snabbhet och effektivitet tillfredsställes med de elektroniska matematikmaskinerna. Genom detta grepp att sätta in matematiken i dess kulturella sammanhang, har »Matematiken i bild» lyckats på ett både roande och intressant sätt presentera *levande matematik.*

Tidskrift för Skolmatematik, som är till för att stimulera intresset för matematik och matematikundervisning, hälsar med glädje en bok som denna. Inget skolbibliotek bör försumma att inköpa detta verk, som både lärare och elever kan ha nöje av. Så som den är skriven ger den en intressant underhållning för såväl yngre som äldre läsare. Som julklappsbok till en matematikintresserad elev är den idealboken, för att inte tala om vilket värde den skulle ha för en *icke* matematikintresserad ungdom, för vilken det borde bli en upplevelse att se hur trevligt och underhållande en »matematikbok» kan skrivas!

Almqvist & Wiksell, som åtagit sig att ge ut en så påkostad bok — den innehåller över 250 bilder i färg — är värd all uppskattning för sitt lovvärda initiativ att på detta sätt söka popularisera matematiken.

E. F.

»Matematiken i bild är värd beundran och kommer mig att önska att jag var barn på nytt. Jag kan inte nog rekommendera detta mästerverk av förenkling utan förfalskning»

säger Bertrand Russel om

LANCELOT HOGBEN

Matematiken i bild

Översatt av lektor Conrad Lönnqvist
Redigerad av lektor Lennart Dalén

- *Ger läraren ett rikt material av idéer och uppslag för en åskådlig undervisning.*
- *Ger eleverna möjlighet att leva sig in i de matematiska begreppen och gör matematiken till en roande lek.*

»Den upplyser om matematikens uppkomst och mening. Den är spännande och fattbar för alla läskunniga. Den är en praktfull kavalkad med 250 bilder i färg, där matematik, astronomi, historia, navigation, filosofi och arkeologi tvinnats samman i ett strålande mönster.

Hogben berättar oemotståndligt eggande!»

Stort format 250 färgbilder Inb. 19: 75

ALMQVIST & WIKSELL

Box 159, Stockholm 1 - Postgiro 758

PROBLEM — SPALTEN

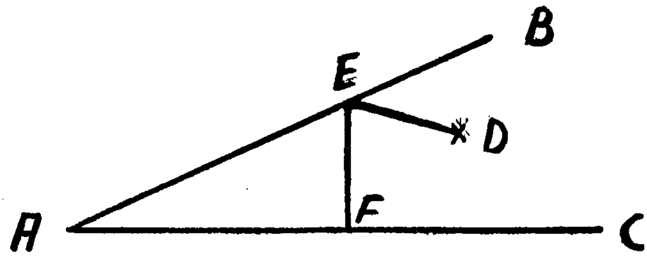
(*457381*) *81754* **Vilken siffra är struken?**

I föregående nummer av TfS presenterades ett »tankeläsarknep» enligt följande: Vi uppmanar en person att tänka på ett tal a, vilket som helst. Sedan han successivt utfört räkneoperationerna $10 \cdot a$, $10 \cdot a - a$ och $10 \cdot a - a + 54$, uppmanas han att stryka en siffra (men ej en nolla) och meddela slutresultatet. Vi kan nu räkna ut *vilken siffra han strukit* genom att dra slutresultatets siffersumma från närmast högre multipel av 9.

Förklaringen är den, att man efter räkneoperationerna $10a - a$ erhåller $9 \cdot a$ d. v. s. ett tal, som är delbart med 9 och vars siffersumma följaktligen också är delbar med 9. Lägger man nu till 54 erhålles $9a + 54 = 9 \cdot (a + 6)$ d. v. s. fortfarande ett tal, som är delbart med 9 och vars siffersumma är delbar med 9. Om nu en siffra x strykes, blir givetvis nu siffersumman x enheter mindre d. v. s. x enheter mindre än en multipel av 9. Vi kan således lätt ta reda på den strukna siffran genom att se efter, hur mycket som fattas i närmast högre multipel av 9. Om t. ex. siffersumman i slutsvaret är 22, är den strukna siffran $27 - 22 = 5$. Om siffersumman i slutsvaret blir en multipel av 9, kan vi inte avgöra, om 9 eller 0 har strukits; för att få en entydig lösning har därför strykning av ev. nolla förbjudits.

I stället för 54 kan vi lägga till eller dra ifrån vilken multipel som helst av 9. Vi kan därför skriva upp en mängd multiplar av 9: 27, 54, 108, 126, 153 o. s. v. och be vår person att ta vilket som helst av dessa tal och lägga till eller dra ifrån (om det går), och han behöver för oss ej uppge, vilken räkneoperation han utför. För att göra det ännu mer förbluffande kan vi be honom (före eller efter den sista additionen) att godtyckligt kasta om siffrorna i sitt tal — siffersumman ändras ju härigenom icke!

Var skall villan placeras?



Hur ett till synes enkelt geometriskt problem kan ställa relativt stora krav på lösarens matematiska förmåga, visar följande problem.

Sträckan AC representerar en huvudväg. Vi bygga oss en villa utefter bivägen AB. I D befinner sig en källa. Vi vill nu placera villan på ett sådant ställe E, att vägen till källan blir lika lång som den kortaste vägen ned till huvudvägen. Sträckorna ED och EF skall alltså vara lika och EF vinkelrät mot sträckan AC. Hur skall vi med hjälp av passare och linjal exakt kunna konstruera fram läget av punkten E? *Vem av läsarna ger den elegantaste lösningen?*

ERIK PETERSSON

RÄKNELÄRA

FÖR FOLKSKOLAN

Klass 3 2:75
Klass 4 2:75
Klass 5 2:75
Klass 6 Utkommer till vårterminen

Godkända av Statens läroboksnämnd

Facit till varje klass 0: 50 **Provräkningar** till resp. klass 0: 95
+ facit 0: 45

En räknelära efter nya linjer, byggd på systematiskt genomförda experiment i ett stort antal klasser och med beaktande av inlärnings- och övningslagar och den differentiella psykologins krav.

Lärostoffet är uppdelat i 31 veckoavsnitt. I varje avsnitt ingår en gemensam avdelning, en huvudräkningsavdelning och en avdelning för självständig räkning med samma sorts räkneuppgifter återkommande i tre olika svårighetsgrupper. Dessutom förekommer på varje avsnitt övnings- och hemuppgifter och i slutet av boken ett antal extrauppgifter till varje avdelning.

»Denna med utmärkt konsekvens genomförda uppdelning och gruppering av lärostoffet är enligt mitt förmenande utomordentligt bra för både elever och lärare, då den automatiskt ger goda möjligheter till individualisering inom klassens ram.»

Ur seminarielärare Curt Thybergs utlåtande till Statens läroboksnämnd

»Räkneläran synes innehålla för hela klassen behövliga räkneuppgifter och räkneövningar. Inga tilläggshäften eller ytterligare räkneuppgifter synes behövliga för en rationell räkneundervisning. — Räkneläran är utan tvivel värd att pröva. Den synes vara en fullträff.»

