

CHALMERS



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Separationsegenskaper hos symmetriska självliknande mängder i planet

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers*

Olof Carlsson
Zakarias Sjöström Dyrefelt

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2012

Separationsegenskaper hos symmetriska självliknande mängder i planet

*Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom matematikprogrammet
vid Göteborgs universitet*

Zakarias Sjöström Dyrefelt

*Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik
vid Chalmers*

Olof Carlsson

Handledare: Maria Roginskaya
Examinator: Carl-Henrik Fant

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2012

Sammanfattning

I detta arbete studeras, med grund i Hutchinsons teori, en klass av symmetriska självliknande mängder i planet. Under ett symmetriantagande presenteras ett tillräckligt och nödvändigt kriterium för när invarianta mängder är sammanhängande, samt ett existensbevis av en (utifrån similituders parametervärden precist definierad) 'brytpunkt' eller 'gränsfunktion', vilken delar in de betraktade symmetriska invarianta mängderna i en klass av sammanhängande- och en klass av totalt icke-sammanhängande invarianta mängder. Vidare studeras monotonitet och överlapp hos de symmetriska invarianta mängderna med parametervärden på denna gräns och under en *förmodan* om kontinuitet visas att 'gränsmängderna' är sammanhängande med *minimalt överlapp* ('just touching pieces'). Under denna förmodan om kontinuitet visas slutligen att gränsmängderna alltid uppfyller det välkända separationskriteriet *öppna mängdkriteriet* (OSC).

Abstract

Building on Hutchinson's theory this paper studies a class of symmetric self similar sets in the Euclidean plane. Under a symmetry assumption a necessary and sufficient condition for connectedness of invariant sets is presented alongside an existence proof of a 'breaking point' (precisely defined through parameter values of the associated similitudes) which divides the considered symmetric invariant sets into a class of connected- and a class of totally disconnected sets. Moreover, we study monotonicity and overlap of symmetric invariant sets with parameter values on this 'breaking point' and under a continuity *assumption* we prove that these sets are connected with *minimal overlap* ('just touching pieces'). Under the continuity assumption we finally show that symmetric invariant sets with parameter values 'on' the breaking point always satisfy the well-known separation criterion *Open Set Condition* (OSC).

Innehåll

1	Inledning	1
2	Notation och grundläggande begrepp	3
3	Bakgrund kring similituder och självliknande mängder	4
4	Grundläggande observationer	8
4.1	Den invarianta mängdens konstruktion	8
4.1.1	Ett första exempel	10
4.2	Delmängdsresultat för similituder i planet	11
4.2.1	Ett exempel på en P^* -konvex invariant mängd	13
5	Separationsegenskaper	14
5.1	Separationsegenskaper hos invarianta mängder	15
5.2	Separationsegenskaper hos invarianta mängder i planet under symmetriantagande	17
6	Regelbundenhetsresultat och överlapp	21
6.1	En förmodan och dess implikationer	24
6.2	Öppna mängdkriteriet	25
7	Approximation av gränsfunktionen via Hausdorffdimension och datorsimulering	27
7.1	Hausdorffmått och Hausdorffdimension	27
7.1.1	Approximation av gränsfunktionen via datorsimulering	28
8	Diskussion	30
8.1	Avgränsningar	30
8.2	Spridda kommentarer kring resultat	30
8.2.1	Förmodan om överlappets kontinuitet	30
8.2.2	P^* -konvexitet	31
8.2.3	Öppna mängdkriteriet	31
8.2.4	Gränsfunktionen	32
8.3	Intressanta frågor till framtiden	32

Förord

Detta arbete har utförts som ett forskningsprojekt i 'miniatyrformat'. Det är alltså i första hand *inte* en litteraturstudie utan ett gemensamt försök att finna egna resultat inom ett avgränsat och relativt outforskat område. Arbetet har väsentligen kommit till genom gemensamma diskussioner varför samtliga idéer och satser i denna rapport tillskrivs oss båda. Gällande nedteckning av resultat, skrivande av MATLAB-kod och skapande av figurer förekommer mindre skillnader i arbetsfördelning. Väsentligen har Olof Carlsson tagit ett större ansvar vid skrivandet av kod och Zakarias Sjöström Dyrefelt tagit ett huvudansvar för nedtecknandet av resultat. En loggbok har förts under arbetets gång i vilken dessa (nästan försumbara) skillnader framgår i mer detalj.

Slutligen vill vi rikta ett särskilt tack till Maria Roginskaya, vars handledning och granskning av bevis har varit oss till stor nytta.

1 Inledning

I denna rapport studeras *självliknande* mängder, det vill säga mängder som intuitivt har 'samma form' som en eller flera delar av mängden själv. Se figur 1 (sida 7) för en illustration. Dessa självliknande egenskaper är vanliga i naturen såsom noterades av Mandelbrodt (se [MB]) men även inom statistik genom *Brownsk rörelse* och i mer klassisk matematik genom den välkända *kantormängden*.

I denna rapport studeras dock självliknande mängder för deras egen skull så som gjorts av bland andra Hutchinson [H], som i artikeln *Fractals and Self Similarity* lade grunden för det perspektiv på självliknande mängder som antas i denna rapport. Mer precist adopteras begreppet *similitud*; en avbildning från ett metriskt rum (X, d_X) till sig själv som intuitivt 'bevarar geometri', vilket preciseras i §4. Definitionen av similitud och metriskt rum återfinns i §3.

I Hutchinsons teori spelar similituder en central roll som *genererande avbildningar* för självliknande mängder, ty för en mängd similituder S_1, \dots, S_k existerar (se [M],[F],[H]) en entydigt bestämd självliknande (även kallad *invariant*) mängd K som satisfierar:

$$K = \bigcup_{i=1}^k S_i(K).$$

Sådana K kan betraktas som en union av godtyckligt små mängder likformiga med K själv, se §3. Det visar sig dessutom möjligt (se sats 3.4) att utifrån en uppsättning similituder iterativt konstruera den entydigt bestämda invarianta mängden. Denna observation gör det möjligt att studera den ofta komplexa strukturen hos självliknande mängder genom att istället studera de genererande similituderna.

Rapportens syfte: Med utgångspunkt i Hutchinsons framställning syftar denna rapport till att kategorisera en avgränsad klass av invarianta mängder i det metriska rummet $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Till denna klass hör närmare bestämt självliknande mängder genererade av exakt två similituder vilka lyder under ett *symmetriantagande*, såsom preciseras i §5.2. Gällande dessa mängder studeras grundläggande frågor kring mängdernas geometri så som:

- Kan man utifrån en uppsättning similituder avgöra om den genererade självliknande mängden är sammanhängande eller ej?
- Vad kan man säga om de självliknande mängdernas Hausdorffdimension?

För definition av Hausdorffdimension, se §7. För en illustration av problematiken kring frågan om när en självliknande mängd är sammanhängande, se figur 4.

Rapportens struktur: En betydande del av rapporten ägnas åt en kartläggning av grundläggande karakteristiska egenskaper för den klass av invarianta mängder som specificerats ovan. Ett flertal resultat presenteras dock i en mer generell kontext.

För att kunna tillgodogöra sig denna rapport presenteras i §3 en kortfattad teoribakgrund. I efterföljande avsnitt §4 presenteras grundläggande observationer kring invarianta mängder och dess konstruktion. Detta avsnitt innehåller dessutom två olika kriterier för då en invariant mängd är en delmängd av en annan invariant mängd.

Bland resultaten i §5 återfinns (se sats 5.6) ett tillräckligt och nödvändigt kriterium för när en självliknande mängd under symmetriantagandet är sammanhängande. Sats 5.3 presenterar ett liknande kriterium i ett mer generellt sammanhang. Huvudresultatet i detta avsnitt (och i hela rapporten) består i ett existensbevis av en 'gränsv funktion' (detta preciseras i §5.2) som ger en precis koppling mellan parametervärden hos similituderna (se §4) och sammanhängande självliknande mängder.

Denna gränsv funktion gör det naturligt att införa det koncept vi kallar *överlapp*. I avsnitt §6 visas monotonitet hos detta överlapp och under en förmodan om kontinuitet karakteriseras 'gränsmängdens' geometri (se §6 för definitioner). Vidare visas existensen av en delmängd

av den undersökta klassen av invarianta mängder som uppfyller det välkända separationskriteriet *öppna mängdkriteriet* (eng. *Open Set Condition* eller OSC, se [M],[F],[H],[MR]). Väsentligen är stora mängder teori känd för självliknande mängder som uppfyller OSC, men det är ofta en svår uppgift att finna exempel på sammanhängande mängder som satisfierar detta kriterium.

I §7 tillämpas teori, känd för mängder som uppfyller OSC, med syfte att ge en teoretisk övre- och undre begränsning av 'gränsfunktionen'. Dessutom presenteras en datorsimulerad approximation av denna gränsfunktion.

Slutligen presenterar vi en sammanfattning av- och diskussion kring våra resultat, samt en utblick inkluderande intressanta frågor för framtida studier.

En kortfattad notationsdel (utan definitioner) tänkt att tjäna till att underlätta läsningen återfinns på sida 3.

2 Notation och grundläggande begrepp

Detta blad sammanfattar notation och grundläggande begrepp centrala för förståelsen av denna rapport. Notera att precisa definitioner och lokala variationer i notation specificeras i respektive avsnitt.

Mängder: \mathbb{N} betecknar mängden av *strikt positiva* heltal, \mathbb{Z} mängden av alla heltal, \mathbb{Q} mängden av rationella tal, \mathbb{R} betecknar mängden av reella tal och \mathbb{R}_+ är mängden av *icke-negativa* reella tal.

Om X är en mängd så betecknar $X^n = X \times X \times \dots \times X$, med n gånger Cartesisk produkt. Speciellt kommer \mathbb{R}^2 ibland betecknas med *planet*.

Topologi: Låt A och B vara godtyckliga mängder.

\bar{A} betecknar det (topologiska) slutna höljet av A .

Med $\text{Int}(A)$ menar vi det inre av A .

Med ∂A menas randen av A .

Med $A \subset B$ avses att A är en (trivial eller icke-trivial) delmängd till B .

Metrik och dimension: Vi definierar $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ som den metrik för vilken $d(x, y) = \|x - y\|$, där $\|\cdot\|$ är den Euklidiska normen i \mathbb{R}^n (absolutbelopp då $n = 1$).

$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ representerar det minsta avståndet mellan mängderna A och B .

$d_H(A, B) = \max\{d(x, B), d(A, y) : x \in A, y \in B\}$ betecknar *Hausdorffavståndet* mellan de kompakta mängderna A och B .

$\dim_H(A)$ är *Hausdorffdimensionen* av mängden A .

$\text{diam}(A) = \max_{x, y \in A} d(x, y)$ är *diametern* av mängden A .

Similituder: Avbildningar $S_i : X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, n$ betecknar similituder på det metriska rummet X (i denna rapport oftast \mathbb{R}^2).

För en godtycklig mängd $A \subset X$ definieras avbildningen $\tilde{S}(A) = \cup_i^n S_i(A)$.

Similituder i \mathbb{R}^2 som består utav en sammandragning $r \in]0, 1[$ och en rotation θ kring en punkt p bestäms utav trippeln $\{p, r, \theta\}$. I detta sammanhang kommer r kallas *kontraktionskonstant*, θ kallas *rotationsvinkel* och p kallas *rotationscentrum*. Då vi studerar k sådana similituder betecknas mängden av kontraktionskonstanter med $R = \{r_1, \dots, r_k\}$, mängden av rotationsvinklar med $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_l\}$ och mängden av rotationscentrum med $P = \{p_1, \dots, p_k\}$. Om f är en avbildning skriver vi $f^N = f \circ f \circ \dots \circ f$, med N gånger komposition.

Invarianta mängder: Enligt sats 3.4 existerar en entydig kompakt mängd K som uppfyller $\tilde{S}(K) = K$. Denna mängd K kommer kallas *invariant* med avseende på \tilde{S} .

Från fixpunktsteori följer för en godtycklig kompakt mängd E att $\tilde{S}^N(E) \rightarrow K$ då $N \rightarrow +\infty$ i Hausdorffmetriken. Denna observation kan användas för att konstruera den invarianta mängden. I detta sammanhang refererar vi till E som *startmängd* och säger att mängden $\tilde{S}^N(E)$ är *generation* N av startmängden E .

3 Bakgrund kring similituder och självliknande mängder

Detta första avsnitt syftar till att presentera den teoribakgrund som är nödvändig för att förstå de fortsatta delarna av rapporten. Bland annat introduceras och definieras begreppen *similitud* och *självliknande mängd*. Vid sidan av grundläggande definitioner skisseras ett bevis av existens och entydighet av självliknande mängder genererade av en uppsättning similituder, se [H],[M]. Bevis av redan kända resultat utelämnas om det inte finns skäl till upprepning.

Vi påminner om att en kortfattad förteckning över notationer och konventioner återfinns på sida 3.

Definition. Ett *metriskt rum* (X, d_X) är en mängd X med tillhörande *metrik* $d_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ vilken uppfyller

1. $d_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d_X(x, y) = d_X(y, x)$
3. $d_X(x, z) + d_X(y, z) \geq d_X(x, y)$

för alla $x, y, z \in X$.

Exempel på metriska rum är $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ och $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Här betecknar $|\cdot|$ absolutbeloppet i \mathbb{R} och $\|\cdot\|$ betecknar den Euklidiska normen i \mathbb{R}^n .

Definition. Låt (X, d_X) vara ett metriskt rum. En *similitud* är en avbildning $S : (X, d_X) \rightarrow (X, d_X)$ sådan att det existerar en konstant $r \in]0, 1[$ för vilken:

$$d_X(S(x), S(y)) = r d_X(x, y)$$

gäller för varje $x, y \in X$. Vi kommer i denna rapport fortsättningsvis referera till r som *kontraktionskonstant*.

Anmärkning. Det följer direkt från definitionen att varje similitud är att betrakta som en kontinuerlig avbildning $S : (X, d_X) \rightarrow (X, d_X)$. Denna observation används mycket frekvent i samtliga delar av rapporten.

Notera att similituder intuitivt avbildar en mängd A på en omskalad mängd $S(A)$ likformig med den ursprungliga mängden. Vad som menas med 'likformighet' är klart i fallet $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ vilket är det metriska rum som behandlas i rapporten. Redan i inledningsavsnittet nämndes att similituder spelar rollen som *genererande avbildningar* av självliknande mängder, vilket gäller i följande mening.

Definition. En mängd $K \subset \mathbb{R}^n$ kallas *invariant* med avseende på similituderna S_1, S_2, \dots, S_k om den kan skrivas som:

$$K = \bigcup_{i=1}^k S_i(K) =_{\text{def}} \tilde{S}(K)$$

I fortsättningen ska vi mycket ofta använda notationen $\tilde{S}(A) = \bigcup_{i=1}^k S_i(A)$. En mängd kallas *självliknande* om det existerar en uppsättning similituder S_1, \dots, S_k med avseende på vilken mängden är invariant.

Anmärkning: Observera att termerna *självliknande*- och *invariant* mängd används synonymt i denna rapport. Det är värt att poängtera att det förekommer alternativa definitioner utav begreppet *självliknande mängd* som skiljer sig något från denna (se exempelvis [M]). Dessa kommer dock inte tillämpas i denna rapport.

Nedan ska vi bevisa en entydighetssats (se [M], [F], [H]) för invarianta mängder i \mathbb{R}^n genererade av en (ändlig) uppsättning similituder. För att göra detta betraktar vi mängden \mathcal{C} av icke-tomma kompakta delmängder av \mathbb{R}^n , varpå vi definierar begreppen *Hausdorffmetrik*, *kontraktion* och *fullständighet* samt härleder några enkla egenskaper hos dessa begrepp. Detta presenteras i lemma 3.1, lemma 3.2 och korollarium 3.3.

Definition. Låt \mathcal{C} vara mängden av icke-tomma kompakta delmängder av \mathbb{R}^n . Vi inför då den så kallade *Hausdorffmetriken* d_H för $X, Y \in \mathcal{C}$ enligt

$$d_H(X, Y) = \max\{d(x, Y), d(y, X) : x \in X, y \in Y\}$$

där $d(x, Y) = \inf\{d(x, y) : y \in Y\}$ och $d(x, y)$ betecknar den Euklidiska normen $\|\cdot\|$ i \mathbb{R}^n .

