GÖTEBORGS UNIVERSITET

”Subtrahera, är det minus?”

Om svenska gymnasieelevers konceptuella och procedurella matematikkunskaper

Johannes Erséus

LAU690

Handledare: Christian Bennet

Examinator: Per-Olof Bentley

Rapportnummer: HT11-2611- 129

Abstract

Examensarbete inom lärarutbildningen

Titel: Subtrahera, är det minus? Om svenska gymnasieelevers konceptuella och procedurella matematikkunskaper

Författare: Johannes Erséus

Termin och år: VT 2011

Kursansvarig institution: Sociologiska institutionen

Handledare: Christian Bennet

Examinator:

Rapportnummer:

Nyckelord: matematik, gymnasiet, konceptuell, procedurell, kunskap, transfer

Sammanfattning högst 300 ord med Times New Roman 10 pkt:
Syfte, huvudfråga, metod och material, resultat, betydelse för läraryrket

Syftet med detta arbete är att undersöka några svenska gymnasieelevers konceptuella och procedurella matematikkunskaper. Målet är också att försöka hitta förslag på hur den svenska matematikundervisningen kan förändras och bli mer konceptuellt inriktad.
Undersökningen bestod både av en enkätundersökning utformad som ett test med matematiska uppgifter där 67 elever deltog och en intervju av två elever där deras lösningsmetoder diskuterades.
I resultatet av analyserna framgår det att svenska gymnasielevers matematiska förståelse till stor del är av procedurell karaktär. I analysen av intervjuerna undersöks de procedurella respektive konceptuella kunskaper eleverna har och i vilken omfattning detta påverkar deras resultat. Här iakttas också deras förmåga till att flytta matematiskt, procedurell kunskap mellan olika sammanhang, det som vanligtvis benämns som transfer. I analyserna pekas också på brister i den svenska matematikundervisningen och det ges förslag på moment som eventuellt skulle kunna bidra till ökad procedurell förståelse hos eleverna. I resultatdelen fokuseras också på de psykologiska konsekvenser skillnaden mellan förväntad och verklig kunskap hos eleven kan få i interaktionen mellan lärare och elev.
Det är viktigt för alla lärare i matematik att vara medvetna om ämnets dubbelhet, där de två sidorna av matematisk kunskap här benämns som konceptuell och procedurell. Som lärare i matematik är det viktigt att konstant reflektera över vilken typ av kunskap man ger eleverna och i vilken mån den kan bidra till en fördjupad förståelse eller enbart ger ytlig och flyktig kunskap som enbart baseras på procedurer.

1 Inledning

> ”Hello students!”
>
> ”Hello teacher!”
>
> “I will ask you a question. It might be quite hard, because this is a question from a national test for the fifth graders in Sweden. Are you ready?”

Så säger programledaren Natanael Derwinger när han står framför fjärdeklassarna i en skola i Shanghai. Uppgiften han sedan skriver ner är 800 ÷ 100= . Att alla elever i klassen klarar av att lösa uppgiften trots att de är ett år yngre än de femteklassare frågan är riktad till, är kanske inte är det mest anmärkningsvärda här. Inte heller det faktum att 20 % av svenska femteklassare faktiskt svarar fel på just denna uppgift. Det mest talande är att hela den annars så välartade skolklassen bryter ihop i skrattkramper över den nya lärarens uttalande om att denna uppgift skulle vara svår.

Scenen ovan är hämtad från Utbildningsradions program Världens bästa skitskola (2011). I samma program uttalar sig Johan Thorbjörnson, universitetslektor i matematik, om de nyantagna studenterna vid KTH: ”Vi har ju en kris alltså, helt klart, i utbildningssystemet; en djup, djup kris. Jag tycker det är skandal att man inte är ärlig med hur dåligt det ofta är ”. Han fortsätter sedan med att konstatera att ”även de enkla talen som egentligen har med grundskolematte att göra, har många problem med”.

Skolan är ett hett ämne just nu. Inte bara är vi mitt i en stor skolreform med nytt betygsystem, lärarlegitimationer och omskrivna kurs- och läroplaner. Det talas också om en skola i kris med sjunkande resultat, betygsinflation och friskolor som drivs med ekonomisk vinst som främsta intresse. Även om bilden som målas upp ser mörk ut vid första anblicken så är den inte helt fri från tolkningsmöjligheter. I Världens bästa skitskola (2011) konstaterar man t.ex. att finska barn, som presterar mycket bättre än svenska i de internationella mätningarna, samtidigt mår sämre. Det konstateras också här att det finns andra egenskaper hos barn som inte mäts, t.ex. samarbetsförmåga. Svenska ungdomars rika fritidsliv och vår kulturs tradition av gruppaktiviteter ger i dessa avseenden oss en fördel i arbetslivet, framför den asiatiska, mer individualistiska skolan. Men även om de nationella testen på flera plan kan ifrågasättas kommer jag i mitt arbete godta att matematikresultaten i den svenska skolan har blivit sämre och jag kommer alltså inte här att försöka värdera vilken typ av medborgare den svenska skolan bör fostra. Istället är min avsikt att fokusera enbart på vilken typ av matematisk kunskap svenska gymnasieelever har och förhoppningsvis hitta förslag på hur matematikundervisningen kan förbättras.

I sin analys av TIMSS advanced 2008 konstaterar Skolverket (2009, s.7) att ”en majoritet av svenska gymnasielever inte behärskar uppnåendemålen i varken C-, D- eller E-kursen” .

Vidare konstaterar de att matematikundervisningen i västvärlden under en tid haft ”en alltför snäv inriktning på lösningsprocedurer”. De sammanfattar problemet:

> ”I en sådan procedurellt inriktad undervisning fokuseras på beräkningar utan begreppslig förankring och inte på att belysa hur olika moment i matematiken förståelsemässigt bygger på varandra”

Den svenska matematikundervisningen kan alltså till huvudsak betraktas som procedurell medan densamma i de framgångsrika ostasiatiska ländernas till större del bygger på begreppslig, konceptuell förankring. Denna slutsats bör knappast komma som en överraskning. Både elever och andra lärare jag mött har vid tillfälle uttryckt en viss frustration över att skolans matematikundervisning inte genererar förståelse utan fokuserar på procedurerna. För att förtydliga ger jag ett konkret exempel:

Jag besökte för en tid sen en serie lektioner där läraren vid första tillfället skulle börja gå igenom tiopotenser, exponentialfunktioner och logaritmer. Kursen var Matematik C och gruppen gick tredje året på ekonomisk linje. Det var första lektionen som logaritmer skulle diskuteras och eleverna hade sedan tidigare ingen erfarenhet av detta begrepp. Lektionen började med en diskussion om vad lösningen skulle kunna var för $2^x = 10$. Efter denna diskussion, där man kom fram till att $3 < x < 4$, förklarade läraren hur man löser den här typen av ekvation:

Först börjar man med att sätta log framför uttrycken på båda sidor av likhetstecknet: $\log 2^x = \log 10$. Om man gör så, kan man sedan flytta ner x framför log-tecknet: $x \log 2 = \log 10$. Av detta följer sedan att $x = \frac{\log 10}{\log 2} \approx \frac{1}{0{,}30} \approx 3{,}32$.

Begreppet (tio)logaritm förklarades alltså inte alls, utan log förklarades initialt enbart som en knapp på miniräknaren. Vad som var intressant här var att eleverna gillade detta. Logaritmer var inte så svårt, det var bara att ”logga” på båda sidor om likhetstecknet, flytta ner x och utföra lite divisioner. När lektionen var slut kunde alla elever i klassen lösa exponentialekvationer och jag upplevde att många tyckte detta var en riktigt rolig lektion.

Mitt möte med ekonomklassen fortsatte lektionen efter, men då skulle jag hålla i lektionen. Jag hade kommit överens med läraren om att det efter den första uppvärmningslektionen nu var dags att förklara begreppet logaritm för eleverna. Jag började med att diskutera utifrån inversa funktioner (utan att använda just det begreppet). Min genomgång byggde på följande tanke:

$y = x + 5 \ \rightarrow x = y - 5$

$y = 2x \ \rightarrow x = \dfrac{y}{2}$

$y = \ x^2 \ \rightarrow x = \sqrt{y}$

$y = 10^x \rightarrow x = \lg y$

Jag förklarade här alltså att på samma sätt som minus är ”motsatsen” till plus så är tiologaritmen motsatsen till tio upphöjt till. Jag döpte också om tiologaritmen från log till lg utan att gå djupare in på att logaritmer kan ha olika bas. Det som var svårt här var att förklaringen av begreppet logaritm kändes lite avig för eleverna. I de övriga fallen av inversa funktioner ovan går dessa operationer ($-, \div, \sqrt{}$) att förklara på ett sätt som de flesta elever ser som självklart. Däremot upplevde jag att det för eleverna fanns ett motstånd i att fullt ut greppa betydelsen av att t.ex. lg 200 betyder ”det tal man måste upphöja 10 med för att få 200”.

Jag fortsatte att ha eleverna i ett flertal veckor och försökte att reda ut hur man bäst passerar denna del av C-kursen och på ett optimalt sätt blandar procedur med koncept. Jag kom inte fram till ett färdigt svar och det är bland annat därför jag skriver denna uppsats. Jag noterade att färdigheten att ”logga” på båda sidor, flytta ner x och sedan dividera, satt hos de flesta elever. Däremot fick jag upprepa definitionen av tiologaritmen i princip varje lektion. När jag sedan införde den naturliga logaritmen och e, försökte jag uppriktigt ge eleverna en möjlighet att förstå definitionen av e, som det tal vars exponentialfunktion inte påverkas om man deriverar den. I detta skede började jag dock tvivla. Jag insåg att det kanske var utopiskt att anta att eleverna på ett djupare plan skulle kunna greppa och ta till sig definitionen av e, dessutom påpekade både elever och andra lärare att det i vissa moment här kanske var bättre att bara att acceptera fakta och inte alltid försöka förstå och förklara allt.

Det procedurella tänkandet ser alltså ut att vara djupt rotat i svensk matematikundervisning. När jag tänker tillbaka på mina lektioner i ekonomklassen känner jag en viss frustration över att det kändes omöjligt att undervisa utifrån konceptuella idéer. Jag inser också att eleverna faktiskt förväntade sig, tyckte om och tog till sig de procedurella momenten. Detta är egentligen något ytterst positivt men måste i min mening kunna kompletteras med konceptuell kunskap för att ge en bra undervisning. Min sista reflektion är att konceptuell kunskap aldrig kommer med en gång. Även om eleverna naturligt kan förstå operationerna $-, \div$ och $\sqrt{}$ så var även dessa begrepp svåra från början och infördes vid olika tidpunkter under skolgången. Elever kan när de går Matte C förhoppningsvis utföra subtraktion på både naturliga tal, negativa tal och bokstäver, däremot ställer $\sqrt{-1}$ fortfarande till det. De konceptuella kunskaperna kring olika begrepp och operationer är föränderliga och utvecklas i nära relation till de nya procedurer som införs. Denna relation mellan procedurell och konceptuell kunskap har en central del i denna undersökning.

2 Syfte

Jag vill med detta arbete undersöka några svenska gymnasieelevers konceptuella och procedurella matematikkunskaper. Jag vill försöka hitta exempel på konsekvenser en allt för procedurell matematikundervisning kan ge och förhoppningsvis kunna komma med några förslag på hur den svenska matematikundervisningen kan förändras och bli mer konceptuellt inriktad.

Jag har i min undersökning tillfrågat 67 elever genomföra ett test med nio matematiska uppgifter. En del av dessa är direkt hämtade från TIMSS 2007 (Skolverket, 2008, ss. 88-118) och var ursprungligen riktade till elever i åttonde klass. Min tanke här är alltså att se om elever på gymnasiet i högre grad än åttondeklassare svarar rätt på dessa uppgifter. Jag vill utifrån denna analys försöka dra slutsatser om elevernas procedurella och konceptuella utveckling över tid.

Förutom testet har jag även intervjuat två elever angående deras lösningsmetoder på testuppgifterna. I deras resonemang har jag därefter försökt hitta väl utvecklade respektive dåligt utvecklade matematiska kunskapskvaliteter, både procedurella och konceptuella. Jag ger också här förslag på tänkbara orsaker till deras resonemang, och idéer om vad i den tidigare matematikutbildning som kan ha orsakat elevernas kunskapsutveckling.

3 Teori

I mitt arbete utgår jag från vissa teoretiska definitioner. Dessa och några bakomliggande teorier förklaras här.

3.1 Piaget och Vygotsky

Det råder ingen tvekan om att människans förmåga att lära är en ytterst komplicerad process som kanske aldrig fullt ut går att förklara. För att kunna göra de teoretiska definitioner jag utgår från behöver jag först definiera två bakomliggande kunskapssyner: den konstruktivistiska och den sociokulturella. I själva undersökningen och analysen kommer jag dock begränsa mig till att titta på ett fåtal inlärningsfaktorer, med fokus på rent kognitiva processer. Även om jag till viss del bortser från sociala och kulturella faktorer är det viktigt att känna till dem. Jag kommer beröra ungdomars kunskapsutveckling inom ämnet matematik och då som ett samspel mellan främst lärare och elev.

Jean Piagets konstruktivistiska tankar bygger på att människan skapar kunskap i samspel med sin omvärld. En viktig del i denna process är enligt Piaget att vi själva är aktiva och att kunskap alltså inte enbart skapas genom intryck utifrån. Hans utgångspunkt är biologisk och han menar att en människas utveckling följer ett förutsägbart mönster där ålder är själva variabeln. Ett barn passerar under sin uppväxt ett antal stadier och för varje steg i utvecklingen utvecklas barnets intellekt mot allt mer abstrakt tänkande. Piaget använder begreppen assimilation och ackommodation för att förklara hur människan lär sig i samspel med sin omvärld. Assimilation innebär att vi tittar på världen och bekräftar att den bild vi har av den stämmer. Denna process innebär alltså inga stora intellektuella språng utan skall enbart ses som mänsklig träning i att leva i den värld vi känner. Ackommodation sker när vi stöter på något nytt, som bryter mot den bild av världen som vi har. Genom att analysera och förstå detta nya införlivar vi det i vår världsbild och vi kan genom assimilation sedan anpassa oss till en ny, mer komplicerad världsbild (Säljö, 2000, ss. 58-61) .

