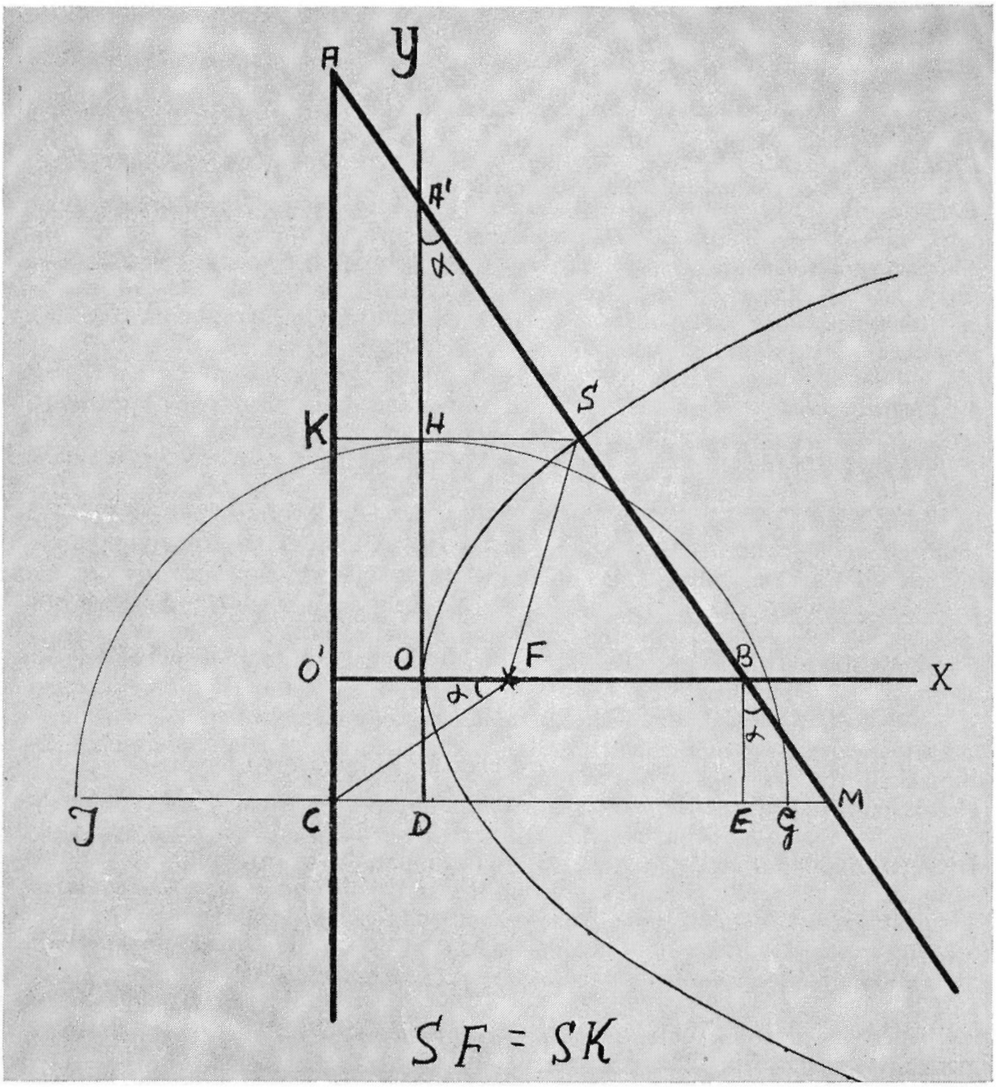
# Tidskrift för Skolmatematik

[illegible]

Nr 3

ATOMER OCH STJÄRNOR av *Tord Hall*, Norstedts.

*Här möter vi en populärvetenskaplig författare av hög internationell klass, som förenar sitt naturvetenskapliga vetande med en fin humanistisk bildning. Genom författarens eleganta — ofta raljanta stil förs läsaren lekande och lätt in i den moderna fysikens världsbild. »Atomer och stjärnor» har också allmänt uppskattats av recensenterna. Genom tillmötesgående från förlaget och författaren har det beretts TfS tillfälle att presentera kapitlet »Matematiken som skön konst», hämtat ur »Atomer och stjärnor». TfS önskar inte enbart uppehålla sig vid den vardagliga skolmatematiken. Det kan vara både befriande och nyttigt för oss matematiklärare att någon gång göra en resa till matematikens högre rymder.*

Red.

# MATEMATIKEN SOM SKÖN KONST

*Lektor Fil. Dr. Tord Hall*

I det allmänna medvetandet framstår matematikern som någon sorts korsning mellan räknemaskin och människa, en modifierad »elektronhjärna», som visserligen inte kan räkna så snabbt och säkert, men som i stället fått vissa mänskliga egenskaper, till exempel ett rudimentärt känsloliv eller en speciell form av humor, som mest yttrar sig i ett elakt skratt över andras tafatta manipulationer med de fyra enkla räknesätten. I vår litteratur är denna människotyp representerad av sådana figurer som den hårde »matematikern» i »Snörmakare Lekholm får en idé» eller den robotskramlande ingenjör Planertz i »Kvartetten som sprängdes».

Av flera skäl — framför allt på grund av ett rent objektivt sanningsintresse — har man anledning att fråga, om denna bild överensstämmer med verkligheten. Det är då inte mer än rätt, om den för fantasilöshet, hårdhet och allmän träaktighet anklagade beredes tillfälle att yttra sig. Äldre tiders matematiker skrev inga memoarer, och de självbiografiska dragen i deras skrifter torde vara nedbringade till ett minimum; men i vårt psykologiserande tidevarv har till och med dessa de mest opersonliga av alla författare ibland lyft på visiret.

Sålunda har under de senaste åren åtminstone två stora europeiska matematiker, nämligen den engelske funktionsteoretikern G. H. Hardy och den tyske talteoretikern H. Hasse, avgivit personliga deklarationer om hur de uppfattar sin vetenskap. (»A Mathematician's Apology». Cambridge 1941 och 1948. — »Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht». Wiesbaden 1952.) De slutsatser, som dessa representanter för var sin gren av den högre matematiken kommer till, är överraskande lika, utan att man därför har anledning till någon förmodan att Hardy skulle ha påverkat Hasse.

Den huvudsats, som båda bevisar, inte med sina vanliga hjälpmedel utan med normalprosans subjektiva sannolikhetskalkyl, kan formuleras på följande sätt: »Den högre matematiken är, i sin frihet från verkligheten, i sin klarhet, skönhet och dynamiska kraft, en exklusiv form av konstnärligt skapande.» Denna tes, vars riktighet inte torde bestridas av någon, som fattat en smula av matematikens väsen, innebär att den populära bilden närmast är raka motsatsen till verklighetens matematiker av kött och blod.

Låt oss nu se en smula på demonstrationerna, som enligt sakens natur måste få karaktären av analogibevis. Om vi börjar med Hardy, så indelar han matematikerna i två klasser, »school mathematicians» och »real mathematicians». Till den förra hör ungefär alla, nedifrån och uppåt, som bedriver så kallad tillämpad matematik, eller, om termen inte missförstås, ingenjörsmatematik. (Det är givetvis dessa som dominerar bilden i det allmänna medvetandet och i litteraturen.) Endast en person omnämnes i detta genanta sammanhang, nämligen professor Lancelot Hogben, den kände författaren till en lärobok med den tvetydiga titeln »Matematik för miljoner». Till den senare gruppen hör alla som är matematiker i den betydelse Hardy inlägger i ordet, det vill säga nyskaparna eller upptäckarna: Arkimedes, Newton, Gauss, Cauchy, Abel o. s. v. Hardy, och även Hasse, sysslar endast med denna kategori i vilken båda har självklar hemortsrätt.

Hardy gör sedan en jämförelse mellan matematiken och poesien. Han hävdar, att ett förstklassigt matematiskt teorem i mycket rymmer samma skönhetsvärden som den stora lyriken. När han vill karakterisera denna matematik, använder han sådana ord som enkelhet och klarhet, höghet och allvar, allmängiltighet och djup. För att ge exempel som förstås av alla går han tillbaka till grekerna och återger pytagoréernas bevis för irrationaliteten hos kvadratroten ur 2 samt Euklides' bevis för att det finns oändligt många primtal. I likhet med Sapfos strofer har dessa matematiska poem bevarat sin ursprungliga friskhet och skönhet genom två och ett halvt årtusende.

De matematiska resultaten är enligt Hardy i flera avseenden till och med överlägsna de poetiska. Ett undermåligt matematiskt teorem kan aldrig bli så undermåligt som dålig poesi, ty hur dåligt det än är, så bringar det i alla fall en ny liten sanning i dagen. Vilken annan gren av mänsklig verksamhet kan vara säker på en sådan effekt av sina mest blygsamma landvinningar? — Matematikerns monument är även varaktigare än brons och horatianska oden: »Arkimedes skall ihågkommas, när Aischylos är glömd, ty språk dör, men aldrig matematiska idéer.» Även om logiken i detta påstående är diskutabel — eller kanske just därför — ger det en god uppfattning om Hardys entusiastiska inställning till sin exklusiva konst. Som sammanfattning av hans vittnesmål kan man säga, att de verkliga matematikerna utgör en liten grupp transcendenta poeter som på ett för övriga människor obegripligt symbolspråk sinsemellan utbyter tankar om en högre och sannare verklighet.

Medan Hardy i sin skrift stöder sig på analogier med poesien, använder sig Hasse av musiken. Det är ju ett känt faktum, att så kallade underbarn företrädesvis dyker upp inom musiken och matematiken (samt inom det matematiken närstående schackspelet). Mozart, Pascal (samt Capablanca) må räcka som exempel härvidlag, och kanske skall framtidens fysiologer kunna påvisa strukturlikheter i hjärnans byggnad hos denna grupp av genier. Vare därmed hur som helst: Hasses kontrapunktiska variationer över temat matematik och (klassisk) musik efterlämnar ett skönt och övertygande intryck.

Han framhåller först pytagoréernas upptäckt, att musiken behärskas av harmonilärans matematiska lagbundenhet, och jämför därefter de olika, logiskt sammanflätade leden i ett matematiskt bevis med den konstfulla vävnaden i en flerstämmig fuga. Men dessa likheter ligger ännu på ytan. Ty lika litet som rent formella förträffligheter gör en Bach-fuga till ett oförgängligt konstverk, lika litet gör ett strikt iakttagande av logikens regler ett teorem, eller ens en hel teori, till matematik i ordets egentliga mening. För att uppnå en sådan effekt är, med användande av matematisk terminologi, »den logiska riktigheten visserligen nödvändig men ingalunda tillräcklig». Dessutom måste finnas en motsvarighet till det som gör Bach-fugan till stor konst: »den kristallklara skönheten och en genom hela verket svepande, väldig dynamik».

Om sig själv meddelar Hasse, att han inför ett nytt problem ofta söker föreställa sig hur lösningen skulle se ut »om den vore skön». Och se, ibland händer det att svårigheterna ger vika inför denna rent estetiska attack! I andens värld gäller Leibniz' princip om den förutbestämda harmonien, kanske därför att det är harmoni vi medvetet eller omedvetet söker.

Hasse jämför också det matematiska skapandet med konstnärligt skapande i allmänhet. Han påpekar matematikerns absoluta frihet från verklighetens tvång och lagar, en frihet som ställer matematiken i särklass bland vetenskaperna och dess utövare i paritet med »en fri, enligt sin begåvning och ingivelse gestaltande konstnär». Ytterligare en parallell är matematikens intuitiva väsen. Ty paradoxalt nog förhåller det sig ofta så, och det just med de största matematiska upptäckterna, att de först skådas i en plötslig flamma av intuitiv klarhet — »allt snillrikt träffar som en blixt» — och därefter får den logiska apparaten mödosamt arbeta sig fram till bekräftelsen. Till sist skapar skönheten och logiken i harmonisk förening den definitiva, från all tyngd befriade formuleringen.

