GÖTEBORGS UNIVERSITET

Begreppsbildning i matematikinlärning

– En studie om instrumentell och relationell förståelse

Eng Yong Lay

LAU690

Handledare: Christian Bennet

Examinator: Per-Olof Bentley

Rapportnummer: HT11-2611-152

Abstrakt

Titel: Begreppsbildning i matematikinlärning
Författare: Eng Yong Lay
Termin och år: HT 2011
Kursansvarig institution: Göteborg Universitet
Handledare: Christian Bennet
Examinator: Per-Olof Bentley
Rapportnummer: HT11-2611-152
Nyckelord: Begreppsbild, begreppsdefinition, instrumentell förståelse, relationell förståelse.

Syftet är att studera hur en begreppskonflikt kan uppstå i begreppsbildningenprocessen och hur instrumentell förståelse och relationell förståelse kan påverka matematikinlärningen. Undersökningsmetoden är textanalys. Tre forskningsrapporter och två litterära verk undersöktes. Resultatet diskuterades med hänsynstagande till läroplanen, kursplanen och TIMSS 2007 rapport. Genom analys av begreppsbildningsprocessen fick jag se hur begreppsbilden skapades i medvetandet och hur begreppskonflikten kunde uppstå när man lärde sig ett nytt begrepp som byggde på ett tidigare inlärt. Senare kan konflikten alltså mildras genom "back-tracking". Begreppsbilden i matematik är väldigt abstrakt det är även processen som leder till den. Varje begrepp motsvarar en "bild" som kan "ses" bara med vårt medvetande. Varje person skapar en egen "bild" till ett begrepp. Varje begrepp har sin ordning. Lärare kan inte skapa ”bilden” för eleven men kan visa vägen för hur den ska göra det. Varje elev behöver skapa "bilden" själv. För att skapa en "bild" kräver man en högre nivå och ett mer abstrakt tänkande. Att skapa en begreppsbild från begreppsdefinitionen är en långsam process. För att kunna göra samband mellan begreppen kräver man en relationell förståelse genom relationell undervisning. Många elever föredrar instrumentell förståelse för att denna kan ge dem rätt svar på kort tid så länge de följer matematikens regler. Men senare kan denna förståelse leda eleverna till ett allvarligt problem, det innebär att sambandet mellan begreppen är väldigt svagt i deras schema. Relationell förståelse kräver däremot en längre tid för eleverna att kunna se resultat som senare kan öka deras matematikförmåga. Med det sättet bygger eleverna upp ett starkt schema som kan fungera långsiktigt i framtidens inlärning. Enligt Skemp (1987) är relationell förståelse ekologisk[1]. Några exempel och diagram har jag skapat själv och jag har använt litteratur för att förklara begreppsbildningens process för att ge oss alla en bättre förståelse.

[1] Den kan användas på nytt.

Förord

Jag vill tacka min handledare, Christian Bennet för hans idéer och stöd under tiden för mitt examensarbete. Jag vill även tacka Ove Larsson för att han gett mig stöd på många sätt.

Falköping februari 2012
Eng Yong Lay

Innehållsförteckning

1. Bakgrund

Det är förstås så att många tycker att matematik är ett svårt ämne. Många av oss undviker matematik om det finns möjlighet att komma undan. Dessutom har många av oss tagit med sig denna medvetenhet till vuxenlivet – ”matematik är väldigt svårt”.

Matematik är ju ett speciellt ämne som kräver mycket tankar, tid, energi och tålamod. För att bygga upp ett matematiskt tänkande krävs många års arbete. Detta tänkande är abstrakt och kan vara på olika nivåer. Det kräver ”high order thinking”[2] (Arevik & Hartzell, 2007, s. 13). Det är en lång process. Hur kan vi då bygga upp en ”high order thinking”? Finns det ”low order thinking” i matematiskt tänkande? En del säger att matematik är någonting långt från verkligheten. Det är sant. Med mina egna erfarenheter som skolelev och högskolestudent i olika länder samt VFU-praktiken på två skolor i Göteborg blir jag väldigt nyfiken på de faktorer som är osynliga i processen i vårt medvetande när vi pluggar matematik.

