



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Huvudräkningens roll i den svenska skolmatematikens historia

Maria Zackrisson Andersson

Inriktning/specialisering: LAU370

Handledare: Sverker Lundin

Examinator: Mats Fridlund

Rapportnummer: HT11-1040-01



GÖTEBORGS UNIVERSITET

ABSTRACT

Examensarbete inom lärarutbildningen

Titel: Huvudräkningens roll i den svenska skolmatematikens historia

Författare: Maria Zackrisson Andersson

Termin och år: Höstterminen 2011

Kursansvarig institution: Sociologiska institutionen

Handledare: Sverker Lundin

Examinator: Mats Fridlund

Rapportnummer: HT11-1040-01

Nyckelord: huvudräkning, matematik, historia

Sammanfattning

Skolmatematikens historia är i stor utsträckning okänd, endast några få beskrivningar finns.

Syftet med den här studien är att undersöka hur huvudräkning har använts genom historiens gång. Huvudräkning har genom den svenska historiens lopp genomgått olika skeden. Det som undersöks är: Vilken plats hade huvudräkningen inom vart och ett av dessa skeden? Denna fråga besvaras genom en beskrivande kvalitativ litteraturstudie där främst material från Skolmatematiskt arkiv innefattande perioden 1880 till 1973, metodhandledningar och läroplaner från 1955 fram till idag samt avhandlingar om huvudräkning utanför Skolmatematiskt arkiv.

Resultaten av litteraturstudien presenteras som huvudräkningens historia från 1880 till idag. Huvudräkningens historia kan ge oss möjlighet att fördjupa och nyansera dagens diskussion om huvudräkning i skolan och pekar på dess möjligheter inom läraryrket idag. Ett argument för att använda sig mer av huvudräkning i skolan kan vara att bättre rusta eleverna för vardagslivets beräkningar än vad som sker idag.



GÖTEBORGS UNIVERSITET

FÖRORD

Alla använder vi huvudräkning någon gång i det dagliga livet, som t.ex. när vi ska räkna ut hur många tallrikar vi ska ta fram när vi har gäster hemma.

”Moster Anna och morbror Bertil, familjen Johansson har 3 barn och själva är vi 4. Det blir 2 plus 5 plus 4 dvs. 11 tallrikar”.

Vuxna väljer i upp till 80% av fallen metoden huvudräkning när de ska göra beräkningar i vardagslivet som här ovan i hemmet, på fritiden eller när de handlar. I annat fall tar de till penna och papper, miniräknare eller mobil.

Exempel ur arbetslivet

I Postexpeditörsutbildningen i mitten av 1950-talet ingick huvudräkning som ett speciellt ämne i utbildningen. Lämpligt var att kunna räkna i huvudet vad 17 gånger 1,35 var för att komplettera räknemaskinen och du skulle kunna snabbt räkna när det var t.ex. lång kö i din kassa. Summera flera tal i rad i huvudet var också bra att kunna. (Senare har denna utbildning ersatts av Postkassörsutbildning där det inte är obligatoriskt med huvudräkning i utbildningen.)

Huvudräkningens historia i Sverige har inte beskrivits förut. Det finns ett värde i att känna till den historiska bakgrunden till detta ämne för att förstå de traditioner som finns.

Jag vill passa på att tacka min handledare Sverker Lundin för handledning och att jag i ett tidigt skede fick tillgång till Skolmatematiskt arkiv, min barndomsvän Annika Jensen som arbetar som lärare och handledare på högskolan i Halmstad för goda råd i samband med mitt skrivande, Thomas Andersson som läst igenom manus och kommit med värdefulla synpunkter samt de lärare som undervisar i matematik på gymnasieskolan jag arbetar på.



GÖTEBORGS UNIVERSITET

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

INLEDNING	1
SYFTE	2
FRÅGESTÄLLNING	3
METOD	3
TEORI	4
TIDIGARE FORSKNING	4
<i>Forskning om huvudräkning ur ett historiskt perspektiv</i>	4
<i>Forskning om huvudräkning ur ett pedagogiskt perspektiv</i>	6
HUVUDRÄKNINGENS HISTORIA FRÅN 1880 TILL IDAG	7
K.P. NORDLUND OCH METERSYSTEMETS INFÖRANDE	7
FÖRSTA KURSPLANEN FÖR MATEMATIK	8
DEN SVENSKA GRUNDSKOLANS FADER	9
FEMMINUTERSÖVNINGAR I HUVUDRÄKNING KRING SEKELSKIFTET	9
ANNA KRUSES ÅSKÅDNINGSMATEMATIK MED HUVUDRÄKNING	10
DEN FÖRSTE SVENSKA FORSKAREN I MATEMATIK	11
FRITZ WIGFORSS PIONJÄR INOM SVENSK SKOLMATEMATIK	13
HUVUDRÄKNING I ALLA STADIER PÅ 1950-TALET.....	17
OBLIGATORISK 9-ÅRIG GRUNDSKOLA 1962.....	18
LGR 69 MED MÅNGDLÄRA OCH MINSKAD HUVUDRÄKNING.....	19
HUVUDRÄKNING ÅTERINFÖRS PÅ 1980-TALET.....	20
1990-TALET OCH MÅLRELATERADE BETYG	22
SKRIFTLIG HUVUDRÄKNING PÅ 2000-TALET	24
ANALYS	28
FYRA OLIKA SÄTT/MOTIV FÖR ANVÄNDNING AV HUVUDRÄKNING	28
<i>Huvudräkning som redskap i skriftlig räkning</i>	29
<i>En metod för att få taluppfattning</i>	29
<i>Hela problemlösningen i huvudet</i>	30
<i>Skriftlig huvudräkning</i>	32
SLUTSATS	32
REFERENSER	34
<i>(Utanför Skolmatematiskt arkiv)</i>	34
<i>Skolmatematiskt arkiv</i>	36



GÖTEBORGS UNIVERSITET

TABELLER

Tabell 1 Skolans allmänna utveckling



INLEDNING

Under de senaste tio åren har jag verkat som lärare, först för vuxna elever och senare för elever på gymnasiet på lite olika skolor. På en del skolor använder sig läraren enbart av böckerna i matematik och har genomgång av aktuellt moment, eleverna räknar i böckerna och sedan är det matematikprov. På den senaste skolan där jag arbetade hade vissa engagerade lärare en stunds huvudräkning på nästan varje matematiklektion, antingen som en uppvärmning innan lektionen tar fart med dagens huvudmoment eller som en avslutning efter dagens moment. Tidsåtgång per lektion är ca 5-10 minuter. Resultatet är att eleverna blir bättre på överslagsräkning. De verkar bättre förstå om deras framräknade resultat av övningarna, i boken och på proven, är rimliga. Dessa huvudräkningsövningar passar också bra i kursen, då det i de nationella proven ingår en del med uppgifter som ska lösas utan räknare.

Vart tredje år genomförs en internationell studie över elevers kunskaper i skolämnen som matematik i OECD-projektet PISA (Programme for International Student Assessment).¹ Enligt senaste PISA-rapporten från 2009² har svenska elever halkat efter i sina kunskaper i matematik. Debatten idag säger att eleverna i Sverige överlag är så dåliga i matematik och att lärarna inte har så bra metoder och ämneskunskaper att lära ut ämnen som förr. Detta bl.a. eftersom från 1980-talet och framåt det har varit inne på lärarutbildningar med tanken att det är formen för undervisningen dvs. allmänna inlärningsprocessen är viktigare än ämnesinnehållet och passande metoder inom det specifika ämnet. Det har inte satsats lika mycket på de blivande lärarnas ämneskunskaper inom lärarutbildningen enligt Hans Albin Larsson skolforskare, professor i historia (Ohelig allians försämrade skolan, 2011).³

Receptet mot elevernas dåliga resultat skulle enligt vissa kommuner vara att skicka ut speciella coacher som ska se till att stötta lärarna så att de får bättre metoder att undervisa i matematik och att allmänt coacha elever och skolläda i arbetet med matematik. Förutom att lärare skulle behöva mer tid i sina tjänster till att utveckla sina ämnen och lektioner, så kan en metod som regelbunden huvudräkning som uppgraderar eleverna i deras matematiska tänk, vara ett fungerande alternativ anser några av 2000-talets författare i metodik-handledning för matematik.⁴

Inom skolmatematiken idag används i huvudsak skriftliga beräkningar ofta i kombination med miniräknare. I Lgr 11⁵ och GY 2011⁶ anges att skolans

¹ http://www.skolverket.se/statistik_och_analys/internationella_studier/2.4568/vad-ar-pisa-1.2184

² *Rustad att möta framtiden? PISA 2009 om 15-åringars läsförståelse och kunskaper i matematik och naturvetenskap*. Rapport 352, 2010

³ Larsson, Hans Albin, *Ohelig allians försämrade skolan*, UNT (Upsala Nya Tidning), 2011-05-07. <http://www.unt.se/debatt/ohelig-allians-forsamrade-skolan-1344562.aspx>

⁴ Malmer, Gudrun. *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter.*, 2002, Löwing, Madeleine & Kilborn, Wiggo. *Huvudräkning – En inkörspport i matematiken*, 2003, Löwing, Madeleine. *Grundläggande aritmetik. Matematikdidaktik för lärare samt McIntosh, Alistair. Förstå och använda tal – en handbok*, 2009

⁵ *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet - Lgr 11*

matematik ska förbereda eleven för vardagslivet i dagens samhälle (och vuxenlivet i det kommande samhället). I vardagslivet har det beräknats att enbart en fjärdedel av de beräkningar en vuxen gör är skriftliga beräkningar, resten görs i huvudet.⁷ Inte ens efter att miniräknare (och datorer) infördes har detta medfört några större skillnader. Forskning visar att huvudräkning fortfarande används i mer än 80% av en vuxens vardagsberäkningar, medan skriftliga metoder och miniräknare används ungefär i en fjärdedel av beräkningarna (för vissa beräkningar används mer än en metod för att komma fram till resultatet).⁸ Ett argument för att använda sig mer av huvudräkning i skolan är att bättre rusta eleverna för vardagslivets beräkningar än vad som sker idag. Detta kan ingå som ett utvecklingsarbete när det gäller matematiken i skolan för lärare, elever och samhället i stort.

Huvudräkning har använts inom skolans ämne räkning som senare blev till ämnet matematik. Många bra idéer har kommit fram om hur man kan använda huvudräkning i skolan och i vardagen och sedan glömts bort. I denna litteraturstudie påminns vi om dessa idéer och traditioner som använts i Sverige från 1880 och fram till våra dagar.

SYFTE

Syftet med den här studien är att undersöka hur huvudräkning har använts i den svenska skolan genom historiens gång från 1880 till idag. Tanken är vi kan lära oss av historien och följa huvudräkningens utveckling inom skolan som under denna tid har genomgått stora förändringar. Huvudräkningens historia kan ge oss möjlighet att fördjupa, nyansera, bredda och hitta nya infallsvinklar när det gäller synen på huvudräkning i skolan.

Skolmatematikens historia är i stor utsträckning okänd, men det finns några få beskrivningar som t.ex. i Sverker Lundins doktorsavhandling *Skolans matematik*,⁹ Jan Unenges rapport *Huvudräkning – huvudverk för elever och lärare*,¹⁰ lite historik i Gudrun Malmers bok *Bra matematik för alla*¹¹ samt Madeleine Löwings och Wiggo Kilborns *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle*.¹² Eftersom ingen tidigare har beskrivit huvudräkningens historia finns det ett egenvärde i att bara berätta om denna.

⁶ Läroplan för gymnasieskolan 2011, examensmål och gymnasie- gemensamma ämnen - GY 2011

⁷ Wandt & Brown, *Non-occupational uses of mathematics mental and written, approximate and exact*. 1957 citerat i McIntosh, Alistair. *Förstå och använd tal – en handbok*, 2009. s. 88

⁸ Nortcote & McIntosh, *What mathematics do adults really do in everyday life?*, 1999 citerat i McIntosh, Alistair. *Förstå och använd tal – en handbok*, 2009, s. 88

⁹ Lundin, Sverker. *Skolans matematik - En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*, 2008

¹⁰ Unenge, Jan. *Huvudräkning – huvudverk för elever och lärare, HÖJMA-projektet*, rapport nr 2, 1982

¹¹ Malmer, Gudrun. *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter.*, 2002

¹² Löwing, Madeleine & Kilborn, Wiggo. *Huvudräkning – En inkörsport i matematiken*, 2003

FRÅGESTÄLLNING

Hypotes: Huvudräkning har genom den svenska historiens lopp genomgått olika skeden.

Vilken plats hade huvudräkningen inom vart och ett av dessa skeden?

METOD

Detta är en beskrivande kvalitativ litteraturstudie.¹³ Jag har analyserat svenska texter ur Skolmatematiskt arkiv (SMA), som är en sökbar fulltextdatabas på GUPEA¹⁴ (Gothenburg University Publications Electronic Archive) på Göteborgs universitetsbibliotek. Databasen omfattar svenska texter inom matematik från 1770 till 1973, men är ej komplett, speciellt mellan åren 1955 till 1973. I arkivet har jag valt ut texter som handlar om huvudräkning i Sverige i form av monografier, läroböcker, recensioner av läroböcker, artiklar i främst lärartidskrifter, myndighetstexter, metodhandledningar, läroplaner och avhandlingar från 1880 och framåt. Jag har även studerat metodhandledningar från 1955 och fram till idag samt avhandlingar och läroplaner som inte ingår i Skolmatematiskt arkiv. Mina studier omfattar även Nämnares fulltextdatabas (NCM - Nationellt centrum för matematikutbildning på nätet¹⁵), samt sakliga hemsidor med anknytning till skolan som Lärarnas historia (hemsida skapad i samarbete mellan TAM-Arkiv (Tjänstemanna- och akademikerorganisationernas arkiv) och Lärarförbundet, Lärarnas Riksförbund, SFHL (Svenska Folkhögskolans förbund) och Stiftelsen SAF (Stiftelsen Sveriges allmänna folkskollära förening¹⁶) i samband med att den allmänna svenska skolhistorian beskrivs. Jag har inte tittat så mycket på själva läroböckerna utan på text om huvudräkning (eller hufvudräkning i texter från slutet av 1800-talet och början av 1900-talet) i dem. Under läsningen har jag försökt besvara frågan som jag ställde under rubriken frågeställningar. Jag har valt ut några texter som visar tydligt på något speciellt sätt att förhålla sig till huvudräkning, framförallt texter som för huvudräkningen och matematiken framåt och skriver referat av dessa texter. Jag har lagt dessa referat i kronologisk ordning så att detta blir en sorts berättelse. Jag väver in allmän skolhistoria mellan texterna jag granskar.

Jag har valt att begränsa mig till att studera tiden främst från 1880 och fram till idag eftersom det var då metersystemet infördes och som en följd av detta blev det också mer huvudräkning i skolan.

Etikfrågan har tagits i beaktande, och materialet är av en sådan art att det inte kräver några vidare etiska överväganden.

¹³ Stukát, Staffan. *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*, 2005, s. 24; Johansson, Bo. Svedner, Per Olov. *Examensarbetet i lärarutbildningen. Undersökningsmetoder och språklig utformning*, 2005 s. 64-65, 78-80 och Esaiasson m.fl. *Metodpraktikan* 2010, s. 35, 37-38, 99, 153-158

¹⁴ <http://gupea.ub.gu.se>

¹⁵ <http://ncm.gu.se/artikelsok>

¹⁶ <http://www.lararnashistoria.se>, <http://tam-arkiv.se>, <http://www.lararforbundet.se>, <http://www.lr.se>, <http://www.sfhl.se> samt <http://www.stiftelsensaf.se>

TEORI

Tidigare forskning

Det finns inte mycket skrivet om huvudräkning. I denna del beskriver jag vad som finns innan jag tar upp det jag hittat i källor enligt ovan från 1880 till idag.

Forskning om huvudräkning ur ett historiskt perspektiv

Sverker Lundins beskriver i sin avhandling *Skolans matematik* från 2008,¹⁷ hur huvudräkning tas upp i olika läroböcker från slutet av 1700-talet fram till 1890-talet.