Det faktum att Hausdorffmetriken faktiskt är en metrik följer från att det för icke-negativa reella tal a, b, c, d gäller att $\max(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$, $\max(a, b) = \max(b, a)$ (symmetri) och slutligen $\max(a, b) + \max(c, d) \geq \max(a+d, b+c)$. Jämför med definitionen av metrik på sida 4.

Definition. Ett metriskt rum kallas *fullständigt* om alla Cauchyföljder i rummet konvergerar.

Vi påminner om att en följd $\{a_n\}$ i ett metriskt rum (X, d_X) sägs vara en *Cauchyföljd* om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $N > 0$ sådant att $m, n \geq N$ medför att $d_X(a_m, a_n) < \epsilon$. Med andra ord ligger elementen i följderna godtyckligt nära varandra då n är tillräckligt stort.

Begreppet fullständighet är centralt i beviset av existens och entydighet av invarianta mängder genererade utav ett ändligt antal similituder.

Lemma 3.1. *Mängden \mathcal{C} av icke-tomma kompakta delmängder av \mathbb{R}^n är ett fullständigt rum med avseende på Hausdorffmetriken.*

Bevis. Beviset av detta lemma utelämnas. Den intresserade läsaren hänvisas till exempelvis [MR]. □

Ytterliggare ett begrepp som behövs för att visa existens och entydighet hos den invarianta mängden är *kontraktion*.

Definition. En *kontraktion* är en avbildning $f : X \mapsto X$ sådan att det existerar ett $r \in]0, 1[$ för vilket:

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$$

Notera skillnaden mellan denna definition och definitionen av similitud.

Även följande lemma behövs för att existensen och entydigheten av K ska följa utav ett känt fixpunktsteorem (se [DM]). Beviset av lemma 3.2 är taget ur [F].

Lemma 3.2. *Avbildningen $\tilde{S} : X \mapsto \bigcup_{i=1}^k S_i(X)$ är en kontraktion på mängden \mathcal{C} av icke-tomma kompakta delmängder av \mathbb{R}^n .*

Bevis. Tag mängder $A, B \in \mathcal{C}$. Per definition av Hausdorffmetrik gäller

$$\begin{aligned} d_H(\tilde{S}(A), \tilde{S}(B)) &= d_H(\bigcup_{i=1}^k S_i(A), \bigcup_{i=1}^k S_i(B)) \leq \\ &\leq \max_{i=1, \dots, k} d_H(S_i(A), S_i(B)) \leq (\max_{i=1, \dots, k} r_i) d_H(A, B) \end{aligned}$$

Väljer vi nu kontraktionskonstant $c = \max_{i=1, \dots, k} r_i$ är vi klara. □

Korollarium 3.3. *Avbildningen \tilde{S} är kontinuerlig på det metriska rummet (\mathcal{C}, d_H) .*

Bevis. Tag ett $\epsilon > 0$. Enligt ovanstående lemma får vi att $\delta = \epsilon/c$ uppfyller den klassiska $\epsilon\delta$ -definitionen av kontinuitet. Då $\epsilon > 0$ var godtyckligt valt är \tilde{S} kontinuerlig. \square

Vi är slutligen redo att skissera ett bevis av existens och entydighet hos mängden K . Se [M],[H].

Sats 3.4. *Låt S_1, S_2, \dots, S_k vara similituder på \mathbb{R}^n . Då existerar en entydig kompakt mängd K som är invariant med avseende på dessa similituder.*

Bevis. Betrakta avbildningen $\tilde{S} : X \mapsto \bigcup_{i=1}^k S_i(X)$. Enligt Lemma 3.2 är \tilde{S} en kontraktion på mängden \mathcal{C} av icke-tomma kompakta delmängder av \mathbb{R}^n . En fixpunktssats för kontraktionsavbildningar (se [DM]) medför existens av en entydigt bestämd fixpunkt till \tilde{S} . Denna fixpunkt är mängden K ty en fixpunkt till \tilde{S} definieras enligt $K = \tilde{S}(K)$. Det betyder precis att K är invariant med avseende på similituderna S_1, S_2, \dots, S_k . \square

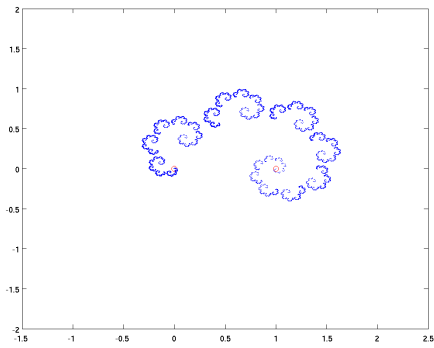
Notera att en central idé i beviset av fixpunktssatsen dessutom ger en ledtråd till hur självliknande mängder konstrueras ur en uppsättning similituder. Detta följer av det kända förhållandet i fixpunktsteori (se [DM]) att varje punkt i ett fullständigt rum konvergerar mot fixpunkten i fråga. I detta sammanhang arbetar vi i rummet (\mathcal{C}, d_H) och därför med kompakta 'startmängder' istället för 'startpunkter'. Med andra ord gäller $\tilde{S}^N(E) \rightarrow K$ i Hausdorffmetrik då $N \rightarrow +\infty$ för en godtycklig mängd $E \subset \mathcal{C}$. Vi kommer i fortsättningen att referera till en sådan kompakt mängd E som *startmängd*. Notera även att vi särskilt kan välja denna startmängd till $E = K$ (det vill säga till den invarianta mängden). För k olika similituder gäller då

$$K = \tilde{S}^N(K) = \bigcup_{j_1=1}^k \dots \bigcup_{j_N=1}^k (S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_N})(K).$$

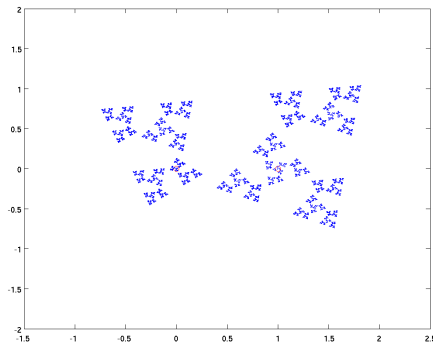
Med andra ord är K intuitivt en union av godtyckligt små mängder likformiga med K själv (se [M]). Detta är vad vi förväntar oss av ett *självliknande* objekt.

Vi har således presenterat några grundläggande definitioner såsom *similitud* och *självliknande/invariant* mängd och skisserat hur de senare med en godtycklig startmängd iterativt kan konstrueras ur en given uppsättning similituder. Vi avslutar detta avsnitt med några illustrationer av självliknande mängder approximativt genererade ur startmängder på det vis som beskrivits ovan. Se figur 1. Notera särskilt hur varje del av den invarianta mängden tycks vara 'likformig' med mängden själv.

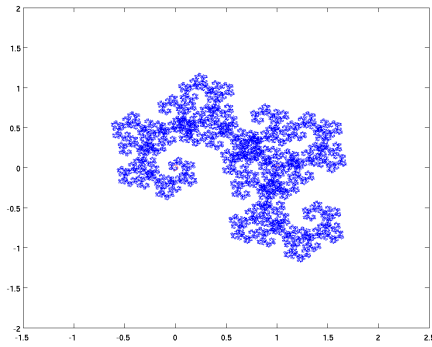
Anmärkning: Samtliga datorsimulerade bilder i denna rapport är konstruerade i 15 iterationer utav den kompakta startmängden $E = \{(x, 0) : x \in [0, 1]\}$. Figurerna visar således mängder $\tilde{S}^{15}(E)$ för olika avbildningar \tilde{S} . För MATLAB-kod, se appendix.



(a) $\Theta = \{5\pi/12, -\pi/4\}$, $R = \{0.4, 0.8\}$



(b) $\Theta = \{7\pi/12, -7\pi/12\}$, $R = \{0.5, 0.7\}$



(c) $\Theta = \{1\pi/3, 2\pi/3\}$, $R = \{0.7, 0.7\}$

Figur 1: Tre exempel på invarianta mängder. Vad som menas med R och Θ preciseras i §4.

4 Grundläggande observationer

Vi kommer nu med grund i Hutchinsons teori (se §3) inleda studiet av kompakta självliknande mängder *i planet* med en diskussion kring den invarianta mängdens struktur (i planet) tillsammans med grundläggande observationer i en relativt generell kontext. Efterföljande delavschnitt fastslår ett antal 'delmängdsresultat' vilka ofta gör det möjligt att överföra egenskaper som visats för en specifik invariant mängd på en klass av andra invarianta mängder relaterade till denna på det sätt som fastslås i §4.2.

Vi börjar med att visa på en karakterisering av similituder i planet. Vi påminner om definitionen utav kontraktionskonstant relaterad till en similitud (se §3).

Sats 4.1. *Varje similitud $S : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ kan skrivas på formen $S = rf + z$, där $z \in \mathbb{R}^2$ och f är en rotation eller en rotation sammansatt med en reflektion, se [M].*

Närmare bestämt kan en similitud beskrivas som en isometri¹ multiplicerat med en konstant $r \in]0, 1[$. Det betyder löst talat att en similitud avbildar en mängd på en nedskalad (krympt) mängd likformig med den ursprungliga.

Representation av similituder och avgränsningar: Vi begränsar oss i fortsättningen till undersökningar av similituder $S_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, k$ där varje similitud är en kombination av rotation och dilation kring en given punkt i planet (och rotationscentrum är olika för olika similituder). Med andra ord ignorerar vi similituder som även verkar genom reflektion och translation. Detta val motiveras i diskussionsavsnittet (§8).

Om S_i är en similitud definierad enligt ovan bestäms denna av en dilation r_i och en rotation θ_i kring punkten p_i . Vinklarna θ_i bestäms enligt ett lokalt koordinatsystem med avseende på respektive rotationscentrum p_i , där θ_i är vänstervriden med avseende på positiva riktningen för x -axeln för det ursprungliga koordinatsystemet. Mot denna bakgrund är det naturligt att betrakta S_i som en *indextrippel* $\{p_i, r_i, \theta_i\}$.

Notation: I detta sammanhang kallas punkterna p_i *rotationscentrum*, konstanterna r_i för *kontraktionskonstanter* och vinklarna θ_i för *vinkelparametrar* eller *rotationsvinklar*. Vi betecknar mängden utav rotationscentrum med $P = \{p_1, \dots, p_k\}$, mängden av kontraktionskonstanter med $R = \{r_1, \dots, r_k\}$ och mängden av rotationsvinklar med $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_k\}$.

Notera särskilt följande konventioner:

- Enligt sats 3.4 kan vi till en uppsättning similituder S_1, \dots, S_k identifiera den entydigt bestämda kompakta självliknande mängden $K = \tilde{S}(K)$. Eftersom vi till en uppsättning similituder associerar en uppsättning indextriplar $\{p_i, r_i, \theta_i\}$ och en invariant mängd så gäller att vi genom att studera ett av dessa objekt implicit även studerar de andra två. Vi kommer fortsättningsvis låta detta vara underförstått.
- Då det förekommer variationer i indextriplarna kommer endast de parameterar som skiljer indikeras. Exempelvis kan vi skriva S_{r_s} respektive S_{r_l} när vi avser två olika similituder som representerar dilation och rotation kring samma rotationscentrum och med samma vinkelparametrar men med *olika* kontraktionskonstanter r_s och r_l .

4.1 Den invarianta mängdens konstruktion

Vi inleder studiet av självliknande mängder i planet med några grundläggande observationer vars syfte är att underbygga förståelsen för de invarianta mängdernas geometri och konstruktion.

Vi påminner om definitionen av avbildningen $\tilde{S} = \cup_i^k S_i$, där S_1, \dots, S_k är en uppsättning similituder. Med denna notation visar vi nu att den invarianta mängden K har egenskapen att en punkt i K aldrig kan lämna mängden under verkan av \tilde{S} .

¹En isometri är en avbildning som bevarar avstånd, det vill säga $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. I \mathbb{R}^2 är $d(x, y)$ det Euklidiska avståndet, det vill säga $d(x, y) = \|x - y\|$ och $d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|$.

Lemma 4.2. Om $x \in K$ så gäller $\tilde{S}^N(x) \in K$ för varje $N \in \mathbb{N}$.

Bevis. Det följer direkt från definitionen av K att $\tilde{S}(K) = K$, vilket genom upprepad applikation av \tilde{S} i båda leden uppenbart medför att $\tilde{S}^N(K) = K$ för varje $N \in \mathbb{N}$. Detta innebär givetvis att $x \in K \Rightarrow \tilde{S}^N(x) \in K$ och beviset är klart. \square

Följande lemma är absolut centralt för stora delar av denna rapport. Det fastställer den allmänna egenskapen att samtliga rotationscentrum tillhör den invarianta mängden (det vill säga att $P \subset K$).

Lemma 4.3. För en invariant mängd K genererad av similituder S_1, \dots, S_k med tillhörande rotationscentrum i P så gäller att $P \subset K$.

Bevis. För godtyckligt $x \in K$ gäller enligt lemma 4.2 att $K \ni S_i^N(x) \rightarrow p_i$ för alla $i \in \{1, \dots, k\}$ då $N \rightarrow \infty$. Eftersom K är kompakt följer per definition att gränsvärdet $p_i \in K$ och beviset är klart. \square

Om vi nu kombinerar lemma 4.2 med lemma 4.3 så kan vi notera att om P används som startmängd (P är kompakt) så har P den positiva egenskapen att $\tilde{S}^N(P) \subset K$ för alla $N \in \mathbb{N}$ samtidigt som $\tilde{S}^N(P) \rightarrow K$ då $N \rightarrow \infty$. Detta är bland annat praktiskt vid datorsimulering av de invarianta mängderna, där vi naturligtvis endast kan applicera \tilde{S} på en startmängd ett ändligt antal gånger.

Vi härleder nu ett resultat som behandlar komposition av similituder.

Notation: Vid komposition av similituder kan följande notation förekomma:

$$S_{j_1, \dots, j_n} = S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_n}, \quad j_n \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Ovanstående indexvektor betecknas ofta med $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$. För att uttrycka egenskapen (1) kan vi ibland komma att säga att $\mathbf{j} \in \{1, \dots, k\}^n$.

Följande resultat har som främsta syfte att det ibland underlättar processen att utifrån givna indextripplar identifiera den invarianta mängden explicit. Speciellt används detta i exempel 4.1.1 (sida 10).

Proposition 1. Om det existerar en indexvektor $\mathbf{j} \in \{1, 2, \dots, k\}^l$, $l \in \mathbb{N}$ sådan att $S_{\mathbf{j}}(x) = x$ så gäller $x \in K$.

Bevis. Tag ett $x \in \mathbb{R}^2$ och en indexvektor $\mathbf{j} \in \{1, 2, \dots, k\}^l$ vilka uppfyller $S_{\mathbf{j}}(x) = x$. Då gäller uppenbart även $S_{\mathbf{j}}^N(x) = x$ för varje $N \in \mathbb{N}$. Eftersom $\tilde{S}^n(x) \rightarrow K$ i Hausdorffmetrik då $n \rightarrow +\infty$ (enpunktsmängden x är kompakt) gäller enligt sats 3.4 att:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 : n \geq N \Rightarrow d_H(\tilde{S}^n(x), K) < \epsilon. \quad (2)$$

Vi kan nu välja $n = Nl$ där l är längden av indexvektorn. Det gäller nu alltså att $n \geq N$ och $x \in \tilde{S}^n(x)$ eftersom $x = S_{\mathbf{j}}^N(x) \in \tilde{S}^n(x)$ då detta n är en multipel av l . Därmed implicerar $d_H(\tilde{S}^n(x), K) < \epsilon$ även att $d(x, K) < \epsilon$. Eftersom detta ska vara sant för varje $\epsilon > 0$ måste det gälla att $d(x, K) = 0$. Det betyder precis att $x \in K$. \square

Det kan vara värt att poängtera att dessa första observationer är i giltiga i större generalitet än bara i \mathbb{R}^2 . Vi illustrerar nu ovanstående resultats användbarhet genom ett första enkelt exempel.