Ur Gustaf Wikströms rec. i Tidning för Överlärare

S B F

SVENSKA BOKFÖRLAGET

SKOLBOKCENTRALEN

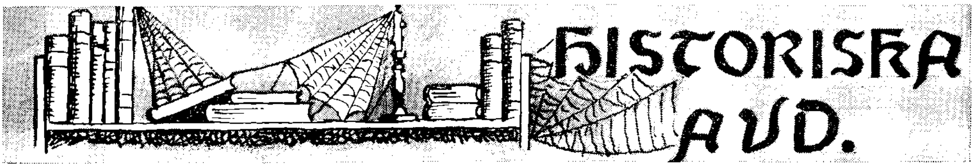
David Bagaresgata 20, Stockholm C - Postgiro 55 160

UTSTÄLLNING - LÄRAREXEMPLAR - REKVISITIONER

Utställning även

Parkgatan 10, *Göteborg* - Hamngatan 4, *Malmö*

Klostergatan 26, *Linköping* - Tullgatan 16, *Luleå*



Första Grunderna till Rena Matematiken, Praktiska Räknekonsten och Landtmäteriet. af Johan Schultz, Professor i Matematiken i Königsberg.
Stockholm 1812. (Kursiveringen i det följande är lärobokens egen).

II.

Om matematikens nytta.

§ 16.

Man kan redan, af den nyss gifna beskrifningen på matematikens innehåll, finna, hvilken mängd af vigtiga kunskaper den innefattar. *Hennes inflytelse på tillfredsställandet af våra vigtigaste behof, och på menskliga lifvets beqvämligheter och behagligheter*, gör henne aktningsvärd för hvarje bildad Nation; och utspridandet af hennes kännedom är således, redan af denna grund, en reel befordran af menniskoslägtets välfärd. För hvarje studerande i synnerhet är hon i mer eller mindre mån alldeles oumbärlig. Den nytta, han af matematiken inhämtar, kan hufvudsakligen betraktas under följande synpunkter:

1. Hon lemnar honom en skatt af *sanningar*, om hvilka han med den fullkomligaste visshet är öfvertygad, att de alla äro *sanningar*.

2. Utan matematik är det icke möjligt att grundligt studera naturläran. Ty de mekaniska, optiska och astronomiska vettenskaperna utgöra i det mesta redan en ganska vigtig del af naturläran, och just den, der hon äger fullkomlig visshet.

3. Ingen vettenskap visar oss menskliga förnuftet i sin sanna höghet och förträfflighet så, som matematiken.

4. Den möda hennes kännedom kostar alla dem, som vinnlägga sig om henne, belönas redan rikligen genom det rena, oskattbara nöje hon förskaffar sina idkare. Detta hafva matematikens kännare i alla tider intygat.

5. Men den vigtigaste nytta, som denna vettenskap medför, är den, att hon, mer än någon annan, *skärper förståndet, och öfvar det att dömma grundligt.* Denna fördel vinnes likväl blott då fullkomligt, när man studerar vettenskapen efter den stränga *matematiska metoden*, hvilken man ock plägar kalla den *Euklidiska*, efter Euklidis elementer, hvarifrån man abstraherat den. *Och i sanning händer, att hvarje beqvämare väg, som man härvid plägar försöka, aflägsnar nybegynnaren ifrån insigten i matematikens sanna väsende, och snarare ökar, än minskar, svårigheten att studera denna vettenskap.*

—★—

HANDELN OCH FOLKSKOLANS MATEMATIKUNDERVISNING

Av Rektor Ivan Larsson

Matematikundervisningen i folkskolan är i väsentlig grad en förberedande, grundläggande undervisning, avsedd att kompletteras genom fortsatt specialiserad eller allmän undervisning. För en hel del elever utgör dock folkskolans matematikundervisning ett avslutat kapitel. Hänsyn måste därför tas till en rad omständigheter vid planeringen av innehåll och metod i fråga om läroämnet. De allmänt medborgerliga kraven måste tillgodoses. Tekniken måste tillgodoses liksom den fortsatta teoretiska utbildningen och även handeln måste utöva sitt inflytande på sättet att genomföra undervisningen. Folkskolan måste lägga en sådan grund att de kunskaper och färdigheter i räkning som förvärvas utgör en lämplig utgångspunkt för den anpassning och utveckling av räkningen som olika arbetsområden efter folkskolans slut kommer att kräva.

Handelsräkning

Det mesta av den räkning som förekommer inom varuhandeln är mycket enkel. Det gäller vanligen bara att kunna behärska de fyra enkla räknesätten i hela tal och decimalbråk. Mycket sällan använder man allmänt bråk, och ekvationslära är i det praktiska affärslivet en nästan okänd företeelse. De svårigheter som föreligger i fråga om räkning ligger inte på det rent matematiska området, utan hänför sig i stället till de kunskapsområden, som bildar bakgrunden till räknearbetet. Att kalkylera ett pris är vanligen en mycket enkel matematisk process, men att skaffa fram det råmaterial, på vilket kalkylens uträkning skall bygga kräver prestationer som flertalet affärsmän saknar förmåga eller kunskaper att åstadkomma. En räntablitetsuträkning är som matematisk uppgift ett mycket enkelt ränteproblem, men konsten att få ett korrekt underlag för utförandet av en räntabilitetsundersökning kräver avancerade kunskaper som ligger mera på det handelstekniska, bokföringsekonomiska området än på det matematiska.

Det matematiskt svåraste problemet för handelns utövare i allmänhet kan anses vara uträkningen av *vad en summa är i procent av en annan*, t. ex. vad lönekostnaderna 23×450 utgör i % av den totala omkostnadssumman 31×670 kr. Vad som i regel krävs av köpmannen och hans medhjälpare är i huvudsak en förmåga att *snabbt, säkert och exakt* kunna genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med hela tal och decimalbråk. Vidare erfordras vissa färdigheter i procent- och ränteräkning samt sortförvandling. Det är sålunda inga märkvärdigheter. En effektiv folkskoleundervisning bör normalt kunna åstadkomma resultat, som ger en fullt tillfredsställande standard i färdighets- och kunskapshänseende för det stora flertalet sysselsatta inom varuhandeln.

Handelns erfarenheter av folkskolans elever

De erfarenheter handeln har av folkskolans arbetsresultat inom matematiken är emellertid ganska nedslående. En mycket stor grupp f. d. folkskoleelever behärskar inte vanlig enkel räkning vid arbetets början i ett affärsföretag. Det brister både i förmåga och exakthet. Multiplikationstabellen har man glömt och division med decimalbråk överstiger ofta förmågan. Därtill kommer att mycket stora brister föreligger på det formella området. Att skriva tydliga, klara siffror tycks vara en bortglömd färdighet, och själva organisationen av problemlösningen lämnar mycket övrigt att önska. Det hela blir i regel mycket snett och tilltrasslat, med fel och tidsförluster som naturlig följd.

Det är karakteristiskt för handelsskolornas undervisning, att en betydande del av första terminens arbete måste ägnas åt repetition av enkel matematik, d. v. s. sådant som varje folkskoleelev *skulle* behärska redan efter 6 klasser. Orsaken ligger måhända inte hos folkskoleundervisningen utan i brister hos det klientel, som söker sig över till handeln. En påtaglig svaghet ifråga om formell exakthet torde f. ö. vara ett rätt framträdande svenskt karaktärsdrag. Det är emellertid också troligt att räkneskickligheten gått tillbaka i samband med elevunderlagets breddning och parallellt med ambitionen inom skolan att ständigt utveckla undervisningen mot nya områden.