Huvudräkning som metod möter man i läroböckerna redan under slutet av 1700-talet i bl.a. Roloff Anderssons lärobok *Arithmetica tironica* från 1779.¹⁸ Sverker Lundin skriver i sin avhandling om huvudräkning att:

”Hos Andersson utgjorde förmågan att räkna i huvudet en del av räknekonsten. Huvudräkning innebar för honom att ha memorerat tabeller och sorter, och genom övning nått en förmåga att i huvudet utföra relativt enkla beräkningar. Nyttan med detta var inte i första hand att kunna svara på räknefrågor helt utan griffel och tavla. De realistiska frågor som räknekonsten syftade till att besvara involverade ofta besvärliga kombinationer av sorter och uträkningar i flera led, som i regel krävde skriftliga algoritmer. Huvudräkning sågs därför istället som ett redskap för att underlätta och snabba upp det skriftliga räknandet.”¹⁹

I Roloff Anderssons bok kom reglerna först, följda av kommenterade exempel och ett fåtal övningar.²⁰ I böcker från den tiden är reglerna sammanvävda med den löpande texten.

Efter denna tid kom den *Zweigbergkska läromedelstiden* (enligt Lundin) som namngetts efter Per Anton von Zweigbergk, matematiker som präglat läromedel vid tiden från 1839 och framåt. Vad lärarna behövde då var regler och övningar separerade med regler först och därefter en mängd övningar och detta var vad Almqvist i sin *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*²¹ och Zweigbergk i sin *Lärobok i räknekonsten*,²² försåg dem med. I dessa läroböcker var det en kraftig begränsning av innehållet i jämförelse med

¹⁷ Lundin, Sverker. *Skolans matematik - En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*, 2008

¹⁸ Andersson, Roloff. *Arithmetica tironica; eller Kort och grundelig anvisning, at practice lära all nödwändig hus- och handels-räkning; efter then nu för tiden mäst brukeliga och fördelaktigaste läro-methode. Til allmänhetens- och i synnerhet scholarnes: tjenst och nytto. Efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning samlad af Roloff Andersson. Med allernädigste privilegio.*, 1779

¹⁹ Lundin, Sverker. *Skolans matematik - En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*, 2008, s. 343

²⁰ Ibid, s. 346

²¹ Almqvist, Carl Jonas Love. *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, 1832

²² Zweigbergk, Per Anton von, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel: med facit-tabeller*, Stockholm, 1839.

böcker som till exempel Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica*.²³

Per Anton von Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten* var skriven enligt den tidens pedagogiska ansats ”där den räknemetod är bäst, som lär att med minsta ansträngning af tanken uträkna ett problem”.²⁴

Lundin beskriver i sin avhandling att övergången, från huvudräkning som ett instrument för att klara mer besvärliga beräkningar, till skriftlig heuristik där lärjungen själv genom regler och skriftliga beräkningar i räkneböcker bildar sig själv och upptäcker de matematiska sanningarna, skedde i tre faser.

Lundin beskriver enligt följande:

Första fasen

I början av 1830-talet börjar huvudräkning värdesättas som en nödvändig förberedelse för den skriftliga räkningen. Det fanns en skarp gräns mellan den muntliga huvudräkningen och den skriftliga räkningen. Huvudräkning skedde i form av muntlig räkning mellan lärare och elev anpassat efter elevens förkunskaper. Då innehöll böckerna enbart regler för hur man räknade och skriftliga övningar som passade för självverksamhet. Kompletterades av ett växelundervisningssystem som introducerades i början av 1800-talets första två decennier, där äldre elever som kunde mer undervisade grupper av yngre elever som kunde mindre och läraren gick mellan de olika grupperna.

Andra fasen

I mitten av 1850-talet fanns det kvar en skarp gräns mellan muntlig och skriftlig räkning. Läroböckerna innehöll både muntliga och skriftliga övningar som kunde användas i självverksamhet. De muntliga övningarna skulle alltmer ske som ”tysta övningar”. Växelundervisningssystemet från början av 1800-talet fasades ut. Detta med tysta övningar och böcker med tryckta muntliga och skriftliga övningar som eleverna kunde lösa ”tyst” för sig själva accentuerade när växelundervisning förbjöds 1864. Fortfarande under denna tid betraktade man det tysta räknandet som huvudsakligen ”mekaniskt”²⁵, även om man, som Velander menade, givetvis kunde hoppas att en och annan kunskapsbit kunde komma med liksom ”på köpet”.²⁶

Tredje fasen

Den tredje fasen inleds i mitten av 1870-talet då gränsen mellan muntlig förberedelse och efterföljande skriftlig räkning allt mer suddas ut. Eleverna skulle alltmer på egen hand upptäcka hur matematiken fungerar via självstudier i böckerna. Eleven möter då en sorts skriftlig huvudräkning där de fick röra sig från avsnitt till avsnitt helt på egen hand, med hjälp av anvisningar, uträknade exempel och logiskt ordnade uppgifter av långsamt växande svårighet. Läroboken kunde fungera som ett utvecklande redskap. Detta hade man inte kunnat acceptera omkring år 1850 då de det fanns åsikter om att det inte är helt

²³ Lundin, Sverker. *Skolans matematik - En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*, 2008, s. 212

²⁴ Hultman, Frans Wilhelm. *Anmälan af tio stycken räkneböcker*, Tidskrift för matematik och fysik, 1868, s. 233-244

²⁵ Lundin, Sverker. *Skolans matematik - En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*, 2008, s. 344

²⁶ Velander, J. P. *Ämnet räkning i folkskolan*, Svensk Läraretidning, 1884, s. 381

nödvändigt att eleverna lär sig förstå utan att de räknar efter reglerna. Skolmatematiken kom i och med detta än tydligare att framställa matematiken som en väg, och den process genom vilken matematiken bemästras som en väl reglerad rörelse från det lättare till det svårare.

Lundin tillägger att traditionen när det gäller huvudräkning i böcker början av 1900-talet kan härledas från böcker tryckta på 1840-talet.

Forskning om huvudräkning ur ett pedagogiskt perspektiv

I ett referat i Pedagogisk Tidskrift (*Ett pedagogiskt experiment*, av K.E.L.²⁷) om undersökning som överlärare Marshall Jackman gjort i England i början av 1900-talet. Jackman började använda huvudräkning i de tre första årskurserna och började använda skriftlig räkning först i de högre årskurserna.

K. G. Jonsson som räknas som den förste svenske forskaren i matematikdidaktik skrev 1919 en akademisk avhandling ”*Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*”²⁸ där han tog upp huvudräkning. Innan dess hade han gett ut ett par artiklar om undersökningar han lett i huvudräkning 1915²⁹ och 1918.³⁰

Mauritz Wiktorin har gjort en jämförande tvillingundersökning 1952 *Bidrag till räknefärdighetens psykologi, en tvillingundersökning*³¹ där han undersökte likheter och skillnad i kunskaper i huvudräkning mellan tvillingar.

Jan Unenge har i sitt HÖJMA-projektet *Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet* från 1980³² studerat mellanstadieelevers och lärares användning av strategier i huvudräkning.

Gudrun Malmer beskriver att huvudräkning gör att fokus flyttas från räknandet till tänkandet samt utvecklar ofta ännu fler tankeformer 1999 i boken *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter*.³³

Birgitta Rockström har utifrån sina erfarenheter inom matematiken infört skriftlig huvudräkning i sin undervisning och utifrån detta år 2000 skrivit boken *Skriftlig huvudräkning metodbok*.³⁴

Madeleine Löwing & Wiggo Kilborn utvecklar dessa tankar 2003 i boken *Huvudräkning – En inkörspport i matematiken*.³⁵

²⁷ K. E. L. *Ett pedagogiskt experiment*, 1907, Svensk Läraretidning, s. 338

²⁸ Jonsson, K. G. *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp* i Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1919

²⁹ Jonsson, K. G., *Bidrag till räkningens psykologi och metodik*, 1915

³⁰ Jonsson, K. G., *Massundersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*, Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1918

³¹ Wiktorin, Mauritz. *Bidrag till räknefärdighetens psykologi, en tvillingundersökning*, 1952

³² Unenge, Jan. *Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet*, 1980

³³ Malmer, Gudrun. *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter.*, 2002, s. 157

³⁴ Rockström, Birgitta. *Skriftlig huvudräkning metodbok*, 2000

³⁵ Löwing, Madeleine & Kilborn, Wiggo. *Huvudräkning – En inkörspport i matematiken*, 2003

Madeleine Löwing anger olika strategier för huvudräkning i de fyra räknesätten i sin bok *”Grundläggande aritmetik. Matematik för lärare”* 2008.³⁶ Bokens innehåll bygger på såväl internationell forskning som ett mångårigt forsknings- och utvecklingsarbete om undervisningsprocessen, elevers tänkande och matematikämnets didaktik. Hon beskriver här inte enbart skriftlig huvudräkning som modellen för beräkningar, utan här återkommer även tankar på beräkningar med algoritmer samt erfarenheter från tidigare kulturer med att använda fingrar och händer som hjälp vid t.ex. multiplikation och addition.

Mer om dessa forskningsarbeten tas upp under nästa rubrik nedan.

HUVUDRÄKNINGENS HISTORIA FRÅN 1880 TILL IDAG

Att diskutera om det skulle ingå någon form av huvudräkning i matematikundervisningen är inte något nytt fenomen. Redan i mitten av 1850-talet pågick denna diskussion. Från och med att matematik och då speciellt Euklidisk geometri infördes i skolan på 1700-talet så har frågor kring matematikens vara eller inte vara diskuterats inom och utanför skolans värld.

Mellan 1810 och 1850 skedde det stora förändringar inom Sverige. Folkmängden i landet steg från 2,4 till 3,5 miljoner.³⁷ Christina Florin skriver i lärarnas historia på nätet: ”Skolans tillkomst kan därför ses som en social försäkringsåtgärd för att komma tillrätta med problemen med de många fattiga på landsbygden, den grupp som av samtiden kallades den farliga underklassen”.³⁸ Mot 1800-talets slut var det alltfler barn som kom i kontakt med räkneundervisningen. Industrialismen var i full gång. Massor av människor flyttade in från landet till staden för att jobba i fabriker i stället för i jordbruket. Barnen till dessa fabriksarbetare hade inte så mycket att göra om de inte var anställda i fabriken själva. Ett sätt att förvara alla dessa barn var att de skulle gå i skolan istället. ”Disciplinen svarar mot det behov det borgerliga samhället hade av en ordnad och kontrollerad arbetarklass i ett urbaniserat och industrialiserat tidevarv.”³⁹

I paritet med att alltfler barn började gå i skolan innebar det att räkneundervisning för allt yngre barn infördes. Ett särskilt lämpligt sätt för just barnen att lära känna matematiken var då huvudräkning enligt denna tids sätt att se.

K.P. Nordlund och metersystemets införande

I och med införandet av det metriska systemet, kom huvudräkningen att betraktas som en lämplig introduktion till det skriftliga räknandet. Metersystemet infördes i Sverige 1875 vilket medförde att det i undervisningen efterhand infördes mått och enheter i detta nya system. Studieplaner infördes

³⁶ Löwing, Madeleine. *Grundläggande aritmetik. Matematik för lärare*, 2008

³⁷ Florin, Christina. *Från folkskola till grundskola 1842-1962*.

http://www.lararnashistoria.se/article/folkskolans_historia

³⁸ Ibid

³⁹ Foucault, Michael. *Övervakning och straff. Fängelsets födelse.*, 1987, s. 254-261

och läromedel behövde skrivas om då gamla läromedel innehöll regler och tabeller och räknetal med sortomvandling av sorter som ej längre skulle användas.

Ett exempel på detta är när lektorn i Matematik vid Gefle Elementarläroverk K. P. Nordlund 1867 gav ut *Räkneöfningssexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska metodens användande*⁴⁰ angav att som lämpliga material för lärjungen att använda vid räkning med hela tal var pappersark med rutor uppdelade i tum. Han använde även enligt det då rådande och relativt nyinförda decimalsystemet riksdaler och ören som valutor, då eleverna utförde egna beräkningar med pengar. Åskådningsmaterial i tum och huvudräkning de första inledande åren innan lärjungen skriver talen var en del av hans metoder. När han sedan 1879 gav ut *En samling räkneuppgifter jemte fullständiga lösningar för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium*⁴¹ och 1880 kompletteringen *Förslag till materiel vid undervisningen i räkning jemte en kort redogörelse för materielens användande*⁴² innehöll dessa böcker nu rutor med sidor på 3 cm i stället för tum som arbetsmaterial och kronor och ören istället för riksdaler i räkneexemplen. En viss kritik mot K. P. Nordlunds metoder framfördes på 1890-talet.⁴³

Första kursplanen för matematik

År 1878 kom en ny skolstadga och 6-årig folkskola som delades upp i stadierna småskola i 2 år och folkskola i 4 år med en skarp gräns mellan dessa. Den första läroplanen kom, den s.k. Normalplanen⁴⁴, där detta stod och i den ingick även den första egentliga kursplanen i matematik för folkskolan i vilken huvudräkning i de fyra räknesätten ingick. Normalplanen beskriver även den nya Fortsättningsskolan som instiftades med årskurserna 7 och 8. En ny stadga för läroverken skrevs den s.k. Läroverksstadgan för högre allmänt läroverk,⁴⁵ som angav att efter avklarade studier gav dessa en studentexamen.

Jacob Otterström med mångårigt förflutet inom skolans värld bl.a. som föreståndare för folkskolelärareseminariet, gör en kritisk granskning av den på 1880-talet rådande ordningen i läromedlen. Han tycker att böckerna de senaste 60 åren innehåller för mycket av regler som ej förklaras vilket gör det svårt för eleven att förstå hur och varför den ska utföra räkningen på det viset. Den självlärd autodidakten som t.ex. torghandlaren eller bonden kunde ofta räkna bättre i huvudet och lösa problem av matematisk karaktär än de elever som lärt

⁴⁰ Nordlund, K. P. *Räkneöfningssexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska metodens användande*, 1867

⁴¹ Nordlund, K. P. *En samling räkneuppgifter jemte fullständiga lösningar för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium*, 1879

⁴² Nordlund, K. P. *Förslag till materiel vid undervisningen i räkning jemte en kort redogörelse för materielens användande*, 1880

⁴³ Rollin, Birger. *Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen K. P. Nordlund: Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar. Stockholm 1890.*, Pedagogisk tidskrift, 1891, s. 403-412

⁴⁴ *Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor*. Stockholm, 1878

⁴⁵ *Kongl. Maj:ts nådiga stadga för rikets allmänna läroverk. Gifven den 1 november 1878*. Stockholm 1878.

sig räkna med dessa förkortade och därigenom svårförståeliga regler i läroböckerna.⁴⁶

För att snabba på utvecklingen av antal folkskolor i landet, lagstodgades 1882 att lärare med enbart småskoleutbildning (billigare utbildning) tillåts undervisa även på folkskolestadiet i mindre folkskolor.⁴⁷

Den svenska grundskolans fader

Fridtjuv Berg (1859-1916) har kallats – ”den svenska grundskolans fader” och var en av reformivrarna som gjort mycket för skolans utveckling i denna tid under 1800-talet i Sverige, präglad av omdaning med folkomflyttningar och folkökning i landet. Han var folkskollärare, läroboksförfattare, ledare inom Sveriges Allmänna Folkskollärareförening och ecklesiastikminister (1905-1906 och 1911-1914). Han arbetade mycket för att höja den obligatoriska skolans kvalitet och utveckling. Fridtjuv Berg beskrev 1883 ett omdanande reformprogram i skriften *Folkskolan såsom bottenskola*.⁴⁸ Han ville ha en gemensam skola för alla barn, där de sociala klassklyftorna i samhället skulle överbryggas. I denna skulle alla elever få en allmän medborgarfostran och varje elev skulle få växa sig fri och stark och hitta sin egenart. Hans program kom sedermera drivas av folkskolans hela lärarkår. Riktlinjerna i hans reformprogram har genomsyrat inriktningen för den obligatoriska skolans utveckling ända in i våra dagar.⁴⁹

År 1889 kom en reviderad Normalplan.⁵⁰ I denna infördes anvisningar för Mindre Folkskola. I planen rekommenderas att använda åskådningsmaterial för unga nybörjare i räkning samt att tiden för huvudräkningsövningar ej bör överstiga en halvtimme i taget. Särskilda huvudräkningsövningar ingick på alla stadier.

