GÖTEBORGS UNIVERSITET
INST FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

# Vari ligger svårigheten med subtraktion?

- en undersökning av en kommuns Natur- och Teknikelever

**Zita Olsson**



| | |
|---|---|
| Examensarbete: | 15 hp |
| Program: | Speciallärarprogrammet |
| Nivå: | Avancerad nivå |
| Termin/år: | Ht 2011 |
| Handledare: | Per-Olof Bentley |
| Examinator: | Anders Hill |
| Rapport nr: | HT11-IPS-02 SLP600 |

# Abstract

| | |
|---|---|
| Examensarbete: | 15 hp |
| Program och/eller kurs: | Speciallärarprogrammet |
| Nivå: | Avancerad nivå |
| Termin/år: | Ht 2011 |
| Handledare: | Per-Olof Bentley |
| Examinator: | Anders Hill |
| Rapport nr: | HT11-IPS-02 SLP600 |
| Nyckelord: | subtraktion, beräkningsprocedurer, talfakta, arbetsminne, mentaltallinje, |

---

Syfte: Att undersöka om det föreligger något samband mellan elevers grundläggande taluppfattning, vad gäller enkla subtraktionsoperationer och senare uppnådda matematikframgångar och att dessutom undersöka hur åtta elever erfar sitt arbete med subtraktionsoperationer, vilka strategier de använder sig av och hur deras inre mentala tallinje ser ut.

Teori: Studien har en fenomenografisk ansats med en utvidgad kvantitativ teoriram. Inom fenomenografin beskriver man lärande utifrån termen erfarande och menar då att elever har förmåga att urskilja och erfara olika aspekter i omvärlden på olika sätt (Marton, Dalgren, Svensson, Säljö; 1999). I studien är begrepp och procedurer inom subtraktion de fenomen som studeras. Begrepp som tidigare lärts in har en viktig roll när nya begrepp erfars. Det är viktigt att nya begrepp särskiljer sig från tidigare begrepp, därför är det viktigt att det finns en variation i erfarandet (Bentley, 2008a). Lärandet är alltså beroende av att eleven ser något, och att hon kan urskilja dess olika drag i en viss situation. Genom att studera elevers lösningar kan man delvis få syn på elevers uppfattning av begrepp och procedurer (Bentley, 2008a). Man tittar på alla lösningar och försöker hitta kategorier där många elever visar på samma lösningsprocedur. Den utvidgade kvantitativa teoriramen består i en undersökning av alla förstaårselever på Natur- och Teknikprogram i en kommun för att studera om fenomen har en större spridning och möjligen inte är slumpmässiga.

Metod: Subtraktionsdiagnos genomfördes på alla elever på natur- och tekniskt program i en kommun. Diagnosen följdes upp med intervjuer av åtta elever. Resultaten jämfördes med liknande tidigare studier (TIMSS 2007).

Resultat: Studien tyder på att det föreligger ett samband mellan elevers grundläggande taluppfattning vad gäller enkla subtraktionsoperationer och senare uppnådda matematikframgångar. När det gäller beräkningsprocedurer indikerar studien att elever inte är helt medvetna om i vilken kontext de är lämpliga att använda. Exempel på detta är att de använder talsortsvis beräkning avsedd för subtraktioner utan växling, när det krävs växling, då de har behandlat subtraktion som kommutativ (kommutativa lagen för addition $a + b = b + a$).
Att så många elever inte hann slutföra i tid tyder också på att talfakta och beräkningsprocedurer inte är automatiserade.

# Innehållsförteckning

# 1. Bakgrund

”Vari ligger svårigheten med subtraktion?” är titeln på denna studie. Den grundar sig i ett intresse av hur det går till när elever lär sig, men också i en insikt om att ett relativt stort antal elever visar svårigheter inom området. Detta, tillsammans med ett intresse av hur vårt minne fungerar, har lett fram till denna studie. Tidigare gjorda studier inom området visar att många elever har problem med subtraktion (Skolverket, 2007, Bentley, 2008b) och att dessa problem varken är nya eller enbart nationella, utan har observerats även i andra delar av världen (Fusion, 1992, Foxman & Beishuizen; 2002).

Enligt en definition är subtraktion den inversa operationen till addition. Vid tillämpningar beskrivs subtraktion som skillnaden mellan två tal eller det som återstår efter en minskning (Larsson, 2011). Observationer under mina år som verksam lärare tyder på att en del elever saknar kunskap om hur räknesätten beror av varandra och vad som skiljer dem åt. Dessutom förefaller det som om de inte väljer helt effektiva beräkningar. Detta bekräftas också av tidigare studier (Bentley, 2008b). I uppsatsen berörs bl.a. begreppen metod, subtraktiva situationer och beräkningsprocedurer. Med metod avses vilket sätt det är möjligt att göra beräkningar; med miniräknare, i huvudet eller med papper och penna. I denna studie är det framförallt huvudräkning som är aktuellt då eleverna inte fått använda miniräknare. Subtraktiva situationer innebär hur eleven förstår problemet och kan identifiera problemtypen för att välja lämplig strategi. I denna studie har jag valt att benämna situationerna på samma sätt som i TIMSS, dvs. Trends in International Mathematics and Science Studies (2007); förändra, ta bort, utjämna och jämföra (Fusion, 1992, Bentley, 2008b).
Med beräkningsprocedur avses olika sätt att ta sig an själva beräkningen då den genomförs i hjärnan eller genom huvudräkning med skriftligt stöd. Dessa benämns talsortsberäkningar, stegvisa beräkningar, kompensationsberäkningar och transformationsberäkningar (Bentley, 2008b). Subtraktionssituationer beskrivs närmare i teoridelen och beräkningsprocedurer i resultatanalysen. En elev kan troligen tillämpa en beräkningsprocedur både korrekt och inkorrekt.

Forskning (Bentley, 2008a) tyder på att procedurinriktad kunskap, vilket redogörs för i teoridelen, minskar sannolikheten att en elev medvetet väljer lämplig strategi. Tidigare forskning inom TIMSS (Bentley, 2008b) visar att så är fallet när det gäller elever på grundskolan. Att undersöka om det föreligger problem med subtraktion även på gymnasiet skulle därför vara intressant. Att dessutom välja en undersökningsgrupp med förväntat goda matematikkunskaper och goda kognitiva förutsättningar gör det möjligt att undersöka om problemet har en större spridning.

Beräkningsprocedurer som används inom talområdet 1-20 bör utvecklas under elevers tidiga år. Dessa beräkningsprocedurer automatiseras till talfakta i långtidsminnet och därmed används inte längre någon strategi. Begreppen talfakta, automatisering och långtidsminne beskrivs i teoridelen. Senare forskning (Bentley, 2008b) tyder dock på att denna viktiga automatisering inte alltid kommer till stånd då undervisningen inte varit fokuserad på detta. Det förfaller som om enklare matematikoperationer då upptar energi och försvårar mer komplicerade operationer (Lundberg& Sterner; 2009, Bentley, 2008b, Löwing, 2008). Korttidsminnets kapacitet kan bli en begränsande faktor (Klingberg, 2010). Att lärande möjligen beror av fler processer är en tanke som ligger till grund för min studie och som jag funnit beskrivna inom fenomenografin genom Bentley (2008a). Sammantaget visar detta på att inlärning av subtraktion är komplext och därför intressant att undersöka.

# 2. Syfte och frågeställningar

## Syfte

Syftet med studien är att undersöka om det föreligger något samband mellan elevers grundläggande taluppfattning vad gäller enkla subtraktionsoperationer och senare dokumenterade, uppnådda matematikframgångar. Ett annat syfte är att följa upp diagnosresultaten och undersöka hur åtta elever erfar sitt arbete med subtraktionsoperationer, vilka subtraktionsprocedurer de använder sig av och hur deras inre mentala talrad ser ut.

Frågeställningar:

- Vilka subtraktionsprocedurer i talområdet 10-90 använder sig eleven av?
- Tillämpar eleven beräkningsprocedurer på ett korrekt sätt enligt Fusion (1992) och Bentley(2008b)?
- Hur erfar eleven enhets- och multienhetsbegreppet?
- Hur ser elevens inre mentala talrad ut?
- Föreligger ett samband mellan en outvecklad mental inre talrad och brister i subtraktionsprocedurer och talfakta?

# 3.Litteraturgenomgång och tidigare forskning

I detta kapitel redogörs för studiens kunskapssyn samt procedurell och konceptuell kunskap. Vilka subtraktiva situationer och subtraktionsprocedurer som elever använder sig av vid beräkningar samt vad tidigare forskning visat angående subtraktionsstrategier. Dessutom beskrivs begrepp som mental tallinje, arbetsminne, antalsuppfattning, talfakta och multienheter. Kapitlet avslutas med en sammanfattning.

## 3.1 Kunskapssyn

Den kunskapssyn som ligger till grund för studien är fenomenografisk och variationsteorietisk. Dahlgren och Johansson I Fejes & Thornberg;(2009) menar att variationsteorin har legat till grund när fenomenografin utvecklats till en teori om undervisning. Enligt variationsteorin ökas förståelse för ett fenomen genom att olika aspekter av fenomenet varieras. Enligt Carlgren och Marton (2001) förutsätter teorin att det finns ett lärande objekt och att det finns något som är möjligt att lära sig. För att förstå och erfara ett objekt är det viktigt att objektet är möjligt att urskilja från andra objekt, att personen kan uppfatta det centrala och kritiska, de s.k. särskiljande begreppsattributen. Ett exempel skulle kunna vara hur en person erfar och förstår vad en kvadrat är: personen presenteras då för flera olika polygoner och inser då att det inte är tillräckligt med fyra sidor och fyra hörn utan dessutom måste vinklarna vara räta och sidorna lika långa. Dessutom bör personen få möta kvadrater av olika storlek och färg. På detta sätt kan en person förstå vad en kvadrat är och vad den inte är.

I TIMSS (2007), ett internationellt projekt som mäter trender inom barns och ungdomars matematikkunskaper, vilar kunskapssynen på en fenomenografisk och variationsteoretisk grund och där beskrivs inlärning enligt ovan beskrivna perspektiv. Procedurer (fenomen) och begrepp bör erfaras på flera sätt för att skapa en djupare förståelse. För att det ska skapas en djupare förståelse behövs två olika processer som Bentley (2008a) kallar ”theory revision” och ”rediscription”.

”Theory revision” förekommer när eleven erfar begreppen mer sällan. Då skapas först en ganska grov uppfattning om begreppet (exv. subtraktion är något som förekommer i skolan när man har matematik). När eleven på nytt erfar begreppet förfinas successivt uppfattningen (exv. subtraktion används när man ska räkna ut en skillnad och subtraktion liknar addition men är ändå olikt). När eleven mött begreppet ännu fler gånger närmar sig uppfattningen en uppfattning som stämmer överens med sensomotoriska data. ”Theory revision” liknar den process Vygotskij (1999) beskriver då vardagsbegrepp successivt utvecklas mot vetenskapliga begrepp. Processen ”rediscription” förekommer när eleven erfar begrepp ofta. I hjärnans associativa delar formas uppfattningen om begreppet, och jämförs där med inflöde av sensomotoriska data, vilket sedan lagras i långtidsminnet (Benley, 2008a, Dixon& Bangert; 2004). Då eleven tillägnat sig en djupare förståelse blir fenomenets attribut tydliga och personen kan relatera fenomenet till andra begrepp och procedurer. Detta möjliggör att eleven kan använda begrepp och metoder i rätt sammanhang. Här skulle det t.ex. kunna handla om att eleven inser att subtraktion och addition är motsatta räknesätt men att subtraktion inte är kommutativ. Det skulle också kunna innebära att eleven kan se likhetstecknet som ett ”blir” men också i betydelsen ”lika mycket som”. Bentley presenterar alltså lärandet som två delvis olika processer. Tidigare klassrumsobservationer (Olsson, 2007) visar på att språket är väsentligt för lärandet, men att det verkar som om det inte riktigt förmår förklara hela problematiken.

## 2.2 Procedurell och konceptuell kunskap

Procedurell kunskap kan förklaras som regler och handlingsmönster som utförs på ett speciellt sätt och som gäller vid specifika matematiska problem. Därför kan proceduren inte utan vidare transfereras till en annan typ av uppgifter utan att först förändras så att de passar in. Den procedurella kunskapen blir därför som isolerade öar av kunskap utan att det finns tydliga kopplingar dem emellan (Bentley, 2008a).

Konceptuell kunskap innebär förståelse av de matematiska begreppen inom ett område. De olika delarna i den matematiska kunskapen kan föras samman till kärnfulla principer och kännetecknas av olika matematiska kontexter. Konceptuell kunskap kan generera procedurell kunskap men det omvända är mycket ovanligt; att procedurell kunskap generar konceptuell kunskap (Bentley, 2008 a).

Undervisningen i Sverige är framförallt procedurell medan den i Sydostasien är mer konceptionell. Vid konceptuell undervisningen utgår undervisningen inte sällan från misstag för att uppmärksamma dessa och diskutera möjliga lösningar. Det är viktigt att se likheter och skillnader. Transfer tränas systematiskt (Bentley, 2008a).

I den procedurella undervisningen tränas varje procedur för sig och är kopplad till en specifik kontext vilken sällan varieras. Därför blir det svårare för eleverna att överföra en lösningsprocedur från ett sammanhang till ett annat; transfer tränas inte och eleverna har svårt att uppfatta några kärnfulla principer (Bentley, 2008a).

## 3.3 Subtraktionssituationer

När man löser subtraktioner från textproblem är det möjligt att urskilja tre huvudtyper av uppgifter. Bentley (2008b) kallar det att eleven gör en enkodning, när hon känner igen vilken typ av subtraktionsuppgift det handlar om, och därefter kombinerar med lämplig beräkningsprocedur. Det tre typerna är: förändring - ta bort, utjämna samt jämföra (se fig. 1). Förändring - ta bort är den vanligast förekommande och den subtraktions- händelse som flest elever behärskar. Denna metod innebär att eleven utgår från första termen och sedan räknar ”baklänges” lika många steg som den andra termen anger. De andra två subtraktionshändelserna används mindre ofta vilket inte sällan gör subtraktionsoperationer mindre effektiva. Att utjämna innebär att de ingående termerna jämförs och sedan kan eleven utgå från det lägre talet och ”räkna upp” till den högre termen, antalet steg motsvarar differensen. Att jämföra innebär att eleven ställer sig frågan hur många fler eller hur många färre. Det händer också relativt ofta att elever

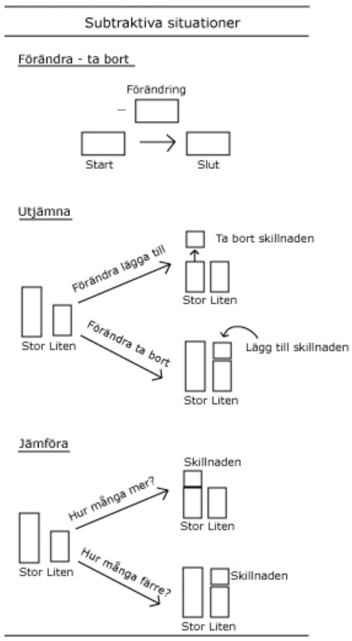


Fig 1. Subtraktiva situationer

inte känner igen subtraktionstypen om undervisningen inte varit strukturerad i detta avseende. Av den anledningen väljer eleven därför inte sällan olämplig subtraktionsmetod.

## 3.4 Tidigare forskning om räkneoperationer

Slutsatser från TIMSS (2008 b), som bl.a. undersökt elevers kunskaper inom aritmetik, visar att elever oftast gör fel av systematisk karaktär och de typer av misstag som elever gjorde i forskningsstudien i Lilla Edet är representativa för hela riket. Det är troligt att dessa problem skapas tidigt och inte på de högre stadierna.

*”Misstagen är betydligt mer genomtänkta och bygger på att förståelsen av begrepp eller begreppsmodeller inte utvecklats tillräckligt. I många fall begreppsmodeller, som används i undervisningen, smala tillämpningsområden och bristfällig eller ingen funktion alls utanför dessa. Begreppsmodellerna kan också ge svag operativ vägledning speciellt utanför deras respektive tillämpningsområde (s.128*)”.

