GÖTEBORGS UNIVERSITET

” Då kör jag bara 1 – 8 och det är 7 ”

En studie om orsaker till vanliga misstag inom matematik

Therese Lomfors Naess
Edita Hubanic

LAU 390

Handledare: Per-Olof Bentley

Examinator: Christian Bennet

Rapportnummer: HT11 – 2611 - 150

Abstract

Examensarbete inom lärarutbildningen

Titel: ”Då kör jag bara 1 – 8 och det är 7” – En studie om orsaker till vanliga misstag inom matematik.

Författare: Therese Lomfors Naess och Edita Hubanic

Termin och år: HT 2011

Kursansvarig institution: Sociologiska institutionen

Handledare: Per-Olof Bentley

Examinator: Christian Bennet

Rapportnummer: HT11 – 2611 - 150

Nyckelord: Matematiska misstag, beräkningsstrategier, arbetsminnet

Sammanfattning:

Studien belyser hinder inom matematik, där vi möter elever med olika beräkningsmisstag gällande addition och subtraktion. Vårt syfte med undersökningen är att ta reda på orsaker till vanliga misstag. Ett av misstagen som vi belyser i vår frågeställning är talsortsvis beräkning inom subtraktion.

Studien bygger på kvalitativa intervjuer med tio elever i olika årskurser. Eleverna har blivit utvalda av sina respektive lärare då de har svagheter inom matematik. Vi har fått möjlighet att ta del av deras tankegångar kring olika beräkningsstrategier, vilket har skett genom olika matematikuppgifter.

Resultaten är sammanställda i en tabell som visas i studien. Under avsnittet tidigare forskning belyser vi sambandet mellan arbetsminnets olika funktioner och de strategier som eleverna använder när de räknar. Resultatet visar på att eleverna har kännedom om en del strategier men tillämpar dem på ett inkorrekt sätt. Det är viktigt att eleverna i skolan får en korrekt introducering tidigt inom olika beräkningsstrategier för att upptäcka om eleverna tillämpar strategin på ett inkorrekt sätt.

Då studien tar uttryck i en fenomenografisk teoriram innebär detta elevers sätt att pröva innehållet i olika beräkningsstrategier.

Förord

Vi är två studenter som mötte varandra sent under utbildningen då vi sen tidigare har olika inriktningar. Edita har läst Skapande verksamhet för tidigare åldrar och Therese har läst Människa, natur och samhäll för tidigare åldrar. Båda har läst kursen Matematik i barnens värld som specialisering och där hamnade vi i samma basgrupp. Under många givande diskussioner upptäckte vi att vi båda under grundskoletiden haft svårigheter inom matematiken. Detta väckte vårt intresse för att forska vidare inom området. Vi anser att våra olikheter och erfarenheter har kompletterat varandra väl under hela studiens process. Detta har stärkt kunskapen hos oss då våra diskussioner har gett oss olika synvinklar på elevers olika misstag.

Vi vill börja med att tacka vår handledare Per–Olof Bentley för sitt engagemang i vårt examensarbete. Med sitt lugn och stöd har han hjälpt oss vidare när vi stött på motgångar. Vi vill även tacka de elever som har visat intresse till att medverka i vår studie. Det har varit både givande och spännande att få ta del av era finurliga resonemang kring matematiken. Vi riktar ett stort tack till elevernas föräldrar som låtit oss intervjua deras barn. Tack också till lärarna på skolan som har gett oss utrymme för att genomföra intervjuerna

Vi kommer i mitten av januari att tillsammans med vår handledare och tillika forskare Per-Olof Bentley att besöka skolan vi varit på. I ett möte med lärare inom matematik kommer vi diskutera vad arbetet har resulterat i.

Therese Lomfors Naess och Edita Hubanic

Göteborg 2012 – 01 - 02

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1. Inledning

Om man tidigt upptäcker elevers misstag och hinder gynnar det den fortsatta inlärningsprocessen. Ju tidigare lärarna blir medvetna om elevernas misstag desto tidigare kan man korrigera inkorrekta beräkningsstrategier. Om vi ser till våra styrdokument framgår det hur målen för år tre, fyra, fem och sex bygger på varandra. Exempel:

Mål för eleverna i tredje skolåret:
”De fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer”.

Mål för elever i fjärde, femte och sjätte skolåret:
”Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal […] vid huvudräkning och överslagsräkning och vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. Metodernas användande i olika situationer” (Lgr 11:63-64).

För att kunna tillämpa sig beräkningsstrategier på ett korrekt sätt måste man ha förförståelse för bland annat positionssystemet. De elever vi har intervjuat har visat på stora svagheter för detta. Vi vill betona vikten av hur viktigt det är att introducera på ett korrekt sätt för att ge eleverna en god förförståelse för vidare utveckling.

En kort beskrivning ges av de begrepp vi fokuserar på till största delen av arbetet, nämligen talsortsvis beräkning samt talfakta. Talsortsvis beräkning innebär att eleven delar upp talsorten för sig i en algoritm. Först beräknas tiotalen och sedan entalen för att till sist beräkna delsummorna. Det andra begreppet som vi fokuserar på är talfakta. Det är en kunskap som antingen är automatiserad eller inte automatiserad hos en elev. För att det ska räknas som automatiserad talfakta bör eleven kunna redogöra för ett svar inom tre sekunder. Detta är en kunskap som lagras i långtidsminnet och som finns tillgänglig i arbetsminnet. Kunskapen sträcker sig inom subtraktion, addition och multiplikation.

I första kapitlet av studien behandlar vi de teoretiska perspektiv samt relevant litteratur som stödjer vårt arbete. Vidare tas resultat upp som har inhämtats i form av intervjuer och detta resulterar sedan i en analys av resultatet. Avslutningsvis diskuteras resultatet i diskussionen med koppling till tidigare forskning samt relevant litteratur.

1.2 Syfte och problemformulering

De olika begreppen som förknippas med kunskap kan beskrivas i de fyra F:en vilka är fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet (Liedman, 2002, s 112). Att ha en god taluppfattning visar att man har tagit till sig fakta. Det andra ledet innebär att eleven har en förståelse vilket gör att eleven kan tillämpa korrekt strategi för uppgiften. Vidare ger detta en färdighet då eleven har kunskap om hur hon ska beräkna uppgiften i sig. Sista begreppet benämns som förtrogenhet som innebär att eleven kan omsätta det i vardagliga situationer.

Syftet med vår studie är att ta reda på brister hos elever inom matematiken rörande addition och subtraktion med följande frågeställningar:

- Vilka är orsakerna till vanliga misstag inom addition och subtraktion?
- Hur tillämpar eleverna talsortsvis beräkning inom subtraktionen?

2. Teoretiska anknytningar

Studien utgår ifrån en fenomenografisk anda. Inom fenomenografin är det centrala begreppet ”uppfattning”. Enligt denna teori erfar man kunskap genom olika sätt, som utveckling och förändring av tidigare sätt att tänka kring olika fenomen Det gemensamma för vår studie och det fenomenografiska tankesättet är variationen som är viktig för elever, då individer lär på olika sätt. Dock är det viktigt att poängtera att det är undervisningen som ska vara varierande och inte själva beräkningsprocesserna. Skulle fokus ligga på variationen i elevernas beräkningar skulle de inte se en regelbundenhet och därmed blockera deras fortsatta inlärning.

Fenomenografi kan ses som en specialisering som framförallt riktar fokus på frågor som är av värde för lärande och förståelse i en pedagogisk miljö (Marton & Booth, 2000, s 146, 147).”Ett sätt att erfara någonting, är ett sätt att urskilja någonting från och att relatera det till ett sammanhang” (s 147). Vidare menar Marton & Booth (2000) att variationen i en människas sätt att erfara fenomen i sin omvärld är av största intresse för fenomenografiska studier (s 159).

Matematik är ett ämne som kräver stor variation och alla elever har olika inlärningsstilar samt lär in på olika sätt. Ur ett fenomenografiskt sätt att se på inlärning får elever ett varierat undervisningsunderlag där de kan urskilja vad som anses bäst för dem själva.
Detta innebär att eleverna bör få en introducering av olika beräkningsstrategier för att få en så varierad undervisning som möjligt.

2.1 Tidigare forskning

Under detta avsnitt stärker vi vår studie utifrån vetenskapliga teorier. Vi tar upp hur styrdokumenten förhåller sig till studien, relevant litteratur, arbetsminnet och dess funktioner, hjärnan och slutligen, de olika beräkningsstrategierna.