Femminutersövningar I huvudräkning kring sekelskiftet

Redan i slutet av 1800-talet framlades förslag på femminutersövningar i huvudräkning som en metod. I Svensk Läraretidning från 1894 stod att läsa följande:

"En af arbetets förtjänster är försöket att metodiskt ordna den nu ofta planlösa hufvudräkningen och att lära barnen själfva pröfva sin uppgifter. Att hufvudräkningen i skolor, där flera klasser samtidigt undervisas af samme lärare, blir mindre tillgodosedd, är ej att undra öfver. Förf. medgifva detta och hafva därför i boken uppställt s.k.

⁴⁶ Otterström, Jacob. *Lärobok i Aritmetik*, 1880

⁴⁷ Svensk uppslagsbok <http://svenskuppslagsbok.se/?s=mindre+folkskola&x=0&y=0> och http://www.lararnashistoria.se/article/folkskolans_historia

⁴⁸ Faksimil av *Folkskolan såsom bottenskola*, 1883

http://www.lararnashistoria.se/sites/default/files/wB_Lararhistoria_0079.pdf

⁴⁹ Lärarförbundets förord till faksimilet *Folkskolan såsom bottenskola*, 1883

http://www.lararnashistoria.se/sites/default/files/wB_Lararhistoria_0079_a.pdf

⁵⁰ *Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor*. Stockholm, 1889

femminutersövningar, hvilka skola förläggas till början af räknelektionen. För att dessa öfningar skola lyckas, böra de ock såsom framhålles afse något visst för hvarje gång."⁵¹

Dessa huvudräkningsövningar för att lyckas, bör då ha något visst mål eller krets kring något särskilt tema.

Vid sekelskiftet infördes Ersättningskola för elever som slutat mindre folkskola utan fullständigt avgångsbetyg vilket avspeglas i Normalplanen från 1900.⁵² I planen rekommenderas att använda åskådningsmaterial för unga nybörjare i räkning samt att tiden för huvudräkningsövningar ej bör överstiga en halvtimme i taget. Särskilda huvudräkningsövningar ingick på alla stadier.

Anna Kruses åskådningsmatematik med huvudräkning

I tanke att underlätta för eleverna att uppnå kunskapsmålen i räkning under folkskolans fyra första år gav Anna Kruse 1910 ut skriften *Åskådningsmatematik, ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikområdet*.⁵³ I den ville hon att eleverna skulle använda sig av en modifiering av K. P. Nordlunds kvadrater, nu färgade röda på ena sidan och blå på den andra, samt talbilder som metod för inläring. Huvudräkning med komplettering av detta material där även kulramar, knappar och (låtsas)pengar ingick som åskådningsmaterial, poängteras för att lära de små eleverna förstå matematiken. Först fick de lära sig räkna antal och ordningstal, dubbelt, hälften och mäta i rummet med kvadraterna i laborativ matematik i dialog mellan läraren och eleven/eleverna. Först därefter kunde de få lära sig att skriva ner antalet med siffror. Vid inlärande av addition och subtraktion används åskådningsmaterialet och huvudräkning. Nästa steg är att skriva ner uträkningar med addition och subtraktion. Anna Kruse uttryckte i sin skrift *Åskådningsmatematik* att det var viktigt med laborativa metoder. Hon frågade sig varför eleverna skulle nekas till detta, eftersom det är så man arbetar vetenskapligt på universiteten för att förstå matematik.

Laborativa metoder låg i tiden vid sekelskiftet eftersom en gymnasieutredning vid denna tid visade på ett stort glapp mellan vad eleverna lärt i folkskola och realskola och vad de skulle behövt kunna när de började på universitetet, påpekar Inger Wistedt 2009 i förordet till den tredje upplagan av Anna Kruses bok (en nyutgåva med moderniserat språk).⁵⁴

Anna Kruse levde i en tid där reformpedagogik var på modet. Hon ville arbeta med att använda sig av mycket dialog i klassrummet, ganska likt de mål som beskrivs i Dysthes dialogiska klassrum 2003 i *Dialog, samspel och lärande*.⁵⁵

I Folkundervisningskommitténs förslag till kursplan för ämnena räkning och

⁵¹ G. T. *Anteckningar i räknemetodik för folkskolor och småskolor af G. B. Bucht och J. A. Svensk*. Stockholm, P. A. Norstedt & söners förlag. Svensk Lärartidning, 1894, s. 575

⁵² *Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor.*, 1900

⁵³ Kruse, Anna. *Åskådningsmatematik, ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikområdet.*, 1910

⁵⁴ Kruse, Anna. *Åskådningsmatematik, ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikområdet.*, 2009 (1910), s. 19

⁵⁵ Dysthe, Olga. *Dialog, samspel och lärande*, 2003

geometri i A-skolan 1914 står det att undervisningen börjar med enkla åskådningsövningar i Anna Kruse anda, där eleverna räknar med föremål speciellt på de lägre stadierna. Därefter fortsätter de med särskilda huvudräkningsövningar i årskurs 3 till 6. Det rekommenderas att använda huvudräkningsövningar ofta men endast en kort stund varje gång. Räkneuppgifter bör helst lösas med huvudräkning i så stor utsträckning som möjligt. Uppgifterna som ska beräknas bör dessutom vara från det praktiska livet. De ska vara från hemmet och skolan, från arbets- och affärlivet.

De tillägger att räkneundervisningens resultat i allmänhet är mycket litet beroende av en mängd teoretiska anvisningar och påpekanden men desto mera av lärarens personliga rutin och förmåga att vinkla ämnet mot det praktiska livet.⁵⁶

Kommittén framhåller färdighet i huvudräkning som »ett huvudsyfte vid räkneundervisningen» och betonar kraftigt vikten av åskådlighet vid undervisningen samt ger anvisningar beträffande urvalet av sakuppgifter.

Detta uttrycks bl.a. som att i de klasser som räknar decimalbråk före allmänna bråk, kan man kanske nå kunskaper i bråkräkning bäst genom att låta 5:e skolårets huvudräkningsövningar även omfatta lätta uppgifter med allmänna bråk, om dessa avpassas så att de blir en lämplig förberedning till när något nytt skall läras in beträffande decimalbråk.

Kommittén anser att det är viktigt att eleverna får bråkbegreppet fullt klart för sig innan de börjar med den skriftliga räkningen med allmänna bråk. Detta för att räkning med bråk då skulle kunna bli något annat än bara mekaniska tillvägagångssätt med ledning av vissa inlärdas regler.⁵⁷

I ett diskussionsinlägg under ovanstående rubrik Skolreformen i n : r 49 av Svensk Lärartidning påpekar K. L - n vikten av att genom tillräcklig övning ge barnen erforderlig mekanisk räknefärdighet, särskilt vid huvudräkningen. Detta är en sak, som mycket väl behöver påpekas. Lika viktigt är att framhålla, att denna mekaniska färdighet inte får utesluta att eleverna begriper det de räknar. Det säger inte heller K. L- n, utan av hans ord kan man snarare dra den slutsatsen, att han är angelägen om att barnen ska förstå tankegången när de räknar.

Den förste svenske forskaren i matematik

Den förste forskaren i matematikdidaktik K. G. Jonsson inledde sin forskarkarriär för 100 år sedan. I hans första undersökning *Bidrag till räkningens psykologi och metodik* som presenteras i Svenskt Arkiv för Pedagogik 1915⁵⁸, låter han flera hundra försökspersoner från åldrarna 7-8 år och uppåt till vuxen ålder lösa samma uppgifter för att via intervjuer ta reda på hur eleverna tänker. Dessa uppgifter som löstes i huvudet var av typen $27 + 36$ och $84 + 79$ d.v.s. additionstal med tiotalövergångar. Motiveringen till att han

⁵⁶ Skolreformen. 5. Matematikundervisningen. Svensk Lärartidning, 1914, s.890

⁵⁷ Räkneundervisningen. Det nya kursplansförslaget. Svensk Lärartidning, nr 49, 1914, s. 1058-1059

⁵⁸ Jonsson, K. G. Bidrag till räkningens psykologi och metodik, 1915

valde dessa uppgifter var att dessa uppgifter ger en intressantare variation i elevers sätt att räkna huvudräkning. Samtidigt uteslöt han uppgifter av typen $387 + 496$ eftersom de mer sällan förekommer i samband med huvudräkning. Jonsson kommer fram till att det finns olika tillvägagångssätt som används vid huvudräkning hos olika individer även om uppgiften är densamma. Han undersöker vilket tillvägagångssätt varje försöksperson använder vid huvudräkning och kommer fram till att en och samma person använder sig i huvudsak av samma eller likartade sätt för att lösa de olika talen i huvudet, men att samma uppgift löses med olika personliga tillvägagångssätt. Dessa tillvägagångssätt för att lösa huvudräkningsproblem delar han upp enligt en kvalitativ klassifikation: (Beskrivningen nedan är hämtad från Bengt Johansson artikel *Sveriges förste forskare i matematikdidaktik*, Nämnaren, nr 3, 1986)⁵⁹

Vid lösning av exemplet $38 + 57$:

U	Utfyllnadstypen	$38 + 2 = 40$ $57 - 2 = 55$ $40 + 55 = 95$	Utfyllnad till närmaste tiotal, därefter subtraheras 2:an som utfyllde från 57 De två nya summorna adderas
VI	Vanliga typen I	$38 + 50 = 88$ $88 + 7 = 95$	Adderar tiotalssdel till summan adderas entalsdel
VII	Vanliga typen II	$30 + 50 = 80$ $8 + 7 = 15$ $80 + 15 = 95$	Tiotalssdelar summeras för sig och entalsdelar summeras för sig De två nya summorna adderas

Samtidigt kan sägas att några "rena" huvudräkningstyper fann han inte men i huvudsak använde samma försöksperson genomgående ganska likartade huvudräkningsmetoder. Resultatet bland försökspersonerna visade att Utfyllnadstypen, U var ganska ovanlig medan Vanliga typen II, VII förekom något oftare än Vanliga typen I, VI. Bland alla dessa försökspersoner valde Jonsson ut 12 personer uppdelade på tre grupper med två personer av U-typ, en av VI-typ och en av VII-typ. Grupperna utgjorde av 4 barn i 8-årsåldern (årskurs 2), 4 barn i 13 - 14-årsåldern (årskurs 4) och 4 vuxna. Dessa grupper fick lösa ett urval av 6 uppgifter med deloperationer som använts av några av alla de hundratals försökspersonerna när dessa beräknat de tidigare uppgifterna fast nu på tid. Bäst var samtliga 12 på att lösa uppgifterna på den typ av sätt som de vanligen valt i första undersökningen. Svårast var att försöka lösa uppgifter med annan strategi än vad personen var van att använda. Tilläggas kan att U-typen var vanligare bland 8-åringarna än i högre åldrar i den stora undersökningsgruppen med hundratals personer. Detta kan bero på att vid den tiden när Jonsson undersökning pågick var det vanligt att eleverna i den grundläggande additionsundervisningen i årskurs 2 och i räknelärorna nästan uteslutande fick arbeta med utfyllnad vid beräkning av exempel som $8 + 7$. I högre årskurser infördes skriftlig räkning och många elever övergav då Utfyllnadsmetoden till förmån för att i huvudsak använda metod VI eller VII.⁶⁰

⁵⁹ Johansson, Bengt. *Sveriges förste forskare i matematikdidaktik*, Nämnaren, nr 3, 1986

⁶⁰ Ibid

K G Jonsson utvidgar sin undersökning och gör en massundersökning på närmare 1 000 barn i Kristinehamn och Stockholm *Massundersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp* som presenteras i Svenskt Arkiv för Pedagogik.⁶¹

I sin avhandling *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp* som presenteras i Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1919 skriver K. G. Jonsson att ”Muntlig räkning bör bedrivas i stor utsträckning i de lägre »grades» och får ej heller försummas i de högre. Huvudräkningen har ett värde, som aldrig kan ersättas av penna och papper.”⁶²

I Lärarnas historia på nätet står att läsa om denna tid:

”Det svenska skolsystemet var således nästan ”färdigbyggt” år 1919, när folkskolan fick en ny utbildningsplan och skolplikt för alla infördes. Det var ett enhetligt, nationellt och modernt utbildningssystem för sin tid. Ansvaret för barnens utbildning hade inte bara förflyttats från kyrkan till skolan utan också från hemmet till skolan. Moralskolan för underklassen var definitivt under upplösning. En mer enhetlig skola för de breda massorna tog form ungefär samtidigt med att Sverige fick en parlamentarisk demokrati och det var samlingsregeringen mellan liberaler och socialdemokrater som förde den moderna skolreformen i hamn. Den innehöll utförliga anvisningar för varje ämne och minskade antalet kristendomstimmar betydligt. Katekesläsningen slopades i stort sett. I stället fick historia, geografi, modersmålet och hembygdskunskapen större utrymme och den metodiska inriktningen mot det praktiska livets kunskaper blev tydligare. Folkundervisningen fick ett eget centralt ämbetsverk 1914 som 1920 slogs ihop med läroverksöverstyrelsen och blev Skolöverstyrelsen. Staten hade tagit ett hårdare grepp om skolan och syftet blev mer och mer medborgarinriktat.”⁶³

Utbildningsplanen från 1919 som nämns ovan kallades för *Undervisningsplan för folkskolor*⁶⁴ och innebar bl.a. att den skarpa gränsen mellan stadierna småskola och folkskola slopades och man samlades under en mer gemensam folkskola. Angående räkneundervisningen uttalas att den har till uppgift att ”bibringa barnen en efter deras ålder och utveckling avpassad insikt och färdighet i räkning”. I undervisningsplan anges även att särskilda huvudräkningsövningar ska ingå i matematiken för tredje till sjunde årskurserna.

Fritz Wigforss pionjär inom svensk skolmatematik

Näste store forskare i matematikdidaktik är Fritz Wigforss. Han anses som en pionjär inom den svenska skolmatematiken på 1900-talet.⁶⁵ I *Den grund-*

⁶¹ Jonsson, K. G. *Massundersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*, Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1918

⁶² Jonsson, K. G. *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*, Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1919, s. 13

⁶³ Florin, Christina. *Folkskolans historia II*.

http://www.lararnashistoria.se/article/folkskolans_historia_1900

⁶⁴ *Undervisningsplan för folkskolor, Kungl. Maj:ts kungörelse angående undervisningsplan för rikets folkskolor., 1919*

⁶⁵ Unenge, Jan. *Miniporättet. En svensk pionjär*, Nämnaren, nr 4, 1983

läggande matematikundervisningen. Översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt från 1925⁶⁶ skriver han om den nya undervisningsplanen i matematik som kom till när folkskolestadgan reviderats 1921. Enligt den nya undervisningsplanen ingår huvudräkning och skriftlig räkning som ett mål i kursen.

Wigforss skriver att i huvudräkning räknar man utan att skriva upp talet enligt ett ofta mindre uppdelat sätt. Uträkningar som t.ex. $865 + 734$ beräknas enligt förslagsvis:

$$865 + 700 + 30 + 4$$

dvs. till det första talet adderas i tur och ordning det andra talets hundratal, därefter tiotal och sist ental.

I den skriftliga huvudräkningen används då istället ofta:

$$5 + 4 + 60 + 30 + 800 + 700$$

dvs. beräkningen sker först med addering av båda talens ental, därefter båda talens tiotal och sist dessas hundratal. Detta att uträkningarna sker på olika sätt beroende på om de görs i huvudet eller om de sker skriftligt, gör att eleverna kan tro att det är två olika sorters räkningar. Att metoderna att räkna ut samma tal skiljer sig mellan den skriftliga räkningen och huvudräkningen, beror på att vid huvudräkning krävs det att arbetsminnet dvs. hjärnan inte bör belastas för mycket och då lämpar sig ofta den övre metoden bättre än den nedre vid huvudräkning.