Undervisningen har inte varit tillräckligt explicit och eleverna förefaller inte ha utvecklat tillräckligt god förståelse för olika innebörder, tolkningar och relationer inom och mellan de fyra räknesätten så att dessa kan användas i verkliga sammanhang i och utanför skolan. Liknande resultat har McIntosh (2008) hittat i sina studier. Lundberg och Sterner (2009) skriver att

*”Elever har svårigheter att hantera sambanden mellan räknesätten därför att de inte inser dessa samband eller inte törs utnyttja dem på ett flexibelt sätt. I vissa fall har eleverna inte upptäckt räknelagarna t.ex. kommutativa och associativa lagen”(s.73).*

Att använda räknelagarna skulle vara en möjlighet att avlasta korttidsminnet (personlig kommunikation Sterner, 2011-09-08, Göteborgs Universitet). Att eleverna har en bristfällig begreppsuppfattning vad gäller multienheter kan vara ytterligare en faktor som påverkar inlärning och effektiva beräkningsstrategier (Fusion, 1992). Elever som använder en begreppsstruktur baserad på ental när de möter flersiffriga tal ser inte de separata multienheterna som mängder (tiotal, hundratal, tusental osv.), utan ser flersiffriga tal som en samling en-enheter. Detta kan också medföra också att beräkningar tar längre tid då metoden blir mindre effektiv (se vidare kap. Multienheter). När elever intervjuades i TIMSS -projektet (Bentley, 2008 b) visade det sig att några elever fick 51 – 49 = 18. I analysen visade de sig att de först utförde tiotalssubtraktionen 50 - 40 = 10 och därefter entals subtraktion 9 - 1 = 8. Differenserna 10 och 8 lades sedan samman till 18. De vände på 1 - 9 eftersom denna typ av uträkning saknats i deras matematikbok. Boken de använde behandlade inte talsorter med växling. På vissa uppgifter gjorde mer än hälften av eleverna det kända misstaget att tillämpa beräkningsproceduren, som är avsedd för subtraktioner utan växling, på subtraktioner som kräver växling. Eleverna har behandlat subtraktion som kommutativ. Problemet med att eleverna inte gör någon rimlighetsbedömning av svaret kan delvis bero av att undervisningen varit för läromedelstyrd (Bentley, 2008b). Ett annat lite oväntat typfel var att 51 – 49 = 0. Här ”flyttar” eleven 1 till 49 och sedan tänker hon att 50 - 50 = 0.

Då många elever valde metod som inte fungerar vid växling återinfördes den lodräta uppställningen i projektet och denna åtgärd har medfört bättre resultat. Bentley (2008 b) och Löwing (2008) menar att det är viktigt att elever automatiserar tabellfakta för att undvika att belasta arbetsminnet med enkla operationer när mer komplicerade uträkningar ska genomföras.

## 3.5 Mental tallinje

Människan har en medfödd förmåga att uppskatta antal vad gäller små mängder. Feigenson, Dehaene & Spelke kallar denna icke-verbala känsla för antal för *the coresystems of number* enligt Lundberg & Sterner (2009). De skriver vidare att

> *”taluppfattning skulle kunna röra sig om en förmåga att hantera och manipulera tal och storheter på en spatialt utspridd tallinje, som man ’har i huvudet’”(s.6).*

Lundberg och Sterner (2009) refererar också till von Aster och Shalev vilka menar att när barn föds, är troligen den mentala tallinjen mer logaritmisk än linjär. Detta antagande bygger de på att barn placerar högre tal tätare på varandra än de gör med lägre tal. Det är troligt att det krävs erfarenhetsbaserad träning för att utveckla en linjär mentaltallinje. Klingberg (2011) menar att kunskaper från forskning gällande elever med exceptionella förmågor och elever med stora problem för antalsuppfattning visar att

> *”… tal representeras på ett visuellt sätt: i två dimensioner längs en linjal eller i en tredimensionell rymd, vilket kan vara ett mer generellt fenomen för hur hjärnan hanterar tal”(s.69).*

Klingberg skriver vidare att de flesta barn lär sig att räkna med fingrarna och när denna konkreta fas är över återstår en rumslig bild av tal. Han menar att när ett barn ska genomföra en subtraktion av typen 12 - 4 är det sannolikt att hon gör detta genom att visualisera en mental tallinje där hon stegar sig från 12 och sedan 4 steg till vänster varefter hon läser av svaret från linjen.

> *”Psykologiska studier visar att föreställningar om en mental tallinje inte bara är ett bifenomen utan säger oss något om hur hjärnan representerar tal med hjälp av en visuell rumslig bild”(s.70).*

Klingberg (2011) redogör för en studie där barn fick i uppdrag att uppskatta om ett tal var större eller mindre än fem. För att göra detta användes ett dataprogram där barnet skulle trycka på en knapp om talet var större än fem och en annan om det var mindre. Tidigare studier har visat att människan reagerar snabbare på bilder i vänster synfält med vänster hand då intryck från vänster hjärnsynfält går till höger hjärnhalva vilken styr den vänstra handen, och tvärt om för höger hand. När barnen i försöksstudien nu skulle avgöra om ett tal var större eller mindre än fem var de alltid snabbare med vänster hand för små tal och höger hand för stora tal, detta trots att tal är arabiska symboler som presenterades mitt i synfältet.

> *”Bilden av en inre mental tallinje är alltså inte bara en association vi gör samtidigt som uträkningarna sker. Den mentala linjalen verkar användas för att göra själva uträkningen, där personerna placerar tal på linjalen och sedan läser av svaret” (s.70).*

Studien visar också att människan är något långsammare att avgöra små differenser än större. Detta beror troligen av att tanken tar en omväg via positioner på den mentala tallinjen som sedan avläses. För en dator finns ingen tidskillnad på beräkningar mellan stora och små differenser.

> *”Problem att visualisera kan leda till oförmåga att hantera tal. Visualiseringen av objekt kan vara en del av kopplingen mellan arbetsminne och matematik” (s71).*

Lundberg och Sterner (2009) menar att det behövs formell undervisning i matematik för att tallinjen ska bli mer linjär. En utvecklad linjär mental tallinje förefaller vara en kritisk punkt för att utveckla den matematiska förmågan menar flera forskare (Bentley, 2008b, Lundberg & Sterner; 2009, Butterworth &Yeo, 2010).

> *”Utveckling av en välfungerande mental tallinje är av avgörande betydelse för utvecklingen av räkneförmågan ... Bristfälligt utvecklad tallinje kan handla om störningar i språkförmågan, uppmärksamhet, arbetsminne och visuell föreställningsförmåga”* (Lundberg & Sterner; 2009, s.7).

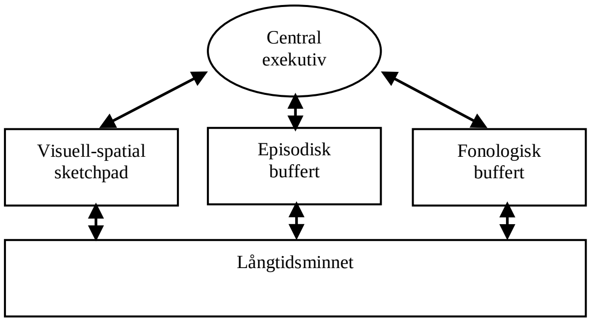
Marton och Booth (2000) menar att förmågan att kunna storleksordna, talens månghet/ numerosity, är en försummad aspekt.

## 3.6 Arbetsminne

Arbetsminnet definierades av Baddeley (2000) som

> *"ett system i hjärnan som tillfälligt tillhandahåller lagring och manipulation av den information som krävs för komplexa kognitiva uppgifter såsom språkförståelse, inlärning och resonerande"* (sid. 418).

Enligt Baddeley (2000) är arbetsminnet organiserat enligt nedanstående modell (fig. 2).



Figur 2

Lundberg och Sterner (2009) skriver att den fonologiska bufferten, har betydelse när vi korttidslagrar t.ex. ett telefonnummer från att vi slår upp numret till att vi slår det. Bentley (personlig kommunikation, 2010-09-08) menar att den fonologiska bufferten kan lagra minnessiffror vid flersiffriga aritmetiska uträkningar och troligen har störst betydelse vid vågräta uträkningar. Baddeley (2000) menar att den fonologiska loopen består av två komponenter: en del som håller akustisk eller talbaserad information mellan en och två sekunder samt den s.k. artikulatoriska kontrollprocessen, som möjliggör att vi tyst kan repetera och hålla information aktiv i fonologiska lagret en längre tidsperiod. Dessutom förefaller det som om visuellt presenterad information där kan översättas till fonologisk information, något vi använder för att t.ex. komma ihåg portkoder.

Det visuell-spatiala skissblocket har enligt Lundberg och Sterner (2009) en annan funktion då den lagrar en sorts bild av det som man ska komma ihåg.

> De skriver vidare att *"När det gäller matematik har man skäl att räkna med en koppling mellan det visuella-spatiala skissblocket och den mentala tallinje som vi diskuterade innan"(s.25).*

Bentley menar att den visuellt-spatiala funktionen har betydelse när vi gör lodräta beräkningar (personlig kommunikation, 2010-09-08). Baddeley (2000) menar att skissblocket tros ha en roll motsvarande den fonologiska loopen, tillägnad visuell, spatial och kinestetisk information. Denna hanterar bl.a. visuella representationer av objekt och objekts rumsliga placering. Klingberg (2011) menar att visuospatialt arbetsminne är starkt kopplat till problemlösningsförmåga och flytande intelligens (gF), det vill säga förmåga att hitta samband och dra slutsatser oberoende av tidigare kunskaper.

Det finns enligt Lundberg och Sterner (2009) enkla metoder för att försöka visa på hur väl det visuellt-spatiala arbetsminnet arbetar. Författarna refererar till en studie av Milner, *Corsi blocks*, där en testledare pekar på några slumpmässigt utspridda klotsar och eleven ska upprepa samma sekvens. Ett annat försök utgår ifrån ett rutnät med oregelbundet utsatta prickar. Eleven får titta på rutnätet i en minut och ska sedan på ett tomt rutnät fylla i de prickar som saknas på samma sätt som förlagan. Den exekutiva funktionen styr de andra funktionerna och har i uppgift att hålla kvar, bearbeta och uppdatera information i korttidsminnet samt stänga ute irrelevant information. Den genomför operationer och hämtar data från långtidsminnet. Den svarar också för vartåt vår uppmärksamhet riktas (Bentley, 2008b, Andersson, 2008). I centralexekutivet integreras information från det visuella skissblocket och den fonologiska bufferten. Därefter kan den episodiska bufferten sätta samman denna information med information från långtidsminnet. Det bildas härmed en sorts händelsekedjor (episoder) vilka är möjliga att lagra i långtidsminnet. En medveten uppmärksamhet verkar gynna åtkomsten av information (Baddeley, 2000) .

Långtidsminnet har kontakt med alla funktioner i arbetsminnet. Här kan automatiserade kunskaper lagras och processen att hämta dessa kunskaper härifrån går mycket snabbare. Detta medför att eleverna kan utföra mer komplicerade uträkningar, det avlastar arbetsminnet och det blir kapacitet över för att reflektera över uträkningen (personlig kommunikation Bentley, 2010-09-08 ).

I TIMSS-studien fann man att det

> *"… visade sig att bara hälften av eleverna i årskurs 7 hade utvecklat beräkningsprocedurer som var optimala för arbetsminnet och därmed för fortsatt lärande. Här har den matematikdidaktiska forskningen genom att utnyttja resultat från hjärnforskningen bland annat visat vilken avgörande roll arbetsminnet och dess funktionella delar har i elevers utveckling av aritmetiskt kunnande (Bentley, 2008b, s.39)".*

När vi i dag använder oss av termen arbetsminne innebär det alltså både korttidsminne (vilket i Baddeleys modell innebär loopen, skissblocket, och den episodiska bufferten) och den mer medvetna och mer ansträngande informationsbearbetningen som sker med större delaktighet av centralexekutivet (Westerberg, 2004). Martinussen och Tannock (2006) skriver att uppgifter som kräver framlänges repetition generellt anses mäta korttidsminne medan uppgifter som kräver repetition baklänges anses mäta arbetsminnet med dess centralexekutiva komponent.

## 3.7 Tidigare studier som berör arbetsminne och matematik

Klingberg (2011) genomförde en studie bland 350 svenska barn, vilka testades i flera timmar och utförde tester av matematisk förmåga och läsförmåga. Arbetsminnesträningsprogram användes också. Ett hundratal av barnen undersöktes med MR-kamera. Studien fann att korrelationen mellan matematik och visouspatialt arbetsminne var 0,62, vilket i psykologiska sammanhang är högt. Detta innebär att ungefär fyrtio procent av skillnaderna i matematisk förmåga mellan olika barn kunde förklaras med skillnader i arbetsminnet. Det visade sig också att matematikresultaten korrelerar högt med problemlösningsförmåga, läsförmåga och verbalt arbetsminne. En frågeställning var om det går att förutsäga utvecklingen av barns matematikförmåga. Studien visade att det var det visouspatiala arbetsminnet som var den viktigaste faktorn för hur barnet skulle utvecklas. En hög arbetsminneskapacitet medförde bättre prestationer i matematik och en snabbare utvecklingstakt inom ämnet. Studien visade inga könsskillnader vad gäller prestationer i de visuella-spatiala och verbala arbetsminnesuppgifterna. Inte heller i matematikprestationer påvisades någon könsskillnad. Det fanns dock stora variationer mellan barnens prestationer, men dessa skillnader kan inte förklaras med vilket kön de tillhörde.

> *"I en analys som sedan gjordes av Ylva Samuelsson, visades att visouspatialt arbetsminne också avgjorde hur barnens matematikprestationer utvecklades med tiden: De med bättre arbetsminne gjorde större framsteg i matematik från ett testtillfälle till nästa testtillfälle två år senare. Däremot fanns inget motsvarande samband mellan långtidsminne eller läsförmåga och matematik" (Klingberg, 2011, s.75).*

Det förefaller som om det samband som finns mellan normal variation i arbetsminne och matematik också gäller individer med uttalade svårigheter. I en studie ledd av Susan Gathercole vid York University (Klingberg, 2011) påvisades ett tydligt samband mellan nedsatt arbetsminne hos barn och matematiksvårigheter. Problemen var uttalade för visouspatialt och verbalt arbetsminne, men inte för verbalt korttidsminne. Detta tyder på att problemen ligger antingen i de parietala eller i de frontala områdena, som aktiveras av arbetsminnesuppgifter, men som inte krävs för verbalt korttidsminne.

Klingberg (2011) visade i sin svenska studie att arbetsminnet är en starkare prediktor för utveckling av matematik än intelligens. Kopplingen mellan arbetsminne och matematik kan bero av att man behöver minnas de mellanliggande stegen i uträkningar som kräver flera operationer. Ytterligare en förklaring är den inre mentala tallinjen. Att hålla kvar en inre, visuell och spatial representation är det visouspatiala arbetsminnets uppgift. Troligen är det samma system som håller kvar olika positioner som den mentala tallinjen vid problemlösning. I studien användes MR- kamera och dessa undersökningar visade att det var området i intraparietala cortex som var mest aktivt då barnen arbetade med visouspatial information. Det är samma område som aktiverades då personer utförde subtraktionsuppgifter i studien av Simon och Dehaene. Studien visar att barn med högre aktivitet i intraparietala cortex hade ett bättre visouspatialt arbetsminne.
När människan ska minnas exakt var de sett ett föremål, hålls informationen i arbetsminnet. Om information ska kunna hållas kvar måste nervceller som kodar för en viss position vara konstant aktiva. Om denna aktivitet bryts försvinner också minnet. Olika nervceller kodar för olika positioner, exv. finns nervceller som är aktiva när vi tittar snett upp mot vänster och andra som är aktiva när vi tittar mot höger. Nervcellerna i intraparietala cortex skapar på så sätt en tvådimensionell minneskarta.