Assimilations- och ackommodationsbegreppen kan ses som en förenklad bild av människans inlärningsprocesser och bildar en viktig grund till senare teoretiska definitioner. Man måste dock vara medveten om att det finns viktiga faktorer som Piaget inte tar hänsyn till. Även om hans konstruktivistiska modell säger att vi skapar vår världsbild i samspel med vår omgivning och att bilden av verkligheten konstrueras av individen själv, berör han inte vikten av det mellanmänskliga mötet (Säljö, 2000, s 65).

Om de konstruktivistiska tankarna betonar samspelet mellan individen och dess omvärld, utgår istället ett sociokulturellt perspektiv från samspelet mellan individen och andra människor. Ett barn föds inte i ett rum utan i en kultur och det är i relationer med andra vi lär oss. Den kunskap vi skapar är beroende av den kultur vi är födda i och de redskap vi omger oss med. Man säger att dessa redskap, eller artefakter, medierar verkligheten. Vår tolkning av omvärlden är alltså inte direkt utan sker genom olika verktyg, som både kan vara verkliga objekt och intellektuella konstruktioner. Ett tidstypiskt exempel på en artefakt är persondatorn som för dagens generation är ett viktigt verktyg för inlärning och tolkning av verkligheten. När det gäller matematisk kunskap skulle man här kunna ta upp miniräknaren som ett annat exempel på artefakt men i mitt fall är de fysiska redskapen inte så intressanta. Viktigare är att titta på de intellektuella redskapen. Matematisk kunskap medieras genom ett matematiskt språk, vilket i utbildningssammanhang representeras av de modeller vi lärare använder för att presentera matematiken för eleverna. (Säljö, 2000, ss. 81-82).

Det matematiska språket är alltså inget objektivt, evigt utan beroende av kontexten. Som framgår i analyserna av TIMSS 2007 finns det nationella skillnader mellan elevers matematikkunskaper (Skolverket, 2008 ss. 8-9). Det sätt på vilket matematisk kunskap medieras borde således skilja sig åt beroende på vilket land man bor i och det matematiska språket är alltså kulturellt/regionalt beroende. Intressant att notera här är också det matematiska språkets historiska utveckling som speglar de matematiska insikter som vuxit fram under vår historia. Även om elever idag kan ha svårt att förstå t.ex. komplexa tal, ger vårt matematiska språk oss modeller att förklara dessa. Till skillnad från de pythagoreiska matematikerna ter sig både irrationella och komplexa tal tämligen naturliga(!) för oss, och även om historien om hur Hippasus blev kastad i havet för att han råkat upptäcka de irrationella talen (Sfard, 1991, s 12) är en myt, beskriver den ändå hur begränsat det matematiska språket var på den tiden.

Den mest framstående sociokulturella förespråkaren, Lev Vygotsky, beskriver mänskligt lärande som appropriering: vår förmåga att ta till oss andras kunskap genom att samspela med dem. Enligt Vygotsky sker detta inom den lärandes utvecklingszon. Denna zon är den begreppsvärld som innefattar det den lärande förstår eller kan prestera, men också det hon kan hantera med hjälp av en på området mer kompetent person. Så länge läraren håller sig inom denna zon ges den lärande möjligheten att utvecklas och appropriera ny kunskap. I undervisningssammanhang bör därför en bra lärare utmana eleven så att undervisningen ligger på en nivå mellan det eleven helt och fullt kan förstå och det som det kräver ett visst stöd för att begripas. Vygotsky påpekar också att approprieringen i dessa situationer, med en tydlig kompetensskillnad mellan en mer kompetent lärare och en mindre kompetent student, alltid påverkas av den kultur samspelet sker i. Med andra ord det vi redan konstaterat: undervisningens innehåll och det språk med vilket det kommuniceras är olika beroende på kontexten (Säljö, 2000 ss. 119-123). I matematikundervisning skulle detta kunna manifesteras i exempelvis kursplansskillnader mellan olika länder, men också hur man lär ut och kanske framförallt hur man definierar och värderar matematisk kunskap.

3.2 Konceptuell och procedurell kunskap

Ur både ett konstruktivistiskt och ett sociokulturellt perspektiv är lärande en process som är beroende av andra faktorer än kunskapen i sig. Om då matematisk utveckling kan ta olika riktning beroende av i t.ex. vilken tid eller kultur man är född i, är det viktigt att fundera på vilka olika definitioner matematisk kunskap kan ha.

Traditionellt brukar man dela upp matematisk kunskap i två delar. Om jag själv intuitivt skulle göra en sådan uppdelning skulle jag säga att matematik både är förståelse och räknande. I den traditionella, stereotypa matematikundervisningen får då förståelse representeras av genomgångar av läraren och räknandet lärs ut genom repetitivt mekaniskt räknande, ofta enskilt med stöd av läraren. Detta var i alla fall den bild jag hade innan jag började med denna uppsats. Definitionen av matematisk kunskap är dock inte helt uppenbar och det finns flera olika försök till definitioner som i mångt och mycket är överensstämmande men också skiljer sig åt. Matematikens dubbelhet beskrivs alltså på olika sätt i litteraturen men jag har valt att utgå från uppdelningen i konceptuell och procedurell kunskap. Kerstin Pettersson definierar begreppen i sin doktorsavhandling (2008, s 31) och beskriver konceptuell kunskap som ”kunskap om begrepp och principer” och procedurell kunskap som ”kunskap om regler och procedurer”. Hon hänvisar här till Jon R. Stars definitioner av dessa begrepp. Pettersson poängterar vikten av att kunna värdera kvaliteten på de två definitionerna separat. Tidigare definitioner har värderat konceptuell kunskap som komplex och rik, medan procedurell är begränsad till kunskap om hur något skall göras. Med Stars distinktion är det möjligt att värdera kvaliteten på kunskapen oberoende av kunskapstyp. Pettersson förklarar vidare hur de två kunskapstyperna utvecklas i samspel med varandra (2008, ss. 31-32). Hon utgår från en modell av Baroody, Johnson och Feil som visar på hur matematisk kunskap utvecklas från ”svaga procedurella och konceptuella kunskaper utan kopplingar däremellan” till ”djupa procedurella och konceptionella kunskaper som är fullt integrerade”. Denna utveckling sker genom en process där eleven med tiden i allt högre grad skapar kopplingar mellan de två kunskapstyperna under förutsättning att hennes procedurella kunskaper i varje fas ligger på en något högre nivå än de konceptuella.

En liknande modell presenteras av Anna Sfard (1991). Hon gör en annan klassificering av matematisk kunskap och menar att man kan uppfatta matematik på två sätt: strukturellt och operationellt. Operationell uppfattning kallar hon förmågan att tolka matematiska processer och algoritmer, en definition snarlik den för procedurell kunskap. Definitionen av strukturell uppfattning skiljer sig dock från konceptuell kunskap då den avser vår förmåga att tolka matematiska konstruktioner som objekt. Som exempel pekar Sfard bland annat på vår syn på de naturliga talen. Om man pekar på en bild med tre äpplen och frågar ett litet barn hur många äpplen hon ser, blir inte svaret enbart tre. Innan man skapat en strukturell taluppfattning blir själva räknandet som operation svaret på frågan. Så även om barnet vet att det är tre äpplen på bilden kommer hon att svara genom att räkna: ett, två, tre. På liknande sätt kan man se på de rationella talen, där en strukturell uppfattning om bråkbegreppet är att ett bråk är ett objekt som man kan använda för andra processer, t.ex. addition. Om en elev är begränsad till en operationell uppfattning om begreppet, ser hon inte bråket som ett objekt utan enbart som en divisionsprocess. Sfard förklarar en elevs utveckling när det gäller taluppfattningar som en cyklisk process där eleven utifrån en viss strukturell uppfattning kan ta till sig nya typer av procedurer vilket i sin tur genererar nya strukturella uppfattningar. Räkning leder till en syn på de naturliga talen som objekt, vilket gör att eleven kan lära sig att dividera två naturliga tal, vilket i sin tur gör att hon kan se bråk som objekt. På samma sätt når vi fram till strukturella uppfattningar om negativa, reella och komplexa tal.

Sfards idé om hur matematisk utveckling går till visar att vi för att kunna lära oss nya operationer först måste ha en klar bild över de objekt som ingår i operationen. Ett problem skulle således kunna uppstå i undervisningen om den strukturella uppfattningen släpar efter och nya processer införs utan att eleven först förankrat en typlig bild av objekten som processen utförs på, som just objekt. I den svenska matematikundervisningen som utpekats som fokuserad på operationellt/procedurellt tänkande, är det inte alls otroligt att detta skulle kunna uppstå. Kanske kan man i detta resonemang delvis hitta förklaringen till svenska elevers sjunkande resultat i de internationella mätningarna.

Liknande resonemang som de om taluppfattning kan enligt Sfard appliceras på andra områden inom matematiken. Ett intressant exempel är funktionsbegreppet. Begreppet funktion nämndes för första gången av Leibniz 1692 och sågs ursprungligen som en algebraisk process beroende av en variabel. Att se en funktion som ett objekt visade sig historiskt vara svårt då det intuitivt så uppenbart handlar om en process där man stoppar in något i ena änden och får ut något i andra. Objektifieringen blir möjlig först när man definierade en funktion i rent mängdteoretiska termer: ”En (ettställig) funktion är en mängd av ordnade par (x,y) där y entydigt bestäms av x” (Bennet, 2012). Med Sfards resonemang är det först i detta skede, när vi omvandlat en process till ett objekt, som vi kan gå vidare och använda funktionen som objekt i nya processer. Kiselman och Mouwitz definierar i boken *Matematiktermer för skolan* (2008), begreppet funktion som ”avbildning vars värden är tal”. Även om det i definitionen av avbildning i samma bok inte bara talas om en relation mellan mängder utan också om en mängd av talpar, är detta begrepp ungefär lika otydligt som funktionsbegreppet och kräver vidare definitioner. I slutändan kräver alla matematiska begrepp en förankring i tal- eller mängdteoretiska axiom och den objektifierade beskrivningen av en funktion som en mängd talpar ligger här närmare dessa än andra definitioner. Om man vill generalisera är det viktigt att en lärare som vill bidra till att eleverna kommer vidare i sin matematiska utveckling, i varje moment är medveten om vikten av en djupt förankrad förståelse. I Sfards fall handlar denna fördjupade förståelse om att omvandla processer till objekt, men man kan göra liknande resonemang utifrån begreppen konceptuell och procedurell kunskap.

Procedurell kunskap är ofta begränsad till ett specifikt sammanhang och om man vill använda en känd procedur i en ny kontext, behöver den ofta ändras något först. En elev som lär sig använda en procedur i flera olika sammanhang kan genom detta skapa sig en mer begreppslig, konceptuell förståelse av själva proceduren, en s.k. metakognitiv procedur. Själva problemet med den rent procedurella kunskapen är att den inte kräver att man förstår vad man håller på med, men om eleven tränar proceduren i olika kontexter, kan en sådan förståelse skapas. Denna tanke är till synes snarlik en cykel i Sfards inlärningsprocess, men med annan begreppslig förankring. Överföringen av procedurell kunskap från en kontext till en annan benämns ofta som ”transfer”. För att en elev själv skall kunna lyckas göra den här typen av överföring är hennes konceptuella kunskap av ytterst viktig. En elev som har utvecklad konceptuell kunskap har lättare att på egen hand applicera en procedur i ett nytt sammanhang än en elev som i huvudsak besitter procedurell kunskap. Denna skillnad har visat sig vara väldigt tydlig i jämförelsen mellan asiatiska och svenska skolelever, där elever från Hong

Kong och Taiwan i mycket större grad än svenska elever har förmågan till procedurgeneralisering. Jag har tidigare konstaterat att det finns stora svårigheter med att som gymnasielärare försöka ändra på inställningen till ämnet och gå från en procedurell till en konceptuellt fokuserad undervisning. I min egen upplevelse av att förklara logaritm-begreppet för Matematik C-elever, gick jag delvis bet och upplevde dessutom att eleverna verkade föredra en procedurellt inriktad undervisning. Att bryta ett djupt förankrat undervisningsmönster som i gymnasieelevers fall pågått i minst nio år, verkar alltså inte bara vara nödvändigt utan också väldigt svårt (Skolverket, 2009, ss. 16-19).

4 Metod

Jag valde att genomföra min undersökning i två steg. Först gjorde jag en enkätundersökning, utformad som ett test (se bilaga 8.1), där jag gav 67 elever på en gymnasieskola ett antal matematiska uppgifter att svara på. Fem stycken av frågorna var hämtade direkt från TIMSS 2007(Skolverket, 2008, ss. 88-118). Dessa uppgifter hade under vårterminen 2007 ställts till elever i åk 8 som en del av den omfattande TIMSS-undersökningen. Jag vill alltså här analysera hur ett urval elever på gymnasiet svarar på dessa frågor jämfört med åttondeklassarna. Förutom dessa frågor innehöll testet några ytterligare, liknande flervalsfrågor samt två öppna frågor där eleverna med egna ord ombads definiera talen $\sqrt{2}$ och π. När jag rättat och analyserat svaren valde jag ut två elever som jag intervjuade och bad dem förklara hur de resonerade när de löste uppgifterna i testet. Resultaten från enkäten och intervjuerna utgör alltså det totala underlaget för mina analyser och slutsatser.

4.1 Val av metoder och vetenskaplig ansats

Eleverna skrev gruppenkäten/testet på matematiklektioner och alla som var i klassrummet vid det aktuella tillfället deltog. Klasserna var lite olika förberedda på att jag skulle komma, men ingen klass hade i förhand fått veta att de i enkäten skulle bli ombedda att lösa matematiska uppgifter.

Intervjuerna gjordes enskilt vid ett senare tillfälle. De båda eleverna som förfrågades tackade på förhand ja, men var vid intervjutillfället inte förberedda på vad intervjun skulle handla om. Intervjuerna gick ut på att eleverna fick titta på de uppgifter som fanns i enkäten och med egna ord förklara hur de löste dem. Uppgift 1 och 3 hade jag kompletterat med följdfrågor för att möjliggöra en djupare analys, men i övrigt innehöll intervjun inga andra frågor. Eleverna visste inte vid intervjutillfället hur väl de lyckats på enkäten och fick heller inte se vilka svar de gett när de skrivit den.