Här tycker Wigforss att det vore på sin plats att bättre beskriva att skillnaderna mellan huvudräkning och skriftlig beräkning är räkning utan och med taluppskrivning. Från början de första åren i skolan skiljer sig inte heller metoderna för den skriftliga räkningen och huvudräkningen åt. Dessutom så förhöll det sig så att även vid den tiden på 1920-talet precis som 1914 då K G Jonsson gjorde sin undersökning om huvudräkning (K G Jonsson, 1914) att under de första två skolåren utförs räkningen nästan uteslutande som huvudräkning speciellt när hänsyn tas till sättet att göra uträkningarna. Först i senare årskurser tas metoden med skriftlig uträkning fram mer medvetet och en skillnad i hur huvudräkning och skriftlig uträkning utförs kommer till elevernas kännedom. Detta medförde även förändringar i hur eleverna utförde sin huvudräkning enligt Jonsson tidigare undersökning.

Wigforss tar även precis som Jonsson upp att särskilda huvudräkningsövningar ska förekomma även i högre klasser i folkskolan för att den skriftliga räkningen ej ska få ta överhand på detta stadium. Han rekommenderar att en speciell metod för huvudräkning lärs ut den s.k. **Normalmetoden** För de fyra räknesätten ser den ut som följande:

- 1) $743 + 692 = 743 + 600 + 90 + 2,$
- 2) $852 - 567 = 852 - 500 - 60 - 7,$

⁶⁶ Wigforss. Fritz. *Den grundläggande matematikundervisningen. Översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt*, 1925, s.16-17

$$3) 7 * 68 = 7 * 60 + 7 * 8,$$

$$4) 816:12 = 720:12 + 96 : 12.$$

Dessa metoder liknar den s.k. VI-metoden som tas upp i Jonssons tidigare forskning.

Wigforss ger även exempel på **genvägar** för ovanstående uppgifter:

$$1) 743 + 692 = 743 + 700 - 8,$$

$$2) 852 - 567 = 867 - 567 - 15,$$

$$3) 7 * 68 = 7 * 70 - 7 * 2,$$

$$4) 816 : 12 = 840:12 - 24 : 12.$$

Dessa metoder liknar till viss del den s.k. Utfyllnadsmetoden som tas upp i Jonssons tidigare forskning men med större tal än Jonsson använde bland sina försökspersoner.

Wigforss påpekar i sammanhanget att huvudräkning ju kräver att man håller alla inblandade tal i minnet, men att detta inte får hindra eleverna när de övar på huvudräkning att någon gång emellanåt skriva upp talen för att utveckla sin förmåga att räkna huvudräkning. För att klara huvudräkning gäller det ju att lära in ett visst sätt för att utföra uträkningen vilket kan underlättas med skriftlig räkning. Annars skrivs endast talen upp och eleverna får ange svar direkt de räknat ut dem i huvudet.

Ett par olika sätt att skriva upp tankegångarna kan vara:⁶⁷

$$743 + 692 = 743 + 600 - 90 + 2,$$

$$743 + 600 = 1343,$$

$$1343 + 90 = 1343 + 57 + 33 = 1433,$$

$$1433 + 2 = 1435.$$

Det är enligt Wigforss viktigt att huvudräkningen mycket sker i huvudet och inte enbart som skriftlig räkning. Om eleverna endast får öva på huvudräkning via övnings-(läro)böcker i huvudräkning, är risken stor, att de kommer att sysselsättas med sådan förberedelse för mycket och för litet med den egentliga huvudräkningen.

Wigforss tycker också att det är lämpligt att tävla i huvudräkning. Detta för att öka färdigheten i snabbräkning.⁶⁸

De särskilda huvudräkningsövningar som ingår i matematiken enligt undervisningsplanen tycker Wigforss bör endast uppta en helt kort stund av lektionen, högst 10 till 15 minuter, men i allmänhet betydligt kortare. Det kan vara lämpligt att börja lektionen med några minuters sådan övning, vilket verkar uppräckande på eleverna och kan öka deras intresse av beräkningar. Samtidigt ska huvudräkning inte vara begränsat till dessa minuter. Han tycker att varje tillämpningsexempel, som barnen möter och som är lämplig för räknas

⁶⁷ Ibid, s. 17

⁶⁸ Ibid, s. 18

med huvudräkning, bör räknas ut med den metoden. Vid skriftlig räkning bör huvudräkning användas vid detaljräkningar, där det passar med huvudräkning allt för att övning i huvudräkning inte ska bli eftersatt.

Huvudräkningen sågs som "huvudsyfte" för räkneundervisningen i folkskolans undervisningsplan. Samtidigt tog inte huvudräkningsövningarna merparten av undervisningstiden, då man passade på att använda huvudräkning emellanåt för att lösa delar av den skriftliga räkningen.

Wigforss antyder att man som lärare ofta kan börja en lektion med lite huvudräkningsövning. Han föreslår att i samband med det kan man använda repetitionsövningar. Han tycker att läraren bör göra upp en plan för dessa övningar och hålla reda på, så att alla kursmoment läraren önskar repetera kommer med. Som lämpligt innehåll till dessa repetitioner föreslår han övningar angående talens plats i talserien och talens beteckning, tilläggning och fråndragning av ental, fråndragningar från talet 100, multiplikations- och divisionstabellen, multiplikation av ensiffriga tal med tvåsiffriga tal (särskilt talen 11 – 19), sortförvandlingar, förvandlingar mellan helt tal och bråk och mellan bråksorterna, enkla procenttal.⁶⁹

Förutom problem som ska lösas måste även eleven få övningsexempel som eleven enbart använder sig av för att öva upp den mera mekaniska räknefärdigheten. Alla dessa övningar vet vi ju av erfarenhet upplevs av eleverna som tröttnande, intressedödande, enformigt, när räknetimmarna i stor utsträckning användas till uträkning av det ena sifferexemplet efter det andra, påpekar Wigforss. Dessa övningar är nödvändiga, men Wigforss menar att det finns åtskilligt att göra för att få in mer intresse i dessa rena siffreräkningar. Han föreslår att en väg kan vara att föra in tävlingsmomentet vid uträkningen. Den elev vinner som först har räknat dessa uppgifter och dessutom räknat dem rätt.

Ett annat alternativ är att använda sig av magiska kvadrater som additionskvadrater och multiplikationskvadrater. Ytterligare ett annat är att upptäcka märkliga tals egenskaper som talet 142 857. Barnen får pröva med att multiplicera detta tal med 2, 3, 4 etc. och ser då att sifferföljden hela tiden blir oförändrad. Om man börjar på siffran 1 och efter siffran längst till höger fortsätter med siffran längst till vänster. $5 \cdot 142\,857$ t.ex. blir 714 285, flytta 7:an sist och talet blir 142 857 igen. Även vid multiplikation med större tal framkommer samma egendomlighet som, man skall endast ta bort de överskjutande första siffrorna och addera det tal de bildar till resten, t.ex. $134 \cdot 142\,857$ blir 19 142 838. Om 19 sedan adderas till 142 838 får man återigen 142 857 etc. Multiplikation med 7 och multiplar av 7 bildar ett speciellt undantag.

Han föreslår även att aritmetiska spel och lekar kan fungera bra som inövning och föreslår ett par sådana övningar enskilt eller i grupp. Allt för att lätta upp övandet av matematiken och variera lektionerna.⁷⁰

Det Wigforss framhöll 1925 i sin *Den grundläggande matematikunder-*

⁶⁹ Ibid, s. 90

⁷⁰ Ibid, s. 91-95

visningen användes inom huvudräkningen åtminstone fram till 1957 då i folkskolans värld. Lektor Edvin Ferner skriver i tidskriften *Tidskrift för skolmatematik* år 1957 att "Ännu ett tredjedels sekel efter utgivandet av den första upplagan är denna bok den enda, som mer omfattande behandlar räkneundervisningens metodik på olika stadier."⁷¹ Wigforss idéer i *Den grundläggande matematikundervisningen* används ända in på 1980-talet skriver Jan Unenge i *Nämnan* nr 4 1983.⁷² Boken som Wigforss skrev 1925 kom även ut i nyutgåva i december 2005 i samband med konferensen i matematik i "Matematikdidaktisk forskning och matematikundervisning - konferens till Fritz Wigforss minne" vid högskolan i Kalmar.

Ett motsvarande metodiskt verk för räkneundervisningen inom realskolans klasser likt Wigforss *Den grundläggande matematikundervisningen* (som vände sig enbart till folkskolan) kom adjunkt Halfrid Stenmark 1956 ut med. Stenmarks handledning med titeln *Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer. En handledning*.⁷³, behandlar räkneundervisningen inom realskolans klasser. Denna efterlängttade handledning ansågs då som en pedagogisk insats av unikt och synnerligen stort värde, och vände sig till lärare, som arbetade inom realskolan samt inom enhetsskolans olika linjer i området klass 5 till klass 9. Lektor Edvin Ferner skrev i *Tidskrift för Skolmatematik* 1957⁷⁴ att denna handledning är "föredömligt upplagd, då den ofta utförligt i detalj visar hur ett kursmoment skall genomgå i klassen. Den blir på så sätt en handledning av direkt praktisk nytta, som även en erfaren lärare har både nytta och nöje av."

Huvudräkning i alla stadier på 1950-talet

En ny undervisningsplan kom till under de närmsta tio åren efter att andra världskriget slut under den s.k. efterkrigstiden. I denna nya *Undervisningsplan för rikets folkskolor*, 1955⁷⁵ byttes ämnet räkning ut till att heta matematik och huvudräkning ingick i alla stadier. I undervisningsplanen från 1955 stod att läsa att: "Huvudräkning bör inta en framskjuten plats på alla åldersstadier. Skriftlig räkning inom talområdet 1- 100 bör flitigt övas även i de högre klasserna. Övningsuppgifterna bör i allmänhet inte innehålla mångsiffriga tal (fem eller flera), men lärjungarna bör erhålla någon övning att avläsa och skriva även sådana."⁷⁶ Denna undervisningsplan var för den 7 till 9-åriga folkskolan beroende på om eleven valde att gå vidare till realskola efter folkskolan eller inte.

På 1950-talet förekom en hel del experimenterande på skolans front med införande av en 9-årig enhetsskola den s.k. försöksskolan, där folkskolan och realskolan sammanfördes till en mer gemensam skola på de orter försöken gjordes. Studieplaner i olika ämnen utkom i olika omgångar där timplaner och

⁷¹ Ferner, Edvin. *Tidskrift för skolmatematik*, årgång 2, rapport nr 3, 1957

⁷² Unenge, Jan. *Miniporträttet. En svensk pionjär*, *Nämnan*, nr 4, 1983

⁷³ Stenmark, Halfrid. *Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer. En handledning.*, 1956

⁷⁴ Ferner, Edvin. *Tidskrift för skolmatematik*, årgång 2, rapport nr 3, 1957

⁷⁵ *Undervisningsplan för rikets folkskolor*, 1955

⁷⁶ *Ibid*

huvudmoment motsvarade läroplaner. Första försöksomgången utkom *Timplaner och huvudmoment för studieplaner för skolor av A- och B-form* 1951⁷⁷ och var ett principförslag om försöksverksamhet från 1946 års skolkommission och användes i skolans försöksverksamhet mellan åren 1951 till 1954. Andra omgången utkom *Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola*, 1955.⁷⁸ Dessa planer användes mellan 1955 till 1959 i de nya enhetsskolorna. Tredje och sista omgången byggde på *Tillägg till Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola* från 1959.⁷⁹ Denna sista försöksomgång pågick mellan åren 1959 till 1962.

I alla tre försöken ingick huvudräkning inom matematiken under hela skoltiden. I första omgången betonades särskilda huvudräkningsövningar från årskurs 3 och uppåt, medan i andra och tredje omgången skulle all inläring under de två första åren vara huvudräkning innan den skriftliga räkningen introducerades och i övriga årskurser ingick särskilda huvudräkningsövningar, gärna som introduktion till de olika avsnitten inom matematiken.

En av anledningarna med försöken var att Kungliga Skolöverstyrelsen och 1946 års skolkommission ville pröva om den sociala bakgrunden skulle bli mindre avgörande för valet av teoretiska studievägar i ett enhetsskolesystem än i ett skolsystem med tidigt urval, som folkskola med eventuellt val av skolgång på påföljande teoretisk realskola utgjorde. Man ville försöka förverkliga Fridtjuv Bergs drömmar från 1883 om en bottenskola, en skola för alla oavsett social bakgrund⁸⁰. Tiden efter andra världskriget var en tid då Sverige hade ett stort ekonomiskt uppsving, vilket skapade denna möjlighet till social utjämning även i skolans värld. Det fanns ett stort behov av ny och bättre utbildad arbetskraft. Samtidigt närdes förhoppningar om att utbildning kunde vara ett skydd mot att antidemokratiska strömningar spreds i vårt land, speciellt efter ett nyligen genomlidet Andra världskrig. Dessa orsaker anses vara grunden till att utbildningsväsendet expanderade kraftigt under denna tid i de flesta västländer.⁸¹

Enhetsskolan delades så småningom upp i de tre stadierna lågstadium, mellanstadium och högstadium.

Obligatorisk 9-årig grundskola 1962

Försöken med 9-årig enhetsskola ersattes med en obligatorisk 9-årig grundskola 1962 med en ny *Läroplan för grundskolan - Lgr 62*,⁸² där de förutvarande skolformerna folkskola och realskola ersattes med en över hela landet likvärdig grundskola med 9 årsklasser under en övergångsperiod under

⁷⁷ *Timplaner och huvudmoment för studieplaner för skolor av A- och B-form* 1951

⁷⁸ *Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola*, 1955

⁷⁹ *Tillägg till Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola*, 1959

⁸⁰ Berg, Fridtjuv. *Folkskolan såsom bottenskola*, 1883

⁸¹ Selander, Staffan. *Kobran, nallen och majjen. Tradition och förnyelse i svensk skola och skolforskning*, 2003, s. 25

⁸² *Läroplan för grundskolan - Lgr 62*

hela 1960-talet. Årskurserna delades precis som i enhetsskolan upp i tre stadier, lågstadiet (årskurs 1 till 3), mellanstadiet (årskurs 4 till 6) och högstadiet (årskurs 7 till 9).

I Lgr62 står om huvudräkning:

”Huvudräkning skall övas i alla årskurser och på alla stadier. Sådan övning bör förekomma ofta men blott korta stunder varje gång, gärna i början av lektionen. Särskilt när det gäller att förbereda och för eleverna klargöra ett nytt moment, är huvudräkning med enkla tal ett viktigt hjälpmedel.”

I varje årskurs de första 6 åren anges mycket exakt vad som ska ingå som huvudräkningsövningar bl.a. de fyra räknesätten i större och större talområden 1-1000, i mellanstadiet, bråk, decimaltal och i 6:an procenttal, medan de sista 3 årens huvudräkningsövningar inte specificeras i läroplanen.⁸³ Årskurs 9 delades upp i nio linjer, en gymnasieförberedande och åtta allmänna och yrkesförberedande linjer. Beroende på elevens linjeval lästes matematik allmän kurs (allmän eller yrkesförberedande linjer) med mycket repetition av matematik från tidigare årskurser eller särskild kurs som innehöll mer utveckling av kursen för gymnasieförberedande linje.

Lgr 69 med mängdlära och minskad huvudräkning

Det visade sig att detta system med linjeval i de sista årskurserna inte fungerade så bra. De allra flesta eleverna valde de teoretiska linjerna. Detta medförde att linjesystemet slopades och en ny läroplan infördes Lgr 69.⁸⁴ Hela högstadiet (årskurs 7 – 9) blev sammanhållet men eleverna fick välja ett av tillvalsämnena främmande språk (franska eller tyska), konst, ekonomi och teknik. Matematik delas upp i allmän eller särskild kurs under hela högstadiet. Inom ämnet matematik införs i alla klasser den ”nya matematiken” med mängdlära, sannolikhetslära och statistik. Huvudräkning nämns enbart en gång i samband med närmevärden och överslagsräkning, vilket ska användas på alla stadier.

