GÖTEBORGS UNIVERSITET
Utbildnings- och forskningsnämnden för lärarutbildningen
Lärarprogrammet, examensarbete 10 poäng

# Irrationella tal

## – vilka begreppsmodeller använder sig lärare av vid introduktion av tal i bråkform?

Claes Benjegård
Susanne Eneland
Elisabeth Nohlås

LAU 350, Människan i världen
Handledare: Per- Olof Bentley
Examinator: Thomas Lingefjärd
Rapportnummer: HT05-2611-096

# Abstrakt

**Arbetets titel** Irrationella tal – vilka begreppsmodeller använder sig lärare av vid introduktion av tal i bråkform?

**Arbetets art** Examensarbete i det allmänna utbildningsområdet inom lärarprogrammet.

**Sidantal** 41

**Författare** Claes Benjegård, Susanne Eneland och Elisabeth Nohlås

**Handledare** Per-Olof Bentley

**Tidpunkt** Höstterminen 2005

---

**Syfte** Syftet med denna undersökning är att ta reda på vilka begreppsmodeller lärarna använder vid introduktion av arbetet med *tal i bråkform*. Syftet är också att undersöka om skillnader i val av begreppsmodeller föreligger mellan mellanstadiets och högstadiets lärare.
Med undersökningen vill vi få fram om lärarna anser att eleverna har relevant förförståelse för *tal i bråkform*. Undersökningens syfte är också att få fram vilka fallgropar lärarna upplever att det finns i de begreppsmodeller de använder sig av vid introduktion av *tal i bråkform*. Syftet är att undersöka vilka förförståelser lärarna anser att eleverna behöver och vilka fallgropar lärarna kan se med de olika begreppsmodellerna. Det resultat som studien kommer att visa vill vi jämföra med tidigare forskning.

**Bakgrund** Det finns olika sätt att förstå *tal i bråkform* så som:

1. en *del av helhet*
2. en *andel*
3. en punkt på *tallinjen*
4. resultatet av en *division*
5. *proportion*
6. *förhållande*

Dessa bildar begreppsmodeller som lärarna använder sig av vid arbetet med *tal i bråkform*

**Metod** Vi har genomfört intervjuer med matematiklärare från både mellan- och högstadiet. Vi har innehållsanalyserat de utskrivna intervjuerna, tagit del av tidigare forskning och studerat skolans läromedel.

**Slutsatser** Flertalet av de lärare vi intervjuat använder sig av en eller flera begreppsmodeller. Studien har visat på att mellanstadielärarna anser att eleverna har en viss förförståelse medan högstadielärarna säger att eleverna saknar relevant förförståelse för *tal i bråkform*. Analysen av de utskrivna intervjuerna har visat att några av de intervjuade lärarna är medvetna om att fallgropar/svårigheter kan förekomma i de begreppsmodeller de använder vid introduktion av *tal i bråkform*. Svårigheter kan också uppstå om de begreppsmodeller som används ej är kompatibla.

# Förord

Vi har valt att genomföra en jämförande studie då vi kommer att undervisa på olika stadier när vi får våra examina. Det ger oss en möjlighet att se vad eleven bör lära sig eller bör kunna där vi kommer att arbeta. Vi vill även att eleverna ska uppleva att det finns en röd tråd genom hela sin utbildning och att de får en bra grund till ett livslångt lärande.

Jag heter Susanne Eneland och läser nu min nionde termin på lärarprogrammet. Jag har läst 60 poäng matematik, 40 poäng teknik och design och dessutom 20 poäng matematikdidaktik. Jag ser matematiken som mitt huvudämne och det var därför jag ville skriva mitt examensarbete inom ämnet. Tack vare de sista 10 poängen matematikdidaktik jag läste blev jag väldigt uppmärksam på just problematiken kring tal i bråkform. Jag anser att jag lärde mig väldigt mycket inom detta område under min extra termin med didaktik. Jag vill därför titta på hur undervisningen kring tal i bråkform fungerar ute i skolan.

Claes Benjegård heter jag. Jag har läst 20 poäng matematik, 10 poäng matematikdidaktik, 30 poäng naturkunskap och 20 poäng utomhuspedagogik och friluftsliv. Eftersom jag alltid tyckt att matematik har varit ett intressant och roligt ämne valde jag att skriva mitt examensarbete inom ämnet. För min egen del så har bråktal varit det som varit svårast att förstå och kanske svårast att lära ut till eleverna, speciellt i de högre åldrarna. Därför tyckte jag att en studie i hur man introducerar bråk och bråkräkning vore till gagn för min kommande yrkesprofession.

Mitt namn är Elisabeth Nohlås och jag läser nu sista terminen på min lärarutbildning, inriktning Matematik/Natur tidigare åldrar. Jag har läst 20 poäng matematik, 20 poäng matematikdidaktik, 20 poäng naturkunskap samt 20 poäng svenska. I ämnesdidaktiken fokuserades det mycket kring svårigheter i samband med tal i bråkform. Då tal i bråkform ligger till grund för elevers fortsatta studier inser jag vikten av lärares kompetens inom området och därför ville jag fördjupa mig inom tal i bråkform.

Vi vill rikta ett tack till våra familjer som stöttat oss under utbildningens gång. Vi vill också tacka de intervjuade lärarna som delade med sig av sina erfarenheter, utan er kunde denna undersökning ej ha genomförts. Till sist vill vi tacka vår handledare Per-Olof Bentley som varit till stor hjälp under arbetets gång.

Mölndal den 21 december 2005

*Susanne Eneland* *Claes Benjegård* *Elisabeth Nohlås*

# Innehåll

# 1. Inledning

*Tal i bråkform* ses oftast som en svårighet i skolans matematikundervisning. Svårigheterna tycks till viss del ligga i avsaknaden av koppling till verkligheten då enbart en av begreppsmodellerna, *andelsmodellen*, är en beskrivning av verkligheten. De övriga begreppsmodellerna är konstruerade i den abstrakta matematiken. Även motivationen för räkning av *tal i bråkform* tycks föreligga som ett problem. Den undervisande lärarens osäkerhet i samband med *tal i bråkform* kan också påverka elevernas inställning. I *Lusten att lära* (2003) kan man bland annat läsa följande:

> Innehållet i skolarbetet i stort och i matematik måste upplevas som relevant och begripligt. Att plötsligt förstå något som länge varit svårt stärker motivationen.
> För förståelse och förmåga att internalisera ny kunskap behöver eleverna kunna anknyta till något redan känt. Elever uttrycker […] att matematik är roligt när de förstår, tråkigt blir det när man inte förstår. Att välja arbetsmetoder där läraren kan upptäcka elevers styrkor, svårigheter och svagheter i ett tidigt skede kan därför sägas vara en möjlig strategi för att undvika att lusten att lära matematik går förlorad. För många elever har mycket inom matematikämnet liten eller ingen relevans. När innehållet inte upplevs meningsfullt och eleverna inte förstår det de arbetar med är det svårt att upprätthålla intresse och motivation. Och omvänt, när motivationen är hög är matematiken meningsfull och begriplig, vilket starkt främjar lusten att lära.
> (Skolverket: Lusten att lära – med fokus på matematik, 2003:21)

I dagens skolas matematikundervisning ges inte stort utrymme för tal i *bråkform*. Under vår utbildning till matematiklärare har vi fått fördjupade kunskaper vilka gett oss insikten om betydelsen av *tal i bråkform*. Elevers fortsatta matematikstudier till exempel i algebran bygger på goda kunskaper om *tal i bråkform*. I dagens skolsystem i Sverige läser de flesta elever vidare efter grundskolan, det innebär att de måste ha tillräckliga kunskaper för detta. Det står i styrdokumenten att skolan ska utbilda för ett livslångt lärande och kunskapen måste därmed vara utvecklingsbar.

Löwing och Kilborn (2002) skriver i *Baskunskaper i Matematik*, att man tidigare i skolan använde sig av operationella modeller där eleverna fick lära sig att exempelvis multiplikation av $5 \cdot 2/9$ så skulle denne multiplicera täljaren 2 med 5. Svårigheten med detta sätt var att operationen saknade förankring i verkligheten vilket innebar att eleverna blandade ihop det med förlängning av *tal i bråkform*. Svaret de då fick blev $5 \cdot 2/9 = 10/45$.

> För att undvika dessa problem är det i dag vanligt att lärare och läromedel gör om alla bråk till decimaltal. Den aktuella uppgiften löser man då med hjälp av en miniräknare i två steg, först som 2 dividerat med 9 = 0,222… och därefter som $5 \cdot 0{,}222 = 1{,}111$. Vår fråga är nu vad som är poängen med detta? Vad är det man vill att eleverna skall lära sig och varför behandlar man bråkräkning över huvudtaget om man utför beräkningen så här?
> (Löwing, M. och Kilborn, W. Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle, 2002:50)

Om lärare övergår från *tal i bråkform* till decimaltal för att förenkla förståelsen för eleverna är det lätt att de berövar eleverna kunskapen och därmed förförståelsen för fortsatta studier.
I *Lusten att lära* (2003) kan man läsa:

> Lärare behöver ett djup i sina ämneskunskaper, till exempel i matematik, som gör att de kan associera fritt över hela ämnesfältet, en kompetens som gör dem friare i förhållande till läromedlet. Först då kan de ta hand om den frihet som de nationella måldokumenten uppmanar till. De behöver samtidigt en didaktisk kunskap i matematik så att de kan utgå från och bygga vidare på det matematiska tänkande som eleverna har med sig till klassrummet.
>
> (Skolverket: Lusten att lära – med fokus på matematik, 2003:42)

Lärare behöver ett djup i sin ämneskunskap, en egen trygghet för att kunna hjälpa eleverna att finna kunskap.

## 1.1 Syfte

Syftet med denna undersökning är att ta reda på vilka begreppsmodeller lärare använder vid introduktion av arbetet med *tal i bråkform*. Syftet är också att undersöka om skillnader i val av begreppsmodeller föreligger mellan mellanstadiets och högstadiets lärare.

Med undersökningen vill vi få fram om lärarna anser att eleverna har relevant förförståelse för *tal i bråkform*. Undersökningens syfte är också att få fram vilka fallgropar lärarna upplever att det finns i de begreppsmodeller de använder sig av vid introduktion av *tal i bråkform*. Syftet är att undersöka vilka förförståelser lärarna anser att eleverna behöver och vilka fallgropar lärarna kan se med de olika begreppsmodellerna. Det resultat som studien kommer att visa vill vi jämföra med tidigare forskning.

### 1.1.1 Avgränsning

Tiden för hela arbetet är 10 veckor vilket innebär begränsningar. Vi har därför valt att undersöka räkning med *tal i bråkform* och då endast vilka begreppsmodeller som lärare använder sig av vid introduktion av *tal i bråkform*. Vi begränsade antalet intervjuer för att hinna analysera utskrifterna av desamma. Om vi i stället valt att göra fler intervjuer så hade tiden inte räckt för att analysera materialet.

# 2. Metod

## 2.1 Innehållsanalys

Vi har valt att använda oss av kvalitativ innehållsanalys. Det innebär att man använder sig av skriven text från samtal och/eller observationer. Genom att välja ett kvalitativt undersökningssätt istället för ett kvantitativt ger det möjligheter att få fram en djupare kunskap om det undersökta fenomenet. Vi har använt oss av de utskrivna intervjuerna för att kunna analysera vilka begreppsmodellssammansättningar de intervjuade lärarna använde sig av vid introduktion av *tal i bråkform*.

”Målsättningen med arbetet är att hitta mönster, teman och kategorier i materialet. Dessa mönster, teman och kategorier ligger sedan till grund för den skriftliga rapport […]” kan man läsa i *Forskningsmetodikens grunder* (1994:101).

## 2.2 Intervjuer

Vi strukturerade vår intervjuform att vara helt öppen det vill säga att vi ställde öppna frågor som de intervjuade, respondenterna fritt kunde utveckla sina tankar kring. Beroende av vad respondenterna berättade ställde vi relevanta följdfrågor, se Bilaga 1. Flera av de intervjuade lärarna beskrev sitt arbete på ett uttömmande sätt så att följdfrågor ej var betydelsefulla. Respondenterna beskrev fenomenet räkning med *tal i bråkform* och hur de uppfattade elevernas förutsättningar att klara av detta i mellanstadiet och i högstadiet. Vi valde att göra en empirisk studie för att kunna bilda oss en uppfattning om vad som händer i dagens skolors matematikundervisning.

Med våra, författarnas, tre olika stadieinriktningar ville vi genom empatin som medel söka närma oss respondenternas sätt att tänka, så kallad *inifrånförståelse*.

> Ett oundgängligt krav för att förstå en annan individ blir att så långt det är möjligt söka inta den andres perspektiv. Inom psykologin kallas detta empati eller ställföreträdande introspektion.
>
> (Lantz, A: Intervjumetodik, 1993:28)

Svårigheterna med en öppen intervju är att kunna jämföra de olika svaren. Detta har vi sökt eliminera genom att ställa följdfrågor då respondenten ej tagit upp delar av fenomenet som intresserat oss. Genom att vara medvetna om svårigheterna har vi aktivt sökt undkomma desamma.

När vi frågade de berörda lärarna om vi fick intervjua dem informerade vi om att syftet med intervjuerna var att undersöka hur de lägger upp sin matematikundervisning vid introduktion av *tal i bråkform*. Vidare informerade vi om att vi skulle spela in intervjuerna på band, göra utskrifter av dessa och att i utskrifterna av intervjuerna dölja namn, skola etcetera Vi informerade också om att det enbart var vi tre, som skrev examensarbetet, som skulle lyssna på banden. Vi bestämde tid för intervjuerna, efter lärarnas ordinarie arbetstid, vi ville att det skulle finnas gott om tid så de inte skulle känna sig stressade. Att respondenten ej känner sig stressad är en av viktiga ramfaktorer vid intervjuer, andra ramfaktorer vid en intervju kan vara valet av miljö, det vill säga inga störande moment och att det sker enskilt.

## 2.3 Litteraturstudier

Vi valde att använda oss av litteraturstudier för att fördjupa oss inom *tal i bråkform* och för att få insikt i vilka olika begreppsmodeller som föreligger. Vi var också intresserade av att se om det fanns någon tidigare forskning inom vårt intresseområde. För att se vilka begreppsmodeller som förekommer i läromedlen har vi valt att studera två vanligt förekommande läroböcker.