Min tanke vid val av metoder var att enkäten och intervjuerna skulle fungera som komplement till varandra. Enkäten skulle i förhållande till TIMSS 2007 ge en övergripande bild av vilka moment grupperna hade lätt respektive svårt för. De öppna frågorna skulle ge en bild av vilka olika uttryck elever på gymnasiet kan tänkas använda när de ombeds beskriva matematiska begrepp. Intervjuerna var tänkta att ge svar på vilka typer av resonemang som lett fram till både korrekta och felaktiga svar i enkäten.

Det är viktigt att konstatera att TIMSS 2007 var en mycket omfattande undersökning där resultaten för åk 4 och 8 baserades på 6000 elevers svar, varav drygt 3000 gick i åk 8. Dessa 3000 elever var fördelade på 159 slumpvis utvalda skolor i Sverige (TIMSS 2007, ss. 15, 46).

Med tanke på detta är det svårt att inom ramen för detta arbete försöka göra en jämförelse med denna rapport, med samma generaliserande ambitioner. Genom mina intervjuer går jag också bort från TIMSS statiska flervalsformulär och öppnar upp för en annan analys, med utgångspunkt i den intervjuades livsvärld, främst fokuserat på det matematiska tänkandet. Med dessa förutsättningar har jag valt en hermeneutisk ansats i mitt arbete. Jag utgår här från den definition av hermeneutik som beskrivs av Gilje och Grimen (2007, ss. 172 - 173), d.v.s. jag försöker att ”klargöra vad förståelse och tolkning är, hur förståelse är möjligt och vilka speciella problem som uppstår vid tolkning av meningsfulla fenomen”. I mitt fall består de fenomen som skall tolkas av matematiska uppgifter. I analysen måste jag även ta hänsyn till deltagarnas förförståelse, bland annat med avseende på språk och begrepp och individuella erfarenheter. Jag utgår också från att elevens förförståelse är reviderbar, den är beroende av elevens möte med sin omvärld och är därför föränderlig. Detta antagande får som konsekvens att en elevs tolkning av ett fenomen som i sin tur är beroende av elevens förförståelse, blir beroende av när i tiden eleven stöter på fenomenet. Ett matematiskt problem borde därför tolkas olika vid olika tillfällen (Gilje, Grimen 2007, ss. 179-184).

4.2 Begränsningar

Fokus i min analys blir att försöka hitta vilka konceptuella och procedurella kunskaper eleverna har och i vilket avseende detta påverkar deras totala matematiska kunskaper. Å ena sidan studeras detta i analysen av enkätfrågorna. Här kan man avläsa hur elevernas kunskaper skiljer sig från de elever i åk 8 som genomförde TIMSS-undersökningen 2007, även om generaliseringar bör göras med viss försiktighet då mitt urval var relativt litet. Ur enkäten kan man också utläsa elevernas förmåga att beskriva matematiska koncept, i detta fall representerade av talen $\sqrt{2}$ och π. Ur detta kommer jag dra slutsatser om elevernas konceptuella kunskaper.

Å andra sidan har jag också ambitionen att genom intervjuer kunna utläsa i vilken mån och med vilka kvaliteter eleverna besitter konceptuella respektive procedurella kunskaper. Denna analys görs med hjälp av de muntliga beskrivningar eleverna gör men också de stödanteckningar/matematiska noteringar de gjorde under själva intervjuerna.

Även om jag huvudsakligen kommer analysera elevernas kunskapskvaliteter med utgångspunkt i begreppen konceptuell och procedurell kunskap, är det också möjligt att andra faktorer som skulle kunna påverka inlärningen, blir synliga. En livsvärldshermeneutisk ansats kräver dock en kontextualiserad ontologi, där man alltså begränsar vilka områden man vill iaktaga (Claesson, 2008). Det är omöjligt att ta hänsyn till alla faktorer som påverkar en människas kunskaper om ett specifikt ämne och för att vara tydlig vill jag nämna några exempel på vad jag *inte* har underlag för att diskutera och analysera, men som eventuellt skulle kunna vara bidragande orsaker till elevernas matematiska kunskaper:

- Tidigare lärares påverkan. Man skulle kunna tänka sig, när urvalet är så litet och regionellt begränsat att många av eleverna under lång tid haft samma lärare i matematik. Om det nu råkat vara så att denna eller dessa lärare varit exeptionellt ”bra” eller ”dåliga” kan detta göra stort utslag på vilka kunskaper eleverna har, både individuellt och totalt, men kan också ha påverka andra parametrar, t.ex. inställning till ämnet.

- Elevernas sociala bakgrund. Eftersom eleverna är tagna ur enbart samhälls-, ekonomi- och teknikprogrammen är urvalet inte representativt för alla gymnasieelever. Den kommun som skolan där enkäten och intervjuerna genomförts i är relativt välbärgad och kan inte heller ses som representativ. I min undersökning är det också omöjligt att analysera i vilken mån elevernas föräldrars inställning till ämnet matematik påverkar resultaten.

- Eventuella subkulturella faktorer. Vad finns det för attityder och värderingar i dessa klasser? Vilka sociala koder är det som gäller och påverkar dessa i så fall elevernas vilja till deltagande i en sån här studie eller inställning till ämnet?

4.3 Urval

Alla 67 elever i undersökningen går på samma skola, men i olika klasser och kurser. Fördelningen ser ut så här:

Kurs	# elever	Klass	Lärare
Matematik 1b	25	Sp1	A
Matematik B	20	Sp2	A
Matematik C	14	Ek3	B
Matematik D	8	Nv3	C

Jag intervjuade två elever ur den grupp som går kursen Matematik 1b, Tomas och Sofia. Jag valde alltså att jämföra två elever som befinner sig på samma ställe i utbildningen och titta på hur deras resonemang skiljer sig åt, snarare än att jämföra två elever från olika årskurser. I min analys måste jag således utgå från att det jag undersöker är hur elever som precis gått ut grundskolan resonerar. Jag hade kunnat göra på ett annat sätt men då hade utgångspunkten blivit en annan. Tomas och Sofias resultat på de första 7 enkätfrågorna skiljde sig åt, Tomas hade 6 av 7 rätt och Sofia hade 1 av 7 rätt. Jag valde dessa två individer utifrån tanken att antalet rätt är beroende av hur eleven resonerar och att dessa två därmed borde resonera olika.

4.4 Validitet och reliabilitet

För att säkra begreppsvaliditeten i detta arbete är det viktigt att fundera över hur jag väljer att operationalisera mina teoretiska begrepp (Esaiasson, P. et al., ss. 54-65). De emipiriska indikatorer jag hävdar visar på att en elev besitter konceptuell respektive procedurell kunskap bör därför definieras här. När det gäller begreppet konceptuell kunskap som jag tidigare definierat som ”kunskap om begrepp och principer” har jag också inkluderad Sfards tanke om strukturell kunskap, d.v.s. vår förmåga att uppfatta matematiska konstruktioner som objekt.

De indikatorer som kan peka på dessa typer av kunskap har jag därför identifierat som följande:

- Förmåga till objektifiering- förmågan att se matematiska konstruktioner som objekt (indikator för konceptuell kunskap).

- Begreppslig säkerhet- den säkerhet med vilket eleven kan göra definitioner eller visa på en i någon bemärkelse fördjupad förståelse av processer (indikator för konceptuell kunskap).

- Procedurell säkerhet- den säkerhet med vilken eleven kan genomföra procedurella moment utan krav på generaliserbarhet eller förståelse av processen (indikator för procedurell kunskap).

- Förmåga till transfer- förmågan att flytta en process från en kontext till en annan (i huvudsak indikator för konceptuell kunskap, men resulterar även i procedurell).

Hög reliabilitet definieras som ”frånvaro av slumpmässiga eller osystematiska fel” (Esaiasson, P. et al., s. 70). Jag har i min analys av data, vid flertalet fall dubbelkollat resultaten och gjort statistiska uträkningar både i excel och på papper. Intervjuerna återges enbart delvis i denna text, men jag har transkriberat dem i sin helhet innan jag inledde analysen. Vissa språkliga korrektioner är gjorda för att underlätta förståelsen och ett fåtal partier som jag bedömt som irrelevanta i sammanhanget är helt strukna. Endast vid ett tillfälle var det ett ord jag inte lyckades tolka när jag lyssnade igenom intervjuerna.

4.5 Etik

När det gäller intervjuer är det viktigt att de som deltar, samtycker och är införstådda med vad intervjun går ut på (Esaiasson, P. et al., s 290). Dem jag intervjuade fick båda läsa igenom pappret ”inför intervjun” (se bilaga 8.2) och skriva på att de gick med på de villkor jag ställt upp. Jag utlovade dem här också anonymitet, vilket gör att jag i detta arbete inte nämner vilken skola de går på och har ändrat deras namn. Tomas och Sofia heter således något annat i verkligheten. Jag kan i detta fall inte se några problem med att hålla dessa elever och elevgrupper anonyma, och det påverkar inte analysen på något sätt.

Inför genomförandet av testet, förklarade jag för elevgrupperna att syftet var att analysera svenska gymnasieelevers matematikkunskaper. Eleverna ombads att skriva namn och klass på enkäten men detta enbart för att jag skulle kunna identifiera namnen på de elever som skulle kunna passa att intervjua. Deltagandet var frivilligt, men vid samtliga tillfällen lämnade alla elever in åtminstone delvis ifyllda enkäter. Vissa elever ignorerade att ange sitt namn , andra angav påhittade.

I denna text finns således inga verkliga namn på deltagarna i studien, i mitt arbete har jag enbart delat icke anonymiserade resultat med min handledare. De handskrivna anteckningar som gjordes under intervjuerna och som redovisas här har skrivits om så att de intervjuades handstilar inte skall gå att känna igen. Alla inspelade intervjuer och resultat med hänvisningar till namn kommer inom en tid att förstöras.

5 Resultat och analys

Testet som eleverna gjorde innehöll totalt nio frågor (se bilaga 8.1), där den sista bestod av två delfrågor. Under intervjuerna kompletterade jag uppgift 1 och 3 med några ytterligare delfrågor. I denna del kommer jag gå igenom varje uppgift för sig och både analysera hela gruppens resultat men också leta efter indikatorer för kunskapskvaliteter, på individnivå, med utgångspunkt i de två intervjuerna. Jag kommer inleda med en allmän analys av enkätundersökningen.

5.1 Allmänna resultat

De första sju uppgifterna i testet är flervalsfrågor, varav fem stycken är hämtade direkt från TIMSS 2007, ur de frågor som ställdes till elever som gick sista terminen i åk 8 det året. För dessa fem frågor finns alltså en statistiskt säkerställd analys av i vilken mån åttondeklassare klarar att lösa dem. De som deltog i TIMSS-studien 2007 kommer i denna text hänvisas till som ”referensgruppen”. Det är osäkert vilket resultat elever i åttan skulle få idag, fyra och ett halvt år senare, om de fått svara på samma frågor. De elever som svarade på min enkät gick troligtvis i åttonde klass VT 2010, 2009 eller 2008 och ingen borde således kunnat delta i TIMMS-undersökningen, men borde samtidigt tidsmässigt vara relativt representativa för denna grupp. Jag har tidigare konstaterat den begränsning urvalets storlek har på vilka slutsatser man kan dra utifrån enbart en analys av enkätsvaren.

Tabell 5.1 Andelen rätt svar fråga 1-7

Fråga	TIMMS 2007	Enkät alla	Enkät Ma 1b	Enkät Ma B	Enkät Ma C	Enkät Ma D
1	-	58,2%	56,0%	55,0%	50,0%	87,5%
2	18,9%	32,8%	12,0%	40,0%	28,6%	87,5%
3	18,0%	34,3%	32,0%	20,0%	35,7%	75,0%
4	10,9%	34,3%	32,0%	20,0%	35,7%	75,0%
5	23,20%	55,2%	36,0%	65,0%	50,0%	100,0%
6	23,30%	47,8%	48,0%	65,0%	7,1%	75,0%
7	-	67,2%	64,0%	75,0%	57,1%	75,0%
# Elever	≈3000	67	25	20	14	8

I tabell 5.1 kan man läsa hur stor andelen av eleverna som svarat rätt på de första sju frågorna. Fråga 1 och 7 är nya och finns inte i TIMSS 2007. Man ser i tabellen att en låg andel ur referensgruppen TIMSS 2007 svarade rätt på fråga 2-6. Uppgifterna var alltså svåra för åttondeklassare år 2007. Jag har medvetet valt ut uppgifter där eleverna haft problem, det kan vara intressant att undersöka om dessa svårigheter lever kvar eller om eleverna med tiden fördjupar sin förståelse och ökar sin konceptuella/procedurella kunskap. Om man tittar på alla elever som gjorde enkäten kan man konstatera att gymnasieeleverna överlag svarade bättre än referensgruppen. I samtliga fall utom när det gäller uppgift 2 har andelen som svarat rätt mer än fördubblats. På uppgift 4 har andelen tredubblats.

På gruppnivå är resultatet mer splittrat. De åtta eleverna i gruppen som går Matematik D, svarar konsekvent bäst på alla uppgifter. Denna grupp är förvisso liten och resultatet skall inte övertolkas. Det faktum att dessa elever går tekniska programmet skulle kunna bidra till att de i högre grad än samhällsvetare och ekonomer har ett större intresse för matematik. Värt att notera är att denna grupp, efter genomförd enkät, gärna stannade kvar och diskuterade uppgifterna. Dessa elever uttryckte också vid diskussionen efteråt, att de saknade att matematikundervisningen inte fokuserade mer på förståelse.