Ett barn som lär sig aritmetiken måste noga tänka efter vad operationen 7 - 5 ska resultera i. Nästa steg i matematikens utveckling skulle kunna innebära ett hinder om inte resultatet uppvisar sig för henne utan tillfälle till reflektion (Liedman, 2002, s 117).
Forskarna Carlgren och Marton menar att det i olika fall kan verka vettigt att räkna upp och räkna ner från delen. Om talfakta inte är automatiserad kan en operation som exempelvis 7 – 5 innebära att man måste räkna upp från fem till sju och samtidigt benämna sex, sju. I detta fall hörs det att man nämnt två siffror, vilket innebär att man hör ”tvåheten” (Carlgren & Marton, 2007, s 142).

Löwing och Kilborn menar att ur en inlärningssynpunkt bör man introducera olika varianter av skriftliga räknemetoder, såsom formella och informella. Den informella innebär att man använder sig av skriftlig huvudräkning då all uträkning sker i huvudet. Detta medför att det blir för stor belastning för arbetsminnet att hålla isär de olika steg som utförs i beräkningen. Därmed tvingas man att föra anteckningar för att underlätta. Den formella är mer systematisk då man exempelvis gör en standardalgoritm i uppställning, denna metod kan användas i alla uppgifter såsom addition och subtraktion (Löwing & Kilborn, 2002, s 138).

2.2 Vad säger styrdokumenten?

I Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet (Skolverket 2011) visas elevens uppnåendemål inom det centrala innehållet för matematik. Vi har valt att göra semistrukturerade intervjuer och har valt att ta med åldersintegrerade informanter i vår studie . Därför redogör vi för målen både för årskurs 1- 3 och 4 – 6.

För att eleverna ska nå målen i slutet av år 3 behöver de en korrekt introducering från början. I läroplanen betonas de fyra räknesättens egenskaper och dess samband samt hur man i vardagen använder sig av dem. Vidare menar Lgr 11 att det är viktigt att eleverna tidigt får träning i att använda sig av rimlighetsbedömning och uppskattning vid enkla beräkningar.

Vår studie har visat att eleverna inte innehar denna typ av färdighet då de flesta av våra informanter gör misstag i uppgiften 51 – 49. Ett av de sista målen vi tar upp för år 3 är; ”naturliga tal och deras egenskaper samt hur talen kan delas upp och hur de kan användas för att ange ordning” (Lgr 11:63-64). Med detta poängterar vi hur eleverna i vår studie såg till de uppgifter de fick men inte till själva siffrornas värde. Detta gjorde att eleverna såg hinder istället för möjligheter till förenkling av uppgiften.

De intervjuade eleverna i år 4 och 5 har visat prov på att de kan göra en algoritm men resultatet har visat att dessa elever inte vet hur man tillämpar dem på ett korrekt sätt. Därmed blir beräkningen inkorrekt. Det centrala innehållet för år 4 – 6 säger att;
”Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal […] vid huvudräkning och överslagsräkning och vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. Metodernas användande i olika situationer” (Lgr11:64).

Lgr 11 betonar att kunskap inte är ett entydigt begrepp utan att kunskap kommer till uttryck i olika former, dessa beskrivs som de fyra F:en, fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet. Vid matematiska beräkningar lär sig eleverna fakta om de olika strategierna men att utveckla förståelse, färdighet och förtrogenhet blir detta varje individs process (Lgr 11:10).

2.3 Beräkningsprocedurer

Bentley (2011) tar i sin bok upp olika situationer som kan inträffa i en elevens beräkningsprocedur. De fyra olika situationerna är;

- 1. Proceduren utförs korrekt och på rätt typ av uppgift.
- 2. Proceduren utförs inkorrekt men på rätt typ av uppgift.
- 3. Proceduren utförs korrekt men på fel typ av uppgift.
- 4. Proceduren utförs inkorrekt men på fel typ av uppgift.

Dessa situationer bör tidigt uppmärksammas och analyseras för att kunna hjälpa och handleda eleverna i sin matematiska inlärningsprocess och kunskapsutveckling. Liksom Bentley har vår studie också visat stora brister för dessa fyra olika situationer (Bentley, 2011, s 49). ”En procedur kan *tillämpas* både korrekt och inkorrekt. Speciellt den inkorrekta tillämpningen är intressant, då de också kan avslöja hur individen har uppfattat både proceduren i fråga samt dess involverade begrepp” (TIMSS, Skolverket 2008:12).

Även Löwing betonar i sin bok vikten av att eleven bör behärska flera olika strategier, detta för att olika uppgifter kräver olika strategier och dels för att detta ger goda tillfällen att lära sig matematik (Löwing, 2008, s 107). Vidare menar Löwing att elever som kan tillgodo göra sig flera strategier kan även välja ut en lämplig och minnesbesparande strategi till respektive uppgift (Löwing, 2008, s 120).

2.4 Arbetsminnets tre funktionella delar

Vid inlärning av aritmetiska fakta har arbetsminnets funktion en stor betydelse. De olika funktionernas delar är en modell som är verksam vid olika typer av beräkningar. Denna modell är utvecklad av Baddeley och hans kollegor (Baddeley, 1986, 1996; Baddeley & Hitch, 1974; Logie, 1995) TIMSS, 2008. Uppgiftens karaktär och hur den presenteras för eleverna är avgörande för vilken funktionell del som aktiveras i arbetsminnet (Bentley, 2011, s 50).

Arbetsminnet kan beskrivas som sammansatt av de tre funktionella delarna men som däremot inte nödvändigtvis är placerat som det centrala i hjärnan.

Den exekutiva funktionen är övergripande och det är den som samordnar de två andra funktionernas arbete. Denna del av arbetsminnet hämtar data från långtidsminnet och planerar vårt arbete. Dessutom styr den vår uppmärksamhet och koordinerar det auditiva och det visuella. Dessa inbegriper under delarna **den fonologiska loopen** och **den visuellt spatiala funktionen.** De auditiva och visuella delarna är hjälpsystem till den exekutiva funktionen (Bentley, 2011, s 57). När exempelvis en elev ska lösa en uppgift är den exekutiva funktionen alltid aktiverad, dock håller hjälpsystemet viktig information i minnet under tiden eleven löser problemet.

Den fonologiska loopen (auditiva) avkodar språkljud till ord, meningar och betydelser samt arbetar konstant utan avbrott. Dess uppgift är även att lagra delresultat samt minnessiffror vid flersiffrig aritmetik (TIMSS, Skolverket 2008:18). Denna funktion används då eleverna exempelvis utför mer komplicerade procedurer.

Den visuellt spatiala funktionen (visuella) är den del av arbetsminnet som utför matematiska data, till exempel aritmetiska uppgifter och deras resultat, representeras (Bentley, 2011, s 50). De funktionella delarna går inom korttidsminnet vars innehåll kan hålla sig aktuellt inom relativt begränsad tid (TIMSS, 2008, Adams & Hitch, 1998, s 18).
När en elev exempelvis behandlar talfakta som uppgiften 5 + 3 = 8 ska detta betraktas i egenskap av färdighet vilket lätt kan automatiseras då den finns lagrad i långtidsminnet. Den fonologiska loopen och den spatiala funktionen belastas inte i detta skede. Då arbetsminnet endast kan belastas en kortare tid spelar snabbheten en stor roll. För att räknas till automatiserad talfakta måste eleven kunna ge ett resultat inom tre sekunder (DeStefano & LeFevre, 2004, s 353 - 386).

2.5 Hjärnan

I hippocampus, som är en del av limbiska systemet i hjärnan, lagras det man lärt under dagen. Under sömnen gallras och bedöms (omedvetet) den information som senare förs över till långtidsminnet. Under gallringen sorterar, organiserar och samordnar hjärnan det som är väsentligt att förvara i långtidsminnet. Då gallringen sorterar och organiserar information ser den också till att ta vara på det som redan är sparat i långtidsminnet. När hippocampus får ny information reagerar hjärnan och detta gallras vidare till långtidsminnet för att inte hjärnan ska behöva lära om allting den redan lärt (Olivestam & Ott, 2010, s 63).

När eleverna erfar regelbundenheten i sina beräkningar lagras detta i långtidsminnet och därmed blir det automatiserat. Om en elev inte ser regelbundenheten förstår hon inte att exempelvis 5 + 3 måste bli 8 oavsett beräkning. 5 + 3 är alltid 8.
”För att arbetsminnet ska fungera optimalt vid aritmetiska beräkningar ska resultatet av färdiga beräkningar hämtas från långtidsminnet” (Bentley, 2011, s 62).