Om man, efter att ha hört en engelsman och en tysk, även önskar höra en gallisk stämma, så kan man göra det i rik och mångstämmig kör i samlingsverket »Les grands Courants de la Pensée mathématique», utgivet av Francois Le Lionnais, matematiker, estet och motståndsman under tyska ockupationen. I denna bok är hela den franska matematiska parnassen mobiliserad, och enbart registret över de femtio essayerna, med sådana författarnamn som Borel, Valiron, Montel, Denjou, de Broglie, Le Corbusier, Brunschvicg och så vidare, gör ett överväldigande intryck. (Även Paul Valéry deltager med ett »outgivet brev», men i mitt exemplar av boken är detta brev på grund av något tekniskt missöde fortfarande outgivet; det representeras av två tomma och fantasiväckande sidor.)

Matematikens olika grenar behandlas här i många fall av män som själva spelat eller spelar en fundamental roll i utvecklingen, och som dessutom skriver med den klarhet och det formella mästerskap som inom matematiken hitintills fransmännen ensamma har kunnat prestera. Mängden av lysande franska insatser både i närvarande och i förfluten tid skulle kanske komma en svensk att känna sig som en barbar inför Platons akademi; men förekomsten av sådana namn som Mittag-Leffler, Fredholm, Carleman och Beurling stöder i så fall det sviktande nationella självförtroendet.

De allra flesta essayerna är avsedda för fackmän, andra, såsom »Matematiken i industrien» eller »Matematik och marxism», hör inte hemma i detta sammanhang. Sambandet mellan matematik och konst är emellertid inte bortglömt; det vimlar av citat som styrker detta, de flesta naturligt nog härstammande från matematiker, men många dessutom från andra håll, till exempel från konseljpresidenten Painlevé — dock i sin ungdom matematiker och professor vid Sorbonne — från Fénelon, bröderna Goncourt och Novalis. Eftersom Novalis mest torde vara känd för sin litterär-botaniska upptäckt av romantikens blå blomma, må hans uttalande citeras: »Den verklige matematikern är entusiast 'per se'. Utan entusiasm ingen matematik. — Algebra är poesi.»

En avdelning i »Les grands Courants» heter: »Matematiken, skönheten, estetiken och de sköna konsterna.» Där har Le Lionnais själv skrivit en essay, »Skönheten i matematiken», som bland annat behandlar ett tredje, här förut ej omnämnt samband, nämligen mellan geometri samt måleri och bildhuggarkonst. Denna beröringspunkt är ju tämligen trivial alltifrån perspektivlärans uppkomst under renässansen fram till den moderna abstrakta konsten, som bland annat tillgodogjort sig vissa matematiska idéer om icke-euklideisk geometri. Författarens strikt genomförda matematiska tankegång ger emellertid en originell belysning, och illustrationerna, från Dürers »Melancholia» till på »pseudosfären» ritade trianglar, vilkas vinklar alla är lika med noll, åskådliggör tankegången på ett utmärkt sätt. (En »pseudosfär» är en yta, som ser ut ungefär som mynningen på en basun eller ett muskedunder; om man ritar en triangel på en sådan yta, blir dess vinkelsumma alltid mindre än 180 grader.)

För att få reda i den outtömliga mångfalden indelar Le Lionnais den matematiska skönheten i två huvudgrupper (utan klara gränslinjer): den klassiska och den romantiska. De här återgivna bilderna utgör författarens typexempel. »Klassicismen»

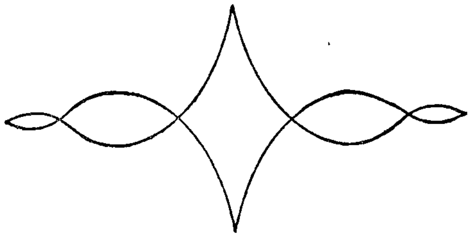


Fig. 1. Klassicism

(fig. 1) utgör en transformation av en välkänd kurva, den så kallade asteroiden eller stjärnan, och är försedd med Baudelaire-citatet:

»Là, tout n'est qu'ordre et beauté,
Luxe, calme et volupté.»

(För min del får jag vid betraktandet i stället associationer till ett tema av Mozart.) — »Romantiken» (fig. 2) åtföljes av ett citat från Delacroix: »Il y a des lignes qui sont des monstres». (Den påminner om en hydra, sedd genom ett mikroskop, just när den håller på att sluka en vattendroppe.) Kurvskaran innehåller några lösningar till en skenbart harmlös differentialekvation av första ordningen.

Le Lionnais' indelning återspeglar de två huvudströmmar som funnits inom matematiken alltsedan den dag då grekerna övertog egypternas empiriska geometri — bedriven av faraos lantmätare, vars uppgift bland annat bestod i att vidmakthålla ägogränserna efter Nilens årliga översvämningar — och av detta dybemängda mätande gjorde en skön konst, som varje hellen satte en ära i att behärska.

Pytagoras, Apollonius och Arkimedes är klassiker, Zenon med sin oupphinneliga sköldpadda och sin stillastående pil är en revolutionär romantiker. Man återfinner samma motsats i »Les grands Courants de la Pensée mathématique». Detta verk utgör inte bara en bekräftelse på grekernas självklara uppfattning av matematiken som en skön konst utan också ett lysande vittnesbörd om att den hellenistiska traditionen ännu är stark och levande i ett hotat Europa.

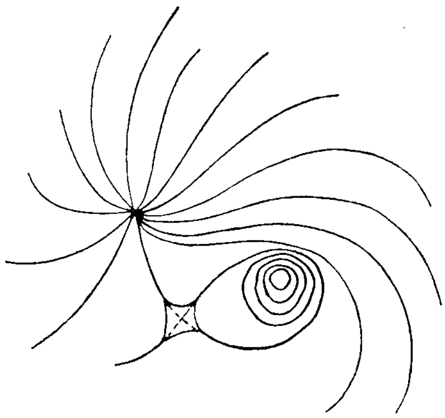


Fig. 2. Romantik

*Anmälan:*

## En lärobok i matematik för universitet och högskolor

*Carl Hyltén-Cavallius* och *Lennart Sandgren:* Matematisk analys för nybörjarstadiet vid universitet och högskolor. Lunds studentkårs intressebyrå, Lund. (Pris kr. 41: 50)

Allt emellanåt påtalas för olika skolämnen en tendens att till gymnasieundervisningen överföra kursmoment och behandlingsmetoder, som rätteligen hör hemma vid universitet och högskola. Sagda tendens kan förklaras av en i och för sig lovvärd strävan hos den unge läraren att berika undervisningen med delar av det vetande hans akademiska studier givit honom. En erfaren rektor vid ett provårsläroverk karaktäriserade förhållandet ungefär så: »Man strävar att dra ned universitetet i gymnasiet, gymnasiet i realskolan, realskolan i folkskolan». Han ville med kraft betona varje stadiums särart.

I de metodiska anvisningarna för undervisningen i matematik i gymnasiet läser man följande: »Det är önskvärt, att klyftan mellan gymnasiets och högskolornas sätt att lägga upp funktionsläran minskas». Vid första påseendet kan det te sig förvånande med en sådan anvisning. Det verkar, som om man ville främja den utveckling, som läroverksrektorn med allt skäl varnade för. Rätta förhållandet kommer fram, om man gör en liten återblick i tiden.

När infinitesimalräkningens grunder infördes i de svenska gymnasierna, fruktade man på många håll, att området skulle visa sig tämligen svårtillgängligt för åtskilliga elever, detta på grund av betydande teoretiska svårigheter. Farhågorna har inte besannats. Däremot har läroboksIitteraturen kännetecknats av, om uttrycket tillåtes, en viss pessimism, som gjort, att stringensen fått stå tillbaka för geometrisk åskådlighet. Olägenheterna härav märktes kanske inte så mycket inom gymnasiet; vid den akademiska undervisningen har man stundom sett sig nödsakad att bortse från studenternas förkunskaper i funktionslära, vilka inte dugt att bygga på. Omvänt har gällt, att den nyblivne och nyexaminerade läraren ofta lagt sin universitetsmatematik på hyllan och i värsta fall övergått till ett slentrianmässigt innötande av regler för derivering, extremvärdesberäkning o. d.

Den programförklaring, som ligger i citatet ur de metodiska anvisningarna, har konsekvenser inte bara för gymnasiets utan även för universitetens och högskolornas läroböcker i matematik. Det är därför med stora förväntningar man tar del av det nyutkomna arbetet »Matematisk analys för nybörjarstadiet vid universitet och högskolor» av Carl Hyltén-Cavallius och Lennart Sandgren. Här är inte platsen att bedöma bokens värde för universitetsundervisningen eller att i vanlig mening recensera den. Däremot vill anmälaren oförbehållsamt rekommendera varje gymnasielärare i matematik att studera den.

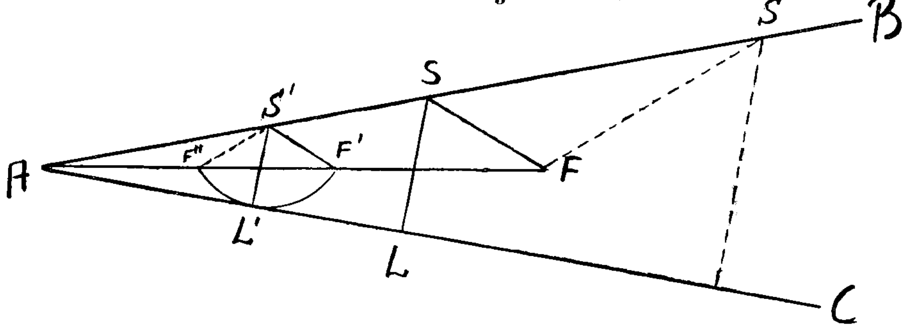
Det är alltid önskvärt, att en lärare skaffar sig en överblick av sitt ämne, innan han ger sig i kast med pedagogiska detaljer, och här kan han få ovärderlig hjälp av »Matematisk analys». Den omfångsrika boken behandlar kombinatorik, elementär teori för reella och komplexa tal, olikheter, funktioner, gränsvärden, derivator, integraler, serier, kurvteori, historik. Den har en för gymnasieläraren mycket fördelaktig egenskap. Man kan med god behållning läsa enskilda kapitel separat, och vissa partier lämpar sig utmärkt som föremål för intresserade elevers självstudier.

Gymnasiets matematikstudium dirigeras i avsevärd mån av de skriftliga proven i studentexamen. Man kan vänta en nyorientering av uppgifterna i dessa prov i syfte att stärka förståelsen för funktionslärans fundamentalbegrepp, gränsvärdet och funktionen. Just i dessa frågor har gymnasieläraren i matematik mycket att hämta i denna lärobok, som härmed livligt anbefalles till inköp för läroverkens elevbibliotek och referensbibliotek. *Sixten Thörnqvist*

# *Problem-Spalten*

Givet: linjerna AB och AC samt punkten F. Bestäm en punkt S på linjen AB så belägen, att SF=SL, då SL är vinkelrät mot linjen AC!