I Matematik C-gruppen är det mest intressanta att bara 7,1 % svarar rätt på uppgift 6: " Vilken punkt återfinns på linjen $y = x + 2$?". Detta skall jämföras med referensgruppen där 23 % svarade rätt (Skolverket, 2008, s. 95). Vid samtliga tillfällen som jag genomförde diagnosen uttryckte en eller flera elever att de inte förstod denna fråga. Det som de flesta verkade ha svårt med var att x- och y-koordinaterna åtskildes av ett semikolon. I C-gruppen anger 71,4% det felaktiga svaret A (0;-2), vilket kan jämföras med referensgruppen, där enbart 19% angav detta svar. Det är svårt att svara på varför just denna grupp misslyckades så med uppgiften. Att bara en av de 14 elever som var i gruppen svarar rätt är underligt och det är svårt att se en naturlig förklaring. I uppgiften framgår tydligt att det är en punkt som efterfrågas och även om semikolonet är främmande borde en del elever dra slutsatsen att det handlar om en punkt skriven på formen (x;y). Eftersom eleverna i stor utsträckning svarade A (0,-2) borde deras tolkning vara att punkten skrivs på formen (y;x), då 0 = -2 + 2. Man skulle kunna tänka sig att anledningen till denna tolkning kan ligga i att eleverna tror att en punkt enbart kan noteras som (x,y) och att detta därför måste vara något annat. Om funktionsbegreppet använts flitigt kan (0,-2) tolkas som en variant av f(-2) där ju x-värdet förs in från höger. Jag kan tycka att valet att representera en punkt på formen (x;y) snarare än (x,y) i TIMSS 2007 är lite märklig. Då eleverna verkar ha begreppslig förståelse för formen (x,y) men inte den andra, blir ju eventuella begreppslig slutsatser man drar utifrån resultatet felaktiga. Semikolon är logiskt om värdena är decimaltal, men jag är osäker på i vilken omfattning svenska läroböcker i matematik använder denna notation. I *Matematiktermer för skolan* nämns inte notationen (x;y) alls i definitionen av begreppet punkt. En punkt i planet noteras här enbart som (x,y) (Kiselman & Mouwitz, 2008). Att förstå ett begrepp som är noterat på ett sätt man inte har sett förut är inte ett rimligt krav. Jag återkommer till denna uppgift vid genomgången av intervjuerna.

I gruppen som går Matte 1b svarar enbart 12 % rätt på uppgift 2, där de ombeds förenkla uttrycket $2(x + y) - (2x - y) =$. På övriga frågor svarar de ganska mycket bättre än referensgruppen, men här är resultatet nästan 7 procentenheter sämre. Båda intervjupersonerna går i denna klass och uttrycker båda vid intervjun att denna uppgift är svår. Tomas konstaterar:

> T: "Det är det att vi inte har gått igenom just de här grejerna riktigt än. Vi har ju börjat med algebra och ekvationer och sånt men det hade vi inte gjort när jag gjorde den här".

Även Sofia säger ungefär samma sak:

> S: ”Nej, det här har vi nu. ”
>
> I: ”Har ni det nu i skolan?”
>
> S: ”Ja, härligt att jag inte fattar nåt nu. Det gjorde jag inte heller när jag satt där inne.”

Båda eleverna konstaterar således att denna typ av förenkling är något de precis har börjat gå igenom på matten. Sofia säger till och med att deras lärare precis gick igenom något liknande innan hon blev kallad till intervjun. Med tanke på att eleverna i denna grupp är bättre än referensgruppen utom just på denna fråga, borde anledningen vara att eleverna inte förenklat några uttryck sedan de gick i nian. Eventuella fördjupade kunskaper, som eleverna under det fått sista året på grundskolan gällande förenklingar av algebraiska uttryck, ser alltså nu ut att vara som bortblåsta. Att eleverna verkar ha glömt hur man behandlar parenteser med avseende på distributiva lagen och hantering av teckenbyten, tyder på en ytterst ytlig, procedurell kunskap. Det framgår i båda intervjuerna att eleverna enbart försöker komma på hur förenklingsproceduren ser ut utan att koppla det till begreppsliga egenskaper. De är osäkra på vad man skall göra med tvåan före den första parentesen och om man skall byta tecken i den andra. Ingen av dem kommer genom resonemang fram till rätt svar. De saknar alltså tillräcklig konceptuell kunskap gällande algebraiska uttryck och därmed verktyg för att resonera sig fram till ett svar. Även om proceduren är ny, så hade en fördjupade begreppslig kunskap gällande algebraiska uttryck kunnat förenkla transfer från ett annat område där de behärskar liknande processer, enligt definitionen:

> ”Det är alltså helt avgörande, om eleverna kan modifiera en procedur, så att den passar fler kontexter. En sådan överföring av kunskaper från ett område till ett annat brukar benämnas transfer. Konceptuell kunskap kan underlätta transfer, genom att eleverna har ett slags facit för att kontrollera om en modifiering är korrekt eller inte. Detta gör att inkorrekta procedurer kan sorteras bort”.
> (Skolverket, 2009, s. 19)

Jag fortsätter denna analys i kapitlet som specifikt rör uppgift 2.

Uppgift 8 berör elevernas kunskaper om olikheter. Jag upptäckte vid rättningen att denna uppgift inte var så bra formulerad:

Om vi vet att a, b och c är <u>heltal</u> och att:
$a < 0$
$b > 0$
b är ett jämnt tal
$a \cdot b = c$
Vad kan vi då säga om c (**OBS! flera svar kan vara rätt i denna uppgift**)?

A. $c > 0$
B. $c \geq 0$
C. $c < 0$
D. c kan inte vara 11
E. $c \neq 0$
F. $c \leq a$
G. c kan inte vara -11

Rätt svar på denna uppgift är C, D,E och G; d.v.s. fyra av sju möjliga alternativ. Problemet blir här att värdera vilken typ av svar som är mer rätt än andra. Vilket svar värderas högst om man t.ex. jämför en elev som har två rätt och ett fel med en elev som bara svarat C och därmed har ett rätt? Dessutom är det felaktiga svarsalternativet F dumt att ha med, eftersom det liknande påståendet $c < a$ är sant, givet antagandena. En elev som säger att F är sant kan mycket väl ha tänkt rätt och enbart missat att $a \neq c$. Fördelningen av svaren ser ut så här:

Tabell 5.2 svarsfördelning, uppgift 8

10,4%	svarade ej
4,5%	helt rätt
41,8%	1-3 rätt, inga fel
37,3%	1-4 rätt + fel
6,0%	helt fel

Jag har svårt att dra några andra allmänna slutsatser utifrån denna uppgift än att den är dåligt formulerad.

På uppgift 9a och 9b ombads eleverna att med egna ord beskriva de två talen $\sqrt{2}$ och π. Min tanke var här att undersöka hur väl gymnasieelever behärskar förmågan att skriftligt göra matematiska beskrivningar/definitioner. Som introduktion till uppgiften hade jag med ett exempel där jag själv beskrev talet $\frac{1}{4}$ så här:

> ”En fjärdedel betyder: en av fyra lika stora delar. Du kan dela en tårta i fyra delar genom att först dela den på mitten och sedan dela de båda halvorna på mitten. En av dessa bitar blir då en fjärdedel av tårtan. På samma sätt blir $\frac{1}{4}$ av 100 samma som $\frac{100}{4}$ vilket blir 25. $\frac{1}{4}$ är därför detsamma som 25 %. Man kan också se på $\frac{1}{4}$ som ”ett delat med fyra”. Om man delar 1 med 4 får man 0,25. Följande gäller alltså: $\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25$ %”.

När det gällde talet $\sqrt{2}$ förväntade jag mig att svaret ”det tal som gånger sig själv blir 2”skulle förekomma högfrekvent. Jag antog också att många skulle resonera kring att det var svårt att hitta det exakta värdet på detta tal, men att det måste ligga mellan 1 och 2 eftersom $1 \cdot 1 = 1$ och $2 \cdot 2 = 4$. Jag tänkte mig också att flera elever kanske visste att talet liknade π på det sättet att det innehöll oändligt många decimaler och att dessa inte upprepade sig på ett återkommande sätt. Någon skulle kanske till och med kunna benämna det som irrationellt. I tabellen nedan kan man se hur många procent av eleverna som tar upp respektive punkt i sitt svar. Jag har också lagt till en kategori för de som jämförde med ett annat, mer lättförståeligt rotuttryck.

Tabell 5.3 svarsfördelning, uppgift 9a

31,3%	svarade ej
22,4%	felaktiga/ofullständiga resonemang eller definitioner
53,7%	"det tal som gånger sig själv blir 2"
0,0%	”oändligt många siffror i talet” eller liknande
20,9%	annat exempel, t.ex. $\sqrt{16}$
3,0%	$\sqrt{2}$ måste ligga mellan 1 och 2 Ex) då $1 \cdot 1 = 1$ och $2 \cdot 2 = 4$
0,0%	irrationellt

Notera här att vissa elever gjorde ett flertal av dessa definitioner och därför hamnar under fler än en kategori i tabellen. Notera också att de redovisade svarsfrekvenserna avser samtliga 67 elever som gjorde testet.

Drygt 50% av eleverna lyckades alltså definiera $\sqrt{2}$ som det tal som gånger sig själv blir 2. Om detta var väntat så blev jag lite förvånad över att enbart 2 av de 67 eleverna (3%) resonerade kring en approximation av värdet. 21% tog till ett eller flera andra exempel på rotuttryck för att förklara begreppet men de gjorde ingen ansats till att försöka hitta ett numeriskt närmevärde. Jag vill tolka svaren som en indikator på att eleverna har svårt att utan miniräknare flytta rotbegreppet från roten ur kvadrattal till roten ur icke-kvadrater. Denna transfer kan man också se som förflyttningen av rotbegreppet mellan kontexterna $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .Jag tror att dessa problem beror på att de har fått all begreppslig förståelse av rotbegreppet med utgångspunkt i enkla exempel, där svaret alltid blivit ett positivt heltal. Alla andra rotuttryck har behandlas med miniräknare och även om eleverna antagligen vet att inte alla rötter är naturliga tal, så har de inte fått chansen att reflektera över reella exempel på konceptuell nivå. Att ingen verkar veta att $\sqrt{2}$ är irrationellt är kanske inte så konstigt, än mindre att de inte känner till begreppet. Denna okunskap ligger dock i tydlig linje med elevernas dåliga konceptuella kunskap kring de reella talens beskaffenhet.

På testets sista uppgift, 9b, så ombads eleverna definiera π. På samma sätt som på 9a, redovisar jag här svaren i tabellform:

Tabell 5.4 svarsfördelning, uppgift 9b

17,9%	svarade ej
6,0%	felaktiga/ofullständiga resonemang och definitioner
65,7%	”ungefär 3,14”
7,5%	”oändligt många siffror i talet”, eller liknande
53,7%	koppling till geometri
1,5%	förhållandet mellan omkretsen och diametern på en cirkel
0,0%	irrationellt, transcendent

Drygt 65% av eleverna konstaterade alltså att $\pi \approx 3{,}14$. Hälften gör en legitim koppling till geometri, t.ex. genom att hänvisa till cirkelns area, $A = \pi r^2$. Precis som på uppgiften innan är det ingen som benämner talet som irrationellt eller som i det här fallet också vore möjligt, transcendent. Några fler än i uppgift 9a är dock medvetna om att π innehåller oändligt med decimaler och att det därför på något sätt är speciellt. Det viktigaste att notera här är dock att endast 1 av de 67 eleverna talar om π som ett förhållande mellan omkretsen och diametern på en cirkeln. Denna enda elev gjorde en antydan till en sådan definition bör kanske understrykas, ingen beskrev detta förhållande precist. Det kanske vore överdrivet att säga att man blir förvånad över att eleverna inte känner till den traditionella definitionen av π, som förhållandet mellan omkretsen och diametern på en cirkel. I en skola där undervisningen är konceptuellt inriktad skulle man kunna tänka sig att läraren ritar upp en kvadrat på tavlan med en inritad cirkel, där både kvadratens sida och cirkelns diameter har längden d. Kvadratens omkrets blir då $4d$ och cirkelns πd. Denna typ av exempel skulle sedan kunna ligga till grund för diskussioner runt t.ex. förhållanden och konstanter som förhoppningsvis skulle resultera i fördjupad begreppslig och därmed konceptuell kunskap. I rent procedurell undervisning tror jag risken är att man enbart ser π som ett tal som används i formler av geometrisk karaktär, att det är ungefär 3,14 och eventuellt att det är oändligt långt och lite exotiskt.

5.2 Tomas och Sofia

Jag valde ut de två intervjupersonerna ur samma klass, för att kunna jämföra kunskapsskillnader mellan två elever i samma ålder. Jag baserade urvalet på resultaten i enkäten, och mitt mål var att intervjua en elev som lyckats bra och en elev som lyckats mindre bra på testet. Jag fick fram några lämpliga kandidater i varje kategori och valde sedan utifrån elevernas lärares uppfattning om vilka av dessa som hade lätt för att prata och som troligtvis skulle tycka det var okej att bli intervjuade. Med tanke på de få intervjutillfällena ville jag säkerställa att de jag intervjuade faktiskt vågade och hade förmågan att muntligt resonera kring sina tankar. Möjligtvis missar man andra elevers sätt att tänka genom ett så pass riktat urval, men för att täcka ett brett fält av personlighetstyper är ändå två intervjuer för få, så jag bortsåg helt enkelt från detta.

Tomas var den som hade lyckats relativt bra på testet. Jag utgick främst ifrån de 7 första frågorna när jag värderade elevernas kunskaper inför intervjun. Tomas hade 6 av 7 rätt på dessa. När det gäller fråga 8 insåg jag att den var ganska svårrättad och det gick inte riktigt att avgöra vilka elever som behärskade olikheter och vilka som inte gjorde det. På fråga 9 var svaren från de flesta elever relativt innehållslösa och det gick inte att hitta någon exceptionellt duktig elev som visade på utvecklad begreppslig förståelse gällande de två talen $\sqrt{2}$ och π. Tomas hade inte svarat alls på 9a men på 9b hade han gjort vissa definitioner.

Sofia hade 1 av 7 rätt på de sju första uppgifterna. På fråga 9a och 9b hade hon inte svarat alls.

5.3 Uppgift 1

Denna uppgift bestod i enkäten endast av 1a, men vid intervjutillfället kompletterade jag denna med 1b och 1c, för att möjliggöra en fördjupad analys.