Den andra delen i limbiska systemet är amygdala som är kopplad till hippocampus. Denna del aktiveras vid starka känslor som exempelvis när elever upplever osäkerhet eller välbehag inför en matematikuppgift. Detta kan ta sig uttryck i att pulsen stiger, blodtrycket ökar och det kan även leda till ett slags ”tunnelseende” (Olivestam & Ott, 2010, s 94).

2.6 Beräkningsstrategier

Eftersom vi har fokuserat på elevernas arbetsminne och deras resonemang kring val av olika beräkningsstrategier väljer vi att klargöra de olika metoderna med exempel på ett mer ingående sätt. Strategierna omfattar både de skriftliga och huvudräkningsmetoderna. Detta för att underlätta förståelsen för våra intervjuer senare i arbetet.

För att kunna redogöra de olika strategierna krävs det att man har en utvecklad talfakta. Talfakta är en kunskap som antingen är automatiserad eller inte automatiserad hos eleverna. För att talfakta ska räknas som automatiserad bör eleven kunna redogöra sitt svar inom en tid av tre sekunder. Kunskapen lagras i ett långtidsminne och som finns tillgängligt i arbetsminnet. Det är en färdig kunskap inom subtraktion, addition och multiplikation. Är talfakta svag hos en elev blir det betydligt svårare att ta till sig de strategier som finns samt utföra en beräkning. Nedan beskriver vi de olika beräkningsstrategierna utifrån analysrapporten TIMSS, (Skolverket 2008:18) samt Bentley (2011, s 125 – 128).

Talsortsvis beräkning är en algoritm där talsorten delas upp för sig. Man räknar först tiotalen sedan entalen, för att därefter arbeta vidare med delsummorna. Strategin kan delas upp i två versioner, en för addition samt subtraktion utan växling men även också en för subtraktion där växling krävs. Nedanför följer exempel av beräkningsstrategin:

Addition: 27 + 17 = [20 + 10 = 30; 7 + 7 = 14; 30 + 14] = 44

Subtraktion: 34 – 27 = [30 – 20 = 10; 4 – 7 = - 3; 10 – 3] = 7

Kompensationsberäkning är den andra strategin som Bentley (2011) tar upp. Algoritmen är en beräkning där eleven ska modifiera så att det blir enklare att utföra uppgiften. Alltså att man först ska jämna upp talet till närmaste tiotal, sedan gör man en beräkning för att slutligen kompensera för utjämningen.

47 + 17 = [47 + 3 = 50; 50 +17 = 67; 67 – 3] = 64

Beräkningsstrategin är till för att man ska tänka på heltal och utgå ifrån dem när man gör en uträkning. Däremot är det viktigt att hålla isär subtraktion och addition så det blir ett korrekt resultat. Det eleven gör i början av en beräkning måste hon komma ihåg i slutet.

Transformationsberäkning kan användas i uppgifter av addition och subtraktion. Beräkningen liknar föregående strategi, (kompensationsberäkning) men i den här beräkningen går det ut på att eleven adderar ett tal till den första termen och samma tal subtraheras från den andra termen i addition. Däremot i subtraktionen väljer eleven om hon ska subtrahera eller addera samma tal till båda termerna. Det som är viktigt att betona i denna strategin är att den ursprungliga beräkningen får inte förändras.

Addition: 42 + 13 = [42 + *3* + 13 - *3*= 45 + 10] = 55

Subtraktion: 42 – 12 [42 – *2* – (12 – *2*) = 40 – 10] = 30

Mixad beräkning är en strategi av kombinationen talsortsvis beräkning och kompensationsberäkning. Oavsett om uppgiften är i subtraktion eller addition så kommer dessa att visa sig senaren i beräkningsprocessen. Mixad beräkning innebär alltså att man använder sig av både räknesätten i en och samma uppgift. Denna strategi är smidig vid beräkning av subtraktion då växling krävs.

Exempel: 74 -18 = [70 – 10 = 60; 60 – 8 = 52; 52 + 4] = 56

Stegvis beräkning är en huvudräkningsprocedur som markerar just det begreppet antyder i beräkningen, steg. I denna strategi är det viktigt att fokusera på antalet steg som den andra termen representerar (16 = 3 + 13) och som ska adderas till den första termen (47) Exempel på beräkningar inom subtraktion och addition:

Addition: 47 + 16 = [47 $\xrightarrow{\mathbf{3}}$ 50; 50 $\xrightarrow{\mathbf{13}}$ 63] = 63

Subtraktion: 47 -16 [16 $\xrightarrow{\mathbf{4}}$ 20; 20 $\xrightarrow{\mathbf{20}}$ 40; 40 $\xrightarrow{\mathbf{7}}$ 47; 4 + 20 + 7] = 31

Räkna upp och ner från del innebär att eleverna vid sina beräkningar utgår i en uppgift från den högsta termen och räknar antingen upp eller ned. Exempelvis uppgiften 5 + 3, räknar eleven sex, sju, åtta. Eleven benämner varje siffra som räknas.
I en subtraktionsuppgift som exempelvis 5 – 3, räknar elever ned från fem. Fem, fyra, tre, då återstår det två kvar vilket ger det korrekta svaret.

Standard algoritm både för subtraktion och addition. Den vanligaste algoritmen eleverna använde sig av var *lånemetoden* (Löwing, 2008, s 127, 135). Beräkningen bygger på att man växlar ett tiotal till tio ental vid subtraktion och vid addition används minnessiffra ovanför tiotalet.

Exempel subtraktion:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle\mathbf{10} \\ 3\cancel{5}4 \\ -\underline{126} \\ 228 \end{array}$$

Beräkningen sker alltid från höger till vänster vid lånemetod. 4 -6 går inte, då lånar man ett tiotal från 5:an. Detta kan noteras med exempelvis en tia över 4:an.
Beräkningen fortsätter genom att man nu har 10 + 4 = 14 och 14 – 6 = 8. I tiotalskolumnen har man nu överstruken 5:a som betyder 4, vilket blir 4 – 2 = 2. Sedan går man vidare till hundratalsspalten där det är 3 – 1 vilket ger 2. Svaret är 228.

Exempel addition:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle\mathbf{1} \\ 354 \\ +\ \underline{126} \\ 480 \end{array}$$

I denna beräkning adderar man entalen för sig, tiotalen för sig och sist hundratalen. Det är dock viktigt att hålla reda på minnessiffran. Beräkningen börjar genom att man adderar 4 + 6 vilket ger 10, 0:an skrivs under entalet 6, och 1:an flyttas upp ovanför 5:an.
I tiotalskolumnen räknar man först ihop 5 + 2 och sedan Adderar man minnessiffran 1, detta ger 5 + 2 + 1 = 8. Sen återstår de att beräkna hundratalen som består av 300 + 100 = 400. Svaret är 480.

3. Metoddiskussion

Vi har varit på en skola där en av oss har haft sin verksamhetsförlagda utbildning när vi gjort intervjuer av elever i olika årskurser, tre, fyra och fem. Anledningen till att vi valt olika årskurser är för att få ett så brett spektra som möjligt. För att en elev ska uppnå målen i år fem skall denna elev tidigare i sin skolgång ha uppfyllt målen för år tre och fyra. Dock ligger alla individer på olika kunskapsnivåer vilket kan leda till att exempelvis en elev i år tre har likvärdiga kunskaper som en elev i år fyra. Detta kan även innebära att en elev år fem ligger på en kunskapsnivå som en elev i år tre.

Vi har valt att göra en semistrukturerad intervju med eleverna, som bygger på rena räkneuppgifter. Syftet med att genomföra en sådan intervju är för att vi vill fokusera på elevernas tankegångar under beräkningsprocessen. Vi är intresserade av vad de väljer för strategier för att komma fram till resultatet. Resultatet är dock inte lika väsentligt som själva processen. Anledningen till att vi har valt att inte göra exempelvis enkäter är för att vi anser att eleverna kan bli mer styrda av ett ”rätt” resultat och vi får inte på samma sätt ta del av hur de tänker som man får i en intervju.

Studien började med att vi gjorde en provintervju med en av eleverna. Detta för att bekräfta om de frågeställningar vi hade var relevanta för denna målgrupp. Provintervjun spelades in, transkriberades och analyserades efteråt. En sådan här intervju ger också möjlighet för intervjuaren att får reda på det innehåll som finns dolt under ytan. Genom att få reda på det som är dolt krävs det att följdfrågor ställs och att det inhämtade materialet av intervjuerna bearbetas väl (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson, Wängnerud, 2010, s 237).