## 2.4 Reliabilitet

Vi valde att göra personliga intervjuer där vi ställde öppna frågor, för att få beskrivande svar. Vår undersökning bygger på att de intervjuade lärarna skulle ge oss spontana, innehållsrika och ej förutsägbara svar. Då vi valde denna typ av undersökande sätt i stället för enkäter är trovärdigheten hög. Samtliga tillfrågade respondenter ställde upp och alla intervjuade kommenterade samtliga frågor.

Kunskaper i ämnet matematik byggs upp stegvis och med tanke på det sammanställde vi intervjuguiden på liknande sätt, se Bilaga 1. Frågorna är indirekt ställda för att undvika så kallade ”que seekers”, de som vill svara rätt på ställda frågor. Frågorna i Intervjuguiden är neutralt ställda, när följdfrågor var relevanta ställdes även dessa neutralt. Under intervjuerna försökte vi med vårt kroppsspråk och mimik förhålla oss neutrala men intresserade. När vi genomförde intervjuerna satt vi utan störande moment och efter lärarens avslutade lektionstid.

För att få variation gällande urvalet av respondenter intervjuade vi fem lärare, Malin 52 år, Greta 60 år, Gustav 61 år, Eva 32 år och Anita 30 år som arbetar i mellanstadiet och sex lärare, Folke 29 år, Albin 31 år, Gunnar 60 år, Erika 36 år, Stina 45 år och Sara 48 år, som arbetar i högstadiet. Lärarna har skiftande ålder och därmed varierande lärarutbildningar, vi intervjuade både kvinnliga och manliga lärare, se utförligare beskrivning av de intervjuade lärarna i Bilaga 2. Detta betyder att de tillfrågade har olika erfarenheter som är avgörande för att kunna lyfta fram variationen av undervisningssätt. Skolorna som de intervjuade lärarna arbetar på, är belägna i olika delar av Västra Götalandsregionen och i skiftande sociala och geografiska miljöer, för utförlig beskrivning se Bilaga 3.

För att behålla respondenternas anonymitet har vi valt att använda oss av fiktiva namn. Avsikten med namnåtergivningen är att lättare åskådliggöra intervjuerna.

## 2.5 Validitet

”Validiteten är svårfångad och mångtydig men ändå grundläggande för undersökningens värde. Man måste upprepade gånger fråga sig: Undersöker jag det som jag verkligen vill undersöka?” Stukát (Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap, 2005:128)

Vi har innehållsanalyserat de utskrivna intervjuerna, studerat tidigare forskning samt läst i de vanligast förekommande läromedlen. Om dessa tre metoder stödjer varandra har vi uppnått en triangulering vilket leder till att undersökningen är trovärdig.

Efter att ha analyserat det utskrivna intervjumaterialet skapade vi fyra olika kategorier. Kategori ett består av lärare som vi tolkat använder sig av en begreppsmodell. I de andra tre kategorierna har vi placerat de lärare som vi tolkat använder sig av två eller flera begreppsmodeller.

De intervjuade lärarnas undervisningsmetoder har vi sedan sorterat in under respektive kategori. Samtliga tolkade resultat passar in i någon av de skapade kategoriernas område och därmed styrks trovärdigheten av vad som framkommit i undersökningen. Det är troligt att även i en större undersökning skulle denna studies framtagna kategorier finnas med, eventuellt med vissa tillägg.

Samtliga namn som uppges i undersökningen är fiktiva, då vi vill behålla de tillfrågades anonymitet.

## 2.6 Begreppsdefinition

**Tal i bråkform/bråktal/rationella tal** – vi har valt att använda dessa uttryck i resten av arbetet istället för bråk då det kan misstolkas.

**Begreppsmodeller** – det finns olika sätt på vilka man kan förklara *tal i bråkform* dessa benämner vi i fortsättningen som begreppsmodeller.

**Ekvivalenta** – detta ord beskriver när täljare och nämnare i två olika bråktal står i samma förhållande till varandra till exempel $\frac{3}{4}$ är ekvivalent med $\frac{12}{16}$.

**Ej kompatibla** – är ett annat uttryck för oförenliga, om ett begreppsattribut i den ena modellen signalerar egenskaper som inte motsvarande begreppsattribut i den andra modellen gör. Vi använder ordet i samband med begreppsmodellssammansättningar.

**Fallgropar** – är ett beskrivande ord för svårigheter inom matematiken.

**Oegentliga bråktal** – *tal i bråkform* där täljaren är större än nämnaren till exempel $\frac{4}{3}$.

**Bråktal i blandad form** – *tal i bråkform* med ett heltal samt ett *tal i bråkform* till exempel $1\frac{1}{2}$.

**Chokladkakemodellen** – används som visualisering av *del av helhetsmodellen.*

**Pizza-/tårtmodellen** – används som visualisering av *del av helhetsmodellen.*

**Inifrånförståelse** – med hjälp av sin egen kunskap är det lättare att tolka och förstå hur andra resonerar kring olika begrepp.

# 3. Bakgrund

Vi vill med detta avsnitt visa vilka begreppsmodeller vi använder oss av som underlag vid analyseringen av intervjuerna. Inom studiens frågeställning om vilka begreppsmodeller matematiklärare använder sig av finns flertalet tidigare studier gjorda utomlands. Då det finns flertalet studier som visar på ett antal olika begreppsmodeller har vi här valt att begränsa oss till de begreppsmodeller som beskrivs av författarna, Dickson, Brown och Gibson, i boken *Children learning mathematics – A teacher´s guide to recent research*.

## 3.1 Begreppsmodeller

Förklaringen av begreppsmodellerna är refererade från *Children learning mathematics – A teacher's guide to recent research* skriven av Dickson, Brown och Gibson (1990). Översättningen är gjord av denna studies författare.

### 3.1.1 Utveckling av en förståelse kring betydelsen av *tal i bråkform*

Komplexiteten kring betydelsen av *tal i bråkform*
En av svårigheterna när det gäller *tal i bråkform* är att de kan ha olika betydelse. Vilket *bråktal* som helst kan visualiseras på flera sätt som de flesta kan hänvisas till händelser i vardagslivet. Till skillnad från heltalen, som oftast används för uppräkning eller mätning av längder och så vidare. *Tal i bråkform* kan ses på olika sätt såsom:

1. en *del av helhet*
2. en *andel*
3. en punkt på *tallinjen*
4. resultatet av en *division*
5. *proportion*
6. *förhållande*

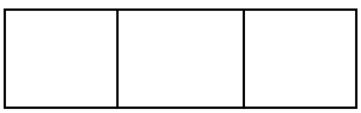
Ovanstående är en del av alla de olika sätt på vilka man kan uppfatta *tal i bråkform*. Ekvivalens och de mer abstrakta betydelserna är ej omnämnda. De 6 nämnda synsätten ger en idé av de olika begreppsmodellerna och användningen av *tal i bråkform*, vilka många inte är sammanlänkade i barnens huvuden.

*Tal i bråkform* som ”*del-area*” av ett enhetsområde (*Del av helhet*)
Första gången elever stöter på konceptet och terminologin kring *tal i bråkform* är troligtvis av rymdkaraktär, och dessutom oftare 3-dimensionelt än 2-dimensionelt. Eleven refererar då till exempel ”halvfull” till ett glas med mjölk som varken är fullt eller tomt utan någonstans där emellan och ”ett halvt äpple” kan förstås som ”en bit äpple”.

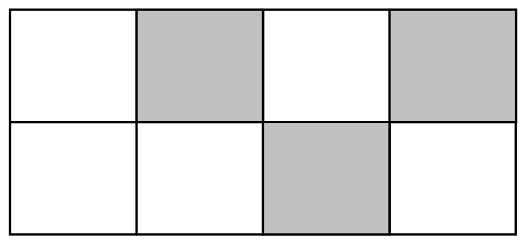
I Dickson, Brown och Gibson (1990: 277) kan man läsa:

> Piaget, Inhelder och Szeminska ger sju kriterier för operationell förståelse av rumsuppfattad ”del – helhet” aspekt om *tal i bråkform*:
>
> 1. en ”helhet” ses som delbar
> 2. ”helheten” kan bli delad i önskat antal delar
> 3. delarna måste förbruka hela ”helheten”
> 4. antalet bitar behöver inte stämma överens med hur många gånger man har ”utfört en delning”
> 5. delarna måste vara lika stora
> 6. delarna kan betraktas som en ny helhet
> 7. helheten är bevarad, även när den är delad i bitar

Det finns åtskilliga bevis på att elever finner denna rumsuppfattning av *del av helhet* som det enklaste sättet att förstå *tal i bråkform*.



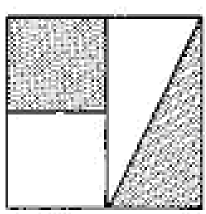
Figur 1



Figur 2

(Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:278)

I Harts (1980) undersökning, där 12 – 13- åringar ingick, framkom att eleverna verkade ha det lättare att skugga en tredjedel av Figur 1 än att skriva ner *bråktalet* som representeras av den skuggade delen av Figur 2. Ett fåtal av eleverna skrev talet $\frac{3}{5}$ istället för $\frac{3}{8}$, de relaterade den skuggade arean till den icke skuggade istället för till hela ytan.



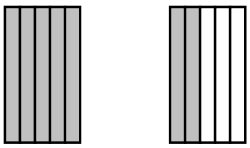
Figur 3

(Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:278)

Dickson, Brown och Gibson (1990) poängterar att det bör noteras att i alla dessa fall var areorna inte bara lika stora utan även likformiga. Det är möjligt att eleverna skulle kunna ha haft svårare att acceptera att de båda skuggade areorna i figur 3 representerar varsin fjärdedel av kvadraten.

Ett antal studier, enligt Dickson, Brown och Gibson (1990), påvisar att ovanstående sätt att förstå *tal i bråkform* på verkar vara enklast men även här finns svårigheter. De svårigheter som återkommer under de olika undersökningarna är:

1. förståelsen av behovet av lika stora *del-areor*
2. översättning från figuren till ord (tre fjärdedelar) och symboler ( $\frac{3}{4}$ )
3. förståelsen av *tal i bråkform* större än en enhet, s.k. *blandad form*
4. enhetsidentifikationen från en figur som visar mer än en helhet



Figur 4 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:279)

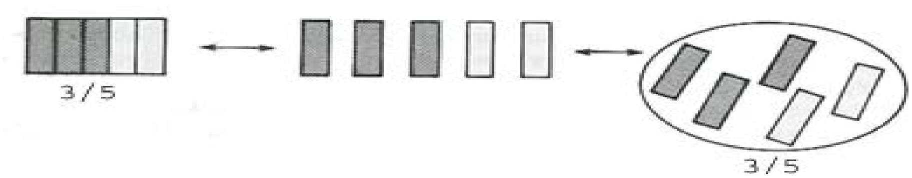
Som ett exempel på punkt 3 och 4 föregående sida, refererar Payne till Williams resultat relaterat till Figur 4. Många elever skrev $\frac{7}{10}$ istället för $\frac{7}{5}$ när de fick frågan vilket *tal i bråkform* som figuren representerade.

Representationen av *tal i bråkform* som *del-areor* av en *enhetsarea* är inte så välfungerande när det gäller *oegentliga tal i bråkform* så som $\frac{7}{5}$ . Faktum är att definitionen av *tal i bråkform* som *del av helhet* är ohållbar när det gäller *oegentliga tal i bråkform*. Andra problem dyker upp vid användandet av *areamodellen*, speciellt med addition, vilket tas upp senare i kapitlet.

Många läroböcker använder sig enbart av *areamodellen* och svårigheter kan uppstå då eleverna verkar ha svårt att se bortom denna modell då *bråktalen* ter sig olika i olika situationer.

*Tal i bråkform* som ett antal av en mängd (*Andel*)
*Andelsmodellen* är i huvudsak lik modellen med *tal i bråkform* som *del- area* av ett enhetsområde. Om man separerar *del- areorna* blir det nästan omöjligt att differentiera.

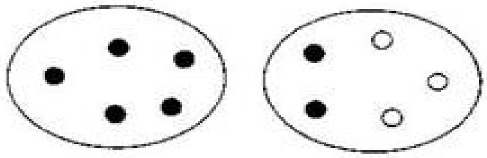
Del av helhetsmodellen Andelsmodellen




Figur 5 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:279)

Helheten kan vara enklare att uppfatta i del av *helhetsmodellen* jämfört med *andelsmodellen*. Det har genomförts flera undersökningar på området med motsägande resultat. Någon studie visar att *andelsmodellen* har samma svårighetsgrad som del av *helhetsmodellen* medan någon annan studie förkastar helt *andelsmodellen* då den anses vara svår och ogreppbar.

Resultaten av studierna visar att med både *mängd-* och *areamodellerna* har ungefär en tredjedel av eleverna troligen inte någon klar konceptuell uppfattning om *tal i bråkform*, inte ens i en konkret mening, när de är 11 år.



Figur 6 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:280)

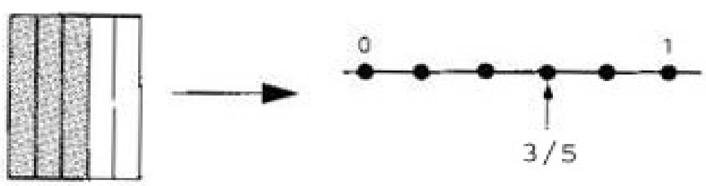
*Mängdmodellen*, som här diskuterats, har samma nackdel som *areamodellen* när det gäller illustreringen av *oegentliga bråk*. $^{7}\!/_{5}$ skulle behöva representeras så som visas i Figur 6 denna figur skulle dock kunna tolkas som $^{7}\!/_{10}$, eftersom det blir en otydlighet kring enhetens ”natur”.

*Mängdmodellen* leder naturligt fram till idén kring förhållande och procent av mer abstrakt natur. Denna modell involverar *tal i bråkform* som en operator på andra tal, snarare än en enhet som står vid sidan av. *Areamodellen* leder naturligare till idén av *tal i bråkform* som en del av standardenheterna som används vid mätning samt tallinje- aspekten som tas upp i följande avsnitt.

*Tal i bråkform* förekommer ofta i både mätnings- och operatoraspekten. På en introduktionsnivå är det därför av stor vikt att knyta an till konkreta upplevelser inom både *area*- och *mängdmodellerna*.