*"Tal representeras uppenbarligen av hjärnan i en analog form, med små tal till vänster och större tal till höger, som om vi hade en inre mental linje där tal omvandlas till en punkt, eller position. Om nu hjärnan utrustats med förmågan att skapa en minneskarta, en förmåga som förmodligen är mycket gammal och även finns hos apor, så är det logiskt att samma mekanismer, används också för att representera positioner på en mental linjal. Minneskartan och den mentala linjalen skulle alltså använda sig av samma område i hjärnan. Minneskartan i parietalcortex förklarar åtminstone en av de direkta kopplingarna mellan arbetsminne och matematik" (Klingberg, 2009 s.79).*

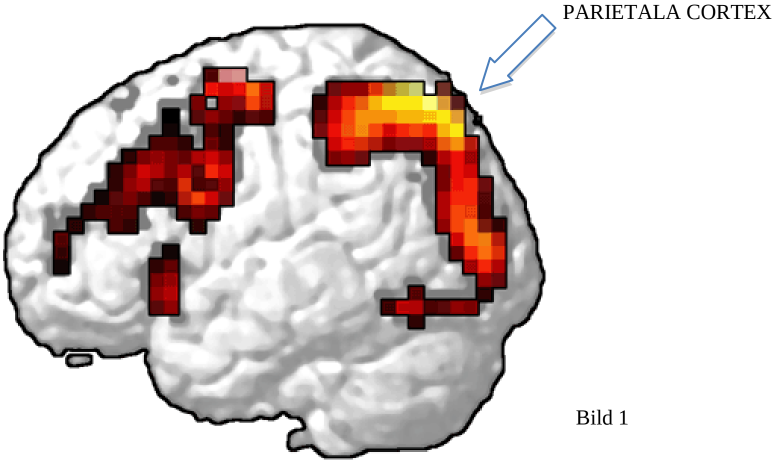



Bild 1

## 3.8 Antalsuppfattning

Lundberg & Sterner (2009) skriver att människan är född med en förmåga att uppfatta antal upp till fyra. Även Klingberg (2011) menar att antalet fyra verkar vara en viktig medfödd kapacitetsgräns hos spädbarn för minneskartan i parietala cortex. Det visar sig att fyra också är gränsen för förmågan att omedelbart uppfatta antal, men för högre tal måste vi räkna föremålen ett i taget och reaktionstiden ökar därför linjärt med antalet föremål. Även Butterworth och Yeo (2010) menar att de flesta människor är födda med en förmåga att känna igen och mentalt bearbeta ett antal föremål i en mängd. Han säger också att denna förmåga troligen är lokaliserad till specifika områden i hjärnan. Isaacs et al pekar i studier på att ungdomar med bristande grundläggande räknefärdigheter och antalsuppfattning har minskad mängd grå hjärnsubstans i vänstra hjässloben, enligt Butterworth och Yeo (2010). Denna nedsättning kan kopplas till dyskalkyli. Butterworth och Yeo skriver vidare att dyskalkyli verkar vara ärftligt, vilket baseras på tvillingstudier och studier av genetiskt avvikande befolkningsgrupper. Alla fall av dyskalkyli förefaller dock inte vara ärftliga.
I Sverige finns ingen officiell definition av dyskalkyli då ett antal forskare är skeptiska till dess förekomst. I Storbritannien finns sedan 2001 en definition av DES (Department for Education and Skills)

*”… ett tillstånd som påverkar möjligheten att tillgodogöra sig aritmetiska färdigheter. Dyskalkylektiker kan ha svårigheter med antalsuppfattning och olika matematiska procedurer. Även om de kan svara korrekt, eller använda korrekta strategier, gör de det mekaniskt och utan självförtroende.*” (Butherworth & Yeo, 2010).

## 3.9 Talfakta

När man använder sig av termen tal innebär detta oftast de naturliga som används för att beskriva ett antal och talen skrivs då med siffror. Naturliga tal innebär tal som är positiva och heltal. Talraden består av 0,1,2,3… Taluppfattning

*”… innebär en känsla för hur tal är uppbyggda och relaterade till varandra” (Löwing, 2008, s.66)*

För att skapa en god taluppfattning krävs en medveten undervisning. Eleven behöver bl.a. visa säkerhet på talraden, känna till talens grannar (= de naturliga tal som kommer före eller efter ett givet naturligt tal), visa säkerhet på tiokamrater (=två tal vars summa är 10) och tjugokamrater (= två tal vars summa är 20). Vidare bör eleven visa säkerhet vad gäller lilla och stora additions-och subtraktionstabellen. Lite senare kommer multiplikationstabellen, osv. Det är av vikt att eleven också inser hur hon kan använda sig av talfakta t.ex. vid beräkningen 4+7 inser eleven att detta måste bli ett mer än tiokompisarna 4+6. För att kunna använda talfakta på ett effektivt sätt behöver eleven också behärska de tre räknelagarna: Associativa räknelagen $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, distrubtiva räknelagen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ och kommutativlagen $a + b = b + a$ och $a \cdot b = b \cdot a$. Om en elev tränar dessa grundläggande moment inom taluppfattning kan denna s.k. talfakta lagras i långtidsminnet och därmed avlasta korttidsminnet och dessutom göra beräkningar snabbare (Bentley, 2008a).

## 3.10 Multienheter

I Sverige använder vi oss av arabiska symboler för siffror. De siffror som finns är noll, ett, två, tre, fyra, fem, sex, sju, åtta och nio. För att skriva större tal använder vi oss kombinationer av dessa siffror. Ett flersiffrigt tal kommer därför att bestå av enheter. De enheter som förekommer är en-enhet vilket motsvarar entalet, de övriga enheterna kan vara tiotal, hundratal, tusental, tiotusental och så vidare.
Ett samlingsnamn för alla enheter som överstiger en-enheten är multienheter. I en multienhet beskriver siffran antalet av multienheter t.ex. 4 i 400. I det muntliga talsystemet markeras detta genom att vi uttalar enheter t.ex. fyra*hundra*.

Fusion, Wearne, Hiebert, Murray, Human, Oliver, Carpenter och Fennema (1997) har i en forskningsstudie funnit att elever använder sig av olika korrekta begreppsstrukturer för exv. tvåsiffriga tal. Fem olika begreppsstrukturer kan urskiljas och dessa skulle kunna översättas till en-enheter, grupper av tior och ettor, sekvenser, delningsbara och sammankopplade. Studien visar dessutom att elever samtidigt kan använda sig av flera olika begreppsstrukturer i olika kontexter. Utöver de fem korrekta begreppsstrukturerna har studien funnit en felaktig struktur som skulle kunna översättas till sammanlänkad entalsuppfattning (Fusion m.fl, 1997, s.138).

Förhållanden mellan siffernotationen, den språkliga notationen och mängden finns inom varje begreppsstruktur. Med begreppsstrukturen en- enhet kan barnet skriva siffrorna ett till nio och känner till vilket namn som hör ihop med rätt siffra, exv. nio = 9. Dessutom har eleven samtidigt en antalsuppfattning upp till nio. När eleven sedan säger och skriver 15 innebär dock inte 1:an ett tiotal.
Nästa begreppsuppfattning ”Grupper av tior och ettor” innebär att eleven i den språkliga notationen kan särskilja tio-enheten exv. 20, 30 40 och delen av ettor i ett flersiffrigt tal. De har också en antalsuppfattning för tiotalen och entalen. Inte sällan har de dock problem med den skriftliga notationen då de skriver talet 63 som 603.
Begreppsuppfattningen sekvenser innebär att eleven har förmåga att kunna räkna i tiotal och dels kunna se grupper om tio inuti en mängd och välja att räkna dem i tiotal. Detta innebär att hon kan växla mellan den ordinala aspekten, den sist uppräknade tiogruppen och den kardinala aspekten, allt som är räknat dittills (Fusion m.fl;1997, s.141). Barn som hellre fokuserar på att räkna grupper med objekt i än att räkna objekten i grupperna räknas till begreppsuppfattningen delningsbara. Denna uppfattning är ovanlig i Sverige då vi har en oregelbunden benämning av tiotal.
Sammankopplad begreppsstruktur kan också benämnas integrerad och innebär att eleven kan växla mellan att se t.ex. fyrtio munkar som fyra öppna lådor med tio munkar i varje - fyra grupper med tio ental - och som fyra stängda lådor - fyra tiotal (Fusion m.fl; 1997, s.142). Barnet har utvecklat ett dubbelriktat förhållande mellan den språkliga notationen, siffernotationen och mellan mängden, både vad gäller tiotalen och entalen.

### 3.10.1 Fullt utvecklad begreppsstruktur

Enligt Fusion (1992) kommer en fullt utvecklad begreppsstruktur innefatta olika aspekter av begreppet. När det gäller den skriftliga notationen av talsystemet krävs det att eleven har förståelse för att *värdet ökar beroende av det relativa positionsvärdet från höger sett* och den *visuella layouten (*se fig.3 – s.17, Fusion, 1992, författarens översättning*).* När det gäller den språkliga notationen av talsystemet krävs att barnet visar förståelse för *namnvärdets minskning från vänster sett* när det sägs och känner till *multienheters namn*. Det muntliga och skriftliga systemet är inte helt lätt att översätta för barn, som inte helt sällan skriver exv. talet fyrahundra trettiofem som 400305 eftersom det låter så. I skriftsystemet har siffrorna inget absolutvärde, vilket de muntliga har, utan värdet är relativt och bestäms av platsen i positionssystemet.

Utöver förståelse för den skriftliga och muntliga notationen av talbegreppet krävs ytterligare sex begreppsstrukturer. Den första innebär att de har förståelse för *multienheter som mängder* där vi har mängderna tio, hundra, tusen … alltså multiplar av tio. Här kan ett konkret tiobasmateriel vara ett perceptuellt stöd för elever. Tiobasmateriel är dock ingen garanti för att eleven inte fortsatt ser tiotal som sammansatta enskilda en-enheter, trots att den använder ordet tiotal. Barnet behöver också förstå att det är möjligt att växla en av de högre multienheterna till tio av den aktuella enheten, exv. att ta ett hundratal och tre tiotal och växla dessa till 13 tiotal, utan att värdet förändras. På samma sätt behöver eleven känna till att det är möjligt att växla exv. tiotiotal till ett hundratal. Kunskapen om *regelbundna tio-mot-en- och en-mot-tio-växlingar* ligger till grund för att utföra additioner och subtraktioner med tiotalsövergångar. Dessa fyra begreppsstrukturer kan existera oberoende av varandra medan de fyra nedre strukturerna i tabellen är beroende av varandra. Kunskapen om *positioner/ värden som växande växlingar* är nödvändig då eleven t.ex. måste växla från ental till hundratal, då det krävs att hon gör två växlingar; först från ental till tiotal, därefter från tiotal till hundratal. *Positioner/värden som växande multiplar av tio* innebär att eleven inser att t.ex. tusen innebär tio · tio · tio.
Dessa sex begreppsstrukturer ligger till grund för att eleven ska kunna utföra additioner och subtraktioner av flersiffriga tal med tiotalsövergångar. För att dessutom behärska multiplikation och division, exponenter och prefix behöver barnet ytterligare två strukturer, *positioner/värden som ord som innehåller en exponent för multipler av tio* och dessutom *positioner/värden som symboler som innehåller exponenter för multiplar av tio.* Här ska eleven koppla samman att uttrycket ”tio upphöjt till fyra” innebär att tian ska multipliceras med sig själv fyra gånger: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

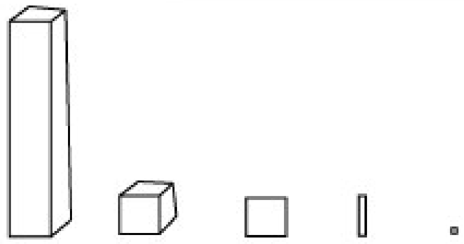
### 3.10.2 Oregelbunden benämning av talsystemet

Det svenska språket har likt flera andra romanska och germanska språk ett oregelbundet sätt att benämna tal. Detta är speciellt tydligt i talområdet elva till tjugo. Om vi benämnde tolv som ”tiotvå” skulle detta förtydliga och förenkla både för svenska barn och barn med annan nationell tillhörighet. I flera asiatiska länder finns en klar och tydlig tio-struktur vid benämningen och studier (Fusion, 1992) har också visat att barn från dessa länder har mindre problem med taluppfattning. En tydlig tio-struktur skulle göra det enklare för svenska elever att konstruera och använda begreppsstrukturer för multienheter och att addera subtrahera flersiffriga tal (Fusion, 1992, s. 266).
Om additionen 7 + 6 genomförs kommer summan att överstiga tio. Eftersom tretton inte benämns som en multienhet, tretton borde heta tiotre i ett regelbundet talsystem, får barnet inget stöd i sin förståelse av tiobas-systemet, utan barnet riskerar att få en entalsuppfattning av talet tretton, då de ser tretton och senare alla andra tvåsiffriga tal som en samling av ental. En konsekvens av detta kan bli att barnet, när ska addera och subtrahera flersiffriga tal måste konstruera nya fungerande begreppsstrukturer för multienheter, samtidigt som de har automatiserat och befäst en en-enhetsuppfattning.

### 3.10.3 Sammanlänkad entalsuppfattning

En sammanlänkad entalsuppfattning innebär att barnet ser flersiffriga tal som ensiffriga tal placerade sida vid sida. För dessa elever spelar det ingen roll om t.ex. en 5:a är placerad som i 15 eller som i 51, då den ändå betyder fem, inte fem tiotal och fem ental.
För en del barn blir denna sammanlänkade entalsuppfattning så stark att de inte reagerar över att två metoder ger olika svar. De kan t.ex. få ett svar vid en uppställning och ett annat svar vid huvudräkning: vid en vertikaluppställning av 46 + 7 kan de få svaret till 413 genom att addera entalen vilket ger 13 ental som skrivs ut som de är, utan växling, efter tiotalsfyran och vid huvudräkning få svaret 53 genom att räkna upp sju steg från 46 (Fusion 1992).

Figur 3. Begreppsstrukturer för multienhetstal

| Namn på begreppsstrukturen | Betydelsen av begreppstrukturen | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Utmarkande drag för skriftlig notation<br>Visuell layout<br>Ökningen av värde beroende av det relativa positionsvärdet från höger sätt | Femte | Fjärde | Tredje | Andra | Första |
| Utmarkande drag för muntlig notation<br>Multienheters namn<br>Namnvärdets minskning från vänster sätt | Totusen | Tusen | Hundra | Tio | En (ones) |
| Strukturer för multienheter<br>Multienheter som mängder |  | | | | |
| Regelbundna tio-mot-en och en-mot-tio växlingar | Tio tusental one | tio Tio hundratal one | tio Tio tiotal one | tio Tio ental one | tio |
| Positioner/värden som växande växlingar | Fyra växlingar | Tre växlingar | Två växlingar | En växling | Inga växlingar |
| Positioner/värden som växande multipler av tio | Fyra multippler av tio t x t x t x t | Tre multippler av tio t x t x t | Två multippler av tio t x t | En multipel av tio t | Inga multippler av tio |
| Positioner/värden som ord som innehåller en exponent för multipler av tio | Tio upphöjt i fyra | Tio upphöjt i tre | Tio upphöjt i två | Tio upphöjt i ett | Tio upphöjt i noll |
| Positioner/värden som symboler som innehåller exponenter för multipler av tio | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |

## 3.11 Vad påverkar elevers resultat?

I Skolverkets sammanfattande analys av kunskapsöversikten ”Vad påverkar elevers resultat i den svenska skolan” (2009) har man utgått från de centrala begreppen segregering, decentralisering, differentiering och individualisering. Det som följer nedan är en sammanställning av denna rapport. Rapporten ger en ganska dyster bild av elevers resultatutveckling. Sammanställningen påbörjas i början av 1990–talet, då svenska elevers resultat låg i topp, internationellt sett. Därefter följde ett årtionde av stora förändringar med kommunalisering, en ny läroplan och med ett nytt målrelaterat betygssystem. Detta sammanföll med en lågkonjunktur, vilket ledde till stora neddragningar i den svenska skolan och i det sociala skyddsnätverket.