**Lösning I**

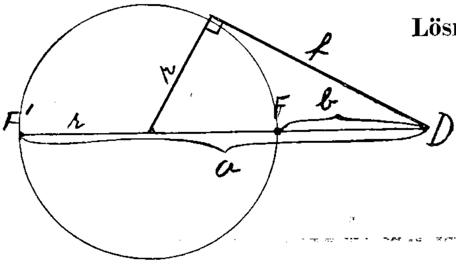



Konstruktion: Sammanbind A med F. Drag från en godtycklig punkt S′ på linjen AB linjen S′L′ vinkelrät mot linjen AC. En cirkel med punkten S′ till centrum och radien=S′L′ skär linjen AF i punkterna F′ och F″. Drag linjerna SF och SL parallella med respektive S′F′ och S′L′. Likformiga trianglar ger:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{SF}{S'F'}=\dfrac{AS}{AS'}\\[2ex]\dfrac{SL}{S'L'}=\dfrac{AS}{AS'}\end{array}\right\}\;\dfrac{SF}{S'F'}=\dfrac{SL}{S'L'}\;;\;\dfrac{SF}{SL}=\dfrac{S'F'}{S'L'}=1\;;\;SF=SL$$

Eftersom SL är parallell med S′L′ och således vinkelrät mot linjen AC är följaktligen S den sökta punkten. V. S. B. Genom att dra FS″ parallell med S′F″ erhålles ytterligare en punkt S″, som uppfyller det givna villkoret. Svaret blir emellertid entydigt, om vi söker den punkt S, som ger det *kortast möjliga* avståndet LS ner till »huvudvägen» AC. Lösningarna II och III ger på liknande sätt två fall.

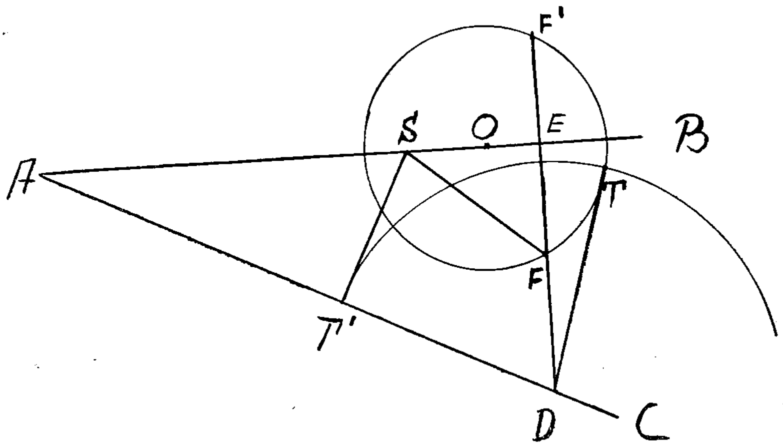
**Lösning II**




Lösning II bygger på sekant-tangentsatsen, som lätt kan bevisas med hjälp av Pythagoras' sats:

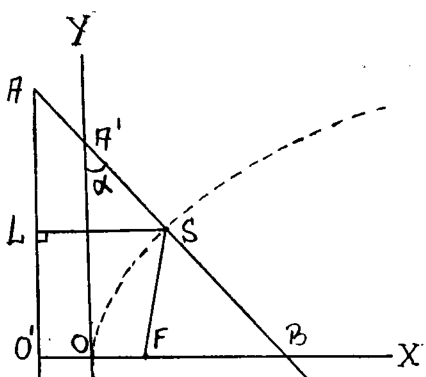
$$t^2+r^2=(a-r)^2$$
$$t^2=a^2-2ar=a(a-2r)=a\cdot b$$
$$t^2=a\cdot b$$

Antag att punkterna F,F′ och D är givna. Samtidigt är då a och b kända och därmed även $t=\sqrt{a \cdot b}$. Detta innebär att tangenten från D kommer att ha en och samma längd t för alla cirklar genom punkterna F och F′! Detta utnyttjas i det följande.




Genom F drages en linje DFEF′ vinkelrätt mot AB. Avsätt EF′=EF. Tag en godtycklig punkt O till centrum för en cirkel, som går igenom F och F′. Drag tangenten DT till denna cirkel. (Tangenten DT kan erhållas t. ex. genom att slå upp en halvcirkel med OD som diameter. Skärningspunkten T mellan denna halvcirkel och den förra cirkeln är tangeringspunkt, då vinkeln OTD i halvcirkeln är rät.)

Enligt den nyss nämnda sekant-tangent-satsen har *alla* cirklar, som går igenom de fasta punkterna F och F′, samma längd DT på tangenten från punkten D, således även den cirkel, som *tangerar* linjen AC. Tangeringspunkten måste ligga i T′, om DT′=DT. Avsätt DT′=DT. Drag linjen T′S vinkelrätt mot AD. SF=ST′= radier i samma cirkel. S är den sökta punkten.




**Lösning III**

En intressant lösning har presenterats av M. Sjölander, Stockholm (som anmodas att sätta sig i kontakt med redaktionen). I sin lösning utnyttjar Sjölander parabelns egenskap, att avståndet från en punkt S på parabelkurvan till focus F är lika med punktens vinkelräta avstånd från parabelns styrlinje. SF=SL.

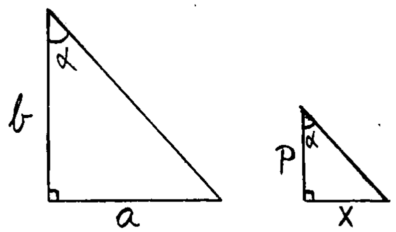
Parabelns vertex 0 ligger mitt emellan styrlinjen AC och F. Drag koordinataxlarna OY och OX. Om $O'O=OF=p/2$ är parabelns ekvation $y^2=2px$. Sätt $OA'=b$ och $OB=a$. Linjen AB:s ekvation blir då $x/a+y/b=1$.

Lösningen på det givna problemet kan erhållas genom att bestämma skärningspunkten (skärningspunkterna) mellan linjen AB och den parabel, som har sitt fokus i F och linjen AC till styrlinje.

$$\left.\begin{array}{l} y^2=2px \\ x/a+y/b=1 \end{array}\right\} y=-pa/b\pm\sqrt{p^2a^2/b^2+2pa} = -pa/b\pm\sqrt{2p\,(pa^2/2b^2+a)}$$

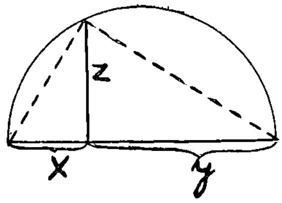
Eftersom a, b och p ($=O'F$) är kända storheter kan y konstrueras, dvs y-koordinaten för den sökta punkten S kan erhållas.

Sträckan pa/b konstrueras med hjälp av likformiga trianglar:




$$\frac{x}{p}=\frac{a}{b};\; x=\frac{pa}{b}$$

Rotuttrycket konstrueras på liknande sätt som z i uttrycket $z^2=x\cdot y$, då x och y äro kända längder, Se figur! Med $x+y$ som diameter slås en halvcirkel. Genom likformighet erhålles: $z/x=y/z$; $z^2=xy$; $z=\sqrt{x\cdot y}$.




Om vi i sistnämnda figur låter sträckorna x och y vara 2p och $pa^2/2b^2+a$ så blir z det ovannämnda rotuttrycket.

Dessa konstruktioner underlättas genom Sjölanders påpekande, att uttrycken pa/b och $pa^2/b^2$ lätt kan erhållas genom konstruktioner i den givna figuren på följande sätt. Se detta nummers första sida! Drag från F en linje FC vinkelrätt mot linjen AB! Trianglarna A'OB och FO'C är likformiga; därur erhålles $O'C=pa/b$. Drag från C en linje parallell med x-axeln; den skär linjen AB i punkten M (som för övrigt är mittpunkten på kordan genom S). Punkten M:s x-koordinat är $a+pa^2/b^2$. Sträckan $EM=x_M-a=pa^2/b^2$. Om G är mittpunkten på sträckan EM blir $EG=pa^2/2b^2$

Vi kan nu konstruera det ovannämnda rotuttrycket på följande sätt: Avsätt $DI=2p$; $DG=a+pa^2/2b^2$. Slå upp en halvcirkel med IG som diameter! Halvcirkeln skär y-axeln i punkten H. Sträckan DH blir alltså $=\sqrt{2p\cdot(a+pa^2/2b^2)}$ och sträckan $OH=DH-OD=DH-O'C=\sqrt{2p\cdot(a+pa^2/2b^2)}-pa/b=y=$den sökta y-koordinaten för skärningspunkten S mellan linjen AB och parabeln. Punkten S erhålles genom att dra KHS vinkelrätt mot y-axeln. Enligt parabelns egenskaper gäller att $SF=SK$. S är den sökta punkten.

Det tillsynes oskyldiga problemet »Var skall villan placeras?», som framkastades i TfS:s föregående nummer, leder tydligen till rätt intressanta geometriska förvecklingar. Problemet är insänt av Civilingenjör Sven Olavi, Skoghall, som även bifogat lösningarna I och II. Lösning I är insänd av ett flertal läsare, lösning II är ytterligare insänd av Arne Pleijel, Trollhättan; M. Sjölander, Stockholm är ensam om sin lösning III. TfS tackar för uppslaget och det visade intresset. Vem kommer med nästa nöt?

—★—

# GRANSKARENS SYN PÅ MATEMATIKLÄROBÖCKERNA

*Av Folkskollärare Sven Olsson*

När jag läser igenom en matematiklärobok för att recensera den, antecknar jag en del av uppskattande eller kritisk art. Vid sammanställningen till recension får emellertid de beska kommentarerna vika. Tanken på, att bakom verket-boken finns en medmänniska, som i åratal arbetat med den, mildrar uttrycken. En gradering måste emellertid till, även om medelbetyget skall vara Ba. Beträffande en verkligt god bok kan man då framhålla de idéer, detaljer och avsnitt, som skiljer den från mängden. Om ett mera mediokert verk kan man uttala sig i allmänna ordalag, ex.: »Den söker inga nya vägar men visar på de gamla vanda med den äran» etc. Liksom man behöver en betygsöversikt för att kunna rätt bedöma det enskilda betyget, behöver man nog läsa en serie anmälningar för att kunna uppfatta värdeomdömet i en enskild anmälan.

Härtill kommer, att en granskare har sin egen, mycket ofta mycket bestämda mening om, hur matematikundervisningen skall bedrivas. Även om han strävar efter objektivitet i omdömet, kommer detta i hög grad att influeras av uppfattningen av hur föreliggande lärobok skulle kunna passa in i anmälarens egen metod.

Läroboksnämnden vill nu ha metodiska anvisningar i matematikläroböckerna, och kanske kan de vara till någon nytta. *Men* en svårighet härvidlag är, att terminologien är så flytande. En utredning är som bekant i gång. Det är ju inte så roligt med en lärobok, vid vars användande läraren gång på gång måste säga till sina elever: »Ja, så står det, men jag vill ha det så och så.» De metodiska anvisningarna bör — menar jag — inte vara alltför detaljerade. Om en lärare vill använda lika tilläggsmetoden i subtraktion, kan det uppkomma vissa svårigheter, om boken ingående redogör för lånemetoden. Och ännu värre blir det inför de många olika uppställningarna till uträkning av division. I skolan går det nog så bra, men så får barnen hemuppgifter i matematik. Föräldrarna läser i läroboken, och så kommer det ofelbart: »Du gör fel. Så står det inte i boken.» För min del har jag så gott som slutat upp ge hemuppgifter i matematik. Det hjälper nämligen inte, att man vid klassföräldramöten ber far och mor låta bli att blanda sig i barnens hemuppgifter. Föräldraambitionen har en utsökt förmåga att blanda till begreppen för eleverna. Nåväl, om de detaljerade metodiska anvisningarna kan bidraga till att minska på barnens hemuppgifter, så har de förvisso en uppgift att fylla.