*Tal i bråkform* som en *punkt på tallinjen*

Dickson, Brown & Gibson (1990) (1990) skriver att man skulle kunna tro att det finns ett starkt samband mellan representationen av *tal i bråkform* som en *del-area* av en enhetsarea och samma *bråktal* som en del- längd av en enhetslängd eftersom den sistnämnda innebär en 1-dimensionell motsvarighet av det förstnämnda.




Figur 7 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:281)

Payne rapporterade 1976 att vid varierande undervisningsexperiment med *tallinjemodellen* orsakade denna genomgående svårigheter för de i experimentet medverkande 8–12-åringarna. De refererade undervisningsexperimenten utfördes i Michigan av Muangnapoe, Williams, H.B och Galloway (1975). I Novillis (1976) undersökning av den hierarkiska utvecklingen av ”*tal i bråkforms*”-konceptet när det gäller 10–12-åringars uppfattning bekräftas att *tallinjemodellen* var signifikant mycket svårare att förstå än både *del av helhetsmodellen* och *andelsmodellen*. En orsak till detta kan vara i Figur 7, vilken är den som användes av Novillis. I *tallinjemodellen* ses *bråktalet* som en punkt. Här poängteras att $^{3}\!/_{5}$ ses som ett *tal*, i likhet med 0 och 1 eftersom de också representeras av punkter. Till skillnad från de två andra begreppsmodellerna införlivar inte *tallinjen* föreställningen att *tal i bråkform* ses som en del av ett konkret objekt eller som del av en mängd utan reduceras till ett abstrakt tal. Uppenbarligen orsakar detta problem för 8–12-åringar samt även för en del äldre elever.

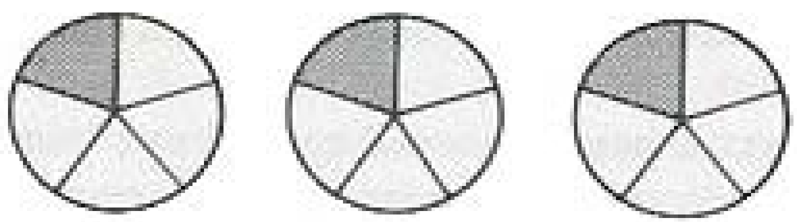
*Tallinjemodellen* bidrar till en del fördelar, dels verkar det *oegentliga bråket* mer naturligt och dels förstärker den att *tal i bråkform* bildar en förlängning av de naturliga talen. Den viktigaste aspekten av *tallinjemodellen* kan vara att den hjälper till att ”täppa till hålen” mellan de naturliga talen. *Tallinjemodellen* leder således naturligt till användandet av *bråktal* vid all typ av mätning.


Figur 8 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:282)

Novillis (1976) upptäckte att användandet av *tallinjen* var försvårande om *tallinjen* fortsatte efter ett. När 12-åringar blev ombedda att markera punkten som representerade $\frac{3}{5}$ valde många att markera en punkt $\frac{3}{5}$ av hela den tallinjesträcka som syntes vid användandet av tallinjen i Figur 8 markerade eleverna en punkt vid 3:an då den är $\frac{3}{5}$ av 5. Om tallinjen endast sträckte sig mellan 0 och 1, kunde de flesta 12-åringarna svara rätt.

Det faktum att eleverna inte kunde bestämma vad som bildar en lämplig enhet, tog de hela sträckan som syntes som en representant för enheten, likhet med *area-modellen*. Eleverna såg inte att segmentet mellan 0 och 1 representerar en numerisk enhet. Förvirringen kring enhetsarten kunde ha varit mindre förekommande om eleverna hade haft mer erfarenhet av numeriska skalor där *tal i bråkform* finns representerade. Dickson, Brown & Gibson (1990) (1990) menar på att elever ända upp till högstadienivå troligen är osäkra på *tal i bråkforms* aspekt som ett tal representerat av en punkt på tallinjen.

*Tal i bråkform* som resultat av en *division*



$3 \div 5 \rightarrow \frac{3}{5}$

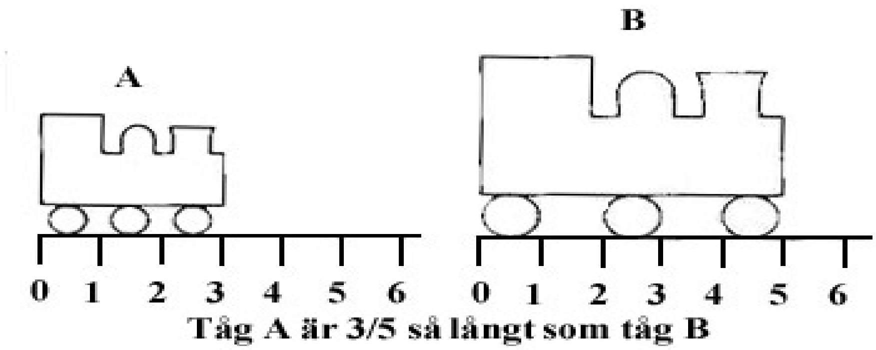
Figur 9 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:283)

I denna begreppsmodell associeras bråktalen med en räkneoperation då man delar ett heltal med ett annat exempelvis $\frac{3}{5}$ är identifierbart med $3 \div 5$, eller att dela 3 enheter mellan 5 stycken.

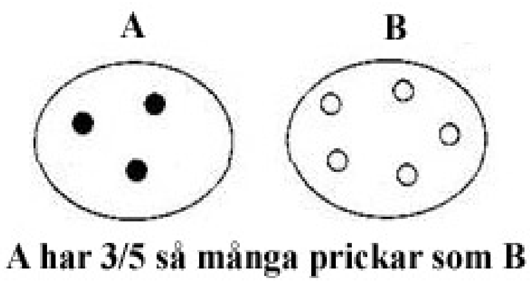
Payne (1976) skriver att det behövs mer forskning kring *tal i bråkform* och varken han eller Novillis (1976) skriver något om *tal i bråkform* som *division*. Streefland (1982) använder sig däremot av denna modell som en kärna i sitt undervisningsprogram.

I *Children learning mathematics* (1990) kan man läsa om Harts rapporter (1980, 1981). Som en del i en studie av engelska 12–13-åringars uppfattning var följande fråga ställd: ”Tre chokladkakor ska delas lika mellan fem barn. Hur mycket skulle varje barn få?” På ett separat räknepapper fanns parallell frågan ”3 delat på 5”. I vart och ett av fallen var det 33 % av eleverna som svarade rätt, $\frac{3}{5}$ eller 0,6. Bara en tredjedel av den undersökta gruppen förstod att ett heltal som delas med ett annat heltal ska uttryckas som ett *bråktal* för att ge ett exakt svar.

*Tal i bråkform* som en metod för att jämföra förhållandet mellan två mängder eller två mått (*Proportion & Förhållande*)



Figur 10 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:275)



Figur 11 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:275)

Dessa begreppsmodeller av *tal i bråkform*, summerad i Figur 10 och 11, är basen till många av de tillämpningar som återfinns i verkliga livet, speciellt de som innefattar proportion eller skala till exempel ritningar och kartor. I båda figurerna skulle jämförelsen kunnat vara omvänd det vill säga ”B har $\frac{5}{3}$ så många prickar som A”: ”Tåg B är $\frac{5}{3}$ så långt som tåg A”. Vilket betyder att det inte är någon bestämd enhet som i de begreppsmodeller av *tal i bråkform* som vi tidigare har beskrivit.

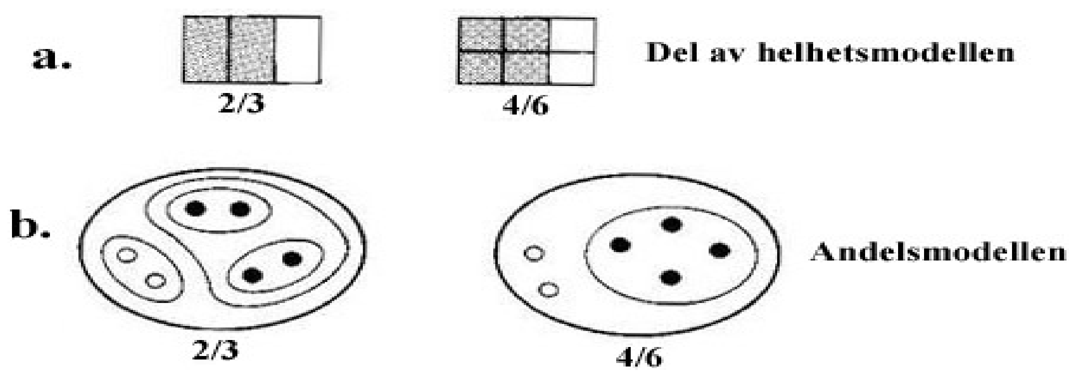
Novillis (1976) skrev i undersökningens resultatdel att denna aspekt av *tal i bråkform* utvecklas märkbart senare hos eleverna än *area*- och *andelsmodellerna*. Detta styrks av flera andra studier som undersöker förståelsen av begreppsmodellerna *proportion* och *förhållande*. Resultatet av de genomförda studierna påvisar att majoriteten av alla vuxna finner svårigheter i föreställningen av att uttrycka ett tal eller antal som en del av ett annat tal. Piaget m.fl. (1968), Karplus m.fl. (1977) och Harts (1980) studier har kommit fram till att elever tenderar att omvänt använda sig av en additiv jämförelse, till exempel ”3 mer än”.

### 3.1.2 Förståelse av strukturen av *tal i bråkform*

Ekvivalens mellan *tal i bråkform*

Vid användning av *tal i bråkform* krävs det ofta en förståelse om att varje *rationellt tal* kan skrivas som något av ”familjemedlemmarna” av ekvivalenta bråktal till exempel två tredjedelar kan representeras av något av talen $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}$ och så vidare. Ekvivalensen mellan *tal i bråkform* är nödvändig för att jämföra två olika stora *tal i bråkform*, för att omvandla *tal i bråkform* och för att genomföra räkneoperationer med *tal i bråkform*. Användandet av ett förhållande, ett *tal i bråkform* eller en decimal för att jämföra två tal beror även på begreppsuppfattningen av ekvivalens.

Som flera begrepp inom matematiken kan ekvivalens förstås i sin konkreta form av 5-åringar, exempelvis att ett halvt äpple är det samma som två fjärdedels äpple. När talen i bråkform blir mer abstrakta är det bara en minoritet av 15-åringarna som fullt förstår betydelsen av ekvivalens till exempel $\frac{4}{14} = \frac{10}{?}$.




Figur 12 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:292)

När ekvivalensbegreppet introduceras används oftast, enligt Dickson, Brown och Gibson (1990), de två konkretaste begreppsmodellerna: *del av helhetsmodellen* och *andelsmodellen*. Se Figur 12 a och b.

Dickson, Brown & Gibson (1990) fortsätter med att skriva om elevernas svårighet med att förkorta *tal i bråkform* så långt som möjligt är det till exempel svårare att gå från $\frac{8}{12}$ till $\frac{2}{3}$ än från $\frac{2}{3}$ till $\frac{8}{12}$.

### 3.1.3 Räkneoperationer med *tal i bråkform*

Räkneoperationer med *tal i bråkform* – betydelse och uträkning

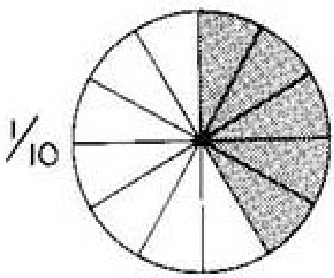
I Dickson, Brown & Gibson (1990) kan man under avsnitt 3.8.1.3, s. 281 läsa att när man har betraktat alla begreppsmodeller kan man dela in dem i två huvudkategorier:

a. *tal i bråkform* som *mått*:
b. *tal i bråkform* som *operator*.

Begreppsmodellerna *del av helhet* och *tallinjen* passar bäst in under måttaspekten, där *tal i bråkform* ingår som uttryck av en fysisk enhet till exempel ¾ timme eller 1 $\frac{2}{3}$ dl. I operatoraspekten ingår en jämförelse mellan två tal, det ena är uttryckt som en del av det andra till exempel $\frac{3}{5}$ av 15.

I operatoraspekt passar därmed begreppsmodellerna *andel*, *förhållande* och *proportion* in. Ett av problemen med räkneoperationer med *tal i bråkform* är att med måttaspekten är det enklast att förstå addition och subtraktion av *tal i bråkform*, till exempel 1 $\frac{1}{2}$ timme + $\frac{3}{4}$ timme. Multiplikation och division blir mer begripligt om man använder sig av någon av de begreppsmodeller som ingår i operatoraspekten till exempel $\frac{1}{4}$ av $\frac{2}{3}$ av 24. Om läraren väljer att utgå från en begreppsmodell så kan eleverna få det svårt gällande addition/subtraktion eller multiplikation/division mellan *tal i bråkform*.

Dickson, Brown & Gibson (1990) poängterar vikten av att tydliggöra skillnaden i betydelse mellan de olika räkneoperationerna. Vardagsrelaterade problem blir därmed lättare att förstå och senare lösa.



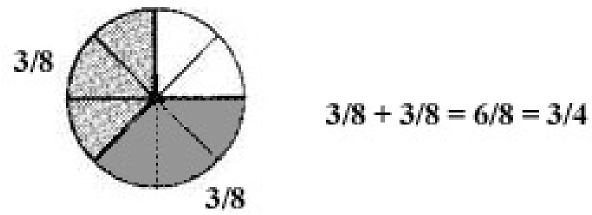

Figur 13 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:304)

Fortsättningsvis skriver Dickson, Brown & Gibson (1990) hur viktigt det är att lägga tonvikten på förståelsen av räkneoperationer med *tal i bråkform* istället för vid den procedurella. Författarna tar upp ett exempel från Hasemann (1980, 1981) där en 13- åring har problem när det gäller additionen $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Eleven har ritat upp $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ och där ritat rätt medan när det gäller det matematiska uttrycket har eleven krånglat till det och inte löst uppgiften.

Addition och subtraktion av *tal i bråkform*

Tillämpningarna av addition och subtraktion med *tal i bråkform* finner man till största delen i måttaspekten. Det är dock väldigt viktigt, skriver Dickson, Brown & Gibson (1990:305), att man inte knyter an till verkligheten bara för att man ska utan för att det är relevant. De fortsätter med att skriva om Freudenthal (1973) som anser att man inte ska initiera addition med *tal i bråkform* förrän eleverna har en abstrakt syn av de *rationella* talen.