4.1.1 Ett första exempel

I detta exempel betraktar vi exakt två similituder S_1, S_2 vilka representerar rotation och dilation kring två skilda punkter i planet. Mer precist är mängden av rotationscentrum $P = \{(0, 0), (1, 0)\}$, mängden av kontraktionskonstanter $R = \{r_1, r_2\}$ och mängden av rotationsvinklar $\Theta = \{\pi, \pi\}$. Fallet $\Theta = \{\pi, -\pi\}$ är naturligtvis identiskt. Vi kan då för r_1 och r_2 'tillräckligt stora' (vi ska snart se vad som avses med detta) karakterisera den invarianta mängden som linjesegmentet AB med ändpunkter

$$A = \left(-\frac{r_1(1+r_2)}{1-r_1r_2}, 0 \right), \quad B = \left(\frac{1+r_2}{1-r_1r_2}, 0 \right) \quad (3)$$

Med 'tillräckligt stort' menar vi att r_1 och r_2 bör väljas sådant att $S_1(AB) \cap S_2(AB) \neq \emptyset$ (så att AB är ett sammanhängande intervall). Om vi låter A_1B_1 vara linjesegmentet $S_1(AB)$ och A_2B_2 vara linjesegmentet $S_2(AB)$ så inses att dessa linjesegment överlappar varandra om och endast om x -koordinaten för B_1 är större än eller lika med x -koordinaten för A_2 . Eftersom

$$B_1 = \left(\frac{r_1^2(1+r_2)}{1-r_1r_2}, 0 \right), \quad A_2 = \left(1-r_2 - \frac{r_2(1+r_2)}{1-r_1r_2}, 0 \right)$$

ser vi att $S_1(AB)$ och $S_2(AB)$ överlappar varandra om och endast om

$$\frac{r_1^2(1+r_2)}{1-r_1r_2} \geq 1-r_2 - \frac{r_2(1+r_2)}{1-r_1r_2},$$

eller ekvivalent

$$r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2(1+r_1+r_2) \geq 1. \quad (4)$$

Detta är en alternativ formulering av vad som menas med 'tillräckligt stort' eftersom det kan ses som ett kriterium för när denna invarianta mängd är sammanhängande (som funktion av r_1 och r_2). Notera även att eftersom den invarianta mängden är entydigt bestämd (se sats 3.4) och den mängd som beskrivits ovan är invariant så måste det vara den sökta mängden. Se figur 2 för en illustration.

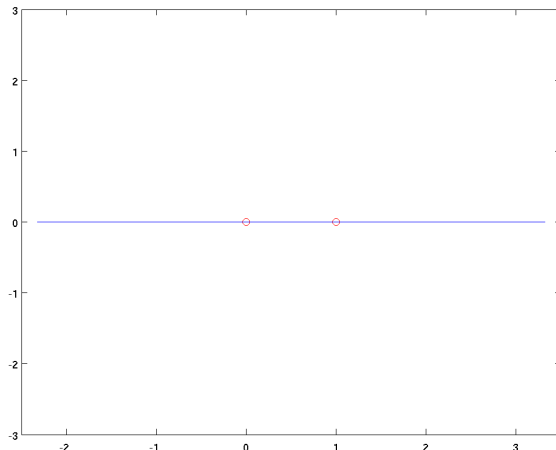
Det är informativt med en kortare diskussion kring konstruktionen av exemplet ovan:

Vi noterar först att lemma 4.2 och lemma 4.3 visar att vi kan finna den invarianta mängden K genom att undersöka bilden av p_1 och p_2 under kompositioner av similituderna S_1 och S_2 . Eftersom $\Theta = \{\pi, \pi\}$ är det omedelbart klart att K är en delmängd av x -axeln. Eftersom K är kompakt i \mathbb{R}^2 och därmed sluten och begränsad existerar det punkter $A, B \in K$ för vilka x -koordinaten är minimal respektive maximal. På grund av den enkla naturen hos S_1 och S_2 inses att $S_2(A) = B$ och $S_1(B) = A$. Därmed finner vi att $A = S_1(S_2(A))$. Om vi låter $A = (x, y)$ och definierar $a = |x|$ så får vi ekvationen

$$a = ((1+a)r_2 + 1)r_1,$$

ur vilket det följer att A ges enligt (3) ovan. Ändpunkten B ges på motsvarande vis (av symmetriskäl).

Observera även att ett liknande, men enklare, 'endimensionellt' fall ges då $\Theta = \{0, 0\}$ och $R = \{r_1, r_2\}$. Ett kriterium liknande (4) är då enkelt att finna: Den invarianta mängden K är sammanhängande om och endast om $r_1 + r_2 \geq 1$. Notera dock att sådana explicita kriterium inte alltid är lika lätta (om ens möjliga) att finna.



Figur 2: Ett grundläggande exempel på en invariant mängd med $R = \{0.7, 0.7\}$ och $\Theta = \{\pi, \pi\}$.

4.2 Delmängdsresultat för similituder i planet

I ovanstående delavsnitt såg vi, vid sidan av viktiga grundläggande observationer, att det är möjligt att bestämma enkla invarianta mängder explicit. Vi ska nu presentera ett antal situationer då en invariant mängd K är en delmängd av en annan invariant mängd. Speciellt ska vi undersöka hur dessa 'delmängdsrelationer' beror av R och eventuellt även Θ . Målet med sådana resultat är att kunna överföra vissa egenskaper från en invariant mängd till en annan.

Vi påminner om att P betecknar mängden av rotationscentrum.

Notation: Vi definierar en mängd $\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{S_{\mathbf{j}}(P) : \mathbf{j} \in \{1, \dots, k\}^n\}$ (då vi har k similituder). Detta är då bildmängden av P under alla kombinationer av (ett godtyckligt antal) kompositioner av similituder. Denna definition visar sig användbar i flera bevis nedan. Observera speciellt att $K = \overline{\mathcal{W}}$.

Lemma 4.4. *Låt K vara den invarianta mängd som är entydigt bestämd av \tilde{S} med tillhörande $P = \{p_1, p_2\}$, $R = \{r_1, r_2\}$ och $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$. Låt K' vara den invarianta mängd som entydigt bestäms utav $K' = \tilde{S}'(K) = S'_1(K) \cup S'_2(K)$ med tillhörande $P' = \{p_1, p_2\}$, $R = \{r_1^{1/n}, r_2^{1/n}\}$ och $\Theta = \{\theta_1/n, \theta_2/n\}$ där $n \in \mathbb{N}$. Då gäller att $K \subset K'$.*

Notera att \mathcal{W}' i detta sammanhang är den mängd som motsvarar \mathcal{W} , med skillnaden att den är konstruerad utifrån avbildningarna S'_1 och S'_2 istället för avbildningarna S_1 och S_2 .

Bevis. Betrakta en godtycklig punkt $x \in \mathcal{W}$. För något $k \in \mathbb{N}$ och för någon indexvektor $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k)$ gäller då att

$$x = S_{j_1} \circ \dots \circ S_{j_k}(p_l), \quad l = 1 \text{ eller } 2$$

Det gäller då vidare att

$$x = S_{j_1}^{\prime N} \circ \dots \circ S_{j_k}^{\prime N}(p_l)$$

där $S_{j_m}^{\prime N} = S'_{j_m} \circ \dots \circ S'_{j_m}$ med N gånger komposition. Ett godtyckligt valt x i \mathcal{W} ligger alltså även i \mathcal{W}' . Därmed måste $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$. Eftersom K och K' kan skrivas som $\overline{\mathcal{W}}$ respektive $\overline{\mathcal{W}'}$ gäller även att $K \subset K'$, vilket skulle visas. □

Notera exempelvis att diametern av K' är nedåt begränsad av diametern av K , och motsvarande att diametern K är uppåt begränsad av diametern av K' . Med hjälp av ovanstående

sats kan vi således finna kedjor av invarianta mängder vilka är delmängder av varandra. Om diametern är känd hos en av dessa mängder tjänar denna diameter som övre- respektive undre begränsning av diametern för de övriga mängderna.

Notera att lemma 4.4 stämmer också för k similituder. Det kan visas analogt.

Ett andra delmängdsresultat presenteras nu i fallet då vi har k similituder i planet. Detta resultat involverar en typ av konvexitet som kan ses som en generalisering av begrepp *stjärnkonvex*.

Definition. En mängd A kallas *P*-konvex* om för varje $x \in A$ och varje $p \in P$ gäller att *linjesegmenten* $xp = \{y : d(x, p) = d(x, y) + d(y, p)\}$ tillhör A .

Notera att varje konvex mängd som innehåller samtliga rotationscentrum i P är P*-konvex. Med hjälp av denna definition får vi följande resultat då alla similituder har samma kontraktionskonstanter, det vill säga då $R = \{r, \dots, r\}$:

Lemma 4.5. *Antag att mängden A är P*-konvex. För k similituder vilka representerar rotation och dilation kring olika rotationscentrum i planet med samma rotationsvinkel så gäller att $\tilde{S}_{r_s}(A) \subset \tilde{S}_{r_l}(A)$ då $r_s < r_l$.*

Bevis. Notera att $P \subset A$. Mängden A har egenskapen att för varje $x \in A$ så ligger linjesegmenten $xp_i = \{y : d(x, p_i) = d(x, y) + d(y, p_i)\}$ i A för $i = 1, \dots, k$. Då kontraktionskonstanterna $r_s < r_l$ gäller för $i = 1, \dots, k$ och varje sådant linjesegment att $S_{r_s, i}(xp_i) \subset S_{r_l, i}(xp_i)$. Dessutom har vi per definition av P*-konvexa mängder att

$$A = \bigcup_{x \in A} xp_i.$$

Därmed gäller på grund av kontinuiteten hos \tilde{S} att:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{r_s}(A) &= \bigcup_{i=1}^k S_{r_s, i}(\cup_{x \in A} xp_i) = \bigcup_{x \in A} \left(\bigcup_{i=1}^k S_{r_s, i}(xp_i) \right) \subset \\ &\bigcup_{x \in A} \left(\bigcup_{i=1}^k S_{r_l, i}(xp_i) \right) = \bigcup_{i=1}^k S_{r_l, i}(\cup_{x \in A} xp_i) = \tilde{S}_{r_l}(A) \end{aligned}$$

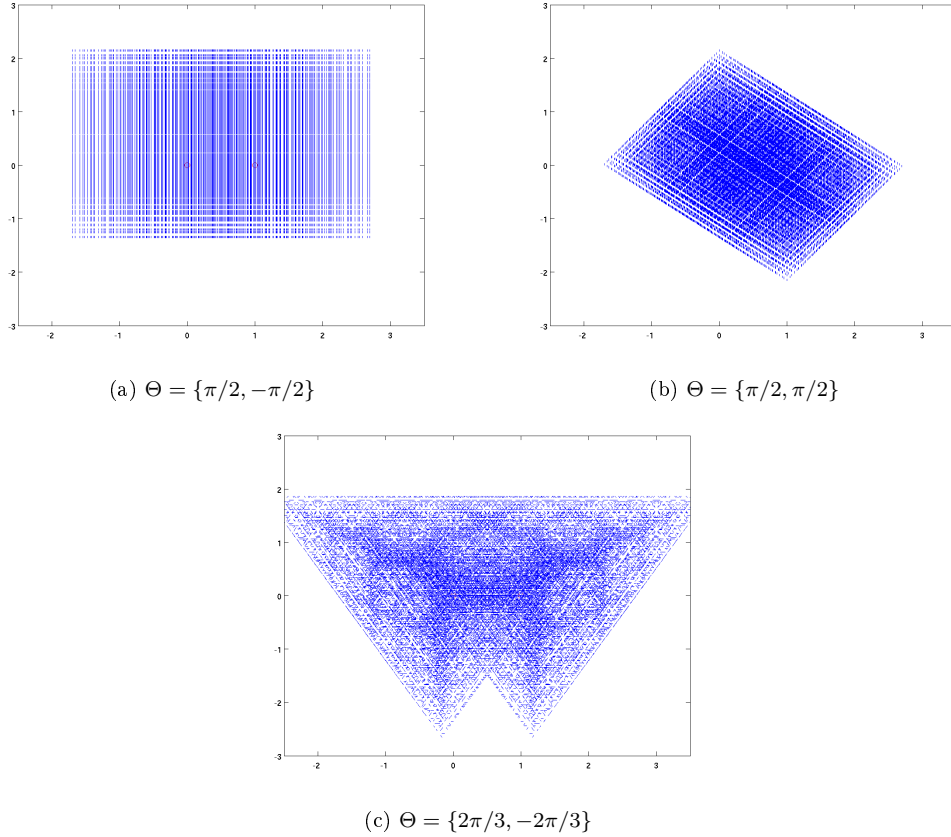
vilket skulle visas. □

Följande sats ger ett tillräckligt kriterium för när invarianta mängder med olika kontraktionskonstanter $r_s \neq r_l$ är delmängder av varandra.

Sats 4.6. *För $r_s < r_l$ gäller att $K_{r_s} \subset K_{r_l}$ om K_{r_l} är P*-konvex.*

Bevis. Antag $r_s < r_l$ och att K_{r_l} är P*-konvex. Vi noterar att lemma 4.5 ger $\tilde{S}_{r_s}(K_{r_l}) \subset \tilde{S}_{r_l}(K_{r_l}) = K_{r_l}$ vilket ger $\tilde{S}_{r_s}^N(K_{r_l}) \subset K_{r_l}$ för varje $N \in \mathbb{N}$. Detta tillsammans med sats 3.4 ger $K_{r_l} \supset \tilde{S}_{r_s}^N(K_{r_l}) \rightarrow K_{r_s}$ då $N \rightarrow +\infty$. Med andra ord följer $K_{r_s} \subset K_{r_l}$. □

En förutsättning för att satsen ska vara intressant är att det faktiskt existerar invarianta P*-konvexa mängder (skilda från de 'endimensionella' exempel vi tidigare sett). Se figur 3 för exempel.



Figur 3: Figur (a) visar en P^* -konvex mängd. Mängderna i (b) och (c) förmodas vara P^* -konvexa. I samtliga bilder är $R = \{0.8, 0.8\}$.

4.2.1 Ett exempel på en P^* -konvex invariant mängd

Låt $P = \{(0, 0), (1, 0)\}$, $\Theta = \{\pi/2, -\pi/2\}$ och $R = \{r, r\}$ där $r \geq 1/\sqrt{2}$. Den invarianta mängden K är den rektangel $ABCD$ som (med kartesiska koordinater) bestäms av hörnen

$$A = \left(-\frac{r^2}{1-r^2}, \frac{r}{1-r^2}\right), \quad B = \left(1 + \frac{r^2}{1-r^2}, \frac{r}{1-r^2}\right)$$

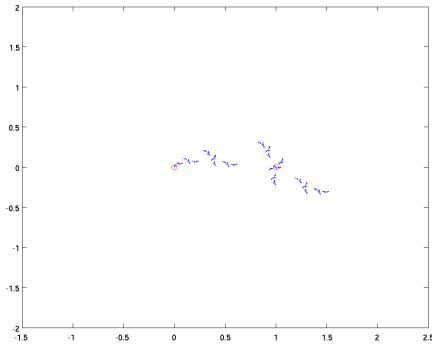
$$C = \left(-\frac{r^2}{1-r^2}, -\frac{r^3}{1-r^2}\right), \quad D = \left(1 + \frac{r^2}{1-r^2}, -\frac{r^3}{1-r^2}\right).$$

Denna rektangel avbildas under \tilde{S} på unionen av två mindre rektanglar $S_1(ABCD)$ och $S_2(ABCD)$. Det är inte svårt, men en aning skrymmande, att visa att ovanstående proportioner på rektangeln medför att $S_1(ABCD)$ och $S_2(ABCD)$ överlappar varandra på ett sådant vis att de tillsammans bildar den ursprungliga rektangeln $ABCD$. Notera särskilt att detta exempel inte gäller för varje $r \in]0, 1[$ men dock för (åtminstone) varje $r \in [1/\sqrt{2}, 1[$. Se figur 3a för en datorgenererad approximation av den invarianta mängden K med $R = \{0.8, 0.8\}$. I figur 3 presenteras även fler exempel på invarianta mängder vilka *förmodas* vara P^* -konvexa (men inte bestämts explicit som i exemplet ovan).