Kraven på folkskolans matematikundervisning

Mot bakgrunden av denna kritik och de kunskapsbehov som faktiskt är för handen föreligger för handelns del krav på en *förenkling av kursplanerna med koncentration till väsentligheter* och grundläggande räkning. Handeln vill hellre ha en fördjupning av undervisningen än den breddning som tycks vara mycket i ropet, särskilt nu sedan folkskolan beslutat sig för att som enhetsskola söka erövra realskolans kunskapsmått. Handeln instämmer säkerligen genomgående i den truism som är formulerad i undervisningsplanen för folkskolan: »Undervisningen skall så bedrivas, att lärjungen vänjes vid tankereda samt vid ett noggrant och målmedvetet arbete». Bättre kan man inte uttrycka en målsättning som handelns gärna vill göra till sin.

I fråga om *kursinnehållet* är handeln i hög grad betjänt av en intensifierad undervisning i räkning med hela tal och decimalbråk, men saknar rätt allmänt intresse för allmänt bråk. Huvudräkningen bör ytterligare utvecklas. Den mekaniska räkningen måste utvidgas och mera utrymme ges till överslagsberäkning och till kontrollmetoder. Handeln vill i övrigt ha mera verklighet in i skolan. Räknandet med äpplen, pepparkakor och sötsaker bör nog begränsas till lågstadiet. Det ligger för ungdomen mera nära att få räkna med idrottsresultat, bilkostnader, kassakvitton och extraförtjänster!

Den formella sidan av räkningen måste få ökat utrymme. Handeln måste få folk i sin tjänst som kan skriva siffror tydligt och behärskar själva uppställningstekniken ifråga om matematiska lösningar. I ett varuhus beräknade man att man dagligen gjorde 2 000 räknefel på kassanotorna, antagligen beroende på otydliga, snirklade siffror och dålig organisation av beloppsuppställningar och uträkningar.

Metodiken måste ta hänsyn till utvecklingen

Det har tidigare anförts att handeln gärna ser att bråkräkningen reduceras. I de flesta fall reder man sig utmärkt med decimalbråk. I varje fall har handeln ytterst sällan användning för större nämnare i allmänt bråk än 12. Undantag kan göras för vissa ränteuträkningar.

Till decimalbråkets fördel talar också den alltmer spridda användningen av räknemaskiner. De företag inom handeln torde nu vara lätt räknade som inte äger en additionsmaskin och en multiplikationsmaskin. Räknestickan blir allt vanligare som verktyg även inom handeln och tabeller finns nu för det mesta. Uträkning efter vikt och rymd blir mer och mer ovanlig efterhand som förpackningstekniken utvecklas.

Räknemaskinernas ökade användning gör att *undervisningen* förr eller senare *måste anpassa sig efter maskinerna.* Det kan dock knappast vara nödvändigt att i folkskolan införa ren maskinräkning. Däremot är det fördelaktigt, om eleverna får lära sig använda sådana metoder vid lösandet av matematiska problem, som direkt kan appliceras på maskintekniken. Några exempel visar detta.

— En vara kostar 3,95 kr. per kg. A köper 4 ¼ kg och får då 8 % rabatt. Vad kostar honom partiet?

Ett sådant problem kan naturligtvis lösas i etapper. Målet bör emellertid vara att snabbt få fram en lösning, som kan utföras på maskin. Matematikundervisningen i folkskolan bör därför sträva efter att lära eleven att lösa problemet efter följande uppställning i varje fall mot slutet av elevens skolgång:

$3{,}95 \cdot 4{,}25 \cdot 0{,}92 = ?$ kr.

Eller ett annat problem:

— Kaffe lättar 16 % vid rostning. Köpman B. rostade en gång 96 kg. kaffe, som kostade honom 10,40 kr. per kg. Själva rostningen inberäknat förpackning vid rosteriet kostade 34 öre per kg. av det rostade kaffets vikt. Huru mycket kostade partiet i rostat och förpackat skick?

Lösningen bör för att passa maskintekniken få följande uppställning:

$96 \cdot 10{,}40 + 96 \cdot 0{,}84 \cdot 0{,}34 = ?$ kr.

Maskintekniken föredrar vidare *innehållsdivision* framför lösningar efter reguladetrimetod i en hel del fall. Överhuvudtaget använder affärslivets män genomgående innehållsdivision i det fall den kan användas. Här är ett exempel:

— C. erhåller vid köp av varor för brutto 58,80 kr. en rabatt på 2,80 kr. Huru många procent utgjorde rabatten?

Den vanligaste lösningen torde vara att använda reguladetri, varvid man erhåller uppställningen $\frac{2{,}8 \cdot 100}{58{,}8} = ?$ %

Denna lösning lämpar sig emellertid mindre väl för räknemaskinen, förutsatt att man räknar med normal behärskning av maskinens möjligheter. Innehållsdivision för snabbare och bättre fram till resultatet med uppställningen: $2{,}8 : 0{,}588 = ?$ %.

Följande ränteproblem löses lätt genom en enkel uppställning med decimalbråk:

— Vad är räntan på 1 450 kr. efter 5 % under 9 månader?

Lösning: $1\,450 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}75 = ?$ kr.

De matematiska begreppen bör inläras fastare

Kännedom om innebörden av de använda begreppen och termerna utgör en förutsättning för goda resultat i räkning. Många elever misslyckas i matematik i realskolan, inte därför att de inte kan räkna utan därför att de inte behärskar termerna. Man kan inte räkna t. ex. med vinst och förlust utan att känna begreppens betydelse.

Metodiskt måste antagligen mera tid läggas ner på begreppsförklaringar och inlärning av begrepp än vad som vanligen sker. Åtskilliga begrepp måste sitta i minnet lika bra som multiplikationstabeller. Tyvärr saknar vi ännu en enhetlig nomenklatur inom handeln, men en kommitté med representanter för detaljhandel, grosshandel och industri jämte lärare och ombud från skolöverstyrelse och yrkesöverstyrelse är sysselsatt med att söka få fram en enhetlig nomenklatur, som det sedan gäller att införa i undervisningen. Det är troligt att denna kommitté slutför sitt arbete under nästa år. Sådana uttryck som bruttopris, nettopris, pålägg, marginal, bruttovinst, konsumentpris, detaljistpris och inte minst begreppet vinst måste få en entydig innebörd och måste också inläras mycket noggrant. Det kan för att ta ett exempel inte vara korrekt att framföra och lösa problem av följande typ på det sätt som ofta sker:

En vara köps för 150 kr. och säljs för 225 kr., hur stor är vinsten? Svar 75 kr.! ! Då man vet av genomförda undersökningar att handelns nettovinster, i den mån de förekommer, rör sig om på sin höjd en à två % av försäljningen, kan exempel av anförd typ lätt bidra att skapa en mycket falsk bild av handelns lönsamhet.

Trots Skolöverstyrelsens cirkulär i fråga om vissa termer inom procenträkningen kvarstår nog här och var åtskilligt av den gamla förväxlingen av bruttoförtjänst och nettovinst kring problem av den här sorten.

En kort sammanfattning

Sammanfattningsvis torde man kunna säga att handeln vill ha *mer* av mekanisk räkning för att öka snabbheten och säkerheten, *mer* huvudräkning för att stärka förmågan till koncentration och öka möjligheten till kontroll genom överslagsberäkning vid sidan av skriftlig räkning, *mer* av praktiska räkneuppgifter, som lär eleverna att kombinera kända företeelser till lösningar från orsak till verkan och som för in eleverna i ekonomiska tankegångar.

