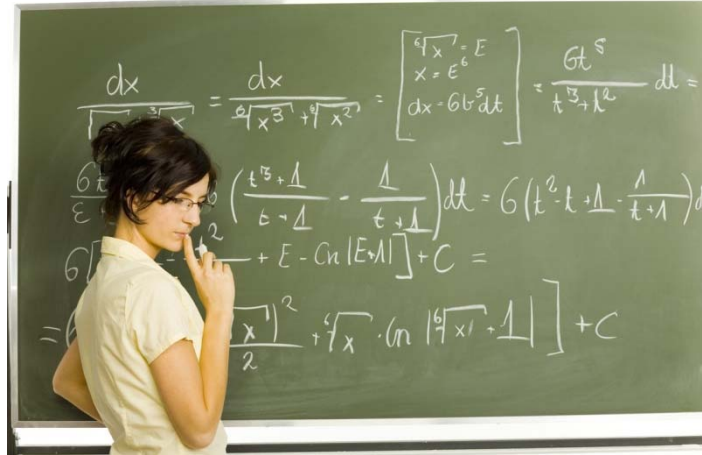




GÖTEBORGS UNIVERSITET



Sverige

VS

Finland

Eller, varför kan vi inte dela på det?

En studie om matematikkunskaper och divisionsräkning i Sverige och Finland.

Av: Mikael Lyckros

”Inriktning/specialisering/LAU370 alt.
LAU390 alt. LAU395”

Handledare: Angelika Kullberg

Examinator: Per-Olof Bentley

Rapportnummer: HT11-2611-128



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Abstract

Examensarbete inom lärarutbildningen

Titel: Sverige vs Finland. *Eller, varför kan vi inte dela på det?* En studie om matematikkunskaper och divisionsräkning i Sverige och Finland.

Författare: Mikael Lyckros

Termin och år: ht 2011

Kursansvarig institution: Sociologiska institutionen

Handledare: Angelika Kullberg

Examinator: Per-Olof Bentley

Rapportnummer: HT11-2611-

Nyckelord: Matematik, division, elevers lärande, PISA, TIMSS.

Syftet med denna studie är att jämföra svenska och finländska elevers resultat i matematikdelen i PISA (Programme for International Student Assessment). PISA-undersökningarna har genomförts fyra gånger och det görs jämförelser vart tredje år, 2000, 2003, 2006, 2009. Ländernas resultat i matematik jämförs med varandra under samma tidsrymd. Studien visar de deltagande ländernas resultat och man kan tydligt urskilja de allt svagare resultaten i matematik som de svenska eleverna presterar samtidigt som de finländska eleverna presterar allt bättre. En studie över de svenska elevernas matematikresultat i TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 1995, 2003 och 2007 görs också. Studien omfattar även historiska jämförelser av metoder att räkna division i den svenska skolan. Divisionsräkning i dagens matematikböcker diskuteras, samt vilka metoder att räkna division man använder sig av i Sverige och i Finland? I rapporten studeras även vilka mål som ska uppfyllas i matematik enligt de svenska styrdokumenterna Lgr 80, Lpo 94 och Lgr 11 samt den finländska motsvarigheten Ggl 04.

1. Förord

Detta arbete avslutar mina studier inom lärarprogrammet ”Människa, natur och samhälle” vid Göteborgs universitet. Denna studie i matematik har gett mig nya insikter som förhoppningsvis kommer att bidra till ökade kvalitéer och kunskaper i mitt framtida arbete som pedagog i grundskolans tidigare år. Jag vill framföra ett stort tack till alla de lärare som gett mig förmånen att få ta del av er tid och era värdefulla erfarenheter. Faktum är att denna studie inte skulle vara möjlig att genomföra utan er och den kunskap ni förmedlat. Ingen nämnd, ingen glömd. Ett stort tack vill jag rikta till Angelika Kullberg som gett mig råd och tips samt konstruktiv kritik på mitt arbete och på textens innehåll och språk. Din erfarenhet har varit ovärderlig för mig. Det har också varit ett stort äventyr att få möjlighet att helt byta inriktning mitt i livet och börja studera efter flera yrkesverksamma år. Detta har möjliggjorts genom stöd från mina närmaste. Till sist vill jag rikta min allra största tacksamhet till min tålmodiga familj som alltför många gånger under min studietid fått finna sig i att inte vara min högsta prioritet under mitt, många gånger, tidskrävande arbete. Min älskade hustru Christina, du är min trygghet och mitt stöd, utan dig hade det inte varit möjligt. Mina underbara barn, Kevin och Jasmine, det är ni som ger mig inspiration och motivation.

Backa, december 2011.

Mikael Lyckros

Innehållsförteckning

1. Förord	3
Innehållsförteckning	4
2. Inledning	6
3. Bakgrund	7
3.1 Vad är division?	8
3.2 Olika algoritmer för division	8
3.21 Liggande stolen	9
3.22 Kort division	10
3.3 Vad krävs för att kunna räkna division?	11
3.4 Kan tidigt stöd vara förklaringen?	12
3.5 Läroplaner	13
3.51 Jämförelse mellan Ggl 04 (Finlands läroplan) och Lpo 94 (Sveriges läroplan)	13
3.52 Lgr 11	14
4. Syfte och problemformulering	15
5. Tidigare forskning	15
5.1 Varför lyckas de så bra i Finland?	17
5.11 Det finländska skolsystemet	17
5.12 Resurser	18
5.2 Sverige	19
5.21 Har eleverna i Sverige blivit sämre eller har eleverna i andra länder blivit bättre? ..	19
5.22 Gemensam nämnare	20
5.23 Slutsats	21
6. Metod	21
6.1 Urval	23
6.2 PISA 2003, matematikdelen	23
7. Resultatredovisning PISA	24
7.1 Jämförelse länder/år PISA	24
7.2 Jämförelse år/länder PISA	25
7.3 Medelvärde PISA	25
7.4 Matematikuppgifter i PISA 2003	26
7.5 Resultatsammanfattning PISA 2000-2009	27

7.6 Jämförelse av Sveriges och Finlands resultat PISA 2000-2009	27
7.7 Slutsats av PISAS undersökning	28
8 Resultatredovisning, TIMSS	29
8.1 Jämförelse länder/år TIMSS	29
8.2 Jämförelse år/länder TIMSS	30
8.3 Sveriges resultat i PISA och TIMSS	31
9 Slutdiskussion.....	31
Referenser och referenslista.....	35

2. Inledning

Programme for International Student Assessment, PISA genomförs var tredje år, och den senaste mätningen gjordes 2009. 2012 är det dags för nästa mätning. PISA har genomförts tre gånger tidigare, år 2000, 2003 och 2006. Resultaten som redovisas i ämnet matematik för 15-åringar visar att Sydkorea ligger i toppen av OECD-länderna, följt av Finland. Sverige ligger på OECD- genomsnittet i matematik med plats 20 av de 34 deltagande länderna. År 2000 låg de svenska eleverna över medelvärdet i matematik i PISA undersökningen (536 p mot 498 p). Närmare en halv miljon elever från 65 länder har testats i läsförståelse, naturvetenskap och matematik i PISA 2009. De svenska resultaten i matematik har försämrats både bland hög- och lågpresterande elever. Jämfört med PISA 2003 har Sverige tappat 15 poäng i matematik och ligger nu på en genomsnittlig nivå. Det är en betydande försämring vad gäller matematik och det är pojkarna som har tappat mer än flickorna (Anita Wester, Skolverkets projektledare för PISA 2009). När man studerar matematikresultaten från TIMSS ser det likadant ut, Sveriges resultat följer samma nedåtgående mönster även där.

Andelen elever i Sverige som inte uppnår nivå 2 av 6 har ökat från 17 till 21 procent samtidigt som andelen elever som presterar på högsta nivåerna har sjunkit från 16 till 11 procent. Sveriges resultat i matematik 2009 är betydligt lägre än 2003. Det är vi som har försämrat oss i Sverige och inte så att de andra länderna har förbättrat sina resultat jämfört med oss (Wester).

Går det att hitta orsaken till att de svenska elevernas matematikkunskaper har försämrats så anmärkningsvärt mycket på relativt kort tid? Är det så enkelt att eleverna bara sitter och räknar sida upp och sida ned i sina matematikböcker för att hinna bli färdiga med böckerna i rätt tid? Utan att de egentligen förstår vad det är de gör, huvudsaken är att man blir klar med matteboken. Läraren måste vara medveten om bokens tillgångar och begränsningar. Ingen ifrågasätter att läroboken underlättar lärarens vardag, men boken kan också utgöra en onödig begränsning när den tillåts styra för mycket. En uppgift som inte är tagen ur läroboken kan ofta bli mer dynamisk och öppna upp för andra arbetsformer (Johansson, M. 2006). En tolkning man kan göra av Johanssons påstående är att man kan finna orsaken till elevernas försämrade resultat i pedagogernas bristande förmåga att ge dem rätt verktyg för att kunna räkna. För lite undervisning helt enkelt. ”Utbildningen i matematik skall ge eleven möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem” (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997).

I denna studie sätts fokus på matematikresultaten hos de svenska och finländska eleverna i PISA samt de svenska elevernas matematikresultat i TIMSS. En historisk tillbakablick på räknesättet division i den svenska skolan samt en studie i hur räknesättet division presenteras i svenska matematikböcker av idag och hur man räknar med division i Finland. En upptäckt som jag har gjort under mina VFU-perioder är att kunskaperna i matematik och algoritmräkning är en förmåga som eleverna har problem med, och då särskilt långdivisionen. En algoritm är enligt *Nationalencyklopedin* en process som efter ett givet system och med ett ändligt antal steg anger hur en beräkning utförs. Det är en metodisk och exakt beskrivning av hur man går till väga när man bl.a. löser ett matematiskt problem. Man skulle kunna likna en algoritm vid ett program, skillnaden är att vi kan beskriva algoritmer oberoende av programspråk. Det innebär att en algoritm som någon hittar på idag därför kan vara lika aktuell och användbar om 500 år som den är idag. Definitionen på en algoritm blir således en

stegvis procedur av väldefinierade exekverbara instruktioner avsedda att utföra en uppgift eller lösa ett problem, t.ex. i matematik, ofta med kravet att proceduren skall ha ett slut. Det finns många algoritmer för att lösa ett visst problem, algoritmer som kan ha mycket olika egenskaper. Målet är att konstruera algoritmer som är korrekta, enkla och effektiva. (<http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DD1340/inda09/algorithms/algoritmer/>)

3. Bakgrund

Åren 1969-1977 var det ”trappan” som lärdes ut i grundskolan, miniräknare fick inte lov att användas. Men tiderna förändras, idag finns det väl knappast en mobiltelefon utan räknarfunktion och knappast några elever utan en mobiltelefon. Kanske är det en anledning till att det inte är motiverat att lära sig en algoritm för långdivision längre. Man kan konstatera att kunskapen att utföra en standardalgoritm för division med flersiffrig nämnare inte längre verkar finns bland eleverna i den svenska skolan. En av följderna verkar vara att det är få som numera kan lösa en division med flersiffrig nämnare utan att ha en räknare till hands. Vid personlig mejlkontakt med Ann-Sofi Røj-Lindberg, universitetslärare i matematikdidaktik vid Åbo Akademi Pedagogiska fakultet i Vasa angående frågorna: ”Vilken/vilka metoder används i den finländska skolan för att räkna division? Hur är finländska elevers kunskaper i division med flersiffriga nämnare?”, har jag fått följande svar: ”I våra skolor används alla tre metoderna: kort division, trappa och liggande stol. Tyvärr kan jag inte ge något forskningsbaserat svar beträffande våra elevers kunskaper i division med flersiffrig nämnare”. Svaret kan ändå ge oss en indikation på att eleverna i Finland möjligen äger större kunskap om hur man löser en algoritm för långdivision i jämförelse med eleverna i den svenska skolan som endast lär sig kort division.

Historiskt sett har diskussionen om algoritmer i vårt land dominerats av frågor kring för- och nackdelar med olika varianter av divisionsalgoritmer. Bengt Johansson tar upp frågan om standardalgoritmernas roll i matematikundervisningen.¹ Det började med s.k. galärdivision i våra första räkneläror på 1600- talet – ett slags ”kort division”. På 1700- och 1800-talet introducerades olika varianter med bokförda delsubtraktioner, long division, för att underlätta det stegvisa arbetet med att bestämma resterna. Det som skiljde varianterna åt var främst nämnarens och kvotens placering relativt täljaren. När undervisningen om tal i decimalform tog fart blev frågor om decimaltecknets placering i kvoten en allt viktigare fråga. Utvecklingen av enhetsskolan och grundskolan följdes av försöksverksamhet och utredningar som resulterade i rekommenderad gemensam standardalgoritm i hela landet. Först trappan på 1960-talet och sedan liggande stolen (Johansson, B. 2006).

En möjlig slutsats man kan dra av ovanstående resonemang är att det verkar finnas ett stort behov av att utveckla matematikundervisningen, och då framförallt undervisningen i räknesättet division med flersiffrig nämnare i den svenska grundskolan. De svenska eleverna uppvisar en kraftig tillbakagång vad gäller matematikprestationer sedan den första PISA-undersökningen och denna tillbakagång har skett från en relativt hög internationell nivå om man tittar på resultatredovisningen från PISA. I internationell jämförelse hör Sverige till de länder som haft en kraftig tillbakagång under mätperioden. Bristen på elevernas förmåga att kunna lösa en divisionsalgoritm med flersiffrig nämnare skulle kunna vara en av anledningarna till de allt lägre resultaten.

¹ Fil.mag, föreståndare för Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, vid Göteborgs universitet

3.1 Vad är division?

Enligt Nationalencyklopedin är division en av de grundläggande operationerna inom aritmetiken. Division är omvändningen till multiplikation. För ett givet tal a (täljaren eller dividenden) och ett annat tal b (nämnaren eller divisorn) är uppgiften att finna ett tal k (kvoten) så att $a = b \cdot k$. Lite förenklat kan man alltså säga att division är multiplikation baklänges. Man kan se division som en invers operation till multiplikation. Multiplikationsinversen till $128 \div 16 = 8$ blir följaktligen $8 \cdot 16 = 128$. Vilket alltså innebär att en division alltid kan kontrolleras genom en multiplikation. Med förklaringen ovan verkar det inte vara så svårt att räkna med division, åtminstone inte i teorin.

3.2 Olika algoritmer för division

I början på 1900-talet infördes den italienska algoritmen och Celsius` algoritm. De två metoderna användes i den svenska skolan till långt in på 50-talet. 1955 rekommenderade Skolstyrelsen att trappan skulle införas i undervisningen. Trappan introducerades i Sverige i samband med Lgr 62 och Lgr 69 (Holt, 2009). Den senaste versionen för långdivision introducerades i Lgr 80 och kallas liggande stolen (Johansson, B. 2006).² Från och med Lpo 94 lär sig eleverna i grundskolan endast att räkna division med hjälp av kort division. De båda kursplanerna Lgr 62 och Lgr 69 är väldigt detaljerade i sina beskrivningar av både metoder och det matematiska innehållet generellt sett. I Lpo 94 är det mer sparsamt med sådana detaljbeskrivningar. Nackdelen med trappan var att många elever placerade siffrorna på fel ställe, detta skedde framförallt när nämnaren var större än täljaren. Därför gjordes en ”ny variant” av trappan där nämnaren placerades till höger om täljaren, man döpte den ”nya” algoritmen till liggande stolen. Liggande stolen har bl.a. den fördelen att den är anpassad till det vanliga skrivsättet $a \div b$ eller som man säger i dagligt tal, ” a dividerat med b ”. Det som av många kan uppfattas som en nackdel är att det med räknesättet liggande stolen inte finns plats att fylla på med nollor i täljaren (dividenden). Det problemet skulle enkelt kunna lösas med att man lämnar plats till eventuella nollor om man behöver fylla på med decimaler.