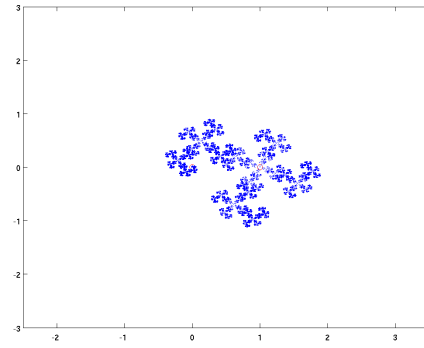
5 Separationsegenskaper

I detta avsnitt undersöks så kallade separationsegenskaper hos invarianta mängder med avseende på exakt två similituder S_1, S_2 som representerar rotation och dilation kring två skilda rotationscentrum $p_1 = (0, 0)$ och $p_2 = (1, 0)$ i planet. Notera att detta val av rotationscentrum (liksom tidigare) kan göras utan förlorad generalitet. Väsentligen behandlas (ur olika perspektiv) frågeställningen om hur det är möjligt att avgöra om en invariant mängd är sammanhängande eller ej - en fråga vars svar vid första anblick inte alls är uppenbart. Se figur 4 för en illustration av problematiken.

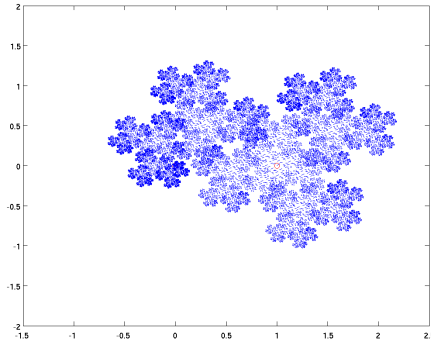
Mer precist låter vi i detta avsnitts första del rotationsvinklarna och kontraktionskonstanterna vara oberoende av varandra och visar att K är sammanhängande om och endast om $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$. Med hjälp av detta resultat visas vidare att varje invariant mängd K är antingen sammanhängande eller totalt icke-sammanhängande ('totally disconnected'). Avsnittets andra del syftar till att under symmetriantagandet $R = \{r, r\}$ och $\Theta = \{\theta, -\theta\}$ visa existens av en gräns $r(\theta)$ sådan att $K_{r,\theta}$ är sammanhängande om $r > r(\theta)$ och icke sammanhängande om $r < r(\theta)$. Det är ett av huvudresultaten i denna rapport.



(a) $\Theta = \{\pi/12, 10\pi/12\}$, $R = \{0.4, 0.6\}$



(b) $\Theta = \{5\pi/12, \pi/2\}$, $R = \{0.5, 0.8\}$



(c) $\Theta = \{\pi/3, -7\pi/12\}$, $R = \{0.6, 0.8\}$

Figur 4: Den invarianta mängden i figur (a) är troligtvis icke-sammanhängande och den invarianta mängden i figur (c) är troligtvis sammanhängande. Kan man med säkerhet avgöra om den invarianta mängden approximerad i figur (b) är sammanhängande eller ej?

Inledningsvis presenteras några definitioner och enklare resultat som möjliggör en precis formulering av satserna ovan. Vi påminner om definitionen av startmängd (se §3) vilken alltid antas kompakt.

Definition. Vi säger att en startmängd E *separerar i generation N* om $\tilde{S}^{N-1}(E)$ är sammanhängande och $\tilde{S}^N(E)$ är icke sammanhängande. Om det existerar ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att

mängden E separeras i generation N säger vi att E separeras.

Korollarium 5.1. Om startmängden E separerar i generation N så gäller att $S_1(\tilde{S}^{N-1}(E)) \cap S_2(\tilde{S}^{N-1}(E)) = \emptyset$.

Bevis. Eftersom $\tilde{S}^{N-1}(E)$ är sammanhängande så är $S_1(\tilde{S}^{N-1}(E))$ och $S_2(\tilde{S}^{N-1}(E))$ sammanhängande var för sig. Med ett icke-tomt snitt ovan skulle således $\tilde{S}^N(E)$ sammanhängande impliceras, vilket motsäger att E separeras i generation N . □

Det förefaller naturligt att om K är icke-sammanhängande och E är en sammanhängande startmängd så måste E separeras. I beviset av detta påstående använder vi oss av det minsta avståndet mellan två mängder, vilket definieras som följer:

Definition. Avståndet $d(A, B)$ mellan kompakta mängder A och B definieras som

$$d(A, B) = \min \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Notera att detta inte är en metrik. Observera även att $d(A, B) \leq d_H(A, B)$ (där d_H betecknar Hausdorffavståndet).

Sats 5.2. Om K är icke-sammanhängande så kommer varje sammanhängande startmängd E separeras.

Bevis. Antag att det existerar en sammanhängande startmängd E som inte separeras. Enligt sats 3.4 gäller att

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 : n \geq N \Rightarrow d_H(\tilde{S}^n(E), K) < \epsilon. \quad (5)$$

Eftersom E enligt antagande är kompakt, sammanhängande och inte separeras gäller att även $\tilde{S}^n(E)$ är kompakt och sammanhängande för varje $n \in \mathbb{N}$. Eftersom K är icke-sammanhängande så kan vi (på något vis) dela upp den i två disjunkta kompakta delar K_1 och K_2 . Eftersom dessa delar är kompakta så existerar ett $\xi > 0$ sådant att avståndet $d(K_1, K_2) = \xi$, ty avståndet mellan två disjunkta kompakta mängder är alltid strikt positivt. Om vi sätter $\epsilon = \xi/3$ i (5) så får vi ett $N = N(\epsilon)$ för vilket $d(x, K) < \epsilon$ för varje $x \in \tilde{S}^N(E)$. Definierar vi nu ett ' ϵ -hölje' kring K_j , $j = 1, 2$ enligt

$$K_{\epsilon, j} = \{x : d(x, y) < \epsilon, y \in K_j\}$$

så följer att $d(K_{\epsilon, 1}, K_{\epsilon, 2}) = \epsilon$. Då är $\tilde{S}^N(E)$ en delmängd av unionen av dessa ' ϵ -höljen' vilka är disjunkta. Notera även att $\tilde{S}^N(E)$ ligger i båda de disjunkta delarna, ty $d_H(\tilde{S}^N(E), K) < \epsilon$. Detta medför i sin tur att $\tilde{S}^N(E)$ är icke-sammanhängande, vilket motsäger antagandet om att E inte separeras. □

5.1 Separationsegenskaper hos invarianta mängder

Vi har nu tillräckliga redskap för att visa ett första separationskriterium som gäller oberoende av R och Θ .

Definition. Med *sammanhängande hölje* till en mängd A menar vi en sammanhängande kompakt mängd \mathcal{M} sådan att $\mathcal{M} \supset A$. Existensen av en sådan mängd är trivial. Den är lika uppenbart inte entydigt bestämd.

Sats 5.3. Den invarianta mängden K är sammanhängande om och endast om $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$.

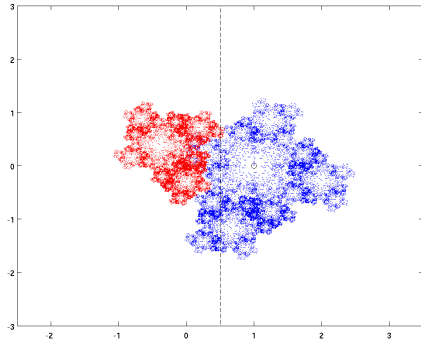
Bevis. För att visa att $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$ medför K sammanhängande, låt \mathcal{M}_i vara ett sammanhängande hölje till $S_i(K)$, $i = 1, 2$ och låt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. Eftersom $S_i(K) \subset \mathcal{M}_i$, $i = 1, 2$ så gäller $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq \emptyset$ och $K \subset \mathcal{M}$ enligt definitionen av \mathcal{M} . Detta ger att $\tilde{S}(K) = K \subset \tilde{S}(\mathcal{M})$ vilket implicerar $K \subset \tilde{S}^N(\mathcal{M})$.

Om vi nu antar att K är icke-sammanhängande så följer enligt lemma 5.2 att det existerar ett N sådant att $\tilde{S}^N(\mathcal{M})$ är icke-sammanhängande. Men eftersom $S_i(K) \subset S_i(\tilde{S}^N(\mathcal{M}))$, $i = 1, 2$ och $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$ så medförs att

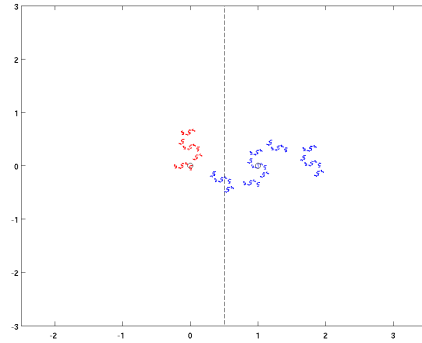
$$S_1(\tilde{S}^N(\mathcal{M})) \cap S_2(\tilde{S}^N(\mathcal{M})) \neq \emptyset, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Med \mathcal{M} sammanhängande, induktion samt (6) ges att $\tilde{S}^N(\mathcal{M})$ är sammanhängande för alla $N \in \mathbb{N}$. Detta motsäger sats 5.2. Alltså är K sammanhängande om $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$.

Om K istället från början antas vara sammanhängande så medförs $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$ trivialt, ty om vi omvänt antar att $S_1(K) \cap S_2(K) = \emptyset$ så existerar det (på grund av kompaktitet) ett $\epsilon > 0$ sådant att $d(S_1(K), S_2(K)) = \epsilon$. Detta innebär i sin tur att mängden inte kan vara sammanhängande och vi har en motsägelse. \square



(a) $\Theta = \{6\pi/8, 4\pi/8\}$, $R = \{0.55, 0.85\}$



(b) $\Theta = \{4\pi/8, -7\pi/8\}$, $R = \{0.35, 0.75\}$

Figur 5: En invariant mängd är sammanhängande om och endast om $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$. Det röda området approximerar $S_1(K)$ och det blå området approximerar $S_2(K)$. Den streckade vertikala linjen representerar symmetrilinjen.

Notera att ovanstående sats ger ett teoretiskt kriterium för när en invariant mängd är sammanhängande. Samtidigt är det inte uppenbart hur ett sådant kriterium kan användas i praktiken. Ett mer praktiskt användbart kriterium presenteras under ett symmetriantagande (det vill säga under skarpare avgränsningar än de nuvarande) i avsnitt 5.2.

Vi ska först observera en viktig karakterisering av självliknande mängders geometri beroende på om den invarianta mängden är sammanhängande eller icke-sammanhängande. Mer precist visar sats 5.4 nedan att det endast existerar två möjligheter: Den invarianta mängden K måste vara antingen sammanhängande eller totalt icke-sammanhängande.

Sats 5.4. *En invariant mängd K är antingen sammanhängande eller totalt icke-sammanhängande.*

Bevis. Antag först att K är icke-sammanhängande. Vi kan då skriva $K = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} K_i$ där varje K_i är sammanhängande och kompakt, $K_i \cap K_j = \emptyset$, $i \neq j$ och \mathcal{I} är en indexmängd (ty en disjunkt icke-sammanhängande mängd består utav minst två disjunkta delar). Vi visar först att det för alla index $i \in \mathcal{I}$ existerar ett $j \in \mathcal{I}$ sådant att

$$K_i = S_l(K_j), \quad l = 1 \text{ eller } 2. \quad (7)$$

Detta gäller ty om (7) antas falsk så får vi för ett godtyckligt $i \in \mathcal{I}$ två möjliga fall, nämligen:

1. $K_i \cap S_1(K) \neq \emptyset$ och $K_i \cap S_2(K) \neq \emptyset$.
2. $K_i = S_l(\hat{K})$, $l = 1$ eller 2 , där $\hat{K} = \bigcup_{j \in \mathcal{I}'} K_j$, $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$, är en enydigt bestämt delunion av K . Med andra ord är K_i bilden av mer än en annan av de disjunkta delmängderna av K .

Antag 1 sann. Då gäller att $K_i \cap S_1(K) \neq \emptyset$, $K_i \cap S_2(K) \neq \emptyset$, $K_i \subset S_1(K) \cup S_2(K)$ och eftersom K_i är sammanhängande så impliceras att $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$. Sats 5.3 medför då att K är sammanhängande vilket är en motsägelse.

Antag 2 sann. Då gäller $K_i = S_l(\hat{K})$, $l = 1$ eller 2 , vilket medför att $K_i = \bigcup_{j \in \mathcal{I}'} S_l(K_j)$ sådant att $S_l(K_j) \cap S_l(K_m) = \emptyset$ då $m \neq j$ och $m, j \in \mathcal{I}'$. Med andra ord är K_i icke-sammanhängande vilket är en motsägelse.

Alltså måste (7) vara sann.

För att nu bevisa satsen så observerar vi att om $\text{diam}(A) = d$ så är $\text{diam}(S_i(A)) = r_i d$, $i = 1, 2$, ty similituden S_i skalar om samtliga avstånd med en faktor r_i .

Låt $d = \sup_{i \in \mathcal{I}} (\text{diam}(K_i))$. Enligt (7) gäller för varje K_i , $i \in \mathcal{I}$, att det existerar ett $j \in \mathcal{I}$ sådant att $S_l(K_j) = K_i$, $l = 1$ eller 2 . Då gäller att $\text{diam}(K_i) = r_l \text{diam}(K_j) \leq r_l d$. Eftersom detta gäller för alla $i \in \mathcal{I}$ så måste $\min(r_1, r_2)d \geq d$, men då $\min(r_1, r_2) < 1$ så måste $d = 0$ (ty $d = \infty$ är omöjligt då K kompakt i \mathbb{R}^2 medför K begränsad). Med andra ord är en största sammanhängande delmängd av K en punkt. Vi har nu bevisat att en invariant mängd K antingen är sammanhängande eller totalt icke-sammanhängande. □

5.2 Separationsegenskaper hos invarianta mängder i planet under symmetriantagande

I detta avsnitt kommer vi låta $P = \{(0, 0), (1, 0)\}$ och kontraktionskonstanterna vara lika, det vill säga $R = \{r, r\}$. Vi låter nu dessutom rotationsvinklarna vara $\Theta = \{\theta, -\theta\}$. Under dessa restriktioner, vilka kommer benämnas *symmetriantagandet* visar det sig att de invarianta mängderna uppvisar symmetri kring *symmetrilinjen* $\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/2\}$. Detta preciserar och bevisas i lemma 5.5 nedan. Detta symmetriantagande (samt övriga restriktioner ovan) antas gälla i fortsättningen om inget annat explicit uttrycks.

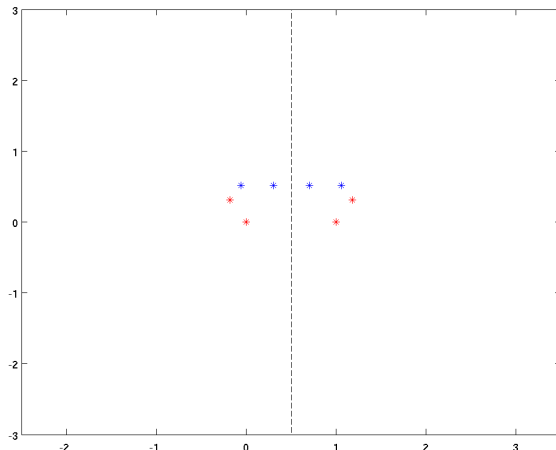
Vi ska under dessa restriktioner visa att K är sammanhängande om och endast om $S_1(K)$ avbildar någon punkt 'till höger' om symmetrilinjen. Med hjälp utav detta kriterium skall vi sedan visa existensen av en gränsfunktion $r(\theta)$ för vilken det gäller att K är sammanhängande då $r > r(\theta)$ och K är icke-sammanhängande då $r < r(\theta)$.

Vi visar först att K är symmetrisk kring symmetrilinjen under dessa antaganden. Notera att detta kan bevisas på ett flertal olika sätt. Beviset nedan är ett konstruktivt bevis i syfte att ge en klar bild av hur symmetrin uppstår. Vi påminner även om definitionen av mängden \mathcal{W} (se §4.2) samt notationen för komposition av similituder (se (1)).

Lemma 5.5. *Den invarianta mängden K är symmetrisk med avseende på symmetrilinjen \mathcal{L} .*

Bevis. Tag ett godtyckligt $x \in \mathcal{W}$. Per definition kan vi finna en sekvens av index $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \{1, 2\}^n$ sådana att $x = \tilde{S}_{\mathbf{j}}(p_l)$, $l \in \{1, 2\}$. Antag nu att $l = 1$ (fallet $l = 2$ utförs analogt).