Handeln vill ha en *förenkling av kursplanernas innehåll* med större koncentration till de grundläggande räknesätten. Handeln torde inte vara främmande för vissa mera bestämda avgångsprov, som krav för godkänt betyg från folkskolan. Handeln är inte heller främmande för behovet av en ökning av den förr vanligare »drillen» vid inlärning av vissa grundläggande ting, inte bara beträffande multiplikationstabellen, utan också beträffande metoder och vissa begrepps innebörd inom matematiken.

Utan tvivel blir det ofrånkomligt att genomföra en starkare differentiering av elevmaterialet. Det är inte bara språkundervisningen som bör utgöra en differentieringsfaktor utan också den matematiska begåvningen och kanske också den praktiska begåvningen. Skall man för enhetsskolans del undgå ett misslyckande måste differentieringen sätta in relativt tidigt. Begåvningarna måste — oavsett arten av begåvning — odlas i högre grad än obegåvningarna. Nivelleringen får inte offra det värdefullaste begåvningsmaterialet för att göra livet angenämare för det intellektuellt sämre. Målet måste vara att föra alla grupper av elever framåt mot en högre standard. Vägen går sannolikt över tidig differentiering och mindre klasser.

För handelns del bör kraven på högre absoluta resultat av barns och ungdoms folkskolestudier skärpas. Enhetsskolan och folkskolan måste säkerligen tillägna sig något av den hårdare teknik i fråga om kraven på resultat som utmärker särskilt den 5-åriga realskolan och som fört denna fram till en aktad position.

De krav som framförts är måhända ensidiga. Var och en är säkerligen medveten om att problemet om folkskolans matematik måste lösas i kompromissens tecken, där alla parter blir såvitt möjligt sakligt tillgodosedda. Denna artikel har endast velat visa de speciella krav som kan framställas från handeln, en grupp i vårt samhälle som år från år synes representera en allt större del av den yrkesproduktiva befolkningen.

—★—

NY LÄROBOK I MATEMATIK

för universitetens och högskolornas nybörjarstadium

HYLTÉN-CAVALLIUS *och* **SANDGREN**

MATEMATISK ANALYS

Omfattar den analys och algebra, som f. n. fordras för ett betyg i fil. kand.- och ämbetsexamen, men också partier, som går utöver denna kurs. Uppläggningen är sådan att boken utgör en fast grund för fortsatta studier. — Den starkare ställning, som funktionsläran under senare år fått på gymnasiet, gör att boken har intresse även för lärare. Vissa avsnitt, t. ex. kapitlet om maxima och minima och delar av kapitlen om derivator, har direkt anknytning till skolkursen.

Liksom i sin föregående bok PLAN GEOMETRI *har författarna framlagt stoffet i en klar och typografiskt överskådlig form. Boken innehåller 467 sidor och illustreras av 180 figurer. Till texten har fogats över 400 genomräknade exempel och c:a 600 övningsuppgifter, av vilka flertalet försetts med svar.*

Bokens 15 kapitel har rubrikerna: 1. Induktion och kombinatorik. 2. De reella talen. 3. Absolutbelopp, medelvärden och olikheter. 4. De komplexa talen. 5. Några satser ur talteorin och algebran. 6. Funktionsbegreppet och de elementära funktionerna. 7. Gränsvärden. 8. Kontinuerliga funktioner. 9. Derivator. 10. Integraler. 11. Taylors formel med tillämpningar. 12. Oändliga serier. 13. Maxima och minima. 14. Undersökning av plana kurvor och andra tillämpningar av analysen. 15. Historik.

MATEMATISK ANALYS

rekvireras enklast direkt från

LUNDS STUDENTKÅRS INTRESSEBYRÅ

LUND *och kostar då 41: 50*

MATEMATIKUNDERVISNINGEN PÅ ENHETSSKOLANS HÖGSTADIUM

Av Fil. Mag. O. Carli

De synpunkter på matematikundervisningen på enhetsskolans högstadium, som jag fick tillfälle att lägga fram vid kursen i matematikmetodik i Jönköping, bygger på erfarenheter från mångårig lärarverksamhet i folkhögskolan, däremot icke på egen erfarenhet från enhetsskolan. Mellan de båda skolformerna finns emellertid åtskilliga beröringspunkter. De elever, som folkhögskolan hittills fått mottaga, har i stort sett samma förkunskaper som enhetsskoleeleverna i sjunde och åttonde klass. Bortser man från de elever, som ämnar fortsätta sina studier vid högre skolor, blir också målsättningen ungefär densamma. Den svårighet, som ligger i inhomogena klasser både med avseende på ålder och förkunskaper, känner folkhögskolans lärare väl till, och den får också enhetsskolans lärare pröva på. Skillnaden i elevmaterialet i de båda skolformerna ligger i elevernas ålder och inställning till skolarbetet — i ena fallet ett frivilligt åtagande med mer eller mindre bestämd målinriktning, i det andra fallet känslan av den obligatoriska skolans tryck på en ofta begynnande skoltrötthet. I ena fallet ungdom, som kommit över brytningsåren, i det andra barn som står mitt uppe i desamma.

1. Problemlösning i allmänhet.

Mål. Matematikundervisningen i enhetsskolan skall ge kunskaper och färdighet i räkning samt någon förtrogenhet med algebrans och geometrins elementära begrepp och metoder. Räkneproblemens sakliga innehåll skall vidga elevernas natur- och samhällsorientering, och undervisningen skall främja elevernas personlighetsfostran.

Lärostoff. Enhetsskolans högstadium kommer att rymma elever med mycket skiftande begåvning, med olikartade intressen och önskemål. Lärostoffet måste därför varieras, även om man håller fast vid det ovan angivna målet. En differentiering på olika klassavdelningar eller inom klasserna blir ofrånkomlig och bör för matematikens del sättas in i klass sju. Svårigheten blir att göra denna gruppindelning, så att den blir givande ur undervisningens synpunkt utan att den matematiksvagare gruppen känner sig nedvärderad och »oduglig» och därigenom blir ytterligare hämmad. Det finns knappast något annat läroämne, som kan pressa ned och hämma en elev som matematiken. Men en förstående undervisning kan å andra sidan också skänka självtillit o. arbetsglädje. En annan svårighet är att gruppindelningen inte kan ta hänsyn bara till ett ämne utan måste bygga på ett allmänt omdöme om begåvning, intresse och önskemål. Det blir därför under alla förhållanden stora differenser inom klassen, som ger upphov till metodiskt svårbemästrade problem. För de matematiksvagare grupperna bör lärostoffet läggas så, att de får någon form av kompensation i förhållande till den »bättre» gruppen — helst genom att läroplanen tar upp några kapitel, som den senare inte behandlar. Härigenom blir visserligen övergången mellan alternativkurserna besvärligare, men i gengäld behöver ingen grupp känna sig mindervärdig.

För de elever, som skall fortsätta studierna — jag tänker närmast på gymnasierna — måste lärostoffet i möjligaste mån anpassas efter de mottagande skolornas krav. Men även för denna grupp kan åtskilligt av det lärostoff, som hittills förts fram i realskolan, gallras bort. SÖ har i Aktuellt 1955: 4 angivit en del ekvations- och problemtyper, som ej längre skall ges i realprov på allmänna linjen. (Se även Pedagogisk debatt 1956: 1).