När det gäller decentralisering var det övergripande syftet att hitta en bättre anpassning till lokala förutsättningar och behov. Det resultat analysen visar är dock att mer schablonartade lösningar vuxit fram, som att kommuner betalar ut en summa per elev utan vidare hänsyn till speciella omständigheter, undervisningen organiseras i homogena grupperingar, individuella arbetsformer ökar och det förekommer allt mer eget arbete i klassrummen. Segregeringen i samhället i stort har ökat och detta gäller även i skolans värld. I områden där föräldrarnas utbildningsnivå är lägre och socioekonomiska förutsättningarna sämre, visar elever på lägre resultat. Den faktor som starkast påverkar betygsutfallen och har ungefär dubbelt så stort förklaringsvärde som kön och etnicitet är föräldrarnas utbildningsnivå. Mer homogena grupper gör dessutom att kamrateffekter ökar, vilket innebär att en elevs resultat påverkas av kamraternas prestationsnivå. Detta tillsammans med låga lärarförväntningar riskerar att förstärka den negativa spiralen av resultatutveckling som märks t.ex. i vissa förortsområden.

Sverige har en tradition med en sammanhållen grundskola, där differentiering sker sent för att öka likvärdigheten. Analysen visar dock på att differentieringen inom grundskolan har ökat med fler nivågrupperingar och fler segregerande lösningar. Syftet anges vara att minska undervisningsproblem som uppstår då elever har olika kunskapsnivå. Åtgärderna leder till alltmer homogena grupper. Forskning visar dock att sådana lösningar generellt inte påverkar elevernas resultat i positiv riktning. Inte sällan uppstår stigmatiserande effekter där elevens självbild och motivation påverkas negativt. Analysen visar att det finns risk för inlåsningseffekter när placering i en grupp blir mer permanent.

*”I grupper där många elever har svårigheter tenderar lärarens förväntningar att bli lägre och positiva kamrateffekter försvagas, vilket är samma mekanismer som uppstår på skolnivå i ett segregerat skolsystem”(s.33)* .

Individualisering kan enligt analysen beskrivas som en förskjutning av ansvar från läraren till eleven och dessutom som en förskjutning från skola till hem. Det ökade elevansvaret har fått till följd att elever arbetar allt mer individuellt med egna uppgifter och läraren får en alltmer tillbakadragen roll. Följden av detta visar negativa elevresultat. Mest påverkas de elever som har liten möjlighet att få hjälp hemma. Dessutom visar analysen på att elevers motivation och engagemang påverkas negativt.

Analysen visar också att läraren har stor betydelse för elevens resultat. Lärarens kompetens har betydelse för såväl förhållningssätt som undervisningens genomförande. En aktiv och pådrivande lärare som utformar undervisningen så att den fungerar för olika elever påverkar resultaten i positiv riktning. Det är viktigt att läraren har goda ämneskunskaper. Ännu viktigare är de ämnesdidaktiska kunskaperna, alltså förmågan att undervisa varierat i ett visst ämne. Detta visar även internationell forskning. Lärartätheten har under perioden från tidigt 1990- tal till dagsläget sjunkit. Den generella effekten av detta kan dock inte förklara stora förändringar i elevers resultat. För elever med sämre studieförutsättningar och svagt stöd hemifrån är dock denna effekt större.

## 3.12 Sammanfattning

I hjärnan aktiveras det område, som benämns parietala cortex (bild 1) då en person genomför subtraktionsberäkningar. För att genomföra subtraktioner används troligen en inre mental tallinje. Det är av största vikt att en person kan bibehålla bilden av den mentala tallinjen i hjärnan under det att subtraktionen genomförs. Den visuella-spatiala delen av korttidsminnet förefaller också ligga i parietala cortex. Detta är en trolig anledning till att räkneoperationer och korttidsminne är förknippade med varandra. För att i korttidsminnet kunna genomföra subtraktioner med flera tankeled är det viktigt att eleven väljer en effektiv strategi. Eleven bör känna igen subtraktionshändelsen och därtill välja lämplig beräkningsprocedur. Då korttidsminnet inte sällan är en begränsande faktor kan det vara möjligt att lagra talfakta i långtidsminnet. Säkerhet i valet av strategier förefaller, tillsammans med att grundläggande talfakta är lagrade i långtidsminnet, vara en framgångsfaktor när elever genomför subtraktionsberäkningar . Inom fenomenografin framhålls att det är viktigt att eleven kan urskilja särskiljande begreppsattribut. För att detta ska vara möjligt krävs en strukturerad undervisning i detta avseende. Tidigare forskning inom TIMSS tyder på att här finns brister.

# 4. Metod och tillvägagångssätt

I detta kapitel presenterar och argumenterar författaren för val av metoder och undersökningsgrupp. Därefter redogörs för förstudien, subtraktionsdiagnos och elevintervjuer. Avslutningsvis diskuteras undersökningens tillförlitlighet.

## 4.1 Forskningsansats

Undersökningen har en fenomenografisk ansats med en utvidgad kvantitativ teoriram. Inom fenomenografin beskrivs lärande utifrån termen erfarande, vilket innebär att elever har förmåga att urskilja och erfara olika aspekter i omvärlden på olika sätt (Marton, Dalgren, Svensson, Säljö, 1999). Det sker en ständig utveckling av förståelse för fenomenen, varför en absolut komplett och sann bild av ett fenomen inte kan uppnås. Därför är en empirisk erfarenhet och beskrivning av denna endast möjlig. Ansatsen har rötter i Immanuel Kants filosofi (Kroksmark, 2007). Fenomenologin, genom Husserl, ligger också till grund för framväxten av fenomenografin. Fenomenologin är dock mer intresserad av essensen bland fenomen medan fenomenografin studerar variationen. I studien är begrepp och procedurer inom subtraktion de fenomen som studeras. Begrepp som tidigare lärts in har en viktig roll när nya begrepp erfars. Det är viktigt att nya begrepp särskiljer sig från det tidigare begrepp, varför det är viktigt att det finns en variation i erfarandet (Bentley, 2008a). Lärandet är alltså beroende av att eleven ser något och att hon kan urskilja dess olika drag i en viss situation. Genom att studera elevers lösningar kan man delvis få syn på elevers uppfattning av begrepp och procedurer (Bentley, 2008a). Man tittar på alla lösningar och försöker hitta kategorier där många elever visar på samma lösningsprocedur.

När eleven ska lära ett nytt begrepp är det alltså viktigt att det kan urskiljas, att det finns

”*särskiljande begreppsegenskaper eller attribut*” (Bentley, 2008a, s.16).

Dessa begreppsattribut är inte sällan individberoende och ofta kritiska för inlärningen. Bentley menar att inlärningen är beroende av att

*”… två delvis olika processer ’theory revision’ och ’rediscription’ är verksamma beroende på hur ofta eleven erfar begreppen”(s.16).*

Bentley presenterar lärandet som två delvis olika processer. Tidigare klassrumsobservationer (Olsson, 2007) visar att språket är väsentligt för lärandet, men inte riktigt kan förklara hela problematiken. Den utvidgade kvantitativa teoriramen består i att undersöka alla förstaårselever på Natur- och Teknikprogrammen i en kommun, för att studera om fenomen har en större spridning och möjligen inte är slumpmässiga.

## 4.2 Metodval

För att synliggöra elevers subtraktionsstrategier valdes ett diagnosmaterial, Diamant, som är ett kartläggningsmaterial framtaget av Madeleine Löwing på uppdrag av Skolverket. Diagnoserna är utprovade för att synliggöra elevers kunskapsutveckling och eventuellt bristande kunskaper.
För att snäva in undersökningen undersöktes elevers förmåga att använda enkla subtraktionsoperationer i talområdet 10 - 99. Diamantdiagnoserna kallas AG, vilket är en förkortning av Aritmetik och Grundläggande och dessa numreras utifrån vilket talområde de är avsedda att mäta. I detta fall var diagnoserna 2,3 och 4 (AG2 - 4) lämpliga, då de även ger en indikation om vilka begreppsstrukturer elever använder och om eleverna kan generalisera det lägre talområdets subtraktioner.

Då diagnoserna också fungerade som urval inför intervjustudien, genomfördes de på många elever (136 st.). Det var därför en fördel om de inte var så omfångsrika. För att utforma kortast möjliga sammanfattande diagnos genomfördes därför en förstudie åk 9. Här fick alla elever göra diagnoserna AG2 - 4 på tid (max 3 min.). De uppgifter som föranledde störst problem sammanställdes till en subtraktionsdiagnos (se bilaga 1). Detta visade sig vara hela subtraktionsdelen av AG 4 och större delen av AG 2, så när som på fyra uppgifter från AG3. Då studien ville undersöka om eleverna har automatiserat subtraktionsprocedurer, genomfördes den sammanställda subtraktionsdiagnosen på tid (3 minuter och 20 sekunder).
I samband med diagnosen besvarade eleverna frågor om tidigare nationella provresultat och betyg från åk 9, detta för att koppla resultaten från diagnoserna till deras dokumenterade ”framgångar” i matematik.

## 4.3 Val av undersökningsgrupp

Observationer i dåvarande åk 9 visade att relativt många elever brast i grundläggande taluppfattning vad gäller subtraktion. För att undersöka om detta problem gällde fler elever och om det fortfarande förekom som ett problem när eleven blev äldre valdes elever från gymnasiet som undersökningsgrupp.
Då studien ingår som en liten del i TIMSS var det lämpligt att välja samma urvalsgrupp som i denna studie. Elevgruppen som undersöktes var därför alla förstaårsstudenter på det Naturvetenskapliga och Tekniska programmen på ett gymnasium. Det innebar 136 elever. Från denna grupp valdes åtta elever, vilka uppvisade svårigheter med subtraktionsoperationer.

## 4.4 Genomförande av diagnos

Rektor för programmen tillfrågades och samtyckte. Undervisande matematiklärare informerades om studien på en matematikkonferens. Dessa kontaktades sedan via mail för att komma överens om lämpligt lektionstillfälle. De fem klasser som ingick i studien genomförde studien på två dagar under samma vecka. När lektionen startade informerade författaren om studien och etiska regler för eleverna. Då gavs också eleverna möjlighet att ställa följdfrågor, vilket ingen gjorde. För att förtydliga för alla elever var de skulle skriva namn, slutbetyg från nian och betyg på nationellt prov användes en overhead. I samband med detta skrev eleverna på ett s.k. deltagarmedgivande (se bilaga 2). Därefter genomförde alla elever samtidigt diagnosen. Efter tre minuter och 20 sekunder avbröts arbetet och diagnoserna samlades in. I en av klasserna hade läraren påbörjat matematiklektionen innan författaren anlände. Han hade haft en gemensam genomgång vid tavlan av ett moment som eleverna inte var bekanta med och som de upplevde svårt. I denna grupp var det sex elever som avstod att medverka i subtraktionsstudien.

Efter att eleverna genomfört subtraktionsdiagnosen rättades dessa m.h.a. en rättningsmall. Resultaten sammanställdes och låg sedan till grund för formuleringen av lämpliga intervjufrågor.(Se bilaga 7).

## 4.5 Genomförande av intervjuer

Av de 136 elever som genomfört subtraktionsdiagnosen intervjuades åtta elever, två tillhörande naturvetenskapliga programmet och sex elever tillhörande teknikprogrammet. Från början var tanken att välja ut de elever som visat störst problem vad gäller subtraktionsstrategier. Då det inte fanns tillgång till fotografier av eleverna var det inte möjligt att själv söka upp dessa elever. Av etiska skäl var det inte lämpligt att fråga undervisande matematiklärare. Därför kom urvalet mer att bygga på frivillighet. Intervjun genomfördes i ett ostört grupprum. Därefter tillfrågades de om det var OK att samtalet spelades in och alla elever samtyckte. Analys av diagnosresultat tydliggjorde vilka uppgifter som gav upphov till störst problem. Dessa uppgifter markerades på en ej ifylld diagnos. Eleverna fick tillgång till papper och penna. I intervjun undersöktes elevens tankar om subtraktionsstrategier med frågor av typen ”Kan du berätta hur du tänkte när du löste uppgiften 63 – 8?” och ”Skulle det vara möjligt att lösa uppgiften på något annat sätt?”. Liknande frågor ställdes till uppgifterna, 72 - 8, 51 - 49, 91 - 89, 54 - 6 och 65 - 4. Författaren framhöll att det var tankarna som leder fram till lösningen som var viktiga, inte om det var rätt eller fel. Dessutom undersöktes hur eleven erfar en-enhets- och multienhetsbegreppet. Eleven fick dessutom rita sin inre mentala talrad och med ord beskriva den. Intervjun blev halvstrukturerad till formen, då det fanns möjlighet att ställa följdfrågor till intressanta svar. Resultaten från intervjuer analyserades. Då var det möjligt att jämföra om de kategorier av felsvar som upptäckts i diagnosen överensstämde med de individuella intervjuerna.

## 4.6 Reliabilitet, validitet och generaliserbarhet

För att öka studiens kvalitet (Stukat, 2005, s.125) presenteras studiens tillförlitlighet med de tre begreppen reliabilitet, validitet och generaliserbarhet. Genom att använda två mätinstrument; diagnos och intervju, ökar studiens validitet. När dessa jämförs med tidigare forskning ökar validiteten ytterligare.

Subtraktionsdiagnosen som användes hade fler liknande uppgifter på det område som testades. Detta för att undvika eventuella slarv- och slumpfel. Förfarandet ökar studieresultatets tillförlitlighet. Diagnoserna följdes upp med elevintervjuer. Eleverna deltog i dessa intervjuer på frivillig basis. För att skapa en avspänd miljö genomfördes intervjun i ett ostört rum och fika serverades. Vid intervjutillfället var det möjligt att i lugn och ro följa upp elevens tankegångar, och på så sätt reducera pressen på rätt svar. Elevintervjun spelades in för att göra det möjligt att gå tillbaka till svaren för att inget skulle glömmas bort eller förvrängas. Detta var också viktigt då analysförfarandet kan ge nya ledtrådar som behöver följas upp.

Subtraktionsdiagnosen är ett bra instrument för att undersöka många elevers förmåga att lösa uppgifterna. Att undersöka en större elevgrupp ökar studiens reliabilitet (Trost, 2008). Den ger dock inte svar på om eleven förstått begreppen. Diagnosen och tidigare forskning inom området ger dock en vägledning till orsaksgrunderna. Genom intervjustudien kunde dessa följas upp och delvis bekräftas. Detta ökar studiens validitet.

## 4.7 Etik

Då man låter alla förstaårselever på N och T ingå i studien, gör man en s.k. totalundersökning. Detta ökar representativiteten i undersökningen. Genom att låta alla elever vara inkluderade, minskar risken att någon elev upplever sig utpekad. När sedan åtta elever, vilka visat på brister inom området, skulle väljas fanns det risk att dessa elever skulle känna sig utpekade. Det är viktigt att undersökningen bygger på frivillighet och att eleven när som helst kan dra sig ur intervjun. Här kan det uppstå en konflikt, att de elever som är mest intressanta för studien inte vill delta. Här måste elevens integritet gå före, vilket Vetenskapsrådet skriver i *Forskningsetiska principer inom humanistisk – samhällsvetenskaplig forskning* (2007). Då detta handlar om grundläggande problem med taluppfattning är det inte troligt att eleven vill att det individuella resultatet ska gå vidare till betygsättande undervisande lärare. Det är därför viktigt att eleven upplever sig trygg med att resultatet är anonymt. Detta var anledningen till att urvalet till intervjun helt byggde på frivillighet och att studien därmed undersökte både elever med goda subtraktionsstrategier och elever som visade större osäkerhet. Vetenskapsrådets etiska krav (2007) är samtyckeskrav, informationskrav, konfidentialitetskrav samt nyttjandekrav. Det är viktigt att alla medverkande får information om dessa och att jag som forskare förhåller mig så strikt som möjligt till dessa.

# 5 Resultat och analys

Resultatet redovisas i tabellform med tillhörande tolkning. Detta följs av en teoretisering av resultatanalysen. Därefter följer en analys av intervjusvaren i löpande text. Kapitlet avslutas med en resultatsammanfattning där frågan ”Vari består svårigheten med subtraktion” besvaras.