Med notationen $\mathbf{j}' = (j'_1, \dots, j'_N)$ där $j'_i = 1$ om $j_i = 2$ och $j'_i = 2$ om $j_i = 1$ för $i = 1, \dots, N$ så kan vi nu välja att betrakta $x' = \tilde{S}_{\mathbf{j}'}(p_2)$. Till följd av grundförutsättningarna $R = \{r, r\}$ och $\Theta = \{\theta, -\theta\}$ följer uppenbart, se figur 6, att x' är spegelbilden av x i symmetrilinjen \mathcal{L} . För ett godtyckligt $x \in \mathcal{W}$ ligger således också dess spegelbild $x' \in \mathcal{W}$, varför \mathcal{W} är symmetrisk kring \mathcal{L} . Eftersom $K = \overline{\mathcal{W}}$ följer att även K är symmetrisk kring \mathcal{L} . □



Figur 6: De två första generationerna skapade ur startmängden $P = \{(0,0), (1,0)\}$. Notera att spegelbilden (i symmetrilinjen) av varje punkt ingår i mängden. Röda punkter representerar generation ett och blå punkter generation två.

Vi inför nu följande beteckning, praktisk för att formulera vårt tillräckliga och nödvändiga kriterium för när K är sammanhängande under symmetriantagandet. Notera att den symmetri som etablerats ovan medför att det ofta räcker att visa påståenden för exempelvis $S_1(K)$, varpå motsvarande resultat följer för $S_2(K)$.

Definition. Vi benämner det högra halvplanet translaterat med $1/2$ som $\vec{\mathcal{L}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1/2\}$.

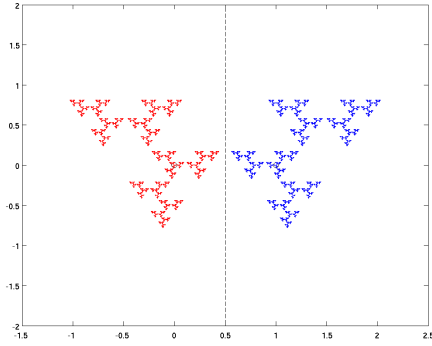
Följande separationskriterium (och dess bevis) har många likheter med sats 5.3.

Sats 5.6. *Den invarianta mängden K är sammanhängande om och endast om $S_1(K) \cap \vec{\mathcal{L}} \neq \emptyset$.*

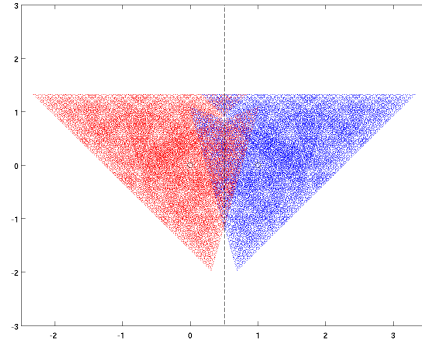
Bevis. Låt \mathcal{M}_i vara ett sammanhängande hölje till $S_i(K)$, $i = 1, 2$ sådana att \mathcal{M}_1 och \mathcal{M}_2 är spegelsymmetriska med avseende på symmetrilinjen \mathcal{L} och låt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. Antag att K är icke-sammanhängande och att $S_1(K) \cap \vec{\mathcal{L}} \neq \emptyset$. Då gäller per definition att $K \subset \mathcal{M}$ vilket ger $\tilde{S}(K) = K \subset \tilde{S}(\mathcal{M})$. Det implicerar i sin tur att $K \subset \tilde{S}^N(\mathcal{M})$ för alla $N \in \mathbb{N}$. Eftersom K (enligt antagande) är icke-sammanhängande så gäller enligt Lemma 5.2 att det existerar ett N sådant att $\tilde{S}^N(\mathcal{M})$ är icke-sammanhängande. Då $S_1(K) \cap \vec{\mathcal{L}} \neq \emptyset$ får vi direkt att $S_1(\mathcal{M}_1) \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$, ty \mathcal{M}_1 är sammanhängande per definition. Detta medför $\tilde{S}(\mathcal{M})$ sammanhängande då skärningspunkter med symmetrilinjen av symmetriskäl ligger i både $S_1(\mathcal{M})$ och $S_2(\mathcal{M})$. Därmed är $S_1(\tilde{S}(\mathcal{M})) \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. Med induktion fås att $\tilde{S}^N(\mathcal{M})$ för alla $N \in \mathbb{N}$ är sammanhängande, vilket motsäger antagandet.

För att visa att K är icke-sammanhängande då $S_1(K) \cap \vec{\mathcal{L}} = \emptyset$ noterar vi att det på grund av symmetrin i \mathcal{L} är uppenbart att K är icke-sammanhängande om och endast om $K \cap \mathcal{L} = \emptyset$ (ty \mathcal{L} delar planet i två delar och K måste ligga i båda dessa delar). Eftersom $\mathcal{L} \subset \vec{\mathcal{L}}$ så får vi nu att K är icke-sammanhängande då $S_1(K) \cap \vec{\mathcal{L}} = \emptyset$.

□



(a) $\Theta = \{2\pi/3, -2\pi/3\}$, $R = \{0.6, 0.6\}$



(b) $\Theta = \{5\pi/7, -5\pi/7\}$, $R = \{0.75, 0.75\}$

Figur 7: En invariant mängd *under symmetriantagandet* är sammanhängande om och endast om $S_1(K)$ innehåller punkt på eller till höger om symmetrilinjen (streckad). Det röda området approximerar $S_1(K)$ och det blå området approximerar $S_2(K)$.

Anmärkning. Intuitivt säger sats 5.6 att mängden K består utav två olika delar på varsin sida av symmetrilinjen \mathcal{L} och att hela mängden blir sammanhängande om och endast om dessa två delar korsar symmetrilinjen och därmed korsar varandra.

Vi kommer vid flera tillfällen använda oss utav begreppet *konvext hölje*, ibland även kallat *minsta konvext hölje*. Dessa höljen spelar således en viktig roll, varför det är värt att en gång för all fastslå en av dess grundläggande egenskaper.

Definition: Det *konvexa höljet* av en mängd A kan definieras som slutningen av mängden av alla konvexa kombinationer av punkter i A det vill säga

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{x_j \in A, j=0, \dots, n} \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\} \right)}.$$

Lemma 5.7. (Egenskaper hos konvexa höljen). *Låt $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ där \mathcal{C}_i är det konvexa höljet av $S_i(K)$, $i = 1, 2$. Då gäller $\tilde{S}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ och $S_i(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$. Observera att motsvarande egenskap gäller för det konvexa höljet till K och visas på samma sätt.*

Bevis. Vi börjar med att observera att $S_j(S_i(K)) \subset S_j(K)$ för alla kombinationer av $i = 1, 2$ och $j = 1, 2$. Därmed gäller att konvexa höljet av $S_j(S_i(K))$ är en delmängd av \mathcal{C}_j (konvexa höljet av $S_j(K)$). Det följer direkt från definitionen av konvext hölje att $S_j(\mathcal{C}_i)$ är en delmängd av det konvexa höljet av $S_j(S_i(K))$. Därmed är $S_j(\mathcal{C}_i) \subset \mathcal{C}_j$. Satsen följer då uppenbart. \square

Notation. I beviset av huvudsatsen (och på flera ställen i §6) används polära koordinater med 'origo' i rotationscentrum p_1 respektive p_2 . Dessa betecknas med $(\rho, \phi)_1$ respektive $(\rho, \phi)_2$. Vinkeln ϕ är vänstervriden med avseende på positiva riktningen för x -axeln för det ursprungliga koordinatsystemet. Vi har nu tillräckliga redskap för att visa huvudsatsen.

Sats 5.8. (Huvudsats) *Antag att K_{r_l} är icke-sammanhängande och $r_s < r_l$. Då är K_{r_s} icke-sammanhängande.*

Bevis. Låt K_{r_l} vara icke-sammanhängande och antag att kontraktionskonstanterna $r_s < r_l$. Enligt sats 5.3 impliceras att $S_{r_l,1}(K_{r_l}) \cap S_{r_l,2}(K_{r_l}) = \emptyset$. Låter vi vidare \mathcal{C}_i vara det minsta konvexa höljet till $S_{r_l,i}(K_{r_l})$, $i = 1, 2$ så gäller med $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ att $K_{r_l} \subset \mathcal{C}$. Vi visar följande:

1. $\tilde{S}_{r_l}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \Rightarrow \tilde{S}_{r_s}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ vilket i sin tur implicerar $\tilde{S}_{r_s}^N(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$.

Sambandet $\tilde{S}_{r_l}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ följer direkt från lemma 5.7. För att visa att detta medför $\tilde{S}_{r_s}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$, tag ett godtyckligt $x = (\rho, \phi)_1 \in \mathcal{C}$. Då gäller att $S_{r_l,1}(x) = (r_l \rho, \phi + \theta)_1 \in \mathcal{C}_1$ och $S_{r_s,1}(x) = (r_s \rho, \phi + \theta)_1 = (\frac{r_s}{r_l} r_l \rho, \phi + \theta)_1$, där $\frac{r_s}{r_l} < 1$. Eftersom \mathcal{C}_1 är konvex gäller att $S_{r_s,1}(x) \in \mathcal{C}$. Således måste $S_{r_s,1}(x) \in \mathcal{C}_1$ för $x \in \mathcal{C}$. På grund av symmetrin gäller detsamma för $S_{r_s,2}(\mathcal{C})$ varför det gäller att $\tilde{S}_{r_s}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Detta ger i sin tur att $\tilde{S}_{r_s}^N(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ för alla $N \in \mathbb{N}$.

Gällande (2) ovan observerar vi att $S_{r_l,1}(K_{r_l}) \cap \vec{\mathcal{L}} = \emptyset$ och $S_{r_l,2}(K_{r_l}) \subset \vec{\mathcal{L}}$ följer direkt av sats 5.6 (eftersom K_{r_l} är icke-sammanhängande). Med andra ord separeras $S_{r_l,1}(K_{r_l})$ och $S_{r_l,2}(K_{r_l})$ utav symmetrilinjen \mathcal{L} . Det är då uppenbart att \mathcal{L} även separerar dess konvexa höljen, det vill säga att $\mathcal{C}_1 \cap \vec{\mathcal{L}} = \emptyset$ och $\mathcal{C}_2 \subset \vec{\mathcal{L}}$. Alltså gäller $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$.

Slutligen observerar vi att sats 3.4 samt egenskap (1) medför att $\mathcal{C} \supset \tilde{S}_{r_s}^N(\mathcal{C}) \rightarrow K_{r_s}$ då $N \rightarrow +\infty$, där \mathcal{C} är icke-sammanhängande enligt (2). Beviset är klart. \square

Följande omvända resultat impliceras på uppenbart vis av denna sats.

Korollarium 5.9. *Om $r_s > r_l$ gäller att K_{r_s} är sammanhängande då K_{r_l} är sammanhängande.*

Bevis. Antag att motsatsen till ovanstående utsaga är sann. Då måste det existera r'_l, r'_s sådana att $r'_s < r'_l$ där $K_{r'_l}$ är icke sammanhängande och $K_{r'_s}$ är sammanhängande. Detta motsäger sats 5.8 ovan och beviset är klart. \square

Huvudsatsen 5.8 och korollarium 5.9 medför existensen av en entydig 'brytpunkt' eller 'gräns' mellan sammanhängande och icke-sammanhängande invarianta mängder. Detta leder till följande mycket intressanta resultat:

Det existerar en gränsfunktion $r(\theta)$ med egenskapen att $r < r(\theta)$ medför K icke-sammanhängande och $r > r(\theta)$ medför K sammanhängande. Observera att denna endast är definierad under symmetriantagandet då vi kan betrakta (den enda) kontraktionskonstanten r som en funktion av (den enda) rotationsvinkeln θ . Genom att studera denna funktion kan man hoppas besvara följande fråga: Om vi betraktar ett fixt θ , för vilket r övergår de invarianta mängderna från att vara sammanhängande till att vara icke-sammanhängande? Genom att bestämma denna gränsfunktion (vilket dock är allt annat än triviale) vore det möjligt att fullständigt kategorisera invarianta mängder under symmetriantagandet i en klass av sammanhängande mängder och en klass av totalt icke-sammanhängande mängder.

Efterföljande avsnitt ägnas åt att visa egenskaper hos denna gräns. Bland annat visar vi att den invarianta mängden $K_{r(\theta),\theta}$ (med parametervärden 'på' denna gräns) är sammanhängande.

6 Regelbundenhetsresultat och överlapp

I ovanstående avsnitt bevisades existensen av en gränsfunktion $r(\theta)$. Vi ska nu visa på egenskaper hos denna gräns. Exempelvis definieras i detta avsnitt vad som menas med *överlapp* varpå vi (under en *förmodan* om kontinuitet) visar att den invarianta mängden $K_{r(\theta),\theta}$ är sammanhängande med vad vi ska kalla *minimalt överlapp*. Vidare introduceras det i geometrisk måtteori välkända *öppna mängdkriteriet*, kanske mer känt under dess engelska namn *Open Set Condition* eller OSC (se [M],[F],[H]).

Kombinationen av sats 6.6 och 6.7 visar att OSC håller då kontraktionskonstanten $r \leq r(\theta)$. Detta är intressant eftersom en stor mängd teori är känd för sådana mängder som uppfyller OSC. Med hjälp av ovanstående resultat kan vi alltså applicera denna teori på de invarianta mängderna där $r \leq r(\theta)$.

Då inget annat explicit uttrycks ska vi i detta avsnitt alltid anta att $P = \{(0,0), (1,0)\}$ och att symmetriantagandet gäller.

Definition. Vi definierar storleken på *överlappet* \mathcal{T} av en mängd A som innehåller båda rotationscentrum p_1 och p_2 och är symmetrisk kring \mathcal{L} enligt

$$\mathcal{T}_A = \max_{(x,y) \in S_1(A)} (x - 1/2). \quad (8)$$

Om det är uppenbart vilken mängd överlappet avser skriver vi $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$. På grund av överlappets centrala roll i fortsättningen av denna rapport så är det lämpligt med en kortare diskussion kring detta begrepp:

Intuitivt kan överlappet sägas vara ett mått på 'hur sammanhängande' $\tilde{S}(A)$ är. Se figur 7 för en illustration. I figur 7b är överlappet avståndet från symmetrilinjen till den punkt i $S_1(K)$ med störst x -koordinat. Denna mängd har positivt överlapp. Notera att överlappet även kan vara negativt så som i figur 7a.

Som motivation kan vi särskilt observera att överlappet är naturligt för invarianta mängder $K = \tilde{S}(K)$ under symmetriantagandet. Bland annat kan vi notera att en invariant mängd (enligt sats 5.6) är sammanhängande om och endast om överlappet är icke-negativt. Med andra ord gäller att K är icke-sammanhängande då $\mathcal{T} < 0$ och K är sammanhängande då $\mathcal{T} \geq 0$.

Gällande definitionen (8) motiverar vi begränsningen till $(x,y) \in S_1(A)$ genom att sambandet $\mathcal{T} = \max_{(x,y) \in S_1(A)} (x - 1/2) = -\max_{(x,y) \in S_2(A)} (x - 1/2)$ gäller. Detta följer utav symmetrin mellan $S_1(A)$ och $S_2(A)$ med avseende på symmetrilinjen \mathcal{L} . Vi kommer i fortsättningen genomgående utnyttja denna symmetri genom att endast betrakta $S_1(A)$, ty i enlighet med (8) bestäms överlappet helt och hållet av egenskaper hos denna mängd. Valet att studera $S_1(A)$ istället för $S_2(A)$ är enbart en konvention.

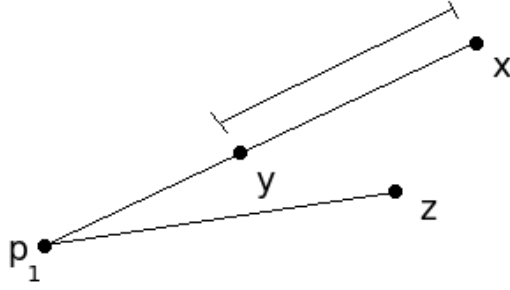
Definition. Den invarianta mängden K sägs ha *minimalt överlapp* då $\mathcal{T} = 0$.

Vi inleder nu med några enklare regularitetsresultat och egenskaper för överlappet. Följande definitioner av ordningsrelationen \preceq , *radiellt avstånd* och *maximala element* införs enligt ovan med syfte att studera just $S_1(A)$ (varpå vi implicit studerar överlappet). Se figur 8 för en illustration av dessa begrepp.