Skolöverstyrelsen kom 1973 ut med en handledning i matematik, *Basfärdigheter i matematik*⁸⁵. I denna handledning som beskrivs som framtagen för att underlätta undervisningen för lågpresterande, finns nu huvudräkning återigen med, nu som en basfärdighet som är tänkt att användas i undervisningen och dess användande återfinns på ett antal ställen i handledningen. Enligt handledningen fanns det i början på 70-talet en rätt utbredd uppfattning att räknefärdighet inte längre skall eftersträvas. SÖ (Skolöverstyrelsen) påpekar här att i Lgr 69⁸⁶ framgår det att eleverna ska *uppnå god färdighet vid numerisk räkning*, vilken enligt SÖ riktlinjer i *Basfärdigheter i matematik* kräver att eleverna använder sig av elementära aritmetiska räknemetoder som huvudräkning och algoritmräkning.⁸⁷ SÖ tillägger sedan under innehåll bland färdigheter som eleven ska ha uppnått

⁸³ Ibid

⁸⁴ *Läroplan för grundskolan - Lgr 69*

⁸⁵ *Basfärdigheter i matematik*, 1973

⁸⁶ *Läroplan för grundskolan - Lgr 69*

⁸⁷ *Basfärdigheter i matematik*, 1973, s. 5

senast i årskurs 9 är att kunna ”utnyttja additions- och subtraktionstabellerna samt räknelagarna vid huvudräkning inom talområdet 0 – 100.”⁸⁸ Som en rekommendation anger SÖ att om läraren vill utfärda diagnoser för sina elever kan läraren välja mellan att göra dessa skriftliga eller via huvudräkning.⁸⁹

När man nu nått målen med att ha en likvärdig grundskola för alla med stora möjligheter till likvärdig utbildning, ville man se till att fler verkligen fick en chans i denna skola. För att lösa problemen för de svagpresterande eleverna och för att förbättra skolmiljön, tillkom en statlig skolutredning åren 1970-1974 kallad Skolans inre arbete, SIA. Grundskolan fick ett nytt statsbidragssystem, bl.a. för att utveckla arbetet med svagpresterande elever, med bland annat basresurser och förstärkningsresurser som specialpedagoger, kuratorer och skolvårdar som infördes som stöd och hjälp under raster.

I samhället rullade hjulen på och alltfler kvinnor kom ut på arbetsmarknaden. Samtidigt var inte fritidsverksamheten utbyggd till att ta emot barn som slutade tidigt på dagen från skolan. Många förut hemmavarande mammor var på sina jobb och arbetade på 70-talet.⁹⁰

Huvudräkning återinförs på 1980-talet

Skolutredningen SIA resulterade i att en samlad skoldag och fria aktiviteter infördes i den efterföljande läroplanen Lgr 80.⁹¹ Detta med samlad skoldag var då en lösning som gjorde att barnen var i skolan hela dagen, samma tid varje dag. Detta var till en hjälp för de arbetande föräldrarna när inte fritids fanns. För att fylla ut tiden för eleverna under de långa dagarna, kom då de fria valen till, s.k. fritt valt arbete som var ”ämnen” av hobbykaraktär som t.ex. simning, bordtennis eller teater.

Vid införandet av läroplanen för grundskolan 1980, Lgr 80⁹², kom huvudräkning in i kursplanerna igen som en egen punkt på alla stadier. Färdigheter i huvudräkning räknades som ett av huvudmålen enligt Lgr 80. I varje huvudmoment i kursplanen anges huvudräkning som en viktig del. Problemlösning infördes som ett huvudmoment inom matematik⁹³ och som Jan Unenge skriver i nr 2 av Nämnaren 1986 som kommentar till problemlösning i Lgr 80, i vardagslivet och skolan, ”den problemlösande matematikarbetaren behöver huvudräkningskunnande, ibland kunna ställa upp en algoritm, behärska multiplikationstabellen och mycket annat”.⁹⁴

I HÖJMA-projektet som pågick 1979/80 utforskade Jan Unenge mellanstadieelevers olika sätt att lösa uppgifter genom intervjuer liknande det Jonsson i

⁸⁸ Ibid, s. 27

⁸⁹ Ibid, s. 39-40

⁹⁰ <http://www.jamstallskola.se/vad-ar-jamstallldhet/jamstallldhet-sverige.shtml>

⁹¹ *Läroplan för grundskolan - Lgr 80*

⁹² Ibid

⁹³ Skoogh, Lennart. *Problemlösning – viktigaste huvudmomentet i Lgr 80*, Nämnaren, nr 2, 1986

⁹⁴ Unenge, Jan. *Kunskaper och färdigheter. Form och innehåll*, Nämnaren, nr 2, 1986

gjorde 1919⁹⁵. I rapporten *Huvudräkning – huvudvärk för elever och lärare. Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet* från 1982⁹⁶ samt i några artiklar om HÖJMA-projektet i *Nämnamnaren* 1980 nr 1 – 4⁹⁷ presenterar Unenge några resultat av elevers och lärares användning av strategier i huvudräkning. I artiklarna visas hur mellanstadieelever tänker när de löser olika typer av matematikuppgifter. I artikeln *Tankar om elevtankar* av Bengt Johansson och Leif Lybeck i *Nämnamnaren* 1981 nr 2 samt i en rapporten *Ämnesmetodisk forskningsanknytning i matematik* 1981 av Unenge, Lybeck och Johansson, beskrivs hur de deltagande lärarkandidaterna i HÖJMA-projektet först intervjuade mellanstadieeleverna kring olika matematikuppgifter. Därefter analyserade de blivande lärarna de utskrivna intervjuerna med avseende på kvalitativa skillnader i sätt att tänka. Beskrivningarna av dessa skillnader var sedan en viktig utgångspunkt i kandidaternas ämnesmetodiska utbildning.⁹⁸ Resultatet av undersökningen visade att de elever som kommit längst i sin taluppfattning, var de elever som ofta föreslog att de även skulle kunna göra beräkningen med en annan metod. Några andra av eleverna behöll i princip samma metod om den fungerade bra, men kunde tänka sig byta ut metoden om det inte fungerade och verkade förstå om metoden fungerade och gav rimligt svar eller ej. Dessa två grupper utgjorde en tredje del av eleverna. En fjärdedel av eleverna var helt fångade av att tänka i algoritmer där addition och subtraktion enbart är en uppställning av tal, där tanken på om svaren är rimliga eller inte är något de bortser ifrån. Först när läraren lade in mer vardagsmatematik, gärna med sorter som kronor, ändrade dessa elevers tänk till att se om svaret var rimligt eller ej. Det största antalet elever ”mittgruppen” ville helst hålla fast vid en och samma metod om den inte verkade helt irrationell, ofta någon modifierad algoritm. Dessa elever tog lång tid på sig att räkna ut talen. Påfallande många hade svårt att se om svaret var rimligt, även om de eftersträvade detta, vilket visar på bristande taluppfattning.⁹⁹ Unenge sammanfattar resultaten i projektet med ”Det tycks uppenbart att huvudräkning måste komma in som ett moment där läraren skall undervisa, inte som hittills tycks vara fallet, träna, även om träningen självfallet är utomordentligt viktig.”¹⁰⁰

I paritet med att huvudräkning skulle vara ett huvudmoment i matematiken i Lgr 80, gav Johansson, Kilborn och Unenge 1983 ut träningshäften i huvudräkning i de fyra räknesätten.¹⁰¹

⁹⁵ Jonsson, K. G. *Massundersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*, Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1918 och Jonsson, K. G. *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*, Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1919

⁹⁶ Unenge, Jan. *Huvudräkning – huvudvärk för elever och lärare. Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet*, Rapport nr 2, 1982

⁹⁷ Unenge, Jan. *Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet*, *Nämnamnaren*, nr 1 Huvudräkning, nr 2 Procenträkning, nr 3 Uppgifter med verklighetsanknytning, nr 4 Sammanfattning., 1980

⁹⁸ Johansson, Bengt. Lybeck, Leif. *Tankar om elevtankar*, *Nämnamnaren*, nr 2, 1981 och Unenge, Jan. Lybeck, Leif. Johansson, Bengt. *Ämnesmetodisk forskningsanknytning i matematik*, 1981

⁹⁹ Unenge, Jan. *Huvudräkning – huvudvärk för elever och lärare. Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet*, Rapport nr 2, 1982

¹⁰⁰ *Ibid*, s. 6

¹⁰¹ Johansson, Bengt. Kilborn, Wiggo. Unenge, Jan. *Grundläggande räkning: träningshäfte med diagnos. Huvudräkning. Addition*, 1983; Johansson, Bengt. Kilborn, Wiggo. Unenge, Jan. *Grundläggande räkning: träningshäfte med diagnos. Huvudräkning. Division*, 1983; Johansson, Bengt. Kilborn, Wiggo. Unenge, Jan. *Grundläggande räkning: träningshäfte med diagnos. Huvudräkning. Multiplikation*, 1983 samt Johansson, Bengt. Kilborn, Wiggo. Unenge,

1990-talet och målrelaterade betyg

Nästa läroplan som införs är Lpo 94, *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet - Lpo 94*¹⁰². Enligt denna läroplan är grundskolan 1994 inte längre uppdelad i olika stadier (låg-, mellan- och högstadiet). Uppdelningen på allmän och särskild kurs i bl.a. matematik har försvunnit. Språkval införs där eleven kan välja mellan tyska, franska eller spanska. Betygssystemet förändras från relativa betyg till målrelaterade betyg. Läroplanen är skriven för att även omfatta den frivilliga skolformen förskoleklass (den tidigare förskolan för 6-åringar). Det är även tänkt att fritidshemmen skall använda läroplanen så långt det går. Tanken är att samordna förskoleklass, grundskola och fritidshem. Fritidshemsverksamheten ökade kraftigt i omfattning under 1990-talet efter skolans kommunalisering och kommunerna byggde alltmer ut sådan verksamhet. Detta gjorde att den samlade skoldagen med fria val försvann i och med denna läroplan Lpo 94¹⁰³ och de mindre eleverna kunde gå på fritids istället.

Jan Unenge, Anita Sandahl och Jan Wyndham skrev 1994 boken *Lära matematik. Om grundskolans matematik*.¹⁰⁴ Denna bok kan fungera som en handledning i att undervisa i matematik efter 1994. I boken utgår de från Lpo 94 och den nya kursplanen för matematik.

I kursplanen för matematik skulle varje elev i åk 5 uppnå målen:

- har grundläggande färdigheter i att räkna med naturliga tal: i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare

I kursplanen för matematik skulle varje elev i åk 9 uppnå målen:

- har goda färdigheter i överslagsräkning och räkning med naturliga tal, tal i decimalform, samt med procent och proportionalitet: i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare

Om talbehandlig med huvudräkning i *Lära matematik* beskrivs att ett sätt att frigöra sig från det gamla sättet att använda sig av vanliga algoritmräkningens sätt att addera ihop talen från höger till vänster när talen sätts under varandra vid huvudräkning är att tänka tvärtom. På miniräknaren skrivs talen in från vänster till höger. Deras tanke är att en av metoderna vid huvudräkning är att räkna från vänster till höger som på en räknare när två tal adderas ihop som t.ex. $1\ 734 + 1\ 123$. Först adderas i huvudet $1\ 000 + 1\ 000$ som är $2\ 000$. Därefter $700 + 100$ som är 800 , d.v.s. tillsammans $2\ 800$. Lägg till $30 + 20$ som är 50 och det blir tillsammans $2\ 850$ och sist $4 + 3$ där slutresultatet blir $2\ 857$.

Jan. *Grundläggande räkning: träningshäfte med diagnos. Huvudräkning. Subtraktion*, 1983

¹⁰² *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet - Lpo 94*

¹⁰³ Ibid

¹⁰⁴ Unenge, Jan. Sandahl, Anita. Wyndham, Jan. *Lära matematik. Om grundskolans matematik*. 1994

Unenge, Sandahl och Wyndham skriver i *Lära matematik*:

”En viktig strategi i huvudräkning är att man börjar på samma sätt, det är siffran längst till vänster som är den viktigaste. En poäng är då att man kan ’avbryta’ räknandet när man vill och få fram ett ungefärligt svar (överslagsräkning).”¹⁰⁵

Vid multiplikation av t.ex. $7 * 423$ börjar man med $7 * 400$ som är 2 800. Därefter $7 * 20$ som är 140, vilket tillsammans blir 2 940. Där kan man stoppa om man vill för detta svar ligger nära 3 000 eller blir knapp 3 000. Vill man få det mer exakt så utförs även beräkningen $7 * 3$ som är 21, vilket ger slutprodukten 2 961. I boken föreslås att de ”skriftliga räknemetoderna” skulle kunna utformas efter samma grundregler som ovan. ”Huvudpoängen är att de olika positionerna, de olika siffrornas talvärden, hela tiden är klara för eleverna. Detta skiljer metoden från algoritmerna där man ju (bortsett från division) börjar med entalssiffrorna.” På så sätt blir den skriftliga metoden densamma som metoden vid huvudräkning. ”...man skriver helt enkelt ner siffrorna när man inte längre klarar av att hålla dem i huvudet (i korttidsminnet)”¹⁰⁶.

Gudrun Malmer beskriver 1999 att huvudräkning gör att fokus flyttas från räknandet till tänkandet samt utvecklar ofta ännu fler tankeformer i *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter*.¹⁰⁷ För att kunna vara effektiv i huvudräkning krävs god taluppfattning, tabellkunskaper och förmåga att tillämpa räknelagar och utveckla kreativitet. Till god taluppfattning räknas kunskap om talens uppdelning och uppdelning inklusive faktorisering, positionssystemet, samt skrivsätt för hela tal och decimaltal. Inom tabellkunskap är det viktigt att kunna samtliga tabeller inom alla räknesätt, inte bara multiplikationstabellen. Några av de viktigaste räknelagarna är:

kommutativa lagen för addition, $a + b = b + a$

kommutativa lagen för multiplikation, $a * b = b * a$

associativa lagen för addition, $(a + b) + c = a + (b + c)$

associativa lagen för multiplikation, $(a * b) * c = a * (b * c)$

distributiva lagen, $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

Ju större kunskap man har om talstrukturer och räknelagar, desto mer kreativ kan man vara i sitt tänk när man räknar huvudräkning.

¹⁰⁵ Unenge, Jan. Sandahl, Anita. Wyndham, Jan. *Lära matematik. Om grundskolans matematik.*, 1994, s. 117

¹⁰⁶ Ibid, s. 116-119

¹⁰⁷ Malmer, Gudrun. *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter.* 2002, s. 157

Bland de strategier som man kan använda nämner Gudrun Malmer några som öka här – minska där, fast differens, halvering – dubblering, förlänga – förkorta, distributivitet, multiplikation med 11, kommutativitet i samband med procent, multiplicera tal som slutar på 5, tillämpningar av kvadreringsreglerna, tillämpning av konjugatregeln och kombinera olika räknelagar.

De flesta kan dubblering av tal och halvering av tal vilket kan snabba upp räkningen i huvudet. Vid öka här – minska där använder man sig av att antalet blir detsamma om man gör en överföring från den ena gruppen till den andra för att underlätta att få rätt svar. Exempelvis som i $13 + 15 = 14 + 14$, där 13 ökats med 1 och 15 minskats med 1 och ”dubblorna” $14 + 14$ erhålls vilket många snabbt ”vet” är 28.

Vid subtraktion av två- eller tresiffriga tal underlättas beräkningen om man ökar eller minskar båda talen med samma tal. Uttrycket blir förenklat, samtidigt som differensen blir oförändrad. Beräkningen $32 - 18$ tänks om till $34 - 20$, där båda termerna har ökats med 2. Denna ökning till att ena talet blir ett tiotal gör att svaret för många lättare urskiljs. Att $34 - 20$ är 14 ”syns” lättare än att $32 - 18$ är 14.

Vid förlängning och förkortning blir relationen mellan talen oförändrad. Förlänger man beräkningen $6 / 1,5$ med 2 erhålls att $6 / 1,5 = 12 / 3 = 4$
Förkortar man istället underlättas beräkningar som t.ex. $84 / 20 = 42 / 10 = 4,2$

Distributiva lagen används så att man ”tänker om” talen så att de delas upp för att förenkla beräkningen t.ex. $12 * 32 = 10 * 32 + 2 * 32 = 320 + 64 = 384$.