## 5.1 Diagnos - Resultatanalys

Subtraktionsdiagnosen (bilaga 1) innehöll 48 uppgifter och genomfördes på 3 minuter och 20 sekunder. Den genomfördes av 136 elever som studerar första året på Naturvetenskapliga och Tekniska programmet och nedan följer resultat redovisat i tabeller.

**Tabell 1.** Elever med alla rätt på subtraktionsdiagnosen (n= 56)

| Betyg | Frekvens | Relativ frekvens % |
|---|---|---|
| MVG | 27 | 48,2 |
| VG | 24 | 42,9 |
| G | 5 | 8,9 |

Det var 56 av 136, dvs. 41% av eleverna som hade alla rätt. Av dessa hade 91% betyget VG eller MVG. Det förefaller alltså finnas ett visst samband mellan grundläggande baskunskaper inom subtraktion och senare dokumenterade framgångar i matematik.

**Tabell 2**. Antal elever som inte hann slutföra subtraktionsdiagnosen (n= 68)

| | frekvens | Relativ frekvens % | Medelvärde på subtraktionsdiagnos |
|---|---|---|---|
| Naturprogrammet | 12 | 8,8 | 45,5 |
| Teknikprogrammet | 22 | 16,2 | 44,9 |
| Totalt | 34 | 25 | 45,3 |

Det var alltså 25 % av eleverna som inte hann slutföra diagnosen på utsatt tid. Här finns en diskrepans mellan programmen, där fler elever från teknikprogrammet hade svårt att hinna. Medelvärde på subtraktionsdiagnosen skiljer sig 0,6 poäng mellan programmen till Naturvetenskapliga programmets fördel.

**Tabell 3**. Betygsstatistik fördelat på program
Naturvetenskapliga programmet (n=61, 1 elev avstod, 2 klasser med 31 elever i varje, alla närvarande)

| Betyg | Frekvens | Relativ frekvens |
|---|---|---|
| **MVG** | **35** | **57,3** |
| **VG** | **21** | **34,4** |
| **G** | **3** | **4.9** |
| **Uppgift saknas** | **2** | **3,3** |

91,7 % av eleverna på Naturvetenskapliga programmet har VG eller MVG i slutbetyg från grundskolan.

**Tabell 4**. Teknikprogrammet (n= 75, 8 elever avstod, 3 klasser med 32+31+31 elever, 12 elever frånvarande )

| Betyg | Frekvens | Relativ frekvens |
|---|---|---|
| **MVG** | **14** | **18,7** |
| **VG** | **36** | **48** |
| **G** | **19** | **25,3** |
| **Uppgift saknas** | **6** | **8** |

66,7 % av eleverna på Teknikprogrammet har betyget VG eller MVG från grundskolan. Här är det dock en relativt stor andel elever som är frånvarande eller som avstod att medverka. Det förefaller ändå vara så att elever på Naturvetenskapliga programmet har högre betyg från grundskolan än elever från Teknikprogrammet.

Vid jämförelse av resultat från betygstatistik och antal elever som inte hann slutföra diagnosen i tid, finner man att fler elever från Teknikprogrammet hade svårt att slutföra i tid samtidigt som de alltså visar lägre slutbetyg från grundskolan.

**Tabell 5**. Elever som ej hann slutföra diagnosen jämfört med betyg.

| Betyg | Frekvens | Relativ frekvens | % andel inom betygsteget |
|---|---|---|---|
| MVG | 4 | 11,8 | 8 |
| VG | 16 | 47,1 | 29 |
| G | 11 | 32,4 | 50 |
| Uppgift saknas | 3 | 2,9 | |

Av elever med betyget godkänt från år 9 var det 50 % som inte hann slutföra. Motsvarande siffra för VG är 29% och MVG 8%.

**Tabell 6**. Jämförelse av resultaten alla rätt och hinna alla uppgifter i tid inom sin betygsgrupp i relation till betyg.

| Betyg | Andel med alla rätt (%) | Andel elever som hann alla uppgifter (%) |
|---|---|---|
| MVG | 55 | 92 |
| VG | 42 | 71 |
| G | 22,7 | 50 |
| Uppgift saknas | | |

Det innebär att av de elever som har högsta betyg hinner 92% slutföra alla uppgifter i tid och 55 % (27 av 49) av dessa elever har alla rätt.
I VG-gruppen är det 71% som hinner klart i tid och det är 42% (24 av 57) av dessa som har alla rätt. I G-gruppen är det 50 % som hinner slutföra i tid och inom denna grupp är det 22,7% (5 av 22) som har alla rätt.
Det förefaller alltså vara fler elever med höga betyg som hann slutföra diagnosen i tid och i denna grupp finns en större andel som har alla rätt. Samtidigt visar resultaten att det finns elever med högsta betyg som inte hann slutföra. Vid en jämförelse med betyg från de nationella proven i år 9 är det många elever som uppgett att de haft samma betyg på dessa som på slutbetyget. Det är dock en stor andel som inte besvarat denna uppgift.

### 5.1.1Teoretisering av resultatanalys

Enligt Usiskin är en algoritm en stegvis procedur vi tillämpar på en uppgift vi önskar slutföra Bentley(2008a). Definitionen förekommer frekvent i internationell litteratur.
Algoritmer kännetecknas av att det är beräkningsprocedurer som alltid utförs på samma sätt oavsett vilka tal som ingår i beräkningen. Det finns flera olika typer av algoritmer för subtraktion. I Sverige används termen ”skriftlig huvudräkning”(Bentley, 2008b). Bland

huvudräkningsprocedurerna omnämns i TIMMS tre olika, stegvis beräkning, kompensationsberäkning och talsortsvis beräkning (Bentley, 2008b). Stegvis beräkning (the jumping strategy) innebär att stegen eller hoppen sker entalsvis eller tiotalsvis. För att använda metoden inom subtraktion omvandlas den först till motsvarande additioner.
Exempel : 38 – 17 = [17→20; 20→30; 30→38; 3 + 10 + 8] = 21. Inom internationell forskning benämner Fusion et al (1997) denna algoritm ”Easier Number strategy”.

Nästa huvudräkningsprocedur benämns kompensationsberäkning (The Compensating strategy). Idén bakom denna metod är att förändra det första talet för att det ska jämnas av till närmsta tiotal. Som en undergrupp till kompensationsberäkning finns algoritmen transformationsberäkning (The Transformation strategy). Här transformeras uppgiften så att den blir lättare att beräkna. Exempel: 64 – 27 = [64 – *4* – 27 – *4* = 60 – *20* – 23 – *20* = 40 – 3] = 37 (Bentley, 2008b).

Den tredje huvudräkningsproceduren brukar benämnas talsortsvis beräkning (The Splitting strategy). Då görs tiotalsberäkningar för sig och entalsberäkningar för sig. Detta avslutas med att delresultaten kombineras. Algoritmen finns i två versioner, dels en avsedd för subtraktion utan växling, dels en för subtraktion, som kräver växling (Thompson, Heuvel &Panhuizen; Klein & Beishuizen; 1998).
Exempel: 64 – 27 = [60 – 20 = 40; 4 – 7 = –3; 40 – 3] = 37 (Bentley ,2008). Mixad beräkning (Mixed strategy) innebär en kombination av talsortvis beräkning och kompensationsberäkning (Fuson m.fl.; 1997).
Exempel: 64 – 27 = [60 – 20 = 40; 40 – 7 = 33; 33 + 4] = 37(Bentley, 2008b). Metoden möjliggör beräkningar av subtraktioner med växling. Tidigare undersökningar visade att elever med högbegreppsförståelse, oftare använde sig av kompensationsberäkning (Foxman och Beiszhusern; 2002). Detta jämfört med elever med mindre god förståelse, vilka oftare använde sig av talsortsvis beräkning.

Enklare subtraktioner som t.ex. 19 - 18 bör elever kunna lösa med hjälp av talfakta som automatiserats i långtidsminnet. Uppgiften 19 - 18 har 100% av eleverna i studien löst. Det är dock inte otroligt att några har använt sig av metoden stegvis beräkning, vilken är en vanligt förekommande beräkningsstrategi (Bentley, 2008b). Subtraktionen 17 - 4 gav dock två felsvar och lämnades av en elev obesvarad. Felsvaret 12 kan bero på brister i automatisering av talfakta, möjligen på det s.k. ”plus-minus-ett-felet” (personlig kommunikation Bentley, Göteborgsuniversitet, 2011-09-01). När de ska subtrahera fyran finns en osäkerhet på var beräkningen ska påbörjas, därför att eleven är osäker på förhållandet mellan antal steg och antal. Läromedelsstudier tyder på en otydlighet när det gäller presentationen av sambandet mellan steg och antal. Att så många elever inte hunnit göra uppgifterna på stipulerad tid tyder på att de inte automatiserat talfakta tillräckligt väl.
Subtraktionen 19 - __= 9 gav sex felsvar varav fyra var 9. Liknande felsvar har identifierats i undersökningen i Lilla Edet (Bentley, 2008b). Här fann man att många elever beräknat subtraktionen 17 - 7 och fått svaret till 7. I efterföljande resultatanalys fann de att eleverna räknat ned till 7 i stället i stället för att räkna ned 7 steg. Vid läromedelsanalys kunde man se att ingen av läroböckerna beskrev i vilket sammanhang de olika procedurerna skulle användas. Här förefaller det alltså vara så att eleverna lärt sig detta som en procedur utan riktig förståelse, därför blir det ingen medveten strategi.

I subtraktionen 18 - 8 har eleverna 100 % korrekt svarsfrekvens. Här är det troligt att de använder sig av talsortsvis beräkning. Då denna subtraktion inte kräver växling har det gett goda resultat. När metoden talsortsvis beräkning kräver växling är det dock vanligt att eleven räknar fel (Bentley, 2008b). Ett problem är att eleverna tror att subtraktion är kommutativ. I subtraktionen 72 - 8 förkom detta fel. Uppgiften är intressant ur fler synvinklar och därför görs en djupare analys av denna uppgift.

**Tabell 7.** Uppgift 72-8 (n=136)

| | frekvens | Relativ frekvens % | Felsvars alternativ |
|---|---|---|---|
| **Besvarat korrekt** | **106** | **77,9** | |
| **Besvarat inkorrekt** | **7** | **5,1** | **63, 66, 74, 78** |
| **Ej besvarat** | **23** | **16,9** | |

Tre elever har angett svaret 66. En trolig analys av detta svar är att eleverna använt sig av talsortsvis beräkning men inte hanterat metoden korrekt, då de tänkt att 8 - 2 = 6 eftersom de inte insett att subtraktion inte är kommutativ och att de borde växla. Svaret 74 kan komma från att eleven delat upp talet 72 i 60 och 12, tagit 12 - 8 = 4 och därefter missat att det bara är 60 kvar och i stället lagt till 70. Svaret tyder på eleven försökt använda en tranformationsberäkning men inte helt behärskat metoden.

En annan subtraktionsuppgift som gett flera olika svar är 63 - 8. Därför är även dessa svar intressanta att analysera.

**Tabell 8.** Uppgift 63 - 8 (n=136)

| | frekvens | Relativ frekvens | felsvarsalternativ |
|---|---|---|---|
| **Besvarat korrekt** | **109** | **80,1** | |
| **Besvarat inkorrekt** | **8** | **5,9** | |
| **Ej besvarat** | **23** | **16.9** | **54, 56, 57, 65, 75** |

Det korrekta svaret är 55. Att eleven i stället har angivit svaret 54 kan bero på det Bentley kallar" plus-minus-ett-felet" (personlig kommunikation Göteborgsuniversitet, 2011-09-01). När de ska ta bort 8 finns en osäkerhet på var beräkningen ska påbörjas, därför att eleven inte är säker på förhållandet mellan antal steg och antal. Svaret 56 kan förklaras på motsvarande sätt.
Svaret 65 kan komma från att eleverna har tänkt 8 - 3 = 5, då de tror att subtraktion är kommutativ. Svaret 75 kan komma från att eleven har tagit 13 - 8 = 5 och i stället för att lägga till de återstående 50 har eleven tänkt åt ”fel håll ” och lagt till 70, alltså använt två olika subtraktionsprocedurer varav den ena felaktig. Kanske kan svaret 57 härledas till brister i talfakta?

**Tabell 9**. Uppgift 51- 49 (n=136)

| | frekvens | Relativ frekvens | felsvarsalternativ |
|---|---|---|---|
| **Besvarat uppgiften** | **114** | **83,8** | |
| **Besvarat inkorrekt** | **3** | **2,2** | **0,3** |
| **Ej besvarat** | **19** | **14** | |

Svarsalternativet 0 kommer troligen av att eleven gör ett fel som är förknippat med transformationsberäkningsalgoritmen. Istället för att subtrahera båda termerna med samma tal, så subtraherar han ett från 51 och adderar ett till 49. Han tillämpar den version, som är anpassad för addition, på en subtraktion. Detta fel finns även analyserat i studien i Lilla Edet (Bentley, 2008b).
Svaret tre kan komma från ”plus-minus-ett-felet”. Eleven använder metoden stegvis beräkning. Han är dock osäker på var han ska börja räkna och” säger” 49, 50, 51, vilket ger svaret 3.
Uppgiften 91 - 89 ger ett nästan identiskt resultat: felsvaren 0 och 3 har troligen samma orsak och det 22 elever som inte besvarat uppgiften och två som gjort fel.

**Tabell 10**. Uppgiften 65-4 (n=136)

| | frekvens | Relativ frekvens | felsvarsalternativ |
|---|---|---|---|
| **Besvarat uppgiften** | **123** | **90** | |
| **Besvarat inkorrekt** | **5** | **3,7** | **1, 4, 59, 60** |
| **Ej besvarat** | **8** | **5,9** | |

Svaret 1 kommer troligen från att eleven har gjort en talsortsvis beräkning 5-4 och sedan har de glömt att lägga till 60. Svaret 4 är troligen inget beräkningsfel utan eleven har skrivit samma sak som subtrahenden. Svaret 60 är ett möjligt ”plus-minus-ett-fel” och svaret 59 kan bero av brister i talfakta.

## 5.2 Intervju

De flesta elever var vid intervjuns början omedvetna om subtraktionssituationer och vilka beräkningar de använde sig av. Frågorna satte ord till tankarna och de kunde berätta hur de tänkt, hur de erfarit. Möjligen kan man säga att intervjufrågorna gjorde eleverna mer medvetna om vilka subtraktionssituationer och härtill hörande subtraktionsprocedurer de använde sig av, då tanke blev till ord. Detta beskrivs i ”theory revision” (Bentley, 2008a) och av Vygotskij (1999). En elev var redan innan intervjun medveten om subtraktionssituationer och beräkningsprocedurer som var lämpliga när och varför.

Den första frågan gällde om eleven kunde berätta hur hon tänkt när hon löste 65 - 4? Alla elever svarade att de då började med entals-subtraktionen 5 – 4 = 1 och därefter lade till 60 vilket gav 61. De använde sig alltså av talsortsvis beräkning.Nästa uppgift gällde 63 - 8. Spontana kommentarer från några elever var

> *”en klurigare uppgift”, ” inte lika lätt att räkna ut”, ”tre och åtta är en svår kombination”* och *”den gjorde jag nog fel på”*. Sedan kom lite olika förslag till lösningar: *”Jag tar först 63 - 3, som är lika med 60. Eftersom jag tar bort tre från 63 måste jag ta bort 3 från 8 som då blir 5. Sedan tar jag 60 - 5 som är 55. Jag tar alltså bort tre från varje håll”*.

Eleven använder alltså en transformationsberäkning. Flera elever väljer att ta en stegvis beräkning: 63 - 3 för att komma via tiotalet. Två elever sa att *”då räknar jag på fingrarna*”. En av dessa elever fick svaret till 56 på diagnosen och 54 den första gången han försökte under intervjun. Samma elev var inte helt säker när tallinjen skulle ritas och avståndet mellan 25 och 50 var inte lika stort som mellan 50 och 75.