Forskaren Bentley betonar vikten av att fråga eleven om det finns fler lösningar av samma uppgift och ger då eleven möjlighet att redogöra för sina tankar och lösningsstrategier (Bentley, 2011, s 78). I TIMMS, (Skolverket 2008:13) beskrivs sambandet hur intervjun och frågornas karaktär kan styra elevens beräkningsprocedur och hur den uppvisas.

Vi har tittat på de olika orsakerna som kan ligga till grund för vanliga misstag inom matematiken. Detta har vi gjort genom att studera analysrapporten TIMSS, (2008) där svenska elevers matematikkunskaper beskrivs utifrån Bentleys avsnitt kring de olika beräkningsstrategierna. En avsikt med studien var att jämföra vårt resultat med studien som gjords i Lilla Edet (TIMSS 2008) av forskaren Bentley. Detta resulterade inte i något nytt, däremot kunde vi konstatera att våra studier stärks av varandra och speglar dess reliabilitet. De tidigare nämnda delarna i arbetsminnet har tagits upp från den hjärnforskning som TIMSS (2008) benämner. Den har varit relevant för den matematikdidaktiska forskningen då undersökningarna har visat på vilken betydelsefull roll arbetsminnet och dess funktionella delar har i elevers utvecklig inom deras förmåga av aritmetik.

3.1 Genomförande

Vi satt i ett enskilt studierum för att skapa en så lugn och harmonisk stund som möjligt, där eleverna kunde känna sig trygga. Intervjun genomfördes och spelades in på band. Efteråt transkriberades intervjuerna och resultat sammanställdes. En observatör och en intervjuare deltar i sammanhanget för att hjälpa varandra genom att bland annat skriva anteckningar och kunna ge varandra konstruktiv kritik. Detta för att få så bra intervjumaterial som möjligt. Som stöd till intervjun fick eleverna ett papper och penna, för att eventuellt lösa uppgifter om detta erfordrades.

Då själva intervjun krävde stor uppmärksamhet av intervjuaren var det en förmån att vi var två stycken i deltagandet, där en har fått vara observatör. Detta gav även sina fördelar då vi skulle analysera resultatet och delge våra olika synvinklar.

3.2 Etiska frågor

Eftersom eleverna är minderåriga och vi behöver föräldrarnas tillstånd har vi delat ut en blankett som eleverna har fått ta med sig hem. I blanketten framgår studies syfte, forskningsansvariges namn och vilken institution vi tillhör. Blanketterna har skrivits på av föräldrarna och samlats in och finns i vårt förvar. Både inblandade elever, föräldrar och lärare har haft en positiv inställning till intervjuerna och arbetet. För att skydda elevernas identitet har vi fingerat namnen (Stukát, 2005, s 130 – 131). Dessa etiska aspekter betonas under de olika principer som Stukát beskriver i sin bok nämligen *informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet* samt *nyttjandekravet.*

Under informationskravet gav vi information om vårt arbete och syftet med det till lärarna, föräldrarna och eleverna. Samtyckeskravet utformades i form av en blankett som föräldrarna fick godkänna. Eleverna är anonymiserade och går i detta fall under den tredje principen, konfidentialitetskravet. Vi har i enlighet med Stukát (2005) s 132 följt nyttjandekravet då de involverade är väl informerade om att studien endast kommer att användas i forskningssyfte och inte kommer att utnyttjas för icke-vetenskapliga syften.

4. Resultat

Under studien har vi intervjuat tio elever i olika åldrar, i årskurs tre, fyra och fem. Nedan följer de resultat vi fått fram. Resultatet har visat olika aspekter för de strategier som finns. De misstag som har utmärkt sig mest i resultatet har varit + - 1 principen, talsortsvis beräkning, räkna upp och ner från del samt positionssystemet.

4.1 Beskrivning av de olika misstagen

+ - 1 principen innebär att eleverna vid sina beräkningar avviker från en enhet. Det vill säga att om man till exempel ska utföra beräkningen 10 – 7, ger eleven svaret 4. Detta för att eleverna börjar räkna utifrån tio, tio, nio, åtta, sju, sex, fem, fyra. Beräkningen ger sju steg och leder till att en enhet för mycket räknas med. Eftersom eleverna använder sig av fingerräkning ser de inte till hur många fingrar som är kvar utan säger det de hör. Samma misstag sker vid addition. Under denna princip går även misstaget *räkna upp och ner från del.*

Misstaget *talsortsvis beräkning* har också ett samband med *positionssystemet.* Talsortsvis beräkning handlar om hur man beräknar varje talsort för sig. Eleven modifierar uppgiften i subtraktion då de tar störst först.

4.2 Elev 1 - Anna (år; 3)

Annas första matematikuppgift är 5 + 3, hon räknar upp från delen med hjälp av fingrarna. Följande fyra uppgifter gör hon likadant vilket innebär att talfakta ej är automatiserad. På uppgiften 16 - 9 räknar hon på följande sätt ” eh, alltså när jag tar sexton och så sa du minus nio, och då jag bort nio och räknar de andra som är kvar… ” Hon visar tydligt på att hon räknar både upp och ner från delen för att få fram ett svar i samma uppgift. Med tanke på att hon inte ser regelbundenheten blir hennes arbetsminne belastat i högre grad vid de större beräkningarna.

På uppgiften 23 - 17 säger eleven att hon inte vet hur hon ska räkna, detta gör att eleven fokuserar på vilket räknesätt hon ska använda sig av istället för att verkligen se till vilka tal hon har framför sig. Positionssystemet är inte automatiserat. Eleven skriver oklanderligt från språklig kod till sifferkod, till exempel talet femtiosex, 56.

När vi ger eleven uppgiften 51 - 49, påpekar hon direkt att talen är för höga och att hon inte kan räkna ut det. Här visar eleven svagheter för talraden. Vi fångar upp detta genom att visualisera en talrad och ber henne att peka ut var man kan tänkas finna olika tal som till exempel 49. Eleven visar dock fortfarande på osäkerhet inför uppgiften.

4.3 Elev 2- Edward (år; 5)

Till skillnad från elev ett har denna elev en automatiserad talfakta, vilket vi kan se då han löser uppgifterna på mindre än tre sekunder (lilla additionstabellen och lilla subtraktionstabellen). Vidare i intervjun visade eleven på en utvecklad färdighet inom matematiska uträkningar som till exempel algoritm.

Vid beräkning 23 - 17 använder sig eleven av lånemetoden där han visar hur han gör som följer ”23 - 17, jag ställer upp det och sen 3 - 17 och den ska bort (stryker tvåan). Då tar jag bort den, sen tar jag bort en och då blir det en kvar. Sen blir det -4, det blir 6”.

Eleven visar på kunskap om negativa tal. Eftersom talfakta är en färdighet hos eleven belastas därför inte de två andra funktionerna, fonologiska loopen och spatiala funktionen. Detta ger möjlighet till att ytterligare lagra två minneselement i två minnesfunktioner. Eleven löser uppgifter i ett högt tempo och detta är en avgörande faktor då man i minnet bara kan bevara innehåll en kort stund ”33 + 29 = ..(skriver) 50 och så är det 12, 62”!

Här visar eleven att han är medveten om talsortsvisberäkning inom addition, vilket innebär att varje talsort beräknas för sig. Först beräknar eleven tiotalen och sedan entalen för att vidare beräkna delsummorna, detta visar att eleven har god förståelse för platsvärde i positionssystemet.

För att förtydliga elevens kunskaper visar vi på en transformationsberäkning som eleven utför ”63 - 7 = ..då tar jag bort tre på 60 och tre där på den där (7) då blir det 56”.

4.4 Elev 3- Cecilia (år; 4)

Eleven visar stora brister inom talfakta. Fingerräkning används och hon tänker länge kring varje uppgift hon möter även i lilla addition- och subtraktionstabell. Hennes trygghet i fingerräkning tar en stor del av arbetsminnet vilket gör att uppgiften tar extra lång tid. Uppgifterna blir korrekta men att hålla reda på fingrarna kräver stor del av hennes koncentration ”13 + 6, (*använder fingrarna*, *upprepar en gång till*) 13 + 6 (*funderar*) 19”!

När eleven sedan möter sedan högre tal som exempelvis 23 - 17, väljer hon att använda sig av algoritm med växling. Hon stryker tiotal och skriver ovanför tiotalet det resterande talet. Hon skriver aldrig ut den lånade tian ovanför entalen utan förvarar det i sitt arbetsminne. Eleven får dock ett korrekt resultat. Detta exempel visar på en annan form av lånemetod.
I en additionsalgoritm skriver hon upp minnessiffran direkt över tiotalet och på så sätt får hon ett korrekt resultat.