Vi påminner särskilt om definitionen av polär notation kring ett rotationscentrum (se §5.2).

Definition. Vi inför ordningsrelationen² \preceq definierad (med polär notation kring rotationscentrum p_1) enligt $(\rho_1, \phi_1)_1 \preceq (\rho_2, \phi_2)_1$ om och endast om $\phi_1 = \phi_2$ och $\rho_1 \leq \rho_2$. Vi säger att två punkter enligt ovan är *jämförbara* om och endast om $\phi_1 = \phi_2$. Notera att p_1 är jämförbar med varje punkt.

²Den strikta relationen $<$ gäller då $\rho_1 < \rho_2$.



Figur 8: Rotationscentrum p_1 är ett maximalt element för alla vinklar förutom de som x respektive z ligger på. Punkten y är jämförbar med x och p_1 . Varken x eller y är jämförbar med z . Det markerade avståndet är $d_\rho(x, y)$.

Vi betonar än en gång att det av symmetriskäl räcker att vid studiet av överlapp av en mängd A endast betrakta 'halvan' $S_1(A)$ vilken per definition innehåller rotationscentrum p_1 . Det är då naturligt att uttrycka punkterna i $S_1(A)$ med hjälp av polär notation kring p_1 .

Definition. Vi säger att det *radiella avståndet* mellan två jämförbara punkter $x_1 = (\rho_1, \phi_1)_1$ och $x_2 = (\rho_2, \phi_2)_1$ är

$$d_\rho(x_1, x_2) = |\rho_2 - \rho_1|.$$

Observera särskilt att det radiella avståndet *alltid* ska betraktas i förhållande till rotationscentrum p_1 och att om två punkter inte är jämförbara med \preceq så är det radiella avståndet odefinierat. Eftersom varje x är jämförbart med p_1 kan vi dock notera att det radiella avståndet $d_\rho(p_1, x)$ alltid är definierat. Denna observation visar sig viktig då vi betraktar det radiella avståndet mellan två mängder, vilket vi definierar som det *minsta* radiella avståndet mellan två punkter i respektive mängd (sådana att det radiella avståndet är definierat).

Definition. Med ordningsrelationen \preceq är det möjligt att jämföra element (punkter) med samma vinkelparameter. Vi säger att ett element x är *maximalt* om $y \preceq x$ för varje y som är jämförbart med x under \preceq (det vill säga sådant att $x \preceq y$ eller $y \preceq x$). När vi talar om maximala element associerat med en mängd A betraktar vi endast punkter i $S_1(A)$ (jämför konventionen att alltid betrakta $S_1(A)$ för överlappet). En mängd A har naturligtvis lika många maximala element som $S_1(A)$ har utbredningsriktningar. Antalet maximala element kan således vara ändligt eller oändligt. Mängden av alla maximala element associerat med en mängd A betecknas med $M(A)$.

En huvudanledning till införandet av det radiella avståndet är att det är lättare än överlappet att beräkna och kontrollera under applikation av similituder. Däremot är begreppen inte orelaterade. Det radiella avståndet har följande relation till överlappet:

Lemma 6.1. *Skillnaden i överlapp av två mängder, vilka innehåller P och är symmetriska kring \mathcal{L} , är uppåt begränsat av det största radiella avståndet mellan maximala element i respektive mängder.*

Bevis. Betrakta två kring \mathcal{L} symmetriska mängder A_1 och A_2 som innehåller P med överlapp \mathcal{T}_1 respektive \mathcal{T}_2 och antag att $\mathcal{T}_1 \geq \mathcal{T}_2$. Vi kan då betrakta en punkt $x_1 = (1/2 + \mathcal{T}_1, y) \in S_1(A_1)$ (kartesiska koordinater) vilken realiserar överlappet. Notera att denna punkt även är maximal med avseende på radiellt avstånd. Eftersom hypotenusan i en rätvinklig triangel är längre än kateten (se figur 9) så gäller att det minsta radiella avståndet

$$\min_{x_2 \in S_1(A_2)} (d_\rho(x_1, x_2))$$

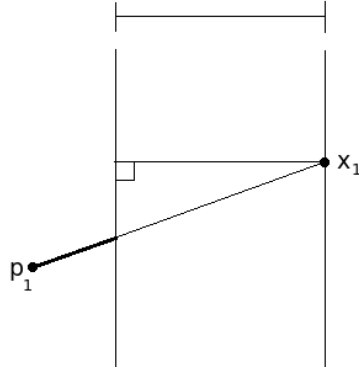
existerar och är en övre begränsning av $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$, ty x -koordinaten för varje sådant x_2 är $\leq 1/2 + \mathcal{T}_2$ enligt antagande om överlappet av mängden A_2 . Notera även att det $x_2 \in S_1(A_2)$

för vilket $d_\rho(x_1, x_2)$ minimeras är maximalt med avseende på radiellt avstånd (det vill säga $x_2 \in M(S_1(A_2))$).

Med andra ord existerar ett radiellt avstånd mellan maximala punkter i respektive mängder som är en övre begränsning av skillnaden i överlapp $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$. Då är även det största radiella avståndet mellan maximala punkter en övre begränsning av skillnaden i överlapp, det vill säga

$$\max\{d_\rho(x_1, x_2) : x_1 \in M(S_1(A_1)), x_2 \in M(S_1(A_2))\} \geq \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2,$$

och beviset är klart. □



Figur 9: De vertikala linjerna ges i kartesiska koordinater av ekvationerna $x = 1/2 + \mathcal{T}_1$ (till höger) och $x = 1/2 + \mathcal{T}_2$ (till vänster). Avståndet mellan dessa är alltså $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$. Avståndet $\max(d_\rho(x_1, x_2))$ realiseras mellan punkterna x_1 och x_2 där x_2 ligger någonstans på den 'tjocka' linjen.

Fortsättningsvis kan vi således koncentrera oss på studiet av radiellt avstånd istället för det mer svårhanterliga (men för våra syften än mer relevanta) begreppet överlapp. Några grundläggande och användbara egenskaper vilka väsentligen följer direkt från definitionen av similitud presenteras nedan. Som vanligt betraktar vi similituder med tillhörande kontraktionskonstanter $R = \{r, r\}$ och vinkelparametrar $\Theta = \{\theta, -\theta\}$.

Lemma 6.2. *Låt $x \in \mathbb{R}^2$ och $y \in K_r$ vara sådana att $x \preceq y$. Då gäller $S_1(x) \preceq S_1(y)$ och $d_\rho(S_1(x), S_1(y)) = rd_\rho(x, y)$.*

Bevis. Tag $x = (\rho_1, \phi)_1$ och $y = (\rho_2, \phi)_1$ där $\rho_1 \leq \rho_2$. Enligt definitionen av similitud gäller att S_1 avbildar $(\rho_1, \phi)_1$ på $(\rho_1 r, \phi + \theta)_1$ och $(\rho_2, \phi)_1$ på $(\rho_2 r, \phi + \theta)_1$. Uppenbart gäller alltså $S_1(x) \preceq S_1(y)$. Slutligen gäller även $d_\rho(S_1(x), S_1(y)) = |\rho_2 r - \rho_1 r| = r|\rho_2 - \rho_1| = rd_\rho(x, y)$. □

Lemma 6.3. *För en godtycklig punkt $x = (\rho, \phi)_1$ i planet gäller att det radiella avståndet $d_\rho(S_{r,1}(x), S_{r-\epsilon,1}(x)) = \rho|\epsilon|$, där $\epsilon \in \mathbb{R}$ sådant att $r - \epsilon \in]0, 1[$. Speciellt gäller då $\epsilon > 0$ och $x \neq p_1$ att $S_{r-\epsilon,1}(x) \prec S_{r,1}(x)$.*

Bevis. Tag $\epsilon \in \mathbb{R}$ sådant att $r - \epsilon \in]0, 1[$. Med $x = (\rho, \phi)_1$ gäller att $S_{r,1}(x) = (\rho r, \phi + \theta)_1$ och $S_{r-\epsilon,1}(x) = (\rho(r - \epsilon), \phi + \theta)_1$. Det radiella avståndet är således $|\rho r - \rho(r - \epsilon)| = \rho|\epsilon|$. Då $\epsilon > 0$ är det uppenbart att $S_{r-\epsilon,1}(x) \prec S_{r,1}(x)$ förutsatt att $x \neq p_1$. Om $x = p_1$ gäller naturligtvis att $S_{r-\epsilon,1}(x) = S_{r,1}(x)$. □

Med hjälp av ovanstående definitioner och egenskaper har vi redskap för att bevisa följande sats, vilken visar på monotonitet hos överlappet \mathcal{T} . Mer specifikt gäller att kontraktionskonstanterna $r_s < r_l$ medför att överlappet $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_{K_{r_s}}$ är mindre än överlappet $\mathcal{T}_l = \mathcal{T}_{K_{r_l}}$.

Sats 6.4. Om $r_s < r_l$ så gäller att överlappet $\mathcal{T}_s < \mathcal{T}_l$.

Bevis. Tag minsta konvexa höljet \mathcal{C}_i till K_{r_i} , $i \in \{s, l\}$. Då \mathcal{C}_l är konvex (och därmed \mathbb{P}^* -konvex) följer det från lemma 4.5 att $\tilde{S}_{r_s}(\mathcal{C}_l) \subset \tilde{S}_{r_l}(\mathcal{C}_l)$. Dessutom följer det av egenskaper för konvexa höljen (se lemma 5.7) att $\tilde{S}_{r_l}(\mathcal{C}_l) \subset \mathcal{C}_l$. Sambandet $\tilde{S}_{r_s}(\mathcal{C}_l) \subset \mathcal{C}_l$ impliceras. Genom upprepad applikation av \tilde{S}_{r_s} medförs nu

$$\tilde{S}_{r_s}^N(\mathcal{C}_l) \subset \tilde{S}_{r_s}^{N-1}(\mathcal{C}_l) \subset \dots \subset \tilde{S}_{r_s}(\mathcal{C}_l) \subset \mathcal{C}_l, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

och genom att låta $N \rightarrow +\infty$ följer således (enligt sats 3.4) att $K_{r_s} \subset \mathcal{C}_l$. Enligt lemma 6.3 med $\epsilon = r_l - r_s > 0$ gäller att det radiella avståndet mellan maximala punkter (skilda från p_1) i $\tilde{S}_{r_s}(\mathcal{C}_l)$ respektive \mathcal{C}_l är strikt positivt, det vill säga att för varje par av (med \preceq) jämförbara punkter $x \in M(\tilde{S}_{r_s}(\mathcal{C}_l)) \setminus \{p_1\}$ och $y \in M(\mathcal{C}_l) \setminus \{p_1\}$ så gäller att $x \prec y$. Samtidigt följer av (9) att det radiella avståndet mellan maximala punkter i $\tilde{S}_{r_s}^N(\mathcal{C}_l)$ respektive \mathcal{C}_l är växande med N . Med andra ord gäller även i gräns att $x \prec y$ där $x \in M(K_{r_s}) \setminus \{p_1\}$ och $y \in M(\mathcal{C}_l) \setminus \{p_1\}$ är jämförbara. Eftersom $\mathcal{T}_l = \mathcal{T}_{M(\mathcal{C}_l)}$ medför detta, förutsatt att p_1 inte kan ge maximalt överlapp, att $\mathcal{T}_s < \mathcal{T}_l$.

Det återstår att visa att p_1 aldrig kan ge maximalt överlapp i en invariant mängd K . Detta följer eftersom $S_1^N(p_2) = (\rho, \phi)_1 \in K$ för något $N \in \mathbb{N}$ är sådant att $\phi \in] -\pi/2, \pi/2[$ och $\rho > 0$. Alltså ger punkten $S_1^N(p_2)$ större överlapp än p_1 . □

6.1 En förmodan och dess implikationer

Vi ska i resterande delar av denna rapport *förmoda* att det existerar kontinuitet gällande överlappet av de invarianta mängderna då vi varierar kontraktionskonstanten. För en diskussion kring denna förmodan, se §8. Observera att det inte är omedelbart klart vad som ska menas med denna 'kontinuitet', utan detta måste preciseras enligt nedan:

Definition. Låt \mathcal{T}_r beteckna överlappet av K_r och låt $\mathcal{T}_{r-\epsilon}$ beteckna överlappet av $K_{r-\epsilon}$. Vi säger att överlappet är *kontinuerligt* om $\mathcal{T}_r - \mathcal{T}_{r-\epsilon} \rightarrow 0$ då $\epsilon \rightarrow 0$ för samtliga $r \in]0, 1[$.

Med hjälp av den förmodade kontinuiteten kan vi undersöka vad som händer vid gränsen mellan sammanhängande och icke-sammanhängande invarianta mängder.

Notation. För *gränsen* $r(\theta)$ benämner vi motsvarande invarianta mängd $K_{r(\theta)}$ med *gränsmängden*.

Med hjälp av monotonitet (sats 6.4) och kontinuitet (vi förlitar oss alltså på ovan nämnda förmodan) erhåller vi följande karakterisering av gränsmängden. Vi påminner om att denna gräns är definierad så att $K_{r(\theta)-\epsilon_1}$ är icke-sammanhängande och $K_{r(\theta)+\epsilon_2}$ är sammanhängande för varje $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ sådant att $r(\theta) - \epsilon_1, r(\theta) + \epsilon_2 \in]0, 1[$.

Sats 6.5. *Gränsmängden är sammanhängande med $\mathcal{T} = 0$.*

Bevis. Notera först att det räcker att visa att $\mathcal{T} = 0$ för gränsmängden, ty det följer då direkt från lemma 5.2 att gränsmängden är sammanhängande. Vi behandlar fallen $\mathcal{T} < 0$ och $\mathcal{T} > 0$ separat i syfte att få en motsägelse.

Antag nu att gränsmängden $K = K_{r(\theta)}$ är sådan att motsvarande överlapp $\mathcal{T} > 0$. Per definition gäller att $K' = K_{r(\theta)-\epsilon}$ är icke-sammanhängande. Enligt lemma 5.6 har K' motsvarande överlapp \mathcal{T}' strikt mindre än noll för varje $\epsilon > 0$ sådant att $r(\theta) - \epsilon \in]0, 1[$. För varje sådant ϵ gäller alltså $\mathcal{T} - \mathcal{T}' \geq c > 0$ för någon konstant c som inte beror av ϵ . Men kontinuitet medför nu att $\mathcal{T} - \mathcal{T}' \rightarrow 0$ då $\epsilon \rightarrow 0$. Med andra ord är det möjligt att välja ϵ sådant att $\mathcal{T} - \mathcal{T}' < c$ och vi har en motsägelse.

På motsvarande sätt får vi under antagandet $\mathcal{T} < 0$ att $K' = K_{r(\theta)+\epsilon}$ är sammanhängande sådant att $\mathcal{T}' > 0$. Resterande del av beviset utförs analogt. Med andra ord leder båda

fallen $\mathcal{T} > 0$ och $\mathcal{T} < 0$ till en motsägelse. Därmed måste den enda återstående möjligheten vara sann, nämligen $\mathcal{T} = 0$. □

Med hjälp av ovanstående sats, vilken följer ur vår förmodan om kontinuitet, visar det sig att gränsmängderna alltid uppfyller öppna mängdkriteriet (OSC). Detta utvecklas i efterföljande avsnitt nedan.

6.2 Öppna mängdkriteriet

Vi introducerar nu ett teoretiskt separationskriterium som ligger till grund för många viktiga resultat inom forskningen relaterad till Hutchinsons framställning av teorin kring invarianta och självliknande mängder (se [M],[F],[H]).

Definition. Vi säger att *Open Set Condition* (OSC) är uppfyllt för en invariant mängd K om och endast om det existerar en icke-tom öppen mängd V (vilken alltid kommer vara *relativt kompakt*, dvs sådan att \bar{V} är kompakt) för vilken följande gäller:

$$\tilde{S}(V) \subset V \tag{10}$$

$$S_1(V) \cap S_2(V) = \emptyset \tag{11}$$

Vi kan också komma att säga att V uppfyller OSC med avseende på avbildningen \tilde{S} om (10) och (11) ovan håller. Notera att mängden V i motsats till den invarianta mängden K inte behöver vara entydigt bestämd.