När fasta normer för matematikterminologien fastställts, kan de metodiska anvisningarna beredas större utrymme. Det torde då vara lämpligast att samla dessa anvisningar eller i varje fall det huvudsakliga av dem i början eller slutet av boken. Så kan läraren plocka ut och låta eleverna stryka för det han vill att de skall inhämta. De metodiska anvisningar, som rör endast läraren, kan lämpligast samlas i ett särskilt häfte, som skett i Ingvar-Olsens Räknelära. De metodiska anvisningar, som är avsedda att läsas av barnen, måste uttryckas på ett språk, som, samtidigt med att det är språkligt korrekt, kan av barnen omedelbart uppfattas. Rätt kritisk är jag mot följande: 74200—38700= och så anvisningarna »Det går inte att minska 2 hundratal med 7 hundratal, utan vi måste låna 1 tusental, som blir 10 hundratal. Vi har förut 2 hundratal och får sålunda 12 hundratal. 12—7=5. 3 tusental minskat med 8 går inte. Vi lånar 1 tiotusental, som blir 10 tusental. Vi har nu sammanlagt 13 tusental att minska med 8 tusental» etc. . . .» Eller detta: »När du skall addera följande tal, bör du först göra dem till centimeter.»

Viktigt är ju att inledande huvudräkningsövningar och typexempel följs av övningsexempel med samma tankegångar. Härvidlag slarvar ibland läroboksförfattarna rätt grovt. Ett verkligt flagrant exempel på sådant slarv visar en förf., som i de inledande ex. till subtraktion hade valt uteslutande sådana med tankegången *skillnad*, medan de efterföljande exemplen samtliga rörde sig med uppdeln. Det är ju ändå så pass skilda tankegångar, som ligger till grund för dessa operationer, att de borde hållas åtskilda. Jag får påpeka, att det var i en lärobok för tredje klassen. Då och då finner man samma orediga uppställning beträffande tankegången ökning å ena sidan och sammanläggning å andra. Jag vill inte neka till, att jag blir rätt ledsen, när jag ser, att läroboksförfattare i så hög grad försummar att klargöra för sig själva, vilka begrepp de har att utreda för barnen.

Någon gång finner man i läroböckerna olösliga uppgifter eller åtminstone sådana, som fordrar ingående sakförklaringar för att kunna lösas. Det är nu en del år sedan jag fann ett problem: »Hur lång ramlist åtgår till en tavla med längden a och bredden b?» Tyvärr har jag inte kunnat återfinna boken för förevisning här. Men jag kan ge ett par ex. ur några alldeles nyutkomna böcker, och jag väljer ett litet avsnitt ur geometrikursen för fjärde klassen: »Hur lång bård behöver Greta till att sy fast runt en duk, som är 1 m 20 cm lång och lika bred?» Både pojkarna i min klass och jag uppfattade bården som en spets, räckande utanför duken, men min fru påstår, att man syr spetsar eller bårder innanför dukens ytterlinje.

»Ett bord, som är 1 m. 8 dm. långt och hälften så brett, skall beklädas med vaxduk. a) Hur stor är bordets yta? b) Hur mycket kostar vaxduken efter 5 öre pr dm$^2$.? c) Runt bordet skall sättas en list. Hur lång blir denna?»

»Omkring en rektangelformig åker, som är 45 m. lång och 32 m. bred, går ett dike. Hur långt är detta?»

Läroböckerna syns nu i allmänhet lämna åsido exempel rörande åldersberäkning, åtminstone vad det gäller läroböcker för lägre åldersstadier än 7 eller 8 klass. Men här och där förekommer de, och då utan metodiska anvisningar. Ett undantag härvid är Laurin m. fl:s lärobok för femte klassen. Det är nästan rörande att se den enighet som råder mellan konkurrerande författare däri, att exemplen är sådana, att lån alltid görs från 30-dagarsmånad. Men så händer det, att man missar, och det kan vara, när man ger ut en ny upplaga. Så hade barnen i en lärobok att räkna ut, hur gammal Selma Lagerlöf var, — jag tror — när hon fick nobelpriset. Och det gick bra. Nästa upplaga gavs ut, sedan Selma avlidit, och då ändrades uppgiften till uträkning av hennes levnadsålder, och då sprack det, för då måste lån göras hos 29-dagarsmånad, och så blir Selma i facit till denna lärobok en dag äldre än i kyrkoböckerna. Det kan ju vara rätt roligt för barnen att lära sig räkna ut ålder, men då bör de få lära sig göra det korrekt. Jag har träffat kolleger, som lärt barnen räkna människors ålder i räntemånader. Metoden att låna 30 dagar av vilken månad det vara må kommer som metodisk anvisning i Laurin m. fl:s läroboks senaste upplaga. Första upplagans var matematiskt riktiga.

I geometriavsnitten ges vanligen formler i stil med: »Längden $\times$ bredden $=$ ytan» Eleverna skriver, och många lärare godkänner skrivningen $3 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 12 \text{ m}^2$. Men när vi lär barnen räkna en yta, siktar vi på tankegången $3 \times 4 \text{ m}^2 = 12 \text{ m}^2$, och varför inte fortsätta med detta? Visserligen kan man behandla sorten som ett algebraiskt uttryck: $\text{mxm} = \text{m}^2$, men varför i onödan förvilla barnens begrepp? Vid problemlösning bör barnen vänjas — och detta bör ideligen påpekas i läroböckerna — att först fråga sig: »Vilket slag av storhet ryms i frågan? Vilken sort skall allså skrivas?»

Naturligtvis kan man komma förbi detta sysslande med sorter genom att föra resonnemanget längdens siffertal × breddens siffertal ger som produkt ytans siffertal, men jag menar, att detta tillvägagångssätt får man allt uppskjuta, tills eleverna nått en relativ mognad och är färdiga börja räkna med cirkeln.

För femton-tjugo år sen blev det efter (tror jag) centrala anvisningar mera verklighetstrohet vad beträffar viss handelsräkning i läroverkens läroböcker. Jag är osäker både om tiden och om de centrala anvisningarna. Läroböckerna för folkskolan fortsätter emellertid med vinst- och förlusträkning på inköpspriset. Visserligen händer det, att man påpekar, att ur den angivna vinsten skall affärsmannen betala med försäljningen förenade kostnader. Men varför inte ta mönster efter läroverkens läroböcker och kalla tillägget för pålägg? *Om* barnen i sjätte klassen inte kan anses mogna att räkna med fakturapriser och pålägg för omkostnader samt vinst, bör detta moment uppskjutas till en senare tidpunkt. Detta undervisningsmoment — alltså om vinst och förlust — är utmärkt väl ägnat att få barnen inse vad jag skulle vilja kalla relativiteten i procenttalen. Ett ex.: Fakturapriset är 10 kr. Pålägget är 50 % varav 30% för försäljningskostnader och resten nettovinst. Man kan då säga, att vinsten är 20 %. Men affärsmannen kan hävda, och det är väl det vanliga, att den är 13 1/3 %, då han nämligen räknar vinsten på försäljningspriset. Om barnen vänjer sig vid sådana tankegångar genom att läroböckerna frågar efter två procenttal, kan man kanske i framtiden slippa höra långa, hetsiga och ofruktbara diskussioner om skatteprocent o. d.

Det värsta i den vägen jag varit med om var i en debatt då bolagsskatten skulle höjas från 40 till 50 %. En oppositionsman pekade på, att denna skatt höjdes med inte mindre än 25 %, mot vilket en politiker genmälde, att skillnaden mellan 40 och 50 ju var endast 10 %, och då skulle man inte komma och säja, att höjningen var 25 %. Om vi i vår matematikundervisning kunde lägga grunden till en bland rikspolitikerna mera utbredd förståelse för vad de beslutar om, skulle otvivelaktigt en hel del vara vunnet.

För matematikens formella sida får dess samhälleliga eller sociala sida inte försummas, och jag kan påstå, att den är väl tillgodosedd i de moderna läroböckerna. Barnen uppträder i dessa som familjemedlemmar, och rätt tidigt blir de med i föreningar för att nu inte tala om skolklassens gemenskap. De lär betydelsen av en väl ordnad ekonomi för egen, familjens och samhällets del. Vad jag skulle vilja ha med utöver det, som redan förekommer, är några exempel, som visar eleverna, hur deras framtida agerande som parter i avtalsrörelser kan verka.

Ett exempel: Varutillgång och köpkraft väger jämnt på 50 miljarder. Så ökas produktionen med 2 miljarder (den del, som inte går åt till investering för nytt realkapital) och samtidigt ökas köpkraften med 4 miljarder. Hur stort värde har sedan varutillgången och hur stor är köpkraften? Vad sker, om hela köpkraften utnyttjas för konsumtion? Hur många % blir den genomsnittliga prishöjningen? Vad kan göras för att hindra eller minska denna prishöjning? Här kan man sålunda sammanknyta ämnena matematik och samhällskunskap.

Ett avsnitt, som eleverna i allmänhet har svårt för, är bråkläran, och i inledningen till denna måste läroböckerna offra en hel del åt åskådligheten. Men varför inte inleda bråkläran tidigare än i femte klassen? De flesta läroböckerna och lärarna använder vid division uttrycket *delat med*, ex. 48 delat med 6, ett uttryck som jag tycker vara oriktigt. Det borde väl hellre heta *delat i*, underförstått *delar*. Men varför inte använda det korrekta uttrycket sjättedelen av 48 och teckna det som bråk. Så är man redan långt före femte klassen halvvägs inne i bråkläran. Boman—Rydén har denna metod i sina läroböcker redan från tredje klassen. Barnen, som använder denna lärobok, glömmer nog inte bort, att bråkstrecket är ett divisionstecken. Trots den goda grund som lagts, har förff. en mycket utförlig inledning till bråkläran i läroboken för femte klassen. Vad jag skulle önska av läroböckerna vore exempel och övningar — diagnostiska prov — för att läraren skall kunna utröna, om eleverna riktigt förstått innebörden av bråken.

Lockad av den danske poeten Piet Hein har jag gett mina pojkar i uppgift att svara på frågor som: »Vad är en halv?» Först en allvarlig definition och sen en rolig. Klassen röstade för Jan-Åkes definition som den roligaste. Han hade skrivit $1/2 = 1/5$ och förklarade på frågan, vad han menade, att far sagt, att en halv sup endast var en femtedels. (OM far mätt rätt, får man ju en uppfattning om formen på familjens glas). Själv ville jag ge priset åt Börje, som skrivit att 1/2 tårta var 6/9 av 9/12 tårta.

För ett tjugutal år sedan fann man ett — jag skulle vilja kalla det — falskt analogiresonemang när det gällde metoden lära division med bråkdivisor. Jag minns från en i övrigt god lärobok: »Liksom man kan dela ett tal med tre, kan man dela det med en tredjedel.» Numera går man fram efter två linjer, antingen efter vad jag vill kalla regula de tri linjen eller med innehållsberäkning. Vad jag skulle vilja efterlysa i läroböckerna är resonemanget i slutomgången eller sammanfattningen:

$$24:3 = 24:\frac{3}{1} = \frac{1}{3}\cdot 24 \text{ och så analogien } 24:\frac{1}{3} = \frac{3}{1}\cdot 24 = 3\cdot 24.$$

När det gäller decimalbråk, har jag funnit, att barnen handskas lättare med dem, om de får läsa hela uttrycket efter lägsta talsorten, alltså 325 hundradelar i stället för 3 hela 25 hundradelar. $1{,}4 \times 3{,}25$ läses 14 tiondelar av 325 hundradelar. Det är ju efter denna tankegång operationen går. Jag kan inte påminna mig ha sett denna metod i anvisningarna till någon lärobok.