Problemlösning har alltid haft en central plats i matematikämnet, division är ett av de räknesätt som kan användas för att lösa ett matematiskt problem. Många av dessa problem kan lösas i direkt anslutning till konkreta situationer utan att man behöver använda matematikens uttrycksformer. Andra problem behöver ges en matematisk tolkning och med hjälp av matematiska begrepp och metoder (t.ex. algoritm för långdivision) kan man lösa problemet. Resultaten skall sedan tolkas och värderas i förhållande till det ursprungliga sammanhanget. Problem kan också vara relaterade till matematik som saknar direkt samband med den konkreta verkligheten. För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer (Skolverket, 2000). Vid en historisk tillbakablick på hur räknesättet division lärts ut i den svenska skolan kan man konstatera att metoderna har förändrats. Nedan följer de olika metoder som man använt sig av sedan början av 1900-talet och fram till idag. Låt oss titta på hur några olika algoritmer inom långdivision har sett ut i de svenska matematikböckerna från förr i tiden.

² Liggande stolen lanserades som en innovation från Skolöverstyrelsen. I själva verket finns den i stort beskriven för heltal i en italiensk räknelära redan 1491.

Divisionsuppställningar (divisionsalgoritmer)

Divisionen som skall utföras är $834 : 6 = 139$. Den kan lösas med hjälp av följande uppställningar.

$$\begin{array}{r} 834 \quad 6 = 139 \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 834 \overline{) 6} \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 139 \\ \underline{6} \overline{) 834} \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 139 \\ \underline{834} \overline{) 6} \\ -6 \\ \hline 23 \\ -18 \\ \hline 54 \\ -54 \\ \hline 0 \end{array}$$

Celsius

Italiensk

Trappan

Liggande stolen

Här nedan följer en förklaring, steg för steg, hur man löser en algoritm med långdivision. Metoden som beskrivs är liggande stolen, den senaste varianten från Lgr 80 som lärdes ut till elever i den svenska grundskolan.

3.21 Liggande stolen

$$\begin{array}{c} \text{kvot} \\ \hline \text{täljare} \quad \boxed{\text{nämnare}} \end{array}$$

Liggande stolens struktur

$$\begin{array}{r} 191 \\ \underline{764} \overline{) 4} \\ -4 \\ \hline 36 \\ -36 \\ \hline 04 \\ -4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Här intill visar jag ett exempel där talet 764 skall divideras med 4 med hjälp av liggande stolen (matematiskt är liggande stolen och trappan helt likvärdiga, beräkningsstegen är samma, det är bara layouten som skiljer. I trappan placeras nämnaren till vänster om täljaren, i liggande stolen placeras nämnaren till höger om täljaren). Det går till på följande vis:

1. Jag börjar med att fokusera täljarens första siffra, i det här fallet siffran 7 och se hur många gånger jag kan dela den jämnt med nämnaren, talet 4. 7 delat på 4 går en gång, och denna kvot, 1 antecknas på kvotraden rakt över täljartal.
2. Divisionen ger också en rest som jag måste räkna ut och sedan ta hand om. Därför får jag multiplicera den just beräknade kvoten, 1 med nämnaren, 4 igen och anteckna produkten, som blir 4, rakt under vår täljarsiffra.
3. Nu kan vi subtrahera denna produkt, 4 från den fokuserade täljarsiffran, 7 och anteckna resten, 3 rakt under. Detta är alltså vad som blev över när jag påstod att 7 delat på 4 bara blir 1, och denna rest får vi ta med oss när jag övergår till att räkna på täljarens nästa siffra, 6.

De tre stegen som beskrivits ovan utgör hela algoritmen. Varje siffra i täljaren ska jag bearbeta på samma sätt, och varje gång det blir en rest, tar jag med oss den till nästa beräkningsrunda. Här kommer runda 2:

1. Jag ska nu arbeta med täljarens andra siffra, 6. Jag skriver den direkt efter förra rundans rest, 3. Det ger talet 36 som är den del av täljaren som jag nu ska räkna på. Jag delar den med nämnaren, 4. Det går jämnt ut och kvoten blir 9. Den antecknar jag på kvotraden rakt över täljarsiffran.
2. Nu är det dags att multiplicera kvoten, 9 med nämnaren, 4 och anteckna produkten, 36 rakt under den del av täljaren, 36 som jag nu har fokus på.
3. Därefter subtraherar jag produkten, 36. Här blir resten 0. Det visste jag redan eftersom divisionen $36/4$ gick jämnt ut.

Tredje och i det här fallet sista rundan görs på samma sätt:

1. Jag börjar med att flytta ned sista täljarsiffran, 4 till resten, 0. Det blir 04. Jag delar 04 på 4 och skriver kvoten, 1 på kvotraden.
2. Jag fortsätter med att multiplicera kvoten, 1 med nämnaren, 4. Det blir 4, som jag skriver rakt under den täljarsiffra som jag fokuserar.
3. Avslutningsvis subtraherar jag 4 från 4 och skriver resten, 0 längst ner.³

Jag har nu bearbetat alla siffrorna i täljaren och den sista beräkningsrundan gav ingen rest. Hela divisionen gick alltså jämnt upp och jag kom fram till att $764 \div 4 = 191$. Om jag nu vill kontrollera min division med multiplikationsinversen till $764 \div 4 = 191$ så räknar jag ut talet $191 \cdot 4 = 764$. Jag kan konstatera att uträkningen stämmer.

Om talet inte hade gått jämnt upp, om jag alltså fortfarande hade haft en rest att ta hand om, skulle jag få införa decimalkomma och fortsätta algoritmen med decimaler tills resten blev noll (under förutsättning att divisionen går jämt upp). Jag tänker då att täljaren skrivs 174,0 eller 174,00 istället för 174. De nya siffror jag då får på kvotraden blir decimaler i kvoten. Vissa divisioner går aldrig jämnt upp utan man får en serie decimaler som upprepar sig i all oändlighet (decimalerna vill aldrig ta slut). Med denna metod att räkna division kan man exempelvis få svar som innehåller 0,333... eller 0,257257257... Det innebär att jag kan räkna fram en så exakt summa som det någonsin är möjligt med hjälp av enbart papper och penna samt divisionsalgoritmen liggande stolen.

3.22 Kort division

Kort division är en didaktisk benämning på en divisionsalgoritm som är en enklare variant än trappan och liggande stolen. Metoden är framförallt lämpad för division med ensiffriga tal, vid tal med nämnare innehållande två eller fler siffror får man ta hjälp av miniräknaren. Från och med införandet av Lgr 80 används huvudsakligen kort division i den svenska skolundervisningen. Algoritmer som trappan och liggande stolen lärs oftast inte ut alls, eller i bästa fall, först under grundskolans sista år. I Lgr 80 ska eleverna lära sig att behärska de olika räknesätten. Under rubriken ”Att räkna, en grundläggande färdighet” kan man läsa att divisionsuppställningen inte är nödvändig utan kan undvaras men att alla elever bör träna på kortdivision. En stor skillnad i målsättningarna jämfört med de tidigare läroplanerna är att man inte längre kunskapsmässigt siktar på att eleverna skall lära sig för att kunna studera vidare. Man anser att kunskaperna skall anpassas efter vad som behövs i vardagen. Eftersom miniräknaren nu var allmänt spridd ansågs det uppenbarligen inte längre nödvändig att kunna behärska en divisionsalgoritm för långdivision. Det är den varianten som används i skolan idag.

³ Hela räknepceduren ovan är hämtad på http://sv.wikipedia.org/wiki/Liggande_stolen 2011-11-16

En "enkel" kort division kan se ut så här: $896 \div 4 = 224$. Först delar man hundratalet (800), sedan tiotalet (90) och sist entalet (6). Men tyvärr är ju inte alla divisioner så enkla. Det vanligaste sättet att lösa en sådan uppgift ser du här under. Så här brukar man resonera:

$$\begin{array}{r} 896 \\ \hline \end{array}$$

$$4$$

$$\begin{array}{r} 896 \\ \hline \end{array}$$

$$4$$

$$= 2$$

Jag börjar från vänster med hundratalssiffran. 8 delat med 4 är 2.

$$1$$

$$\begin{array}{r} 896 \\ \hline \end{array}$$

$$4$$

$$= 22$$

Jag fortsätter med tiotalssiffran. 9 delat med 4 är 2, och jag får 1 över. Jag säger att det blir 1 i rest och 1:an skriver jag över 9:an. Jag stryker också över 9:an för att visa att jag har använt den.

$$1$$

$$\begin{array}{r} 896 \\ \hline \end{array}$$

$$4$$

$$= 224$$

Avslutningsvis tar jag entalssiffran. 16 delat med 4 är 4.

Divisionen gick jämt upp utan rest och svaret jag kom fram till är att $896 \div 4 = 224$. Jag kontrollerar min division med multiplikationsinversen till $896 \div 4 = 224$ och räknar ut talet $224 \cdot 4 = 896$ och ser att uträkningen stämmer.⁴ Om divisionen inte skulle gå jämnt upp så får man en rest istället för en serie decimaler. T.ex. om talet vi skulle dividera hade varit 897 istället för 896 skulle svaret sett ut på följande sätt. $897 \div 4 = 224$, rest 1.

3.3 Vad krävs för att kunna räkna division?

Frits Wigforss, lektor i matematik samt pedagogik och psykologi vid seminariet i Kalmar 1919–51, beskriver hur det borde undervisas om divisionsbegreppet. För att förstå skillnaden mellan de två tankegångarna vid division kan man studera följande exempel som är hämtade ur Wigforss bok.

- Exempel på delningsdivision:

Tio pojkar skulle dela lika på ett 60 dm långt snöre. Hur lång bit kunde de få vardera?

- Exempel på innehållsdivision:

Några pojkar delade lika mellan sig ett 60 dm långt snöre, så att var och en fick 10 dm. Till hur många räckte snöret?

De båda exemplen ska lösas med divisionen $60 \div 10$ men tankegångarna är olika. En elev som i det andra exemplet tänker sig en uppdelning i 10 förstår inte hur uppgiften ska lösas. Där måste man

⁴ Hela räkneprocessen ovan är hämtad på

http://www.webbmatte.se/display_page.php?id=35&page_id_to_fetch=657 2011-11-17

tänka hur många gånger 10 får plats i 60. Svaren blir ju 6 i båda fallen men enheterna olika. I första exemplet efterfrågas antalet bitar och i andra antalet pojkar. Om man skulle skriva ”enheter” i beräkningarna skulle det se ut som följer:

Delningsdivision
 $60 \text{ dm} \div 10 \text{ pojkar} = 6 \text{ dm/pojke}$

Innehållsdivision
 $60 \text{ dm} \div 10 \text{ dm} = 6 \text{ st}$

Vid innehållsdivision har täljare och nämnare samma enhet och svaret blir ett antal, medan svaret vid delningsdivision är på formen ”per styck” (Wigforss, 1957). Även i modernare litteratur kan man läsa om betydelsen av att elever har tillgång till båda tankestrategierna för division. 1998 var det bara 26 % av eleverna i en undersökning som klarade av att formulera en räknehändelse till beräkningen $14 \div 0,5$. Detta troligtvis för att eleverna inte behärskar ett innehållsdivisionstänkande. Att elever inte behärskar innehållsdivisionstänkande leder också till svårigheter med uppgifter av typen $800 \div 400$ eftersom det blir svårt att tänka sig detta som en delningsdivision (Löwing, Kilborn, 2002).

Vad som visat sig idag är att det är få människor under 40 år och med en bakgrund i den svenska grundskolan som behärskar en potent divisionsalgoritm. Det kan konstateras att kunskapen att utföra en standardalgoritm för division med flersiffrig nämnare i alla fall i denna undersökning inte längre verkar finnas bland eleverna i den svenska grundskolan och att den situationen bär skolöverstyrelsens och lärarkårens välsignelse. Det är dock en öppen fråga om utvecklingen dit föregåtts av genomtänkta beslut (Holt 2009). Matematikböckerna som används för årskurs 7-9 i den svenska skolan idag innehåller endast kort division, det kan tala för att Holts resonemang stämmer.

Sättet att betrakta division som uppdelning kallas ”partitionering” och bygger på den multiplikativa strukturen av 128 uppdelat i 4 lika delar. Uppdelat i rader skulle det bli 32 enheter/rad. Över de rationella och reella talen kan man alltid definiera divisionen a/b som det tal x som är den *unika lösningen* till $x \cdot b = a$. Det här säger att om $b=0$ så är även $a=0$ vilket skulle betyda att lösningen x är ett godtyckligt tal, alltså får aldrig nämnaren i en division vara 0 eftersom lösningen i så fall inte blir unik (Holt, 2009).

Men det räcker inte med att ”bara kunna räkna”. Lika viktigt som matematikkunskapen i sig är för att kunna komma fram till lösningen på problemet, är läsförståelsen. Eleverna måste även förfoga över den kunskapen för att kunna lösa många av de matematiska problem de kan komma att ställas inför. Enligt matematikprofessorn George Polya, verksam vid Stanford University 1940 - 1953, finns det fyra olika faser som är av betydelse för att kunna lösa ett problem. För det första så måste eleven förstå problemet. Nästa steg är att hon gör upp en plan för hur hon skall gå tillväga för att lösa uppgiften. När det är klart följer hon sin uppgjorda plan och löser uppgiften för att till sist gå tillbaka och kontrollera sin lösning (Polya, 2005). Elevens läsförståelse är alltså av lika stor vikt som hennes förståelse för matematiken i sig för att hon skall kunna tränga in i texten och förstå de olika delarna i det matematiska problemet. Därmed får eleven också klart för sig vilken information som skall användas för att kunna lösa uppgiften. Utan den kunskapen kan problemet bli väldigt svårt för henne att lösa.

3.4 Kan tidigt stöd vara förklaringen?

”Kan sättet som ett land gestaltar den specialpedagogiska stödverksamheten på bidra till hur ett land lyckas på PISA?”. Den frågan ställer sig Rune Hausstätter och Marjatta Takala (Skolverket, 2011). Samtidigt passar de också på att problematisera vad ett utbildningssystem ska uppnå. De två artikelförfattarna grundar sin argumentation på en analys av resultat på

PISA och Finlands sätt att bedriva specialpedagogik. De hävdar att en viktig förklaring till Finlands avsevärt högre resultat i bl.a. matematik är att skolan i Finland tidigt ger särskilt stöd i matematik till en stor del av eleverna. Detta presenteras också som en tänkbar förklaring till de mindre skillnaderna mellan eleverna i den finska skolan. "The Finnish school system presents itself as not only the best school in the world, but also as the best school 'for all' in the world..." (Skolverket, 2011).

3.5 Läroplaner

Vid en jämförelse mellan den finländska läroplanen Ggl 04 och den svenska motsvarigheten Lpo 94 upptäcks att det ställs tuffare krav i matematik på de finländska eleverna gentemot de svenska eleverna. Den finländska läroplanen i matematik är innehållsmässigt uppdelad i årskurs 1-2, 3-5 och 6-9. Varje del innehåller Mål, centralt innehåll och profil för goda kunskaper i slutet av årskurserna 2 och 5. I slutet av årskurs 8 finns istället för profil för goda kunskaper kriterier för slutbedömning för vitsordet. I dessa kriterier finns många punkter som berör problemlösning (Brännström & da Luz Reis, 2007). I den nya svenska läroplanen Lgr 11 är målen lite mer omfattande och tuffare än vad de var i Lpo 94.