5.3.1 Uppgift 1a

$2p^3 \cdot 3p^2=$

A. $5p^5$
B. $6p^6$
C. $6p^5$
D. $5p^6$

Denna uppgift fanns inte med i TIMSS 2007 och anledningen till att jag tog med den var att se om eleverna hade lättare för att lösa denna i förhållande till uppgift 3a, som formuleras på följande vis: $2a^2 \cdot 3a$=. Tanken vara alltså att eleverna skulle ha lättare för 1a, då regeln att addera exponenterna inte kräver någon konceptuell kunskap så länge exponenten > 1. I fallet 3a borde elever som enbart har procedurella kunskaper om multiplikation av potenser, inte nödvändigtvis förstå att $a = a^1$. Om eleven inte ser detta samband blir därmed multiplikationen $a^2 \cdot a$ svår att genomföra. Allmänt sett visade sig eleverna mycket riktigt ha svårare med 3a. Bara 34,3% svarade rätt på 3a, jämfört med 1a, där 58,2% svarade rätt. Även på gruppnivå hade samtliga grupper bättre resultat på 1a än på 3a.

Både Tomas och Sofia svarade rätt på uppgift 1a i enkäten. Däremot fick båda problem under intervjuerna när de skulle förklara sina resonemang. Troligtvis spelade nervositet en viss roll här och båda verkade försöka hetsa fram ett svar. En intressant iakttagelse var att Sofia tolkade p som ”poäng” och uttrycker

> S: ” $2 \cdot 3 = 6$ poäng och de där uppe: upphöjt till 6”.

Sofia reflekterar inte över hur multiplikationsprocessen ser ut och kommenterar inte att hon väljer att multiplicera exponenterna. Tomas, å andra sidan verkar vara mer medveten om att man måste ta hänsyn till specifika regler i detta fall:

> T: ”jag skall först gångra 2 och 3 som blir 6 och sen blir det ju att man plussar ihop de här exponenterna då så att det blir 2 + 3”.

Tomas ser alltså ut att ha koll på proceduren men väljer ändå i sitt resonemang att lägga till ytterligare ett till exponenterna med motiveringen

> T: ”det är två (stycken) p här nere så det är en till upphöjd till så att svaret blir väl 6 upphöjt till 6”.

Båda kommer således fram till det felaktiga alternativet B som svar, även om de svarade C i enkäten.

5.3.2 Uppgift 1b

$2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2$=

Denna uppgift hade inga svarsalternativ och var enbart med på intervjuerna, som komplement till 1a. Uppgiften är strukturellt identisk med 1a, men variabeln a är satt till 10. Både Tomas och Sofia lyckades resonera sig fram till rätt resultat här, men på lite olika sätt.

Tomas visar precis som på 1a, att han har procedurell kunskap gällande multiplikation av potenser:

> T: ”2 gånger 3 är lika med 6, och sen 10 upphöjt till 3 gånger 10 upphöjt till 2 det blir ju tio upphöjt till 5”.

Här får han alltså rätt svar utan att tveka. Han är säker på reglerna här, och behåller potensformen till han kommer till $6 \cdot 10^5 = 600000$. Även om han visade liknande kunskaper på 1a, så visar han här en mycket större säkerhet och gör ingen felaktig slutsats som på 1a. Man kan alltså konstatera att Tomas verkar ha en bättre procedurell säkerhet när det gäller tiopotenser än när basen är en bokstav. Denna procedurella trygghet skulle enligt de teorier som presenterats tidigare, kunna bygga på en djupare begreppslig förståelse för just tiopotenser. Man kan tänka sig här att Tomas sedan tidigare har en bra begreppslig förståelse när det gäller multiplikation med multipler av 10: 10, 100, 1000 etc. Han vet då att t.ex. 35 ·

1000 innebär att man skall lägga på tre nollor på 35 och att svaret då blir 35000. Om han dessutom med lätthet kan tolka och intuitivt läsa $10^3 = 1000$ så kan han i uttrycket $2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2$ direkt koda om detta till $2000 \cdot 300$ vilket då blir $2 \cdot 3$ följt av fem nollor. Det är inte säkert att han behöver göra just denna omvandling vid varje tillfälle utan att transfern från multiplikation av tal i grundform till multiplikation med tal i grundpotensform redan har gjort att han har fått en begreppslig förståelse för det sistnämnda. Tomas tvekan inför multiplikation av potenser med en bokstav som bas skulle på samma sätt kunna bero på att han saknar en djupare förståelse för multiplikation av bokstäver. Han verkar inte direkt kunna se att $a^3 \cdot a^2$ är detsamma som en multiplikation av totalt fem stycken a och även om han procedurellt uttrycker att han skall addera de två exponenterna, gör en osäkerhet kring svaret att han modifierar sin procedur felaktigt.

Sofia angriper denna uppgift lite annorlunda. Hon verkar ha en procedurell förståelse av hur man omvandlar en tiopotens till en multiplikativ process, d.v.s. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$. Hennes uträkning blir med denna modell: $2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 = 600000$. Hennes multiplikation utförs stegvis: $2 \cdot 10 = 20 \rightarrow 20 \cdot 10 = 200$ etc. I detta fall blir hennes uträkning helt korrekt, även om hon faktiskt inte visar några procedurella färdigheter i potensmultiplikation.

Figur 5.1 Sofias anteckningar 1b

$2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2 =$

$2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 = 600\,000$

$20 \cdot 10$

$200 \quad 2000 \quad 6000 \cdot 10 \quad 60000 \cdot \quad 600.000$

5.3.3 Uppgift 1c

$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 =$

Tomas löser denna uppgift på samma självklara sätt som uppgift 1b. Han konstaterar först att:

> T: ”man skall ju aldrig börja med plus utan man skall börja med gånger, multiplikation”

Figur 5.2 Tomas anteckningar 1c

$2 \cdot 10^3 = 2000$

$2000 + 300 = 2300$

$3 \cdot 10^2$

Sen skriver han om de båda talen från grundpotensform till grundform och adderar dem. Processen är klar och tydlig och han tvekar inte. Han svarar enbart 2300 och reflekterar inte över att man skulle kunna skriva om detta tal i grundpotensform. Detta är självklart inte nödvändigt och inte heller efterfrågat. Tomas lösning ser alltså i princip ut så här:

$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 = 2000 + 300 = 2300$

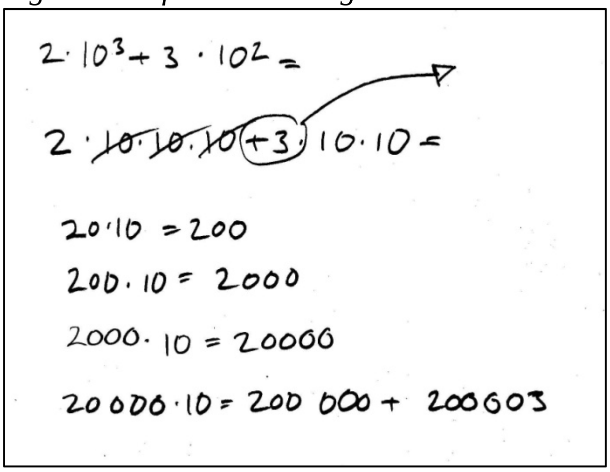
Om Tomas hade följt samma mönster som i 1b och behållit grundpotensformen hela vägen till slutet, hade han istället löst uppgiften:

$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 = 2{,}3 \ \cdot \ 10^3 = 2300$

Man skulle kunna tänka sig att en elev som gör på det sistnämnda sättet börjar med att omvandla $3 \cdot 10^2 = 0{,}3 \cdot 10^3$ och sedan addera 2 med 0,3. Denna typ av lösning skulle jag tolka som mer utvecklad än Tomas lösning även om den kanske inte är snyggare eller nödvändig. Tomas val att vid addition av potensuttryck gå ner en nivå i komplexitet skulle kunna tyda på en begränsad begreppslig förståelse gällande potensuttryck, men det är inte säkert. En tanke här är att elever i allmänhet kanske tänker att det inte finns några liknande regler vid addition av potensuttryck som det finns vid multiplikation. Hade elever tvingats att försöka utmana denna föreställning hade de eventuellt fördjupat sina konceptuella kunskaper gällande potensuttryck.

Sofia angriper denna uppgift på samma sätt som hon närmade sig 1b. Hon skriver först om talen från grundpotensorm till en serie multiplikationer, som man kan se i figur 5.3

Figur 5.3 Sofias anteckningar 1c



Problemet uppstår när hon kommer till trean. Hon ringar in den och drar en pil med kommentaren:

> S: ”Jag tar den senare för den är plus”.

Här kan man ana att hon utgår från att man först multiplicerar och sedan adderar. Hon visar dock klart att denna kunskap om prioriteringreglerna enbart är ytligt procedurell och att hon inte egentligen förstår vad den innebär, i alla fall inte i denna kontext. Hon lyfter alltså ut trean och multiplicerar resten av talen så hon får 200000. Hon avslutar med att addera 3 till 200000 och får alltså svaret 200003.

När jag börjar introducera nästa uppgift inser hon:

> S: ”Nu kom jag på att jag räknat fel på den, men det gör ingen… jag hade tänkt fel här, att det är liksom plus 3 gånger 10. Att det är gånger där med”.
> I: ”Hur skulle du gå vidare… ”
> S: ”Jag hade gångrat det med 3 också. 200 000 gånger 3”
> I: ”Okej, vad skulle svaret bli då?”
> S: ”600 000”

Sofia inser alltså att hennes tidigare resonemang inte riktigt stämmer. Hon ser att additionen inte bara avser trean utan även de kommande tiorna och att hon resonerat fel. Det kan hända att hon kunnat lösa denna uppgift om vi tagit det lugnt och börjat om. Jag upplevde att hon här försökte stressa fram ett nytt svar eftersom vi redan var klara med uppgiften. Det står i vilket fall klart att hon saknar en klar och tydlig struktur för att lösa denna uppgift. Felen hon gör känns lite godtyckliga och baserade på chansningar.

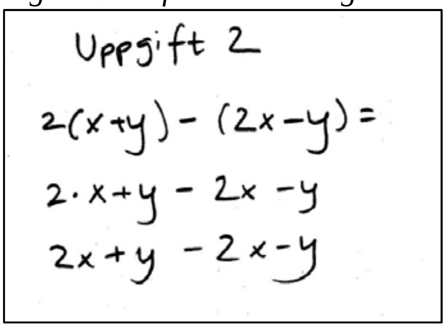
5.4 Uppgift 2

$2(x + y) - (2x - y)$=

A. $3y$
B. y
C. $4x + 3y$
D. $4x + 2y$

Som jag redan konstaterat i den allmänna diskussionen kring resultaten, var denna uppgift svår för eleverna. Varken Tomas eller Sofia kom fram till det rätta svaret A utan famlade i mörker efter något sätt att angripa problemet. Tomas försökte till slut inte ens att få fram ett svar utan gav upp. Sofia däremot gör följande uträkning:

Figur 5.4 Sofias anteckningar 2



Hon gör således fel både när hon multiplicerar in tvåan i den första och när hon tar bort den andra parentesen. Hon drar sedan slutsatsen att svaret borde bli B, d.v.s. y.

Som jag redan konstaterat verkar alltså elevernas kunskaper om denna typ av algebraiska uttryck enkelt glömmas bort över tid. Det finns i och för sig inget som säger att varken Tomas eller Sofia kunde hantera denna typ av beräkningar i åttan eller nian, men det faktum att hela klassen svarade dåligt på just denna uppgift men bra på resten av dem, talar för detta. Både Tomas och Sofia säger att de inte gått igenom detta än, men samtidigt är detta en fråga som man enligt TIMSS förväntas kunna i åk 8.

Den procedur man initialt behöver kunna för att lösa denna uppgift är hur man strukturellt lägger upp lösningen genom att eliminera parenteserna. Sofia verkar ha koll på detta enligt hennes anteckningar. Tomas konstaterar också:

> T: ”Jag vet att man skall börja med att räkna parenteserna, vet jag. Att man skall försöka ta bort dom så det blir enklare att räkna ut det men…”

De två regler eleverna inte klarar av här är att multiplicera in tvåan i den första parentesen och teckenbytet som är nödvändigt i den andra. Vi kan jämföra uppgiften med ett motsvarande uttryck utan okända som skulle kunna ligga till grund för transfer från rent aritmetiska till algebraiska uttryck. Om vi sätter $x = 3, y = 5$ så får vi $2(3 + 5) - (2 \cdot 3 - 5) =$. För att lösa denna uppgift behöver eleverna *enbart* känna till prioriteringsreglerna. Först räknar man ut parenteserna, sedan multiplikation och sedan addition/subtraktion. Rent strukturellt borde en elev därför lösa denna uppgift:

$$2(3 + 5) - (2 \cdot 3 - 5) = 2(3 + 5) - (6 - 5) = 2 \cdot 8 - 1 = 16 - 1 = 15$$

Genom denna lösningsmetod tillämpar således eleven varken multiplikation in i parenteser eller teckenbyte, då det inte behövs. Transfer från aritmetik till algebra blir därför enbart möjlig när det gäller prioriteringsreglerna. Det är troligt att det är just så här matematikundervisningen går till på högstadiet. Prioriteringsreglerna tillämpas i flera kontexter och kunskapen om dessa följer med upp i gymnasiet, medan de övriga reglerna enbart används vid räkning med bokstäver och därför förblir dimmiga. En egen pedagogisk tanke är att man i högstadiet skulle kunna variera sig lite när det gäller aritmetiska uttryck och kanske tillämpade t.ex. distributiva lagen även här. Uttrycket $2(3 + 5) = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 5)$ borde vara en bra utgångspunkt för diskussion. Man kan även när det gäller teckenbyte diskutera logiskt kring aritmetiska uttryck. Jag gissar att det är lättast att börja med addition inne i parentesen, t.ex. $13 - (2 + 5) = 13 - 2 - 5$. Att öva på att tillämpa och analysera dessa regler på aritmetiska uttryck där logiken är lättare att se, borde vara en bra modell för att möjliggöra transfer till rent algebraiska uttryck.

5.5 Uppgift 3

Denna uppgift bestod i enkäten endast av 3a, men vid intervjutillfället kompletterade jag denna med 3b, för att möjliggöra en fördjupad analys.

5.5.1 Uppgift 3a

$2a^2 \cdot 3a$=

A. $5a^2$
B. $5a^3$
C. $6a^2$
D. $6a^3$

Not: på enkäten var svarsalternativen på denna uppgift felaktigt noterade E-H istället för A-D.