I detta sammanhang vill jag passa på att erinra om de periodiska decimalbråken, som mig veterligt inte demonstreras i läroböckerna i matematik. En lärobok visar hur man skall förfara, då divisionen ej går jämt upp genom exemplet $5{,}2 : 7 = x$. Barnen får rådet att räkna ut fyra decimaler, stryka den fjärde och höja närmast föregående (resp. 8 och 2) och detta är ju rätt och riktigt. Men jag kan inte riktigt förstå hur förf. kunnat underlåta, att i detta sammanhang roa eleverna. Om han efter den matnyttiga lärdomen om avkortningen hade låtit dem räkna ut exempelvis 13 decimaler, hade barnen snart upptäckt, att efter första siffran kommer perioden 428571 att upprepas, hur länge de än håller på. Tar man så tredjedelen av denna period, får man 142857, som är perioden i 1/7, och med denna, liksom med en del andra långa perioder av primtal kan man utföra en hel del roligheter. Man kan också visa ensiffriga perioder t. ex. av bråket 1/3. Just perioden av 1/7 är intressant ur annan synpunkt, nämligen $\pi$-värdets. Vi brukar ju lära barnen, att 3,14 är för litet och 3 1/7 för stort värde på $\pi$. I 22/7 har vi perioden på 1/7 3,142857. . . medan värdet på $\pi$ med samma antal decimaler (uträknat i slutet av 1500-talet) är 3,141593. Skillnaden blir 0,001264 medan 3,14 alltså är 0,001593 för litet. Jag tror, att det är av vikt att påminna om var vi har exakta värden och var vi har närmevärden, så att barnen så småningom fattar, att de inte skall räkna med större antal siffror i decimalbråken än som motiveras av siffrornas säkerhet. Vidare bör vi och läroböckerna mycket bestämt påminna om att 1/3 inte är detsamma som 0.333. Vi får lära dem att 4,25 m kan tecknas 425 cm men att 4 1/3 m inte är 433 cm, att man i sådant fall, om man vill uttrycka ett exakt värde, måste föredraga allm. bråk.

Läroböckerna är varandra lika så tillvida att de för de lägre klasserna börjar med addition, går över subtraktion till multiplikation och division. När det gäller detta senare räknesätt, delas det i de flesta läroböcker upp i innehållsberäkning och likadelning. Några böcker börjar med det ena, andra med det andra. Personligen anser jag det vara fördelaktigt att börja med innehållsberäkning, man kan då klart visa sambandet mellan räknesätten. Man bygger innehållsberäkningen på upprepad subtraktion: 27 —9—9—9 går tre gånger. Nio subtraheras tre gånger, tecknas även 27:9=3, prövas 3×9=29 och 9+9+9=27. Detta tillvägagångssätt har jag sett genomföras endast delvis i läroböckerna, men det skulle vara värdefullt ha det i de metodiska anvisningarna.

En del lärare — ja, skall vi inte kunna säga majoriteten — följer slaviskt lärobokens gång, exempel följer exempel, kapitel lägges till kapitel. Med tanke på detta borde läroboksförfattarna lägga sig vinn om att dela upp vissa kapitel och spränga in dem bland övrigt stoff. Detta gäller främst sortförvandling och geometri. Man blir nedslagen då man i en lärobok träffar på kapitlen sortförvandling och geometri samlade oftast i slutet av boken. Det är ur inlärningssynpunkt fördelaktigt att låta en tid förflyta mellan exempelvis beräkning av omkrets och av yta och sedan mellan yta och volym. Lärostoffet bör utminuteras i små doser. I Ingvar-Olséns räknebok för klass tre övas först alla fyra räknesätten inom talområdet 1—999, och sen tas de åter upp inom talområdet till 10000. Geometriavsnittet i läroböckerna för övriga klasser är utspritt i aritmetikavd. Folkskolinspektör Petersson har i sin bok gjort indelning i *veckoavsnitt*, ett intressant experiment, som bör uppskattas särskilt av lärare i flerklassiga avdelningar. Om denna bok vill jag säga, att jag inte ett ögonblick skulle ha tvekat att ta den, om jag hade haft flerklassig avdelning. Om den skall anses överlägsen även i övrigt får väl erfarenheten visa.

Uppställning till uträkning överensstämmer i stort sett i alla räkneböcker, när det gäller addition, subtraktion och multiplikation. Men när vi kommer till division går vägarna isär. Då kursen redan ingående behandlat dessa uppställningar, kan jag gå förbi dem. Jag vill emellertid nämna, att Boman—Rydén propagerar för den amerikanska metoden, som har påtagliga fördelar, särskilt när det gäller division med decimalbråksdivisor. För träning av barnens huvudräkningsförmåga hade det varit av värde att i någon lärobok någon gång pröva en tysk metod att inte utskriva delprodukterna utan räkna från delresterna med huvudräkning. Jag visar sättet i am. uppställning.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \phantom{6}213 \\
\cline{2-2}
\underline{32} & 6816 \\
 & \phantom{6}41 \\
 & \phantom{68}96 \\
 & \phantom{681}0
\end{array}
$$

Skall minnessiffra utskrivas vid addition? Vi lär för livet, och i verkligheten är det ofta nödvändigt.

Jag ber att här få visa en metod, som jag för många år sen sett i en amerikansk lärobok. Ex.

$$
\begin{array}{r}
1348 \\
5496 \\
8987 \\
1630 \\
\hline
21 \\
24\phantom{0} \\
22\phantom{00} \\
15\phantom{000} \\
\hline
17461
\end{array}
$$

En fördel med denna uppställning är, att man kan börja additionen med vilken talsort som helst. Terminologiutredningen kommer väl att säga sitt ord om alla dessa uppställningar.

För några år sen kom från k. skolöverstyrelsen en uppmaning till lärarna att lära barnen räknesättens rätta termer. I tredje och fjärde klasserna har jag barnen att, när de räknat ex. skriva ordet Summa, Rest, Produkt eller Kvot och därefter svaret. Detta kunde ju vara en lämplig metodisk anvisning i läroboken.

Efter anvisningar i den nya undervisningsplanen och i en del fall tidigare har läroböckerna infört särskilda övningar i uppskattningsberäkningar, men jag tror inte det räcker med särskilda övningar. Nu är ju meningarna delade om, huruvida man skall låta eleverna skriva i sina läroböcker, men jag tror, att det hade varit värdefullt, om det efter praktiskt taget varje räkneexempel hade funnits plats för ett uppskattningssvar. Jag låter gärna eleverna skriva i läroböckerna, och tar ett par sidor åt gången med uppskattningsberäkning. Så får de komma fram och visa sina uppskattningssvar, eller också tar vi muntlig genomgång, innan den skriftliga räkningen börjar. Jag har funnit, att det är av stort värde för barnens förståelse, särskilt av regula-detritänkandet. De skriver tecknen för *större än*, *mindre än* eller *ungefär* och därefter uppskattningssvaret.

De läroböcker, som min generation använde under de första tjugu läraråren var sparsamt eller inte alls illustrerade. Förff. litade till lärarens »talande hand», och serieläsandet hade ju då inte tagit den omfattning det nu har. Numera förekommer illustrationer t. o. m. i flerfärg, och bilderna syns ha tre syften: bidraga till a) åskådligheten b) till bokens prydande c) till höjning av bokpriset. Punkterna a och b kan förekomma tillsamman, men det är ej alltid fallet, punkten c däremot förekommer alltid med de båda övriga. De flesta av våra moderna räkneböcker innehålla värdefulla, verkligt åskådliga illustrationer. Men så finns det böcker, som överflödar av prydnadsbilder, och värst är, att de långtifrån alltid är av konstnärlig kvalitet.

I detta sammanhang är det kanske lämpligt fråga: Hur långt skall vi gå i åskådlighet? Jag är rädd, att vi gått för långt i våra metoder, och nu följer läroböckerna efter. Räknemetodiken har utvecklats och samtidigt har barnens räkneförmåga blivit mindre. Finns det något samband? I första kapitlet av sin bok »Barnen upptäcker talens värld» skriver Stern: »Vi lärare söker naturligtvis foga undervisningen efter barnens innersta natur. Men då måste vi se till, att vi inte våldför oss på matematikens innersta natur. Modern undervisningsteknik har till den grad absorberats av själva anpassningen, att räkneläran själv kamuflerats och kunskaperna sedan framträtt i torftigaste laget.» Eller med andra ord: Vi låter matematiken drunkna i metodiken. Även om vi inte har Sterns syn på det psykologiska underlaget för räknefärdigheten och det matematiska kunnandet, tror jag, att vi kan instämma i hennes kritik av den metodik, som bedrivs. Undervisningen skall vara intresseväckande och rolig. Barn tycker det är roligt att leka. De tycker också det är roligt att leka med siffror, Jag har redan nämnt perioderna i de periodiska decimalbråken som underlag för räknelekar. Vi har andra underliga och roliga tal. Vi kan leka med 9- och 99-prov m. m. Vi kan göra räknegåtor och lekar på dessa prov och på andra grunder. Allt sådant bidrager till att stärka den mekaniska räknefärdigheten och ger barnen en mera ingående uppfattning om vårt talsystems struktur. Jag önskar läroböcker med en myckenhet roliga uppgifter och lekar, sådana som Wigforss' utomordentligt goda böcker. För klasserna 7 och/eller 8 kunde man mycket väl föra in ett kortfattat och enkelt kapitel med aritmetisk serie, åtm. för de mera försigkomna eleverna, och därvid kunde man låta dem roa sig med taltrianglar o. d. Gång på gång borde repetition av talsorterna förekomma, så att eleverna aldrig tilläts glömma vårt talsystems positionsbyggnad. Detta är, som vi vet, inte så självklart för våra elever som för oss vuxna. I klass 8 borde böckerna något kunna tala om försök med icke-dekadiska system. Man kunde låta eleverna några timmar få syssla med ett talsystem, som hade fem till bas. De blir förbuffade över hur enkel multiplikationstabellen är i ett sådant. Några historiska notiser om talsystemen kunde också ges.

Får jag så avsluta med några axplock ur ett par läroböcker: Som första exempel på subtraktion utan lån förekommer följande: »År 1947 hade Malmö 181280 inv. och år 1940 155506. Hur stor var ökningen?» Man ser ju genast att här måste lånas. När förff. gav ut ny upplaga, moderniserade de sifferuppgifterna. Går man ett par upplagor tillbaka, kommer man till operation utan lån.

»Herr E. sålde en bil för 3825 kr. Han hade köpt den för 5200 kr. Hur mycket förlorade han?» Talet står under rubriken: Att köpa och sälja med vinst och förlust. I bok för klass 3: »Hur stor är skillnaden i antalet ben mellan 9 myggor och 7 spindlar?»

I anvisningar till grupparbete: Barnen skall göra ett räknespel på en pappskiva av tårtkartong och därpå skriva siffrorna med bläck.

I metodiska anvisningar: »Additionstecknet kallas också plus.»

»Tag reda på något avstånd i din hemtrakt, som är 1 km.»

»Anders behöver ett snöre, som är 9 dm 5 cm långt, men det snöre han har är endast 7 dm 8 cm långt. Hur lång snörstump måste han skaffa till?»

»Lär dig noga minnesversen 'Trettio dagar har november etc'. Den står i slutet av boken.» Uppgiften förekommer på sid. 81, och jag har förgäves letat efter poemet ända till sista sidan.