3.51 Jämförelse mellan Ggl 04 (Finlands läroplan) och Lpo 94 (Sveriges läroplan)

MÅL

Eleven skall

- De finländska eleverna **skall lära** sig att i matematiken lita på sig själv och ta ansvar för den egna inlärningsprocessen. I Sverige skall eleverna förvärvat sådana kunskaper och färdigheter i matematik som behövs för att **kunna hantera** situationer och lösa problem som vanligen förekommer i hem och samhälle och som behövs som grund i fortsatt utbildning.
- I Finland **skall de lära sig** att förstå betydelsen av matematiska begrepp och regler och lära sig att se sambanden mellan matematiken och den reella världen. De svenska eleverna skall kunna **tolka** och använda grafer till funktioner som beskriver verkliga förhållanden och händelser.
- Eleverna **skall lära sig** räknefärdigheter och att lösa matematiska problem i den finländska skolan. Enligt den svenska läroplanen skall eleverna **ha goda färdigheter** i överslagsräkning och räkning med naturliga tal, tal i decimalform, samt med procent och proportionalitet - i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med miniräknare.
- Eleverna i Finland **skall lära sig** att tillämpa olika metoder för att hämta och bearbeta information. Det skall jämföras med att man som elev i Sverige skall **kunna använda** metoder, måttsystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma längder, areor, volymer, vinklar, massor, tidpunkter och tidsskillnader. Man skall också kunna **känna igen**, avbilda och beskriva viktiga egenskaper hos vanliga geometriska objekt samt **tolka** och använda ritningar och kartor, kunna tolka, sammanställa, analysera och värdera data i tabeller och diagram, att **kunna använda** begreppet sannolikhet i enkla slumpsituationer samt att man skall kunna ställa upp och använda enkla formler och ekvationer vid problemlösning.
- De finländska eleverna **skall även lära sig** ett logiskt och kreativt tänkande, lära sig att uttrycka sina tankar entydigt och att motivera sitt handlande och sina slutsatser samt lära sig att ställa frågor och dra slutsatser utgående från observationer. De skall också lära sig att upptäcka lagbundenheter och lära sig att kunna arbeta koncentrerat och långsiktigt och att fungera i grupp.

- Både den svenska och den finländska kursplanen tar upp vardagliga problem. Skillnaden är att i Ggl 04 står det uttryckligen att dessa problem **skall** lyftas in i matematiken medans det i den svenska kursplanen, Lpo 94, uttrycks att den matematik eleverna skall kunna **bör** vara av sådan karaktär att de har nytta av den i vardagen. En väsentlig skillnad. Målen i den finländska kursplanen Ggl 04 uttrycker sig tydligare med fokus på vad eleven skall lära sig. Den svenska kursplanen Lpo 94 uttrycker lite mer svävande i form av att eleven skall lära sig sådant som han/hon kan ha nytta av.

3.52 Lgr 11

I och med införandet av den nya läroplanen skall de svenska elevernas kunskaper spetsas till. Det är en rad direktiv inom matematiken som har skärpts till om man jämför Lgr 11 med Lpo 94. I den nya läroplanen framgår det med tydlighet vad som krävs av de svenska eleverna i fortsättningen. För eleverna i årskurserna 7-9 gäller bl.a. följande:

MÅL

Eleven skall

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder,
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
- föra och följa matematiska resonemang, och
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.

Direktiven i den nya läroplanen, Lgr 11 verkar vid en jämförelse lite mer tillspetsade än vad de var i Lpo 94. Eleverna skall, med den nya läroplanen kunna lösa olika problem i bekanta situationer på ett väl fungerande sätt. Detta skall ske genom att eleven väljer att använda sig av strategier och metoder med god anpassning till problemets karaktär. Eleven skall också kunna formulera enkla matematiska modeller som kan tillämpas i sammanhanget. De skall också ha förmåga att föra väl utvecklade och väl underbyggda resonemang om tillvägagångssätt och om resultatens rimlighet i förhållande till problemsituationen. Eleven skall kunna ge förslag på alternativa tillvägagångssätt. Eleven skall visa att hon har mycket goda kunskaper om matematiska begrepp. Detta skall hon kunna visa genom att tillämpa dem i nya sammanhang på ett sätt som är väl fungerande. Allt för att kunna anpassa metod efter sammanhang. Vidare så skall eleven även ha förmågan att beskriva olika begrepp med hjälp av matematiska uttrycksformer på ett väl fungerande sätt. Hon skall också kunna växla mellan de olika uttrycksformer som behövs och föra ett väl utvecklat resonemang om hur de olika matematiska begreppen relaterar till varandra likaväl som hon skall äga förmågan att med god anpassning till sammanhanget välja att använda sig av ändamålsenliga och effektiva matematiska metoder. Därmed skall hon klara av att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter inom aritmetik, algebra, geometri, sannolikhet, statistik samt samband och förändring med mycket ett gott resultat som följd (Skolverket).

4. Syfte och problemformulering

Syftet med denna studie är dels att göra en komparativ studie av de svenska och de finländska elevernas matematikresultat i PISA. Tanken var att även jämföra de två ländernas matematikresultat i TIMSS som också är genomförd fyra gånger tidigare. Det har varit svenskt deltagande vid tre av dessa fyra tillfällen, 1995, 2003 och 2007. Men då det visar sig att Finland har bara deltagit i TIMSS en gång, 1999, det året som Sverige inte deltog i undersökningen, samt att de båda undersökningarna inte mäter samma typ av matematiskt kunnande går det inte att göra några rättvisa jämförelser länderna emellan. Därför studeras endast de svenska elevernas matematikresultat i TIMSS. Resultaten som redovisas i ämnet matematik för 15-åringar i PISA undersökningen visar att Sydkorea ligger i toppen av OECD-länderna, följt av Finland. Sverige ligger på OECD-genomsnittet i matematik med plats 20 av de 34 deltagande länderna. Studien omfattar även historiska jämförelser av metoder att räkna division i den svenska skolan samt hur divisionsräkning ser ut i dagens svenska matematikböcker. I studien ingår också en jämförelse mellan de två ländernas metoder att lösa divisionsuppgifter i grundskolan.

- Hur står sig de svenska elevernas matematikresultat i jämförelse med vad de finländska eleverna presterar i PISA?
- Hur ser de svenska elevernas matematikresultat ut i TIMSS?
- Hur har man lärt ut division i den svenska grundskolan sedan början av 1900-talet?
- Vilken/vilka metoder använder man sig av för att räkna division i Sverige och Finland idag?

5. Tidigare forskning

Låga resultat inom bl.a. matematik hämmar Europa kan man läsa i pressmeddelandet *Låga resultat inom matematik och naturvetenskap hämmar Europa* från Europeiska Kommissionen.

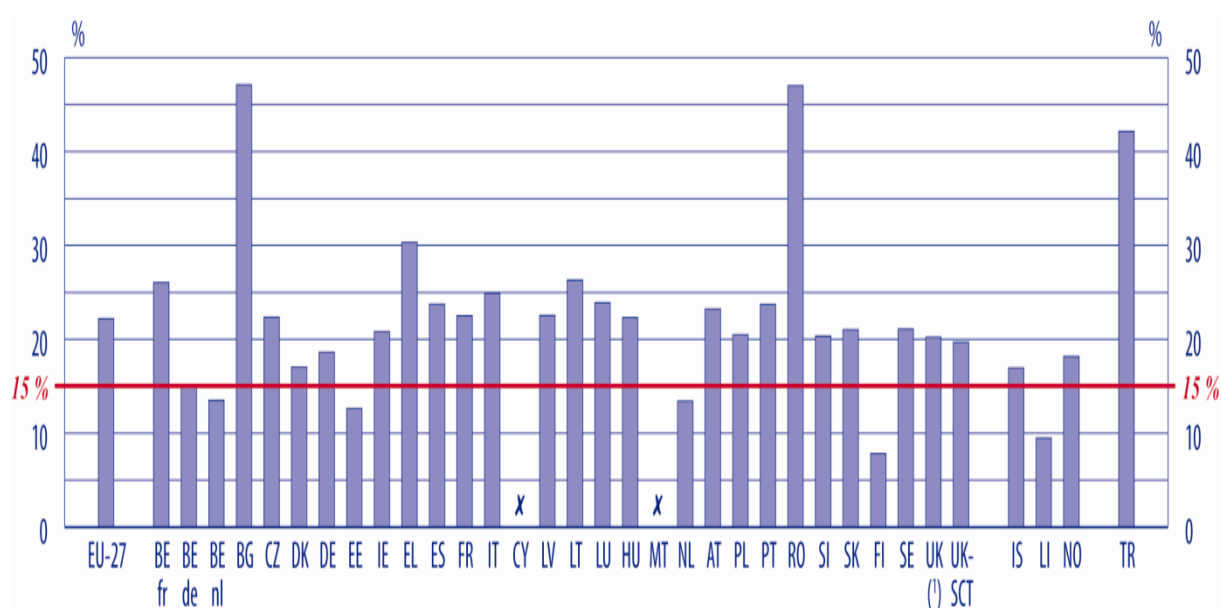
Beslutsfattarna måste göra mer för att hjälpa skolorna att ta itu med dåliga resultat inom matematik och naturvetenskap, visar två rapporter som EU-kommissionen lägger fram i dag. Rapporten *Mathematics Education in Europe; Common Challenges and National Policies* om matematikundervisningen visar att bara fem europeiska länder, nämligen England, Italien, Nederländerna, Irland och Norge, har satt upp nationella mål för att öka resultaten, även om flertalet EU-länder har allmänna riktlinjer på området.⁵

De två rapporterna, *Mathematics Education in Europe; Common Challenges and National Policies* och *Science Education in Europe: National Policies, Practices and Research*, jämför metoder för undervisning i matematik och naturvetenskap för att på det sättet kunna bidra till den europeiska och nationella debatten om hur resultaten kan förbättras. Vidare kan man utläsa av rapporterna att de bekymmer man kände över resultaten fick EU:s utbildningsministrar att 2009 sätta upp ett gemensamt mål om att andelen femtonåringar med otillfredsställande färdigheter i matematik, naturvetenskap och läsning skulle vara mindre än 15 % i slutet av årtiondet. Av de 18 europeiska länder som har jämförbara uppgifter gör Finland, Estland och Nederländerna bäst ifrån sig. Under rubriken matematik i pressmeddelandet kan man läsa att ministrarna har kommit fram till följande slutsatser.

⁵ Bryssel den 16 november 2011

Utbildningsministrarna har sagt att färdigheter i matematik är centralt för personlig utveckling, aktivt medborgarskap, social inkludering och anställbarhet i kunskapssamhället. En rad faktorer påverkar hur matematik lärs ut och lärs in. Internationella undersökningar tyder på att elevernas resultat beror på familjebakgrund, undervisningens kvalitet och skolsystemens struktur och organisation. Rapporten om matematikundervisning (den första som kommissionen beställt) visar att merparten av de europeiska länderna använder en resultatbaserad modell där tonvikten ligger på elevernas praktiska färdigheter. Mängden matematik i läroplanerna har minskat, medan tonvikten på problemlösning och matematikens tillämpningar har ökat. Denna modell svarar bättre mot elevernas behov och visar hur de kan använda matematiken i verkligheten. Problemet är dock hur man på rätt sätt ska stödja lärarna, som behöver fortbildning. Dessutom behövs mer stöd och vägledning för hur man undervisar elevgrupper som utmärks av mångfald (*Låga resultat inom matematik och naturvetenskap hämmar Europa, 2011*).

Undersökningarna sammanställdes av Eurydice-nätverket och inriktas på reform av läroplanerna, undervisning och bedömningsmetoder.⁶ Dessutom behandlas åtgärder mot låga resultat, ökad motivation genom betoning av praktiska tillämpningar samt lärarutbildning. Ämnena belyses med hjälp av akademisk forskning, de senaste resultaten från internationella undersökningar och en ingående översyn av nationella politiska insatser och program. Nedanstående diagram visar på andelen lågpresterande femtonåriga elever i matematik 2009 i de undersökta länderna enligt OECD, databasen PISA 2009. Linjen i figuren visar EU:s mål där eleverna i respektive länders färdigheter i matematik, naturvetenskap och läsning skall vara mindre än 15 %. Det är ett mål som skall vara uppnått 2020 (se figur 1).



Figur 1. Linjen i figuren visar EU:s mål på 15 % som ska vara uppnått 2020. (Källa: OECD, databasen PISA 2009).

Av diagrammet framgår att hela 27 av de 33 (ca 80 %) länderna, däribland Sverige, för tillfället inte når målen som EU:s utbildningsministrar satte upp 2009. Det är en uppseendeväckande hög siffra. Man kan utläsa av staplarna att de flesta länder som inte har nått hela vägen fram än ligger i spannet runt 17-26 %. I Sverige det är 22 % av eleverna som ligger över det satta gränsvärdet. ”Alla som påverkar skolan måste släppa sin prestige och

⁶ Eurydice-nätverket ger information om och analyser av europeiska utbildningssystem och utbildningspolitik. Från och med 2011 består nätverket av 37 nationella enheter baserade i alla 33 länder som deltar i EU:s program för livslångt lärande, EU-medlemsstaterna, Efta-länderna, Kroatien och Turkiet

sluta leta syndabockar. Vi behöver en nationell samling över blockgränserna och mellan stat och kommun som fokuserar på det som både forskningen och lärarna vet ger resultat” säger Lärarförbundets ordförande Eva-Lis Sirén (OECD 2010). I Finland är motsvarande siffra 8 %, lägst av alla deltagande länder, ett väldigt bra resultat. Lika tydligt som man kan urskilja stora resultatdifferenser i PISA de två länderna emellan kan man uppfatta att det i denna undersökning också syns klara skillnader i matematikkunskaper vid en jämförelse de båda länderna emellan. Anmärkningsvärt är att tre av länderna visar resultat som ligger över 40 %.

5.1 Varför lyckas de så bra i Finland?

En tolkning av den finska läroplanen för matematik just nu är att den verkar inrikta sig på problemlösning. Men Finland skiljer sig inte så mycket från andra länder i västvärlden. De har följt samma utveckling som de flesta länderna inom matematikundervisning. Det var under 1990-talet som en stor förändring skedde, både i samhället och i skolan. Datorer kom in i skolsystemet och det blev en reform i matematikundervisningen. Kassel-projektet visade att Finland var sämst av de nordiska länderna år 1985.⁷ Efter det sökte Finland nya visioner om hur man bäst lärde sig matematik i bland annat Sverige. Förslag om en målorienterad läroplan lades fram. Forskningen kring matematikundervisning visar att eleverna lär sig matematik på flera olika sätt och finska lärare har friheten att välja metoderna. I rapporten *Så arbetar Finland med matematik* som kan nås via Skolverket man läsa följande:

Eleverna måste kunna visa sin matematiska förståelse genom att förklara hur de löser ett problem. Det är vanligt att pojkar har svårt med detta i Finland. Matematik måste integreras med andra ämnen för att få eleverna att förstå att matematik är användbart inom hela samhället. Att använda olika konkretiseringsmaterial i matematikundervisningen är viktigt och att använda dataprogram ger kunskap i både matematik och datorer. (Leo Pahkin, utbildningsråd på utbildningsstyrelsen i Finland) (Skolverket 2008).