4.5 Elev 4 – Annie (år; 5)

Intervjun med Annie börjar med att utmana hennes talfakta och färdighet. Många av uppgifterna tar hon god tid på sig att tänka vilket resulterar i att talfakta inte är automatiserad. Eleven använder ingen fingerräkning, svaren blir inkorrekta men detta visar dock på att eleven har kommit vidare i sin matematiska utveckling genom huvudräkning. Till exempel på uppgifterna ”7 + 5= (tänker länge) 11” (*Eleven uppvisar misstaget + - 1)* och på uppgiften ”5 + 3= (svarar hon) 13”!

Vidare visar eleven på goda matematiska kunskaper för negativa tal och standardalgoritm. Vid uppgifterna väljer hon att använda sig av lånemetoden som beräkning. Vi visar här på några exempel: ”33 + 29, 9 + 3 är 12 så skriver jag en två där och en etta där och då blir det 3 + 3 är 6, 62”! ”53 - 27, 3 - 7 går inte, så tar jag en tia och det blir en femma där. Så 13 – 7 är 6. Så fem har jag inte mer så 4-2 är 2. 26”!

Här framgår det tydligt att hon har koll i arbetsminnet om hur hon ska räkna uppgiften. Hon visar tydligt på pappret hur hon tänker genom att skriva ut den lånade tian och stryka över tiotalet. Detta ger henne en tydlig överblick i vad hon gör.

4.6 Elev 5 – Alex (år; 3)

Eleven visar stor osäkerhet för talfakta då varje uppgift utförs med hjälp av fingrarna. Han är dock snabb i sina svar och ibland går det för fort då eleven räknar multiplikation istället för addition eller subtraktion. På till exempel uppgiften 5 + 3, svarar eleven självsäkert 15.

Eleven har en stor förmåga att räkna både upp och ned från delen. När eleven skulle lösa uppgiften 33 + 29 beräknade han följande: ”33 + 29, just det. Då tar jag 33, alltså jag tror jag kan göra det här. Tre plus två är fem, tre plus nio, vänta. Nio, tio, elva, tolv. Okej, tolv och tre plus två är fem. Nej, vänta. Tre plus två, jo det är fem. Jag ska hålla mig efter den, plus 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 5…52”!

Uträkningen tar lång tid och eleven tappar bort sig i sitt tänkande. Arbetsminnet har mycket att hålla reda på, vilket gör att han missar ett helt tiotal i sin beräkning.
Eleven uppvisar misstaget för positionssystemet under intervjun. Han skriver ner uppgiften vågrät på pappret men hela räkningen sker på fingrarna och i huvudet.

När eleven får uppgiften 51 - 49 blir det tyst en stund. Därefter säger eleven följande:
”51 - 49… Oj! Ja, jag ska se. (*skriver lodrät på pappret*) Fem minus fyra är ett och ett minus nio är åtta. Då kör jag bara ett minus åtta och det är sju”!

Eleven gör flera misstag i samma uppgift. Eleven räknar dock tiotalen och entalen för sig (talsortsvis beräkning) men har ingen perception om de negativa talen. Han gör dessutom ytterligare en beräkning med delsummorna genom att subtrahera dem. Svaret blir sju. När vi sedan ställde frågan:
”*Kan det bli något mer”?* Svarar eleven, ”*hm, vänta. Det kan bli två”.* Vi ber eleven förklara sitt resonemang ”För liksom typ om 49 kommer innan 50 och då tar jag bara ett till och två till och det blir ju två”!

4.7 Elev 6 - Karolina (år; 4)

När eleven får uppgifter som 3 + 5, 8 - 2 samt 12 - 6 som ligger inom ramen för lilla och stora addition – subtraktionstabellen använder hon sig av fingrarna. Detta visar på brister för talfakta då tryggheten för beräkningen sitter i fingrarna och inte i huvudet.

När uppgiften 23 - 17 kommer vet hon att hon måste göra en algoritm, eller uppställning som hon uttrycker det själv. Hon ställer snabbt upp uppgiften men sitter sen ganska länge och tittar på den. ”Jag kan ju räkna därifrån och dit..eller nej, det kan jag inte”

Eleven vill först modifiera uppgiften genom att byta position på tre och sju men upptäcker själv att det inte går, hon kommer fram till att en växling krävs. Däremot tvekar hon en längre stund och det visar sig att hon inte vet hur hon ska gå tillväga. ”Man gör typ så att man stryker den (tiotalet och ställer ett över tiotalet). Man lägger en etta där över tror jag. men det går ju inte för det blir ju fyra (lägger ihop ett och tre), nej jag kommer inte ihåg”.

Eleven förstår inte vad en växling innebär, därmed illustrerar intervjuaren hur eleven ska gå tillväga. Exemplet lyder följande; T; ” Du lånar tio av tiotalet, alltså måste tian skrivas ovanför entalet”.Elev; ”Ja, just det, tio minus sju då…tio, nio, åtta, sju, sex, fem, fyra, tre och två. Det blir två”!

Eleven räknar ned från delen med hjälp av fingrarna men får ett inkorrekt svar. Intervjuaren väljer att fortsätta intervjun utan att i detta läge påvisa elevens misstag för att se hur hon löser nästkommande uppgifter.
Efterföljande uppgifter gör eleven samma misstag, hon räknar inte med det ena entalet utan adderar helt enkelt den lånade tian med ett av entalet, dessutom får hon vid flera tillfällen tio minus sju till två.

Intervjuaren går in och korrigerar eleven för att visa på en korrekt beräkning av en lånemetod. I nästkommande uppgift som är 51 - 49 gör eleven en algoritm. Hon gör nu allt korrekt i uppställningen men räknar sedan ned från delen nio steg. Resultatet hon får är två.

4.8 Elev 7 – Emelie (år; 3)

Emelie visade i början av intervjun stora svagheter för talfakta. Hennes fingerräkning går fort, svaren är korrekta men talfakta är dock inte automatiserad. Hon visar en osäkerhet då hon funderar länge innan hon svarar. Vid uppgifter som 12 - 6 och 5 + 3 tar tänkandet en extra stund.

Intervjun flyter på och eleven ser inte till de negativa talen. Hon fick i uppgift att lösa 23 - 17, detta utförde hon på följande sätt: ”Jag tänker om jag skriver 23 och så tar jag minus, eh 17. Då skriver jag det så tar jag 2 - 1, det är 1 och 7 - 3 eh, är 4. Då blir det 14, så mycket jag ser det så”. Eleven gör en inkorrekt talsortsvis beräkning, då hon modifierar och subtraherar sju minus tre istället tre minus sju. Detta gör att hennes svar på uppgiften blir 14. Samma misstag sker på efterföljande uppgift då eleven blev tillfrågad om 51 - 49 där hon svararde; ”5- 4 är 1, 9 - 1 är 8, då blir det 18” Eleven gör en fel utformning av algoritmen, talsortsvis beräkning. Hon delar upp tiotalen och entalen och beräknar dem separat. Delresultaten blir 1 och 8, och hennes slutgiltiga resultat blir därmed 18.

4.9 Elev 8 – Nathalie (år; 4)

Här träffar vi en elev med god förståelse för talfakta då hon svarar på uppgifterna inom tre sekunder. Hon är tydlig i sina svar då hon självsäkert svarar alltid innan med ordet ”är”. Eleven väljer senare i intervjun att skriva ner alla uppgifter för att se det tydligare framför sig, däremot sker mycket utav beräkningen i huvudet, och många siffror faller därför bort. Exekutiva funktionen i arbetsminnet belastas vilket gör att hon blir förvirrad av talen. Trots detta är svaren korrekta men proceduren blir en extra ansträngning för henne.
Exempelvis uppgiften 33 + 29. ”Jag tänker först vad är 3 + 9 det är, e lika med 12. Plus 2, plus 7 ne inte 7, plus 30. E lika med 50. 50 plus 12 e lika med 62”!
Eleven har koll på entalen genom att addera dem men vid tiotalen blir det ena tiotalet 2, istället för 20. Hon adderar ändå med 30 och får svaret till 50.

Uttalande blir fel men beräkningen sker korrekt i arbetsminnet. Vidare adderar hon delsummorna och får svaret 62 (talsortsvis beräkning).