Rubrik: »Divisionen går jämnt upp i varje siffra.» Och så kommer typexemplet 32 : 4 =

★

## *Personligt brev till Läsaren*

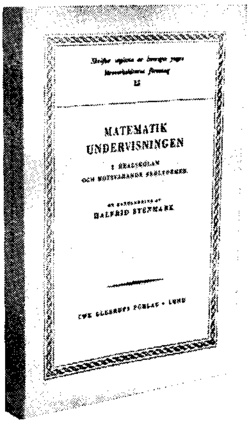
**Genom postgiroblanketterna, som bifogades förra numret av TfS, har var och en, som läser dessa rader, möjlighet att genom en liten enkel handling förverkliga en stor idé: att skapa betingelserna för en tidskrift för Sveriges alla matematiklärare!**

**TfS förväntar stöd från sina läsare: erbjud Din kollega förmånen att bli prenumerant på TfS!**

**Den viktigaste vägen att sprida TfS är att kännedomen om tidskriften förmedlas på detta sätt: från lärare till lärare.**

**Har Du förslag och önskemål om TfS:s innehåll och utformning: skriv till redaktionen! Vill Du att TfS skall fortsätta och utvecklas: placera då den lilla postgiroblanketten hos en enda av Dina tusentals kolleger!**

*Red.*




# En pedagogisk insats av unikt och synnerligen stort värde

*Halfrid Stenmark*

# Matematikundervisningen

## i realskolan och motsvarande skolformer

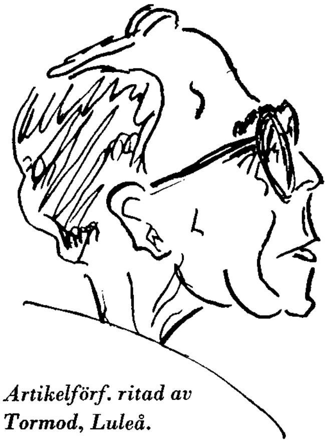
Något motsvarande metodiskt verk, som behandlar räkneundervisningen inom realskolans klasser, har hittills saknats. Därför är Adjunkt Stenmarks nu föreliggande handledning en pedagogisk insats av unikt och synnerligen stort värde. — Handledningen har sitt värde för lärare, som arbetar inom realskolan samt inom enhetsskolans olika linjer i området klass 5 till klass 9. Det väsentligaste är sagt om man hänvisar till den citerade innehållsförteckningen med kommentaren: Allt detta är behandlat av en erfaren pedagog på ett förnämligt sätt. Gack och läs!
Många metodiska handledningar föra ofta ett alltför allmänt resonemang om principer och metoder i undervisningen. Vad den unge läraren behöver är emellertid direkta praktiska anvisningar hur de metodiska principerna i varje särskilt fall skall tillämpas. Här är Adjunkt Stenmarks handledning föredömligt upplagd, då den ofta utförligt i detalj visar hur ett kursmoment skall genomgås i klassen. Den blir på så sätt en handledning av direkt praktisk nytta, som även en erfaren lärare har både nytta och nöje av. Till slut vill anmälaren citera och helt instämma i det uttalande, som Rektor Baltzar Wahlström avgivit i sin rescension i Tidning för Sveriges Läroverk nr 21: Boken är behövlig. Den bör finnas på varje matematiklärares bord — inte stå bortglömd i referensbiblioteks hyllrader.

*Lektor Edvin Ferner i Tidskrift för Skolmatematik*

13: 50 (10: 80) inb. 17: 50 (14: —)

Lärarex. portofritt om inom parentes angivet belopp insändes pr *postgiro 3 08 43*

CWK GLEERUP, LUND



*Artikelförf. ritad av Tormod, Luleå.*

# NÅGOT OM MELLANSTADIETS MATEMATIK

*Av Charles Hultman*
Lektor i metodik vid Lärarhögskolan i Stockholm

## Huvudräkning

För små barn är *ramsräkningen* det naturligaste. Det lilla barnets taluppfattning är mycket bristfällig. För att kunna tala om, hur många apelsiner det ligger på ett fat, måste 4-åringen räkna till antalet. 1, 2, 3 apelsiner. Ofta stannar denna ramsräkning kvar hos barnet, även efter en gedigen undervisning i småskolan. Vi har väl alla träffat barn, som med en mycket god hastighet med hjälp av fingrarna kan addera. $7 + 4$ blir $7 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$.

Innan läraren på allvar ägnar sig åt tredje klassens kurs, måste han förvissa sig om att barnen behärskar *blockräkningen*. Detta kan ske genom prövning och övning i en tabell, som ser ut på följande sätt:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 + 2 | 5 | 6 | 9 | 8 | 7 | 1 | 3 |
| 4 + 3 | 6 | 9 | 2 | 8 | 5 | 1 | 2 |
| 5 + 1 | 3 | 2 | 9 | 4 | 8 | 6 | 5 |
| 6 + 2 | 6 | 7 | 5 | 3 | 3 | 9 | 8 |
| | | | o. s. v. | | | | |

Med blockräkning förstås sönderdelning av tal i lämpliga enheter, t. ex. $6 + 7 = 6 + 4 + 3 = 10 + 3 = 13$ eller $28 - 9 = 28 - 8 - 1 = 20 - 1 = 19$ o. s. v. Om läraren använder tabell av ovanstående utseende eller någon annan sorts tabellarisk uppställning är naturligtvis egalt. Träningen bör ske i form av huvudräkning. Om läraren beväpnar sig med pekpinne och pekar i stället för att prata, vinnes tid, och barnen kan bättre koncentrera sig på uppgiften.

Åtskillig tid bör skolan igenom användas till huvudräkning. Barnen är i regel roade av den sortens räkning. En användbar uppställning är följande:

+ — · :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |

o. s. v. så långt man har lust att skriva på svarta tavlan. Tecknen utsättes givetvis inte förrän de blir aktuella i räknandet.

Låt barnen stå upp! Peka! $5 + 6 + 22$. Ta ner pinnen! Så fort pinnen lämnar tavlan, får barnen svara. Den som hinner först får sätta sig. Låt raderna tävla om att bli först sittande. Läraren får naturligtvis inte gå så långt i sitt nit, att han låter ett eller ett par barn bli stående kvar sist. Sluta när en rad är klar! Ett annat sätt. Ge barnen varsin papperslapp! Låt dem numrera förslagsvis 10 uppgifter! Nu sitter varje barn och skriver resultatet på sin lapp. Låt barnen byta lappar med varandra för rättning.

Resultaten har läraren klara i förväg. Det är enkelt att peka fram till en facit av t. ex. följande utseende:

1) 4) 2) 7) 3) 25) 4) 0) 5) 72) o. s. v.

Eftersom barnen gärna vill redovisa sina resultat, bör läraren efter rättningen och sedan varje barn fått tillbaka sin lapp fråga: Vilka hade 10 rätt? 9? 8? Sluta med 5! De barn som av en eller annan anledning inte lyckats få ihop så många riktiga resultat, slipper då schavottera.

Huvudräkningen av den här typen kan bedrivas hur högt upp i klasserna som helst. Läraren kan lätt variera svårighetsgraderna.

Den tid som lägges ned på huvudräkning är väl använd tid. Om en lärare skall nå goda räkneresultat i sin klass, måste barnen kunna lösa relativt komplicerade operationer utan penna och papper, annars kommer lärarens genomgångar att ta för lång tid i anspråk.

## Addition

Skaffa några olikfärgade pappskivor och tillverka fyrkanter, föreställande hundratal, tiotal och ental. Ge barnen ett exempel på svarta tavlan, t. ex. 14 + 19. Bena upp uppgiften! Vad består 14 av? Svar: 1 tiotal och 4 ental. 19? 1 tiotal och 9 ental. Kom fram och plocka upp 4 ental och 9 ental! (Två barn fram). Två andra barn tar varsitt tiotal. Lägg tiotalen för sig och entalen för sig. Hur många tiotal? Hur många ental? 2 tiotal och 13 ental. Vad räcker 13 ental till? 1 tiotal och 3 ental. Tio ental växlas till 1 tiotal, som lägges till de båda andra. Hur många tiotal, hur många ental sammanlagt? Svar: 3 tiotal och 3 ental. Hur mycket är det tillsammans? Svar 33. Vad blir alltså 14 + 19? Svar 33. Visa sedan med uppställningen 14, att samma resultat kan nås på ett annat sätt. +19

4 ental plus 9 ental är 13 ental, vilka omedelbart växlas till 1 tiotal och 3 ental. De 3 entalen placeras under 4:an och 9:an i entalsraden. 1 tiotal placeras överst i tiotalsraden med ett litet streck under och kallas minnessiffra. Lägg ihop tiotalsraden. 1 tiotal + 1 tiotal + 1 tiotal är 3 tiotal. Dessa placeras i tiotalsraden. Vi ha fått

$$\begin{array}{r}14\\+19\\\hline 33\end{array}$$

Det kan kanske låta tjatigt detta resonemang, och ändå lär det vara nödvändigt om man vill lära barnen vad addition egentligen innebär, och varför man kan använda uppställningen med talen under varandra. Låt barnen säga 1 ental + 4 ental en tid, så att de verkligen förstår, hur viktigt det är att placera de olika sorterna (ental, tiotal, hundratal o. s. v.) i samma rad. Hur mycket är 3 äpplen + 5 päron? Barnen skrattar åt en sådan fråga, men den kan göra nytta.

Fortsätt undervisningen på liknande sätt med större tal. 103 + 405 + 689 = o. s. v. Först när alla barn verkligen begriper, vad addition innebär, kan läraren hjälpa barnen med att mekanisera tekniken. Uträkningen av

$$\begin{array}{r}45\\68\\76\\38\\+339\\\hline 566\end{array}$$

bör ske på följande sätt: Barnen läser 5, 13, 19, 27, 36, och entalssiffran 6 utskrives. Det torde vara onödigt att anteckna minnessiffran. Barnen läser 3 (minnessiffran 7, 13, 20, 23, 26. Tiotalssiffran 6 utskrives i tiotalsraden. 2 (minnessiffran), 5. Femman utskrives i hundratalsraden.

När tecknet + skall namnges heter det »plus».

Räknesättet addition omfattar i själva verket minst två räknesätt, vilket kan belysas av följande exempel:

1) Kalle har 13 kulor och köper 15 kulor. Hur många har han tillsammans? Operationen 13 st. + 15 st. innebär en *ökning*.

2) Kalle har 13 kulor och Sven har 15 kulor. Hur många har de tillsammans? Operationen 13 st. + 15 st. innebär här en *sammanläggning*.

Terminologi: 13 + 15 = 28
term + term = summa

## Subtraktion

De brokiga hundra-, tio- och entalslapparna kommer till användning även när subtraktion skall inläras. 25—3 möter inga svårigheter hos barnen. När talet är 63—47 blir det hela svårare. Vilket problem ställs barnen inför? Talet 63 består av 6 tiotal och 3 ental. Visa! Talet 47 består av 4 tiotal och 7 ental. Visa! Det är omöjligt att avlägsna 7 ental från 3 ental. De 3 entalen räcker inte. Hur skall vi göra? Vi *växlar* ett tiotal. Kvar blir 5 tiotal, men i stället har vi fått 13 ental. Från 13 ental går det lätt att plocka bort 7 ental. Vi får 6 ental kvar. Från 5 tiotal avlägsnas sedan 4 tiotal, precis som tecknet — anger. Kvar blir 1 tiotal. Men 1 tiotal och 6 ental blir tillsammans 16. 63—47 måste således vara 16. Låt barnen plocka mycket med lapparna och bli förtrogna med *växlandet*.

När uppgiften är av typen 103—58, blir den genast svårare. Nu måste 1 hundratal växlas till 10 tiotal och 1 tiotal till 10 ental. I handen har barnen 9 tiotal och sammanlagt 13 ental. Nu går det lätt att avlägsna 8 ental och 5 tiotal. Den mekaniska uträkningen blir följande:

$$\begin{array}{r} 103 \\ -58 \\ \hline 45 \end{array}$$

Först strykes hundratals-1:an. Snedstrecket tillsammans med 0:an bildar talet 10, d. v. s. 10 tiotal. Ett tiotal måste också växlas. Den strukna nollan betyder alltså 9. Strecket över 0:an tillsammans med 3:an bildar talet 13, d. v. s. 13 ental. 13 ental minus 8 ental är 5 ental. 5:an skrives i entalsraden. 9 tiotal minus 5 tiotal är 4 tiotal. 4:an skrives i tiotalsraden. 103—58 blir alltså 45, vilket plockandet med lapparna redan visat oss.