För de elever, som syftar mot klass 9a och delvis 9y, kan lärostoffet mera radikalt inriktas på det praktiska livets behov. För dem bör den egentliga matematikkursen vara ett avslutat helt i och med åttonde klass. Det som följer därefter skall vara framåtriktat, mot vardagslivet, en första början på de arbetsuppgifter, som kan möta i yrke och samhällsliv. Därom mera senare.

Metod. Ett av de första krav, som ställs på läraren i sjunde klass, blir ofta att smälta samman en klass, som kommer från skilda håll. Samtidigt härmed måste också arbetet individualiseras. Barnen är olika varandra — villiga och ovilliga, pigga och slöa, bråkiga och lugna, och läraren har sin individualitet och sin begåvning. Den snabba, matematiskt begåvade läraren får svårigheter med metodiken inför det tröga och obegåvade barnet. Den matematiskt mindre begåvade läraren — ty sådana finnes — möter nog sina största svårigheter inför den snabba och matematikbegåvade eleven, som ser sina egna vägar till problemens lösning. Läraren blir tvungen att variera metoden efter elevernas situation. Den svagare kräver långsamt och grundligt inlärande, ofta med schematiska, tabellariska uppställningar och så vitt möjligt med stark konkretisering av problemen. Härigenom minskas möjligheterna att variera uppgifterna, men dessa elever har knappast förmåga att lösa andra problemtyper än de inövade. Det praktiska livet ställer f. ö. inte upp så många ovanliga och invecklade räkneproblem för genomsnittseleven.

Annorlunda är det med de mera begåvade elevgrupperna. Där blir uppgiften att visa olika vägar till lösning utan fastlåsande vid någon bestämd metod. Vid klassundervisningen blir den enda möjliga vägen att först gå igenom den åskådligaste, för alla begripliga metoden, som får bli »kungsvägen» för de svagare, medan andra metoder tas upp i gruppundervisning med de duktigare. Det kräver mycket av läraren, men det är nödvändigt, om han har aspirationer på att få hela klassen med sig. (Vid ett av samtalen under kursen snuddade man vid den tanken, att vi egentligen inte har råd att resonera på detta sätt. Begåvningarna måste föras fram och de svagare kanske lämnas efter, om vi skall kunna stå oss i den internationella, intellektuella konkurrensen).

Beträffande metodiken vid problemlösningen kan först några allmänna, vardagliga och välkända påpekanden göras.

Kravet på *ordentlighet.* Ordentliga siffror och ordentliga uppställningar av uträkningarna, i den mån sådana krävs. Inga kladduträkningar påminnande om räkningarna på ett omslagspapper i en speceriaffär!

Text. Men räkneboken skall inte innehålla enbart siffror. Först och främst skall svaren skrivas ut ordentligt med angivande av sorter, helst i en fullständig mening. T. ex. Han vann 3 % av inköpspriset, inte bara Svar 3 %. Detsamma gäller om antagandet i problem, som leder till en ekvation. T. ex. 90 kr. skall delas mellan A och B. Antagande: A får x kr. och B får (90 — x) kr. Eleverna bör vänjas att sätta ut parentesen kring 90 — x redan i antagandet.

Begriper eleven problemet? Hur ofta har inte matematikläraren anledning påpeka, att eleven skall läsa rätt innantill och läsa så, att han förstår innehållet.

T. ex. eleven läser: »Skillnaden mellan $\frac{5}{8}$ av ett tal och $\frac{2}{5}$ av samma tal är 34» och blundar för fortsättningen »enheter mindre än talet självt». Nyttigt är att låta eleven återge innehållet i problemet med egna ord. Det visar sig oftare än man tror, att det för eleven inte finns någon realitet bakom orden. Han kan inte konkretisera — det är bara ord, ord. »Vad vet vi? Vad frågar vi efter?» bör vara ständiga frågor i detta sammanhang. Om problemtexten innehåller många sifferuppgifter, bör dessa antecknas i samband med genomläsningen.

Överslagsberäkning. Sedan problemets innehåll blivit klart och innan uträkningen börjar, skall en överslagsberäkning göras. Om eleverna vänjs vid detta, kan många orimliga svar undvikas. »Tippningen» visar också, om eleven verkligen begripit problemet.

Exempelsamlingar. I varje klass måste finnas tillgång till olika räkneläror och exempelsamlingar för fyllnads- och överkursuppgifter. Men viktigt är, att läraren ur dessa samlingar väljer ut lämpliga, rimliga och praktiska problem. Bäst är, om läraren själv kan stencilera för klassen lämpliga uppgifter, som han har tillgängliga under lektionerna.

Några problemtyper.

Procenträkning. Bland de räkneuppgifter, som möter i vardagslivet, är det få, som är så vanliga som procentuppgifterna. Säkerhet i procenträkning bör därför sättas upp som ett oeftergivligt krav i skolan. I klass 6 kommer procentgreppet in för att sedan följa eleverna genom skolan och livet. Det kan f. ö. ifrågasättas, om inte procentbegreppet skulle föras in ännu tidigare — i och med att man börjar med bråkbegreppet. Inlärandet måste i varje fall göras grundligt och utan brådska, och sedan skall procenträkningen nötas in, så att den så småningom blir mekanisk. Det gäller övergången från andra bråkdelar till procent ($\frac{4}{5} = 80\ \%$; $\frac{5}{6} = 83{,}3\ \%$), likaså a $+ 5\ \%$ av a $= 105\ \%$ av a; a $- 5\ \%$ av a $= 95\ \%$ av a. Promilleuppgifterna får inte heller glömmas bort (a $+ 5\ ‰$ av a $= 1005\ ‰$ av a).

Av vikt är att inpränta, att procent alltid är procent *av* någonting. 5 % är bara ett bråktal lika väl som $\frac{1}{3}$, och detta har inte någon konkret innebörd, förrän jag vet, vad bråkdelarna skall tagas av. Därför skall vid procenträkningen både i antagande och svar anges, på vilken summa procenten beräknas. Ex.: Vinsten är x % av inköpspriset, rabatten är x % av bruttoförsäljningspriset, inköpskostnaderna är x % av fakturapriset. Detta bör »exerceras» in, gärna i samband med den huvudräkning, som skall vara ständigt återkommande vid procenträkningen.

När eleverna blir vana vid ekvationslösning, vill de gärna räkna även enkla procenttal med ekvation. Min erfarenhet är dock, att de elever, som är drillade med procenträkning, snabbare kommer till målet utan ekvation. Ex.: I 120 kg havsvatten finns 3 kg salt. Beräkna salthalten i procent (av havsvattnet).

Antingen 3 kg salt på 120 kg havsvatten

alltså $\frac{3 \cdot 100}{120}\ \% = 2{,}5\ \%$ Salthalten är 2,5 %

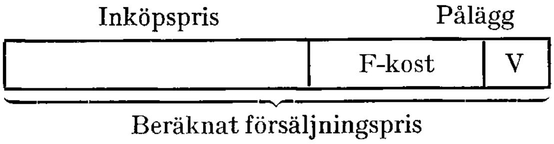
Eller Antag salthalten är x % (av havsvattnet)

$\frac{x}{100} \cdot 120 = 3 \qquad x = 2{,}5$ Salthalten är 2,5 %

Affärsproblem. Räknelärorna har sedan långt tillbaka innehållit en stor mängd affärsproblem av den enkla formen med inköpspris, försäljningspris, vinst och förlust. Denna förenkling har ofta blivit missvisande och är direkt felaktig, så fort det gäller en affärsmans kalkylering. Trots detta kan naturligtvis dessa förenklade uppgifter användas, när man börjar med affärsproblem, blott man inte låser fast att vinst och förlust *alltid* beräknas på inköpspriset. Att sedan föra in begreppet »pålägg» brukar inte vålla några svårigheter. Eleverna begriper lätt, att affärsmannen måste »lägga på» en summa för hyror, löner m. m. och att detta pålägg måste göras så stort, att det även ger en skälig vinst. Inlärandet av hela detta kapitel måste ske åskådligt med fingerade grosshandlare, detaljhandlare, affärsbiträden, kunder o. s. v. Barnen kan själva hjälpa till med att hitta på exempel. Det blir träning för både lärarens och barnens »matematiska fantasi». Förståelsen underlättas i hög grad, om man under resonemanget åskådliggör de olika posterna genom ett diagram. Se nedan!