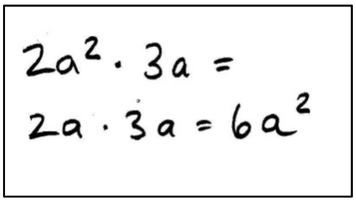
Denna uppgift bör jämföras med uppgift 1a då de är snarlika. Som jag tidigare nämnt hade fler elever fel på 3a än på 1a i enkätundersökningen. Enligt skolverkets analys av TIMSS 2007, beror svårigheterna till stor del på att eleverna löser uppgiften $2\mathrm{a}^2 \cdot 3\mathrm{a} = 6\mathrm{a}^{2+0} = 6\mathrm{a}^2$ (Skolverket, 2008, s. 91). Många tolkar alltså inte $\mathrm{a} = \mathrm{a}^1$ utan $\mathrm{a} = \mathrm{a}^0$. Andelen som svarade $6\mathrm{a}^2$ av åttondeklassarna i referensgruppen var 46,4 % medan 43,3 % av de som gjorde enkäten svarade så. Skillnaden mellan de som gjorde denna feltolkning skiljde sig alltså inte så mycket mellan referensgruppen och gymnasieeleverna. När det gäller det korrekta svaret $6\mathrm{a}^3$ var det 34.4 % av gymnasieeleverna som svarade rätt medan bara 18 % i referensgruppen gjorde det.

Tomas klarar denna uppgift. Han börjar med att multiplicera 2 och 3 och får 6. Han konstaterar då att det måste vara alternativ C eller D som är rätt svar. Han tillägger sedan:

> T: ”sen har vi $a^2 \cdot a$ kvar och det är ju a^3, antar jag”.

Tomas verkar inte helt säker här. Han antar att det måste vara rätt svar, men han väljer lite tveksamt ett av de två alternativ som finns kvar: C och D. Som jag tidigare konstaterat verkar Tomas ha problem med algebraiska bokstavsuttryck och även om han får denna rätt är det med viss tvekan.

Figur 5.5 Sofias anteckningar 3a



Sofia får det förväntade felaktiga svaret $6a^2$ när hon resonerar sig fram. Hennes lösningsmetod är dock inte lika traditionell. Hon resonerar:

> S: ”Jag hade tagit 2a · 3a först, vilket blir 6a. Sedan har jag tvåan där uppe, […] så lägger jag till den där. Så det blir $6a^2$”.

Detta resonemang tyder på att Sofia här inte bara har en felaktig procedurell förståelse, hon verkar dessutom lösa uppgiften lite chansartat. Om man jämför med hennes resonemang kring uppgift 1a så väljer hon där att multiplicera exponenterna, även om hon inte uttrycker det rakt ut. Här är det någon annan typ av logik som ligger bakom hennes lösningsmodell. Hennes problem blir ännu tydligare när vi tittar på nästa uppgift.

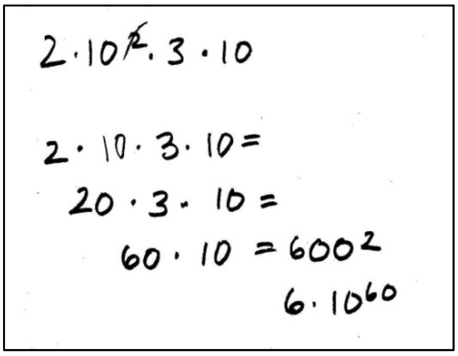
5.5.2 Uppgift 3b

Uppgift 3b

$2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10=$

Sofia angriper denna uppgift på liknande sätt som den förra, genom att först ta bort exponenten 2 och sedan utföra multiplikationen.

Figur 5.6 Sofias anteckningar 3b



Precis som i 3a tar hon alltså först bort exponenten 2 och sätter sedan tillbaka den när hon fått fram ett svar. Hennes resultat blir alltså 600^2. Hon fortsätter sedan:

> S: ”Man kan ju korta ner det!”
> I: ”Hur blir det då?”
> S: ”Jag hade kortat ner till $6 \cdot 10^{60}$”.
> I: ” $6 \cdot 10^{60}$! Hur fick du fram 60?”
> S: ”Jag vet inte, jag delade med 10”.
> …
> S: ”Alltså jag är jättedålig på matte”.

Det blir här ännu mer tydligt att Sofia chansar sig fram. Hon ger inga förklaringar till varför hon gör på ett visst sätt utan procedurerna verkar nästan tagna ur luften. Ett av problemen verkar för Sofia vara att hon ser på 10 och 10^2 som två olika typer av objekt. I uppgift 1b lyckas hon med relativ enkelhet multiplicera $10^3 \cdot 10^2$ genom att skriva om det som en multiplikation av 5 stycken tior. Hon borde i detta fall kunnat göra likadant och faktiskt därmed undkomma fällan att tro att $10^2 \cdot 10 = 10^{2+0}$. Om vi utgår ifrån att hennes lösningsmodell på uppgift 1b var genomtänkt, så tyder hennes oförmåga att lösa denna i princip identiska uppgift på att hon ser detta som en ny kontext. Hennes tolkning borde alltså vara att 10 och 10^2 skiljer sig åt på samma sätt som t.ex. 10 och x gör det. Jag tolkar detta som att hennes konceptuella, begreppsliga kunskap i detta område i princip är obefintlig. Hon förlitar sig helt på procedurer utan någon förståelse och när en ny okänd situation uppstår har hon ingen möjlighet till att resonera sig fram till ett svar.

Redan innan intervjun uttryckte Sofia en viss skepsis till sin egen förmåga och sa att hon till stor del chansat på testet. Någonstans här i intervjun, runt fråga 3, börjar jag också känna en uppgivenhet från hennes sida och att hon inte riktigt orkar. Denna känsla av inte kunna något är inte konstig med tanke på den analys jag här gör. Sofias osäkerhet inför varje moment och de chansningar hon upplever sig göra borde verka uttröttande och uppgivenheten är fullt förståelig.

Tomas löser denna uppgift relativt enkelt. Enda skillnaden mellan hans lösning av denna uppgift och uppgift 1b är att han här inte behåller potensformen ända till slutet. Han löser uppgiften $2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10 = 2 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 10 = 200 \cdot 3 \cdot 10 = 600 \cdot 10 = 6000$. Precis som i tidigare fall är Tomas självsäker när han behärskar situationen och han tvekar inte.

5.6 Uppgift 4

$a = 3 \ och \ b = -1$

Vad är värdet av $2a + 3(2 - b)$?

A. 15
B. 14
C. 13
D. 9

Tomas resonerar sig här ganska enkelt fram till rätt svar. Han resonerar högt och även om han tvekar lite är han ändå snabb med att se vilka som är de korrekta procedurerna här. Han börjar med parentesen och konstaterar direkt att $2 - (-1) = 2 + 1 = 3$. Sen löser han uppgiften strukturerat som man kan se i hans anteckningar. Slutligen konstaterar han att $6 + 9 = 15$. Man kan se på Tomas anteckningar att han inte skriver ut =-tecken och slarvar med parentestecknen, men förutom denna rent formella kritik behärskar han uppgiften.

Figur 5.7 Tomas anteckningar 4

$$2 \cdot 3 + 3(2 - (-1)$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 3$$

$$6 + 3 \cdot 3$$

Sofias resonemang på denna uppgift är intressant att iakttaga. Hon vet att om det är två minustecken efter varandra, så blir det plus. Hon sätter också in värdena på rätt ställen i uttrycket, som man kan se i figuren (även om det på första raden blivit lite fel). Efter detta är det två allvarliga fel som går att urskilja. För det första ignorerar hon prioriteringsreglerna helt. Jag har redan konstaterat att hon på uppgift 1c inte lyckades reda ut en addition mitt i en mängd multiplikationer, men i det fallet försökte hon i alla fall. Här utför hon uträkningen strikt från vänster till höger utan någon kommentar om att det eventuellt bör ske i en viss ordning. För det andra ignorerar Sofia parentestecknen. Hon skriver inte ut dem alls i sina anteckningar och gör inte heller några muntliga kommentarer om parentesen. Om Sofia hade använt prioriteringsreglerna rätt i övrigt hade hon alltså ändå fått fel svar, då hon skriver om $3(2-(-1)) = 3 \cdot 2 - (-1)$.

Figur 5.8 Sofias anteckningar 4

$$a = 3$$

$$b = -1$$

$$2a \cdot 3 + 3 \cdot 2 - -1$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - -1$$

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$6 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$9 \cdot 2 + 1$$

$$18 + 1 = 19$$

Eftersom 19 inte finns med bland svarsalternativen inser Sofia här att hon gjort fel. Efter en tids tyst funderande över hur hon skulle kunna göra om uppgiften, kommer vi överens om att lämna den och gå vidare till nästa.

I detta läge börjar det kännas lite olustigt att fortsätta intervjun. Som intervjuare, men också som vuxen, upplyst lärare börjar jag känna att distansen mellan mig och Sofia växer. Jag upplever att jag här utsätter henne för något som får henne att må dåligt och som gör att hon allt mindre anstränger sig för att lyckas. Jag tycker mig se att hennes känsla av misslyckande får henne att allt mer distansera sig, både till mig och till uppgiften.

Detta är såklart en ytterst subjektiv tolkning och den rör sig delvis utanför denna uppsats ramar. Men även om de psykologiska aspekter som jag här tolkar handlar om annat än matematisk kunskap, kan man funderar på vad det är som händer här. Det är rimligt att anta att de matematiska områden som Sofias på riktigt behärskar, både med avseende på procedurella och konceptuella kunskaper, egentligen är på en nivå som är mycket lägre än den vi befinner oss på här. Om jag hade ställt frågor till henne som från början riktade sig till låg- eller mellanstadiebarn, så kanske hon uppfattat uppgiften som enkel och inte behövt uttrycka hur ”dålig” hon är på matematik. Det som är riktigt oroväckande är dock att Sofia inte har tillräckliga kunskaper för att lösa uppgifter som riktar sig till elever i åttonde klass, trots att hon går första året på gymnasiet. Om vi antar att matematikundervisningen i grund- och gymnasieskolan är progressiv så kommer elever som går Matematik 1, men som egentligen har en matematisk förståelse på Sofias nivå, riskera att hamna i en situation där de inte har några möjligheter att ta till sig annat än ytlig, procedurell kunskap. Någonstans på vägen blir alltså glappet mellan verklig kunskap och förväntad kunskap alltför stort, och risken ökar att eleven ger upp, uttrycker avsky inför ämnet eller helt lägger ner.

5.7 Uppgift 5

I Zedland anges den totala fraktkostnaden för ett föremål med formeln $y = 4x + 30$, där x är vikten i gram och y är kostnaden i zed. Om man har 150 zed, hur många gram kan man låta frakta?

A. 630
B. 150
C. 120
D. 30

Sofia löser uppgiften ganska snabbt.

> S: ”$4 \cdot 150$ hade jag tagit. $4 \cdot 150 = 600, 600 + 30$, så det blir 630 vilket är A på den här uppgiften. Så jag hade valt A”.

Jag tror att både jag och Sofia är nöjda med svaret. Även om hon här svarar fel, känner jag att det är psykologiskt viktigt att hon får känna att hon enkelt kommer fram till ett svar. I detta fall blir det nästan onödigt att analysera hennes metod, då jag upplever det som uppenbart att hon inte reflekterar över den. Det finns en utsaga här: $4x + 30$, och ett värde: 150. Sofia sätter x=150 och sätter in detta i utsagan. Hon nöjer sig med svaret när hon ser att det finns med som ett svarsalternativ.

Tomas kommer fram till att y måste vara 150. Han testar sig sedan fram:

T: ”150 = 4 gånger nånting man skall frakta. Vi säger att man skall frakta 30… $4 \cdot 30 + 30$, så blir ju det: $4 \cdot 30 = 120$, plus 30 blir ju 150 så då stämmer ju det. Så mitt svar blir D, 30”.

Även om Tomas inte här tillämpar någon algebraisk metod för ekvationslösning, är svaret och resonemanget rätt. Jag kan ur detta dock inte dra några slutsatser kring hans procedurella kunskaper när det gäller formell ekvationslösning.

5.8 Uppgift 6

Vilken punkt återfinns på linjen $y = x + 2$?

A. $(0; -2)$
B. $(2;\ -4)$
C. $(4;\ 6)$
D. $(6;\ 4)$

Jag har redan varit inne på denna uppgift vid genomgången av allmänna resultat. Det som verkar vara problematiskt för eleverna på denna uppgift är själva notationen. Tomas uttrycker:

T: ”Den var jag alltså helväck på. Sånt här vi inte jobbat med tror jag inte. Det kanske inte är så svårt egentligen, men det är det här tecknet här som jag inte begriper”.
I: ”Semikolonet där i mitten, är det det du menar?”
T: ”Ja, det har vi aldrig hållit på med”.
I: ”Kan du gissa vad det betyder eller skulle du kunna… vad tror du om du skulle försöka på nåt sätt ändå!?”
T: ”Jag är totalt väck på den här. Fast i och för sig om man… fast det borde ju nästan vara C där för om man börjar med 4 och säger att 4 är y , eller att 4 är x… och x +2 blir 6. Det är så långt jag kan komma liksom … att man tar fyran och plussar 2, så blir det 6”.

Sofia har liknande tankar:

S: ”Vilken punkt återfinns på linjen? Jag fattar inte, vad då punkt och vad är y och vad är x i det?”
I: ”Skulle du på något sätt kunnat gissa på ett svar?”
S: ”Jag hade bara gissat!”
I: ”Du hade bara gissat rakt upp och ner?”
S: ”Då hade jag gissat på… vad hade jag gissat på? Jag hade kanske gissat på A!?”
I: ”Kan du förklara varför det blev A just?”
S: ”Jag ser inte hur y eller x kan bli… nej vänta. Jag har ingen aning faktiskt. Det beror på… till exempel uppgiften innan, stod det ju vad y, hur man hade det… jag kanske hade tagit C”.
I: ”Och varför det?”
S: Ja, för det står plus 2 så antagligen… det kan ju vara ett tal innan. Där x står kan det ju varit 4 till exempel. Och på y… jag har faktiskt ingen aning. Jag hade bara chansat på typ C.