Vid multiplikation med 11 är ett roligt knep som bygger på att man använder sig av distributiva lagen på ett förenklat sätt. Exempelvis $11 * 34$ blir yttersiffrorna 3 och 4 plus att mittersiffran blir summan av de båda talen, alltså $11 * 34 = 374$

Vid kommutativitet i samband med procent kan följande exempel jämföras:

- a) Hur mycket är 25% av 12 b) mycket är 12% av 25

De flesta ser snabbt att svaret på a-uppgiften är 3 medan det är svårare att se att svaret på b-uppgiften också är 3, trots att det i princip är samma beräkning.¹⁰⁸

Skriftlig huvudräkning på 2000-talet

Birgitta Rockström har utifrån sina erfarenheter inom matematiken infört skriftlig huvudräkning i sin undervisning och har utifrån detta år 2000 skrivit boken *Skriftlig huvudräkning metodbok*.¹⁰⁹ Hon anser att man inte ska använda sig av vanlig algoritmräkning utan metoden skriftlig huvudräkning vid skriftliga beräkningar i matematik. Eleverna ska skriva ut hur de tänker i huvudet i all räkning som då blir en ny slags algoritm fast vågrät. Exempelvis

¹⁰⁸ Ibid, s. 157 - 166

¹⁰⁹ Rockström, Birgitta. *Skriftlig huvudräkning metodbok*, 2000

$11 + 23 = 11 - 1 + 23 + 1 = 10 + 24 = 44$ (minska ena talet med 1, öka andra med 1). (Jämför med K. G. Jonsson metod från 1915 Utfyllnadstypen ovan.¹¹⁰)

Madeleine Löwing & Wiggo Kilborn utvecklar både Gudrun Malmers och Birgitta Rockströms tankar och tekniker från ovan 2003 i boken *Huvudräkning – En inkörsport i matematiken*.¹¹¹ Löwing & Kilborn uppger att när man undervisar i huvudräkning lär man ofta eleverna smarta knep, men glömmar att förklara varför de fungerar. När man diskuterar huvudräkning så kommer ofta informella lösningar fram. Dessa fungerar för att de hänger ihop med våra kända räknelagar och räkneregler.¹¹² Vidare menar de att ”om innebörden i de räknelagar och räkneregler som används vid huvudräkning också lyfts fram och diskuteras, så har man lagt en utmärkt grund för den som senare skall arbeta med algebra”. För att underlätta beräkningar inom division kan man studera talens delare. ”Divisionen $3654/18$ kan t.ex. utföras genom att man studerar talens delare. Eftersom $36 = 2 * 18$ och $54 = 3 * 18$ så kan man skriva $3454/18$ som $(3\ 600 + 54)/18$ och därefter göra beräkningar i två steg som $3\ 600/18 + 54/18$. Detta ger det exakta svaret 203.” De förklarar i boken att addition och subtraktion hänger väl ihop med varandra då de är inversen av varandra. Däremot är fallet med multiplikation och division som den direkta inversen av varandra inte lika enkelt. Divideras 24 med 6 är de inversen av varandra. Delas däremot 26 med 6 får man en rest 2. Division kan dessutom både vara delningsdivision (då t.ex. $12/4$ anses vara 12 föremål ska delas upp i 4 högar vilket ger svaret 3 föremål i varje hög) och innehållsdivision (då t.ex. $12/4$ anses vara 12 föremål ska delas upp i grupper om 4 vilket ger 3 grupper av föremål).¹¹³

Det finns olika uppfattningar om vad huvudräkning egentligen är. En del tycker att huvudräkning är muntliga övningar av additions- eller multiplikations-tabellen. Madeleine Löwing skriver i sin bok *Grundläggande aritmetik. Matematik för lärare* från 2008¹¹⁴, att visserligen utförs sådana beräkningar mer eller mindre automatiserat i huvudet, men att enligt kursplanen (Lpo 94 och Gy 2000) är det inte detta som menas med huvudräkning.¹¹⁵ Däremot ger övningar i huvudräkning av dessa tabeller nödvändiga förkunskaper för den som vill bli duktig i huvudräkning. Vidare skriver hon att det går att hävda att all räkning innefattar huvudräkning eftersom att alla beräkningar sker i huvudet även när man arbetar med skriftlig räkning. Vid addition av flersiffriga tal enligt traditionell algoritmräkning, adderas först ental i huvudet, därefter tiotal, sedan hundratal osv. Till sin hjälp för att avlasta huvudet skrivs delresultaten ned allt efter hand. Som extra hjälp noteras tiotalet som speciell minnessiffra. För de som kan bemästra att sätta upp en algoritm är dessa rutiner både effektiva och minnesbesparande. Det är en fördel att ha en bra taluppfattning, samt behärska ett antal grundläggande räknelagar och räkneregler, skriver Löwing. Detta leder till att det blir mycket enklare att lösa uppgifter i huvudet

¹¹⁰ Johansson, Bengt. *Sveriges förste forskare i matematikdidaktik*, Nämnaren, nr 3, 1986

¹¹¹ Löwing, Madeleine & Kilborn, Wiggo. *Huvudräkning – En inkörsport i matematiken*, 2003

¹¹² Ibid, s. 7-9

¹¹³ Ibid, s. 114-116

¹¹⁴ Löwing, Madeleine. *Grundläggande aritmetik. Matematik för lärare*, 2008

¹¹⁵ *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet - Lpo 94*, Skolverket, 1994 och *Gy2000*. Stockholm: Statens skolverk, 2000

via ofta snabbare vägar än att använda sig av traditionella algoritmer. Ett par saker behöver man då tänka på vid huvudräkning. Det går inte att lösa alla uppgifter i huvudet och att olika typer av huvudräkningsuppgifter kräver olika strategier för att låta sig lösas i huvudet. Eleven behöver behärska ett antal olika metoder för att snabba upp och bli duktig i huvudräkning vilket komplicerar saken. Eleven behöver också välja och använda sig av för uppgiften passande räknelagar och räkneregler. Samtidigt betyder det att du som undervisande lärare kan vinna mycket genom att lyfta fram matematik som på sikt hjälper eleverna att förstå matematikens idé. Med hjälp av ett fåtal räkneregler och räknelager kan man gå hela vägen från en grundläggande taluppfattning till relativt komplicerad algebra och funktionslära. ”Huvudräkning blir på det sättet inte ett självändamål” enligt Löwing (som det varit tidigare enligt studieplaner från 1900-talets början och genom hela folkskoletidens studieplaner se Normalplan 1900, 1914¹¹⁶, 1926 osv) ”utan ett led i ett långsiktigt lärande av matematik”.¹¹⁷

Under projektet Matematiksatsningen mellan åren 2009 och 2011 fick Skolverket i uppdrag att stödja skolor och kommuner i deras arbete med att höja kvaliteten i matematikundervisningen i grundskolan. Nära 12 000 lärare och över 200 000 elever har varit engagerade i dessa utvecklingsinsatser. Denna satsning resulterade i rapporten *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*, 2011.¹¹⁸ I denna rapport presenteras en av fyra genomförda utvärderingar av dessa utvecklingsprojekt. Utvärderingen belyser en vanligt förekommande arbetsmetod inom Matematiksatsningen. Arbetsmetoden gäller matematikundervisning genom konkret material och laborationer samt undervisning i matematikverkstäder. En av lektionerna som beskrivs är problemlösning i en klass 4 där eleverna ska med stöd av konkretiserande material ta reda på hur många olika sätt det finns för att kombinera ett visst antal olikformade knappar, men läraren börjar lektionen med att eleverna får öva de fyra räknesätten snabbt och koncentrerat med huvudräkning. Därefter börjar problemlösningssuppgiften.¹¹⁹ I lektionsanalysen står bl.a. ”En god taluppfattning och goda kunskaper inom aritmetik är en viktig grund för all matematik. Att börja varje lektion med att öva huvudräkning ger eleverna goda möjligheter att utveckla detta kunnande. Läraren hade en strategi för valet av vilka uppgifter hon ställde, gick från lättare till svårare, visade mönster (som att $8 * 7$ är dubbelt så mycket som $4 * 7$) och tankesätt (att $12 * 7$ är $10 * 7 + 2 * 7$) samt gav utmaningar inom varje räknesätt.”¹²⁰

I den senaste läroplanen för grundskolan, Lgr 11,¹²¹ ingår huvudräkning från årskurs 1 till 9 i Centralt innehåll inom ämnet matematik Huvudräkning är ett Kunskapskrav enbart för årskurs 3. Centralt innehåll är vad som i huvudsak ska behandlas i undervisningen i kursen för ämnet. Kunskapskraven är vad som

¹¹⁶ Folkundervisningskommitténs förslag till kursplan för ämnena räkning och geometri i A-skolan (1914)

¹¹⁷ Madeleine Löwing *Grundläggande aritmetik. Matematik för lärare* (2008) s. 107-108

¹¹⁸ *Laborativ matematik konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*, 2011

¹¹⁹ *Ibid*, s. 131-133

¹²⁰ *Ibid*, s. 133

¹²¹ *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet - Lgr 11*, s. 63ff

krävs att eleven skall kunna efter avslutad kurs eller i en viss årskurs.¹²² Dessa två delar kan skilja sig från varandra i innehåll och även skilja sig från det som verkligen betygsätts enligt de nya kursplanerna i Lgr 11 och GY 2011¹²³ (min kommentar).

I den nya läroplanen för grundskolan Lgr 11 står det om matematik att:¹²⁴

”Matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet som är nära kopplad till den samhälleliga, sociala och tekniska utvecklingen. Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser.”

Dessutom anges att:

”... Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser.”

”... Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden.”

”... Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska situationer samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer.”

”... Eleverna ska genom undervisningen också ges möjlighet att utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang.”

”... Genom undervisningen ska eleverna även ges möjligheter att reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning i vardagslivet, i andra skolämnen och under historiska skeenden och därigenom kunna se matematikens sammanhang och relevans.”

I den senaste läroplanen för gymnasieskolan, GY 2011,¹²⁵ finns huvudräkning enbart med i kursen Matematik-1a i Centralt innehåll i. Däremot anges för Centralt innehåll att inom området taluppfattning, aritmetik och algebra ska ingå metoder för vardagslivet i Matematik 1a, Matematik 1b och Matematik 1c, inom geometri ska eleverna kunna föra vardagliga resonemang i kurserna Matematik 1b och Matematik 1c samt även inom geometri i Matematik 2a.

¹²² *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*, Skolverket, 2011

¹²³ *Läroplan för gymnasieskolan 2011, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen – GY 2011*

¹²⁴ *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet - Lgr 11*, s. 62-63

¹²⁵ *Läroplan för gymnasieskolan 2011, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen – GY 2011*, s. 92ff

Huvudräkning finns ej med i kunskapskraven i någon av gymnasiets matematikkurser.

Syftet med ämnet Matematik inom gymnasieskolan enligt nyaste läroplanen för gymnasieskolan GY 2011 är att:¹²⁶

”Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.”

ANALYS

Fyra olika sätt/motiv för användning av huvudräkning

Enligt materialet ovan kan det urskiljas åtminstone fyra olika sätt/motiv för användning av huvudräkning:

1. Huvudräkning som redskap i skriftlig räkning

- Memorera tabell som t.ex. multiplikations- och additionstabeller, samt subtraktions- och divisionstabeller.

Obs! Det är skillnad mellan vad man ska använda tabellen till och varför man lär sig den. Det kan vara för att:

- a) betrakta en tabell som ett verktyg, som man kan använda ungefär som ett lexikon, och som man kan lära sig utantill ”om man vill” för att bli snabbare
- b) använda en tabell som ett led i att lära sig matematik, med tanken att man ”måste” lära sig den utantill

- Svåra tal som ej kan göras i huvudet men delar av dem kan göras i huvudet

2. En metod för att få taluppfattning.

Små barns taluppfattning som t.ex. att räkna stenar som en början att förstå antal. 2 stenar + 2 stenar blir 4 stenar i huvudet. Barnet kan ej ännu skriva siffror och förstår inte siffrors innebörd. Siffror används ej av läraren, detta i syfte att öva barnen i uppfattning av tal. Huvudräkning används som en metod för att förstå matematik.

3. Hela problemlösningen i huvudet

4. Skriftlig huvudräkning

¹²⁶ Ibid, s. 90-92

Huvudräkning som redskap i skriftlig räkning

Huvudräkning som metod möter man i läroböckerna redan under slutet av 1700-talet i bl.a. Roloff Anderssons lärobok *Arithmetica tironica* från 1779¹²⁷ Förmågan att räkna i huvudet sågs som en del av räknekonsten. Huvudräkning innebär här att ha memorerat tabeller (bl.a. alla de fyra räknesätten) och sorter, och genom övning uppnå en förmåga att utföra relativt enkla beräkningar i huvudet, allt för att underlätta och snabba upp det skriftliga räknandet. Huvudräkning med ingående memorerade tabeller, sågs som ett redskap, ett inlärt lexikon, när besvärliga kombinationer av sorter och uträkningar i flera led skulle utföras. Många av dessa beräkningar krävde även skriftliga algoritmer, i vilka det ingick huvudräkning dvs. svåra tal som ej kan göras i huvudet men delar av dem kan göras i huvudet.¹²⁸

Under lite drygt 1800-talets första hälft fram till ca 1860-1870, vid tiden för Sverker Lundins ovan beskrivna tre faser som leder fram till den skriftliga heuristiken, skilde sig huvudräkning från den skriftliga räkningen med en skarp gräns. Särskilda huvudräkningsövningar, utskiljdes från den repetitiva mångfalden av skriftliga övningar. Huvudräkning ingick mer eller mindre inte i de skriftliga övningarna utan dessa skriftliga övningar skulle räknas på i böckerna efter de förenklade regler som stod i boken, helst utan att läraren kontaktades.¹²⁹

I huvudräkningsövningarna ingick att memorera och använda en tabell i något av de fyra räknesätten, som ett led i att lära sig räkning, med tanken att man ”måste” lära sig den utantill. Det ingick inte att man måste förstå talvärdena för att lära sig tabellen, för den memorerade tabellen skulle inte användas vid beräkningar utan som svar på lärarens eller någon äldre elevs frågor i växelundervisningssystemet.¹³⁰

När sedan metersystemet infördes 1875, fick eleverna lära in nya tabeller med sorter, men fortfarande var det inte så noga om de förstod vad de gjorde när de räknade utantill i huvudet ifrån tabeller. Det viktiga var att de kunde rabbla svaren från tabellerna och räkna efter de förenklade reglerna i böckerna, inte att de klarade att använda sin räkning ute på torget, i vardagslivet. Det var en av orsakerna till att Otterström 1880, var så besk i sin kritik av matematikundervisningen under de senaste 60 åren.¹³¹

En metod för att få taluppfattning.