Räknesättet subtraktion omfattar också minst två räknesätt, vilket kan belysas av följande exempel:

1) Kalle har 13 kulor men förlorar 8. Hur många har han kvar? Operationen 13—8 innebär en minskning.

2) Kalle har 13 kulor och Sven har 8 kulor. Hur många fler kulor har Kalle? Operationen 13—8 innebär här jämförelse mellan antalet kulor hos Kalle och Sven. Var och en av dem behåller oförändrat antal kulor.

Terminologi: Exempel 1) 13 — 8 = 5
term term rest

» 2) 13 — 8 = 5
term term skillnad

Den metod vid subtraktion, som ovan skisserats kallas *lånemetoden*. Ett par andra metoder förtjänar att nämnas.

*Likatilläggsmetoden*: Denna metod innebär följande:

| | |
|---|---|
| 1005<br>· · ·<br>386<br>―――<br>619 | 5 ental minus 6 ental går inte. Lägg 10 ental till de 5 i 1005 och öka samtidigt antalet tiotal i 386 med 1 tiotal. Markera med en punkt över 8:an, att 1 tiotal tillagts. Räkna: 15 — 6 = 9. 0 tiotal minus 9 tiotal går inte. Lägg 10 tiotal till de 0 i 1005 och öka samtidigt antalet hundratal i 386 med 1 hundratal. Markera med en punkt över 3:an att 1 hundratal tillagts. Räkna: 10 tiotal minus 9 tiotal = 1 tiotal. 0 hundratal minus 4 hundratal går inte. Lägg 10 hundratal till de 0 i 1005 och öka samtidigt antalet tusental (=0) i 386. Markera med en punkt över det obefintliga tusentalet, att 1 tusental tillagts. Räkna: 10 hundratal minus 4 hundratal = 6 hundratal. 1 tusental — 1 tusental = 0 tusental. |

Naturligtvis går det lätt att räkna med ettöringar, tioöringar, kronor och tiokronor i stället, och då låta Kalle vara den lycklige innehavaren av 1005 öre, medan Sven bara har 386 öre. Man torde emellertid bli tvungen att i resonemanget införa en ovidkommande person, som ger Kalle 10 ettöringar och Sven 1 tioöring, Kalle 10 tioöringar och Sven 1 krona o. s. v. Det är begripligt, att lågstadiets lärare inte är så förtjusta i en metod, där sådana medel måste tillgripas.

Likatilläggsmetoden var åtminstone tidigare den förhärskande i England.

*Utfyllnads- och kompletteringsmetoden* (användes bl. a. i Tyskland).

| | |
|---|---|
| 1005<br>—386<br>――― | Vilket minsta tal skall adderas till 6, så att summan slutar på 5? Svar: 9. 9 + 6 = 15. 1 i minne. 1 + 8 = 9. Vilket minsta tal skall adderas till 9, så att summan slutar på 0? Svar: 1. 1 + 9 = 10. 1 i minne o. s. v. |

Tidigare har metodiker ansett lånemetoden vara den sämsta av subtraktionsmetoderna, men några undersökningar som bekräftar denna utsago, känner förf. inte till.

## Multiplikation

Multiplikation är ett upprepat additionsförfarande. $5 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$. Detta övas redan i 2:a klassen. Svårare blir det, när talet får följande utseende: $3 \times 15$ eller $7 \times 187$. Naturligtvis bör även nu additionsförfarandet användas i viss mån, för att barnen inte skall glömma bort, vad multiplikation egentligen är. För den mekaniska inlärningen är en viss uppdelning nödvändig. $3 \times 4$ kan uppdelas i $3 \times 2 + 3 \times 2 = 6 + 6 = 12$. På liknande sätt kan alla multiplikationer uppdelas. $3 \times 15$ är $3 \times 10 + 3 \times 5 = 30 + 15 = 45$, och $7 \times 187$ är $7 \times 100 + 7 \times 80 + 7 \times 7 = 700 + 560 + 49 = 1309$. Naturligtvis bör detta resonemang ha föregåtts av en ordentilg genomgång av typen $4 \times 1$, $4 \times 10$, $4 \times 100$ o. s. v. Sedan gäller det att visa, att $7 \times 187$ uppställt på följande sätt:

$$\begin{array}{r} 187 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$$

också ger svaret 1309. Lösning:

$$\begin{array}{rr} 187 & \\ \times\ 7 & 49 \\ \cline{1-1} & 60 \\ 1309 & 13 \end{array}$$

$7 \times 7$ ental är 49 ental. 9:an strykes och placeras i entalsraden. 4 tiotal kvar. $7 \times 8$ tiotal är 56 tiotal. Tidigare hade vi 4 tiotal kvar oplacerade. 56 tiotal + 4 tiotal är 60 tiotal. 4:an och 0:an strykes, och 0:an placeras i tiotalsraden. $7 \times 1$ hundratal är

7 hundratal. Kvar från förut 6 hundratal. Sammanlagt 13 hundratal. 6:an och hela 13 strykes och placeras i hundratalsraden, d. v. s. 1:an hamnar i tusentalsraden, eftersom tio hundratal är 1 tusental.

Något besvärligare blir det när multiplikation med tvåsiffrig multiplikator skall inläras. Vad blir $14 \times 13$? Om barnen riktigt förstått den ovannämnda uppdelningen, bör de också kunna begripa, att man kan uppdela även $14 \times 13$ på följande sätt:

$$\begin{array}{rcr} 4 & & = 52 \\ & \times\ 13 & \\ 10 & & = 130 \\ \hline 14 & \times\ 13 & = 182 \end{array}$$

Först efter denna genomgång kan det mekaniska förfarandet inläras

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 14 \\ \hline 52 \\ 130 \\ \hline 182 \end{array} \quad \text{eller} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 14 \\ \hline 52 \\ 13\phantom{0} \\ \hline 182 \end{array}$$

Resultatet blir hela tiden detsamma.

Av tradition räknar vi från höger till vänster:

$$\begin{array}{r} 245 \\ \cdot\ 123 \\ \hline 735 \\ 290\phantom{0} \\ \text{etc.}\phantom{0} \end{array}$$

I Ungern bl. a. räknar man från höger till vänster och tecknar algoritmen på följande sätt: från vänster mot höger:

$$\begin{array}{r} 245\phantom{00} \\ \cdot\ 123\phantom{0} \\ \hline 245\phantom{00} \\ 490\phantom{0} \\ 735 \\ \hline 30135 \end{array}$$

Mycket talar för att denna algoritm är den traditionella överlägsen, framför allt på högre skolstadier. Man slipper dessutom den besvärliga sneddragningen åt vänster.

Barnen bör så snart som möjligt, kanske redan i fjärde klassen få lära sig det enkla nioprovet.

$$\begin{array}{r} 146 \\ \cdot\ 35 \\ \hline 730 \\ 438\phantom{0} \\ \hline 5110 \end{array}$$

Räkna ut den 1-siffriga siffersumman av 146!
$1 + 4 + 6 = 11. 1 + 1 = 2.$
Räkna ut den 1-siffriga siffersumman av 35! $3 + 5 = 8.$
Tag $2 \cdot 8 = 16$. Den ensiffriga siffersumman av 16, $1 + 6 = 7$.
Räkna ut den 1-siffriga siffersumman av 5110!
$5 + 1 + 1 + 0 = 7$. Talet är rätt räknat.

Talet 5101 ger också siffersumman 7. Provet är därför inte alldeles tillförlitligt, men möjligheterna att resultatet av multiplikationen blir sådant, att siffersumman stämmer med den riktiga, trots att resultatet är felaktigt, är naturligtvis mycket små. För dem som är intresserade av beviset eller förklaringen till nio-provet hänvisas till Wigforss, »Den grundläggande matematikundervisningen», sid. 70.

Terminologi: $45 \cdot 865 = 38925$
faktor · faktor = produkt.

**Innehållsdivision**

De flesta lärare anses föredra att behandla innehållsdivisionen före delningsdivisionen eller likadelningen. Plocka med till skolan en burk knappar eller dylikt. Dessa knappar kan föreställa vad som helst.

Låt ett barn plocka ut 24 knappar. Ett annat barn får gå fram och plocka bort 4 knappar i taget. Hur många gånger kunde det ta bort 4 knappar? 6 gånger. Hur många gånger innehåller alltså 24 knappar 4 knappar? 6 gånger. Gör om proceduren upprepade gånger med olika antal knappar. Skriv! 24 knappar innehåller 4 knappar 6 gånger, 36 knappar innehåller 9 knappar 4 gånger o. s. v. Låt barnen läsa talen unisont baklänges, 6 gånger 4 knappar är 24 knappar (kontroll) o. s. v. Vi kan naturligtvis skriva 4 äpplen plus 5 äpplen är nio äpplen, men ett par uttryck i talet har ersatts med tecken. Vilka? Hur kan vi skriva 24 knappar innehåller etc. 24 knappar: 4 knappar = 6 gånger. Hur många gånger innehåller 45 äpplen 9 päron? Uppgiften är olöslig. 45 och 9 måste vara försedda med samma sort.

När tal av högre storleksordning skall lösas måste sönderdelning till. 1244 innehåller 4 = 1244 : 4 = 311 gånger. 1244 = 1200 + 40 + 4 . 12 : 4 = 3 ggr. 1200 : 4 = 300 ggr, 40 : 4 = 10 ggr., 4 : 4 = 1 ggr., 1244 : 4 = 311 ggr.

Vi når samma resultat på följande sätt:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0311 \\
\hline
4 & 1244 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-0 \\
\hline
12 \\
-12 \\
\hline
04 \\
-4 \\
\hline
04 \\
-4 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Resonemang:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | i | 1 | går | 0 | ggr |
| 4 | i | 12 | går | 3 | » |
| 4 | i | 4 | » | 1 | » |
| 4 | i | 4 | » | 1 | » |

Uppställningen är den anglo-amerikanska och är att föredra framför vår traditionella italienska bl. a. därför att i svaret 100-tal placeras ovanför 100-tal, 10-tal ovanför 10-tal o. s. v. Enligt docent Olof Magne ger denna uppställning ungefär 25 % större antal rätt än den vanligast brukade.

## Delningsdivision

Använd knappar på nytt! Låt ett barn plocka fram 35 knappar! Skicka fram 5 barn! Hur många är barnen? 5. Hur stor del av 35 knappar får var och en? 1 femtedel eller femtedelen? Hur skrives 5-delen? $\frac{\ }{5}$ Tredjedelen? $\frac{\ }{3}$ o. s. v. Låt varje barn ta en knapp i taget, tills knapparna tar slut. Hur många har var och en fått? 7 st. Hur mycket är alltså femtedelen av 35 knappar? Svar 7 knappar. Gör många dylika laborationer! Skriv sedan tal på tavlan! $\frac{36}{9}$ (läses: niondelen av 36) $\frac{42}{7}$ o. s. v. Sätt dit sorter! Kr., dm., st., och andra.

Större tal: $\frac{1263}{3}$. Uppdelning: $1200 + 60 + 3 = 1263$. $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{1200}{3} = 400$, o. s. v.

Mekanisk uträkning: se ovan!

Före genomgången av den mekaniska räkningen bör givetvis problemet rest behandlas. Detta gäller även beträffande innehållsdivisionen.