Båda kommer alltså fram till rätt svar om än väldigt tveksamt. Det är dock inte säkert att uppgiften hade varit lättare om koordinaterna hade varit separerade av ett kommatecken. Man kan tänka sig att det var länge sen eleverna stötte på den här typen av problem och själva tanken på att en punkt representeras av två stycken koordinater kanske inte är helt självklar.

De frågar sig båda vad som är x och vad som är y, men ingen utgår i sitt resonemang från begreppet punkt. I stället letar de efter en funktionell procedur där man stoppar in ett värde och får ut ett annat. Om de varit säkra på definitionen av en punkt och att den representeras av två tal, där det första är x-koordinaten, hade de kanske ändå tyckt semikolonet varit konstigt om de var vana vid en annan notation. Deras resonemang hade dock innehållit nån form av hänvisning till punktbegreppet. Om man vill använda Sfards objektsidé så kan man tolka det som att eleverna här har svårt att uppfatta punkten som ett objekt, definierat som ett talpar och har därför svårt att använda den i en funktionell process.

Skolverket tar i TIMSS-rapporten inte upp eventuella tolkningsproblem som semikolonet skulle kunna medföra, men de noterar:

> ”Denna testuppgift bedöms inte matcha uppnåendemålen i kursplanen för grundskolans matematik, vilket också kan förklara den relativt låga lösningsfrekvensen”.
> (Skolverket , 2008, s. 95)

5.9 Uppgift 7

Ta produkten av *a* och *b,* subtrahera *c* och dividera sedan det du får med *d*. Vad får du då?

A. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$
B. $\frac{ab-c}{d}$
C. $ab - \frac{c}{d}$
D. $\frac{a+b-c}{d}$

Här resonerar Tomas på följande sätt:

> T: ”Så skall vi se, produkten av a och b, det är ju om man sätter a och b bredvid varandra utan nåt emellan! Så det är ju som ett gångertecken. Och subtrahera med c, dividera sedan det du får med d. Det måste ju vara B, för här står det ju tydligt a och b bredvid varandra som att man tar gånger, alltså produkten, minus c och sen dividerar man allt med d”.

Sofia är inte lika säker, men kommer efter tag också fram till rätt svar:

> S: ”Produkten, jag gissar på att det är gånger. Eh, produkten… jag måste tänka nu. Det finns subtrahera, dividera, produkten… jag gissar på att det är gånger! Subtrahera, är det minus? Jag hade tagit B. För att det står produkten… nä jag hade tagit A, nä skojar bara. Vänta lite. Nä, jag hade tagit B”.
> I: ”Kan du förklara det en gång till?”
> S: ”Ta produkten av a och b. Här händer det ju något jag som inte kan förklara, jag vet inte hur. Sen subtrahera c, alltså minus c och sen dividerat, delat med d och då får jag B”.
> I: ”Om det hade varit ett prov det här, tror du att du hade suttit så här länge och tänkt eller hade du chansat tidigare?”
> S: ”Jag hade nog suttit och tänkt ett tag på den och försökt komma på…”

Uppgiften var tänkt som ett test på elevernas förståelse av begreppen ”produkt”, ”subtrahera” och ”dividera”. Tomas verkar ha full förståelse för alla begrepp och resonerar klart och tydligt fram till rätt resultat. Sofia är mer osäker, men testar sig ändå fram. Även om hon inte riktigt förstår att uttrycket ab är en produkt så resonerar hon sig fram till rätt svar. Hon håller på relativt länge med denna uppgift och det är också därför jag frågar henne om hon tror att hon hade suttit så länge med en sån här uppgift på ett prov.

Som jag uttryckt tidigare så upplevde jag att Sofia lätt gav upp i någon form av uppgivenhet. Här visar hon dock att hon vågar resonera, även om det är lite chansartat. En förklaring till detta ökade engagemang finner man eventuellt i en kommentar gällande den förra uppgiften. Efter Sofias resonemang på uppgift 6, där hennes analys, om även där något chansartat, ledde henne fram till rätt punkt på linjen, så kommenterade jag detta:

> I: Okej, bra, det hade varit en bra chansning. Det var rätt! Så det kan ju vara jättebra att chansa.

Den här typen av kommentarer kan kanske tolkas som ledande och ovetenskapliga i en intervju som skall försöka vara objektiv, men som jag förklarat tidigare upplevde jag i rollen som intervjuare, att jag utsatte Sofia för något hon inte uppskattade. Denna typ av kommentarer blev därför en slags motreaktion från min sida, en omedveten konsekvens av min önskan att ställa allt till rätta. Måhända var det dock denna uppmuntran som gjorde att Sofia här gav uppgiften lite extra tid och inte gav upp på en gång.

5.10 Uppgift 8

Om vi vet att a, b och c är <u>heltal</u> och att:
$a < 0$
$b > 0$
b är ett jämnt tal
$a \cdot b = c$
Vad kan vi då säga om c (**OBS**! **flera svar kan vara rätt i denna uppgift**)?

A. $c > 0$
B. $c \geq 0$
C. $c < 0$
D. c kan inte vara 11
E. $c \neq 0$
F. $c \leq a$
G. c kan inte vara -11

Som jag nämnde i den allmänna diskussionen om resultaten, var denna uppgift dåligt formulerad och det är svårt att dra några slutsatser utifrån testresultaten. Intervjuerna gav dock några intressanta iakttagelser.

Tomas uttrycker först en osäkerhet kring hur man utläser olikhetstecknen. Efter viss tvekan tolkar han dem dock rätt och gör sedan två antaganden. Han antar att $a = 2, b = -2 \rightarrow c = 2 \cdot (-2) = -4$. Han är tydlig här och konstaterar att alla tre villkoren för a och b är uppfyllda. Han drar utifrån detta slutsatsen att c måste vara ett negativt jämnt tal. Även om Tomas inte riktigt förstår tecknen $\neq$ och $\leq$ så kommer han i sitt resonemang fram till exakt rätt svar. Det mest talande här är att han skapar en egen metod för att angripa uppgiften. Han överför en uppenbart numerisk metod till en förmodat ny kontext. Mer populistiskt uttryckt skulle man kunna säga att han inför en ny uppgift hittar ett passande verktyg i sin matematiska verktygslåda. Jag antar här att Tomas inte är van vid att lösa den här typen av uppgifter. Hans tvekan inför olikhetstecknen talar för detta, men jag kan inte vara helt säker . Om så inte är fallet handlar det inte om transfer här utan om ett rent procedurellt angreppssätt om än dock konceptuellt förankrat i vissa begrepp (t.ex. jämna tal).

Sofia lyckas inte lösa uppgiften. Hon börjar med att anta:

> S: ”Om vi säger att alla dom är heltal och att a är noll och b är noll”

Lite längre fram resonerar hon:

> S: ”Gapet mot noll, det betyder att nollan är störst! Nollan och så gap mot b- det betyder att b är störst! Och b är ett jämnt tal… men om det är noll. Om noll är b… eller det är större än noll. Vad är då c? Jag har faktiskt ingen aning…”.

Hon lyckas inte reda ut begreppen här och har ingen process hon kan ta till för att strukturera sina resonemang. Sofia ger upp genom att utan någon rimlig förklaring chansa på alternativ E.

5.11 Uppgift 9

Jag har i den allmänna resultatdiskussionen dragit vissa slutsatser när det gäller elevernas förmåga att beskriva talen $\sqrt{2}$ och π, utifrån det allmänna testet. Det är svårt att göra några ytterligare analyser utifrån intervjuerna då dessa pekar på ungefär samma sak som den allmänna analysen.

Sofia har inte så mycket att säga om $\sqrt{2}$. Hon kan inte komma fram till vad det blir, men när jag frågar om hon skulle kunna säga vad $\sqrt{9}$ är, får hon rätt svar. Hon chansar på att $\sqrt{2} = 1$ men ångrar sig sedan.

När det gäller π så konstaterar hon:

> S: Det enda jag vet är att pi är 3,14, men jag vet inte varför det är det. Varför man använder det? Ja? Jag har faktiskt ingen aning där heller!

När hon fått tänka ett tag kommer hon på att man använder π när man räknar ut cirkelns area. Efter det har hon inget mer att tillägga.

Tomas har en intressant teori om $\sqrt{2}$:

> T:"Jag har för mig att det var … att vi lärde oss det i nian att det talet var ett sånt där imaginärt tal. Vad hette det? i eller nånting. Att det inte finns, att det går inte att ta roten ur 2. Det var nånting sånt, jag minns inte riktigt vilket tal det var".

Han gör här ingen rimlighetsprövning av denna teori men lyckas korrekt återge roten ur 4, 64, 49 och 36. Det är slående att han inte reflekterar över det orimliga i att $\sqrt{2}$ inte skulle finnas, att detta skulle vara en omöjlig operation. Den transfer jag nämner i den allmänna genomgången, av rotoperationen mellan kontexterna $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, ser alltså inte ut att vara möjlig för Tomas. Eventuellt är detta lite av en övertolkning och att han mycket väl skulle kunnat resonera sig fram längre om jag påpekat för honom att $\sqrt{2} \neq i$.

Tomas avslutar intervjun med att konstatera att $\pi \approx 3{,}14$ och att det är ett tal som innehåller oändligt många decimaler och som används t.ex. när man skall räkna ut arean på en cirkel.

6 Diskussion

Jag har i detta arbete godtagit bilden av svensk matematikundervisning som i första hand procedurellt inriktad. Jag vill i detta kapitel ge exempel på några negativa konsekvenser denna typ av undervisning kan ge, och argumentera för att detta bör förändras och att vi i högre grad än idag bör ha en konceptuellt inriktad undervisning. Jag vill också här ge några förslag på hur undervisningen kan riktas åt det mer konceptuella hållet. Det nedslag i verkligheten jag här har gjort ger ingen sammansatt bild av matematikundervisningen i Sverige utan bör snarare ses som en lokal analys där jag har iakttagit vissa tendenser, som eventuellt går att sätta i ett större sammanhang. Mina teorier är snarare menade som öppningar till teoriprövningar än teoriprövande i sig. Min studie bör således tolkas som teoriutvecklande. Till stor del blir denna diskussionsdel en sammanfattning av de analyser jag redogjort för i resultat och analyskapitlet. Denna del blir därför något mer kortfattad än vad som är brukligt. För att få en komplett bild av mina slutsatser bör man därför läsa båda detta och resultat och analyskapitlet.

De kunskaper man får i skolan bör vara utvecklande. Att växa handlar om att i samspel med andra skapa sin egen verklighet, och skolan har här en viktig roll som vägledare. När det gäller matematisk kunskapsutveckling, är den på samma sätt en process där procedurell och konceptuell kunskap utvecklas parallellt och där eleven baserat på det hon redan kan steg för steg utvecklar allt djupare kunskaper. I det som kallas för en procedurellt inriktad skola riskerar denna utveckling att bromsas. När eleverna under sitt första år på gymnasiet får i uppgift att förenkla ett algebraiskt uttryck misslyckas de flesta. Det skulle t.o.m. kunna vara så att de hade svarat bättre på uppgiften när de gick i åttan. Som försvar hävdar mina intervjupersoner att de inte gått igenom dessa moment än, en sanning med modifikation. De har räknat med dessa typer av uttryck under lång tid, åtminstone både i åttan och nian. Mer rätt vore att säga att de glömt bort hur man gör. Vissa matematiska kunskaper verkar alltså vara flyktiga och behöva repeteras konstant för att inte glömmas bort. På samma sätt svarar eleverna som går Matematik C helt fel när de ombeds hitta en punkt på en linje. Denna matematik som tillhör grundskolan borde för flertalet elever vara elementär, men ändå utgår 71% av eleverna åtminstone skenbart från att en punkt skrivs på formen (y;x) snarare än (x;y). Min teori om att de, p.g.a. det fokus Matematik C lägger på funktionsbegreppet, skulle se talparsformen som en variant av f(x), där x införs från höger, kanske är lite långsökt. Men faktum kvarstår ändå att de inte kopplar begreppet punkt till någon typ av representation på formen (x,y).

Så tiden verkar alltså vara en negativ faktor för viss matematisk kunskap. Min tolkning här är att den procedurella undervisningen i alltför liten grad bidrar till en förståelse hos eleverna av vad de håller på med. Om jag varje gång jag stöter på en matematisk process måste fundera på ”hur var det nu man gjorde igen?” är det inte konstigt att man med tiden glömmer bort eller blandar ihop de olika matematiska procedurer man blir serverad av läraren. I den konceptuella skolan kan man själv resonera kring hur en ny eller bortglömd procedur borde fungera, baserat på den begreppsliga kunskap man har gällande närliggande procedurer eller de objekt som proceduren behandlar. Denna väv av kunskap, där man bygger upp sin förståelse på kopplingar mellan olika procedurer och koncept verkar alltså vara en mycket mer stabil grund för lärande än den rent procedurella, där varje procedur står ensam och vinglar utan något att luta sig emot. I fallet med eleverna i ettan som inte minns hur man förenklar algebraiska uttryck borde de, om de haft tillräckliga konceptuella kunskaper, kunnat resonera sig fram till en vettig procedurell modell. Det faktum att så inte är fallet styrker alltså teorin om att elevernas tidigare undervisning varit starkt procedurellt inriktad.

Att applicera en procedur i en ny kontext benämns här som transfer. Förmågan att tillämpa transfer är beroende av vilka konceptuella kunskaper man besitter. En elev med en begreppslig säkerhet gällande vissa kontexter och de objekt som verkar där, har lättare att flytta en process mellan dessa. I mina analyser stötte jag vid flera tillfällen på situationer där transfer vore möjligt. Den vanligaste slutsatsen var dock att eleverna inte var benägna till att tillämpa transfer, p.g.a. brister i deras konceptuella kunskaper. Ett exempel är det som redan diskuterats här, där eleverna inte kan förenkla ett algebraiskt uttryck. Satt i en annan kontext hade de eventuellt lyckats bättre, t.ex. en aritmetisk kontext där variablerna är utbytta mot siffror. I en konceptuell värld, där eleverna på ett djupare plan förstår aritmetiska procedurer borde de ha lättare för att kunna flytta dessa procedurer och tillämpa dem på algebraiska uttryck, se kapitel 5.4.