När K. P. Nordlund utkom 1867 med sin *Räkneöfningssexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska metodens användande*¹³², skilde den sig från den tidens övriga böcker genom att som komplement till boken börja

¹²⁷ Andersson, Roloff. *Arithmetica tironica; eller Kort och grundelig anvisning, at practice lära all nödwändig hus- och handels-räkning; efter then nu för tiden mäst brukeliga och fördelaktigaste läro-methode. Til allmänhetens- och i synnerhet scholarnes: tjenst och nytto. Efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning samlad af Roloff Andersson. Med allernådigste privilegio.*, 1779

¹²⁸ Lundin, Sverker. *Skolans matematik - En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*, 2008, s. 343

¹²⁹ Ibid

¹³⁰ Ibid

¹³¹ Otterström, Jacob. *Lärobok i Aritmetik*, 1880

¹³² Nordlund, K. P. *Räkneöfningssexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska metodens användande*, 1867

undervisningen med att nybörjarna skulle lära sig tabeller och förstå matematiken med hjälp av åskådningsmaterial. Huvudräkning behövdes som metod för att ”nybeggarna” skulle få taluppfattning. Först efter när de fått denna taluppfattning, skulle lärjungarna börja använda sig av skriftliga beräkningar. Han utvecklade dessa tankar 1879-1880 i *En samling räkneuppgifter jemte fullständiga lösningar för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium* samt i ännu högre grad i komplementet *Förslag till materiel vid undervisningen i räkning jemte en kort redogörelse för materielens användande*.¹³³

Med boken *Åskådningsmatematik*¹³⁴ återkom Anna Kruse 1910 till K. P. Nordlunds metoder i huvudräkning och utvecklade dem. Hennes avsikt var att matematiken skulle bli roligare i kombinationen med huvudräkning och åskådningsmaterial, samtidigt som de små eleverna lärde sig taluppfattning. Siffror skulle inte införas förrän de fått en god taluppfattning. Små barns taluppfattning som t.ex. att räkna med något som de känner till som sina egna fingrar som en början att förstå antal. 2 fingrar + 2 fingrar blir 4 fingrar i huvudet. 3 blåa rutor + 2 röda rutor blir 5. Om man vänder på rutorna med baksidan uppåt blir det 3 röda rutor + 2 röda rutor blir 5. Barnet kan inte ännu skriva siffror och förstår inte siffrors innebörd. Siffror används inte av läraren, detta i syfte att öva barnen i uppfattning av tal. Huvudräkning används som en metod för att förstå matematik. Först i årskurs 3 ansåg hon att de lärt sig tillräckligt om hur matematiken fungerade och var mogna att lära sig mer om skriftliga beräkningar.

Hela problemlösningen i huvudet

Redan i slutet av 1800-talet kom förslag på fem-minutersövningar i huvudräkning som en metod.¹³⁵ Den förste svenske forskaren i matematik K. G. Jonsson intresserade sig 1915-1919, för hur hela problem med tal ingående som ej översteg tre siffror löstes i huvudet hos olika grupper av elever.¹³⁶ Fritz Wigforss fortsatte i samma anda och föreslog två nya räknemetoder för folkskolan inom huvudräkning, Normalmetoden och genvägar.¹³⁷ Från att den första kursplanen i matematik kom ut 1878, och i samtliga kursplaner genom åren fram till och med Lgr 62 ingår det speciella huvudräkningsövningar i ämnet. I början på alla årskurser, (Normalplan 1878,

¹³³ Nordlund, K. P. *En samling räkneuppgifter jemte fullständiga lösningar för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium*, 1879 samt Nordlund, K. P. *Förslag till materiel vid undervisningen i räkning jemte en kort redogörelse för materielens användande*, 1880

¹³⁴ Kruse, Anna. *Åskådningsmatematik, ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikområdet.*, 1910 samt Kruse, Anna., *Åskådningsmatematik, ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikområdet.*, 2009 (1910)

¹³⁵ G. T. *Anteckningar i räknemetodik för folkskolor och småskolor af G. B. Bucht och J. A. Svensk*. Stockholm, P. A. Norstedt & söners förlag. Svensk Lärartidning, 1894, s. 575

¹³⁶ Jonsson, K. G. *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp* i Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1919

¹³⁷ Wigforss, Fritz. *Den grundläggande matematikundervisningen. Översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt*, 1925

1889 och 1900¹³⁸). Från och med *Undervisningsplan för rikets folkskolor*, 1919¹³⁹ var huvudräkningen invävd i inlärandet av talområden de första två åren. Därefter var det uppdelat med särskilda huvudräkningsövningar från årskurs 3 och uppåt. När *Undervisningsplan för rikets folkskolor* kom 1955¹⁴⁰, var huvudräkningen invävd i inlärandet av talområden det första året. Därefter var det uppdelat med särskilda huvudräkningsövningar från årskurs 2 och uppåt. I Lgr 62¹⁴¹ sedan fanns huvudräkning med som egen del i alla stadier. I Lgr 69¹⁴² omnämndes huvudräkning närmast som en parentes, som kunde tränas i samband med all överslagsräkning som skulle ske på alla stadier. Denna miss när det gällde huvudräkning rättades till när Skolöverstyrelsen 1973 gav ut *Basfärdigheter i matematik*¹⁴³ där huvudräkning blir en användbar basfärdighet i sin egen rätt. I Lgr 69¹⁴⁴ framgår det att eleverna ska *uppnå god färdighet vid numerisk räkning*, vilken enligt SÖ riktlinjer i *Basfärdigheter i matematik* kräver att eleverna använder sig av elementära aritmetiska räknemetoder som huvudräkning.¹⁴⁵ Senast i årskurs 9 ska eleven kunna ”utnyttja additions- och subtraktionstabellerna samt räknelagarna vid huvudräkning inom talområdet 0 – 100.”¹⁴⁶

Med Lgr 80¹⁴⁷ kom problemlösning in i matematiken. I samband lyfts nu huvudräkningen fram som en användbar färdighet i sig, för lösning av problem så enkla att papper och penna inte borde behövas.

I kursplanen för matematik i Lpo 94¹⁴⁸ ska varje elev i åk 5 uppnå målen:

- har grundläggande färdigheter i att räkna med naturliga tal: i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare

I kursplanen för matematik Lpo 94 ska varje elev i åk 9 uppnå målen:

- har goda färdigheter i överslagsräkning och räkning med naturliga tal, tal i decimalform, samt med procent och proportionalitet: i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare

Detta kan tolkas som att eleverna själva ska välja lämplig metod vid sina beräkningar.

¹³⁸ *Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor.*, 1878, *Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor.*, 1889 samt *Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor.*, 1900

¹³⁹ *Undervisningsplan för rikets folkskolor*, 1919

¹⁴⁰ *Undervisningsplan för rikets folkskolor*, 1955

¹⁴¹ Lgr 62

¹⁴² *Läroplan för grundskolan - Lgr 69*

¹⁴³ *Basfärdigheter i matematik*, 1973

¹⁴⁴ *Läroplan för grundskolan - Lgr 69*

¹⁴⁵ *Basfärdigheter i matematik*, 1973, s. 5

¹⁴⁶ *Ibid*, s. 27

¹⁴⁷ Lgr 80

¹⁴⁸ Lpo 94

Skriftlig huvudräkning

En ny metod som tas upp av Birgitta Rockström är skriftlig huvudräkning, i stället för att använda sig av de vanliga algoritmerna. Eleverna skriver ut hur de tänker i huvudet i all räkning som då blir en ny slags algoritm fast vågrät. Skriftlig huvudräkning kräver en bra taluppfattning, vetskap om räknelagar och räkneregler som associativa lagen, kommutativa lagen, additiva lagen, tiotalsovergångar, multiplikationsräkning, bråkräkningslagar (delningsräkning och innehållsräkning), regler för procent och decimaltal.¹⁴⁹

Vid addition av flersiffriga tal enligt traditionell algoritmräkning, adderas först ental i huvudet, därefter tiotal, sedan hundratal osv. Till sin hjälp för att avlasta huvudet skrivs delresultaten ned allt efter hand. Som extra hjälp noteras tiotalet som speciell minnessiffra. För de som kan bemästra att sätta upp en algoritm är dessa rutiner både effektiva och minnesbesparande.¹⁵⁰

SLUTSATS

Syftet med den här studien är att undersöka hur huvudräkning har använts genom historiens gång. Allt sedan 1700-talets slut har lärare och läroboksförfattare talat om värdet av att kunna räkna i huvudet. Varför man sett detta som viktigt har dock förändrats. Inledningsvis handlade det om att memorera tabeller och algoritmer för att få upp snabbheten i det skriftliga räknandet. Senare, i och med införandet av det metriska systemet, kom huvudräkningen att betraktas som en lämplig introduktion till det skriftliga räknandet. När räkneundervisning mot 1800-talets slut kom att riktas till allt yngre barn, blev huvudräkning ett särskilt sätt för just barnen att bekanta sig med matematiken. Under 1900-talet har huvudräkningen ofta lyfts fram som en användbar färdighet i sig - för lösning av problem så enkla att papper och penna inte borde behövas. På 2000-talet har alternativet med skriftlig huvudräkning alltmer börjat genomsyra undervisningen.

Huvudräkning kan användas när man försöker memorera tabeller som t.ex. multiplikations- och additionstabeller, samt subtraktions- och divisions-tabeller.¹⁵¹ När tabellerna väl har memorerats, så kan huvudräkningen i sin tur snabbas upp av att de finns där i lagringsminnet eller långtidsminnet. Då behöver man inte hålla reda på så mycket i själva arbetsminnet eller korttidsminnet, utan kan ta hjälp av lagringsminnet, vilket gör att arbetsminnet avlastas, eftersom man redan "vet" via lagringsminnet att beräkningen $3 * 4 = 12$ och behöver inte använda arbetsminnet till att tänka ut det igen. Det blir en beräkningsomgång som inte arbetsminnet behöver göra och då frigörs arbetsminne till att göra mer avancerade delar och hjärnan kan arbeta med större tal.¹⁵²

Man kan lära sig olika tabeller och rabbla dem utan att ha en taluppfattning. Algoritmräkning kan utföras utan att man förstår vad man gör helt mekaniskt. Det blir rätt med i princip vilket tal du än sätter in om du följer reglerna för algoritmräkning (inklusive minnestal som mellanled) och kan dem utantill.

¹⁴⁹ Rockström, Birgitta. *Skriftlig huvudräkning metodbok*, 2000

¹⁵⁰ Löwing, Madeleine. *Grundläggande aritmetik. Matematik för lärare*, 2008

¹⁵¹ McIntosh, Alistair. *Förstå och använd tal – en handbok*, 2008, s. 93-107

¹⁵² Unenge, Jan. m.fl. *Lära matematik*, 1994, s. 76-77

Som påpekas ovan kräver skriftlig huvudräkning och huvudräkning överhuvudtaget en bra taluppfattning, kunskap om räknelagar och räkneregler samt dessutom stor kreativitet och återkommande träning i huvudräkning.

I materialet som jag undersökt uttrycker de flesta författare att huvudräkning är viktigt i skolans matematik och många anser att det är essentiellt för att klara vardagslivet. I några fall har kritik mot förespråkare för huvudräkning och åskådningsövningar framförts, som t.ex. K. P. Nordlund på 1890-talet när hans metoder presenterades.¹⁵³ Forskning visar även att vuxna i huvudsak använder huvudräkning (omedvetet) i 80% av fallen när de beräknar något i vardagslivet.¹⁵⁴

Vid en undersökning av de senaste läroplanerna (Lgr 11 och GY 2011) är det anmärkningsvärt att huvudräkning inte tas mer på allvar i dessa.¹⁵⁵ De praktiska linjerna på gymnasiet har med detta i läroplanen för matematik (Matematik 1a), men detta återfinns ej i de studieförberedande programmets läroplaner (Matematik 1b och 1c). Samtidigt så ingår huvudräkning som ett stort delmoment i Nationella proven och fortfarande ska eleverna i skolan enligt läroplanerna förberedas för det vuxna vardagslivet.

Om man inte är medveten om hur viktig huvudräkning är för eleverna inför förberedelsen för vardagslivet efter skolan, så använder man som lärare inte det så mycket som undervisningsmetod inom matematik. Om dessutom läroplanerna minskar ner betydelsen av huvudräkning inom ämnet matematik, så kan det bli så att användningen av huvudräkning som metod minskar inom lärarkåren. Enligt Gudrun Malmer, en av vårt lands reformpedagoger inom matematik, borde huvudräkning användas mer eftersom huvudräkning gör att fokus flyttas från räknandet till tänkandet och utvecklar ofta ännu fler tankeformer.¹⁵⁶

I en utökad studie skulle kunna ingå att den historiska genomgången pekar på möjligheter att utveckla matematiken och då speciellt användandet av huvudräkning.

Andra intressanta delar som skulle kunna undersökas i materialet som jag valt ur Skolmatematiskt arkiv om huvudräkning är matematik i flickskolor samt mer om huvudräkning på gymnasiet i Sverige.

¹⁵³ Rollin, Birger. *Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen K. P. Nordlund: Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar. Stockholm 1890.*, Pedagogisk tidskrift, 1891, s. 403-412

¹⁵⁴ Nortcote & McIntosh, *What mathematics do adults really do in everyday life?*, 1999 citerat i McIntosh, Alistair. *Förstå och använd tal – en handbok*, 2009, s. 88

¹⁵⁵ *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet - Lgr 11 och Läroplan för gymnasieskolan 2011, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen – GY 2011*

¹⁵⁶ Malmer, Gudrun. *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärningssvårigheter.*, 2002, s. 157

REFERENSER

(Utanför Skolmatematiskt arkiv)

- Berg, Fridtjuv. *Folkskolan såsom bottenskola*, 1883, Faksimil
http://www.lararnashistoria.se/sites/default/files/wB_Lararhistoria_0079.pdf
 (Hämtad 2011-12-18)
- Carlsson, Albert W. *Med mått mätt*, 1997
- Dysthe, Olga. *Dialog, samspel och lärande*, 2003
- Esaiasson, Peter. Gilljam, Mikael. Oscarsson, Henrik. Wängnerud, Lena. *Metodpraktikan. Konsten att studera samhälle, individ och marknad.*, 2010, [2007]
- Florin, Christina. *Från folkskola till grundskola 1842-1962.*
http://www.lararnashistoria.se/article/folkskolans_historia (Hämtad 2011-10-15)
- Florin, Christina. *Folkskolans historia II.*
http://www.lararnashistoria.se/article/folkskolans_historia_1900 (Hämtad 2011-10-15)
- Foucault, Michael. *Övervakning och straff. Fängelsets födelse.*, 1987. Lund, s. 254-261
- Gy2000. Stockholm: Statens skolverk, 2000
- Johansson, Bengt. Kilborn, Wiggo. Unenge, Jan. *Grundläggande räkning: träningshäfte med diagnos. Huvudräkning. Addition*, 1983
- Johansson, Bengt. Kilborn, Wiggo. Unenge, Jan. *Grundläggande räkning: träningshäfte med diagnos. Huvudräkning. Division*, 1983
- Johansson, Bengt. Kilborn, Wiggo. Unenge, Jan. *Grundläggande räkning: träningshäfte med diagnos. Huvudräkning. Multiplikation*, 1983
- Johansson, Bengt. Kilborn, Wiggo. Unenge, Jan. *Grundläggande räkning: träningshäfte med diagnos. Huvudräkning. Subtraktion*, 1983
- Johansson, Bengt. *Sveriges förste forskare i matematikdidaktik*, *Nämnamn*, nr 3, 1986
- Johansson, Bengt. Lybeck, Leif. *Tankar om elevtankar*, *Nämnamn*, nr 2, 1981
- Johansson, Bo. Svedner, Per Olov. *Examensarbetet i lärarutbildningen. Undersökningsmetoder och språklig utformning*, 2005
- Jonsson, K. G. *Bidrag till räkningens psykologi och metodik*, 1915
- Jämställd förskola och skola i Västmanland. <http://www.jamstalldskola.se/vad-ar-jamstalldhet/jamstalldhet-sverige.shtml> (Hämtad 2011-11-18)
- Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*, Skolverket, 2011
- Kongl. Maj:ts nådiga stadga för rikets allmänna läroverk. Gifven den 1 november 1878.* Stockholm, 1878. 71 s. (Svensk författningssamling 1878:53).
- Kruse, Anna., *Åskådningsmatematik, ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikområdet.*, 2009 (1910)
- Laborativ matematik konkretiserande undervisning och matematikverkstäder. En utvärdering av Matematiksatsningen*, Skolverket, rapport nr 366, 2011
- Larsson, Hans Albin, *Ohelig allians försämrade skolan*, UNT (Upsala Nya Tidning), 2011-05-07. <http://www.unt.se/debatt/ohelig-allians-forsamrade-skolan-1344562.aspx> (Hämtad 2011-10-15)
- Lundin, Sverker. *Skolans matematik - En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*, 2008, Uppsala Universitet, Uppsala

Läraryrket <http://www.lararforbundet.se>, (Hämtad 2011-10-15)

Lärarnas historia <http://www.lararnashistoria.se>, (Hämtad 2011-10-15)

Lärarnas riksförbund <http://www.lr.se>, (Hämtad 2011-10-15)

Läroplan för de frivilliga skolformerna - Lpf 94, Skolverket, 1994

Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet - Lpo 94, Skolverket, 1994

Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet - Lgr 11, Skolverket, 2011

Läroplan för grundskolan - Lgr 62, Kungl. Skolöverstyrelsen, Stockholm, 1962

Läroplan för grundskolan - Lgr 69, Skolöverstyrelsen, Stockholm, 1969

Läroplan för grundskolan - Lgr 80, Skolöverstyrelsen, Stockholm, 1980

Läroplan för gymnasieskolan 2011, examensmål och gymnasie- gemensamma ämnen - GY 2011, Skolverket, 2011

Löwing, Madeleine. & Kilborn, Wiggo. *Huvudräkning – En inkörsport i matematiken*, 2003, Studentlitteratur, Lund

Löwing, Madeleine. *Grundläggande aritmetik. Matematik för lärare*, 2008, Studentlitteratur, Lund

Malmer, Gudrun. *Bra matematik för alla. Nödvändigt för elever med inlärnings svårigheter.*, 2002, [1999], Studentlitteratur, Lund

McIntosh, Alistair. *Förstå och använd tal – en handbok* av 2009.