Vidare i intervjun får eleven uppgiften 53 – 27, eleven väljer att göra en modifierad talsortsvis beräkning. Hon subtraherar tiotalen för sig och entalen för sig, här subtraherar hon störst först vilket leder till att delsummorna blir 30 respektive 4. Sedan subtraherar hon 30 – 4, vilket ger svaret 26. Resultaten blir korrekt men hon uppvisar svagheter för negativa tal då just denna uppgift ger rätt resultat vid denna typ av beräkningsstrategi.

4.10 Elev 9 – Alice (år;4)

Redan i uppgifter av de lägre formerna räknar eleven på fingrarna vilket tyder på att hon inte har någon talfakta . I uppgiften 16 - 9 tar eleven god tid på sig innan hon svarar och säger tio. När intervjuaren frågar hur hon tänker ändrar hon sig och säger tveksamt nio i stället. Intervjuaren ber eleven att skriva upp uppgiften för att hon ska kunna se den framför sig. Eleven gör en algoritm men ställer entalet under tiotalet och börjar dessutom addera talen.

Hela uppgiften blir inkorrekt. Eleven visar på stor osäkerhet inför varje uppgift hon får och de svar hon ger är mycket tveksamma.

I följande uppgift 33 + 29 gör eleven en algoritm.

E; ” Ska jag skriva tolv här nu eller?

I; ” Vad är tolv”?

E; ” Eh, nio plus tre…”

I; ” Får du uppgiften till tolv”?

E; ”Ja”.

När intervjuaren tittar på ”kladden” har eleven skrivit tolv men även lagt till en femma framför ettan. Eleven visar tydligt att hon inte har någon uppfattning om hur en algoritm vare sig för addition eller subtraktion går till. I additionsuppgiften ovan utelämnar hon minnessiffran och skriver den direkt nedan , sedan adderar hon tre plus två, vilket är fem och på pappret skriver hon 512!

I nästkommande uppgift gör eleven åter en algoritm som visar på inkorrekt beräkning men som känns relevant att dela med sig av.

I; ”51 - 49”?

E; ”Vänta…59”?

I; ”51 - 49”

E; ”Aha, 51 + 49”.

I; Lyssna nu, 51 - 49”!

E; ”Det blir…eh, det blir ett där…eh, sen tolv

Eleven skriver den lånade tian ovanför entalet och får i den uträkningen två, vilket är korrekt. Vidare stryker hon dock inte femman och hon ser då inte att en växling skett vilket sedan utgör ettan i svaret. På frågan om det kan bli något mer än tolv svarar eleven ”en nolla”.
I; ” Hur tänker du nu”?
E; ”Jo, för jag har ju en nolla där i tian och då kan jag flytta ner den….eller”?

4.11 Elev 10 – Melika (år; 4)

Vår sista elevredogörelse använder sig fortfarande av fingerräkning, vilket påvisar att talfakta ej är automatiserad. Den här eleven gör algoritmer på de uppgifter som har lite högre tal och är helt klar över hur man gör växlingar i en subtraktion och använder sig av minnessiffra i addition. Eleven använder dock även algoritm i de uppgifter som inte innefattar höga tal, till exempel 63 - 7,då hon använder sig av lånemetoden.

Det man kan utläsa av elevens intervju är att talfakta är osäker då hon har svårt att urskilja talen i förhållande till varandra.

4.12. Tabell över elevernas olika beräkningsstrategier

	Talfakta		Talsortsvisberäkning			Kompensationsberäkning			Räkna upp från del			Standard Algoritm		
Elev	Säker	Osäker	Korrekt	Inkorrekt	Modifierad	Vanlig	Transformation	Mixad	Alla	Delen	Ned	Vanlig	Modifierad	Kommentar
Anna		x								x	x			Fingerräkning
Cecilia		x										x		Fingerräkning
Alex		x		x	x					x	x			Fingerräkning, inkorrekt
Emelie		x		x	x				x			x		Fingerräkning, inkorrekt
Edward	x		x				x					x		Inkorrekt
Melika		x										x		Fingerräkning
Alice		x										x		Fingerräkning, inkorrekt
Nathalie	x		x				x	x		x		x		
Annie		x	x									x		
Karolina		x									x			Fingerräkning
Totalt	2	8	3	2	2	0	2	1	1	3	3	7	0	

Tabellen ovan visar de olika beräkningsstrategier eleverna gör. Misstagen som + - 1 principen, positionssystemet, talsortsvis beräkning och räkna upp/ner från del ligger under dessa fem spalter. Om vi ser till eleven Alex visar han osäkerhet kring talfakta, han gör både modifierad och inkorrekt talsortsvis beräkning. Han räknar upp och ner från del med hjälp av fingrarna. Om vi läser av sista spalten ser vi att eleven inte har kunskap om algoritmen då han inte utför någon alls.

5. Analys av resultat

Utifrån de resultat vi har fått fram redovisar vi nu olika konsekvenser av misstag som elever gör. Vi tar bland annat upp strukturella och individuella misstag för att visa vilka följder detta kan ha för elevernas vidare inlärning inom matematik.

5.1 Strukturella och individuella misstag

Studien har visat att många elever gör samma typ av misstag och detta anses då vara strukturellt. Detta kan förklaras genom att se på den undervisning eleverna får och läromedlen de kommer i kontakt med. För att finna en lösning på detta problem måste både undervisningen och läromedlen ses över (Bentley, 2011, s 77).

Ett av de strukturella misstag som nästintill samtliga elever utförde var standardalgoritm och detta var främst i beräkning av subtraktion. Orsaken till misstaget kunde härledas till inkorrekt beräkning. Eleverna är medvetna om att algoritmen är en uppställning som kan användas både i subtraktion och addition men vet dessvärre inte hur den ska tillämpas.
En av eleverna gjorde följande när hon skulle utföra uppgiften 23 - 17. ”Man gör typ så (*stryker tiotalet och ställer 1 över entalet*). Man lägger en etta där över tror ja men det går ju inte för att det blir ju fyra om man lägger ihop ett plus tre… Nej, förresten, jag kommer inte ihåg…”. Ett av misstagen eleverna gör är att de antingen glömmer skriva ut det lånade tiotalet eller att de stryker över från tiotalet vilket innebär att de subtraherar hela tiotalen med varandra. Detta kräver mycket av arbetsminnet som får mycket att hålla reda på.

Om man ser till de individuella misstag inom samma beräkning (23 – 17), är det enstaka elever som gör misstagen och inte fler. Dessa orsaker ligger oftast till grund i elevens tidigare inlärningshistoria. Emelie visar i vår resultatredovisning stora brister i hur hon beräknar en algoritm. Under intervjun framgår det att elevens äldre syskon har lärt henne hur man gör en uppställning. Detta har både sina för och nackdelar. Emelie visar i exemplet på en inkorrekt inlärning av algoritmberäkning. Hon har inte förstått innebörden på ett korrekt sätt då hon gör en modifierad algoritm. Detta innebär att hon anpassar uppgiften efter det sätt hon tror är rätt. Eleven gör en omkastning på entalen vid beräkning av uppgiften 23 - 17.
Intervjuaren frågar; ”Hur tänker du kring den här uppgiften”? Emelie; ”Jag tänker att jag skriver 23 och så tar jag minus 17, då tar jag 2 - 1 och det är 1 och sen tar jag 7 – 3 och det är 4, ja då blir det 14 som jag kan se det”. Eleven gör en korrekt beräkningsalgoritm men tänker modifierad talsortsvis beräkning. Algoritmen svarar både för subtraktion och addition men det är lika viktigt i båda fallen att man får en korrekt introducering.

5.2 + - 1 principen / Räkna upp och ned från del

Andra typer av misstag som har upptäckts under insamlad data är bland annat det Bentley betonar som + - 1 principen, vilket innebär avvikelse från en enhet. I tabellen ovan benämns detta i spalten för ”räkna upp från del”. Om vi ser till tabellen kan vi utläsa att några elever gärna räknar från delen. I exemplet 5 + 3, räknar Anna upp från delen, alltså börjar hon på talet fem och räknar uppåt sex, sju, åtta. Det är viktigt att påpeka att eleven använder sig av fingerräkning. Detta ger en automatisk slutsats att eleven inte har utvecklad talfakta då det inte finns något att hämta ur den exekutiva funktionen i långtidsminnet.

I subtraktionsuppgiften 12 – 6 räknar samma elev men denna gång ned från delen. Hon räknar på fingrarna, tolv, elva, tio, nio, åtta, sju. Annas slutgiltiga svar är sju. Därmed visar detta på att hon avviker från en enhet då hon gör misstaget att börja på talet tolv och svaret blir inkorrekt.