Väsentligen har denna typ av separationskriterium som syfte att skilja mängder som vi uppfattar som verkligt självliknande från sådana mängder som formellt uppfyller definitionen (se §3) men som inte uppvisar dessa egenskaper i 'tillräckligt stor' utsträckning. Väsentligen tenderar de självliknande 'egenskaperna' av en mängd att försvinna mer och mer ju större överlappet är. Jämför exempelvis de självliknande mängderna i figur 7 (sida 19).

Det är även värt att notera att stora mängder teori är känd för mängder som satisfierar detta separationskriterium (se [M],[F],[H]). En liten del av denna teori tillämpas i §7 med syfte att dra slutsatser om gränsfunktionen.

Vi ska nu formulera detta avsnitts huvudsats vilken relaterar resultat gällande gränsfunktionen $r(\theta)$ framställd under symmetriantagandet $R = \{r, r\}$ och $\Theta = \{\theta, -\theta\}$ med forskning på bredare grund. Följande sats kategoriserar en delmängd av de invarianta mängderna under symmetriantagandet som satisfierar OSC. Närmare bestämt visar det sig att OSC är uppfyllt då överlappet är icke-positivt.

Notera även att vi från tidigare satser vet att en mängd är sammanhängande om och endast om $\mathcal{T} \geq 0$. Vi behandlar fallen då för K tillhörande överlapp $\mathcal{T} < 0$ och $\mathcal{T} = 0$ separat.

Notation. Vi betecknar den öppna ' ϵ -bollen' i planet centrerad i x som

$$\mathcal{B}_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Sats 6.6. *Öppna mängdkriteriet (OSC) är uppfyllt då K har strikt negativt överlapp ($\mathcal{T} < 0$).*

Bevis. Notera att överlapp $\mathcal{T} < 0$ är ekvivalent med K icke-sammanhängande enligt sats 5.6. Därmed gäller att vi har en indelning $K = S_1(K) \cup S_2(K)$ där $d(S_1(K), S_2(K)) > 0$. Betrakta nu mängden³

$$V_\epsilon = \bigcup_{x \in K} \mathcal{B}_\epsilon(x). \tag{12}$$

³Denna ide är känd från bland andra Mattila i de fall då K är sådan att delarna $S_i(K)$ är disjunkta.

Definiera även

$$S_i(K)_\epsilon = \bigcup_{x \in S_i(K)} B_\epsilon(x), \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Vi kan nu välja $\epsilon > 0$ sådant att $S_1(K)_\epsilon \cap S_2(K)_\epsilon = \emptyset$, vilket är möjligt precis eftersom $d(S_1(K), S_2(K)) > 0$ så som noterades ovan. Vi ska nu visa att V_ϵ med ett sådant ϵ satisfierar OSC.

För ett godtyckligt $x \in K$ gäller då att $S_i(B_\epsilon(x)) = B_{r\epsilon}(S_i(x))$ där r är kontraktionskonstanten tillhörande similituden \tilde{S} . Eftersom $r < 1$ följer direkt att $S_i(B_\epsilon(x)) \subset B_\epsilon(S_i(x))$. Därmed gäller också

$$S_i(V_\epsilon) = S_i\left(\bigcup_{x \in K} B_\epsilon(x)\right) = \bigcup_{x \in K} S_i(B_\epsilon(x)) \subset \bigcup_{x \in K} B_\epsilon(S_i(x)) = S_i(K)_\epsilon, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Vi noterar först att $V_\epsilon = S_1(K)_\epsilon \cap S_2(K)_\epsilon$ och (14) uppenbart medför att $\tilde{S}(V_\epsilon) \subset V_\epsilon$. Vidare följer egenskapen $S_1(V_\epsilon) \cap S_2(V_\epsilon) = \emptyset$ även den direkt från (14), ty med vårt val av ϵ gäller att $S_1(V_\epsilon) \cap S_2(V_\epsilon) \subset S_1(K)_\epsilon \cap S_2(K)_\epsilon = \emptyset$. Därmed är V_ϵ en icke-tom öppen mängd som uppfyller OSC. □

Sats 6.7. *Öppna mängdkriteriet är uppfyllt då K har minimalt överlapp ($\mathcal{T} = 0$).*

Bevis. Vi noterar först att $\mathcal{T} = 0$ medför K sammanhängande. Låt \mathcal{C} vara det konvexa höljet av K och tag $V = \text{Int}(\mathcal{C})$. Vi ska nu visa att denna mängd uppfyller OSC.

Observera att V är öppen per definition av det inre av en mängd. Vidare gäller att V är tom om och endast om samtliga punkter i K är kollineära (ligger på en rät linje). De fall då detta händer behandlas separat nedan. Först betraktar vi fallet då V antas icke-tom. Då gäller:

1. $\tilde{S}(V) \subset V$ enligt lemma 5.7.
2. $S_1(V) \cap S_2(V) = \emptyset$, ty överlappet $\mathcal{T} = 0$ medför att $S_1(V)$ och $S_2(V)$ ligger på skilda sidor om symmetrilinjen \mathcal{L} . Därmed måste dessa mängder speciellt vara disjunkta.

Detta V uppfyller därmed OSC. Det återstår endast att behandla fallet då $\text{Int}(\mathcal{C})$ är tom, det vill säga då samtliga punkter i K är kollineära:

Då samtliga punkter i K är kollineära gäller att $K \subset x_1x_2$, där x_1x_2 det entydigt bestämda linjesegment som sammanbinder punkterna x_1 och x_2 . Men enligt lemma 4.3 tillhör rotationscentrum p_1 och p_2 båda den invarianta mängden och således även linjesegmentet x_1x_2 . Därmed måste x_1x_2 (och även K) vara en delmängd av x -axeln. Vi kan då explicit dra slutsatsen att vinkelparametern $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$, ty för övriga vinklar avbildas p_1 (och p_2) uppenbart utanför x -axeln redan i första generationen (dvs $S_2(p_1)$ tillhör ej x -axeln). Men för dessa gränsmängder gäller (eftersom de är sammanhängande) att de kan beskrivas som ett slutet intervall $[a, c]$ med $a, c \in \mathbb{R}$. Vi kan då explicit välja V till

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < c, -\epsilon < y < \epsilon\}. \quad (15)$$

För ett godtyckligt $\epsilon > 0$ är V uppenbart en öppen, icke-tom mängd som uppfyller kriteriet (10). Även kriterium (11) är uppfyllt, ty överlappet $\mathcal{T} = 0$ medför att den invarianta mängden $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$ där a och c båda avbildas på b (vilken är den enda gemensamma punkten i $S_1(K)$ och $S_2(K)$). Eftersom vi i V exkluderar 'ändpunkterna' a och c (och alla punkter med samma x -koordinat) från mängden så måste $S_1(V) \cap S_2(V) = \emptyset$. Med andra ord är OSC uppfyllt även här. □

För fallet då överlappet är strikt positivt så kan vi konstatera att OSC åtminstone inte är uppfyllt för alla sådana invarianta mängder. För vidare diskussion kring detta, se §8.

7 Approximation av gränsfunktionen via Hausdorffdimension och datorsimulering

Med hjälp av sats 6.4 och en förmodan om kontinuitet har vi visat att överlappet \mathcal{T} av en mängd uppför sig mycket väl då vi varierar kontraktionskonstanten r och håller θ fixt. Dessutom har vi bevisat att mängden av invarianta mängder $K_{r,\theta}$ med $r \leq r(\theta)$ uppfyller OSC. Med andra ord har vi under gällande symmetriantagande presenterat en klass av självliknande mängder som satisfierar OSC⁴. Därmed (vilket också nämnts i tidigare avsnitt) kan stora mängder teori appliceras på dessa mängder.

Målet med detta avsnitt är att presentera en approximation av gränsfunktionen $r(\theta)$. Inledningsvis görs detta teoretiskt via införandet av begreppet *Hausdorffdimension*. Bland annat presenteras en känd sats ifrån geometrisk måtteori (se [MR]) vilken ger en allmän metod för att explicit beräkna Hausdorffdimensionen hos invarianta mängder som uppfyller OSC. Dessutom ska vi applicera denna sats för att ge en övre respektive undre begränsning av gränsen $r(\theta)$ som gäller för alla vinklar $\theta \in [0, \pi]$. Notera att om $\theta \in [0, \pi]$ så gäller $r(\theta) = r(-\theta)$ uppenbart pga symmetri.

7.1 Hausdorffmått och Hausdorffdimension

Vi börjar med att introducera *Hausdorffmättet*, inte att förväxla med Hausdorffmetriken vilken infördes i §4. Detta är nödvändigt för att kunna definiera *Hausdorffdimension* vilket är ett mycket centralt begrepp för studiet av självliknande mängder. Intuitivt är denna dimension ett mått på mängdens 'kantighet'. Notera även att Hausdorffdimensionen sammanfaller med den vanliga topologiska dimensionen för en linje, en kvadrat och så vidare (se [DS]).

Definition. Det så kallade *Hausdorff α -mättet* av en mängd $A \subset \mathbb{R}^n$ definieras som

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^\alpha(A),$$

där den så kallade *kapaciteten* med notationen $\text{diam}(A) = |A|$ definieras som

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = \inf \left\{ \sum |O_i|^\alpha : \cup_i O_i \supset A, 0 \leq |O_i| \leq \delta \right\},$$

där mängderna O_i antas vara öppna. Uppsättningen av mängder $\{O_i\}$ benämns ofta som *öppen övertäckning* av mängden A .

Definition. Enligt en observation i [MR] gäller att $\mathcal{H}^\alpha(A)$ som en funktion av α antar värdet $+\infty$ då $\alpha < m$ och värdet 0 då $\alpha > m$ för ett givet värde m . Då definieras $m = \text{dim}_H(A)$, vilket utläses *Hausdorffdimensionen* av A .

Vi presenterar nu några enkla konsekvenser av ovanstående definition:

Lemma 7.1. (Egenskaper hos Hausdorffdimension) *För Hausdorffdimensionen gäller följande egenskaper:*

1. Varje mängd i \mathbb{R}^n har Hausdorffdimension $\leq n$.
2. En sammanhängande mängd i planet som innehåller mer än en punkt har Hausdorffdimension ≥ 1 .

Bevis. Notera först att $A \subset B$ medför $\text{dim}_H(A) \leq \text{dim}_H(B)$, ty varje övertäckning av B är också en övertäckning av A . Då $A \subset \mathbb{R}^n$ gäller således $\text{dim}_H(A) \leq \text{dim}_H(\mathbb{R}^n) = n$. Detta bevisar (1).

För egenskap (2), se [DS].

□

⁴Notera att det faktum att samtliga gränsmängder uppfyller OSC bygger på en obevisad förmodan om kontinuitet.

Vi har nu tillräcklig bakgrund för att formulera följande välkända sats från geometrisk måtteori. Beviset utelämnas och den intresserade läsaren hänvisas till [MR].

Sats 7.2. *Antag att K är en invariant mängd med tillhörande kontraktionskonstanter r_i , $i = 1, 2, \dots, N$ sådan att OSC håller. Då gäller att $\alpha = \dim_H(K)$ är den entydiga lösningen till ekvationen $\sum_{i=1}^N r_i^\alpha = 1$.*

Denna typ av starka resultat gäller typiskt för självliknande mängder där OSC är satisfierat. Vi kan trivialt applicera denna sats på vår klass av självliknande mängder under symmetriantagandet och erhålla följande resultat:

Korollarium 7.3. *För en mängd K med tillhörande $R = \{r, r\}$ som satisfierar OSC är $\dim_H(K) = \frac{\log(2)}{\log(1/r)}$.*

Bevis. Detta följer uppenbart från sats 7.2 eftersom $\alpha = \frac{\log(2)}{\log(1/r)}$ satisfierar ekvationen $2r^\alpha = 1$. □

Vi är nu redo att applicera denna sats på vårt problem och därmed erhålla en teoretisk övre- respektive undre begränsning för gränsfunktionen $r(\theta)$ som gäller för godtyckligt $\theta \in [0, \pi]$. Notera att följande sats även visar att det för varje vinkelparameter existerar såväl sammanhängande som icke-sammanhängande självliknande mängder.

Sats 7.4. *För godtyckligt $\theta \in [0, \pi]$ så är kontraktionskonstanterna $r = 1/2$ och $r = 1/\sqrt{2}$ en undre- respektive övre begränsning av $r(\theta)$.*

Bevis. Betrakta den invarianta gränsmängden $K = K_{r(\theta)}$ och antag att $r(\theta) < 1/2$. Enligt korollarium 7.3 gäller att $\dim_H(K) < \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1$. Men K är sammanhängande enligt sats 6.5 sådant att lemma 7.1 ger att Hausdorffdimensionen $\dim_H(K) \geq 1$ och vi har en motsägelse. Således gäller $r(\theta) \geq 1/2$.

Gällande den övre begränsningen, antag för motsägelse att $r(\theta) > 1/\sqrt{2}$. Enligt korollarium 7.3 gäller då att $\dim_H(K) > \frac{\log(2)}{\log(\sqrt{2})} = 2$. Enligt lemma 7.1 är detta en motsägelse, ty Hausdorffdimensionen kan aldrig vara större än den topologiska dimensionen. Med andra ord gäller också $r(\theta) \leq 1/\sqrt{2}$. □

7.1.1 Approximation av gränsfunktionen via datorsimulering

Vi presenterar slutligen en approximativ plot av gränsfunktionen $r(\theta)$, se figur 10. Vi utgår då från en uppsättning similituder S_1 och S_2 med kontraktionskonstanter $R = \{r, r\}$ och rotationsvinklar $\Theta = \{\theta, -\theta\}$. Då gäller följande:

Enligt sats 4.3 tillhör punkterna p_1 och p_2 den invarianta mängden och enligt sats 4.2 kan banan av endera punkterna aldrig lämna K . I kombination med separationskriterium (sats 5.6) så kan man med datorns hjälp ofta bekräfta att tillsynes sammanhängande invarianta mängder verkligen är sammanhängande. Den metod vi nu kommer beskriva visar på en (under symmetriantagandet) viktig tillämpning av separationskriterium 5.6 på följande vis:

Om vi antar att den invarianta mängd K som genereras utav S_1 och S_2 har tillhörande överlapp $\mathcal{T} > 0$ så kan vi hitta ett $N = N(\mathcal{T})$ sådant att

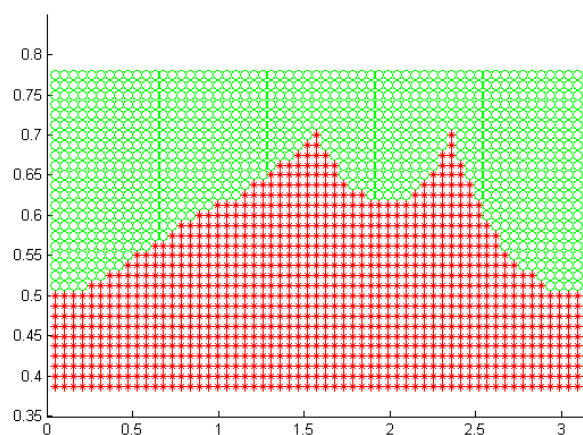
$$d_H(\tilde{S}^n(P), K) < \mathcal{T}, \forall n \geq N. \quad (16)$$

Se sats 3.4. Sambandet (16) medför speciellt att överlappet tillhörande mängden $\tilde{S}^N(P)$ även det är strikt positivt - eller alternativt formulerat att $S_1(\tilde{S}^{N-1}(P)) \cap \tilde{\mathcal{L}} \neq \emptyset$. Vi vet även att $\tilde{S}^N(P)$ är en delmängd av K och från sats 5.6 impliceras att K är sammanhängande då $S_1(K) \cap \tilde{\mathcal{L}} \neq \emptyset$. Med andra ord kan vi genom att (i dator) beräkna $\tilde{S}^N(P)$ för detta N med säkerhet bekräfta att en sammanhängande invariant mängd K med *strikt positivt* överlapp

faktiskt är sammanhängande.

I praktiken har denna metod naturligtvis sina begränsningar. Detta beror på att metoden fungerar endast då det (för den betraktade mängden K) existerar ett $N = N(\mathcal{T})$ enligt ovan som är 'tillräckligt litet', ty för att beräkna mängden $\tilde{S}^N(P)$ behöver vi applicera S_i så mycket som 2^N gånger. En intressant observation är dock att vi givet en tillräckligt bra dator för ett givet K med positivt överlapp alltid kan hitta ett sådant N . I denna utopiska värld skulle vi således för varje sammanhängande invariant mängd K med strikt positivt överlapp (under symmetriantagandet) kunna bekräfta att den faktiskt är sammanhängande.