En elev uttryckte att hon försökte förflytta subtraktionen på tallinjen för att få enklare talkombinationer. Eleven hade under år 2 tränat mycket på tio- och tjugokompisar och använde sig gärna av kända kombinationer för att förenkla uträkningarna. När eleverna skulle lösa 72 - 8 var det sex av eleverna som tänkt på samma sätt; de började med att beräkna 72 - 2 vilket ger svaret 70. Därefter beräknar de 8 - 2 som ger differensen 6. Slutligen beräknas subtraktionen 70 - 6 vilket ger svaret 64. En elev valde att göra en uppställning (algoritm). När uppgiften 51 - 49 dök upp sa flera elever direkt att

> *”det måste bli två, för det ser jag framför mig*”. På följdfrågan ”hur ser du det framför dig?” sa några att *”det är som en linje som finns inne i huvudet*”.

När fler frågor ställdes kom elever fram till att om talen låg nära varandra, användes en ”mental tallinje”. En elev berättade att hon placerade talen motsvarande klockan, därefter tänkte sig eleven att 51 motsvarade 11 på klockan och 49 motsvarade 9 på klockan. Mellan 11 och 9 är det 2 steg och följaktligen blir alltså svaret 2. I just det fallet hade eleven som yngre förbjudits av läraren att räkna på fingrarna, därför lärde sig eleven att jämföra med klockan i stället. Detta var en metod hon fortfarande använde. När följdfrågor ställdes till subtraktionen 51 - 49 uttryckte eleverna att de använde sig av metoden att räkna upp - lägga till två till 49 vilket gav 51.

Uppgiften 91 - 89 fick ett liknande svar, eleven använder metoden att jämföra vilket innebär att de lägger till 2 för att komma från 89 till 91. Även här uttryckte eleverna att de kunde se en sorts inre tallinje framför sig. Uppgiften 81 - 3 fick flera olika svar; två elever räknade nedåt på fingrarna och kom fram till svaret 78. De andra tog vägen via tiotalet: 81-1 är 80, sedan subtraherades 80 med 2 vilket ger svaret 78.

När det gäller tiden uttryckte fyra av eleverna att de kände sig stressade under diagnosen och inte hunnit. De uttryckte också att de hade svårare att tänka när de blev stressade och att detta inte sällan hände vid provtillfällen. En elev uttryckte att tiden blev knapp då hon missbedömt mängden och tagit det för lugnt i början, men hon menade att hon borde ha hunnit. Ytterligare en elev uttryckte att det var svårt att ”koppla om” mellan metoder mot slutet av diagnosen och att det var anledningen till att tiden inte räckte till. Två elever uttryckte att det var gott om tid. Dessa elever uttryckte också att de upplevde matematik som enkelt. En av dessa elever var mycket medveten om vilka strategier som borde användas när och varför.

När elever fick förklara hur de såg på siffran 5 i talet 51 såg sju elever det som fem stycken tiotal, men att det också kunde vara femtio ental. När man använde det ena eller andra berodde på kontexten. Vid följdfrågor kom det fram att de vid uppställningar använde sig av bilden med fem tiotal. För en av eleverna var denna fråga inte självklar men oftast såg han det som femtio ental. Slutligen upplevde fyra av de intervjuade eleverna huvudräkning som lite svårt. De uttryckte att det var länge sedan de tränade detta och att de nu ofta använde miniräknare.

## 5.3 Sammanfattande resultatanalys

Titeln på studien är ”Vari beror svårigheten med subtraktion?” . Resultaten i studien tyder på att subtraktion är komplext. Eleven bör känna till att subtraktion är inversen till addition men samtidigt inte är kommutativ (Bentley, 2008b, Löwing, 2008). Han behöver känna igen olika subtraktionssituationer, s.k. enkodning (Bentley, 2008b). Dessutom bör han vara väl förtrogen med de olika beräkningsprocedurer som finns och när de är lämpliga att använda (Fusion, 1992, Bentley, 2008b). För att avlasta korttidsminnet bör eleven ha lagrat talfakta i långtidsminnet. Dessutom bör eleven ha utvecklat en mental tallinje som inte är logaritmisk (Klingberg, 2011, Lundberg& Sterner; 2009). Förutom detta bör eleven vara väl förtrogen med hur vårt positionssystem fungerar och vad multienheter är (Fusion, 1992). Om undervisningen varit mer konceptuell hade möjligen fler aspekter av subtraktion framträtt för eleverna och det hade gett en större förståelse (Bentley, 2008b). I konceptuell undervisning ökar möjligheterna till att inlärningsprocesserna ”theory revision” och ”rediscription” iscensätts (Bentley, 2008a).

# 6. Diskussion

I diskussionen knyts det centrala resultatet till tidigare forskning. En metodreflektion görs och studiens begränsningar diskuteras. Därefter diskuteras specialpedagogiska implikationer och möjlig fortsatt forskning.

## 6.1 Metodreflektion

Till undersökningen valdes en fenomenografisk ansats med en utvidgad kvantitativ teoriram. Fenomenen som studerades var begrepp och procedurer inom subtraktion. Genom att studera elevers lösningar i diagnoser och följa upp med intervjuer och dessutom jämföra lösningar med tidigare liknande studier, kunde man delvis få syn på elevers uppfattning av begrepp och procedurer (Bentley 2008a). Flera metoder som stöder varandra ökar studiens tillförlitlighet (Stukat, 2005). Resultaten tyder på att ansatsen fungerar bra för studien. En utvidgad kvantitativteoriram består i att undersöka alla förstaårselever på Naturvetenskapliga och Tekniska programmen i en kommun. Detta för att studera om fenomen har en större spridning och möjligen inte är slumpmässiga. Bentley (2008b) har i TIMSS-rapporten visat på att fel som elever gör oftast inte slumpmässiga. Han menar istället att de oftast är systematiska och bygger på outvecklade begrepp och begreppsmodeller.*”I TIMSS visar det sig att misstag som elever i årskurs fyra gör, gör även elever i årskurs åtta. Bentley menar att en del elever har hunnit befästa felaktiga beräkningsmetoder” (Lundberg& Sterner; 2009 s.71).* Jag ville undersöka om elever på gymnasiet fortfarande hade outvecklade begrepp och beräkningsprocedurer vad gäller enkla subtraktioner. Resultaten tyder på att så är fallet i denna kommun. Genom att utföra diagnoserna på tid kunde detta ge en indikation på om eleverna har automatiserat sin kunskap. Då 25 % av eleverna inte hann slutföra i tid tyder detta på att många elever inte ännu har automatiserat talfakta.

### 6.1.1 Studiens begränsningar

Med reliabilitet menar man mätnoggrannhet (Trost, 2008). Diagnoser och intervjuer genomfördes i stort sett på samma sätt i alla grupper och med alla elever, vilket ökar reliabiliteten. Det var en fördel att först genomföra diagnoser, då detta möjliggjorde att på gruppnivå göra kategorier av felsvar. Konstruktionen av dessa kategorier förenklades av att resultaten överenstämde väl med tidigare studier (TIMMS, 2007). Genom att i förväg vara medveten om vanliga tankefel vad gäller beräkningsprocedurer, var det enklare att inta ett utifrånperspektiv vid intervjutillfället. Insikten att intervjuer kräver både närhet och distans är viktig. Intervjufrågor skrevs efter det att kategorier av felsvar gjorts. Trots försök att vara påläst vid intervjuerna och medveten om felsvarskategorier återstod en risk att eleven inte fick tillräcklig med betänketid och att jag nöjde mig med svar som ”passade in” i studien. När intervjuerna var genomförda kunde de utskrivna svaren analyseras och studeras avseende de fel som eleverna gjorde på gruppnivå kunde verifieras på individnivå. I denna studie överensstämde resultaten på grupp- och individnivå väl, vilket ökar reliabiliteten. Svaren överensstämmer dessutom väl med tidigare studier (TIMMS, 2007) vilket ytterligare ökar reliabiliteten och delvis generaliserbarheten.

Bortfall minskar dock tillförlitligheten och generaliserbarheten. Vid subtraktionsdiagnosens genomförande, var tolv elever frånvarande från Teknikprogrammet. Detta motsvarar 12,8 %. Tre av dessa var sjukanmälda. Motsvarande siffra från Naturvetenskapliga programmet var 0 %. Det var åtta elever som avstod att medverka från Teknikprogrammet och motsvarande siffra från Naturvetenskapliga programmet var en. Anledningen till att avstå är inte känd men möjligen är det så att eleverna upplevde en osäkerhet över utfallet av deras insats och därför avstod. Det är inte otroligt att bortfallet av elever gjorde att resultaten blev bättre än om alla hade deltagit. Här var dock de etiska reglerna med frivillighet viktigare. Det hade varit en fördel om subtraktionsdiagnosen inlett lektionen i alla klasser. Det gjorde den i fyra av klasserna men i den femte klassen, kom den 10 minuter in på lektionen. Detta då läraren önskade påbörja en genomgång av den dagens matematikinnehåll innan diagnosen. Det var från denna grupp sex elever valde att avstå.

När intervjuerna skulle genomföras var det inte praktiskt möjligt att söka upp de elever som visade störst svårigheter då det inte fanns några foton att tillgå. Då jag lovat eleverna anonymitet gentemot deras undervisande lärare kom urvalet därför att vara helt på frivillig grund. Fördelen var att eleverna var positiva att dela med sig av sina tankar. Nackdelen var att jag kanske gick miste om förtydligande av svårigheter hos elever. Även här var dock de etiska reglerna överordnade.

Tidsaspekten på diagnosförfarandet ökade troligen stressen hos flera elever. Stress kan påverka resultat negativt. Vid subtraktionstillfället förlängdes tiden med 20 sekunder då jag observerade att många inte hunnit klart och då jag var intresserad av hur elever löser tvåsiffriga subtraktioner med växling. Att diagnosen ändå var tidsbegränsad var för att upptäcka om elever automatiserat kunskaper (Bentley, 2008b, Löwing, 2007).

Med validitet menas om studiens fråga undersöker vad den är avsedd att undersöka (Trost, 2008). Här skulle en invändning kunna vara att begreppet grundläggande baskunskaper inte mäts på samma sätt i diamantdiagnoserna som i de nationella proven. Butterworth och Yeo (2010) menar att proven testar delvis olika saker. I första hand syftar han på kopplingen mellan tid, antal rätt och de beräkningsprocedurer som elever använder. Fler elever hade troligen fått fler rätt om det inte hade funnits någon tidsbegränsning. Tidsbegränsningen möjliggjorde dock att det gick att särskilja elever som inte använde sig av talfakta och som saknade effektiva beräkningsprocedurer. Många elever har uppgett att de har samma betyg på de nationella proven och i slutbetyget från år 9. Det saknas dock relativt många resultat vad gäller betyg på det nationella provet i år 9, därför var det svårt att dra någon slutsats om det finns ett samband mellan detta resultat och subtraktionsdiagnosresultatet. Totalt saknas 35 svar vilket motsvarar 25,7%. Fördelat på program var det 11 från Naturvetenskapliga programmet vilket motsvarar 18 % och 24 från Teknikprogrammet vilket motsvarar 32%. Anledningen till att de inte uppgav något resultat kan variera, men flera elever uttryckte vid diagnostillfället att detta hade de glömt bort. Någon elev uttryckte att det resultatet hade de inte fått ta del av. Validiteten ökar om flera metoder stöder varandra. Detta kallas ibland för triangulering (Alvesson & Sköldberg; 2009). I studien är det diagnosen, intervjuer och tidigare liknande studier som stöder varandra. Att tidigare studier (TIMSS, 2007) visat liknande resultat ökar studiens generaliserbarhet. Generaliserbarheten ökar också om undersökningsgruppen varit stor men minskar vid bortfall av elever. I denna studie är det möjligt att resultatet skulle varit tydligare om alla elever deltagit.

Inom fenomenografin uttrycks validitet som intern och extern (Bentley, 2008a). Den interna validiteten delas upp i innehållsvaliditet och konstruktionsvaliditet. Innehållsvaliditet skulle då beskriva olika elevers uppfattning om begrepp även i otolkad data. De problemuppgifter och frågor som används bör då belysa många aspekter för att fungera i olika kontexter. I subtraktionsdiagnosen fanns inga textade problemuppgifter, men den innehöll fler liknande uppgifter på det område som testades. Detta för att undvika eventuella slarv- och slumpfel. Konstruktionsvaliditeten visar hur väl de utvalda kategorierna överrensstämmer med elevernas förståelse av begrepp och om eleverna valt liknande tillämpningar av procedurer. Kategorier på gruppnivå överensstämde väl med kategorier på individnivå i studien. I extern validitet visar man den variation som finns i en större grupp med hjälp av olika beskrivningskategorier .

## 6.2 Resultatdiskussion

Idén till denna studie föddes på en föreläsning av P-O Bentley vid Göteborgs Universitet 2010-09-08, som handlade om hur vårt minne fungerar och att undersökningar (TIMSS, 2007) visat att många svenska elever inte ännu automatiserat addition, subtraktion och multiplikationstabeller tillräckligt väl. Kognitiv kapacitet användes därför till enkla beräkningar vilket försvårade mer komplicerade beräkningar, vilket mindre undersökningar visat även på gymnasie- och universitetsnivå. Denna information sammanföll med att jag själv funderat mycket på vad som fick min dåvarande niondeklass att inte prestera bättre, trots en hel del strukturerade insatser. För att undersöka om det förekom brister i grundläggande taluppfattning gjordes därför en förstudie med subtraktionsdiagnos. Resultaten visade att ett antal elever inte ännu automatiserat dessa kunskaper och relativt många elever inte var medvetna om subtraktionssituationer och vilka beräkningsprocedurer som var kopplade till dessa olika situationer. Resultaten följdes upp med strukturerad undervisning vad gäller subtraktionssituationer och beräkningsprocedurer och grundläggande tabellträning genomfördes under våren.

Då brister förekommit i denna klass, var det intressant att undersöka om problemet hade en större spridning. Därför genomfördes studien på en relativt stor grupp. Dessutom var det intressant att genomföra den på elever som av intresse valt att studera mycket matte, alltså de elever som följer Naturvetenskapliga och Teknikprogrammen på gymnasiet. Genom att studera en elevgrupp med förväntat goda matematikkunskaper gav det vissa möjligheter att undersöka om problemen med icke automatiserade kunskaper har större spridning. Sannolikt är detta en elevgrupp med goda kognitiva förmågor och då skulle brister vad gäller beräkningsprocedurer och automatisering kunna bero på miljöfaktorer och tidigare undervisning.

### 6.2.1 Det centrala resultatet

En fjärdedel av eleverna som genomförde subtraktionsdiagnosen hann inte slutföra inom utsatt tid. Inom denna grupp var det en större andel med lägre betyg. I studien som helhet var det 41 % av eleverna som hade alla rätt och av dessa hade 91 % betyget VG eller MVG. Det förefaller alltså som om det föreligger ett samband mellan elevers grundläggande taluppfattning vad gäller subtraktionsoperationer och senare dokumenterade, uppnådda matematikframgångar, vilket var ett av studiens syfte. När det gäller beräkningsprocedurer indikerar studien att elever inte är helt medvetna om i vilken kontext de är lämpliga att använda. Exempel på detta när de använder talsortvis beräkning avsedd för subtraktioner utan växling, när det krävs växling, då de inte insett att subtraktion inte är kommutativ. Att så många elever inte hann slutföra i tid tyder också på att talfakta beräkningsprocedurerna inte är automatiserade.

## 6.3 Resultatet i relation till tidigare forskning

Resultatet visar att 25 % av eleverna inte hann göra subtraktionsdiagnosen på utsatt tid. Löwing skriver i förordet till diagnosmaterialet Diamant att

> *”… subtraktioner som 14 - 8 bör vara så väl automatiserade att eleverna med flyt, alltså utan extra tankekraft, ska kunna använda dessa som delberäkningar vid såväl skriftlig räkning och*

*huvudräkning som vid problemlösning…...Målet är att eleverna ska behärska dessa uppgifter på ett sådant sätt att alla uppgifter blir rätt inom ett begränsat tidsintervall"*(s.7).