Förståelsen av addition och subtraktion mellan *tal i bråkform* är, enligt Dickson, Brown & Gibson (1990), vanligtvis utvecklad genom användandet av *del av helhetsmodellen*.



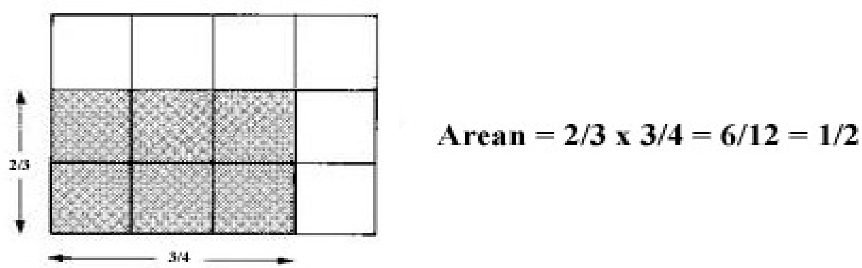

Figur 14 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:305)

Vid tolkning av denna figur kan det dock uppstå problem, enligt Dickson, Brown & Gibson (1990:306), om eleven väljer att rita de två talen på varsin enhet kan denne tolka det som om enheten är båda tårtorna och därmed tro att svaret är $\frac{6}{16}$ istället för $\frac{6}{8}$. Ett liknande problem kan uppstå när totalsumman överstiger en enhet. $\frac{5}{8} + \frac{7}{8}$ kan enkelt feltolkas som $\frac{12}{16}$ istället för 1 $\frac{4}{8}$ eller 1 ½ enligt Dickson, Brown & Gibson (1990).

*Tallinjemodellen* är möjligtvis svår att förstå inledningsvis, men samtidigt så undviks ovan förklarade problem skriver Dickson, Brown & Gibson (1990). Svårigheten här ligger i om eleven ser talet som en punkt istället för en sträcka, det kan då vara svårt att förstå meningen med att addera en punkt med en annan punkt.

Dickson, Brown & Gibson (1990) skriver att det kan uppstå problem om man vid addition av *tal i bråkform* utgår från det abstrakta talet då eleverna vanligtvis tror att man ska addera täljarna med varandra och nämnarna med varandra till exempel $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$. Det är även här viktigt att eleverna är väl insatta i betydelsen av ekvivalens.

Multiplikation och division av *tal i bråkform*



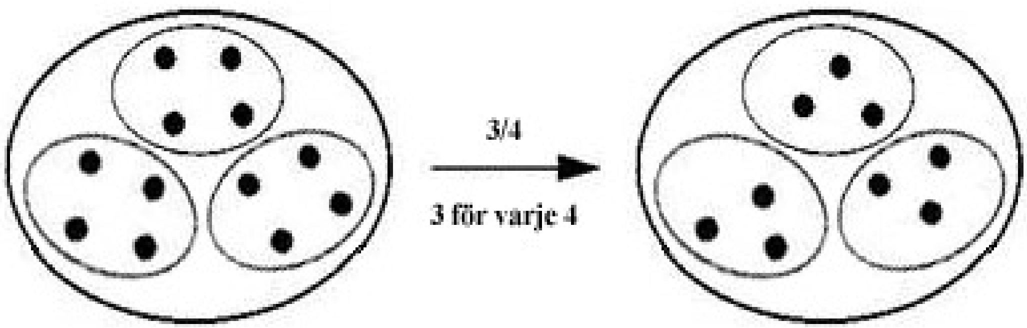

Figur 15 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:308)

Dickson, Brown & Gibson (1990) skriver att multiplikation mellan naturliga tal är det svåraste räknesättet att konkretisera. När det gäller multiplikation mellan *tal i bråkform* blir svårigheten ännu större. En visualiserande modell av multiplikation mellan *tal i bråkform*, som ibland används i undervisning, är den då produkten av två *bråktal* representeras av ytan av en rektangel.

Green (1969, 1970) rapporterar att elever i allmänhet upplever svårigheter med *tal i bråkform*, då det gäller att:

a. hitta delarna i en mängd
b. multiplicera *tal i bråkform* med heltal
c. multiplicera *tal i bråkform* i *blandad form* till exempel 1 ¾ · 2 $\frac{1}{3}$.

Måttaspekten var mer lyckad än Greens (1969) operatoraspekt, mest för att den undviker övergången från ”av” till ”gånger”. Detta betyder inte nödvändigtvis att det är den bästa modellen att lära ut på grund av att det finns så få användningsområden för multiplikation av *tal i bråkform*. Begreppsmodellerna proportion och förhållande är troligare att hitta som tillämpningar av *tal i bråkform* exempelvis när man ska räkna ut hur lång tid det skulle ta att gå 7 kilometer om det tar 3 ½ timme att gå 10 kilometer, det kräver att man använder $\frac{7}{10}$ som en operator till exempel $\frac{7}{10}$ av 3 ½. Ett annat vardagsexempel är när man använder 3 ½ kg socker till 4 liter jordgubbar, problemet är att bedöma hur mycket socker som man ska ta om man har 3 liter jordgubbar.




Steg 1 Steg 2

Figur 16 (Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O, 1990:311)

En möjlighet att göra uträkningen av *tal i bråkform* mer konkret är att använda operatoraspekten, så att $\frac{3}{4}$ till exempel ses som ”3 för 4-operation” till exempel 3 askar till 4 barn. Ovan introduceras *tal i bråkform* med ett tillvägagångssätt liknande *andelsmodellen* för att ¾ av 12 löses genom att dela 12 i grupper om 4, steg 1, och ge ”3 för varje 4” steg 2. Se Figur 16.

Den konkreta meningen av exempelvis $\frac{2}{3} \div \frac{5}{8}$ är om möjligt svårare att tillgodose då den enda användningen är i termer av inverterad multiplikation då antingen i *area*-, *förhållande*- eller *proportionsmodellen*. Det här är långt ifrån det intuitiva sätt som när räkneoperationen division introduceras som delning eller gruppering av heltal, enligt Dickson, Brown & Gibson (1990).

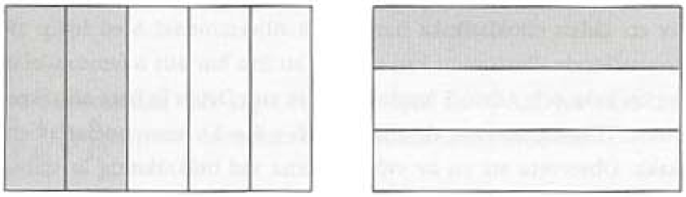
I en serie undersökningar har man inte funnit något klart felmönster vid uträkning av divisioner. Studierna påvisar därmed ytterligare tveksamheter till att undervisa eleverna om meningen med och metoden för division mellan *tal i bråkform*.

### 3.1.4 Ej kompatibla begreppsmodeller

Alla begreppsmodeller är ej fullt ut kompatibla. *Andelsmodellen* gör att man får en uppfattning att *bråktalet* är två tal då man uttrycker till exempel $\frac{2}{5}$ som 2 av 5. Om man utgår från *del av helhetsmodellen* ser man *bråktalet* som ett tal, $\frac{2}{5}$, vilket betyder att *andelsmodellen* och *del av helhetsmodellen* ej är kompatibla då man ser *bråktalet* på skilda sätt. Ett annat exempel på ovanstående är vid *del av helhet* då $\frac{2}{5}$ står för ett tal jämfört med *andelsmodellen*, $\frac{2}{5} \cdot 30$ där $\frac{2}{5}$ ”gör” något med 30, det vill säga det blir då en räkneoperation.

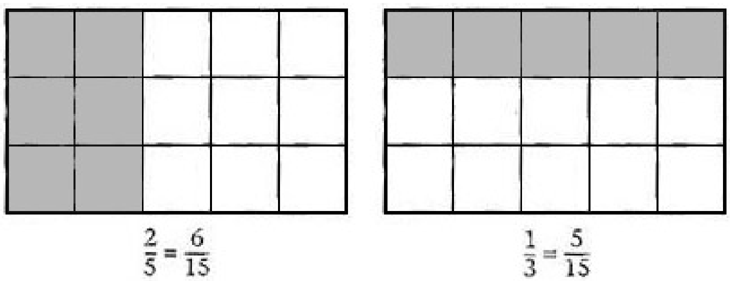
### 3.1.5 Chokladkaka som visualisering

Löwing och Kilborn (2002:217f.) beskriver och förklarar chokladkakemodellen. Om man ska addera $\frac{2}{5}$ med $\frac{1}{3}$ så börjar de genom att rita upp två chokladkakor.



Figur 17 (Löwing och Kilborn, 2002:217)

När man sedan skall hitta en gemensam nämnare så lägger man de båda modellerna på varandra så det bildas ett rutnät, se Figur 18, vilket visar att $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ och $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$.




Figur 18 (Löwing och Kilborn, 2002:218)

När nu nämnarna är lika i de båda *bråktalen*, så är det bara att addera täljarna för att få fram svaret, som i detta fall blir $\frac{11}{15}$. Uppgifter som ovanstående kan i början lösas gemensamt i klassen, genom att läraren ritar och går igenom på tavlan. När läraren skriver *bråktalet* är det bra om denne skriver, som i uppgiften ovan, 6 femtondelar + 5 femtondelar = 11 femtondelar.

## 3.2 Vad står det i styrdokumenten?

Vad säger kursplanerna och läroplanerna om matematik och bråkräkning?

Under matematikkapitlet i kursplaner för grundskolan (Skolverket, 2000) kan man bland annat läsa att det är meningen att skolan ska jobba på ett sådant sätt att eleverna känner till vikten av att kunna behärska matematik samt att de ska få tillit till sina egna förmågor att använda matematik. Matematiken ska ligga till grund för fortsatta studier, studier i andra ämnen samt ett livslångt lärande. ”Matematik har nära samband med andra skolämnen. Eleverna hämtar erfarenheter från omvärlden och får därmed underlag för att vidga sitt matematiska kunnande” (Skolverket, Kursplaner och betygskriterier 2000 – Grundskolan, 2000:28). ”Tillämpningar av matematik i vardagsliv, samhällsliv och vetenskapliga verksamheter ger formuleringar av problem i matematiska modeller. Dessa studeras med matematiska metoder” (Skolverket, Kursplaner och betygskriterier 2000 – Grundskolan, 2000:27).

I skolans matematikutbildning ska elevernas förmåga till problemlösning utvecklas. Problem som elever stöter på i sin vardag kan vara till hjälp som konkretisering och problemet kan då lösas utan att matematiska uttrycksformer behövs. Elevernas undervisning i matematik skall vara till fördel för deras allsidiga utveckling. De elever som behöver mer tid för att lära sig matematiska begrepp, metoder etcetera skall ges extra uppmärksamhet. Detta står även tydligt i Lpo 94, Mål och riktlinjer: Mål att uppnå i grundskolan: ”Skolan ansvarar för att varje elev efter genomgången grundskola behärskar grundläggande matematiskt tänkande och kan tillämpa det i vardagslivet” (Lärarförbundet, Lpo 94, 2001:25).

Mål att sträva mot

Målen i kursplanerna (Skolverket, 2000) är av två olika slag, dels är det mål att sträva mot och dels mål att uppnå. I mål att sträva mot i matematik beskrivs den inriktning lektionerna ska ha som avser elevernas utveckling. Dessa mål utgör det främsta underlaget för planeringen av undervisningen och sätter inte någon gräns för elevens kunskapsutveckling. Här följer några av de mål som *tal i bråkform* kan knytas an till:

> Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleven:
> - utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och använda matematik i olika situationer
> - inser värdet av och använder matematikens uttrycksformer
>
> Strävan skall också vara att eleven utvecklar sin tal- och rumsuppfattning samt sin förmåga att förstå och använda
> - grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal, närmevärden, proportionalitet och procent,
> - olika metoder, måttsystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma storleken av viktiga storheter,
> - grundläggande algebraiska begrepp, uttryck, formler, ekvationer och olikheter
>
> (Skolverket, Kursplaner och betygskriterier 2000 – Grundskolan, 2000:26-28)

Mål att uppnå

I uppnåendemålen beskrivs vad eleven skall ha uppnått i slutet av femte respektive nionde skolåret. Till skillnad från mål att sträva mot så är dessa mål en miniminivå av kunskaper som skall vara uppfyllda. Det är således skolans ansvar att se till att varje enskild elev har uppnått de mål som gäller för ämnet. Målen som eleven ska ha uppnått i nionde skolåret ligger till grund för om denne får betyget godkänt i ämnet.

”Kraven uttrycker den grundläggande kunskapsnivån i ämnet som alla elever skall ges möjlighet att uppnå. Det är av vikt att understryka att de allra flesta elever naturligtvis kommer och skall komma längre i sitt lärande.” (Lärarförbundet, Lpo 94, 2001:5)

> Eleven skall i slutet av femte skolåret
>
> - ha en grundläggande taluppfattning som omfattar naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform
> - kunna avläsa och tolka data givna i tabeller och diagram samt kunna använda elementära lägesmått

> Eleven skall i slutet av det nionde skolåret
>
> Eleven skall ha förvärvat sådana kunskaper i matematik som behövs för att kunna beskriva och hantera situationer samt lösa problem som vanligen förekommer i hem och samhälle och som behövs som grund för fortsatt utbildning.
>
> - utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform
> - ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel.
>
> (Lärarförbundet, Lpo 94, 2001:28-29)

Målen otydliga, betydelse för fortsatta studier?
Som vi tolkar styrdokumenten är målen otydliga när det gäller räkneoperationer med tal i bråkform. Varje enskild skola har skyldighet att tolka de nationella målen och skriva lokala kursplaner. Detta kan resultera i att man på skolor negligerar betydelsen av räkneoperationer med tal i bråkform. Räkneoperationer med tal i bråkform är en nödvändig förförståelse till algebra och därmed fortsatta studier.

## 3.3 Problemformulering

Med grund i denna bakgrund och tillsammans med studiens syfte har vi kommit fram till följande frågeställningar:

- Vilka begreppsmodeller använder sig lärare av i skolan när de introducerar *tal i bråkform*
- Vilka förkunskaper anser lärarna vara relevanta inför *bråkräkning*
- Vilka fallgropar/svårigheter upplever lärare att de använda begreppsmodellerna har när det gäller *tal i bråkform*
- Stämmer våra tolkningar av de intervjuade lärarnas beskrivningar av förförståelse och fallgropar överens med den förförståelse och de fallgropar som tidigare forskning beskriver

Vi vill vidare undersöka om skillnader i val av begreppsmodeller föreligger mellan mellanstadiets och högstadiets lärare. Om så är fallet vill vi få fram olika kategorier av begreppsmodellssammansättning och visa på fördelarna och nackdelarna med dessa.