5.11 Det finländska skolsystemet

Det finländska skolsystemet skiljer sig inte på något radikalt sätt ifrån den svenska motsvarigheten. Bägge systemen är enhetliga och ganska väl sammanhållna. Oavsett bostadsort eller social och kulturell bakgrund skall alla eleverna ha tillgång till en likvärdig utbildning. I Finland finns det många små kommuner och följaktligen också ofta små skolenheter som är jämnt utspridda över landet vilket är viktigt för allas tillgång till likvärdig utbildning (Linnakylä & Välijärvi 2003; Skolverket 2005). Det är möjligt att man uppnår bättre studiero i en omgivning präglad av småskalighet och genom att det finns en större social kontroll. Kanske också intimiteten som uppstår i sådana situationer har en sammanhållande funktion. Det i sin tur innebär att chansen är större att ingen elev förbises. Om man tittar på hur det finländska skolsystemet ser ut så finner man följande faktorer som möjligen också kan ligga till grund för deras goda resultat. Samhällets syn på skolan, lärarutbildningen i Finland, arbetssätt, tidiga betyg, antalet undervisningstimmar i matematik, elever med fördjupade matematikkunskaper och tidig stödundervisning.

I uppsatsen *Lärares val och tillämpning av läromedel i matematik* av Viktor Johansson och Oskari Koskela från 2009, där de jämför svenska och finländska lärare i förskolan och årskurs 1, kan man läsa en intervju med Monika Johansson, doktor i matematik och lärande vid Luleå tekniska universitet. Johansson berättar att hon på uppdrag av Skolverket jämfört och analyserat skillnader mellan de svenska och finländska styrdokumenterna. Det hon kom fram

⁷ Kassel-projektet är en internationell jämförelse av inlärningsresultat i matematik som gjordes i slutet av 1980-talet, på basis av vilken en kommitté med Anto Leikola i spetsen (Leikolan komitea 1987–89) rekommenderade att matematikundervisningen skulle förnyas och att en arbetsgrupp skulle tillsättas för ändamålet.

till var att de finländska styrdokumenterna var mycket tydligare i sin styrning än sin svenska motsvarighet. Det gör det mycket enklare för de finländska läromedelsförfattarna genom att styrdokumenterna mycket distinktare visar vad eleverna skall lära sig under vilket skolår. Det innebär att läromedelsförfattarna i Finland kan arbeta väldigt tigt enligt läroplanen vid utformandet av läromedel (Johansson & Koskela, 2009). Enligt Johanssons analys av de svenska styrdokumentens utformning visar de att det är väldigt svårt för läromedelsförfattarna i Sverige att göra en matematikbok som stämmer överens med kursplanens intentioner och som kan följa styrdokumenterna nära som de gör i Finland. Johansson och Koskela (2009) menar att det viktigaste kriteriet för finländska lärare när de skall välja tryckta läromedel är att boken tydligt följer läroplansgrunderna. Förlaget förklarade att de läroböcker som de tillverkar därför följer läroplanen nära och tydligt, precis samma sak som Johansson kom fram till i sin rapport. Representanterna för förlaget förklarade också att andra kriterier som är viktiga beträffande lärarens val av läromedel är det pedagogiska upplägget, användbarheten och språket.

5.12 Resurser

I PISA beskrivs hur mycket de olika länderna satsar på utbildningen. Det sätts i relation till vilka resultat eleverna presterar i PISA. De finländska eleverna uppnår ett högt resultat i skolan i jämförelse med vilka resurser landet satsar på utbildning. Finland får således en större avkastning än vad som kan förväntas av insatsernas storlek. I Sverige motsvarar elevernas prestationer det som satsas på dem inom utbildningsområdet. I rapporten *Är Finlands sak vår?* (Skolverket, 2005) kan man också läsa om de ekonomiska förutsättningarna som gäller inom respektive länder. Där beskrivs sambandet mellan ekonomi och elevernas prestationer på följande vis.

I OECD-länderna i genomsnitt finns en tydlig samvariation mellan vad ett land spenderar och elevernas prestationsnivå. Det är uppseendeväckande att sambandet är negativt om man bara tar hänsyn till de nordiska länderna. Exempelvis spenderar Norge mer än Sverige per elev som i sin tur spenderar mer än Finland per elev men prestationsnivån i matematik är högst i Finland, följt av Sverige och därefter Norge (Skolverket, 2005).

I rapporten beskrivs också LUMA-programmet. Matematik är ett av de ämnen som ingår i PISA och som dessutom var föremål för deras intresse.⁸ Syftet med LUMA var att utveckla elevernas kunskaper i de båda ämnena på alla utbildningsnivåer. I projektet deltog 78 kommuner och 270 skolor som arbetade i 16 nätverk över landet. Bakom projektet fanns Undervisningsministeriet och Utbildningsstyrelsen som stod för genomförandet. På de skolor som deltog i LUMA har man på ett framgångsrikt sätt lyckats lägga ökad vikt vid bl.a. matematik. I utvärderingen av LUMA blev det allmänna omdömet att det på många sätt varit ett framgångsrikt projekt. Många lärare menar att LUMA har underlättat att initiera nya idéer och projekt samt förenklat samarbete mellan t.ex. lärare, ämnen och skolor. Under perioden som LUMA pågick gavs också stora möjligheter för lärare att fortbilda sig på olika sätt inom de olika ämnena. De skolor som deltog i LUMA har på ett framgångsrikt sätt lyckats lägga ökad vikt vid matematik och naturvetenskap i sina lokala läroplaner samt integrera de båda ämnena i skolan många andra ämnen.

⁸ Uppdraget för den internationella utvärderingsgruppen gällande undervisningsministeriets LUMA-program var att bedöma programmets förverkligande ur internationell synvinkel och att ge rekommendationer för att förbättra finländarnas kunskaper i matematik och naturvetenskaper i framtiden.

5.2 Sverige

Enligt ett regeringsbeslut grundat på Skolverkets nationella utvärdering av grundskolan (NU-03) behöver Sverige göra stora satsningar inom matematikundervisningen i skolan. Undersökningen visar bl.a. på bristande kommunikation i undervisningen och att diskussioner och lärarledda genomgångar har minskat drastiskt och enskilt arbete ökat. Studien pekar vidare på behovet av att ändra undervisningens utformning och att undervisningstiden används på ett mer konstruktivt och för elevernas matematikkunskaper mer utvecklande sätt (Utbildningsdepartementet 2009).

Syftet med regeringens förslag till statsbidrag för att utveckla matematikundervisningen i skolan är framförallt avsett för att stimulera och stärka skolornas eget utvecklingsarbete med att höja kvaliteten i undervisningen. Man skulle kunna tolka det som att undervisningen måste gå ut på att få med eleverna i det matematiska tänkandet. Att de måste få rätt grundförutsättningar för att kunna ställa upp och logiskt kunna resonera sig fram till olika typer av uträkningar. Det gäller alla fyra räknesätten och framförallt division som anses vara svårt för eleverna att lära sig. Hur skall man annars tolka målen i Lgr 80? Enligt den skulle alla elever under grundskoletiden förvärva grundliga kunskaper och färdigheter i additions- och subtraktionsalgoritmerna för tal upp till en miljon och upp till tre decimaler, i multiplikationsalgoritmen med två flersiffriga faktorer. Men i division räcker det med att eleverna lär sig divisionsalgoritm med ensiffrig nämnare!

5.21 Har eleverna i Sverige blivit sämre eller har eleverna i andra länder blivit bättre?

Är det verkligen på det viset att eleverna i Sverige har blivit sämre i matematik? Eller har eleverna i andra länder blivit bättre? Sverige har sedan den första PISA-undersökningen klart försämrat sitt matematikresultat i förhållande till flera länder (PISA). Det ser likadant ut i TIMSS, kunskapsnivån i matematik sjunker oroväckande mycket hos de svenska eleverna. Samtidigt kan man notera att en absolut försämring av resultatet i matematik framträder. Det förs diskussioner mellan olika aktörer och intressenter inom utbildningsväsendet om tillståndet i den svenska skolan. Inte sällan framförs kritik mot denna. Kritiken riktar in sig på allt från lärarnas kompetens, eller bristen på densamma, vilka behörigheter och befogenheter de har och klimatet på skolorna och i klassrummen. I rapporten *Lärares val och tillämpning av läromedel i matematik* uttalar sig en pedagog på följande vis:

Hur ska jag med säkerhet kunna säga att man i årskurs 5 ska man gå igenom ett visst begrepp, när kursplanen är gjord efter hela grundskolan? Då kan jag inte kritisera läroboken för att den exempelvis inte tagit upp division med bråk. Det gör att lärarna har problem att kunna jämföra och granska läromedlet (Johansson & Koskela, 2009).

Förslagen på hur man kan komma tillrätta med de problem som har identifierats är många och av olika slag. En intressant förklaring skulle kunna vara en ökad individualisering i form av eget arbete och en förskjutning av ansvar från lärare till elev. I denna förklaring skulle man även kunna infoga en förskjutning av ansvaret från skolan till hemmet. Om detta ökade ansvar läggs på eleverna och deras föräldrar är det inte någon större överraskning att betydelsen av den socioekonomiska bakgrunden ökar. Om så är fallet innebär det att en stor del av eleverna inte får en ärlig chans och det är helt oacceptabelt (Skolverket 2005).

Genom Skolverket kan man få tillgång till diagnosmaterial i bl.a. matematik. Ett sådant är Diamant (DIAGnoser i MATematik som är NaTionella). Diamant är en diagnosbank i matematik som består av 55 diagnoser, avsedda för, i första hand, grundskolans tidigare år.

Tanken med diagnoserna är att de skall användas av lärare för att kartlägga hur långt eleverna kommit i sin kunskapsutveckling i matematik. Syftet är i huvudsak formativt på så sätt att diagnoserna ska ge lärare ett underlag för planering av undervisning som skapar goda förutsättningar för eleven att nå uppställda kunskapsmål. Det är ett material som lämpar sig utmärkt för att som pedagog kunna uppdatera sig om elevernas status i matematik. Materialet omfattar bl.a. området om grundläggande aritmetik som innehåller ett avsnitt som behandlar divisionstabell. (Skolverket 2009).

I detta test förekommer inte bara inverser till multiplikationstabellen såsom $48 \div 6 = 8$ utan även $49 \div 6 = 8$ rest 1, $50 \div 6 = 8$ rest 2 osv. Detta är avgörande förkunskaper som eleverna bör ha förståelse för om de ska kunna lösa uppgifter med både lång och kort division. Eftersom uppgifterna i just denna här diagnosen är en viktig förkunskap till division, såväl i huvudet som med hjälp av skriftlig räkning, bör eleven behärska dem med flyt. Nedan visas några exempel på hur divisionsuppgifterna kan se ut i Diamant (Skolverket 2009).

$$18 \div 6 = _ \quad 32 \div 8 = _ \quad 72 \div 9 = _ \quad 52 \div 7 = _ \text{ rest } _ \quad 39 \div 9 = _ \text{ rest } _$$

Enligt målen för kursplanen i matematik skall eleven senare ges möjlighet att utveckla och fördjupa sina kunskaper och skall i slutet av det femte skolåret ”förstå och kunna använda addition, subtraktion, multiplikation och division /.../”. Uppgifterna i exemplet ovan är ett test på om eleverna har tillskansat sig de förkunskaper som de behöver för att kunna gå vidare med nästa nivå. I denna nivå skall eleverna kunna räkna ut följande tal.

1. I en skola finns 7 klasser med lika många elever i varje. På skolan finns det sammanlagt 154 elever. Hur många elever finns det i varje klass? Svar: _____
2. När Lisa hade delat ut reklam fick hon 432 kr. Hon hade då arbetat i 6 timmar. Hur mycket tjänade hon i timman? Svar: _____

Om eleverna fått med sig läsförståelsen, någonting de borde ha med sig när de går i årskurs fem, borde de kunna se att det som efterfrågas i uppgifterna är $154 \div 7 = _$ och $432 \div 6 = _$. Det är ganska elementära kunskaper som elever i årskurs fem borde kunna behärska utan större problem.

5.22 Gemensam nämnare

Man har genom fallstudier av ett antal skolor noterat att den gemensamma nämnaren för de skolor som hade den högsta måluppfyllelsen var en organisation av och/eller storlek på skolan som skapade få och nära relationer mellan lärare och elever. Genom relativt få lärare på få elever kan lärare få en närmare relation till eleverna och en bättre bild av deras sociala situation i och utanför skolan samt deras utveckling i förhållande till skolans mål. Skolorna präglas av social kontroll vilken medför att eleverna inte hamnar utanför (Skolverket, 2005a). Det är samma slutsatser som man talar om när det gäller de finländska skolorna i rapporten *År Finlands sak vår?* (Skolverket 2005).

Läsåret 1992/93 gick cirka 887 000 elever i den svenska grundskolan (Skolverket, 2002). Fem år senare var elevantalet 984 000 och läsåret 2003/04 hade antalet elever ökat till cirka 1 046 000 (Skolverket, 2004a). En markant ökning av antalet elever i den svenska grundskolan har således ägt rum sedan tidigt 1990-tal vilket har ställt högre krav på skolsystemet. I Finland ser den demografiska utvecklingen annorlunda ut. Sedan början av 1990-talet har inte antalet

elever i grundskolan förändrats nämnvärt utan de senaste 15 åren har antalet elever varit mellan ungefär 590 000 och 600 000 (Statistikcentralen 1998, WERA 2005) (Skolverket, 2005).

5.23 Slutsats

EU:s utbildningsministrar har 2009 genom Europeiska Kommissionen satt upp ett gemensamt mål baserat på två rapporter från november 2011 som skall vara uppfyllt senast i slutet av detta årtionde. Målet är att andelen femtonåringar med otillfredsställande färdigheter i matematik, naturvetenskap och läsning skall vara mindre än 15 %. Andelen svenska elever som ligger över gränsvärdet är idag 22 %. Regeringens beslut som grundade sig på Skolverkets nationella utvärdering av grundskolan (NU-03) som visar att Sverige behöver göra stora satsningar inom matematikundervisningen i skolan bekräftar det som resultaten visar. Undersökningen som bl.a. visar att lärarledda genomgångar har minskat drastiskt och enskilt arbete ökat. Det kan vara en av orsakerna till de försämrade resultaten. Undervisningen måste gå ut på att få med sig eleverna i det matematiska tänkandet. De måste få rätt grundförutsättningar för att kunna ställa upp och logiskt kunna resonera sig fram till olika typer av uträkningar. Alla Sveriges skolor måste bli mer medvetna och ta rätt beslut. Rätt resurser måste styras till rätt elev efter behov. Lärarna måste få en chans att vara de lärare de kan och vill vara (Sirén, 2010).

Enligt samma rapporter är motsvarande siffra för Finland 8 %, de har den lägsta andelen elever som inte når de uppsatta målen. Men Finland skiljer sig inte så mycket från andra länder i västvärlden. De har varit ungefär samma utveckling där som i de flesta andra länderna inom matematikundervisning. Det var under 1990-talet som en stor förändring skedde, både i samhället och i skolan. Datorer kom in i det finländska skolsystemet och det blev en reform i matematikundervisningen. Därefter sökte Finland nya visioner om hur man bäst lärde sig matematik. De tittade bl.a. på hur det såg ut i Sverige. Man lade fram ett förslag om en målorienterad läroplan. Forskningen kring matematikundervisning visade att eleverna lär sig matematik på flera olika sätt och att de finländska lärarna har friheten att välja vilka metoder som skall användas.

Monika Johansson, doktor i matematik och lärande vid Luleå tekniska universitet, har på uppdrag av Skolverket jämfört och analyserat skillnader mellan de svenska och finländska styrdokumenterna. Hennes slutsats var att de finländska styrdokumenterna är mycket tydligare i sin styrning än vad de svenska styrdokumenterna är (Johansson & Koskela, 2009). Matematikresultaten visar att den finländska skolan har lyckats väl i olika avseenden och att Sverige skulle kunna dra lärdomar av hur vårt östra grannland arbetat med dessa frågor.