Konsekvensen av + - 1 principen innebär att det blir ett ohållbart beräkningssätt i längden då uppgifterna kan omfatta högre tal, vilket resulterar i att de blir svårt för eleverna att hålla ordning på alla olika tal. Med konstanta inkorrekta svar leder detta till att eleverna inte upptäcker någon form av regelbundenhet i sina beräkningar. Detta är dock nödvändigt för att eleverna ska kunna utveckla talfakta (Bentley, 2011, s 128)

5.3 Kompensationsberäkning

Den tredje beräkningsstrategin vi vill belysa är kompensationsberäkningen, som har tre underrubriker nämligen *vanlig, transformation* och *mixad*. Det vi har upptäckt av resultatet är att de elever som använder sig av den här strategin anger korrekta svar men de lägger mycket tid på att utföra en förenklad metod. Kompensationsberäkningen kräver små operationer i flera steg och detta leder till att eleverna måste ha en god talfakta för att kunna utföra en uppgift som är flersiffrig (DeStefano & LeFevre, 2004, i TIMSS 2008, s 18). Beräkningsstrategin behöver inte anses som en negativ konsekvens för deras fortsatta inlärning. För elever som har god talfakta är detta inget problem. Denna typ av strategi passar deras matematiska utveckling. Detta exemplifierar kompensationsberäkningen ”63 - 7 = ..då tar jag bort tre på 60 och tre där på den där (7) då blir det 56”. Eleven räknar ned till närmaste tiotal och får således det jämnt. I detta fall är eleven väl medveten om sin beräkning då han gör likadant på entalen.

5.4 Talsortsvis beräkning

Slutligen vill vi ge en analys av talsortsvis beräkning. Hälften av de elever vi har intervjuat har använt sig av talsortsvis beräkning. Eleverna tillämpar strategin på olika sätt, en del av eleverna får inkorrekta svar, en del korrekta och någon modifierar uppgiften. Detta belyser vi genom tre olika exempel.

Exempel 1: ”33 + 29 = 50 + 12 = 62”. Edward gör en delvis korrekt talsortsvis beräkning genom att han tar tiotalen för sig samt entalen för sig. Edward är snabb i uträkningen då han gör alla steg i huvudet. Däremot borde beräkningen förklaras utförligare, detta genom att visa alla steg i processen. För att konkretisera en helt korrekt beräkning och inte missa några steg ska det se ut som följer, 33 + 29 = [30 + 20 = 50; 3 + 9 = 12; 50 + 12] = 62.

Eleverna med denna typ av tankesätt gör inga direkta misstag förutom att detta kan leda till att de tappar bort siffror under processen. Löwing (2008) menar att eleverna bör kunna flera olika strategier och dessutom kunna välja ut en lämplig och minnesbesparande strategi som passar till respektive uppgift. Detta ger en fördel då exemplet ovan innehåller många matematiska steg att hålla reda på (s 120).

Exempel 2: ”51 - 49… Oj! Ja, jag ska se (*skriver lodrät på pappret*) Fem minus fyra är ett och ett minus nio är åtta. Då kör jag bara ett minus åtta och det är sju”!

Exempel 3: ” 51 – 49 = 5 - 4 är 1, 9 - 1 är 8, då blir det 18”!

Exemplen ovan visar ett inkorrekt svar samt en modifierad talsortsvis beräkning. Med en automatiserad talfakta hade beräkningarna troligtvis blivit korrekta. Orsakerna till att eleverna får olika resultat i beräkningar är att de har en outvecklad uppfattning för talfakta. De kan inte se förhållandet mellan talen. Uppgiften 51 – 49 är en beräkning som kräver växling men många elever tillämpar strategin på ett inkorrekt sätt och får därför inte fram det korrekta svaret, två. Misstaget har visat sig vara vanligt hos både yngre och äldre elever i både vår studie och TIMSS 2008.

Eleverna har sedan tidigare lärt sig störst först i additionsberäkning vilket medför att detta blir fel vid subtraktionsberäkningarna (Bentley, 2011, s 79). Eftersom talsortsvis beräkning är en flersiffrig operation har de auditiva och visuella funktionerna i arbetsminnet en stor betydelse. Ett stort gemensamt hinder för de elever vi intervjuat är att de konsekvent använder sig av fingerräkning. Konsekvensen av detta är att de är allt för trygga med det sätt att räkna, vilket därför hämmar deras vidare utveckling inom matematiken.

5.5 Sammanfattning av analys

Vid intervjun med Nathalie ser vi till den sista uppgiften (53 - 27) hur hon får ett korrekt svar på uppgiften. När vi analyserar hennes beräkningsprocedur visar detta på en slumpvis lösning. Hon visar en osäkerhet i detta fall, då denna lösning ger ett slumpvist korrekt resultat. Detta skulle kunna överrensstämma när tillämpning av en viss procedur utan att eleven egentligen förstått innebörden av negativa tal (TIMSS, 2008, s 14). Konsekvenserna av detta misstag ger eleverna i den framtida inlärning fel uppfattning. De får ingen förståelse för de negativa talen, därför är det naturligt för många elever att modifiera uppgiften. Däremot om eleverna tillägnar sig en korrekt introducering tidigt inom matematiken ger detta en positiv fördel i vidare inlärning (Bentley, 2011, s 77).

Flera av eleverna i studien gör samma upprepade misstag. Om eleven inte behärskar uppgiftens innehåll vid detta tillfälle kan vi inte utesluta att eleven inte skulle klara det vid ett annat tillfälle. TIMSS (2008) redogör för att en individ kan ha flera uppfattningar och tillämplingar än vad som uppvisas under intervjusituationen. Däremot bör man vara observant på de risker som finns. Detta kan även påvisas när elever exempelvis gör ett läxförhör eller prov då den visuellt spatiala funktionen har ett korttidsminne vars innehåll kan hålla sig aktuellt inom relativt begränsad tid (TIMSS 2007, Adams & Hitch, 1998, s 18).

6. Diskussion

Diskussionen inleds med att belysa våra egna tankar kring resultatet i studien. Vi kommer därefter att redovisa för studiens begränsningar som följs av en analys kring realitet, validitet och avslutningsvis generalisering.

Eleverna vi har intervjuat har blivit utvalda av matematiklärarna då vi har önskat om att få elever med svårigheter inom matematik. Vi har inte lagt någon värdering i vilket kön eleverna har då det inte har någon relevans i studiens resultat. Matematik är i regel ett styrt ämne och våra intervjufrågor är strukturerade utifrån att ge ett korrekt eller inkorrekt svar. Vi har inte fokuserat på svaret i sig utan själva processen.
Intervjuerna bandades för att sedan transkriberas och analyseras. Studien började med att vi gjorde en provintervju med en elev för att se om intervjufrågorna höll måttet för vårt syfte. Tillsammans med handledaren analyserade vi det inhämtade materialet och fortsatte sedan vidare med resterande intervjuer. Vi hade gärna sett att vi haft ett större urval av informanter, dels för att få en ännu större inblick i vilka olika beräkningsstrategier eleverna väljer, men även för vår egen del där vi hade kunnat utveckla intervjustrategin genom att till exempel förbättra följdfrågorna.

Med studien ville vi försöka ta reda på vilka orsaker som ligger till grund för vanliga misstag inom matematiken. De frågeställningar vi valt att fokusera på är; vilka är orsakerna till vanliga misstag inom addition och subtraktion? Hur tillämpar eleverna talsortsvis beräkning inom subtraktionen? Genom intervjuerna och analysen av detta har vi skapat oss en ökad förståelse för de misstag som begås inom matematiken. Eleverna har visat osäkerhet för + - 1 principen, talsortsvis beräkning, positionssystemet, räkna upp och ned från del. Vidare har detta gett oss författare en inblick i elevernas tankegångar och deras olika beräkningsstrategier. De elever vi har mött och intervjuat har åtta av tio använt sig av fingerräkning, som fungerar som en strategi i elevernas värld. Vi vill betona att eleverna lägger mycket fokus på hur de använder fingerräkning. Till exempel hur många fingrar som är räknade? Vi har tolkat detta utifrån resultat och den litteratur vi läst att arbetsminnet belastas ytterligare och detta kan vara en orsak till de misstag de gör.
Vi har sett att en del av eleverna tillämpar talsortsvis beräkning vid subtraktionen på ett inkorrekt sätt. De modifierar uppgiften och beräknar störst först. Detta medför att resultatet blir inkorrekt och eleverna saknar förståelse för negativa tal. I uppgiften 51 – 49 modifierar en del elever talsortsvis beräkning och beräknar tiotalen för sig samt entalen för sig men misstaget sker när de räknar störst först på entalen.