# 4. Resultatgenomgång

## 4.1 Informanternas begreppsmodellssammansättning

### 4.1.1 Översikt av kategorier

Vid analyseringen av utskrifterna av de gjorda intervjuerna tolkade vi att det finns variationer i lärares användning av begreppsmodeller när det gäller *tal i bråkform*. Efter genomgång av utskrifterna fördelade vi lärarnas begreppsmodellssammansättningar i fyra kvalitativt olika kategorier. Dessa kategorier utgår från användandet av olika sammansättningar av de begreppsmodeller, se Bakgrund. Anmärkningsvärt är att två av begreppsmodellerna inte verkar användas av någon av de intervjuade lärarna. De modeller som ej används är *förhållande* och *proportion*. Vi har delat in dem i följande kategorier:

**1. *Del av helhet***
Vi tolkar att läraren använder sig enbart av begreppsmodellen *del av helhet*. Läraren beskriver att denne visualiserar med hjälp av konkretiserande material såsom Montessoribrickor och magnetbitar samt ritade tårtor, pizzor och chokladkakor.

**2. *Del av helhet* och *andel***
Vi tolkar att läraren använder sig av två begreppsmodeller, *del av helhet* och *andel*. Arbetssättet med *del av helhet* har vi beskrivit ovan och begreppsmodellen *andel* är då de binder samman *tal i bråkform* med mängd. Exempel på detta är när lärare säger sig konkretisera genom att eleverna ska dela 750 kr på tre personer eller att de läst i tidningen om ”hälften av alla kvinnor …”.

**3. *Division, del av helhet* och *andel***
Vi tolkar att läraren använder sig av tre begreppsmodeller, *del av helhet, andel* och *division*. Arbetssättet med *del av helhet* och *andel* har vi beskrivit ovan och i *divisionsmodellen* uttrycks *tal i bråkform* som en räkneoperation.

**4. *Del av helhet, andel* och *tallinjen***
Vi tolkar att läraren använder sig av tre begreppsmodeller, *del av helhet, andel* och *tallinjen*. Arbetssättet med *del av helhet* och *andel* har vi beskrivit ovan. Läraren använder sig av sträckor jämfört med *tallinjen* för att visa skillnader mellan olika *tal i bråkform*.

## 4.2 Kategoriindelning

Samtliga lärare använder sig av *del av helhetsmodellen*, flertalet använder sig endast av denna medan några använder sig av den i kombination med *andelsmodellen*. En av lärarna använder sig av de två ovannämnda begreppsmodellerna tillsammans med *division* samtidigt som en annan lärare använder de två första samt *sträcka på tallinjen.*

De mellanstadielärare som vi intervjuat använder sig av *del av helhet* och *del av helhet* tillsammans med *andel*. Högstadielärarna kan man hitta i alla kategorierna.

### 4.2.1 *Del av helhet*

Användande av *del av helhet* är typiskt för denna kategori. Detta betyder att man utgår från att *tal i bråkform* är en *del-area* av en *enhets-area.* Den vanligaste visualiseringen som man använder sig av inom denna begreppsmodell är att man ritar upp chokladkakor, tårtor och/eller pizzor.

En lärare, Greta, som passar in under den här kategorin säger följande: ”de skulle dela en tårta till exempel om de har barnkalas, så att det blev rättvist om de var tre stycken och de skulle ha lika stora tårtor [tårtbitar]. Så vi pratade om tårtor helt enkelt”. Denna lärare introducerar *tal i bråkform* genom att prata om tårtor och visa sina utklippta bitar. Greta tycker inte om att använda sig av chokladkakemodellen eftersom ”om jag ritar upp en rektangel så kan ju den fortsätta, man kan ju skarva på och så där, så jag tycker tårta är bäst när man börjar”. En av de fallgropar Greta upplever vid introduktion av tal i bråkform är att hon tycker eleverna har svårt att uppfatta enheten, om det är två tårtor man jobbar med. Hon säger ”Blandar man in att man har två tårtor [vardera tårta är delad i hälften] då blir det ju fyra fjärdedelar, det blir en senare process, de måste fatta det där med en tårta först”. En annan lärare, Erika, berättar att hon brukar rita upp ¼, ⅓ i form av tårtbitar och hon tycker att det hjälper eleverna att förstå vad *tal i bråkform* är.

Sara använder sig av konkretiserande material såsom magnetbitar som hon sätter upp på white boarden, hon menar att bitarna tydligt visar skillnaden mellan exempelvis ⅓ och ¼. ”Om man har haft svårigheter att förstå detta innan så släpper det när eleverna får se vad det är för skillnad på en fjärdedel och en tredjedel, att det faktiskt inte var fjärdedelen som var den stora.” Hon fortsätter med att ”det finns i jämförelse fyra sådana på den hela, det är något som är väldigt tydligt med det materialet att det går tre tredjedelar på en hel, för det är något de brukar ha problem med, [men] det ser man väldigt tydligt med de här bitarna”. Även Folke använder sig av chokladkakemodellen och tårtmodellen. Han ser svårigheter med att få eleverna att förstå att helheten kan variera i storlek.

Malin börjar ofta med att använda sig av en apelsin som hon delar framför klassen och introducerar samtidigt Montessoris bråkplattor. Med hjälp av dessa plattor anser hon sig enkelt kunna visa de olika *bråktalen*. När eleven sedan fastnar på något använder sig Malin av det laborativa materialet igen för att underlätta för eleven: ”[…] då visar jag de det laborativa materialet. Jag går hela tiden tillbaka till det laborativa och att vi tittar på det tillsammans, då med den enskilda eleven, så att de förstår hur det måste bli”.

### 4.2.2 *Del av helhet* och *andel*

Kännetecknande för lärarna som ingår i denna kategori är att de använder sig delvis av *del av helhet* och delvis av begreppsmodellen *andel*. Här ingår allt från lärare som använder sig av nästan bara *del av helhet* till dem som använder dessa begreppsmodeller sida vid sida. Anita uttrycker sig på följande sätt:”[…] att göra något praktiskt exempel, att vika papper och se på delar, det är ju ett sätt som är bra eller om man tar ett exempel från vardagen då man ska dela med kompisar och så vidare”. Hon använder sig mycket av boken, Mattestegen och kompletterar med laborativt material som förtydligar det hela, däribland ”bråktavla”, cirklar med mera.

En annan lärare, Eva, säger följande när hon får frågan om hur hon skulle förklara addition av två *bråktal* med olika nämnare: ”Börja med att göra något tillsammans exempelvis använda pengar, försöka dela ut 5-kronor till personer men det går inte utan att man måste dela [växla] 5-kronorna till 1-kronor för att kunna dela jämt/lika.” Eva använder *del av helhet* då eleverna får rita chokladkakor i ½, ⅓ , ¼ för att använda vid olika tillfällen. Eva gör även klassövningar för att introducera *tal i bråkform* de får bland annat tillaga bananasplit, hon delar in klassen i jämna grupper, fördelar ingredienserna till grupperna som sedan delar detta jämt mellan sig. Gustav låter eleverna klippa stavar som de delar i ½, ⅓ , … $^1\!/_{12}$ och sedan använder för att jämföra med varandra och med den hela staven.

Läraren Stina vill gärna knyta an till verkliga händelser och hon tycker att det är viktigt att visa på att matematiken är baserad på verkligheten. Om det stått i en tidningsartikel att ”hälften av alla kvinnor …” så skriver Stina på tavlan att detta = ½ för att på det sättet få eleverna att förstå kopplingen mellan verkligheten och symbolspråket. Stina använder sig av ett magnetmaterial där eleverna tydligt kan se hur stor del av den hela som en fjärdedel, en tredjedel och så vidare utgör. Hon brukar även rita en del på tavlan som till exempel pizzor och chokladkakor och använder sig här också en hel del av boken, *Matematikboken*. Stina säger om boken att ”då det redan finns ritade bilder och det blir lite bättre än om jag ska rita”.

### 4.2.3 *Division, del av helhet* och *andel*

Här antar vi att läraren bland annat försöker bygga upp förståelsen för *tal i bråkform* med hjälp av tidigare kunskaper i *division*.

Albin säger ”det första är att jättemånga inte ser att ett bråk är detsamma som division”. Samtidigt säger Albin att han använder pizzamodellen för att konkretisera som hjälp för eleverna. Albin svarar följande när vi frågar hur han introducerar *tal i bråkform*: ”Man ritar upp en pizza och så delar man upp den i fyra delar, en fjärdedel hur stor del är det? Hur stor bit skall jag nu skugga av den här? En av fyra, ett delat på fyra!”. Albin utnyttjar elevernas förkunskaper i division och samtidigt använder han pizzamodellen bara för att man ska visualisera.

### 4.2.4 *Del av helhet, andel* och *tallinjen*

I den här kategorin används flertalet av begreppsmodellerna, det är dessutom den enda kategorin där en endimensionell modell, *tallinjen*, används.

Gunnar ritar upp flera tallinjer på en overhead, ovanför streckar han upp olika långa sträckor och med hjälp av dessa visar han till exempel att ½ är större än $\frac{1}{3}$. ”Jag ritar en räcka tallinjer på overheaden och delar in dem ½, $\frac{1}{3}$ och ¼. Sedan ser man att $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$”.I intervjun med Gunnar kom bland annat den klassiska frågan upp: ”Hur många bråk finns mellan 0 – 1? Så småningom förstår de flesta att det finns hur många som helst”. Detta är något som Gunnar menar att eleverna brukar ha väldigt svårt för. Gunnar använder också *andelsmodellen* då det kan vara lättare att förstå hälften av 500 kr eller en tredjedel av 750 kr. Vidare använder Gunnar ofta bilder, både chokladkakor, pizzor och glass.

## 4.3 Validering av intervjuerna

Här följer motiveringarna till denna studies gjorda kategoriindelning.

### 4.3.1 Intervju med Malin, mellanstadielärare

Malin säger att hon förbereder sig genom att titta i läromedlet, Matteborgen, och plockar sedan fram konkret material där hon framförallt använder sig av Montessorimaterialet ”bråkplattor”. Inför första lektionen med *tal i bråkform* har hon med sig en apelsin som hon delar framför klassen på samma gång som hon demonstrerar Montessorimaterialet. Hon börjar med det konkreta materialet och går efter hand över till att rita och skriva *bråktalen* på tavlan. När eleven sedan stöter på svårigheter uppger Malin att hon använder sig av det laborativa materialet igen för att underlätta för eleven: ”[…] då visar jag dem det laborativa materialet. Jag går hela tiden tillbaka till det laborativa och att vi tittar på det tillsammans, då med den enskilda eleven så att de förstår hur det måste bli”. De fallgropar hon säger sig kunna se är att eleven kan ha svårt för att lära sig att nämnaren står för hur stort *bråktalet* är och att täljaren står för antalet. Malin anser att eleverna kan ha svårt att hålla isär vad som ska stå över och vad som ska stå under bråkstrecket. Med grund i detta har vi placerat in Malin under kategori *1. Del av helhet.*

### 4.3.2 Intervju med Greta, mellanstadielärare

Greta säger att hon förbereder sig genom att titta hur lärobokens kapitel om *tal i bråkform* är upplagd. Hon berättar vidare att hon klipper papperstårtor i halvor och fjärdedelar för att ha konkret material att visa eleverna. Den förförståelse som Greta anser att eleverna bör ha är att de ska kunna relatera till någon händelse de själva varit med om till exempel genom att dela en tårta i rätt antal bitar så att alla får en bit var. Denna lärare säger sig introducera *tal i bråkform* genom att prata om tårtor och visa sina utklippta bitar. Greta tycker inte om att använda sig av *chokladkakemodellen* eftersom ”om jag ritar upp en rektangel så kan ju den fortsätta, man kan ju skarva på och så där, så jag tycker tårta är bäst när man börjar”. En av de fallgropar Greta säger sig uppleva vid *tal i bråkform* är att hon tycker eleverna har svårt att uppfatta enheten om det är två tårtor man jobbar med. Hon säger ”Blandar man in att man har två tårtor [vardera tårta är delad i hälften] då blir det ju fyra fjärdedelar, det blir en senare process, de måste fatta det där med en tårta först”. En annan fallgrop som Greta anser vara vanligt förekommande är att eleverna har svårt att förstå att till exempel ¼ är större än $\frac{1}{8}$, de har väldigt svårt att sortera *bråktalen* i storleksordning. Med denna motivering anser vi att Greta tillhör kategori *1. Del av helhet.*

### 4.3.3 Intervju med Folke, högstadielärare

Folke menar på att han har med sig ganska mycket matematikkunskaper från sin lärarutbildning. Han anser att han har idéer och tankar om *tal i bråkform* som är ganska klara till skillnad från vissa andra områden inom matematiken. Det som han framförallt säger sig känna är att han har med sig färdigheter i att kunna visualisera och konkretisera vid introduktion av *tal i bråkform*. Folke säger att han inte har någon uppfattning om elevernas förförståelse, eftersom han endast varit lärare i drygt ett år. När det är dags att introducera *tal i bråkform* så uppger Folke att han börjar med att prata mycket med eleverna om vad *bråktal* är och i vilka konkreta situationer man kan ha användning av tal i bråkform. Vidare berättar Folke att han med hjälp av bråkplattor försöker konkretisera hur *tal i bråkform* kan delas upp i olika storlekar. Folke säger att han vid ett senare skede även går in på vad de olika delarna kallas och hur man matematiskt ställer upp det.

De fallgropar som Folke berättar kan förekomma är att eleverna inte förstår att en tjugoandradel kan vara olika stor beroende på hur stor helheten var från början. Folke anser att eleverna har en viss kunskap om addition av två *tal i bråkform* när de kommer till honom i år 6. Han säger att de kan addera enkla *bråktal*, framförallt liknämniga, och att några elever kan addera tal så som ½ + ¾. Vid introduktion av addition av *tal i bråkform* berättar Folke att han använder sig av *chokladkakemodellen* och *tårtmodellen*. På vår fråga om hur han introducerar division mellan två *tal i bråkform* svarar han:

> Om man gått igenom ordentligt innan och försöker att det skall bli någon förståelse, så tycker jag att man kan använda sådana här fuskmetoder, som att säga med divisionen – invertera *bråket* bara, eller vänd på det, beroende på vad man använder för ord. Då ser de att svaret blir rätt.