Några jämförelser mellan den traditionella italienska algoritmen och den angloamerikanska:

| **Italiensk:** | **Anglo-amerikansk:** | |
|---|---|---|
| 714 \|7<br>7   12<br>014<br>—14 (Nollfel)<br>0 |    102<br>7 \|714<br>—7<br>014<br>—14<br>0 | (Nollfelen undvikes: hundratalssiffra ovanför hundratalssiffra, tiotalssiffra ovanför tiotalssiffra etc.) |
| 7,14\| 7<br>7   102<br>014   (Uteglömt<br>14   decimalkomma)<br>0 |    1,02<br>7 \|7,14<br>7<br>7<br>0 14<br>14<br>0 | (Decimalkomma ovanför decimalkomma |
| 750\|0 0,25<br><br>(Plats måste lämnas för förlängningsnollor) | 0,25\| 7500<br><br>(God plats för förlängningsnollor) | |

Av ovanstående torde med all önskvärd tydlighet framgå, vilken metod som är den överlägsna. Naturligtvis skall man inte avvakta något direktiv från högre skolmyndigheter utan snarast övergå till den överlägsna metoden.

När barnen skall läras division med två- eller flersiffrig divisor kan *enkelregeln* eller *dubbelregeln* tillämpas. (Termerna är Fritz Wigforss').

**Enkelregeln**
(8)=fel

```
         117
3(5) |4(0)95     3 i 4 går 1 gång
     —35         1 · 35 = 35
       5(9)      3 i 5 går 1 gång
      -35        1 · 35 = 35
       24(5)     3 i 24 går 8 ggr
      -245       produktion blir för hög,
                 varför kvotsiffran 8
         0       minskas med 1 enhet
```

**Dubbelregeln**
(Italiensk metod)

```
4095 |35   5
-35   1161     5:an i 35 påverkar
  59           3:an som höjes
  35           till en 4.
  245
 -210          40 i 40 etc.
   35
  -35
    0
```

```
      62
48 | 2976      4 i 29 etc.
    -288       7:an för hög.
      96       Vi försöker med 6
     —96       4 i 9 etc.
       0
```

```
2976 | 48
 240   512     50 i 297
  57           d. v. s. 5 i 29
  48
  96
 —96
   0
```

Enkelregeln bör erbjuda ett säkrare räknande, varför den rekommenderas.
Nioprovet är naturligtvis användbart även vid division.
Terminologi: 2976:48 = 62
Dividend:divisor = kvot.

## Sortreduktioner

Redan i småskolan lär sig barnen de elementära sortbegreppen, som den fortsatta undervisningen måste bygga på. Onödigt i sammanhanget är behandlingen av centiliter, som hör krogvärlden till och näppeligen kan locka ett barn.

Lär in begreppen kilo, hekto, deci, centi och milli. Om barnen verkligen vet, vad dessa ord betyder, är en god grund lagd.

Vid genomgången av längdmåtten bör givetvis tillgängliga hjälpmedel anlitas. Skolans långa linjal, barnens linjaler etc. Låt barnen göra längdmätningar! Låt dem försöka uppskatta mått! Hur långt är pulpetlocket? Hur lång är svarta tavlan? Många sådana övningar måste till för att barnen skall begripa, vad de sysslar med. Detsamma gäller viktmåtten och målkärlen. Hur mycket väger geografiboken? Hur mycket rymmer blomkrukan eller flaskan? Naturligtvis gissar barnen fel, men så småningom får de ändå vissa begrepp om storleksordningar.

Vad betyder kilo? 1000. Översätt 3 kilometer! 3 tusen meter. Översätt 4 kilo gram! 4 tusen gram. Vad betyder hekto? 100. Översätt 7 hekto liter! 7 hundra liter. Hur många meter är 5 km 600 meter? 5 tusen 600 meter = 5600 meter. 4 kg. 6 hg. 8 g? 4 tusen 6 hundra 8 g = 4608 g o. s. v.

Hur många nollor skall tillsättas för att vi skall få 1000? Svar: tre. 100? Svar: två o. s. v. Detta vid förvandling från högre till lägre sort.

*Motsatta vägen.* 436057 cm = ? Vad heter sorten över cm? Dm. Hur många cm på en dm? 10. Hur många nollor? 1. Hur många siffror skall avskiljas? 1. *7 cm klart.*

Vad har resten för sort? Dm. Vad heter sorten över dm? M. Hur många dm på 1 m? Hur många nollor? 1. Hur många siffror skall avskiljas? 1. *5 dm klart.* Vad har resten för sort o. s. v.

## Icke dekadiska sorter

I tredje klassens kurs skall bl. a. tideräkning behandlas. Denna är i regel mycket svår för barnen, och talen bör lösas gemensamt av lärare och barn.

## Geometri

I fjärde klassen börjar den egentliga geometriräkningen. Denna bör före starten vara ordentligt förberedd genom mätningsövningar under tidigare skolår. Längdmåtten måste vara ordentligt inlärda.

Begreppet yta demonstreras på lämpligt sätt med i skolsalen tillgängliga ytor: bänklocket, svarta tavlan, väggen o. s. v. Barnen bör få klart för sig, att en yta endast har två dimensioner och att den följaktligen icke kan isoleras utan endast utgör en begränsning av en kropp.

Hur beräknas storleken av en yta? Ingen uppgift får lösas utan att vara försedd med lämplig figur. Begreppet proportion bör behandlas. Barnen måste tränas att med givna mått kunna rita en yta i förminskad skala. Skalbegreppet bör behandlas jämsides med ytbegreppet. Terminologien bör vara korrekt. En ytas längd heter alltid längd, dess bredd alltid bredd. En triangel har bas och höjd, en cirkel radie, diameter och omkrets o. s. v.

Utefter en sida placeras $m^2$, $dm^2$ o. s. v. Hur många sådana rader? Hur många $m^2$ på hela ytan?

På liknande sätt behandlas kroppar i 5:e klassen. Utefter bottenytans ena kant placeras t. ex. $m^3$. Hur många sådana rader? Hur många sådana lager?

Alltså: $4 \times 5 \times 6\ m^3 = 120\ m^3$.

Givetvis måste inlärandet ske empiriskt. De olika kropparna, som behandlas, skall visas för barnen. Praktiska mätningar skall göras.

Särskilt stor omsorg måste iakttas, när barnen skall lära sig beräkna cirkelns omkrets och yta. (7:e klass). Begreppet pi skall barnen själva beräkna storleken av. Ytan kan sedan beräknas på millimeterrutat papper eller också som summan av en mängd småtrianglar med omkretsen som gemensam bas och spetsarna vända uppåt. Radien blir höjd.

## Bråkbegreppet

Om likadelning inlärts på rätt sätt i tredje klassen, erbjuder bråkläran inga större svårigheter. Hur mycket är 2/3 av 6?

$$1/3 \text{ av } 6 \text{ tecknas } \frac{6}{3}.\ 2/3 \text{ är dubbelt så mycket, alltså } 2 \cdot \frac{6}{3} \text{ eller } \frac{2 \cdot 6}{3}.$$

Begreppet gemensam nämnare måste noga klargöras, helst i samband med förlängnings- och förkortningsövningar, vilka lätt kan demonstreras med hjälp av rutat papper. $\frac{1}{2}$ papper + $\frac{3}{4}$ papper. $\frac{1}{2}$ papper kan lätt förvandlas till $\frac{1}{4}$ papper. Fjärdedels papper är ett slags sort och behandlas som en sådan. 2 fjärdedels papper plus 3 fjärdedels papper är 5 fjärdedels papper, som skrives 5/4 papper. I anslutning till det ovannämnda bör begreppen hela tal, blandat tal, egentligt och oegentligt bråk behandlas.

Multiplikation i allmänna bråk är något svårare men behandlas också det empiriskt. Ett papper delas i fyra rektanglar. Vad kallas varje del? Plocka ut 3 sådana delar! Hur stor del av papperet har vi? Vad är 2/5 av 3/4 papper? Först: Hur mycket är 1/5 av 1/4? Hur mycket 1/5 av 3/4? Hur mycket 2/5 av 3/4 ? o. s. v.

## Reguladetri

I de högre klasserna stöter barnen ideligen på problem, som enklast löses genom ett reguladetriförfarande.

Ex. 1) 3 kg. potatis kostar 1 kr. 32 öre. Hur mycket kostar 8,5 kg.?

3 kg. ——————— 1 kr. 32 öre

1 kg. ——————— $\dfrac{1 \text{ kr. } 32 \text{ öre}}{3}$

8,5 kg ——————— $\dfrac{8{,}5 \times 1 \text{ kr. } 32 \text{ öre}}{3}$

2) 7/8 av ett tal är 427. Sök talet!

7/8 ——————— 427

1/8 ——————— $\dfrac{427}{7}$

8/8 ——————— $\dfrac{8 \times 427}{7} =$

3) Ett kapital på 4200 kr. lämnar på ett år i ränta 168 kr. Sök räntefoten!

4200 kr ——————— 100 %

1 » ——————— $\dfrac{100\ \%}{4200}$

168 kr ——————— $\dfrac{168 \times 100\ \%}{4200}$

## Division allm. bråk

Det allra svåraste att lära barnen är säkert division, allmänna bråk. Det är naturligtvis frestande att tala om för barnen, att ett rätt sifferresultat nås genom invertering och multiplikation. Att få barnen att begripa, vad inverteringen med åtföljande multiplikation innebär, är omöjligt. Risk föreligger också, att större delen av klassen alltid inverterar, så fort ett allmänt bråk uppenbarar sig.

Division, allmänna bråk, bör behandlas som innehållsräkning 6 kg. : 3 kg. = 2 ggr. Utbyt sorten kg. mot *sorten* 11-delar! Skriv $\dfrac{6}{11} : \dfrac{3}{11} = 2$ ggr. 4 kr. : 20 öre. Uppgiften kan inte lösas förrän dividend och divisor fått samma sort, alltså 400 öre : 20 öre. På samma sätt: $\dfrac{6}{4} : \dfrac{1}{2}$. Talet innehåller två sorter: fjärdedelar och hälfter. Men 1/2 kan förlängas med 2 och blir då 2/4. Uppgiften kan alltså skrivas $\dfrac{6}{4} : \dfrac{2}{4} = 3$ ggr o. s. v.

Begreppet invertering bör inte läras ut förrän på högstadiet, om ens då.

## Decimalbråk

Några speciella svårigheter erbjuder knappast decimalbråket, om en rätt grund lagts tidigare. Barnen måste läras, vad decimalkommat innebär. Sedan återstår att inlära räknesätten med decimalbråk. Addition och subtraktion går ganska lätt. Barnen förstår, att decimalkommana vid den mekaniska uträkningen måste placeras i samma rad. Man måste addera ental med ental, tiotal med tiotal, tiondelar med tiondelar o. s. v.

Vid multiplikationsinlärandet bör decimalbråket omskrivas som allmänt bråk. $0{,}2 \times 0{,}3 = 2/10 \times 3/10 = 6/100 = 0{,}06$.

Vid divisionsinlärandet förfares på samma sätt: $0{,}6 : 0{,}3 = 6/10 : 3/10 = 2$ ggr. Detta resultat nås också om dividend och divisor multipliceras med samma tal före uträkningen, så att divisorn blir ett helt tal. Alltså: $0{,}6 : 0{,}3 = 6 : 3 = 2$ ggr.

*


TIDSKRIFT FÖR SKOLMATEMATIK
Jungmansgatan 1, Karlstad. Tel. 163 13
utkommer med 4 nr per läsår

Prenumeration per läsår Kr. 5: —
Postgironummer 49 02 82

Redaktör och ansvarig utgivare:
*Lektor Edvin Ferner*



KARLSTAD 1957
Nya Wermlands-Tidningens Boktryckeri