Vi upptäckte tidigt under våra intervjuer att elever med god talfakta löste beräkningarna på ett korrekt sätt och kunde använda sig av olika strategier. Däremot elever som hade mindre god talfakta gjorde ett och samma misstag upprepade gånger. Vi kan också konstatera att de flesta av eleverna använder sig av korrekt strategi men tillämpar den på fel sätt, vilket de fyra principerna visar som vi nämnt tidigare (Bentley, 2011). Enligt läroplanen (Lgr 11:14) ska skolan se till att eleverna få det stöd och hjälp som krävs för vidare utveckling. Vi anser att de resultat vi har från inhämtad data visar på svagheter för de riktlinjer som läroplanen ålägger då många elever inte uppnår målen.
Intervjuerna gjordes med elever i olika årskurser där vi kunde se olika kunskapsnivåer som varje elev befann sig på. Det som vi fann intressant var att elever i samma årskurs och klass visade stora skillnader kunskapsmässigt inom de räkneuppgifter vi gav. Våra funderingar kring detta är att man har olika intresse, olika förkunskaper, olik undervisning samt olika läromedel.

Inom fenomenografin förespråkar man för variationen och hur man erfar fenomen. Vi anser att det är viktigt att läraren ser att eleverna tillägnar sig kunskapen på ett korrekt sätt. Vidare kan vi också ställa oss kritiska till denna form av undervisning då det kan kännas förvirrade för de elever som har svårigheter. Finns det ett stort urval av strategier kan detta skapa blockeringar hos eleverna vilket medför att de blandar ihop de olika strategier som erbjuds.

Många elever kan uppfatta att olika beräkningsstrategier ger olika svar. Till exempel som i talsortsvis beräkning kan 51 – 49 ge svaret 18 som en av våra informanter uppgett. Likväl kan samma uppgift ge svaret 2 i en annan beräkningsstrategi. Detta tyder på att eleven inte ser regelbundenheten i sina beräkningar och menar att det beror på hur man räknar (Bentley, 2011, s 49)

6.1 Studiens begränsningar

Studien har utgått från en kvalitativ undersökning, då vi har intervjuat eleverna enskilt. Detta för att skapa en förståelse för hur varje enskild individ tänker. Vi har kunnat analysera elevernas tankegångar noga eftersom vi har fått möjligheten till att banda, observera samt fått tillgång till deras anteckningar. Då underlaget har inhämtats genom flera metoder kan vi garantera reliabiliteten. Generaliserbarheten är förhållandevis låg då antalet av informanter endast varit tio stycken. Hade arbetet löpt under en längre tid hade vi kunnat intervjua fler elever vilket hade stärkt vårt resultat som dessutom skulle ge mer tyngd för generaliserbarheten. Validiteten i vårt arbete stärks utifrån att vår handledare som är forskare har kunnat analysera det resultat vi kommit fram till i vår studie och kunnat dra samma slutsatser som i sin egen analysrapport, TIMMS (2008). Skulle vi däremot sammanfogat vår studie med TIMSS (2008), hade vi kunnat generalisera.

6.2 Relevans för läraryrket

Resultatet av vår studie kan ge lärare en större förståelse och en verklig inblick i vilka orsaker som ligger till grund för elevernas misstag. I vår tabell över elevernas olika misstag kan man tydligt se vilka åtgärder som behövs. Med hjälp av vår studie och de studier som tidigare gjorts kan lärare ta del av konkreta metoder som de kan använda sig av i sin undervisning. Genom att som lärare få ta del av de olika misstag elever gör, medvetandegör man lärandet i sin egen undervisning.

Vår studie har visat att lärare har en medvetenhet kring problematiken inom matematik. Alla verkar inte känna till den egentliga kärnan till problemet för varje enskild individ. Vi har genom vårt resultat kunnat redogöra för varje elevs misstag.
De lärare som varit involverade under arbetet har visat stort intresse för de resultat vi kommit fram till. I arbetet med IUP samtal med elever och föräldrar kan detta ge ett underlag för diskussion kring resultatet av studien. Detta då även föräldrarna önskat ta del av det vi har kommit fram till.

6.3 Fortsatt forskning

Att få möjlighet till att göra en studie inom detta område har varit av stor vikt för oss som blivande lärare. Vi har tagit lärdom av undersökningen och kan tillämpa detta i vår egna framtida undervisning. Genom att ha fått ta del av dessa elevers erfarenheter har detta berikat oss på ett positivt sätt.

Vi hoppas att någon gång få ta del av en undersökning som är baserad på genus kring det underlag vi redan har. Vi syftar till en studie om just pojkar och flickors svårigheter inom matematik, alltså om könet har någon betydelse? Vi skulle gärna se till hur den fortsatta inlärningsproceduren går för de elever vi intervjuat.

6.4 Sammanfattning

I inledningen nämnde vi att det är viktigt att tidigt upptäcka de misstag eleverna gör för att så snabbt som möjligt sätta in de resurser som behövs för att gynna inlärningsprocessen.
Vi har mött lärare som visat frustration kring sin egen lärarsituation eftersom de själva inte har möjlighet att kunna bistå de elever som behöver extra stöd i sin undervisning.
Tabellen som illustreras tidigare i arbetet visar de misstag vi sett i resultatet. Den ger en tydlig översikt över misstagen som eleverna utför. Vidare kan man se att de flesta elever inte har automatiserad talfakta samt svagheter för positionssystemet vilket gör att det blir svårt att utföra en korrekt beräkningsstrategi då eleverna inte ser regelbundenhet. Vi anser att tabellen visar skrämmande resultat då exempelvis elever i år fyra visar sig ligga på en nivå som en elev i år två. Vi hoppas att vår studie bidrar till att uppmärksamma problemen som råder kring misstagen för att elever och lärare får den hjälp de är i behov av, i form av exempelvis mer resurser.

Vi har under studien kommit underfund med de olika funktionernas samverkan i arbetsminnet. De olika delarna är beroende av varandra för att det ska kunna utföra en korrekt beräkning. Till exempel använder sig de flesta eleverna av fingerräkning samtidigt som de ska hålla koll på lämplig strategi till uppgiften, detta leder till att arbetsminnet får en hög belastning och resultatet blir ofta inkorrekt.
Slutligen är vår önskan att de svårigheter som finns inom matematiken tas på större allvar för att så snabbt som möjligt hjälpa de elever som är i behov av det.

Referenser

Adams, J., W & Hitch, G., J. (1998) *Children´s Mental Arithmetic and Working Memory*. In *The Development of Mathematic Skills,* Donlan, C., (Ed.), Studies in Developmental Psychology. London: Psychology Press.

Baddeley, A., D. (1986). *Working Memory*. Oxford, UK: Oxford University Press

Baddeley, A., D. & Hitch, G., J. (1974). Working Memory, In *the Psychology of Learning and Motivation.* Bower, G. (Ed.), Vol 8, pp. 47 – 90.

Bentley, Per-Olof & Christina (2011) *Det beror på hur man räknar*. Liber:

Calgren, Ingrid & Marton Ference (2007) *Lärare av i morgon.* Första upplagan: Lärarförbundet

DeStefano, D., & LeFevre, J-A. (2004). The Role of Working Memory In Mental Arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology*. No. 16(3), pp. 353-386.

Gilljam, M, Esaisson, P & Oscarsson, H (2007). *Metodpraktikan: Konsten att studera samhälle, individ och marknad*. Lund. Studentlitteratur.

Liedman, Sven-Eric (2002) *Ett oändligt äventyr.* Sjätte tryckningen. Bonniersförslag

Logie, R., H (1995) *Visual-Spatial Working Memory*. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

Löwing, Madeleine & Kilborn Wiggo (2002) *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur

Löwing, Madeleine (2008) *Grundläggande aritmetik, matematikdidaktik för lärare*. Studentlitteratur

Marton, Ference & Booth, Shirley (2000) *Om lärande* Studentlitteratur: Lund

Olivestam, Carl E. & Ott Aadu (2010) *När hjärnan får bestämma* Stockholm: Remus förlag

Skolverket *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*

Skolverket *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMMS 2007*

Stukat, Staffan (2005) *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Lund: Studentlitteratur

Bilaga 1

Intervjufrågor

- **Talfakta (svara inom 3 sekunder)**

5 + 3?
8 – 2?
7 + 5?
12 – 6?
13 + 6?

- **Hur tänker du? (elever förklarar sin strategi)**

23 – 17?
16 – 9?
33 + 29?
63-7?
53-27?
51-49?