Vid division tycker Folke att det inte är nödvändigt att illustrera utan försöker få eleverna att lära sig en metod för hur man gör. Med grund i detta har vi placerat in Folke under kategori *1. Del av helhet*.

### 4.3.4 Intervju med Albin, högstadielärare

Albin berättar att när han förbereder sig inför introduktion av *tal i bråkform* tittar han på vad han ska gå igenom med eleverna och hur man kan visualisera det. Elevernas förkunskaper kan variera ganska kraftigt beroende på vilken skola man jobbar på säger Albin. Vid själva genomgången så uppger han att han använder sig av *pizzamodellen*. Han ritar upp pizzor på tavlan och visar på de olika delarna. Albin poängterar för eleverna att det är en av fyra när det gäller ¼. Han säger vidare att ”det första är att jättemånga inte ser att ett bråk är detsamma som *division*”. Albin menar att fallgroparna med *tal i bråkform* för eleverna är att de inte förstår att ¼ är detsamma som ett delat på fyra. Eleverna ser inte ¼ som ett delat på fyra utan anser att det något nytt som de inte sett förut, säger han.

När han sedan förklarar hur han går igenom addition av *tal i bråkform* berättar han hur han visualiserar för eleverna genom att rita flera pizzor på tavlan och dela dem i lika stora delar. Han säger “En pizza består av ¾ och den andra av $\frac{2}{4}$. Hur många fjärdedelar har vi då? Tre plus två är fem fjärdedelar”. När Albin beskriver hur han förklarar multiplikation av *bråktal* säger han att han först visar eleverna att alla tal dividerat med ett blir sig själva.

”Om de till exempel ska räkna ut 4 gånger ¼ så visar jag dem att de skriver $\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{4}$ och sen gångra täljarna för sig och nämnarna för sig.” Med denna motivering anser vi att Albin tillhör kategori *3. Division, del av helhet och andel*.

### 4.3.5 Intervju med Gustav, mellanstadielärare

Gustav berättar att han förbereder introduktionen av *tal i bråkform* olika från år till år. I år uppger han att eleverna fick klippa stavar, en hel och de andra i delarna ½, $\frac{1}{3}$, … $\frac{1}{12}$ och på detta sätt kunde de jämföra delarna med varandra och med den hela staven. När vi frågade vad han ansåg om elevernas förförståelse menar han att det inte alltid är de duktiga i matematik som har lätt för *tal i bråkform*. Han säger att ofta har svagare elever lättare att ta till sig bråkräkningen, varför det är så kan han inte svara på, men han tycker sig se ett tydligt mönster. De fallgropar med *tal i bråkform* som Gustav märker av är att eleverna inte förstår att ½ är större än ¼, de stirrar sig blinda på siffrorna, fyra är mer än två. En annan fallgrop är att eleverna inte ser att ¼ + ¼ är $\frac{2}{4}$ och inte $\frac{2}{8}$, säger Gustav. Vi har placerat in Gustav under kategori *2. Del av helhet och andel*.

### 4.3.6 Intervju med Eva, mellanstadielärare

Eva berättar att hon har klassövningar för att introducera *tal i bråkform*, eleverna får bland annat tillaga bananasplit. Hon uppger att hon delar in klassen i jämna grupper, fördelar ingredienserna till grupperna som sedan delar dessa jämt mellan sig. Hon berättar vidare att i år 4 ritar och klipper eleverna papperschokladkakor i fjärdedelar, tredjedelar och så vidare i olika färger och lägger i varsitt kuvert. Då och då under terminen får eleverna ta fram kuvertet med bitarna och arbeta med dem. Den största förförståelsen anser Eva att eleverna får i sina familjer, om det är två syskon så kan eleverna dela lika i två bitar och är de tre syskon medför detta att de kan dela jämt i tre bitar. Eva uppger att hon finner svårigheter när eleverna ska dela upp en figur i två fjärdedelar och en halv, man ritar inte upp alla fyra fjärdedelarna och då vill eleverna gärna se det som tredjedelar. Eleverna kan ha svårt att i början förstå att alla bitarna ska vara lika stora, säger Eva. När Eva ska förklara addition mellan oliknämniga *bråktal* tycker hon att pengar är ett bra konkretiserande material. Hon låter eleverna försöka dela ut femkronor till ett visst antal elever och när det inte går förstår eleverna att de måste dela, växla. Med denna motivering anser vi att Eva tillhör kategori *2. Del av helhet och andel*.

### 4.3.7 Intervju med Gunnar, högstadielärare

Gunnar säger sig inte lägga någon större vikt vid förberedelserna av *tal i bråkform*, han följer boken *Möte med matte.* Elevernas förförståelse anser han är viktig, eleverna bör känna till vardagsorden hälften, en fjärdedel etcetera och kunna skriva dem som täljare och nämnare. Gunnar anser att eleverna i sjuan har svårt med taluppfattningen, de vet inte riktigt skillnad på 1,2 och ½. Vidare anser Gunnar att det är viktigt att arbeta med visualiseringar för att så småningom kunna uppfatta att en halv är ett tal. Han berättar att han påvisar för eleverna att *bråktalen* också finns med på *tallinjen*. Han uppger att han brukar fråga eleverna den klassiska frågan:

> Hur många bråk finns det mellan 0-1? Så småningom förstår de flesta att det finns hur många som helst. Jag ritar en räcka tallinjer på overheaden och delar in dem ½, $\frac{1}{3}$ och ¼. Sedan ser man att $\frac{2}{4}$ = ½. För en del kan det vara lättare att ta en halv av 500, en tredjedel av 750, alltså del av en verklig mängd.

Gunnar beskriver att han arbetar mycket med olika ritmodeller: chokladkakor, pizzor och glass. Han menar att ritmodeller får eleverna inte hålla på med för länge, de tröttnar och slarvar, ritmodellerna håller inte i längden. Gunnar berättar vidare att han senare brukar knyta ihop *tal i bråkform* med procent. Han skriver då upp en lista på tavlan som han vill att eleverna skall lära sig utantill.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ½ | en halv | 0,5 | 50% |
| ¼ | en fjärdedel | 0,25 | 25% |

Denna tabell får de träna på som tabellkunskap. Ett annat sätt Gunnar arbetar med för att träna storleksuppfattning av *bråktal* är att använda matematikbokens diagnosmaterial. Materialet består av tjugo stycken lappar med olika *bråktal* som skall läggas i storleksordning. Eleverna gör detta gruppvis och får då automatiskt tillfälle att diskutera matematik. Efter gruppens storlekssortering av diagnosmaterialet går Gunnar igenom sorteringen på tavlan.

Gunnar säger att största bristen eleverna har när de kommer till år sju är att de saknar automatiserade tabellkunskaper. ”De ser inte direkt att $^6/_9$ går att dela med 3.” Gunnar säger även att ”Det är lättare att motivera eleverna för räkning med decimaltal än med *bråktal*. Ett av våra mål är att lägga grunden så att eleverna klarar av fortsatta studier, de behöver strategier för räkning med variabler, algebra och ekvationslösningar. Jag tycker inte vi når riktigt fram”. Med grund i detta har vi placerat in Gunnar under kategori *4. Del av helhet, andel och sträcka på tallinjen*

### 4.3.8 Intervju med Erika, högstadielärare

Erika berättar hur hon inleder arbetet med *tal i bråkform* genom att rita upp tårtbitar på tavlan som är ¼, $^1/_3$ och så vidare för att visa hur stora de olika bitarna är. Erika upplever att eleverna har svårt med taluppfattningen, de vet inte vilket som är störst ½, $^1/_3$ , ¼. Erika menar att eleverna inte har så stor förförståelse av *tal i bråkform*. Erika säger att eleverna får jobba väldigt mycket med grundläggande kunskap, så att alla hinner ifatt. Erika berättar att hon använder sig av att rita upp tårtbitar på tavlan. Hon använder sig av samma metod när hon introducerar de fyra räknesätten mellan två *tal i bråkform*. Erika uppger att hon följer boken *Matematikbokens* upplägg väldigt mycket. Erika anser att bråk utgör grunden för fortsatta matematikstudier. Med grund i detta har vi placerat in Erika under kategori *1. Del av helhet*.

### 4.3.9 Intervju med Anita, mellanstadielärare

Anita uppger att hon förbereder sig inför arbetet med *tal i bråkform* genom att titta i de böcker eleverna haft i år 4. Anita repeterar väsentligheterna med eleverna och låter de sedan göra några testuppgifter för att se vad de kommer ihåg. ”Det gäller att praktiskt kunna visa det här med delar och andelar, man kan vika papper och prata om chokladkakor och pizzor och så vidare, så förförståelsen från början är väldigt viktig.” Vidare berättar Anita att när hon ska inleda arbetet med *tal i bråkform* brukar hon visa något praktisk till exempel som att vika papper och titta på delarna. En annan konkretisering är när hon ber eleverna att dela godis med sina kompisar. Erfarenhetsmässigt anser Anita att eleverna upplever *bråktal* som ett nytt moment i år 4. Hon använder sig av *Mattestegen* som läromedel. Anita säger sig använda boken mycket och kompletterar med visualiserande material exempelvis ”bråktavla”, cirklar med mera Anita säger att i läromedlet utgår de från en hel och lägger sedan till ¼, hon anser att det är väldigt bra att det blir mer än en hel. Anita anser att undervisningen om *tal i bråkform* inte är helt lätt och att det är viktigt att tänka igenom innan man sätter igång.

Vid arbetet med *tal i bråkform* anser hon att vardagsmatematiken kan vara till hjälp och hennes undervisning utgår mest från *chokladkakemodellen*. Med denna motivering anser vi att Anita tillhör kategori *2. Del av helhet och andel*.

### 4.3.10 Intervju med Stina, högstadielärare

Stina anser att eleverna har en viss förförståelse av *tal i bråkform* när de kommer till år 7, de har ”lek-arbetat” med delar och hela på olika sätt. Stina säger att eleverna kan ha läst i tidningen/sett på nyhetssammandrag om ”hälften av alla kvinnor”. Hon anser att det är viktigt att läraren försöker hitta någonting i verkligheten när denne pratar om begreppen som ingår i arbetet med *tal i bråkform*. När eleverna ska gå från ”det här allmänna” till att skriva *bråktalet* som ett matematiskt uttryck anser Stina att det är väldigt svårt att få eleverna att förstå. ”[…] när jag till exempel säger att hälften av kvinnorna […] och så skriver jag det på tavlan ½ så spelar det ingen roll hur mycket jag tjatar, för eleverna tycker att hälften det är verkligheten men ½ det är matteboken.” Stina berättar att hon påbörjar arbetet med *tal i bråkform* med hjälp av ett magnetmaterial som gör att eleverna tydligt kan se hur stor del av den hela som en fjärdedel, en tredjedel och så vidare utgör. Hon berättar att hon brukar även rita en del på tavlan till exempel pizzor och chokladkakor och använder sig också en hel del av läromedlet, *Matematikboken*. Stina säger att ”då det redan finns ritade bilder och det blir lite bättre än om jag ska rita” därför använder hon sig av boken. När eleverna kommer till multiplikation med *tal i bråkform* anser Stina att eleverna har kommit så pass långt i sin förståelse, att eleverna har en teoretisk förståelse av *tal i bråkform* att hon inte behöver visualisera för eleverna. Stina berättar att i samband med denna teoretiska förståelse kan det uppstå svårigheter med problemlösning istället, då eleverna måste relatera tillbaka till verkligheten igen. Med denna motivering anser vi att Stina tillhör kategori *2. Del av helhet och andel*.

### 4.3.11 Intervju med Sara, högstadielärare

Den förförståelse för *tal i bråkform* som Sara säger sig se hos eleverna är att de i hemkunskapen kommit i kontakt med *tal i bråkform* och att de där kan göra en koppling. När hon ska introducera området så använder hon sig av ett visualiserande material bestående av magnetbitar som visar hur stora de olika *bråktalen* är. Sara säger att ”om man har haft svårigheter att förstå detta innan så släpper det när eleverna får se vad det är för skillnad på en fjärdedel och en tredjedel, att det faktiskt inte var fjärdedelen som var den stora”. Hon fortsätter med att säga ”det finns i jämförelse fyra sådana på den hela, det är något som är väldigt tydligt med det materialet, att det går tre tredjedelar på en hel, för det är något de brukar ha problem med, det ser man väldigt tydligt med de här bitarna”. Sara anser att det bara är i början av arbetet med *tal i bråkform* som de här bitarna behövs. Hon fortsätter berätta att hon tar fram magnetbitarna vid behov och när eleverna ska börja arbeta med de olika räknesätten mellan två *bråktal*. Sara anser att det är inom det här matematikområdet hon ritar mest och hon tycker att det är viktigt att visualisera. Med grund i detta har vi placerat in Sara under kategori *1. Del av helhet*.

## 4.4 Läromedelsanalys

Vi har valt att titta lite närmare på ett läromedel från vardera stadium. De flesta av de intervjuade lärarna på högstadiet använder sig av *Möte med matte C* (1999). Denna bok används mestadels på höstterminen i år 8. Under kapitlet bråk framkommer de två begreppsmodellerna *del av helhet* och *andel*. Här nedan följer några exempel ur boken:

Sidan 100, uppgift 63
”Fyra kusiner delar en halv tårta lika. Hur stor del av en hel tårta får de vardera?”

Sidan 115, uppgift 53
”Varje månad sparar Jonatan 150kr. Nu vill han öka sparandet med $\frac{1}{3}$.
A: Hur mycket är $\frac{1}{3}$ av 150kr?
B: Hur mycket ska Jonatan nu spara varje månad?”

Den mellanstadiebok vi har tittat på är *Matte Direkt Borgen 5B* (2005). Även denna bok tar upp begreppsmodellerna *del av helhet* och *andel*. Ett exempel på andel är uppgift 13 på sidan 40:
”Hur många är $\frac{1}{3}$ av
A: 12 fladdermöss
B: 21 spindlar
C: 24 ormar”

På sidan 42, uppgift 22 står det:


(Matte Direkt Borgen 5B, 2005:42)

# 5. Diskussion

## 5.1 Väsentligheterna

De begreppsmodeller som vi tolkar att lärarna använder sig av är till största delen *del av helhet* och *del av helhet* tillsammans med *andel.* Ett tydligt exempel på detta är Gunnar som säger att det kan vara enklare för eleverna att ta hälften av 500 kr eller $\frac{1}{3}$ av 750 kr. Vi tolkar detta som om man kopplar *tal i bråkform* till verkligheten/vardagslivet när detta är relevant förenklar det förståelsen för eleverna.