Metersystemet <http://www.ne.se/sok?q=metersystemet> (Hämtad 2011-12-19)

Mått och enheter <http://www.bgf.nu/historia/6/matt.html> (Hämtad 2011-12-19)

NCM – Nationellt centrum för matematikutbildning <http://ncm.gu.se/artikelsok>

Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor., 1878, Stockholm

Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor., 1889, Stockholm

Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor., 1900, Stockholm

Nortcote, Maria & McIntosh, Alistair. *What mathematics do adults really do in everyday life?*, Australian Primary Mathematics Classroom, 4(1),1999, s. 19-21

Ohelig allians försämrade skolan, införd i UNT 17/5 2011
<http://www.unt.se/debatt/ohelig-allians-forsamrade-skolan-1344562.aspx>,
 (hämtad 2011-10-15)

Rockström, Birgitta. *Skriftlig huvudräkning metodbok*, 2000, Bonnier utbildning, Stockholm

Rustad att möta framtiden? PISA 2009 om 15-åringars läsförståelse och kunskaper i matematik och naturvetenskap, Rapport 352, 2010
<http://www.skolverket.se/publikationer?id=2473>, (Hämtad 2011-10-15)

Selander, Staffan. *Kobran, nallen och majjen. Tradition och förnyelse i svensk skola och skolforskning*, Myndigheten för skolutveckling, 2003

Skoogh, Lennart. *Kunskaper och färdigheter. Problemlösning – viktigaste huvudmomentet i Lgr 80*, Nämnaren, nr 2, 1986

Stiftelsen Sveriges allmänna folkskollära förening <http://www.stiftelsensaf.se>
 (Hämtad 2011-10-15)

Stukát, Staffan. *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*, 2005, Studentlitteratur, Lund

Svensk uppslagsbok <http://svenskuppslagsbok.se/> (Hämtad 2011-12-18)

Svenska Folkhögskolans förbund <http://www.sfh.se> (Hämtad 2011-10-15)

Sveriges mynthistoria
http://www.myntkabinettet.se/web/Sveriges_mynthistoria_i_korthet.aspx
 (Hämtad 2011-12-19)

TAM-arkiv <http://tam-arkiv.se> (Hämtad 2011-10-15)

, samt

Tillägg till Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola. Fastställda av Kungl. Skolöverstyrelsen, Stockholm, 1959.

Timplaner och huvudmoment för studieplaner för skolor av A- och B-form vid försöksverksamhet i anslutning till 1946 års skolkommissions principförslag.

Fastställda av Kungl. Skolöverstyrelsen, Stockholm, 1951

Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola.

Fastställda av Kungl. Skolöverstyrelsen, Stockholm, 1955

Undervisningsplan för rikets folkskolor. Kungl. Maj:ts kungörelse angående undervisningsplan för rikets folkskolor., 1919

Undervisningsplan för rikets folkskolor, 1955

Unenge, Jan. *Huvudräkning – huvudverk för elever och lärare, HÖJMA-projektet*, rapport nr 2, 1982

Unenge, Jan. *Kunskaper och färdigheter. Form och innehåll*, Nämnaren, nr 2, 1986

Unenge, Jan. *Miniporträttet. En svensk pionjär*, Nämnaren, nr 4, 1983

Unenge, Jan. *Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet*, Huvudräkning, Nämnaren, nr 1, 1980

Unenge, Jan. *Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet*, Procenträkning, Nämnaren, nr 2, 1980

Unenge, Jan. *Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet Uppgifter med verklighetsanknytning*, Nämnaren, nr 3, 1980

Unenge, Jan. *Tankar om elevtankar - HÖJMA-projektet*, Sammanfattning, Nämnaren, nr 4, 1980

Unenge, Jan. Lybeck, Leif. Johansson, Bengt. Ämnesmetodisk forskningsanknytning i matematik, 1981

Unenge, Jan. Sandahl, Anita. Wyndham, Jan. *Lära matematik. Om grundskolans matematik.*, 1994

Vad är Pisa

http://www.skolverket.se/statistik_och_analys/internationella_studier/2.4568/vad-ar-pisa-1.2184 (Hämtad 2012-01-13)

Wandt, Edwin. & Brown, Gerald. *Non-occupational uses of mathematics mental and written, approximate and exact*. Arithmetic Teacher, 4(4), 1957, s.151-157

Skolmatematiskt arkiv

webbplats: <http://gupea.ub.gu.se>

Almqvist, Carl Jonas Love. *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Stockholm, 1832

Andersson, Roloff. *Arithmetica tironica; eller Kort och grundelig anvisning, at practice lära all nödvändig hus- och handels-räkning; efter then nu för tiden mäst brukeliga och fördelaktigaste läro-methode. Til allmänhetens- och i synnerhet scholarnes: tjenst och nytto. Efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning samlad af Roloff Andersson. Med allernådigste privilegio.*, Stockholm, 1779

Basfärdigheter i matematik, Skolöverstyrelsen, 1973

Folkundervisningskommitténs förslag till kursplan för ämnena räkning och geometri i A-skolan, 1914

- G. T. *Anteckningar i räknemetodik för folkskolor och småskolor af G. B. Bucht och J. A. Svensk. Stockholm, P. A. Norstedt & söners förlag. Svensk Läraretidning, 1894, s. 575*
- Ferner, Edvin. *Tidskrift för skolmatematik, serie 2 rapport nr 3, 1957*
- H-m, *Hufvudräkneövningar af K. Asperén, adjunkt vid Uppsala högre allmänna läroverk. Stockholm, J. Beckmans förlag. 1904, Svensk Läraretidning s. 858*
- Hultman, Frans Wilhelm. *Anmälan af tio stycken räkneböcker, Tidskrift för matematik och fysik, 1868, s. 233-244*
- K. E. L. *Ett pedagogiskt experiment, 1907, Svensk Läraretidning, s. 338*
- Kruse, Anna. *Åskådningsmatematik, ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikområdet., 1910*
- Jonsson, K. G., *Massundersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp i Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1918*
- Jonsson, K. G., *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp, Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1919*
- Lindhagen, A., L. M. Waern, A. Meyer, S. Almquist, A. Jonsson, M. Jönsson, *Räkneundervisningen. Pedagogiska sällskapet har haft sammanträde, 1897 Svensk Läraretidning s. 578-579*
- Nordlund, K. P. *En samling räkneuppgifter jemte fullständiga lösningar för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium, 1879*
- Nordlund, K. P. *Förslag till materiel vid undervisningen i räkning jemte en kort redogörelse för materielens användande, 1880, Gefle*
- Nordlund, K. P. *Räkneövningsexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska metodens användande, 1867, Gefle*
- Rollin, Birger. *Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen K. P. Nordlund: Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar. Stockholm 1890., Pedagogisk tidskrift, 1891, s. 403-412*
- Otterström, Jacob. *Lärobok i Aritmetik, 1880, Stockholm*
- Skolreformen. 5. Matematikundervisningen Svensk Läraretidning, 1914, s. 890*
- Stenmark, Halfrid. *Matematikundervisningen i realskolan och motsvarande skolformer. En handledning., 1956*
- Velander, J. P. *Ämnet räkning i folkskolan, Svensk Läraretidnings, 1884, s. 381*
- Wigforss. Fritz. *Den grundläggande matematikundervisningen. Översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt, 1925*
- Wiktorin, Mauritz. *Bidrag till räknefärdighetens psykologi, en tvillingundersökning, 1952, Elanders boktryckeriaktiebolag, Göteborg*
- Zweigbergk, Per Anton von, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel: med facit-tabeller, Stockholm, 1839.*

Tabell 1 Skolans allmänna utveckling

	Den första organiserade undervisningen bedrivs på latin i klostren på medeltiden
1500	Lärdomsskolor och undervisning på svenska
1600	Inrättades skolor vid bruken för de invandrade vallonerna. Vissa adelsmän inrättade skolor vid sina gods för allmogens barn
1649	1649 års skolordning för högre skolor
1686	Karl XI utfärdar kyrkolagen - Kyrkolagen kan räknas som den första folkskolestadgan. Enligt den skulle klockaren i församlingen lära ut grundläggande kunskaper inom kristendomen.
1700	Apologistskolorna för borgarklassens barn under 1700-talet
1723	Förordning om undervisningsplikt
1724	Enligt 1724 års skolordning skulle lärarna vid den högre utbildningen inte längre utses av kungen utan utnämnas av biskoparna.
1726	Husförhör lagstadgas genom konventikelplakatet
1807	1807 års skolordning den högre utbildningen ska gälla även andra än präster och blivande ämbetsmän. Apologistskolorna får en moderniserad läroplan med realia och moderna språk.
1809	Silverstolpes riksdagsförslag om en skola för folket
1812	1812 års uppfostringskommitté
1820	1820 års skolordning trivialskolorna ersätts med elementarläroverk som bestod av två olika skolformer – apologistskolor och lärdomsskolor. Lärdomsskolor och gymnasier tog hand om blivande präster och ämbetsmän och i apologistskolan meddelades ”allmän medborgerlig bildning”.
1834	Bondeståndets ledare Anders Danielson tar upp frågan om en allmän medborgarskola i riksdagen. Skolan skall stå fri från kyrkan, kommunerna skall vara huvudmän och bekosta skolhusen, föräldrarna betala viss avgift och att staten skall betala lärarlönerna.
1842	Allmän folkskola införs
1850	Staten stärker sin makt över skolans ideologiska styrning genom införandet av normalplaner. Dessa minskar kyrkans makt över skolan.
1855	Riksdalerns införande 1 riksdaler riksmünt = 100 öre, tiotalssystemet s.k. decimalsystemet införs inom mått och myntenheter och i skolan

- 1856 Ny läroverksstadga 1856 slår samman lärdoms- och apologistkolan och gymnasiet till ett gemensamt läroverk med reallinje och latinlinje. Expansion i byggandet av läroverk. Flickskolor bildas.
- 1858 Folkskolans åk 1-2 blir Småskola. Högre folkskolan införs
- 1859 Folkskoleinspektionen instiftas för att höja nivån på folkundervisningen
- 1862 Studentexamen flyttas från universiteten till läroverken och kallas mogenhetsexamen.
- 1864 Växelundervisning avskaffas. Statens normalskola för flickor bildas
- 1868 76 % av landets 700 000 skolpliktiga får någon undervisning i folkskolan. Antalet elever/pojkar i läroverken har ökat från ca 4000 på 1850-talet till ca 31 000 på 1870-talet. De statliga anslagen till läroverken är mer än tre gånger så stora som till folkundervisningen med sina cirka hundra gånger fler elever.
- 1873 Kronor och ören införs som myntenhet
- 1874 Enskilda skolor och enskilda flickskolor
- 1875 Meterkonventionen, konvention om metersystemet som den 20 maj 1875 undertecknades i Paris av företrädare för 17 stater, däribland dåvarande Sverige–Norge.
- 1878 Ny skolstadga - 6-årig folkskola; den första läroplanen och uppdelning på småskola 2 år och folkskola 4 år. Fortsättningsskolan (åk 7-8) instiftas. Läroverksstadgan - högre allmänt läroverk (gav studentexamen)
Metersystemet införande genomförs under en 10-årsperiod
- 1882 Mindre folkskola lagstodgades där lärare med enbart småskoleutbildning tillåts undervisa även på folkskolestadiet
- 1890 Ny skolstadga med Normalplan från 1889 som innehöll anvisningar om Mindre folkskola
- 1900 Ny skolstadga. Ersättningsskola införs för elever som ej uppnått kunskapskraven till Fortsättningsskolan
- 1905 Läroverksöverstyrelsen bildas
- 1909 Den kommunala mellanskolan ger realexamen
- 1914 Folkskoleöverstyrelsen bildas
- 1918 1918:s skolkommision (Värner Rydén)
- 1919 1919 års undervisningsplan för rikets folkskolor, där gränsen mellan småskola och folkskola togs bort och en enhetlig 6-årig folkskola infördes, kom i stora drag att gälla till 1950-talet.

- 1920 Läroverksstyrelsen och Folkskoleöverstyrelsen blir Skolöverstyrelsen (SÖ)
- 1921 Reviderad folkskolestadga (-1958)
- 1927 De statliga läroverken öppnas för flickor
- 1928 Högst 20 barn i en klass önskan från lärarna (SSLF)
- 1933 Praktiska mellanskolor
- 1936 Riksdagsbeslut om 7-årig obligatorisk folkskola som genomförs 1937-1949
- 1938 Statens aftonskola startar
- 1940 1940 års skolutredning
- 1944 Yrkesöverstyrelsen (KÖY) inrättas
- 1945 Ny skolutredning
- 1946 1946 års skolkommission
- 1948 Försöksverksamhet enhetsskola 1949-1962
- 1953 Kvällsgymnasier införs.
- 1954 Det allmänna gymnasiet var till 1954 indelat i latin- och reallinjer. Ytterligare en linje inrättas – den allmänna linjen med uppdelning på en social och en språklig gren. Det fanns även handelsgymnasier och tekniska gymnasier.
- 1955 Realskoleutredningen. Folkskolan ny undervisningsplan.
- 1956 Statens kompletteringsgymnasium bildas
- 1958 Kyrkan förlorar sin makt över skolan
- 1960 Gymnasieutredningen tillsätts väntade ökningen i tillströmningen vid införandet av ny enhetligare grundskola.
- 1962 Grundskolan inrättas, läroplan Lgr 62 SÖ:s förslag till ny läroplan för grundskola nio obligatoriska år
- 1963 Gymnasieutredningen där det nya gymnasiet föreslås bestå av fem linjer och ska innefatta även de tekniska gymnasierna. Utbildningen ska bli treårig, den tekniska fyraårig.
- 1968 Komvux införs
- 1969 Lgr 69
- 1970 Lgy 70 första läroplanen för gymnasiet; fackskolan och yrkesskolan blir gymnasieskolan, skolformen Läroverk försvinner
- 1972 Parallellskolesystemet avvecklas
- 1977 Grundvux startar

- 1980 Lgr 80
- 1982 Lvux 82 - Komvux egen skolform. Den "nya" skolöverstyrelsen bildas
- 1986 Yrkesutbildningskommitté lägger förslag om treåriga yrkesutbildningar.
- 1988 Proposition om skifte från regelstyrning till målstyrning
- 1989 Kommunalisering av skolan
- 1991 Alla linjer blir 3-åriga och ger högskolebehörighet
- 1994 Lpo 94 – Ny läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet
Lpf 94 (frivilliga skolformer) ersätter Lgy 70
- 1998 Kunskapslyftet startar
- 1999 Skollagskommittén tillsätts
- 2006 Statligt bidrag till vuxenutbildningen minskar
- 2008 Framtidsvägen - förslag till en ny gymnasieskola. Enmansutredning tillsatt av regeringen. Endast vissa av linjerna skall ge högskolebehörighet och att en gymnasieexamen inrättas. Yrkeslinjer skall ej ge högskolebehörighet.
- 2011 Ny gymnasie- och grundskoleförordning. GY2011. Lgr 11 – Ny läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet. Lgy 11 – Ny läroplan för frivilliga skolformer.
-