6. Metod

En komparativ studie med en kvantitativ ansats av Sveriges och Finlands matematikresultat i PISA har genomförts samt en studie över de svenska elevernas matematikresultat i TIMSS. Resultatet av studien presenteras i form av stapeldiagram som gör det lätt att jämföra de båda ländernas resultatkurvor i respektive undersökning. Anledningen till att jag valt att jämföra resultaten vid så många olika tillfällen är att statistiskt kunna analysera de två ländernas utvecklingskurvor, och därmed kunna göra så kallade trendanalyser. Då de bägge studierna riktar sig till många deltagande länder (2007 deltog 59 länder i TIMSS, 2009 deltog 66 länder i PISA) kan man också analysera de båda ländernas resultat vid en internationell jämförelse. Sammantaget ger dessa studier oss en kunskap om hur de svenska och finländska eleverna presterar i matematikdelen i undersökningarna, därmed ges validitet åt resultatet. Vid en

analys av de båda ländernas resultat i matematik framgår det tydligt av stapeldiagrammen att de finländska eleverna presterar bättre i PISA än vad de svenska eleverna gör. Genom att jämföra resultaten vid de olika mättillfällena framträder en tydlig tendens av att de svenska resultaten i matematik försämras över tid samtidigt som de finländska resultaten förbättras. För de svenska elevernas del är det en betydande försämring vad gäller matematik och det är pojkarna som har tappat mer än flickorna. Sveriges resultat i matematik 2009 är betydligt lägre än 2003. Det är vi som har försämrat oss i Sverige och inte så att de andra länderna har förbättrat sina resultat jämfört med oss (Anita Wester, Skolverkets projektledare för PISA 2009). Samma utvecklingskurva vad det gäller de svenska elevernas matematikresultat går att skönja även i TIMSS. Därmed får man anse att tolkningen av de båda ländernas resultat i undersökningarna är reliabel. Då jag enbart fokuserat på de båda ländernas sammantagna resultat i PISA och i TIMSS finns det ingen risk att någon person kan känna sig utpekad. Därmed finns det inte heller några etiska personfrågor att ta hänsyn till.

En jämförande studie av hur man lärt ut räknesättet division i svenska skolan under 1900-talet är genomförd. Från Celsius i början av 1900-talet till dagens korta division. Vidare har jag studerat vilka metoder använder man sig av för att räkna division i Sverige och Finland idag. Studien omfattar fyra svenska matematikbäckers uppgifter i räknesättet division. Resultatet av studien visar läromedelsförfattarna till de svenska matematikböckerna väljer att enbart fokusera på algoritmen för kortdivision. I böckerna, *Matematikboken X*, s.15, *Matematikboken Klara, färdiga G*, s.10 och 35 och framförallt boken *Matematikboken Extraboken fördjupning X Y Z* s. 98-99 för skolår 7-9, utgivna av förlaget Liber finns enbart kortdivision. Likadant är det i boken *Matte direkt*, s. 12-13 utgiven av Bonniers förlag, enbart kortdivision där också. I ett försök att få tag i de matematikböcker som används i den finländska grundskolan idag har jag sökt på ett flertal bibliotek utan framgång. Jag har också skickat följande mail, ca 15-20 stycken, till olika bokförlag och matematiklärare både i Finland och i Sverige (finska skolan) för att kunna göra en jämförande studie i de två ländernas sätt att lära ut division.

I Sverige har vi gått från "trappan" till "liggande stolen" för att de senaste 20-25 åren endast lärt ut kort division i grundskolan. Därmed så kan de svenska eleverna inte räkna division med flersiffriga nämnare. Min fråga gäller vilken/vilka metoder som används i den finländska skolan för att räkna division? Hur är de finländska elevernas kunskaper i division med flersiffriga nämnare? Vill du vara vänlig att maila exempel på hur divisionsuppgifterna ser ut i någon/några av följande finländska matematikböcker till mig så att jag skulle kunna genomföra en jämförande studie mellan de båda ländernas matematikböcker om sättet att lära ut samt att räkna division?

Pi 7 - Matematik för åk 7-9. Heinonen m.fl. - Lindgrén - Mitts - Söderback

Pi 8 - Matematik för åk 7-9. Heinonen m.fl. - Lindgrén - Mitts - Söderback

Matematikens värld. Metiäinen m.fl. - Mitts - Söderback

Matematik med färgstavar. Kairavuo - Voutilainen

Tack på förhand

Mikael Lyckros

Av alla de personer som jag mailade till så var det endast en som svarade mig. Ann-Sofi Røj-Lindberg, universitetslärare i matematikdidaktik vid Åbo Akademis Pedagogiska fakultet i Vasa. Hon gav mig följande svar: "I våra skolor används alla tre metoderna: kort division, trappa och liggande stol. Tyvärr kan jag inte ge något forskningsbaserat svar beträffande våra elevers kunskaper i division med flersiffrig nämnare. Med bästa hälsning Ann-Sofi Røj-Lindberg." Därför har jag inte haft någon möjlighet att genomföra den tänkta studien.

6.1 Urval

För att försöka få en så rättvis bild som möjligt av hur svenska och finländska elevers matematikkunskaper står sig i en internationell jämförelse föll mitt val på PISA. Det är en internationellt etablerad studie som bl.a. undersöker elevers matematikkunskaper. Under vårterminen 2003 genomfördes den andra huvudinsamlingen inom PISA, varvid sammanlagt 41 länder deltog inklusive samtliga 30 OECD-länder. I Sverige deltog drygt 4 600 elever fördelade på sammanlagt 185 skolor. Ett statistiskt representativt urval av den femtonåriga elevpopulationen gjordes i respektive deltagande land. I urvalet tas hänsyn till demografiska aspekter, varför såväl skolor i storstäder/tätorter som skolor i glesbygd är representerade. Syftet med PISA är att undersöka i vilken utsträckning femtonåringar är förberedda att klara sig i samhället. Det handlar därför om alla tänkbara sammanhang vilka man sannolikt möter som vuxen, i exempelvis arbete, socialt liv och utbildning (Skolverket, PISA, 2005). Sverige har även deltagit i TIMSS-undersökningen i matematik 1995, 2003 och 2007. Här försöker man så långt det är möjligt att följa respektive lands kursplaner, därför är matematikuppgifterna annorlunda utformade i jämförelse med hur de är utformade i PISA. Tendensen visar att de svenska resultaten i TIMSS följer ungefär samma nedåtgående kurva som resultaten i PISA. Matematikresultaten är hämtade på <http://www.pisa.oecd.org> och <http://nces.ed.gov/timss/>. Matematikböckerna som jämförts är de svenska *Matematikboken X*, *Matematikboken Klara*, *färdiga G* och *Matematikboken Extraboken fördjupning X Y Z* för skolår 7-9. I de tre böckerna utgivna av förlaget Liber finns enbart kortdivision. Boken *Matte direkt*, utgiven av Bonniers förlag innehåller också bara kort division.

6.2 PISA 2003, matematikdelen

I Skolverkets rapport om matematikresultaten 2003 presenteras de 37 frisläppta uppgifterna i matematik av de totalt 85 uppgifterna med fokus på 15-åringars kunskaper i matematik. De övriga, sekretessbelagda, uppgifterna kan komma att användas i framtida datainsamlingar i PISA och är därför inte tillgängliga. De båda nedanstående matematiska problem innehåller räknestätt division (eleverna ska ha tillgång till miniräknare vid arbetet med uppgifterna). I det första exemplet finns fyra olika resultat redovisade. Finland, Sverige, Hongkong och OECD-medelvärde. Där framgår att Sverige ligger över medelvärdet. Det andra exemplet innehåller endast Sveriges poäng i jämförelse med övriga OECD-länder. Tyvärr framgår det inte av rapporten vilka räknepel de svenska eleverna gjort. Vad man kan konstatera är att endast 45 % av eleverna svarade rätt (*Exempel 2. Prov i no-ämnena, PISA 2003*). Det är en anmärkningsvärt låg siffra. Det innebär att över hälften av de 4600 svenska eleverna som deltog i undersökningen inte kunde rätt svar. Variationsbredden inom OECD låg på 24–67 %, i det perspektivet kan man se att Sverige ligger i mitten. I PISA ligger fokus på matematiska problem som eleven kan möta i sitt vardagliga liv (mathematical literacy).

An individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen. (OECD 2007)

- PISA 2003 hade:
 - ... 85 uppgifter i matematik ...
 - ... delat i 13 olika provhäften ...
 - ... under 2 timmars svarstid.
- 2/3 av uppgifterna var öppna och 1/3 i flervalsformat.
- Eleverna fick använda miniräknare.

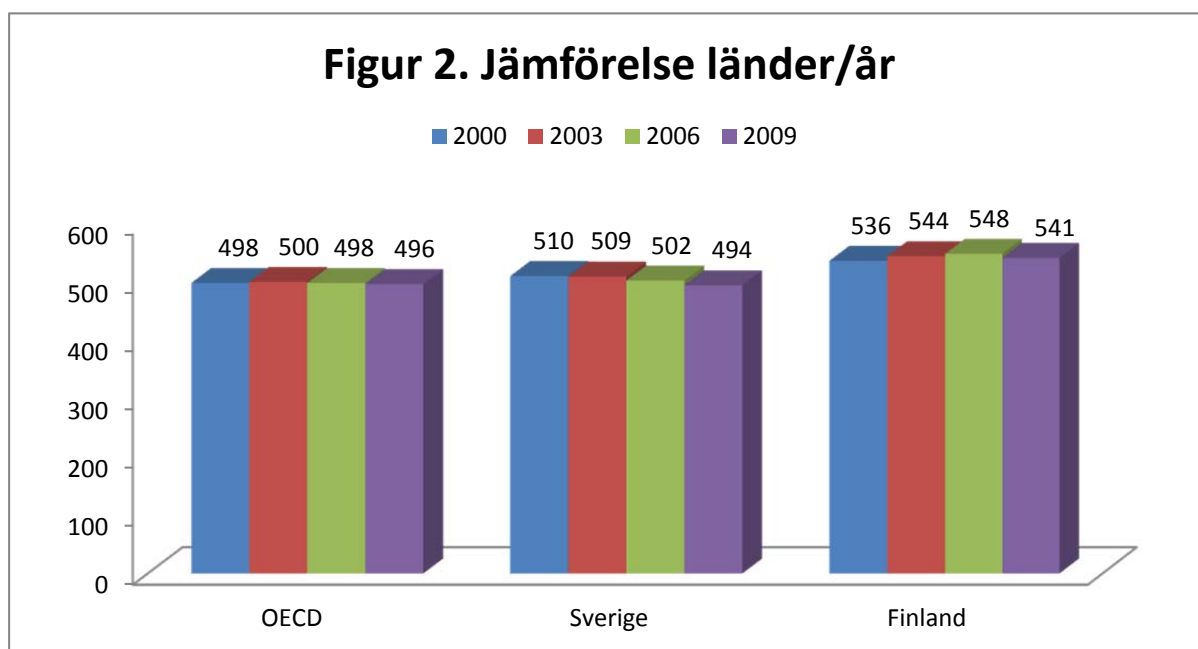
7. Resultatredovisning PISA

Nedan följer en studie av en serie diagram över matematikresultaten i PISA-undersökningarna 2000 – 2009. Både Sverige och Finland har deltagit vid samtliga fyra tillfällen som PISA har genomförts. I PISA kan man lätt följa de båda ländernas resultatkurvor och därmed blir det enkelt att utläsa tendenserna för de två länderna, både i resultatjämförelse med sig själv samt mot varandra.

Exempel på invändningar mot resultaten i PISA-undersökningarna i matematik man skulle kunna framföra beskrivs av Michael Uljens i sin rapport *PISA-resultaten i Finland. Perspektiv på och förklaringar till framgången*. Uljens skriver att utvärderingen skall vara internationellt jämförbar, vilket Uljens hävdar att rapporten inte är. Varken skolor, skolsystem eller traditioner har beaktats. I PISA-rapporterna får vi inget veta om vilka villkor som gäller vid jämförelsen av undersökningsresultaten mellan olika kulturer. Ingen medvetenhet om den komparativa pedagogikens insikter kan identifieras. Utvärderingen har faktiskt genomförts utan att beakta vad enskilda länder eftersträvat med sin skola. Uljens uppfattar detta som ytterst problematiskt. Ytterligare kritik Uljens framför är att en del av de uppgifter som använts i PISA för att mäta matematisk kompetens har varit oklara. Vid flera frågor har flera svarsalternativ kunnat betraktas som rimliga, d.v.s. som "rätta" svar, beroende på hur de mångtydiga uppgifterna tolkats av eleverna.

7.1 Jämförelse länder/år PISA

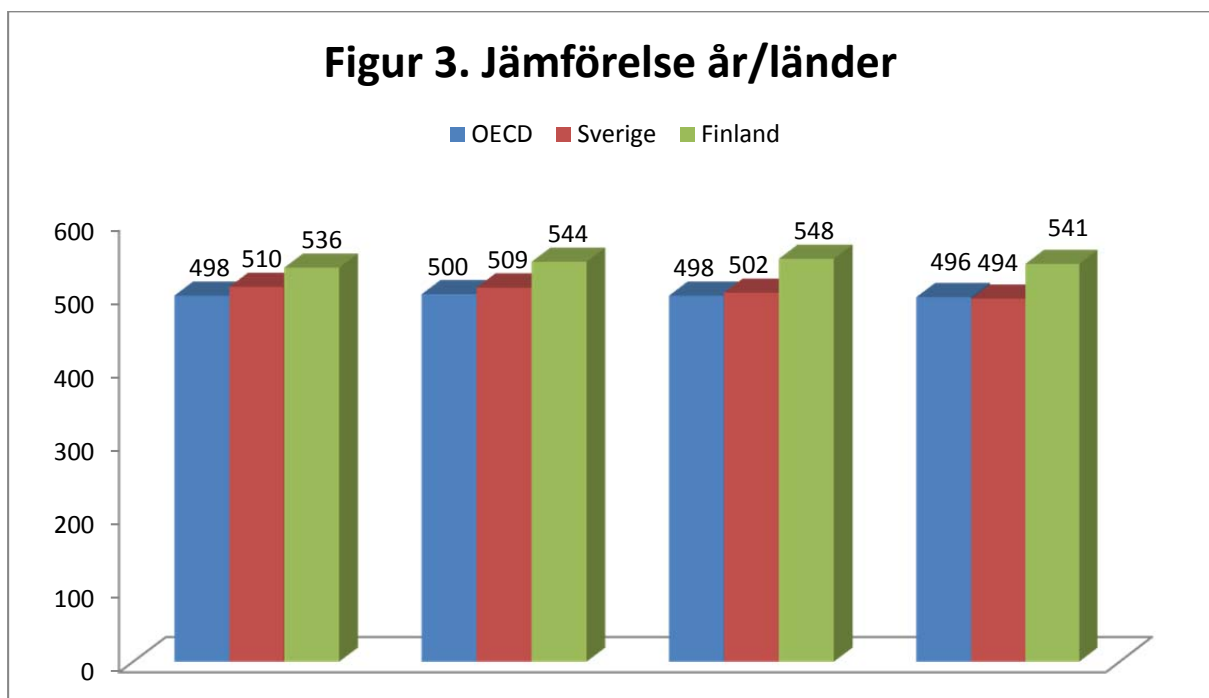
I nedanstående diagram görs resultatjämförelser nationsvis. Sverige, Finland och övriga OECD-länders resultat vid alla fyra tillfällen som PISA har genomförts, ligger tillsammans årsvis. I diagrammet kan man jämföra ländernas egna resultat och enkelt få en klar överblick över resultatutvecklingen vid de olika testerna. Man kan tydligt urskilja Sveriges försämrade resultat för varje test likaväl som man tydligt kan urskilja Finlands förbättrade resultat de första tre testerna och den lilla dippen vid det fjärde tillfället. OECD-ländernas resultat ligger på en ganska stabil nivå och deras medelvärde har inte förändrat sig nämnvärt över de fyra testerna (se figur 2).