I *Lusten att lära* (2003:21) kan man läsa följande: ”För att förstå och se glädjen i den abstrakta matematiken behövs konkreta upplevelser och praktiska tillämpningar.” Vi ser svårigheter i detta då det inte alltid finns praktiska tillämpningar, till exempel vid negativa tal.

Ovanstående kan kopplas till kursplanen för grundskolan i matematik där man kan läsa att ”eleven i slutet av nionde skolåret skall ha förvärvat sådana kunskaper och färdigheter i matematik som behövs för att kunna hantera situationer och lösa problem som vanligen förekommer i hem och samhälle […]”.

Vidare så upplevde vi Albins syn på *tal i bråkform* som den mest kontroversiella, han uttryckte tydligt att ”bråk är division”. Med detta ser vi att svårigheter kan uppstå för eleverna då division är en räkneoperation medan *tal i bråkform* är ett *rationellt* tal. Att han samtidigt säger sig illustrera *bråktal* med pizzor och säger att eleverna ska ta ”en av fyra, ett delat på fyra” anser vi gör att eleverna får det ännu svårare att förstå *tal i bråkform*. En av fyra är *andelsmodellen* medan ett delat på fyra är en räkneoperation. Vi kan dock se att Albins intention är att eleverna ska använda sina tidigare kunskaper i division för att på så sätt lättare förstå *tal i bråkform.*

I Bakgrund beskrev vi de olika begreppsmodeller som författarna Dickson, Brown & Gibson (1990) har delat in i två huvudaspekter, A och B. I A, som de kallar för måttaspekten, ingår *del av helhet* och *sträcka på tallinjen* och i B, som de kallar för operatoraspekten, ingår *andel*, *förhållande* och *proportion*. Aspekt A är mer lämpad för räkneoperation med addition och subtraktion och aspekt B är mer lämpad för räkneoperation med multiplikation och division. Dickson, Brown & Gibson (1990) menar att de elever som endast får begreppsmodeller ur en av aspekterna förklarat för sig kan uppleva svårigheter vid räkneoperationer. I kategori 1 har vi placerat in de lärare som vi tolkat enbart använder sig av en begreppsmodell ur aspekt A. På högstadiet inleds arbetet med multiplikation och division av *tal i bråkform* och vi finner det anmärkningsvärt att flertalet av de intervjuade högstadielärarnas begreppsmodells-användning passar in i kategori 1.

I kategori 2 finns flertalet av de intervjuade mellanstadielärarna. Här kan man ställa sig frågan om det är positivt eller negativt för eleverna att få två begreppsmodeller förklarade för sig i mellanstadiet. Vore det enklare för eleverna att få förklarat en begreppsmodell eller kan det då uppstå svårigheter längre upp i årskurserna att ta till sig fler modeller?

Det Gustav berättade om att det inte alltid var de elever som betraktades som duktiga i matematik som hade lätt att förstå *tal i bråkform* väckte vårt intresse. Under de 39 år som Gustav har varit verksam lärare har han återkommande sett denna tendens.

De elever som Gustav beskrev som hade lättare vid introduktion av *tal i bråkform* är ofta inte teoretiskt lagda men duktiga på praktiska moment både i och utanför skolan säger Gustav. Att vid tillfällen som dessa lyfta fram elevers förståelse stärker dels elevers eget självförtroende och dels elevens ”ställning” i klassen. Med det menar vi att de flesta elever i en klass känner till varandras svagheter och genom att lyfta fram en svagare elevs förståelse kan dennes situation förbättras.

Vi menar att skolans matematiklärare har en viktig uppgift i att stärka alla elevers positiva egenskaper. Genom att läraren är trygg i sitt ämne kan denne ge eleverna en mer varierad undervisning och på så sätt få fler elever att känna inre motivation för ämnet. I *Lusten att lära* (2003:42) kan man läsa ”Lärare behöver ett djup i sina ämneskunskaper, till exempel i matematik, som gör att de kan associera fritt över hela ämnesfältet, en kompetens som gör dem friare i förhållandet till läromedlet.”

Högstadieläraren Gunnar arbetar ofta utanför läromedlet vilket vi anser pekar på stor säkerhet inom matematikområdet. Gunnar säger sig vara väldigt intresserad och att han försöker hålla sig ajour med forskning och nya rön. Flertalet lärare använde sig av det aktuella läromedlet under intervjun för att kunna beskriva sitt eget tillvägagångssätt. Detta tolkar vi som att läromedlet ofta styr dennes undervisning.

Mellanstadieläraren Greta tar upp de svårigheter med *tal i bråkform* som kan uppstå när elever använder två enheter det vill säga två tårtor etcetera. Hon poängterar vikten av att eleverna ska ha förstått *tal i bråkform* med hjälp av en tårta först. Vi håller med Greta vikten av att eleverna bör få klart för sig vad enheten/helheten är innan man fortsätter med *bråktal* i blandad form. Det är också viktigt att upprepa/träna eleverna i att *tal i bråkform* (ej blandad form) är mindre än ett.

Att använda *tallinjen* som förklaringsmodell är enligt vår resultattolkning inte vanligt. *Tallinjemodellen* kan vara svår att förstå, Dickson, Brown & Gibson (1990) visar ett exempel från en undersökning där elever, 12 år, blivit ombedda att på en tallinje markera $\frac{3}{5}$ .

```
                        3/5
                         ↓
1          2          3          4          5
-----------------------------------------------------------------
```

Resultatet visar tydligt att eleverna i undersökningen ej förstått denna förklaringsmodell. Vi anser dock att utformningen av tallinjen ”lurade” eleverna till en viss del. Om eleverna istället hade fått följande tallinje att markera $\frac{3}{5}$ på hade de varit tvungna att tänka efter och resultatet kunde ha blivit annorlunda.

```
1          2          3          4
-------------------------------------------------
```

Högstadieläraren Gunnar använder *tallinjen* med hjälp av sträckor ovanför det vill säga ej punkter på tallinjen. Vårt förslag är att man skulle kunna använda sig av bilder på långa föremål såsom stege eller planka i stället för en tallinje. Det skulle då kunna bli mer logiskt att markera $\frac{3}{5}$ .

## 5.2 Resultatet relativt tidigare forskning

Inom studiens frågeställning om vilka begreppsmodeller matematiklärare använder sig av finns flertalet tidigare studier gjorda utomlands. Då det finns flertalet studier som visar på ett antal olika begreppsmodeller har vi här valt att begränsa oss till de begreppsmodeller som beskrivs av författarna, Dickson, Brown och Gibson, i boken *Children learning mathematics – A teacher´s guide to recent research*. Vi har också använt oss av *Baskunskaper* (Kilborn & Löwing, 2002) samt Skolverkets rapport nr. 221, *Lusten att lära – med fokus på matematik* (2003), för att finna eventuella faktorer som kan påverka elevers förmåga inom matematikundervisningen. I vår undersökning fann vi att lärarens kompetens och egna inställning till ämnet har stor påverkan på undervisningens kvalité.

### 5.2.1 Kategorier

De intervjuade mellanstadielärarna använder sig enbart av de begreppsmodeller som är representerade i kategori ett och två, medan de intervjuade högstadielärarnas begreppsmodellssammansättning finns representerade i alla fyra kategorierna.

Sara, Malin och Erikas undervisningsmodell är placerad i kategori ett, *del av helhet*. Sara använder sig av visualiserande magnetbitar som hon sätter upp på tavlan, vilka hon anser visa tydligt skillnaden på $\frac{1}{3}$ och ¼. Malin delar frukt i halvor och fjärdedelar och säger sig samtidigt visa med hjälp av Montessoris bråkplattor de olika delarnas storlek. Erika beskriver att hon klipper ut papperstårtbitar och med dem som hjälp förklarar hon *tal i bråkform*.

Anita och Evas undervisningsmodeller har vi placerat under kategorin *del av helhet* och *andel*, de använder sig av båda begreppsmodellerna. Anita säger att hon brukar ”göra något praktiskt exempel, att vika papper och se på delar, det är ju ett sätt som är bra eller om man tar exempel från vardagen då man ska dela med kompisar och så vidare”.
Eva använder sig av att låta eleverna växla pengar för att beskriva hur man adderar tal *i bråkform* med olika nämnare. Hon säger att hon förklarar med hjälp av *chokladkakemodellen, del av helhet.*

I kategori tre, *division, del av helhet* och *andel,* representeras bara av en av de intervjuade lärarna. Högstadieläraren Albin säger att ”det första är att jättemånga inte ser att ett bråk är detsamma som division”. Han säger sig använda pizzamodellen för att visualisera, visa de olika delarnas storlek. Albin säger att han poängterar för eleverna att det är en av fyra när det gäller en fjärdedel.

Den sista kategorin är representerad av en intervjuad högstadielärare, Gunnar. Vi tolkar att han använder sig av *del av helhet, andel* och *sträcka på tallinjen*. På en overhead ritar han upp tallinjer och ovanför dessa sträckor som beskriver ½, $\frac{1}{3}$ , ¼ och så vidare Han pratar om andel då han anser att det kan vara enkelt att förstå att ta hälften av 500 kr eller en tredjedel av 750 kr. Han berättar att han använder även bilder såsom chokladkakor och pizzor för att visualisera. Gunnar poängterar att eleverna inte får visualisera för länge då han anser att modellerna kan tappa sin funktion om eleverna ritar slarviga modeller.

### 5.2.2 Förkunskaper

”Lärare behöver ha en didaktisk kunskap i matematik så att de kan utgå från och bygga vidare på det matematiska tänkande som eleverna har med sig till klassrummet.” (Skolverket, Lusten att lära – med fokus på matematik, 2003:42)

Vilken förförståelse ansåg de intervjuade lärarna att eleverna brukar ha? När det gäller förförståelsen så uttryckte mellanstadielärarna att de upplevde det som om eleverna hade en viss förkunskap/förförståelse när de började undervisningen om *tal i bråkform*. De flesta av de intervjuade högstadielärarna menade på att eleverna saknade relevant förförståelse.

Kategori ett

Av de lärare som representerar kategori ett är det bara ett par lärare som svarat på denna fråga, de övriga i kategorin ansåg inte att eleverna hade någon speciell förförståelse. Greta tycker att den förförståelse eleverna bör ha är den att kunna relatera till någon händelse de själva varit med om, till exempel genom att dela en tårta i rätt antal bitar så att alla får en lika stor bit var. Sara tycker sig se att det är genom hemkunskapen som eleverna fått sin förförståelse till tal i bråkform. Det är i hemkunskapen de har kommit i kontakt med halvor, ¾ deciliter och så vidare och kan därför relatera tal i bråkform till verkligheten.

Som det står att läsa i kapitlet Bakgrund skriver författarna till *Children learning mathematics – A teacher's guide to recent research* (1990) att följande förförståelse är en bra grund för att förstå begreppet *del av helhet*:

> Piaget, Inhelder och Szeminska ger sju kriterier för operationell förståelse av rumsuppfattad ”del – helhet” aspekt om tal i bråkform:
>
> 1. en ”helhet” ses som delbar
> 2. ”helheten” kan bli delad i önskat antal delar
> 3. delarna måste förbruka hela ”helheten”
> 4. antalet bitar behöver inte stämma överens med hur många gånger man har ”utfört en delning”
> 5. delarna måste vara lika stora
> 6. delarna kan betraktas som en ny helhet
> 7. helheten är bevarad, även när den är delad i bitar
>
> (Dickson, Brown & Gibson, 1990:277, författarnas översättning)

Det finns åtskilliga bevis på att elever finner denna rumsuppfattning av *del av helhet* som det enklaste sättet att förstå *tal i bråkform*, se kapitel Bakgrund.

Kategori två

I kategori två undersöker vi vad Eva säger om elevernas förförståelse. Hon anser att den viktigaste förförståelsen får barnen i sina familjer. De kan vara två eller tre syskon som skall dela en kaka eller liknande i lika stora delar. Gustav säger att han låter eleverna klippa stavar som de sedan får dela i ½, $^1/_3$, … $^1/_{12}$, vilka används för att jämföra delarna med varandra och med den hela staven, helheten.

När vi tittar på vad *Children learning mathematics – A teacher's guide to recent research* (1990) skriver om förförståelse om man använder sig av *andel* som begreppsmodell läser vi:

> Resultaten på både *mängd*- och *area-modellerna* visar mot att ungefär en tredjedel av barnen troligen inte har någon klar konceptuell uppfattning om vad *tal i bråkform* är, ens i en väldigt konkret mening, när de börjar i secondary school.
>
> (Dickson, Brown & Gibson, 1990:280, författarnas översättning)

Det vill säga att det är viktigt att eleverna har en konkret förförståelse om vad *tal i bråkform* är. Ovanstående samt de sju punkterna i kategori ett är bra förförståelse vid användning av *andelsmodellen* och *del av helhetsmodellen*.

Kategori tre
Albin som representerar kategori tre säger sig ha upplevt att förförståelsen varierar beroende på vilken skola man jobbar på. Den förförståelse han anser att eleverna saknar är den att de inte ser att *bråk* är detsamma som division. När eleverna sedan ska börja multiplicera med *tal i bråkform* säger Albin att han först vill visa eleverna att alla tal dividerat med ett blir sig själva. "Om de till exempel skall räkna ut 4 gånger en fjärdedel så visar jag dem att de skriver $\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{4}$ och sedan gångra täljarna för sig och nämnarna för sig."

I *Children learning mathematics – A teacher's guide to recent research* (1990) kan man bland annat läsa: "Denna aspekt av *tal i bråkform* associerar *bråktalen* med en räkneoperation då man delar ett heltal med ett annat: exempelvis $\frac{3}{5}$ är identifierat med 3 delat med 5, eller att dela tre enheter mellan fem stycken."

Ovanstående tillsammans med de sju punkterna i kategori ett samt förförståelsen för *andelsmodellen* kan ses som en förförståelse för denna kategori.

Kategori fyra
Kategori fyra representeras av högstadieläraren Gunnar. Som förförståelse till *bråk* anser han att det är viktigt att eleverna känner till vardagsorden hälften, en tredjedel, en fjärdedel etcetera Han anser att de skall kunna begreppen täljare och nämnare. Då Gunnar anser att eleverna har svårt med taluppfattningen tolkar vi det som att en säkrare taluppfattning är att önska. Han anser också att automatiserade tabellkunskaper skulle underlätta i bland annat bråkräkning.