Notera däremot att denna metod (av uppenbara skäl) inte kan användas för att säkerställa motsvarande slutsatser hos invarianta mängder med överlapp $\mathcal{T} < 0$. Den fungerar i allmänhet inte heller då $\mathcal{T} = 0$, ty även om $\overline{\mathcal{W}} = K$ skär symmetrilinjen \mathcal{L} så är det inte säkert att \mathcal{W} någonsin gör det. Definitionen av \mathcal{W} återfinns på sida §11.



Figur 10: Approximationen är gjord under symmetriantagandet med antalet generationer $N = 15$. Observera att x -axeln svarar mot θ och y -axeln svarar mot r . De gröna punkterna är sådana för vilka den motsvarande invarianta mängden visat sig vara sammanhängande och de röda punkterna motsvarar sådan mängder som inte har bekräftats sammanhängande efter 15 generationer.

8 Diskussion

Vi har i denna rapport presenterat en handfull resultat kring (främst) symmetriska självliknande mängder i planet. Bland annat har vi besvarat frågan om när en invariant mängd är sammanhängande genom två alternativa separationskriterium (se sats 5.3 och sats 5.6). Vi har även visat de två sen innan kända satserna att om en invariant mängd är icke-sammanhängande så är den så totalt icke-sammanhängande (se sats 5.4) och att om så är fallet så uppfyller mängden OSC (se sats 6.6). Det kanske viktigaste resultatet anser vi dock vara existensbeviset utav en 'gränsfunktion' för två similituder i planet under symmetriantagandet (se §5). Med denna observation blir det möjligt att tala om 'gränsmängder' vilka uppvisar den intressanta egenskapen att de under förmodan av kontinuitet hos överlappet är sammanhängande och uppfyller OSC (se §6).

8.1 Avgränsningar

Vi inleder med att diskutera valet av avgränsningar. Bland annat har vi valt att betrakta självliknande mängder genererade utav similituder vilka representerar rotation och dilation kring (ofta) två punkter i planet. Såsom nämdes i §3 innebär detta att vi ignorerar similituder med translation eller reflektion i en linje eller uppsättningar similituder 'utanför' planet (det vill säga i \mathbb{R}^n eller dylikt). Speciellt symmetriantagandet $\Theta = \{\theta, -\theta\}$ kan vid första anblick verka som en mycket stark inskränkning. Det visar sig dock att de invarianta mängderna under symmetriantagandet uppvisar en förvånansvärt stor komplexitet och spridning i geometriska egenskaper.

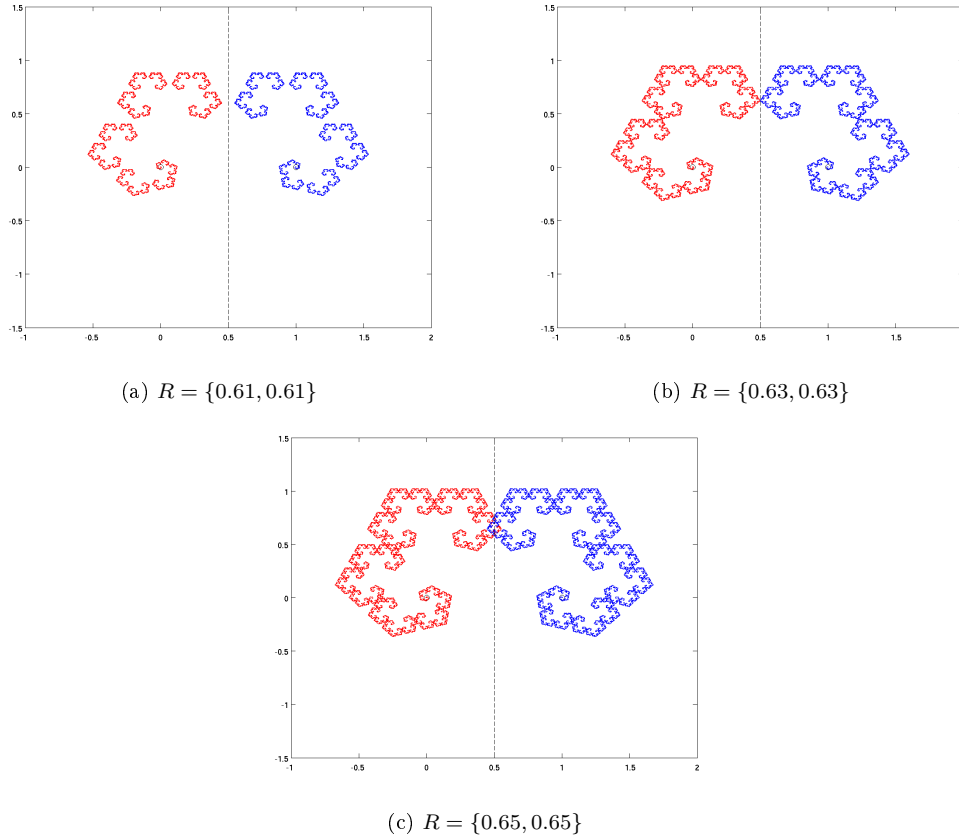
Dessa avgränsningar förklaras i regel helt enkelt med att det är lämpligt att börja studera enkla fall och enkla klasser av fall innan man börjar studera de svårare. En positiv aspekt av att betrakta en specifik (lagom komplex) klass av mängder är givetvis också att det varit möjligt att finna starka resultat och samband samtidigt som de invarianta mängderna är tillräckligt generella för att på ett intressant sätt kunna kopplas till redan känd teori (se exempelvis sats 6.7).

8.2 Spridda kommentarer kring resultat

Vi presenterar här några spridda kommentarer och observationer med syfte att precisera viktiga aspekter av våra resultat.

8.2.1 Förmodan om överlappets kontinuitet

I avsnitt 6 förmodas kontinuitet hos överlappet, vilket leder till ett antal intressanta resultat om gränsfunktionen. Denna förmodan måste naturligtvis motiveras. För det första, så anser vi denna förmodan rimlig baserad på observationer i datorsimuleringar av invarianta mängder, se figur 11. Dessutom är denna kontinuitet självklar i fallen $\Theta = \{0, 0\}$ och $\Theta = \{\pi, -\pi\}$ (se exempel 4.1.1). Detta gäller även i fallet $\Theta = \{\pi/2, -\pi/2\}$. I ovanstående fall följer detta direkt utav att vi explicit beskriver mängderna genom kontinuerliga funktioner i r . Slutligen kan vi även observera att överlappet är monotont i den mening som bevisades i sats 6.4, vilket tillsammans med ovanstående observationer gör det än mer troligt att överlappet är kontinuerligt.



Figur 11: Ett tillsynes kontinuerligt överlapp hos datorapproximationer av invarianta mängder (under symmetriantagandet) med godtyckligt valt $\Theta = \{4\pi/11, -4\pi/11\}$. Den röda 'halvan' approximerar $S_1(K)$ och den blå halvan approximerar $S_2(K)$.

8.2.2 P*-konvexitet

Angående konceptet P*-konvexitet presenterades ett delmängdresultat i §4. Det påpekades redan då att en sådan sats endast är intressant om det faktiskt existerar självliknande mängder som är P*-konvexa. Utan ett sådant exempel förblir sats 4.6 ett abstrakt kriterium. I avsnitt 4.2.1 försågs läsaren därför med det kanske enklaste (men ändå icke-triviala) exemplet på en P*-konvex mängd. Fördelen med detta exempel är naturligtvis att det är praktiskt möjligt att bestämma mängden explicit (det är lätt att beskriva en rektangel). Nackdelen är att mängden även är konvex i vanlig mening. För att definitionen av P*-konvexitet ska vara meningsfull är det önskvärt att det existerar självliknande mängder som är P*-konvexa men *inte* konvexa. I figur 3 presenteras därför ett exempel på en invariant mängd som vi *förmodar* är P*-konvex men där inte konvex. Vi vill särskilt påpeka att denna förmodan baseras på datorsimulationer vilka naturligtvis enbart är approximationer av den invarianta mängden.

Gällande existens av P*-konvexa mängder presenterar vi även följande hypotes: Genom att observera ett relativt omfattande underlag av datorsimulationer av självliknande mängder verkar det som om det existerar ett intervall $[\theta_1, \theta_2]$ sådant att mängderna $K_{r,\theta}$ med $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ och r i något intervall som beror av θ är P*-konvexa. En viktig fråga då man förlitar sig helt eller delvis på datorsimulationer är naturligtvis vad de har för precision. Den frågan lämnar vi åt framtiden.

8.2.3 Öppna mängdkriteriet

Vi ska nu diskutera öppna mängdkriteriet (OSC) för invarianta mängder med strikt positivt överlapp (i fallen då överlappet $\mathcal{T} \leq 0$ har vi visat att OSC alltid är uppfyllt). Vi har dock

inte behandlat fallet då $\mathcal{T} > 0$. Gäller OSC aldrig då $\mathcal{T} > 0$, gäller det alltid eller kan det variera från fall till fall?

Som ett led i processen att besvara denna fråga kan vi konstatera (se [MR]) att $K \subset \bar{V}$ är en förutsättning för att V ska satisfiera OSC. Om K då har icke-tomt inre så måste $\text{Int}(K)$ alltså vara en delmängd av V . Detta medför då att $S_1(\text{Int}(K)) \cap S_2(\text{Int}(K)) = \emptyset$. Då K har strikt positivt överlapp kan detta innebära en motsägelse, så som i exemplet givet utav $K_{r,\theta}$ med $\theta = \pi/2$ och r 'tillräckligt stort' ($r > 1/\sqrt{2}$ räcker enligt sats 7.4). Se exempelvis figur 3a vilket visar på en mängd med positivt överlapp som *inte* satisfierar OSC. Därmed kan vi dra slutsatsen att OSC inte alltid gäller för invarianta mängder med tillhörande $\mathcal{T} > 0$.

I allmänhet kan vi ur ovanstående observationer dra slutsatsen att enda möjligheten för OSC att eventuellt vara satisfierat för en självliknande mängd med strikt positivt överlapp är då $S_1(K) \cap S_2(K) \subset \bar{V} \setminus V$, där $S_1(K) \cap S_2(K) \neq \emptyset$ enligt sats 5.3. Vår känsla är att detta är mycket svåra kriterier att uppfylla, så om det existerar invarianta mängder med positivt överlapp som uppfyller OSC så är dessa troligtvis i någon mening få.

8.2.4 Gränsfunktionen

Vi kommenterar nu kort den approximativa plot av gränsfunktionen som presenterats i avsnitt §7.1.1. Med utgångspunkten att K är iterativt konstruerad ur mängden av rotationscentrum P är det naturligt att det inte kan vara 'lättare' för en invariant mängd att bli sammanhängande än om $\Theta = \{0, 0\}$. Då är det bekräftat att $r(0) = 1/2$ (det är intressant att se att den undre begränsningen given av sats 7.4 verkligen realiserar för någon invariant mängd) vilket följer av att K är sammanhängande om och endast om $r_1 + r_2 \geq 1$ (där r_1 och r_2 kan vara olika). Se sidan 10. Notera att även $r(\pi) = 0.5$, vilket framgår av kriteriet på samma sida. Även om figur 10 endast visar en approximation av $r(\theta)$ är det intressant att påpeka att de övre- och undre begränsningarna givna av sats 7.4 verkar stämma väl. Dessutom verkar det som att även den övre begränsningen $r(\theta) \leq 1/\sqrt{2}$ realiserar, exempelvis för $\theta = \pi/2$.

En naturlig fråga är ifall $r(\theta)$ är en kontinuerlig funktion, vilket tycks antydast av figur 10.

8.3 Intressanta frågor till framtiden

I detta stycke presenteras ett antal intressanta frågor som vi givet tid hade försökt besvara.

- Är det möjligt att bestämma mängden av (r, θ) sådana att den invarianta mängden K är P^* -konvex (med $\Theta = \{\theta, -\theta\}$ och $R = \{r, r\}$)?
- Går det att bevisa (istället för att bara förmoda) att överlappet är kontinuerligt med avseende på r ?
- Är gränsfunktionen $r(\theta)$ kontinuerlig?
- Om vi betraktar två similituder i planet med $\Theta = \{\theta, -\theta\}$ och $R = \{r_1, r_2\}$ där $r_1 \neq r_2$, går det då att hitta 'något' (exempelvis en linje eller en kurva) som skiljer $S_1(K)$ och $S_2(K)$ åt på ett sätt som i allt väsentligt motsvarar symmetrilinjen? Om så vore fallet skulle vi på samma sätt som i huvudsatsen kunna bevisa existens av en gränsfunktion liknande den som presenterats i denna rapport.
- Kan man hitta något lämpligt symmetriantagande för similituder i till exempel \mathbb{R}^3 och med hjälp utav samma metoder som använts i denna rapport visa existensen av en gränsfunktion även då?

Referenser

- [DM] Lokenath Debnath, Piotr Minkusinski *Introduction to Hilbert spaces with Applications*, 3rded. Elsevier Academic Press (2005).
- [F] K. J. Falconer *The Geometry of Fractals Sets*. Cambridge University Press (1985).
- [H] John E. Hutchinson *Fractals and Self Similarity*. Indiana University Mathematics Journal 30 (1981), 713-747.
- [M] Pertti Mattila *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge University Press (1995).
- [MR] Maria Roginskaya *Lecture notes in Advanced Basics of Geometric Measure Theory*.
- [DS] Dierk Schleicher *Hausdorff Dimensions, Its Properties and Its Surprises*. The Mathematical Association of America [Monthly 114 June-July 2007], 318.

Appendix

Detta appendix innehåller en variant av MATLAB-koden som vi använt för att konstruera bilderna i denna rapport.

Vi utgår från startmängden $E = \cup_{i=1}^{k-1} p_i p_{i+1}$, där $p_i p_{i+1}$ är det entydigt bestämda linjesegmentet med ändpunkter i p_i och p_{i+1} . För att slippa behandla ett specialfall så binds inte p_k och p_1 samman.

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Construction of invariant sets %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4
5 %Number of operations made is proportinal to k^N
6
7 %This file is a modified version of what we used to make the pictures for
8 %our repport. The modifications is that it works with more than 2
9 %similitudes.
10 clear all
11 pause on
12 P = [0,1;0,0]; % center of rotations of the form [p_1,p_2,...]
13 N = 15;
14 a = 0;
15 k = 2; %number of S, if greater than 2 change the if in the nested for.
16
17 X = P;
18 angle = [0*pi/12,0*pi/12]; %angle vector of the form [theta_1,theta_1,...]
19 alpha = [.5,.5]; %contraction vector of the form [r_1,r_2,...]
20 % angle and alpha must have same size and p must have same lenght as these.
21
22 for i = 1:N
23     for j = 1:k^a %Number of points in X.
24         for l = 1:k
25             Xnew = S(X(2*j-1:2*j,:),P(:,l),alpha(1),angle(1)); %temp var
26             X((2*(j+(k-1)*k^a)-1):(2*(j+(k-1)*k^a)), :) = Xnew;
27         end
28     end
29     a = a + 1; %current generation
30 end
31
32 figure(1)
33 plot(P(1,1),P(2,1),'or');
34 axis([-3.4,-3.5,3.5]); %zoom
35 hold on
36 for i = 2:max(size(P))
37     plot(P(1,i),P(2,i),'or') %to plot the rotationcentrums as red o:s
38 end
39
40 len = max(size(X))/2;
41 for i = 1:len
42     plot(X(2*i-1,:),X(2*i,:))
43 end
44 %saveas (figure(1), 'r1_085_r2_085_v1_5div12_v2_m5div12.png', 'png'); %to save
45 hold off
```

```

1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Similitude %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4  function X = S(X,p, alpha , angle )
5      len = max(size(X));
6      Xx = zeros(size(X)); %temp var
7
8      for i = 1:len %translating the origin
9          Xx(:,i) = X(:,i) - p;
10     end
11
12     A = [cos(angle),-sin(angle); sin(angle),cos(angle)]; %rotation matrix
13     Xx = alpha*A*Xx; %rotate
14
15     for i = 1:len %move back to original coordinates
16         X(:,i) = Xx(:,i) + p;
17     end
18 end

```