Figur 2. Genomsnittsvärdet för de svenska eleverna i relation till resultaten i andra OECD-länder i PISA undersökningarna 2000-2009.

7.2 Jämförelse år/länder PISA

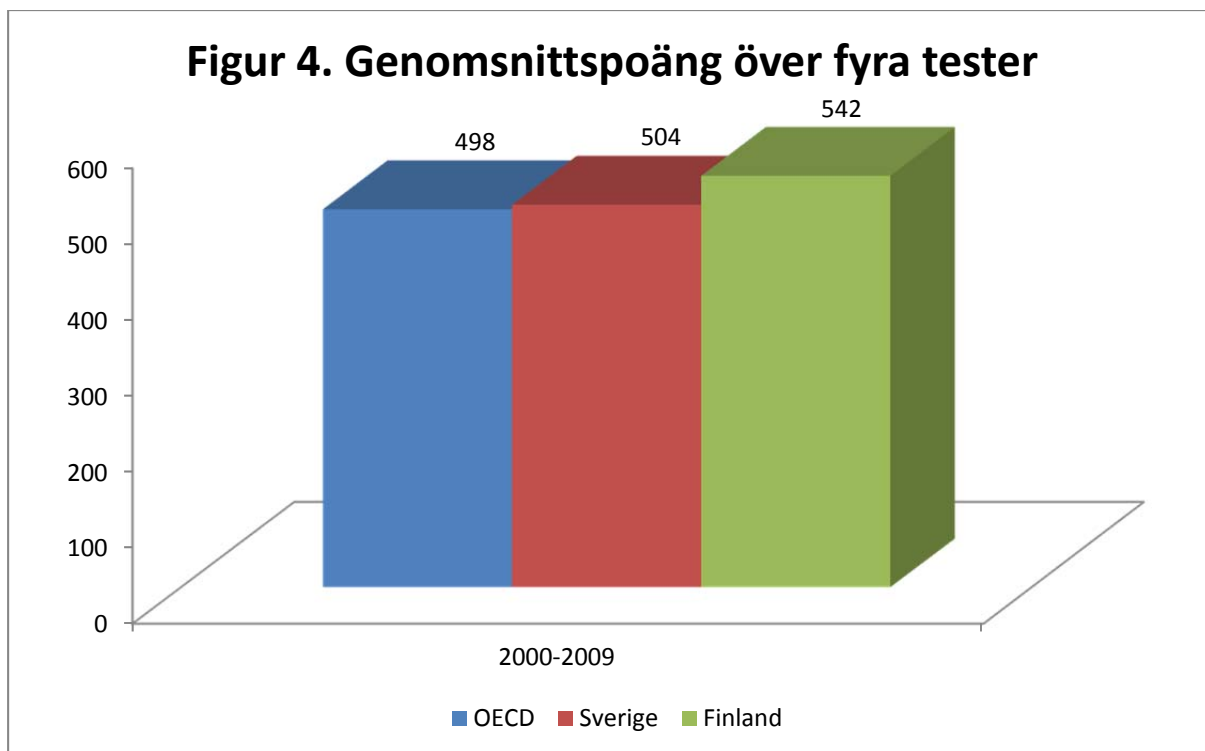
I nedanstående diagram görs resultatjämförelser mellan länderna årsvis. Ländernas staplar ligger intill varandra vid varje mättillfälle. Det som tydligt framträder är Finlands överlägset bättre resultat jämfört med övriga länder. Man kan också klart och tydligt se på Sveriges stapel att resultatet i jämförelse med OECD-länderna sjunker anmärkningsvärt mycket. Från att ha legat på ett genomsnittligt värde som låg 12 poäng högre än OECD-länderna, för att sjunka till ett värde som är två poäng sämre över dessa fyra tester. Sverige har tappat 14 poäng mellan det första och det senaste mättillfället och har för närvarande det sämsta poängsnittet av de jämförda länderna. I detta stapeldiagram framgår det tydligt att OECD-ländernas kurva ligger på ungefär samma nivå vid de fyra olika mättillfällena. Finlands kurva ökar vid de tre första mätningarna för att sjunka vid det fjärde tillfället och Sveriges kurva går utför. Från att "bara" ha varit 26 poäng bakom Finland vid det första genomförandet till att tappa ytterligare 19 poäng och öka skillnaden i poäng till hela 45 poäng bakom vid senaste mätningen (se figur 3).



Figur 3. Genomsnittsvärdet för de svenska eleverna i relation till resultaten i andra OECD-länder i PISA undersökningarna 2000-2009.

7.3 Medelvärde PISA

Det tredje diagrammet visar på ett genomsnittsvärde för de olika länderna vid de fyra olika mättillfällena. Det framgår med tydlighet vilket genomsnittsvärde de svenska eleverna fick på testerna i relation till resultaten i andra OECD-länder i PISA undersökningarna 2000-2009. Staplarna visar ett genomsnittsvärde baserat på poängen vid de fyra tester som gjorts sedan starten av PISA 2000. Av resultatet kan man utläsa att OECD-länderna ligger stadigt på 498 poäng, det värdet verkar inte förändra sig något nämnvärt. Sveriges resultat ligger ungefär i mitten av sitt bästa och sämsta resultat. Finlands resultat är en kopia av det svenska, det ligger också i mitten av sitt bästa och sämsta resultat (se figur 4).

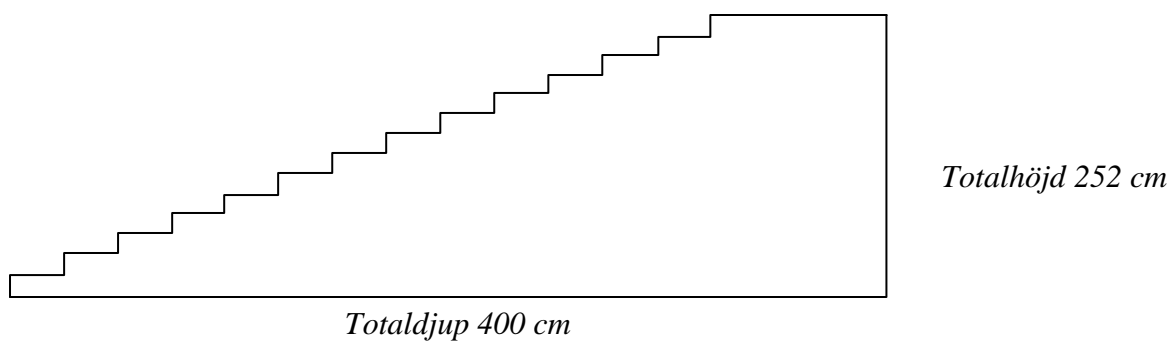


Figur 4. Genomsnittsvärdet för de svenska och finländska eleverna i relation till resultaten i OECD-länderna i PISA undersökningarna 2000-2009.

7.4 Matematikuppgifter i PISA 2003

Exempel 1. Trappan, PISA 2003.

Figuren nedan visar en trappa med 14 trappsteg och en totalhöjd på 252 cm. Hur högt är vart och ett av de 14 trappstegen?



Tabell 1. Lösningfrekvens i procent. Uppgift: trappan, PISA 2003 (%)

Finland	85
Sverige	82
Bäst (Hongkong)	87
OECD-medelvärde	78

Tabell 1. Jämförelse av antal rätta svar i procent bland de deltagande länderna.

Exemplet ovan handlar om att räkna ut trapphöjden i trappan som visas på bilden. För att lösa problemen rätt, måste eleven dividera totalhöjden (252 cm) med antalet trappsteg (14). Svaret är 18 cm. De höga lösningsfrekvenserna både internationellt och nationellt visar att uppgiften var lätt och att eleverna inte hade några stora svårigheter att utföra divisionen med hjälp av miniräknare. Finland hade något bättre resultat än Sverige.

Exempel 2. Prov i no-ämnena, PISA 2003.

I Malins skola ger hennes no-lärare prov där man kan få maximalt 100 poäng. På de fyra första no-proven har Malin fått 60 poäng i genomsnitt. På det femte provet fick hon 80 poäng. Vilken poäng får Malin i genomsnitt på de fem proven i no-ämnena?

Tabell 2. Lösningfrekvens i procent. Uppgift: no-prov, PISA 2003	(%)
Sverige	45
OECD-medelvärde	47

Tabell 2. Jämförelse av antal rätta svar i procent bland de deltagande länderna.

Exemplet med no-proven handlar om att få fram ett medelvärde på de fem no-proven. För att kunna lösa detta problem måste eleven börja med att addera de fem resultaten ($60+60+60+60+80 = 320$). Därefter skall eleven dividera summan med 5 (antalet prov). Det ger följande: ($320 \div 5 = 64$). Svaret är 64 poäng. Det framgår inte i rapporten vilka räknefel eleverna har gjort i uppgiften. Det anmärkningsvärda är att över hälften av de svenska eleverna inte äger de basala kunskaper som krävs för att räkna ut den relativt enkla uppgiften. Även medelvärdet inom OECD-länderna är anmärkningsvärt lågt.

7.5 Resultatsammanfattning PISA 2000-2009

Staplarna i diagrammen ovan (figurerna 2 – 4) visar respektive länders samt OECD-ländernas kurvor jämförda med sina egna resultat under perioden. Man kan konstatera att Sveriges resultat har sjunkit med hela 16 poäng i PISA 2009 jämfört med PISA 2000, det är en anmärkningsvärt stor nedgång. Den största försämringen skedde i mellan åren 2006 och 2009 då de svenska eleverna presterade ett resultat som var åtta poäng lägre än vid föregående undersökning. Det är en oroande trend som de svenska eleverna följer. De finländska eleverna däremot har gått från klarhet till klarhet. De presterar resultat som placerar dem högt upp vid varje undersökning, 4-1-1-2 är deras placeringar. Deras resultat har ökat med fem poäng under samma period. OECD-ländernas medelpoäng har legat och pendlat mellan 496-500 poäng vid varje tillfälle som undersökningen har genomförts. Skillnaden i resultatlistorna är den att vissa länder antingen har förbättrat eller försämrat sina resultat ganska rejält från en undersökning till nästa. T.ex. Luxemburg med sina 446 poäng år 2000 till 493 poäng år 2003, en förbättring med hela 47 poäng, eller Frankrike som försämrade sitt resultat på 511 poäng från år 2003 till 496 poäng år 2006, man tappade 15 poäng på de tre åren. Men det totala medelvärdet för OECD-länderna har legat still på ett stabilt värde.

7.6 Jämförelse av Sveriges och Finlands resultat PISA 2000-2009

Vid undersökningen 2000 användes 32 uppgifter i matematik för att utvärdera en del av elevernas funktionella kunskaper i matematik. Sverige ligger 12 poäng högre än genomsnittsvärdet. Totalt sett presterar elever i åtta OECD-länder (bl.a. Japan, Korea, Finland och Storbritannien) bättre än vad de svenska eleverna gör. Eleverna i tio OECD-länder (bl.a. Tyskland, Ungern, Portugal och Spanien) presterar ett sämre resultat. Det går inte att med

detta begränsade uppgiftsmaterial uttala sig om på vilka områden i matematik, som svenska elever är bättre respektive sämre än elever i övriga OECD-länder (Skolverket, PISA 2000).

2003 är det nio OECD-länder som har ett betydligt bättre medelvärde än Sverige (bl.a. Japan, Korea, och Finland, samma länder som i föregående undersökning). Storbritannien ingick inte i 2003 års undersökning men de hade 2004, ett signifikant bättre medelvärde i matematik än Sverige. Det är elva OECD-länder som har ett signifikant sämre medelvärde än Sverige (bl.a. Ungern, Portugal och Spanien, ingen skillnad mot 2000). Tyskland har förbättrat sig och ligger på samma nivå som Sverige. Svenska elever är bättre på uppgifter inom aritmetik, taluppfattning och sannolikhet, men sämre på uppgifter inom geometri och mätningar. Det är framför allt på uppgifter som är av rutinkaraktär där grundläggande kunskaper ska tillämpas, samt uppgifter som innebär att olika områden inom matematiken ska tolkas och användas som de svenska eleverna är bättre. Däremot är de svenska eleverna ofta sämre på uppgifter som kräver kritiskt tänkande, analys, reflektion samt kommunikation och argumentation (Skolverket, PISA 2003).

Det är tio OECD-länder som har ett signifikant bättre medelvärde än Sverige 2006 (bl.a. Japan, Korea, och Finland, återigen samma länder som föregående år). Storbritannien ligger sämre än Sverige vid denna undersökning (en klar försämring sedan 2004). 13 OECD-länder har ett mycket sämre medelvärde än Sverige (bl.a. Ungern, Portugal och Spanien är fortfarande sämre än Sverige). Sveriges resultat 2006 skiljer sig inte signifikant ifrån 2003 även om det uppmätta medelvärdet 2006 är 7 poäng lägre jämfört med 2003. För OECD som helhet syns inte heller någon signifikant skillnad. Även om Sveriges resultat inte har försämrats signifikant så är det värt att notera att svenska femtonåringar presterade signifikant över OECD-genomsnittet både i PISA 2000 och 2003 men i PISA 2006 skiljer sig Sveriges resultat inte längre signifikant från OECD-genomsnittet. År 2006 finns inte någon sådan skillnad, den är uttraderad (PISA 2006).

2009 finns det 14 OECD-länder (Japan, Korea och Finland, ingen skillnad från föregående undersökningar) som presterar ett betydligt högre resultat än Sverige i matematik. Sveriges medelvärde 2009, liksom år 2006, skiljer sig inte signifikant från OECD-medelvärdet i matematik. Jämfört med de nordiska länderna har dock situationen förändrats – förutom att Finland och Danmark presterar ett bättre resultat än Sverige gör även Island det 2009. Dessutom är Sveriges och Norges resultat inte längre signifikant skilda från varandra. Det är sammanlagt 10 OECD-länder som har förbättrat sina resultat i relation till Sverige sedan 2006. Bättre än Sverige har Island och Tyskland blivit, som år 2006 presterade ett resultat som inte skiljde sig från Sveriges. Följande länder presterade 2006 ett resultat som var sämre än Sveriges men presterar 2009 ett resultat som inte skiljer sig signifikant från Sverige: Storbritannien, Polen, Slovakien, Ungern, Luxemburg, Norge, USA och Portugal.

7.7 Slutsats av PISAS undersökning

År 2003 var matematik huvudområde och därför görs alla trendanalyser med 2003 som basår. År 2003 fixerades också huvudskalan i matematik till ett OECD-medelvärde på 500 poäng. Genomsnittet för de 28 OECD-länder för vilka det finns jämförbara resultat från 2003 är i PISA 2009 499 poäng, vilket inte är en signifikant förändring. Sveriges resultat 2009 har däremot sjunkit rejält jämfört med PISA 2003. Sverige ingår i en grupp av nio OECD-länder som uppvisar en nedgång i matematik jämfört med 2003, däribland Island, Danmark, Nederländerna och Belgien. Av de länder som förbättrat sina resultat finns bland annat Tyskland. Mexiko och Turkiet uppvisar de största förbättringarna med 33 respektive 22 poäng

högre resultat år 2009 jämfört med år 2003. I PISA 2003 var Sveriges resultat i matematik signifikant över OECD-genomsnittet men i PISA 2009 så är detta inte längre fallet.