Ett annat exempel jag stötte på var elevernas oförmåga att approximera ett värde på $\sqrt{2}$. Många elever på gymnasiet verkar ha koll på definitionen av ”roten ur x”, som det (positiva) tal som gånger sig själv blir x. Jag gissar att de flesta vet vad svaret på $\sqrt{4}$ är men få verkar kunna svara på rotoperationer där svaret inte är ett naturligt tal. Transfer av rotprocessen från de naturliga talen till de reella är inte helt lätt. Att dra roten ur ett kvadrattal, handlar om att behärska en begränsad del av multiplikationstabellen. Eftersom dessa, de enklaste av rotuttryck, är begränsade till ett fåtal, kan man dessutom lära sig dem utantill. Det verkar enbart vara dessa exempel som för eleverna innefattas av definitionen av ”roten ur”. Alla andra rotuttryck behandlas med miniräknare och verkar vara strikt procedurella. Att utan miniräknare flytta proceduren ”roten ur” från de enkla exemplen till de reella talen, innebär att man helt måste ändra lösningsmetod. Istället för att använda sitt minne och plocka svaret från multiplikationstabellen, måste man här tillämpa någon form av numerisk metod. Bevisligen är förmågan till den typ av transfer väldigt begränsad.

Jag tror att det som lärare kan vara bra att fundera på hur man kan ge eleverna kunskaper som kan resultera i transfer. Ett exempel som jag tog upp i min analys var att applicera distributiva lagen och parenteshantering på rent aritmetiska uttryck. Jag ger ett sådant exempel i kapitel 5.4. Det är lite ironiskt att denna typ av övningar undviks då de upplevs som onödigt omständliga, då det finns enklare sätt att utföra operationen på. Ett annat exempel jag tar upp är addition av tal i grundpotensform. Att skriva $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 = 2 \cdot 10^3 + 0{,}3 \cdot 10^3 = (2 + 0{,}3) \cdot 10^3 = 2{,}3 \cdot 10^3$ istället för på det traditionella sättet kan kanske verka onödigt komplicerat, men skulle kunna ge en fördjupad kunskap om tiopotenser. Ett tredje exempel, som jag inte tidigare diskuterat, är den s.k. pq-formeln. Eleverna lär sig, med hjälp av denna formel, enkelt att lösa andragradsekvationer. Denna formel är ett bra exempel på hur de serveras något som de inte har någon som helst chans att förstå innebörden av. Även om läraren visar hur man härleder den, kommer de flesta elever enbart se denna som ett rent procedurellt verktyg där man stoppar in två värden i ena änden och får ut två i andra. Även här kan man hävda att eventuella alternativ till pq-formeln är onödiga. Varför göra på ett mer komplicerat sätt när man redan har en procedur som snabbt och enkelt låter dig komma fram till rätt svar? Jag minns själv när jag presenterades för alternativet, kvadratkomplettering. Helt plötsligt förstod jag varför svaren i en andragradsekvation blev som de blev. Dessutom lärde jag mig behärska kvadreringsreglerna. Även om pq-formeln kanske går något snabbare och kräver lite mindre tankekraft har jag från den dagen aldrig, för eget bruk använt den, då den för mig representerar oinspirerande och tråkig, procedurell matematik.

I min analys har jag till stor del gått bort från att förklara fenomen utifrån Sfards teori om att se matematiska begrepp som objekt. Jag bör därför här visa på något exempel där denna förklaringsmodell går att applicera. När Tomas i uppgift 1 och 3, multiplicerar och adderar tiopotenser gör han detta med en tydlig självklarhet. När han sedan applicerar andra objekt på dessa procedurer får han problem. Som vi ser i analysen har han alltså svårare för $p^3 \cdot p^2$ än $10^3 \cdot 10^2$. En förklaring här är att både p^x och 10^x inte bara kan ses som objekt utan även procedurer. Jag pekar i min analys på att Tomas med enkelhet kan greppa tanken på 10^x som en etta med x nollor, alternativt en multiplikativ serie med x stycken tior. På detta sätt kan han betrakta tiopotenser som objekt som i sin tur går att använda i nya processer. När det gäller p^x verkar han inte med samma säkerhet kunna objektifiera denna process utan letar i fallet $p^3 \cdot p^2$ efter rena procedurella regler snarare än att utifrån begreppslig förståelse resonera sig fram. I detta fall blir han alltså beroende av att han kommer ihåg processen rätt, vilket just här resulterar i att han gör fel.

På samma sätt ser man att Sofia verkar se på a och a^2 som två helt skilda typer av objekt. Detta gäller även 10 och 10^2. Att multiplicera dessa olika typer av objekt med varandra blir därför problematiskt. Det intressanta här är att Sofia faktiskt har lättare för $10^2 \cdot 10^3$ än $10^2 \cdot 10$. Förklaringen bör ligga i att hon i det första fallet faktiskt utför en procedur med procedurer snarare än med objekt, där hon först översätter tiopotenserna procedurellt: $10^2 = 10 \cdot 10$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$ och sedan sätter in dessa uttryck i uträkningen. I det andra fallet uppstår förvirring då denna ersättningsprocedur enbart går att utföra på ett av ”objekten”. Även om det skenbart borde vara lättare för Sofia att utför den andra multiplikationen blir det därför tvärtom.

Det kanske är i detta läge det är dags att kasta in brasklappen. För det behöver göras. Som jag skrev i min inledning försökte jag vid införandet av logaritmer i en Matematik C-kurs utforma undervisningen från ett konceptuellt perspektiv. De svårigheter som jag där upplevde fick mig att tveka över om det faktiskt var möjligt med konceptuell undervisning. Det är troligt att en övergång till en mer konceptuellt inriktad undervisning måste ta tid, och framförallt genomsyra hela skolväsendet, från förskolan upp till gymnasiet. Att tro att jag skulle kunna ge elever konceptuella kunskaper på Matematik C-nivå, när de till viss del inte ens har denna typ av djupa kunskaper ens på högstadienivå, är kanske omöjligt. Det glapp (alternativt: den avgrund) som uppstår mellan förväntad och verklig förståelse när en elev med enbart ytligt procedurella kunskaper kommer till gymnasiet verkar kunna generera olika typer av reaktioner. I mötet med den ytligt procedurella matematiken verkar eleven känna en viss glädje över att klara av uppgiften som så enkelt följer en enkel procedur. I mötet med koncepten, där eleven tvingas inse att hon egentligen inte förstår något, finns en stor risk för att lärare och elev tappar kontakten med varandra. I mitt möte med Sofia blev insikten om hennes känslighet för sina egna misslyckanden väldigt tydlig och intervjun blev därför bitvis ansträngd. Om man använder sig av Vygotskys förklaringsmodell av lärande, så riskerar jag att med en alltför konceptuellt fokuserad undervisning, placera mig långt utanför elevens ”utvecklingszon”. I och med detta omöjliggör jag också lärande för eleven. Den konceptuella ambitionen kan därför bli helt verkningslös och kontraproduktiv om man som lärare tillämpar denna typ av undervisningsmodeller utan att anpassa innehållet till gruppen.

Man skulle här kunna fundera på i vilken mån relationen mellan lärare och elev spelar in. Ännu mer relevant blir kanske att fundera på relationen mellan lärare och eleverna som grupp. Den enskilda eleven är en del av ett sammanhang, där vissa spelregler finns inom gruppen. Som lärare är det därför viktigt att ha en plats i gruppens samlade sociala struktur. Mitt möte med Sofia visar på hur lätt det är att som elev ställa sig utanför sammanhanget och inte längre vilja vara med. Om jag hade känt henne bättre, hade detta eventuellt inte hänt. Det är möjligt att de sociala regler som finns i en elevgrupp per automatik krymper deltagarnas utvecklingszoner. Om bilden av matematisk kunskap ses som något som man antingen har eller inte har, är det troligt att många elever lätt ger upp när de misslyckas. I detta ligger också bilden av den matematiskt kunnige som mer intelligent än den okunnige. Jag tror att man som lärare måste vara med och nyansera dessa bilder lite. Att misslyckas med ett matematiskt resonemang diskvalificerar dig inte per automatik. Tvärtom är misslyckandet ett tecken på att du försöker. Att se matematisk kunskap som ett värde på intelligens är också en farlig bild som bör bemötas och förändras. Det finns många andra kunskaper som är minst lika viktiga som de matematiska och som i lika stor utsträckning kan värdera eller definiera intelligens. Jag bör kanske tillägga att dessa slutsatser inte baseras på någon form av empiri utan är rena reflektioner från min sida. Dock så vill jag hävda att den reaktion jag upplevde att Sofia visade när hon inte längre kände att hon förstod, till viss del måste beror på sociokulturella faktorer.

Som lärare i matematik anser jag att man är skyldig att i så stor utsträckning som det är möjligt, ge eleverna en undervisning med plats både för konceptuell och procedurell kunskap. Man måste lära sig utmana eleverna, i en miljö där misslyckande är en naturlig del av processen. Varje grupp är unik och det gäller att för varje tillfälle hitta den rätta nivån, så man varken ställer för höga eller låga krav.

7 Referenser

Bennet, C. (2012), *Om matematik*, opublicerat manuskript, Göteborgs universitet, Göteborg

Claesson, S. (2008). *Lärares hållning*. Lund: Studentlittartur.

Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H. & Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan: konsten att studera samhälle, individ och marknad*. 3., [rev.] uppl. Stockholm: Norstedts juridik

Gilje, N. & Grimen, H. (2007). *Samhällsvetenskaperna förutsättningar*. Göteborg: Daidalos.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Pettersson, K. (2008). *Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel. En studie av hur universitetsstudenter nyttjar sina begreppsuppfattningar*. Matematiska vetenskaper, Göteborgs universitet

Sfard, A. (1991*). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics 22, 1-36.

Skolverket (2008*). Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2009) *Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995. En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken. Analysrapport till 336.* Stockholm: Skolverket.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.

Världens bästa skitskola (2011)Experimentverkstaden. SVT, 15 december (streamad video) Tillgänglig: http://urplay.se/165326 (enbart tillgänglig till 2012-06-15)

8 Bilagor

8.1 Frågeformulär

OBS! Denna version av testet är den som låg till grund för intervjudiskussionerna. Uppgifterna 1b, 1c och 3b fanns inte med i det ursprungliga testet, och uppgiften 9c, där eleverna ombads beskriva konstanten e, är här borttagen. Uppgifterna 9a och 9b är här något omformulerade jämfört med ursprunget.

Test

Uppgift 1a

$2p^3 \cdot 3p^2$=

A. $5p^5$
B. $6p^6$
C. $6p^5$
D. $5p^6$

Uppgift 1b

$2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^2$=

Uppgift 1c

$2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2$=

Uppgift 2

$2(x + y) - (2x - y)$=

A. $3y$
B. y
C. $4x + 3y$
D. $4x + 2y$

Uppgift 3a

$2a^2 \cdot 3a$=

A. $5a^2$
B. $5a^3$
C. $6a^2$
D. $6a^3$

Uppgift 3b

$2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10 =$

Uppgift 4

$a = 3 \; och \; b = -1$

Vad är värdet av $2a + 3(2 - b)$?

A. 15
B. 14
C. 13
D. 9

Uppgift 5

I Zedland anges den totala fraktkostnaden för ett föremål med formeln $y = 4x + 30$, där x är vikten i gram och y är kostnaden i zed. Om man har 150 zed, hur många gram kan man låta frakta?

A. 630
B. 150
C. 120
D. 30

Uppgift 6

Vilken punkt återfinns på linjen $\mathrm{y} = \mathrm{x} + 2$?

A. $(0; -2)$
B. $(2;\ -4)$
C. $(4;\ 6)$
D. $(6;\ 4)$

Uppgift 7

Ta produkten av *a* och *b*, subtrahera *c* och dividera sedan det du får med *d*. Vad får du då?

A. $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$
B. $\frac{\mathrm{ab} - \mathrm{c}}{\mathrm{d}}$
C. $\mathrm{ab} - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$
D. $\frac{\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{c}}{\mathrm{d}}$

Uppgift 8

Om vi vet att a, b och c är <u>heltal</u> och att:

$a < 0$

$b > 0$

b är ett jämnt tal

$a \cdot b = c$

Vad kan vi då säga om c (**OBS**! **flera svar kan vara rätt i denna uppgift**)?

A. $c > 0$
B. $c \geq 0$
C. $c < 0$
D. c kan inte vara 11
E. $c \neq 0$
F. $c \leq a$
G. c kan inte vara -11

Uppgift 9

exempel

Om du var lärare, hur skulle du med ord förklara talet $\frac{1}{4}$ för en elev?

SVAR: *En fjärdedel betyder: en av fyra lika stora delar. Du kan dela en tårta i fyra delar genom att först dela den på mitten och sedan dela de båda halvorna på mitten. En av dessa bitar blir då en fjärdedel av tårtan. På samma sätt blir* $\frac{1}{4}$ av 100 *samma som* $\frac{100}{4}$ *vilket blir 25.* $\frac{1}{4}$ *är därför detsamma som 25 %. Man kan också se på* $\frac{1}{4}$ *som ”ett delat med fyra”. Om man delar 1 med 4 får man 0,25. Följande gäller alltså:* $\frac{1}{4}$ *= 0,25 = 25 %*

Uppgift 9a

Beskriv $\sqrt{2}$ med ord.

Uppgift 9b

Beskriv π med ord.

8.2 Information och medgivande

Angående intervjuundersökning

Göteborg 2011-12-07

Jag går sista terminen på korta lärarprogrammet och skriver just nu ett examensarbete som omfattar 15 högskolepoäng (en halv termin). Som en del i detta arbete ingår intervjuer med elever där du är utvald att delta.

Syftet med mitt arbete är att undersöka hur elever på gymnasiet tänker när de löser matematiska problem. Du kommer alltså muntligen få svara på frågor där du skall beskriva hur du löser olika uppgifter. Till din hjälp får du också papper och penna. Intervjun tar ca 30 minuter. Jag kommer spela in hela intervjun och delar av den kommer senare att publiceras i mitt examensarbete. Ditt och skolans namn kommer vara ändrat för att säkra din anonymitet och inspelningen kommer senare att förstöras.

Tack för din medverkan

Johannes Erséus

Jag har förstått innebörden av och villkoren för denna intervju och godkänner att delar av den publiceras:

____ ____________________

Namn Datum