Rekommenderad tid för diagnosen AG 2 är 3 minuter och AG 4 på 4 minuter när eleverna går i åk 2 - 4 i grundskolan. Vid diagnostillfället var det planerat att eleverna skulle få 3 minuter på sig att genomföra subtraktionsdiagnosen men under testtillfället förlängdes det till 3 minuter och 20 sekunder, då det var väldigt många som inte var klara vid 3 minuter. Trots att tiden förlängdes var det alltså en fjärdedel av eleverna som inte hann genomföra. Löwing skriver vidare i Diamant att alla elever bör ha alla rätt. I studien var det 41 % av eleverna som hade alla rätt. Ett syfte med studien var att undersöka sambandet mellan elevers grundläggande taluppfattning vad gäller enkla subtraktionsoperationer och senare dokumenterade, uppnådda matematikframgångar. Av gruppen som hade alla rätt var det 91 % som hade VG eller MVG som slutbetyg ifrån åk 9. Det förefaller som om det föreligger ett visst samband. Bland alla elever från Teknikprogrammet var det 67 % som hade VG eller mer i sitt slutbetyg. Motsvarande siffra för Naturvetenskapliga programmet var 78 %

Om dessa siffror jämförs med hur många som hann göra diagnosen på utsatt tid var det alltså 29 % av eleverna från teknikprogrammet som inte hann besvara alla uppgifter och motsvarande siffra från naturprogrammet var 20 %. Även detta resultat visar ett samband mellan elevers grundläggande taluppfattning vad gäller enkla subtraktionsoperationer och senare dokumenterade, uppnådda matematikframgångar.

Samtidigt fanns det elever med MVG i slutbetyg som inte hade alla rätt och som inte hann göra alla uppgifter. Kanske är det dessa elever som får problem senare vid högre studier? Löwing skriver vidare i diagnosmaterialet att

*" … vad Diamant fokuserar på är elevernas uppfattningar av olika begrepp. Mindre bra resultat på en diagnos kan emellertid ofta härledas till brister i undervisningsprocessen"*(s.5).

Bentley (2008b) menar också att det förefaller vara brister i undervisningen som medverkar till effektiva beräkningsstrategier inte kommer till stånd. Att så många elever visar på svårigheter vad gäller effektiva subtraktionsstrategier tyder på att det finns eller har funnits brister i den tidiga matematikundervisningen . De elever som i dag går i åk 1 på gymnasiet är födda 1995 och började skolan i början av 2000-talet. Detta sammanföll med att individualiseringen i svensk skola ökade. Skolverket skriver i sin rapport "Vad påverkar grundskoleelevers resultat?" (2009) att det ökade elevansvaret har fått till följd att elever arbetar allt mer individuellt med egna uppgifter och läraren får en alltmer tillbakadragen roll. Följden av detta tycks vara negativa elevresultat. En hastighetsindividualisering av matematikundervisningen har gjort att elever blivit mer utlämnade åt läromedlet. Bentley (2008b) menar att förklaringsmetoderna i matematikböcker ofta har ett smalt användningsområde. Det blir ofta till "mekaniskt görande" i stället för medvetna strategier. Det är troligt att ovana och outbildade pedagoger i högre utsträckning använder sig mer ensidigt av läromedel. Skolverkets rapport (2009) skriver vidare att lärartätheten under undersökt period har minskat och att andelen behöriga lärare också minskat. Dessutom finns en tendens till att alla elever oavsett behov tilldelas en skolpeng, vilket kan leda till att elever med större behov inte får dessa tillgodosedda. Att lärare har en god ämnesdidaktisk utbildning är viktigt. Baroody (2003) menar att det är viktigt att pedagoger själva har en god taluppfattning, fördjupade kunskaper om aritmetik och beräkningsstrategier. Ma (1999) menar samma sak, och skriver vidare att det är viktigt att elever kommunicerar sina beräkningsstrategier både med lärare och med andra elever. Att försöka förklara hur man själv tänker, varför strategin fungerar och lyssna till och förstå andra elevers strategier är viktigt. Att värdera olika strategiers effektivitet och generaliserbarhet (Carpenter, Fennema, Franke, Levi &.Empson ; 1999) är också viktigt. Sammantaget kan man konstatera att det ställer höga krav på pedagogernas ämnesdidaktiska kunskaper för att dessa ska kunna undervisa på ett varierat sätt.(Baroody, 2003, Carpenter m.fl.; 1999; Ma, 1999).

### 6.3.1 Hur erfar elever subtraktionsberäkningar?

I syftet uttrycks ett intresse för att undersöka hur elever erfar sitt arbete med subtraktionsoperationer och vilka procedurer de använder sig av. I TIMMS (2007) har man funnit att många elever använder sig av proceduren talsortsvis beräkning. I subtraktionsdiagnosen finns uppgift 18 - 10 med. Här krävs ingen växling och uppgiften har 100% lösningsfrekvens. I de efterföljande intervjuerna framkommer också att de flesta eleverna använder sig av denna procedur då det är den de är mest bekanta med. Studien bekräftar alltså det som TIMMS funnit bland yngre elever. TIMSS (2007) menar vidare att färre elever visar säkerhet vad gäller procedurerna stegvisberäkning och kompensationsberäkning. Dessa procedurer hade varit lämpliga på flera av uppgifterna i subtraktionsdiagnosen t.ex. 51 - 49, 91 - 89 och 63 - 8. Antalet elever som inte genomfört beräkningen eller beräknat med ett felaktigt svar på dessa uppgifter var 16%, 18% respektive 18 %. I de efterföljande intervjuerna berättade några elever att det var *”svårt att ställa om metod”* och ”*man får tänka på ett annat sätt, om någon kom fram på gatan och frågade är det inte alltid så lätt att plocka fram rätt svar”*. Två elever sa att de inte visste vilken strategi de använt sig av men vid följfrågor kom en av dem fram till att *”… jag kanske borde ha räknat upp, det hade nog gått snabbare”*. Resultaten från diagnos och intervjuer tyder alltså på en viss osäkerhet i att använda procedurerna stegvis beräkning och kompensationsberäkning, vilket bekräftar den bild som TIMSS tidigare visat. Vid fortsatt analys av uppgiften 51 - 49 visar den att det var 19 elever som inte besvarat den och det var tre elever som besvarade den fel. Av felsvaren förekom svaret 0 som också finns med i analysen av TIMMS (2008b). Här har eleven använt metoden stegvis beräkning för att gå från 49 till 50 dvs. ett steg, men sedan förflyttat 51 till 50 i stället för till 52 (kompensation) och därmed fått svaret noll. Eleven har alltså använt två metoder, men på ett felaktigt sätt. Två elever har svarat tre, vilket skulle kunna vara det Bentley benämner ”plus – minus – ett - problemet” (personlig kommunikation, 2011-09-01). Här förefaller det vara så att elever använder sig av en tänkt tallinje, vilket flera elever uttryckte att de gjorde vid subtraktioner av tal som ligger nära varandra. När de ska beräkna avståndet mellan 51 och 49 är de dock osäkra på var de ska börja räkna och därför kan denna subtraktion ge både svaret två och tre. Eleverna är inte säkra på förhållandet mellan antal steg och antal. Läromedelsstudier tyder på en otydlighet när det gäller hur sambandet mellan steg och antal presenteras (personlig kommunikation Bentley, 2011-09-01). Denna typ av fel kan också vara förklaring till att en elev fick 63 - 8 först till 54 och sedan till 56. En frågeställning till studien var ”föreligger det möjligen ett samband mellan en outvecklad mental inre talrad och brister i subtraktionsprocedurer och talfakta?”. Eleven som fick 63 - 8 att bli först 54 och sedan 56 visade också osäkerhet när tallinjen skulle ritas. Avstånden mellan 25 och 50 var inte lika stort som mellan 50 och 75 när eleven ritade ”sin” tallinje. Dessutom visade eleven viss osäkerhet vad gäller multienheter. Vid frågan hur eleven uppfattade 5 i talet 51 var det inte självklart att den både kunde uppfattas som fem tiotal och 50 ental. De andra intervjuade eleverna visade inte denna osäkerhet. Då det endast gäller en elev är det inte möjligt att utifrån denna studie dra någon slutsats och säga att det föreligger ett samband, men frågeställningen kunde bli en intressant fråga för fortsatt forskning.

Om man studerar internationell forskning beskriver bl.a. Rousham, enligt Larsson (2011), en modell av den s.k. tomma tallinjen, vilken har använts sedan i början av 1990 – talet. Detta är en didaktisk modell där elever dokumenterar delresultat om hur hon tänker under beräkningsprocessen. Metoden stöder stegvisa beräkningar och kompensationsberäkningar men bygger inte på talsortsvisa beräkningar. För att eleven ska kunna använda modellen är det viktigt att hon förstår talen som en talrad, där varje tal befinner sig med lika stort avstånd till sina grannar (Menne, 2001). Menne menar vidare att modellen fördjupar förståelsen och gynnar utnyttjande av vårt positionssystem. Modellen med den tomma tallinjen kräver att undervisningen är explicit vad gäller strategier så att elever reflekterar över hur vårt talsystem och räkneoperationer fungerar (Baroody, 2003, Menne, 2001). Metoden har visat sig framgångsrik (Menne, 2001) men det saknas forskningsresultat om detta gäller även för elever i svårigheter.

TIMSS (2007) har visat att elever kan ha svårt att inse att subtraktion inte är kommutativ (t.ex. att 6 - 4 inte ger samma svar som 4 - 6). I uppgiften 72 - 8 är det möjligt att svaret 66 kommer från att eleven tagit 8 – 2 = 6, då han tror att subtraktion är kommutativ. Uppgiften 72 - 8 har också gett felsvaret 74 vilket kan komma från att eleven har tänkt 12 – 8 = 4 och sedan har han lagt till 70 i stället för 60, alltså använt två olika strategier och den senare på ett felaktigt sätt.
Det förefaller alltså vara så att elever gör fel av en typ, där de tror att subtraktion är kommutativ. De visar osäkerhet vad gäller procedurerna stegvis beräkning och kompensation. Dessutom använder de procedurerna men på ett felaktigt sätt t.ex. när de förflyttar subtraktionen på tallinjen men den ena åt fel håll. Detta syns också i svaret 51 – 49 = 0.

### 6.3.2 Mental tallinje

En intressant observation under intervjuerna var att flera elever menade att de använde sig av en mental tallinje när de genomförde subtraktioner, där talen var placerade nära varandra. Forskning (Klingberg, 2011) har visat människan har ett område i parietala cortex där beräkningar av t.ex. subtraktion sker och att detta område troligen har en utsträckt form som kan liknas vid en mental tallinje. Det förefaller som om eleverna upplever denna tydligare när talen är placerade nära intill varandra.
Den av eleverna som visade störst säkerhet vad gäller subtraktionsstrategier uttryckte att hon framförallt använde sig av en tänkt tallinje då hon gjorde beräkningar av negativa tal. Flera forskare (Klingberg, 2011, Bentley, 2008b, Lundberg & Sterner, 2009) menar att förmågan att mentalisera en tallinje och hålla kvar denna tillräckligt länge är en kritisk faktor när det gäller beräkningar av t.ex. subtraktion. Att genomföra en strukturerad undervisning av tallinjer och grundläggande talfakta verkar vara avgörande. Att dessutom undervisa så att eleven kan lagra grundläggande talfakta i sitt långtidsminne avlastar korttidsminnet (Bentley, 2008b, Klingberg, 2011). Om talfakta lagras i långtidsminnet finns det lättare tillgängligt (Baddeley, 2000, Bentley, 2008b) och kognitiv kraft kan läggas på mer komplicerade uträkningar.
En elev uttryckte i intervjun att hon brukade förflytta subtraktioner (transformation) på tallinjen för att på sätt få till enklare subtraktionsuträkningar. I stället för att utföra subtraktionen 63 - 8 förflyttade hon subtraktionen till 60 - 5, vilket var en enklare uträkning eftersom hon då använde sig av tiokompisar. Eleven berättade att hon under de första skolåren hade en lärare som ofta tränade dem på tiokompisar och tjugokompisar. Ofta lekte och tävlade klassen för att träna dessa. Troligen är detta, att på ett explicit sätt tydliggöra begrepp och strategier och träna ofta under positiva former en framgångsfaktor. Att följa upp elevers uträkningar och göra dem uppmärksamma på möjliga tankestrategier är förbättringsmöjligheter som borde användas oftare i matematikundervisningen. Seligman visade i sin studie att gruppen som ofta diskuterade möjliga lösningar och inte endast fokuserade på rätt och fel visade bättre resultat (personlig kommunikation Anna Ehnvall, Kognitivt centrum, 20111202). Att diskutera och fokusera på möjliga lösningar och tydliggöra vad som inte är möjligt är ett sätt att lyfta fram alla aspekter av begrepp och strategier. Detta görs mer i konceptuell undervisning vilket inte är så vanligt förekommande i Sverige (Bentley, 2008a). I konceptuell undervisning söker man kärnfulla principer för att tydliggöra samband t.ex. att subtraktion är inversen till addition men samtidigt inte kommutativ. Det är också viktigt att elever känner igen olika subtraktionssituationer för att välja lämplig strategi. För att detta ska vara möjligt måste eleven möta uppgifter där

kontexten varierats för att upptäcka vad det är som skiljer dem åt, vad som är s.k. särskiljande attribut. Att dessutom ge så många exempel att kunskapen lagras i långtidsminnet skulle kunna kombinera de två lärandeteorierna ” theory revision” och ”rediscription” (Bentley, 2008a).
Eleven som berättade att hon använde klockan som hjälpmedel vid subtraktionsdiagnosen skulle troligen varit hjälpt av att i stället fått undervisning som förstärkt hennes inre mentala tallinje. Det är viktigt att metoder som lärs ut är effektiva och utvecklingsbara (Löwing, 2006, Bentley, 2008b).

### 6.3.4 Resultaten i förhållande till läroplanen

Kunskaper som krävs för att genomföra subtraktionsdiagnosen på tid tillhör kunskaper som elever bör få med sig i de tidiga åren av grundskolan. Därför blir det mest intressant att studera vad grundskolans läroplan säger om detta. Den aktuella studien bekräftar behovet av att arbeta målinriktat med räknestrategier. En jämförelse mellan den gamla och den nya läroplanen visar att denna kunskap under tidigare år inte varit lika framträdande i kursplanerna. I Lgr11 står det på sid. 17

*”Matematikundervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem, samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder modeller och resultat. Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper om hur vardagliga situationer kan formuleras matematiskt”.* I en jämförande analys av Lpo 94 visar den på en mindre tydlig beskrivning kring räknestrategier. Där står på sid. 1*”utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande”.*

Vidare betonar Lgr11 att det är viktigt att utveckla ett matematiskt språk och att detta bör användas för att kommunicera och att eleverna bör vara förtrogna med språket . Skrivningen med att vara förtrogen med det matematiska språket finns inte i Lpo 94 utan här står att elever ska få möjligheten att kommunicera. Det förefaller alltså som om resultat från studier som TIMMS (2007) och PISA (The OECD programme for international student assessment, 2010) förändrat skrivningar i läroplanen och att det är viktigt att förändringar vilar på vetenskaplig grund.
Forskningsresultat från exv. TIMMS och PISA har också bidragit till att riksdagen beslutat om extra matematiksatsningar inom skolan. Fortbildning av lärare utgör en stor del av satsningen.

## 6.4 Sammanfattning

Syftet med studien var att undersöka om det förelåg något samband mellan grundläggande brister vad gäller subtraktionsdiagnoser och senare dokumenterade, uppnådda matematikframgångar. Diagnosresultaten tyder på att det finns ett sådant samband. När det gäller syftet att undersöka hur elever erfar sitt arbete med subtraktionsstrategier tyder diagnoser, efterföljande intervjuer och tidigare forskning (TIMSS 2007) att elever främst använder sig av proceduren talsortsvis beräkning. Procedurerna stegvis beräkning och kompensation förefaller användas mer sällan och inte vara lika medvetna. Ibland används proceduren men på ett felaktigt sätt. När det gäller elevernas eventuella inre mentala talrad tyder studien på den används mer medvetet när termerna i subtraktionen ligger nära varandra. När eleven ritade en egen tallinje visade alla säkerhet på denna utom en elev. Denna elev visade också att han inte helt hade utvecklat en sammankopplad begreppsstruktur.