Utgångspunkten i undersökningen är att mäta elevernas matematikkunskaper. PISA-undersökningarna i matematik lägger fokus på matematiska problem som eleverna skall lösa med hjälp av miniräknare om det behövs. Resultaten talar sitt tydliga språk. De svenska elevernas matematikkunskaper visar på tillbakagång, inte bara vid en jämförelse med Finland, utan även vid en internationell jämförelse. I avhandlingen *Ansvar för matematiklärande* från 2011 skriven av Åse Hansson kan man läsa följande:

Behovet att utveckla matematikundervisningen i svensk grundskola framstår som stort mot bakgrund av resultat från både nationella och internationella undersökningar. Svenska elever uppvisar en kraftig tillbakagång vad gäller matematikprestationer de senaste 15 åren och denna tillbakagång har skett från en relativt hög internationell nivå (Gustafsson & Yang Hansen, 2009; Skolverket, 2008b, 2009b). I internationell jämförelse hör Sverige till de länder som haft den kraftigaste tillbakagången under perioden (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie, & Turmo, 2004).

I avhandlingen beskriver Hansson (2011) även läroplansreformerna under 1900-talets andra hälft. Hur de har präglats av tveksamhet till sammanhållen matematikundervisning, vilket bland annat bidragit till att olika differentieringsåtgärder förekommit under längre tid i matematik än i de flesta andra skolämnen. I högstadiet (åk 7 – 9) kunde man välja på ”allmän” eller ”särskild” kurs. Det var dominerande ända fram till läroplansreformen 1994 eftersom differentiering sågs som ett lämpligt medel för individualiserad undervisning, detta trots att Läroplanen för grundskolan 1980 (Lgr80) föreskrev sammanhållen matematikundervisning (Lindensjö & Lundgren, 2002; Skolverket, 2008b).

I en rapport från Skolverket om matematikresultat i PISA har de kommit fram till följande slutsatser. När det gäller svenska elevers kunskapsutveckling enligt de sammanfattande resultaten från matematikproven i PISA sedan 2000 framgår det att försämringar skett i PISA som en svagare trend. I PISA-studierna visar sig de svenska elevernas kunskapsnedgång långt mindre uttalad under den aktuella sexårsperioden (8 poäng och inte signifikant (Skolverket, 2009). Hanssons (2011) beskrivning av det stora behovet att utveckla matematikundervisningen i den svenska skolan förstärks ytterligare av resultaten i Skolverkets rapport (Skolverket, 2009). Resultaten talar sitt tydliga språk. Finland presterar klart bättre matematikresultat i PISA än vad Sverige gör.

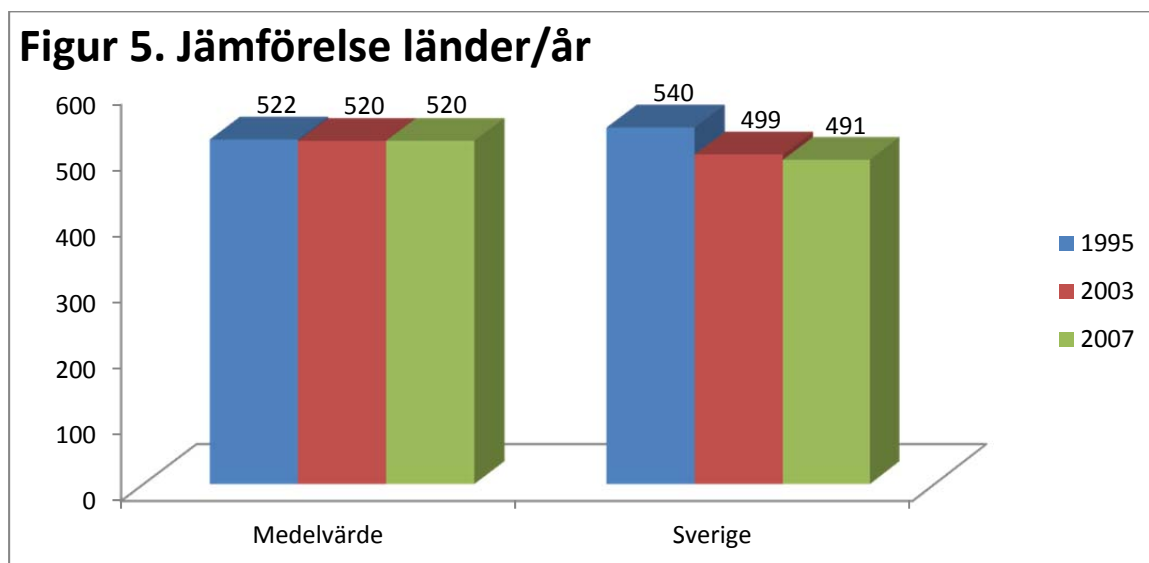
8 Resultatredovisning, TIMSS

I TIMSS har det varit svenskt deltagande vid tre tillfällen 1995, 2003 och 2007. Vad man kan utläsa av de svenska resultaten i TIMSS vid dessa tre tillfällen är att tendenserna i resultathänseende är detsamma som i PISA, det vill säga att de svenska eleverna presterar allt sämre för varje undersökning.

8.1 Jämförelse länder/år TIMSS

I nedanstående diagram görs resultatjämförelser mellan Sverige och medelvärdet för övriga deltagande länder vid de tre tillfällen som det varit svenskt deltagande i TIMSS. Resultaten ligger tillsammans årsvis. I diagrammet kan man jämföra Sveriges resultat med de övriga deltagande länderna och enkelt få en klar överblick över resultatutvecklingen vid de olika testerna. Man kan tydligt urskilja Sveriges kraftigt försämrade resultat mellan första och andra

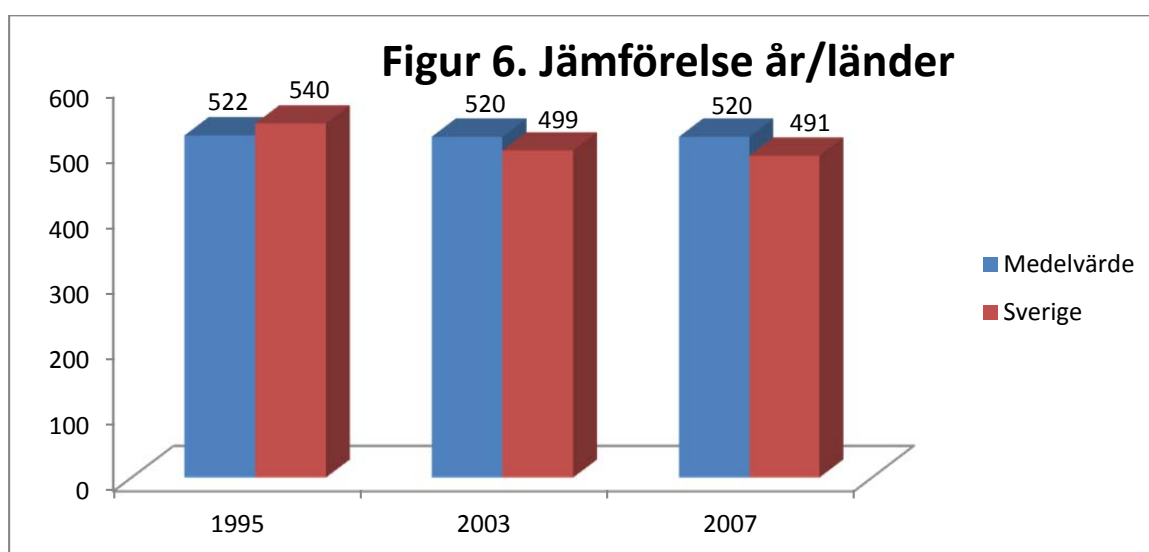
undersökningen (från 540 poäng till 499 poäng), resultatförsämringen mellan andra och tredje tillfället är inte alls lika stor, men följer en nedåtgående kurva (se figur 5).



Figur 5. Genomsnittsvärdet för de svenska eleverna i relation till resultaten för de övriga deltagande länderna i TIMSS undersökningarna 1995, 2003, 2007.

8.2 Jämförelse år/länder TIMSS

Det sjätte diagrammet visar på ett genomsnittsvärde för de olika länderna vid de tre olika mättillfällena. Det framgår med tydlighet vilket genomsnittsvärde de svenska eleverna fick på testerna i relation till resultaten för de övriga deltagande länderna i TIMSS matematikundersökningarna 1995, 2003 och 2007. Staplarna visar ett genomsnittsvärde baserat på poängen vid de tre tester där det varit svenskt deltagande. Av resultatet kan man utläsa att de övriga ländernas medelpoäng ligger stadigt runt 520 poäng. Sveriges deltagande inleds med ett resultat som ligger klart över medelpoäng för att därefter försämras vid varje tillfälle (se figur 6).



Figur 6. Genomsnittsvärdet för de svenska eleverna i relation till resultaten för de övriga deltagande länderna i TIMSS undersökningarna 1995, 2003, 2007.

8.3 Sveriges resultat i PISA och TIMSS

En jämförelse mellan de två undersökningarna PISA och TIMSS ger inte någon riktigt rättvis bild av resultatet eftersom de inte går att jämföra de båda undersökningarna då de är av olika art. Det man kan få ut av de båda undersökningarna är att Sverige visar en likartad resultatförsämring i de bägge testerna. Uppgifterna i PISA kan beskrivas som en individs medvetenhet om den roll matematiken spelar i dagens värld samt individens förmåga att fatta motiverade matematiska beslut och att kunna tillämpa matematik på ett sätt som motsvarar individens aktuella och framtida behov i livet som produktiv, engagerad och reflekterande samhällsmedlem. Fokuset ligger på matematiska problem, som eleven kan möta i sitt vardagliga liv. Uppgifterna i TIMSS skiljer sig klart från PISA. Ett centralt krav är att kunskaperna som provas ingår i många av de deltagande ländernas läroplaner och kursplaner. I stort sett är det gemensamma delarna i deltagande länders läroplaner och kursplaner, som definierar matematiken i TIMSS (Törnroos, 2005).

9 Slutdiskussion

PISA:s mål med matematikundersökningen i de olika länderna är att utvärdera elevernas förmågor att integrera och tillämpa matematiska kunskaper och färdigheter i en mängd realistiska situationer s.k. mathematical literacy (OECD 2007). Det innebär att eleven behöver förstå matematik som en meningsfull problemlösande aktivitet som de kan finna överallt i vardagen. Drygt var femte elev i Sverige, d.v.s. att 20 procent, når inte den prestationsnivå som anses nödvändig för att klara de krav på matematisk kompetens som de förväntas möta i vuxenlivet. En förklaring till resultatet kan vara de svenska styrdokumentens utformning. En konsekvens av det kan vara att läromedelsförfattarna i Sverige har väldigt svårt att göra en matematikbok som stämmer överens med kursplanens intentioner och som kan följa styrdokumentet lika nära som de gör i Finland (Johansson, 2006).

Men vad är det då PISA har mätt i sina matematikundersökningar? Som de finländska eleverna uppenbarligen är mycket bättre på än sina svenska kamrater. Är det matematisk problemlösningsförmåga eller är det läsförståelse? Om man läser noga vad det är matematikdelen i PISA-undersökningen ska mäta så står det att de uttryckligen mäter mathematical literacy (OECD 2007). Man skulle ordagrant kunna översätta det med matematisk läs och skrivkunnighet eller praktisk matematisk problemlösningskompetens. Det handlar om att eleverna skall ha förståelse för hur de kan lösa matematiska problem i sin vardag. Matematiska problem i vardagen är ofta relativt enkla. Exempel, om du skall bygga ett staket runt gräsmattan som har måtten X lång och Y bred, hur många meter staketet behöver du då? Ett ganska enkelt vardagligt problem. Det är precis som George Polya skriver i sin bok, nämligen att lika viktig som matematikkunskapen i sig är för att kunna komma fram till lösningen på problemet är läsförståelsen. Eleverna måste även förfoga över den kunskapen för att kunna lösa många av de matematiska problem de kan ställas inför. Eleven måste förstå problemet för att kunna lösa det. Detta innebär att en elevs språkliga läsförmåga eller läsfärdighet kommer att ha konsekvenser för hennes möjlighet att lösa matematiska problem (Polya 2005).

Varför presterar Finland så mycket bättre än Sverige i matematikdelen i PISA-undersökningarna?

En förklaring kan vara att de finländska styrdokumentet är mycket tydligare i sin styrning än sin svenska motsvarighet. Det i sin tur gör det mycket enklare för de finländska läromedelsförfattarna genom att styrdokumentet mycket distinktare visar vad eleverna skall lära sig under vilket skolår. Det innebär att läromedelsförfattarna i Finland kan arbeta väldigt

tight enligt läroplanen vid utformandet av läromedel (Johansson & Koskela, 2009). I PISA fokuserar de mera på finländska elevers starka områden i matematik (Törnroos 2005). De finländska matematikböckerna innehåller en större andel problemlösande uppgifter. Detta skulle kunna vara en anledning till varför finländska elever lyckas bättre i de internationella undersökningarna gällande problemlösning (Brännström & da Luz Reis, 2007). PISA resultaten visar att kunskapscentreringen inte betyder att de finländska eleverna enbart behärskar s.k. ”korvstoppling” ur läromedelsböcker. Eleverna äger också kunskaperna som de behöver för praktisk matematisk problemlösningskompetens. PISA:s undersökningar har inte utgått från de enskilda ländernas läroplaner, de har testat de deltagande ländernas elever i ”mathematical literacy”, vardaglig matematisk problemlösningskompetens. Utan tvekan är finländska elevers starkaste område tolkning av olika slags representationer av data (diagram, tabeller, osv.) (Törnroos 2005).

En tolkning av de svenska elevernas resultat i matematikundersökningen i PISA kan vara att undervisningen i matematik i den svenska skolan inte längre verkar ge eleverna den kunskap i matematik som krävs för att nå de höga resultat som de gjorde i den första PISA-undersökningen 2000. Vid en analys av de svenska styrdokumentens utformning visar det sig att det är svårt för läromedelsförfattarna i Sverige att göra en matematikbok som stämmer överens med kursplanens intentioner och som kan följa styrdokumentet så nära som de gör i Finland (Johansson och Koskela 2009). Det kan vara en av orsakerna till att regeringen har arbetat fram en utvecklingsplan för kvalitetsarbetet i förskola, skola och vuxenutbildning. I planen är matematikutbildning beskrivet som ett strategiskt utvecklingsområde. Resultatet av regeringens satsning på att utveckla matematikkunskaperna i skolan är bl.a. införandet av lärarlegitimationer den nya läroplanen Lgr 11 vilka båda syftar till att förbättra både pedagogerna och eleverna. Den negativa trenden med bristande kunskaper och elever som inte har godkända betyg i kärnämnen och därmed inte är berättigade till att söka gymnasieutbildning i det svenska skolsystemet skall brytas, vilket ligger helt i linje med EU:s utbildningsministrars gemensamma mål från 2009. De beslutade att sätta upp ett gemensamt mål om att andelen femtonåringar med otillfredsställande färdigheter i bl.a. matematik skulle vara mindre än 15 % senast 2020. ”Alla som påverkar skolan måste släppa sin prestige och sluta leta syndabockar. Vi behöver en nationell samling över blockgränserna och mellan stat och kommun som fokuserar på det som både forskningen och lärarna vet ger resultat” säger Lärarförbundets ordförande Eva-Lis Sirén (OECD 2010). Skolorna i Sverige, det gäller alla, såväl statliga, kommunala som privata skolor måste bli mer alerta och medvetna. Det är av största vikt att de resurser som skall sättas in måste anpassas till elevernas behov. Lärarna måste få en chans att vara de lärare de kan och vill vara. När man som lärare ser en elev med stora behov möts man idag oftast av beskedet att det inte finns några resurser till stöd. Det är dags att lyssna till lärarna som vet vad som krävs och sluta föra debatten över deras huvuden (Sirén, 2010).