Exempel. Arrangörerna av en fest skulle bl. a. sälja apelsiner. En låda på 100 st. kostade i inköp 20 kr. Av erfarenhet visste man, att några apelsiner i varje låda måste kasseras. Man beräknade därför kunna sälja 95 st. à 30 öre. Transporten till lokalen kostade 2 kr. och pojken, som sålde apelsinerna skulle få 10 % av priset på de sålda apelsinerna. Hur mycket skulle man vinna på affären med dessa beräkningar? Hur många procent av inköpspriset skulle vinsten bli? Hur många procent utgjorde pålägget av inköpspriset?

Problemet »ritas upp».



I-p (Inköpspris) = 20 kr. för 95 apelsiner (beräknat)
Beräknat F-p (Försäljningspris) = 28,50 kr.
Pålägg = 8,50 kr.
F-k (Försäljningskostnad) = 2 kr. + 10 % av 28,50 kr. = 4,85 kr.
V (Vinsten) = Pålägg — F-k = 8,50 kr. — 4,85 kr. = 3,65 kr.

$$V = \frac{3{,}65 \cdot 100}{20}\ \%\ \text{av I-p} = 18{,}25\ \%\ \text{av inköpspriset}$$

$$\text{Pålägget} = \frac{8{,}50 \cdot 100}{20}\ \%\ \text{av I-p} = 42{,}5\ \%\ \text{av inköpspriset}$$

Svar: a) Vinsten var 3,65 kr. b) Vinsten utgjorde 18,25 % av inköpspriset.
c) Pålägget utgjorde 42,5 % av inköpspriset.

Ovanstående och andra liknande exempel kan varieras på många sätt. Hur stor skulle vinsten blivit, om 15 i stället för de kalkylerade 5 apelsinerna varit odugliga, eller om man sålt 50 apelsiner à 30 öre och 45 à 20 öre per st.? Hur stort pålägg skall man göra, om man vill förtjäna 5 kr., och vilket försäljningspris skall man då minst sätta per st för de 95 apelsinerna? Vilket inköpspris skulle man kunnat betala per låda, om man velat tjäna 5 kr. under i övrigt samma betingelser som i det ursprungliga exemplet?

Ännu närmare verkligheten kommer man genom att även införa begreppen fakturapris och inköpskostnad i problemen. För duktiga elever i klass 9 kan man ange fakturapriset i utländsk valuta, medan försäljningspriset skall anges i svenska pengar. Se Rendahl-Wahlström-Frank, Räknebok för realskolan, del 2, O. Carli, Vardagsräkning m. fl. räkneböcker.

Det bör betonas för eleverna, att dessa problem egentligen berör affärsmannens kalkylation, att försäljningspriset är det av honom *beräknade* priset. Sedan kan olika omständigheter göra, att det verkliga försäljningspriset blir ett annat. Affärsmannen kan t. ex. lämna rabatt, så att den beräknade vinsten minskas eller försvinner. Han kan realisera, så att prissättningen även »tränger in» på försäljningskostnaden och förlust uppstår. På grund av stigande efterfrågan kan han höja försäljningspriset över det kalkylerade eller på grund av konkurrens bli tvungen att sänka det under det beräknade priset. Några exempel bör räknas även på sådana fall. Affärsräkningen får dock inte drivas allt för mycket. Dess uppgift skall vara att öppna ögonen för ett viktigt kapitel i handelsräkningen, som inte blott affärsmannen utan även kunden bör ha någon inblick i.

Bankaffärer. De flesta människor i våra dagar anlitar då och då bankerna — för sparande, för lån, för köp eller försäljning av värdepapper, för förvaltning av medel, för resekreditiv m. m. Banken är alltid beredd att hjälpa kunderna, och dessa behöver sällan göra några beräkningar själva. Innebörden av affärstransaktionen bör dock kunden ha något begrepp om. I skolan tillkommer det samhällsläran att ge dessa kunskaper, men det måste ske i samverkan med matematiken. Kan man räkna några exempel på växlar och obligationer, förstår man också något av de bakomliggande transaktionerna. Här är ett fält för samverkan mellan olika lärare, vilket blir till nytta för alla parter.

Vid behandling av detta kapitel kan »Karl Perssons bankaffärer» (Sv. Handelsbanken) användas som uppslagsbok och lärobok. Tidigare, i samband med procenträkningen, har den enkla räntan behandlats. Som repetition kan man nu ta upp bankernas olika inlåningsräkningar med olika räntesatser och därefter gå över till den *sammansatta räntan.* Eleverna skall lära sig förstå och läsa slutvärdes- och nuvärdestabeller, tabeller för premier och ev. även amorteringstabeller. De bör finna, att tabeller inte är »farliga» och »oförståeliga».

Med tanke på den stora roll *varuväxlar* spelar i affärslivet, bör varje elev få skriva en tratta, låta acceptera och diskontera den och beräkna diskontavdraget. Då man lär eleverna, att räntan beräknas på växelbeloppet, vilket f. ö. faller sig helt naturligt för dem, kan man påvisa, att detta egentligen är en »orättvisa» mot utställaren-endossenten. Välj t. ex. följande orimliga exempel: En växel på 1000 kr. diskonterades mot 4 % 25 år före förfallodagen. Beräkna det diskonterade värdet. — Detta blir 0 kr! Nuvärdet av dessa 1000 kr. är ju i stället ungefär 375 kr. (Se räntetabell!) Växlar utställas därför på *kort* förfallotid.

Att aktier och obligationer är *värdepapper,* som man kan skaffa sig i stället för att sätta in pengar på ett bankkonto, känner många elever till. Vilket sätt att spara skall man välja? Svaret på denna fråga beror på många faktorer, och de viktigaste bör eleverna få lära känna. Till stor del måste det bli ett teoretiskt inlärande, som inte får forceras, om det skall bli någon varaktig behållning av undervisningen. Skillnaden mellan aktie och obligation, nominellt värde, aktieutdelning, obligationsränta, kurs och kursvärde bör klargöras och nötas in. Aktuella räkneexempel kan erhållas ur fondbörsens kurslista, som finns hos bankerna, i en del tidningar och meddelas i radio. I samband därmed är det lätt att diskutera och räkna ut några enkla exempel på kapitalplacering. Se t. ex. kapitlet Värdepapper i Vardagsräkning.