## 6.5 Specialpedagogiska implikationer

Att pedagoger har goda ämnesdidaktiska kunskaper är viktigt för alla elever, och särskilt för de elever i behov av specialpedagogiskt stöd. Det är av vikt att pedagoger har god taluppfattning och stor kunskap om aritmetik och strategier för att kunna undervisa om t.ex. subtraktion (Baroody, 2003). Studien kan bidra till denna kunskapsutveckling. Studien poängterar att strukturerat arbete med övningar med tallinjer, kan öka möjligheter att mentalisera och hålla kvar en bild av en inre tallinje (Klingberg, 2011). Detta verkar vara en avgörande förmåga vid beräkningar av addition och subtraktion (Lundberg och Sterner; 2009). Insikter om hur människans minne fungerar underlättar lagring av kunskap i långtidsminnet. Detta frigör minneskapacitet till mer kognitivt krävande processer (Bentley, 2008b). Detta är inte minst viktigt för de elever där arbetsminnet är en begränsandefaktor, vilket ofta gäller de elever som är i behov av specialpedagogiskt stöd (Klingberg, 2011).

## 6.6 Fortsatt forskning

Det hade varit intressant att ytterligare undersöka om det föreligger ett samband mellan en outvecklad mental inre talrad och brister i subtraktionsprocedurer och talfakta.
Det hade också varit intressant att undersöka arbetsminnets begränsande faktor på t.ex. subtraktionsberäkningar. Här hade man kunnat ha flera kontrollgrupper; en grupp som får explicit strukturerad undervisning vad gäller olika subtraktionsprocedurer i kombination med tränande av talfakta och tallinjesuppgifter och en grupp som kombinerar explicit undervisning av subtraktionsstrategier med arbetsminnesträning och en grupp som arbetar mer individuellt med matematikbok.

## Referenslista


Alvesson M, & Sköldberg, K, (2009). Tolkning och reflektion – vetenskapsfilosofi och kvalitativ metod. Lund: Studentlitteratur.

Andersson, U. (2008). Working memory as a predictor of written arithmetical skills in children: The importance of central executive functions. *British journal of Educational Psychology*, 78: 181 – 203.

Baddeley, A. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences, 4*, 417-423. Baddeley, A., & Hitch,

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bentley, P-O. I Skolverket (2008a). Svenska elevers matematikkunskaper i TIMMS 2007. En jämförande analys av elevers taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan. Stockholm: Skolverket.

Bentley, P-O. I Skolverket (2008b). Svenska elevers matematikkunskaper i TIMMS 2007. En djupanalys av hur eleverna förstår matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer. Stockholm: Skolverket

Butterworth, B. & Yeo, D.(2010). *Dyskalkyli - Att hjälpa elever med specifika matematiksvårigheter.* Natur och kultur, Stockholm.

Carlgren I & Marton F. (2007). *Lärare av imorgon.* Stockholm: Lärarförbundets förlag.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S., B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Dixon, James, A. &, Bangert, Ashley, S. (2004). From regularities to concepts: the development of children’s understanding of a mathematical relation. *Cognitive Development*. 20(2005) 65–86 (No. 171). s. 1-22.

Fejes A. & Thornberg R. (red) (2009). *Handbok i kvalitativ analys.* Stockholm: Liber AB.

Foxman & Beishuizen.(2002). *Mental Calculation methods by 11-Years-Olds in different Attainment Band: a re-analysis of data from 1987 APU Survey in the UK.* Educational Studies I Mathematics

Fusion, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction I Grouws, D.A (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. (s.243 -275)* Library of Congress Cataloging – in – publication data

Fusion, K. Wearne, D. Hiebert, J. Murray, H. Human, P. Olivier, A. Carpenter,T. Fennema, E.(1997). *Journal for Research in Mathematics Education. March 1997, Volume 28, Number*

*2.-Childrens´s Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction.*

Klingberg, T. (2011). *Den lärande hjärnan.* Stockholm: Natur och kultur

Kroksmark T. (2007). *Fenomenografisk didaktik – en didaktisk möjlighet.* Didaktisk Tidskrift Vol. 17, No. 2-3, 2007. Jönköping: Jönköping University Press

Larsson, K.(2011) .*Varför ska man "göra olika": En litteraturstudie om beräkningsstrategier för subtraktion.* Magisteruppsats Stockholmsuniversitet Inst. för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik.

Lundberg, I. & Sterner, G (2009) *Dyskalkyli – finns det? Aktuell forskning om svårigheter att förstå och använda tal.* Nationellt Centrum för matematikutbildning NCM. Göteborgs Universitet.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik. Matematikdidaktik för lärare*. Studentlitteratur AB, Lund.

Löwing, M. (2006*). Matematikundervisningens dilemman. Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet.* Lund*:* Studentlitteratur

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Martinussen, R., & Tannock, R. (2006). Working memory impairments in children with attention-deficit hyperactivity disorder with and without comorbid language learning disorders. Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology, 28, 1073–1094.

Marton, F.& Booth, S.(2000) *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur

Marton, F. Dahlgren, L. O., Svensson, L. & Säljö, R (1999). Inlärning och omvärldsuppfattning. Stockholm: Nordstedts

McIntosh, A (2008). *Förstå och använda tal – en handbok*. Nationellt Centrum för matematikutbildning NCM. Göteborgs Universitet.

Menne, J. (2001). Jumping ahead: An innovative teaching programme. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching.* (pp. 79-94). Buckingham, U.K.: Open University Press.

Myndigheten för skolutveckling.(2007). *Matematik: En samtalsguide om kunskap, arbetssätt och bedömning*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Myndigheten för skolutveckling. (2008). *Mer än matematik: Om språkliga dimensioner i matematikuppgifter*. (2008). Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Olsson, Z (2007). *Motivation att lära tillsammans* (magisteruppsats). Halmstad Högskola, institutionen för pedagogik och didaktik.

Skolverket.(1994*). Lpo94.* Hämtad 6 november 2011 från www.skolverket.se

Skolverket. (2007). *Hur går det för eleverna i årskurs 5 på de nationella proven?: Resultat från insamling av ämnesproven i engelska, matematik och svenska och svenska som andraspråk i årskurs 5 2007*. (ss. 24-26). Tillgängligt på internet: http://www.skolverket.se/publikationer.

Skolverket (2008c). Diamant, diagnoser i matematik. Tillgänglig 2009-02-03 på www.skolverket.se

Skolverket (2009). *Vad påverkar elevers resultat i svensk grundskola? Kunskapsöversikt om betydelsen av olika faktorer. Sammanfattande analys.* Stockholm: skolverket

Skolverket (2011). *Lgr11.*Hämtad 6 november 2011 från www.skolverket.se

Stukat, S (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap***.** Studentlitteratur AB.

Trost, J (2008). *Att skriva uppsats med AKRIBI.* Studentlitteratur AB.

Vetenskapsrådet (2007). *Forskningsetiska principer inom humanistisk – samhällsvetenskaplig forskning.* http://www.vr.se/ huvudmenyn/forskningsetik/

Vygotskij, L. (1999) *Tänkande och språk*. Göteborg Bokförlaget Daidalos AB.

Westerberg, H. (2004) .*Working memory: development, disorders and training*. Stockholm: Karolinska University Press.

**Bilaga 1**

Klass:

# SUBTRAKTIONSDIAGNOS

| **1a** | | **1b** | |
|---|---|---|---|
| 18 - 10 = ____ | 10 - ____ = 5 | 90 - 60 = ____ | 80 - 30 = ____ |
| 16 - 6 = ____ | 18 - 8 = ____ | 70 - 20 = ____ | 60 - ____ = 40 |
| 14 - ____ = 10 | 19 - ____ = 9 | 90 - ____ = 50 | 70 - ____ = 30 |
| **2a** | | **2b** | |
| 19 - 1 = ____ | 18 - 2 = ____ | 95 - 5 = ____ | 68 - 8 = ____ |
| 17 - 12 = ____ | 18 - 9 = ____ | 56 - ____ = 50 | 84 - ____ = 80 |
| 19 - 18 = ____ | 18 - 16 = ____ | ____ - 3 = 90 | ____ - 9 = 70 |
| **3a** | | **3b** | |
| 19 - 4 = ____ | 11 - 3 = ____ | 38 - 2 = ____ | 57 - 5 = ____ |
| 17 - 4 = ____ | 19 - 15 = ____ | 77 - 75 = ____ | 58 - 57 = ____ |
| 18 - 14 = ____ | 13 - 8 = ____ | 89 - 7 = ____ | 65 - 4 = ____ |
| **4a** | | **4b** | |
| 18 = 3 + ____ | 19 = 16 + ____ | 63 - 8 = ____ | 54 - 6 = ____ |
| 15 = 2 + ____ | 18 = 13 + ____ | 51 - 49 = ____ | 91 - 89 = ____ |
| 19 = 4 + ____ | 17 = 14 + ____ | 72 - 8 = ____ | 81 - 3 = ____ |

Betyg på Nationellt prov i matematik år 9: ………… Kursbetyg i matematik år 9: ……………

**Bilaga 2**

Deltagarmedgivande

Jag deltar frivilligt i den studie Zita Olsson genomför i matematik och är medveten om att mina resultat kommer att ingå i en sammanställning för ett forskningsprojekt.
Den personliga subtraktionsdiagnosen kommer efter att studiens avslutats, att förstöras.

___________________________

Namnunderskrift

**Bilaga 3**

Deltagarmedgivande för intervju

Jag deltar frivilligt i den studie Zita Olsson genomför i matematik och är medveten om att mina resultat kommer att ingå i en sammanställning för ett forskningsprojekt.
Den inspelade intervjun och utskrifter från denna kommer efter att studiens avslutats, att förstöras.

____________________________
Namnunderskrift

**Bilaga 4 – Sammanställning FELSVAR**

Klass:

## SUBTRAKTIONSDIAGNOS

**1a**

| | |
|---|---|
| 18 - 10 = 10 | 10 - ___ = 5 |
| 16 - 6 = 6 | 18 - 8 = ___ |
| 14 - 8 = 10 | 19 - 9/11 = 9 |

**1b**

| | |
|---|---|
| 90 - 60 = 20 | 80 - 30 = ___ |
| 70 - 20 = ___ | 60 - ___ = 40 |
| 90 - 4 = 50 | 70 - 50 = 30 |

**2a**

| | |
|---|---|
| 19 - 1 = ___ | 18 - 2 = 15/17 |
| 17 - 12 = 3/9/15 | 18 - 9 = 11 |
| 19 - 18 = ___ | 18 - 16 = 3/4/12 |

**2b**

| | |
|---|---|
| 95 - 5 = ___ | 68 - 8 = 8 |
| 56 - ___ = 50 | 84 - ___ = 80 |
| ___ - 3 = 90 | ___ - 9 = 70 |

**3a**

| | |
|---|---|
| 19 - 4 = 4/11 | 11 - 3 = 9 |
| 17 - 4 = 3/12 | 19 - 15 = 3/14 |
| 18 - 14 = 14 | 13 - 8 = 6/7/13 |

**3b**

| | |
|---|---|
| 38 - 2 = ___ | 57 - 5 = 53/70 |
| 77 - 75 = 3 | 58 - 57 = 51 |
| 89 - 7 = 2/81 | 65 - 4 = 1/4/59/60 |

**4a**

| | |
|---|---|
| 18 = 3 + ___ | 19 = 16 + 4 |
| 15 = 2 + ___ | 18 = 13 + 15 |
| 19 = 4 + 16 | 17 = 14 + 4 |

**4b**

| | |
|---|---|
| 63 - 8 = 54/56/57/65/75 | 54 - 6 = 49 |
| 51 - 49 = 0/3 | 91 - 89 = 0/3 |
| 72 - 8 = 63/66/74/78 | 81 - 3 = 77 |

Betyg på Nationellt prov i matematik år 9: ........... Kursbetyg i matematik år 9: ...............

**Bilaga 5 – Sammanställning UTEBLIVNA SVAR**

Klass:

# SUBTRAKTIONSDIAGNOS

**1a**

18 - 10 = ____ 10 - 1 = 5

16 - 6 = ____ 18 - 8 = 1

14 - ____ = 10 19 - 1 = 9

**1b**

90 - 60 = 1 80 - 30 = 1

70 - 20 = 1 60 - 1 = 40

90 - 2 = 50 70 - 1 = 30

**2a**

19 - 1 = ____ 18 - 2 = ____

17 - 12 = ____ 18 - 9 = ____

19 - 18 = ____ 18 - 16 = ____

**2b**

95 - 5 = 3 68 - 8 = 3

56 - 3 = 50 84 - 4 = 80

4 - 3 = 90 4 - 9 = 70

**3a**

19 - 4 = 1 11 - 3 = 1

17 - 4 = 1 19 - 15 = 1

18 - 14 = 1 13 - 8 = 3

**3b**

38 - 2 = 5 57 - 5 = 7

77 - 75 = 6 58 - 57 = 9

89 - 7 = 10 65 - 4 = 8

**4a**

18 = 3 + 4 19 = 16 + 4

15 = 2 + 5 18 = 13 + 10

19 = 4 + 7 17 = 14 + 9

**4b**

63 - 8 = 19 54 - 6 = 21

51 - 49 = 19 91 - 89 = 22

72 - 8 = 23 81 - 3 = 24

Betyg på Nationellt prov i matematik år 9: ........... Kursbetyg i matematik år 9: ...............

**Bilaga 6 – Sammanställning TOTALT ANTAL FELAKTIGA/MISSADE SVAR**

Klass:

# SUBTRAKTIONSDIAGNOS

| **1a** | | **1b** | |
|---|---|---|---|
| 18 - 10 = ____ | 10 - 1 = 5 | 90 - 60 = 2 | 80 - 30 = 1 |
| 16 - 6 = 1 | 18 - 8 = 1 | 70 - 20 = 1 | 60 - 1 = 40 |
| 14 - 1 = 10 | 19 - 7 = 9 | 90 - 3 = 50 | 70 - 4 = 30 |

| **2a** | | **2b** | |
|---|---|---|---|
| 19 - 1 = ____ | 18 - 2 = 4 | 95 - 5 = 3 | 68 - 8 = 5 |
| 17 - 12 = 3 | 18 - 9 = 3 | 56 - 3 = 50 | 84 - 4 = 80 |
| 19 - 18 = ____ | 18 - 16 = 4 | 4 - 3 = 90 | 4 - 9 = 70 |

| **3a** | | **3b** | |
|---|---|---|---|
| 19 - 4 = 3 | 11 - 3 = 3 | 38 - 2 = 5 | 57 - 5 = 7 |
| 17 - 4 = 2 | 19 - 15 = 7 | 77 - 75 = 8 | 58 - 57 = 11 |
| 18 - 14 = 4 | 13 - 8 = 6 | 89 - 7 = 13 | 65 - 4 = 13 |

| **4a** | | **4b** | |
|---|---|---|---|
| 18 = 3 + 4 | 19 = 16 + 5 | 63 - 8 = 27 | 54 - 6 = 23 |
| 15 = 2 + 5 | 18 = 13 + 11 | 51 - 49 = 22 | 91 - 89 = 24 |
| 19 = 4 + 8 | 17 = 14 + 10 | 72 - 8 = 30 | 81 - 3 = 24 |

Betyg på Nationellt prov i matematik år 9: ...........     Kursbetyg i matematik år 9: ...............

**Bilaga 7**

Intervjufrågor kopplat till diagnosen:

1. Kan du berätta hur du tänkte när du löste uppgiften 63-8?
2. Skulle det vara möjligt att lösa uppgiften på något annat sätt?
3. Kan du berätta hur du tänkte när du löste uppgiften 65-4?
4. Skulle det vara möjligt att lösa uppgiften på något annat sätt?
5. Kan du berätta hur du tänkte när du löste uppgiften 58-57?
6. Skulle det vara möjligt att lösa uppgiften på något annat sätt?
7. Om du ska göra en uppställning av en subtraktion exv. 34 - 15, hur tänker du då?
8. Vilket värde har 3:an i 34? Hur vet du det?
9. Rita en tallinje från 0-100 ! (som den ser ut för dig)
10. Beskriv din tallinje!
11. Hur upplever du situationer där du arbetar under tidspress?
12. Hur lätt tycker du att du har för matte?