De skolorna som är framgångsrika arbetar mer självständigt samtidigt som självvärdering bland lärarna är ett starkt inslag (Sirén, 2010). På senare tid har hänvisningar till den finländska skolan duggat allt tätare. Man menar att den finländska skolan har lyckats väl i olika avseenden och att Sverige skulle kunna dra lärdomar av hur vårt östra grannland arbetat med dessa frågor. Den främsta anledningen till att Finland används som gott exempel inom skolans område är resultaten som finländska elever uppnått i den internationella undersökningen PISA.

De satsningar som genomförts i Sverige på senare år har enligt matematikdelegationen haft tillkortakommanden. 1986 publicerades departementsskrivelsen ”Matematik i skolan” som ett svar på de dåliga resultat i matematik som svenska elever uppvisade i

exempelvis IEA-studien SIMS 1980. Ett omfattande arbete inleddes. Bland annat utarbetades fortbildningslitteratur, en studiedag infördes och matematik fick en starkare ställning i lärarutbildningen. Många av de föreslagna insatserna kom dock aldrig att genomföras. Det tillfördes inte mer resurser för undervisning i mindre grupper och stödundervisning utan utvecklingen gick snarare åt motsatt håll. Antalet lärarutbildare på universitet och högskolor var inte tillräckligt, kompetensutbildning genomfördes endast i begränsad omfattning och föreslagna matematikdidaktiska forsknings- och utvecklingsarbeten blev inte av (Matematikdelegationen 2004).

Vilken/vilka metoder använder man sig av för att räkna division i Sverige och Finland?

Enligt Lgr 80 skulle alla elever under grundskoletiden förvärva grundliga kunskaper och färdigheter i additions- och subtraktionsalgoritmerna för tal upp till en miljon och upp till tre decimaler, i multiplikationsalgoritmen med två flersiffriga faktorer och divisionsalgoritm med ensiffrig nämnare. I Lpo 94 är målen som eleverna skall ha uppnått i slutet av det nionde skolåret beskrivna på följande sätt: ”Eleven skall ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel”. Med de målen i fokus samt att det idag väl knappast finns en mobiltelefon utan räknarfunktion och knappast några elever utan en mobiltelefon är det nog också svårt att hitta någon i dag som på fullt allvar hävdar att en divisionsalgoritm är en nödvändig kunskap i vardagen (Holt 2009). I Finland har de som mål för årskurskurserna 3 – 5 att eleverna skall lära sig grundläggande räknefärdigheter. Som centralt innehåll inom området tal och operationer finns algoritmer och huvudräkning (Ggl 04). ”I våra skolor används alla tre metoderna: kort division, trappa och liggande stol. Tyvärr kan jag inte ge något forskningsbaserat svar beträffande våra elevers kunskaper i division med flersiffrig nämnare” (Røj-Lindberg). För den som fortsätter att studera exempelvis till ingenjör behövs kunskapen om hur man löser en långdivisionsalgoritm. För att uppfylla kursplanen till fullo, så bör alla elever få en möjlighet att lära sig liggande stolen eller trappan och då borde den även finnas med i läroböckerna för högstadiet. Då skulle kanske de svenska eleverna som ligger under snittet i EU inom området talförståelse och aritmetik ha en chans att nå samma resultat som eleverna i Finland. Där har de inte bytt ut sin divisionsalgoritm, de t.o.m. fortsätter att räkna med den. Den frågan håller skolverket på och jobbar med nu (Holt 2009).

På NCM: s hemsida (Nationellt centrum för matematikutbildning) kan man ladda ned NämnarenTEMA-boken *Matematik - ett kärnämne*. Ett av kapitlen tar upp elevers och lärares syn på matematik och matematikundervisning utgående från den nationella utvärderingen av grundskolan 1992 att det handlar om att pedagogerna måste försöka att få eleverna att vara mindre fixerade vid det rätta svaret i facit på ett matematiktal/problem. Istället gäller det att försöka få eleverna att inse att det är själva resonemanget som leder dem fram till lösningen som är det viktiga. Samma tankar och åsikter som Polya framför i sin bok *How to Solve It (Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande, 2005)* som kom ut redan 1945. Vi kan skriva 1945, 1992 eller 2011 det verkar inte spela någon roll om det är dåtid eller nutid, det förefaller som om det är samma problem som både elever och pedagoger brottas med inom matematikundervisningen. Många elever har svårt för att beskriva sina tankar och resonemang och därmed får de problem med att uttrycka det i skrift. Det är viktigt att man som pedagog dels ger eleverna rätt verktyg för att kunna lösa det matematiska problem de ställs inför. Lika viktigt är att man försöker skapa ett bra klimat i sitt klassrum där man kan väcka elevernas nyfikenhet för matematiken. Därmed kan man få dem att förstå att de inte bara skall söka efter rätt svar utan också att vägen de väljer för att lösa problemet ger dem förståelse för problemet.

Får eleverna i de båda länderna lära sig att lösa en division med flersiffrig nämnare?

Under min egen grundskoletid 1969-1977 fick jag lära mig att räkna division med trappan, en metod som, rätt utförd, ger svar med ett antal decimaler. När det gäller räknesättet division så får de finländska eleverna lära sig trappan, liggande stolen och kort division (Røj-Lindberg). Detta talar för att de finländska eleverna får lära sig att lösa en division med flersiffrig nämnare så som var fallet för de svenska eleverna under tiden 1969-1977. De svenska eleverna däremot skall "bara" kunna en divisionsalgoritm med ensiffrig nämnare från och med införandet av Lgr 80. Min personliga åsikt, som verkar delas av bl.a. Holt och Røj-Lindberg är att elevernas resultat i divisionsräkning troligtvis skulle förbättras om pedagogerna, dels ger eleverna rätt verktyg och förkunskaper för att räkna med division samt mer katederundervisning. Kanske är det dags att man återinför räknesättet trappan eller liggande stolen i matematikundervisningen i den svenska skolan igen. Det skulle kunna ge de svenska eleverna sådana kunskaper i divisionsräkning att de skulle klara av att lösa en divisionsalgoritm med flersiffrig nämnare.

Resonemanget för mina tankar till en "*Historia från klassrummet*" (Johansson, B. 2006). Jag tycker att Johansson träffar mitt i prick med sin analys. Exakt när händelsen utspelade sig framgår inte av texten, men eftersom man från och med Lpo 94 endast använde sig av kort division i skolan så kan man anta att episoden utspelade sig för kanske 10-15 år sedan. Slutsatsen Johansson drar är målande för hur det såg ut i skolan då. Men konklusionen är, enligt min åsikt, tyvärr lika aktuell idag som någonsin förr. Historien lyder som följer:

"Vid ett besök i en skola för ett antal år sedan träffade jag en lärare som medvetet undanhållit divisionsalgoritmen för sina elever. Istället hade han låtit dem arbeta med huvudräkning och relativt fritt med att bokföra delberäkningar som de ansåg sig behöva. Jag fick under mitt besök tillfälle att hålla en lektion på egen hand med lärarens klass i årskurs 5. Jag skrev upp $834/6$ på tavlan och bad eleverna lösa uppgiften. De visade på tavlan upp ett stort antal varianter. Ingen elev använde den av Skolöverstyrelsen då rekommenderade *Liggande stolen*. På en direkt fråga från mig om det fanns något annat sätt räckte en elev upp handen, gick fram till tavlan och utförde snabbt och säkert divisionen i *Liggande stolen*. Det blev stor uppståndelse i klassen. Flera elever uttryckte spontant "va smart". På min fråga vem som lärt honom räkna på detta sätt svarade han "Pappa", matematiklärare på skolan och kollega till den lärare vars klass jag besökte. Pappan hade "i smyg" lärt sonen divisionsalgoritmen i strid mot den arbetsplan lärarna på skolan enats om och som förbjöd undervisning om standardalgoritmer. *Problemet med algoritmerna är inte matematiken utan undervisningen*".⁹

⁹ Min kursivering.

Referenser och referenslista

Litteratur och artiklar:

- Bergsten, Christer., Häggström, Johan. & Lindberg, Lisbeth (1997) *Algebra för alla*. Grafikerna Livréna i Kungälv, 2007.
- Löwing Madeleine & Kilborn Wiggo (2002) *Baskunskaper i matematik*. Lund: Studentlitteratur,
- Polya, George. (2005). *Problemlösning – en handbok i rationellt tänkande*. Stockholm: Norstedts Akademiska Förlag.
- Skolverket (2000) *Grundskolans kursplaner och betygskriterier*, s. 27. Stockholm: Statens skolverk och Fritzes
- Skolverket (2004a). *Beskrivande data 2004 – Förskoleverksamhet, skolbarnomsorg, skola och vuxenutbildning*. Stockholm.
- Skolverket (2005). *Är Finlands sak vår? En studie av Finland och Sverige mot bakgrund av PISA-resultaten*. pdf 1559.
- Skolverket (2005a). *Vad gör det för skillnad vad skolan gör? – Om skolors olikheter och deras betydelse för elevernas studieresultat*. Stockholm.
- Wigforss, Frits (1957). *Den grundläggande matematikundervisningen*. Stockholm: Bergvall

Elektroniska dokument:

- <http://books.bonline.se/reader/?type=mattedirekt&book=9&demo=true> Bonniers förlag (2011) *Matte direkt*. Hämtad 2011-11-21
- http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132EN.pdf Europeiska Kommissionen (2011). *Mathematics Education in Europe; Common Challenges and National Policies*. Hämtad 2011-12-28
- http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/133EN.pdf Europeiska Kommissionen (2011). *Science Education in Europe: National Policies, Practices and Research*. Hämtad 2011-12-28
- <http://epubl.ltu.se/1652-5299/2009/055/LTU-LAR-EX-09055-SE.pdf> Johansson, Viktor & Koskela, Oskari (2009). *Lärares val och tillämpning av läromedel i matematik*. Hämtad 2011-11-29
- <http://epubl.ltu.se/1402-1544/2006/23/LTU-DT-0623-SE.pdf> Johansson, Monica (2006) *Teaching mathematics with textbooks: a classroom and curricular perspective*. Hämtad 2011-12-21
- <http://europa.eu/rapid/pressReleasesAction.do?reference=IP/11/1358&format=HTML&aged=0&language=SW&guiLanguage=en> Europeiska Kommissionen (2011). *Låga resultat inom matematik och naturvetenskap hämmar Europa*. Hämtad 2011-11-22
- http://ncm.gu.se/media/downloads/karnamnet/001-010_karnamnet_inledning NCM Nämnamnaren (1995) *Matematik - ett kärnämne*. Hämtad 2011-12-09
- <http://nces.ed.gov/timss/> TIMSS. Hämtad 2011-12-16
- http://ncm.gu.se/media/namnaren/debatt/Algoritmer_Bengt_Johansson.pdf Johansson, Bengt (2006) *Elever har rätt att få lära sig räkna*. Hämtad 2011-12-07
- <http://su.diva-portal.org/smash/get/diva2:199055/FULLTEXT01> Brännström, Fredrik & da Luz Reis, Christopher (2007) *Matematikböcker i Sverige och Finland. En möjlig förklaring till att finländska elever är bättre på problemlösning än svenska elever*. Hämtad 2011-11-18
- http://sv.wikipedia.org/wiki/Liggande_stolen *Liggande stolen*. Hämtad 2011-11-16

<http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DD1340/inda09/algorithms/algoritmer/> KTH *Algoritmer*. Hämtad 2011-11-19

<http://www.fek.umu.se/~lw/diverse/matematikold.html> Skolverket *Lpo 94*. Hämtad 2011-11-17

http://www.minedu.fi/OPM/Julkaisut/2002/an_evaluation_report_on_the_luma_programme_prepared_for_the_mini?lang=sv Undervisnings och kulturministeriet (2002) *Internationell utvärderingsrapport av LUMA-programmet*. Hämtad 2011-11-23

<http://www.mynewsdesk.com/se/pressroom/lararforbundet/pressrelease/view/allt-saemre-skolresultat-i-ny-pisa-rapport-kraver-satsningar-538585> OECD (2010) *Allt sämre skolresultat i ny PISA-rapport kräver satsningar*. Hämtad 2011-11-22

<http://www.mypaper.se/show/smakprov/show.asp?pid=24532246117882&isbn=9121219713> *Matematikboken X*. Hämtad 2011-11-21

<http://www.mypaper.se/show/smakprov/show.asp?pid=24532424117882&isbn=9147018864> *Matematikboken Klara, färdiga G*. Hämtad 2011-11-21

<http://www.mypaper.se/show/smakprov/show.asp?pid=24532441017882&isbn=9147084944> *Matematikboken Extraboken fördjupning X Y Z*. Hämtad 2011-11-21

<http://www.pisa.oecd.org> PISA. Hämtad 2011-12-16

<http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/63/35/37464175.pdf> OECD (2007) *A Framework for PISA 2006*. Hämtad 2011-12-27

<http://www.prim.su.se/seminarier/pdf/finnmatt.pdf> Törnroos, Jukka (2005) *Matematikkunskaperna i Finland i internationell jämförelse*. Hämtad 2011-12-06

http://www.skolverket.se/2.3894/publicerat/2.5006?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww4.skolverket.se%3A8080%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D2575 Skolverket (2011) *Lgr 11*. Hämtad 2011-11-17

http://www.skolverket.se/2.3894/publicerat/2.5006?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww4.skolverket.se%3A8080%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D1494 Skolverket (2005) *Matematikuppgifter i PISA 2003*. Hämtad 2011-11-14

http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.111228!Menu/article/attachment/Diagnos_Matematik_aritmetik_dec2009.pdf Skolverket (2009) *Diamant, Aritmetik A*. Hämtad 2011-12-07

http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.93032!Menu/article/attachment/Regeringsuppdrag%2520-%2520utvecklingsinsatser%2520i%2520matematik.pdf Utbildningsdepartementet, (2009). *Regeringsbeslut*. Hämtad 2011-11-17

http://www.skolverket.se/prov_och_bedomning/ovrigt_bedomningsstod/2.1193/2.1312/diamant-1.111287 Skolverket (2009) *Diamant*. Hämtad 2011-12-21

<http://www.skolverket.se/skolutveckling/amnesutveckling/matematik/2.1309/2.319/forsamradematematikresultat-i-pisa-1.120157> Skolverket (2010) *Försämrade matematikresultat i PISA*. Hämtad 2011-11-12

<http://www.skolverket.se/skolutveckling/amnesutveckling/matematik/2.1309/2.319/sa-arbetar-finland-med-matematik-1.81701> Skolverket (2008) *Så arbetar Finland med matematik*. Hämtad 2011-11-17

http://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/omraden/specialpedagogik/internationell_forskning/tidigt-stod-1.155766 Skolverket (2111) *Tidigt stöd bakom Finlands PISA - framgångar?* Hämtad 2011-11-14

<http://www.uppsatser.se/upsats/1df24711db/> Holt, Roger (2009) *Långdivision ur tiden*. Hämtad 2011-11-16

<http://www.vasa.abo.fi/users/muljens/pdf/PISA.pdf> Uljens, Michael *PISA-resultaten i Finland. Perspektiv på och förklaringar till framgången*. Hämtad 2011-12-12

http://www.webbmatte.se/display_page.php?id=35&page_id_to_fetch=657 *Kort division*. Hämtad 2011-11-17

<http://www02.oph.fi/svenska/ops/grundskola/LPgrundl.pdf> Utbildningsstyrelsen (2004) *Ggl*
04. Hämtad 2011-11-16