2. **Geometri.**

På sina håll har geometrin på högstadiet blivit en stötesten både för lärare och elever. Det gäller främst den euklideiska geometrin, och det är inte något nytt för dagen. Vi minns nog ett par rader ur de gamla skolpojksverserna: »Hjärnan i min skalle vrides, när jag tänker på Euklides», och »Åsnebryggan» är väl inte heller alldeles bortglömd. Är det elevens, lärarens eller ämnets fel? Svaret på den frågan får i sista hand ges av psykologer och matematikmetodiker. Den praktiska erfarenheten menar sig ha sett, hur hos somliga elever begåvning för ämnet tycks brista, att en del är för omogna, andra för lata (?). Många tycks totalt sakna intresse för någon form av deduktiv bevisföring, medan andra kanske helt enkelt inte hinner med i tankegången. För läraren blir denna stora olikhet eleverna emellan en tung börda, inte minst med de nuvarande stora klasserna. Pressad av kursplanen och i någon mån också av de duktigare eleverna lägger läraren inte grunden tillräckligt fast. Och ämnet slutligen, är svårt, i varje fall i dess »klassiska» form med kravet på abstraktion och deduktiv bevisföring.

Det tycks vara nödvändigt med en radikal differentiering av elevmaterialet i detta ämne. Fråga är, om denna differentiering kommer att stämma överens med den, som skett på andra grunder. Principiellt skulle de båda alternativen bli: 1. En empirisk behandling av vissa geometriska satser, alltså grundad på mätning med linjal och gradskiva, med utritade eller utklippta ytmått, med volymmätning med hjälp av kuber o. s. v. — 2. En systematisk, deduktiv genomgång av de viktigaste geometriska satserna. Denna principiella uppdelning utesluter ingalunda, att deduktiva bevis stundom kan genomföras inom alt. 1, och att den empiriska metoden i vissa fall kan vara berättigad inom alt. 2. Tvärtom kan för den senare gruppen den första genomgången av många satser bygga på empirisk härledning.

Geometrin *kan* bli ett »roligt» ämne, roligt för den som vill rita och mäta, och för den, som upptäcker den logiska byggnaden i systemet av satser och som får uppleva den intellektuella glädjen i att själv lösa en geometrisk övningsuppgift.

För alt. 2 finns metodiska anvisningar i bl. a. »Kursplaner och metodiska anvisningar för realskolan», i Sjöstedt: »Geometri och geometriundervisning» och i Stenmark: »Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer», varför jag här kan gå förbi detta kapitel. För alt. 1 skall här några, ingalunda nya påpekanden göras. Först och främst kravet på *åskådlighet*. Figurer skall ritas till alla räkneexempel med linjal, passare och gradskiva. Sorter skall skrivas ut. Geometriexemplen blir en naturlig och nyttig övning i *sorträkning*. Då *förberedande övningar* förekommer på skolplanen eller ute i terrängen — längdmätning, stegning, avståndsbedömning, kanske miniatyrorientering — skall allt vara väl genomtänkt, förberett och organiserat, annars blir det till ingen nytta.

I klass 6 skall eleverna ha fått de första geometriska begreppen, men det torde ändå bli nödvändigt i klass 7 att åtminstone repetitionsvis börja från början. Samtidigt med repetitionen kan man vidga den tidigare kursen. Några exempel må tillåtas.

När man talar om den *räta linjen* och sträckan, ställer man uppgiften att dela sträckan mitt itu med ögonmått, med måttlinjal och visar slutligen den vanliga lösningen med passare och linjal. Lösningens riktighet påvisas genom mätning. Uppgiften, lösningen och kontrollen antecknas och ritas av eleverna, de gör sin egen lärobok i geometri. På samma sätt kan man gå fram även i fortsättningen. Naturligtvis är denna metod bakvänd ur »tankegeometrins» synpunkt, men den är empiriskt försvarlig.

Vinkeln är ett roligt avsnitt, som man får se till, att man inte fördjupar sig för mycket i. Det kommer ju tillbaka många gånger. Vinklars storlek brukar jag åskådliggöra med passaren, vars ben jag vrider mer eller mindre från varandra. Så småningom kan man då också komma fram till, att vinkeln är just ett mått på denna »vridning». Sedan man påmint om begreppen rät, trubbig och spetsig vinkel, kan man gå över till sidovinklar och deras summa och vertikalvinklar, som eleverna kan jämföra genom mätning (Klasstabell). Även till det deduktiva beviset för denna sats kan man, om man så vill, säkert leda många elever. Vinkelns tudelning göres först med gradskiva sedan med passare och linjal. Om man låter en rät linje beteckna en 180° vinkel, kan man dela denna mitt itu och få fram normalen. »Kontrolleras» med vinkelhake och gradskiva. Man kan ju också nöja sig med att dra normaler med hjälp av vinkelhake.

Efter vinkeln följer genomgång av *parallella linjer* och *parallellogrammen*. Konstruktion av parallella linjer sker genom parallellförflyttning av vinkelhaken utefter en linjal. Rektangeln och kvadraten, romboiden och romben betraktas som specialfall av parallellogrammen. Sidor och vinklar mäts. Rektangelns yta ägnas stor uppmärksamhet. Begreppen längd, längdmått, yta, ytmått inskärpes. Slarv med beteckningarna får inte förekomma. De snedvinkliga parallellogrammen »förvandlas» till rektanglar, när deras yta skall bestämmas. Ytformeln nötes in med många räkneexempel. Problem, där man söker höjden (basen), då ytan och basen (höjden) är kända, bör sparas och användas som tillämpningsexempel, när man börjar med ekvationsläran.

Åt triangeln får man ägna mycken tid. Alla typer av trianglar skall ritas i elevernas böcker och på tavlan. Se till, att figurerna inte ritas för små! Vinkelsumman påvisas genom mätning, vikning och ev. med konstruktion. Kongruensbegreppet bör få en ordentligt tillmätt tid. Efter lärarens anvisningar ritar varje elev en triangel med angivna mått på två sidor och mellanliggande vinkel. Samtliga trianglar klipps ut och jämföres med varandra. På samma sätt kan man gå till väga med de andra kongruensfallen. Alla höjderna i trianglar av olika typer ritas och deras samband med respektive baser inläres ordentligt. Triangelns yta erhålles genom att eleverna klipper itu en parallellogram utefter en diagonal och erhåller två kongruenta trianglar. Triangelytor beräknas sedan genom att var och en av de tre sidorna tas till bas, varefter resultaten jämföres.

Trapetsets yta erhålles bäst genom sönderklippning utefter en diagonal i två trianglar. Metoden att klippa ut två kongruenta trapets och sammanfoga dem till en parallellogram ger visserligen direkt formeln $\frac{(a+b) \cdot h}{2}$, men det blir inte så lätt klart för alla elever, att den sammanfogade figuren verkligen är en parallellogram.

Månghörningarnas ytor beräknas som summan av trianglar. En för eleverna roande uppgift är att bestämma antalet *diagonaler* i 5-, 6- och 7-hörningen genom ritning, varefter man kan fråga, om de utan att rita kan ange antalet i 8- och 10-hörningen. För duktiga elever kan man kasta fram frågan om 100-hörningen och ev. komma fram till den allmänna formeln för n-hörningen. Vad som här sagts om antalet diagonaler, kan överföras på frågan om vinkelsumman i månghörningarna.

Betr. *raka prismors volym* vill jag blott ytterligare betona kravet på åskådlighet.

Geometrin bör i sjunde klass börjas tidigt på höstterminen, dels för att ge omväxling, dels för att ge stoff till åskådliga räkneexempel i bråkläran och sedan i ekvationsläran. Hur geometrin skall fördelas på de tre veckotimmarna, kan diskuteras.