I Bakgrunden tog vi upp problemet med enhetens beskaffenhet vid *tallinjemodellen*, då elever inte uppfattar segmentet mellan 0 och 1 som representant för en numerisk enhet. Det föreslås även att mer erfarenhet av att avläsa skalor där *tal i bråkform* förekommer, till exempel linjaler, barometrar och termometrar, skulle kunna underlätta. Samtliga i kapitlet nämnda förförståelser förutom *division* ingår också i kategori fyra.

### 5.2.3 Fallgropar

I introduktionen av *tal i bråkform* kan delar av de olika begreppsmodellerna utgöra svårigheter i förståelsen för eleverna. Även att vissa begreppsmodeller är oförenliga med varandra kan göra att svårigheter uppstår. Med lärarens kunskap och medvetenhet om eventuella fallgropar underlättas undervisningen och därmed elevernas förståelse.

Kategori ett

Greta säger att om man använder två tårtor har eleverna svårt att uppfatta enheten. Hon menar att de först måste bli säkra på att förstå en tårta, innan man går vidare med två. Eleverna har svårt att storlekssortera, till exempel att ¼ är större än $\frac{1}{8}$, deras tidigare kunskap säger att åtta är större än fyra berättar Greta. Malin säger sig se att eleverna har svårt att lära sig att nämnaren står för hur stort *bråktalet* är och att täljaren står för antalet, vilket betyder att de har svårt att hålla isär vad som skall stå över och vad som skall stå under bråkstrecket. Folke menar att de största fallgroparna för eleverna är att förstå att storleken i enheten bestämmer hur stor delen är, $\frac{1}{3}$ är alltid $\frac{1}{3}$ oberoende på vad det är man mäter det vill säga $\frac{1}{3}$ familjepizza är betydligt större än $\frac{1}{3}$ barnpizza. I Bakgrunden kan man läsa att genom flera studier har liknande svårigheter, som de intervjuade lärarna berättat om, framkommit.

Kategori två

En fallgrop med *tal i bråkform* som Eva säger sig kunna se är att eleverna kan ha svårt att förstå att alla delar skall vara lika stora. Ett exempel hon beskriver är när hon ritar upp en tårta och delar den i hälften och sedan den ena halvan i hälften igen. Då berättar hon att flera elever vill se halvan och de två fjärdedelarna som tredjedelar. Stina säger sig finna svårigheter i att få eleverna att gå från det allmänna *bråktalet*, hälften, till det matematiska symbolspråket, $\frac{1}{2}$. Gustav menar att eleverna fokuserar för mycket på siffrorna, de tror att en halv är mindre än en fjärdedel då fyra är mer än två. En annan fallgrop Gustav säger sig se är att eleverna inte uppfattar att ¼ + ¼ = $\frac{2}{4}$ och inte $\frac{1}{8}$.

Om läraren använder sig av både *andelsmodellen* och *del av helhetsmodellen* är det av största vikt att läraren poängterar att det är två olika sätt att uppfatta *tal i bråkform*. *Andelsmodellen* fungerar enbart då helheten är en, *del av helhetsmodellen* fungerar både då helheten är en eller är flera. Vid *oegentliga bråktal*, exempelvis $\frac{5}{3}$, håller inte *andelsmodellen* för att helheten går inte att differentiera.

Kategori tre

Högstadieläraren Albin anser att en av fallgroparna i förförståelsen av *tal i bråkform* kan vara att eleverna inte ser ¼ som 1 delat på 4, de ser uttrycket en fjärdedel som något helt nytt. Enligt Dickson, Brown & Gibson (1990) finns det väldigt lite forskning inom denna begreppsmodell, vi har därför inte kunnat styrka detta med hänvisning till litteraturen.

Kategori fyra

Gunnar nämner inte några fallgropar men tycker sig se svårigheter med *tal i bråkform* då han anser att det inte finns någon direkt koppling till elevernas verklighet. ”Matematik behöver ha någonting med livet utanför skolan att göra. Då skulle det definitivt vara lättare att förstå hur man kan använda den, hävdar en del elever.” kan man läsa i *Lusten att lära* (2003:21). När *tallinjemodellen* används kan svårigheter uppstå då elever kan uppfatta bråktalet som ett tal, i likhet med 0 och 1 som representeras av punkter på tallinjen.

## 5.3 Har vi nått syftet med studien

Syftet med denna undersökning är att ta reda på vilka begreppsmodeller lärare använder vid introduktion av arbetet med *tal i bråkform*. Syftet är också att undersöka om skillnader i val av begreppsmodeller föreligger mellan mellanstadiets och högstadiets lärare.

Vi anser att vi nått ovanstående syften. Analysen av de utskrivna intervjuerna beskrev vilka begreppsmodeller de intervjuade lärarna använder sig av. Genom analyserna framkom fyra kategorier av begreppsmodellssammansättningar. Undersökningen visade att skillnader i begreppsmodellsanvändningen verkar föreligga mellan de intervjuade mellanstadielärarna och de intervjuade högstadielärarna.

Med undersökningen vill vi få fram om lärarna anser att eleverna har relevant förförståelse för *tal i bråkform*. Undersökningens syfte är också att få fram vilka fallgropar lärarna upplever att det kan finns i de begreppsmodeller de använder sig av vid introduktion av *tal i bråkform*. Syftet är att undersöka vilka förförståelser lärarna anser att eleverna behöver och vilka fallgropar lärare kan se med de olika begreppsmodellerna samt att jämföra dessa med tidigare forskning. Studien har visat att flertalet lärare är medvetna om vikten av förförståelse hos eleverna vilket också forskningen påvisar. En del säger sig uppleva fallgropar i de begreppsmodeller de använder sig av, medan övriga av de intervjuade lärarna inte nämner några fallgropar. Forskningen visar dock att det inom alla begreppsmodeller kan uppstå svårigheter.

## 5.4 Studiens begränsningar

Vi kunde ha valt att genomföra en enkätundersökning istället för intervjuer men då hade vi inte haft chans att ställa några följdfrågor och inte haft möjlighet att få uttömmande svar.

Om vi hade haft fler veckor, längre tid, för undersökningen kunde vi ha genomfört fler intervjuer eller ha utökat intervjuguiden och därmed fått ett mer reliabelt resultat.

Vidare kunde klassrumsobservationer ha gjorts men då dessa kräver stor arbetsinsats och är tidsödande var denna undersökningsmetod omöjlig.

Då vi utgått från de begreppsmodeller som Dickson, Brown och Gibson (1990) beskriver har vi medvetet begränsat studien. Genom valet av begreppsmodeller, fåtal intervjuer och begränsad tid gör att denna studies resultat inte har hög generaliserbarhet.

## 5.5 Framtida forskning

En större empirisk studie skulle behöva göras för att se om de tendenser till skillnader i begreppsmodellsanvändning som denna undersökning visat på är generaliserbar. Vidare skulle en mer omfattande och på längre tid utförd studie kunna visa vilka förkunskaper elever verkligen skulle behöva. Man skulle även kunna undersöka om de begreppsmodeller lärare använder i sin undervisning är förenliga eller ej, vilket kan påverka förståelsen för eleverna.

En möjlig uppföljning av resultatet av denna studie skulle kunna vara att via enkäter och diagnoser testa elevernas förståelse jämfört med vilka begreppsmodeller deras undervisning bestått av. Denna undersöknings resultat skulle kunna jämföras med lärarnas uppfattning av vilka elever som anses ”duktiga” inom matematik. Ännu en tänkbar uppföljning av denna studie är att kartlägga vilka begreppsmodeller som förekommer i ett större antal läromedel så kallad djupgående litteraturstudier.

# 6. Slutsats

Flertalet av de lärare vi intervjuat använder sig av en eller två begreppsmodeller medan fåtal använder sig av flera begreppsmodeller. Litteraturen påvisar vikten av att eleverna får undervisning av flera begreppsmodeller både från mått- och operatoraspekten.

Studien har visat på att mellanstadielärarna anser att eleverna har en viss förförståelse medan högstadielärarna säger att eleverna saknar relevant förförståelse för tal i bråkform.

Analysen av de utskrivna intervjuerna har visat att några av de intervjuade lärarna är medvetna om att fallgropar/svårigheter kan förekomma i de begreppsmodeller de använder vid introduktion av tal i bråkform. Svårigheter kan också uppstå om de begreppsmodeller som används ej är kompatibla.

# 7. Referenslista

Andersson, P. och Picetti, M. (2005). *Matte Direkt Borgen 5B*. Bonniers utbildning, Almqvist & Wiksell, första upplagan.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1990). *Children learning mathematics – A teacher's guide to recent research.* Casell Educational Ltd: Oxford (s 274 – 320)

Lantz, A. (1993). *Intervjumetodik*. Studentlitteratur, Lund.

Löwing, M. och Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle*. Studentlitteratur, Lund.

Lärarförbundet (2001). *Läroplaner för - förskolan Lpfö 98, - det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet (Lpo 94), - de frivilliga skolformerna LPF94*. Tryckindustri Information, Solna.

Patel, D. och Davidson, B. (1994). *Forskningsmetodikens grunder – Att planera, genomföra och rapportera en undersökning*. Studentlitteratur, Lund, andra upplagan.

Skolverket (2002). *Kursplaner och betygskriterier 2000 – Grundskolan*. Fritzes, Västerås, upplaga 1:4.

Skolverkets rapport nr. 221 (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik.*

Skoogh, L., Ahlström, R., Björnlin, J-O. och Torbjörnson, L. (1999). *Möte med matte C*. Liber, tredje upplagan.

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Studentlitteratur, Lund.

Bilaga 1

# Intervjuguide

Kom ihåg:
Presentera dig själv
Kort presentation av undersökningen
Berätta att vi studenter är de enda som kommer att lyssna på bandupptagningen, samt att man kommer ej att kunna härleda ursprungskällan.

Hur förbereder du arbetet med tal i bråkform?

Med eleverna?
Förförståelse?
Vilka fallgropar kan du se? – Hur gör du för att undvika dessa?

Hur inleder/introducerar du bråk?

Vilken erfarenhet tycker du att du ser hos eleverna när de kommer i 7:an respektive 4:an?

Hur förklarar du de olika räknesätten mellan två bråk?

– Addition?
– Multiplikation?
– Division?

Hur förklarar du addition av oliknämniga bråk?

Vad arbetar ni med för bok i matematiken? Hur använder du dig av den i arbetet med tal i bråkform?

Eventuella följdfrågor: berätta mera, kan du utveckla det och fortsätt och så vidare

Till sist, får vi återkomma vid behov?

## Här följer en kort presentation av de intervjuade lärarna:

Malin är 52 år, varit lärare i 25 år och är klassföreståndare för en Montessoriinspirerad klass år 3-5. Hon har läst till grundskolelärare på seminarietiden.

Greta är 60 år gammal och har varit lärare i 30 år. Hon har ingen egen klass utan jobbar som speciallärare i matematik på mellanstadiet.

Folke är 29 år. Han har varit fast anställd på en högstadieskola i ett år och innan dess vikarierade han i två år. Han har läst matematik, NO och teknik, 20 poäng i vardera ämnet, med inriktning år 4-9.

Albin är 31 år och har jobbat på högstadiet i tre år. Han är utbildad Ma-/NO– lärare för år 4-9 och under sin utbildning har han bland annat läst 50 poäng matematik.

Gustav är 61 år gammal och har varit lärare i 39 år. Han har gått reallinjen på gymnasiet samt tvååriga seminariet till lärarexamen. Han har ingen högskolematematik. Han är klassföreståndare i år 5 och undervisar i alla ämnen förutom bild, slöjd, historia och NO. Han har varit skolledare under ett par år men har återgått till klassrummet.

Eva är 32 år gammal. Hon har gått den gamla lärarutbildningen 1-7 lärare och har läst 20 p matematik. Hon tog examen ht 98 och har arbetat sedan dess med avbrott för mammaledighet. Hon arbetar 50 % i år 5 i matematik och NO samt 50 % matematik i år 7.

Gunnar är 60 år och har varit lärare sedan 1972. Han är utbildad Ma-/NO- lärare i år 4-9 och jobbar heltid i år 9.

Erika är 36 år och har varit lärare i 8 år. Hon tog examen 1997 som Ma-/NO- lärare för år 4-9 och har sedan dess arbetat som högstadielärare.

Anita är 30 år och klasslärare i mellanstadiet. Hon har arbetat som lärare i 2 år och även jobbat på förskola efter examen.

Stina är 45 år och har varit lärare i 17 år. Hon är högstadielärare i matematik samt klassföreståndare.

Sara är 48 år och är högstadielärare i matematik. Hon har varit lärare i 20 år och är matematikansvarig i sin skola.

Bilaga 3

## Kort beskrivning av skolorna de intervjuade lärarna arbetar på

En av skolorna är belägen på landet. Det är en F-9 skola, med få elever med språksvårigheter och få elever med missbruksförhållande. I år 4 kommer det elever från två närbelägna byskolor F-3. Och i år 7 kommer det elever från en närbelägen F-6-skola samtidigt som alla klasser ombildas i år 7. Skolan har låg personalomsättning.

En av de andra skolorna ligger nära havet i en naturskön miljö. Eleverna som går i skolan kommer ofta från välbärgade familjer. Förekomsten av invandrare är låg, därav inga språkproblem. Skolan är en F-9 skola.

Nästa skola ligger i samma typ av område som den senast beskrivna. Men denna skola är en F-5 skola. De första åren, F-2, går eleverna i åldersblandade klasser och i år 3, 4, 5 går eleverna i homogena klasser.

Nästa mellanstora F-9 skola är belägen i en stad. Förekomsten av invandrarbarn är ungefär 2 - 4 elever per klass. På denna skola förkommer det modersmålsundervisning. Eleverna kommer från varierande sociala förhållanden och de bor i både lägenhet och villa.

En annan av skolorna ligger i ett invandrartätt område och är en 4-9 skola. Eleverna på skolan kommer från varierande sociala förhållanden.

Nästa skola är en 7-9 skola som har ett relativt homogent upptagningsområde. I år 7 kommer det elever från tre olika skolor, klasserna splittras och nya klasser bildas. Det är en stor skola med ungefär sex paralleller i varje årskurs.

En av de andra skolorna är en F-6 skola med homogena klasser. Eleverna på skolan kommer från likvärdiga sociala förhållanden.