I klass 8 tillkommer *cirkeln* och *cylindern* samt *pyramiden, konen och klotet.* För cirkelns omkrets bör man komma fram till formeln $\pi \cdot$ diametern hellre än till $2 \cdot \pi \cdot r$. Därigenom minskar man risken för sammanblandning med $\pi \cdot r^2$. Om man hinner, kan man mäta och jämföra periferi- och medelpunktsvinklar i cirkeln för att nå fram till satsen om den räta vinkeln i halvcirkeln. Cylinderns volym erhålles genom jämförelse med det raka prismat med en månghörning som bas. Pyramidens, konens och klotets volym påvisas genom mätning med t. ex. vatten eller sand och jämförelse med »motsvarande» prisma och cylinder. Proportionerna 1: 2: 3 mellan konen, klotet och cylindern samt tecknet på Arkimedes gravsten brukar intressera de flesta elever.

Som avslutning på den genomgångna geometrikursen kan man göra en sammanställning av samtliga formler och »exercera» med den. Varför inte ordna frågesport?

I klass 8 skall även den likformiga avbildningen behandlas. En utförlig framställning av dess metodik finns i Stenmarks bok. I samband därmed tas begreppet skala upp och övas genom ritning, mätning på ritade byggnadsplaner, kartläsning m. m.

I klass 9g fortsätter geometrin på den väg, som tidigare följts i alt. 2. I 9y får främst sådana moment tas upp, som kan bli till nytta för yrkesundervisningen — en repetition av såväl bråklära som geometri torde bli ofrånkomlig. Även i 9a måste det bli en repetitionskurs men dessutom dels en utvidgning på problemlösningens område, som här förut berörts, dels en fortsättning på geometrikursen, då Pytagoras sats skulle kunna tas upp. Enligt min mening bildar denna sats inkörsporten till läran om kvadratrötter och har dessutom sitt historiska intresse. I konsekvens med föregående resonemang bör den verifieras på empirisk väg och blir då ingalunda svår. Från den är steget lätt till andra kvadrater och till kvadratrötter. Utgångspunkten kan vara följande fråga: »Sidan i en kvadrat av storleken 1 dm^2 är 1 dm. Hur lång är sidan i en dubbelt så stor kvadrat? Rita!» Lösningsförsöken, ritade på tavlan, blir många, men kanske kommer så småningom den rätta lösningen. För den elev, som har Pytagoras sats aktuell, är det inte omöjligt att komma fram till den rätvinkliga triangeln med katederna = 1 dm. Hur lång blir då hypotenusan? Genom mätning kommer man en bit, men villkoret är att kvadraten på den erhållna längden skall vara 2 dm^2. Det blir då åtskilliga decimalbråk, som prövas, innan man får ge upp. Och både lärare och elever får nöja sig med, att »det går inte». Men i matematiken vill vi inte stanna med detta svar lika litet som vi stannade inför det, när vi ställdes inför problemet $7 : 3 = ?$ eller frågan $3 - 7 = ?$ Då införde man bråktalen och de negativa talen. Nu inför man de *irrationella talen.* I ovannämnda fall talet $\sqrt{2}$. Se f. ö. Stenmark, kapitlet Kvadratrötter. Kanske mycket av detta går in genom ena örat och ut genom det andra på eleverna, men det fastnar måhända hos någon, som därigenom får en vidgad syn på matematiken. Lättförståeligare för alla blir räkningen med rottabeller, som bör övas så mycket tiden medger.

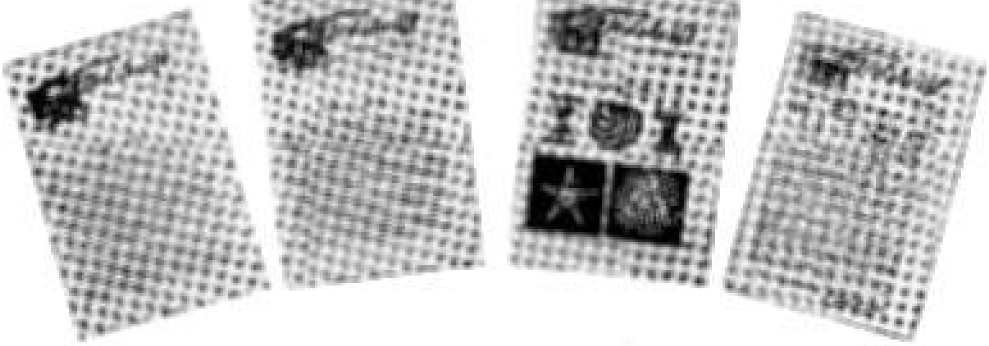
3. **Diagram.**

Till slut ett par ord om diagram. Det är kanske från min sida en »käpphäst». Men den som strävar att i möjligaste mån få fram åskådlighet i undervisningen och även f. ö. i den elementära matematiken, kan inte gå förbi diagrammen. I jämförelse med en tabell ger diagrammet större översikt, visar lättare tendensen och möjliggör en snabbare, om än inte lika detaljerad avläsning. I vardagslivet blir diagrammet allt vanligare. Se t. ex. på dagspressen! Både att läsa och rita diagram fordrar emellertid omdöme och noggrannhet, som måste läras in. Stoff är lätt att få, och matematiken får här osökt tillfälle till samarbete med främst geografi och samhällskunskap. Diagrammen kan tas upp i både klass 7 och 8 men bör enligt min mening ägnas särskild uppmärksamhet i 9a och ev. 9y. I »Vardagsräkning» har jag givit exempel på de vanligaste typerna av diagram. Varje lärare, som är intresserad av detta kapitel, kan lätt skaffa diagram ur böcker och tidningar. Det kan vara av intresse att någon gång ge ett diagram som provräkningsuppgift, vare sig det gäller att rita ett eller att redogöra för vad man kan läsa ut ur ett givet diagram.

EN MATEMATIKER ... *(Forts. fr. sid. 12)*

na inte så lätt råkar ut för avbländning. Vad man t. ex. genom en provräkning vill få tag på är ju inte ett mått på den psykiska motståndskraften hos skribenterna utan ett mått på förmågan att lösa problem, *när de verkligen kommit i gång med att lösa dem.*

Vad man därför skall eftersträva är att få fler elever att känna det, som bara de bäst utrustade utan hjälp kommer fram till, en känsla att behärska sitt ämne och att göra det på ett suveränt sätt. Denna känsla skall vara så stark att en begynnelsesvårighet att lösa ett problem icke i sig utgör en oöverkomlig tröskel för vidare sysslande med samma problem. Eleven bör fås att reagera med en tanke av denna art: »Det här kan ju inte jag! Så roligt!» Då blir svårigheten lustbetonad, och att bringa det därhän är väl all pedagogisk verksamhets mål.



Tidskriften, som stiger i värde!

Första årgången av TfS är nu en raritet
— endast ett ringa antal ex. finns kvar.

Årgången 1955-56 kan erhållas genom att insända kr 10:—
på postgironummer 49 02 82

TIDSKRIFT FÖR SKOLMATEMATIK
Jungmansgatan 1, Karlstad. Tel. 163 13
utkommer med 4 nr per läsår

Prenumeration per läsår Kr. 5: —
Postgironummer 49 02 82

Redaktör och ansvarig utgivare:
Lektor Edvin Ferner

KARLSTAD 1956
Nya Wermlands-Tidningens Boktryckeri