Flera forskare beskriver processen i matematiskt tänkande på olika sätt. Bland andra är det Skemp (1987), Orton (2004), Tall och Vinner (1981), Sfard (1991), och Chick och Harris (2007). Skemp (1987, s. 9) säger att matematiskt begrepp är mest abstrakt. Han säger att ett ”begrepp” är svårt att definiera; ett begreppstänkande är enormt kraftfullt. Han säger att ett begrepp kan vara primärt eller sekundärt. Orton (2004, s. 20) beskriver att matematikinlärning är att man bygger upp ett begrepp som bygger på ett annat begrepp. Enligt Tall och Vinner (1981) uppstår konflikten i en kognitiv struktur när elever lär sig ett nytt begrepp. De menar att tidigare begrepp har svårighet att assimilera det nya begreppet. Sfard (1991) förklarar detta på ett annat sätt. Hon menar att matematikbegrepp kan ha två sidor. Den ena sidan är ett objekt och den andra är en process. En process leder till ett objekt. Om det finns missförstånd under processen kan man hamna i fel objekt. Sen har man svårighet att börja en ny process. Chick och Harris (2007) säger att lärare behöver ett speciellt sätt att undervisa matematiska begrepp. Det innebär att man behöver använda bra exempel för att förklara matematikbegrepp.

Enligt läroplanen (Lpf 94 & 2012) kräver elevernas matematikbegreppsförståelse samband mellan begreppen. Lärarna har ansvar för detta. Enligt TIMSS (2007, s. 106 & 107) har många elever lärt sig potenslagen: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Många av dem har problem att lösa problem när m eller n är lika med ett. Problemet är att exponenten över a inte är utskriven (se också Skemp, 1987, s. 39). Uppenbart uppstår en konflikt eller ”oljud” i elevernas medvetande. TIMSS (2007, s. 7) berättar:

”I en procedurellt inriktad undervisning[3] fokuseras beräkningar utan begreppslig förankring och inte på att belysa hur olika moment i matematiken förståelsemässigt bygger på andra.”

För att kunna lösa detta problem kräver man förståelse. TIMSS (2007, s. 7) säger:

”I en begreppsinriktad undervisning[4] däremot har begreppsförståelse en central roll, vilket stödjer uppbyggnaden av den hierarkiska kunskapsstrukturen.”

Begreppsförståelse är en lång process, med instrumentell förståelse kan elever se resultatet genast. Många elever vill lära sig matematiken på utantillsätt (instrumentellt sätt). Instrumentell förståelse kräver mindre förståelse men är begränsad. Begreppsförståelse är däremot långsiktig. Allt detta ska jag diskutera mer detaljerat i de kommande kapitlen. Det är mycket intressant att se resultatet.

---

[2] Det är ett abstrakt tänkande på högre nivå.
[3] Jag anser att detta är instrumentell undervisning.
[4] Jag anser att detta är relationell undervisning.

2. Syfte och frågeställningar

Avsikten med föreliggande arbete är att presentera vad som händer i medvetandet när elever läser matematik. I VFU-praktiken såg jag mina elever ha svårigheter att lösa matematikproblem när det krävdes mer tänkande. Jag såg hur de löste problem utan att begripa det underliggande begreppet. En del av eleverna ville förstå allt omedelbart. Andra de greps av panik. Jag funderade tillbaka på vad som hände när jag var elev. Många frågor lyftes upp i min tanke. Var kan konflikterna finnas? Hur kan man förklara detta? Vilket sätt att lära sig matematik passar eleverna bäst? Vilket undervisningssätt passar bäst för eleverna? Behöver elever lära sig matematik på lektionen i skolan för att sen begrunda det hemma? Är det lite som när korna äter gräset i hagen och sen tuggar om det i lugn och ro hemma i ladugården?

2.1 Studiens syfte

Syftet med mitt arbete är att, baserat på tre forskningsrapporter och två böcker, analysera hur begreppskonflikter kan uppstå i matematikbegreppsbildning och hur instrumentell och relationell förståelse påverkar elevernas matematikinlärning.

2.2 Förtydligande av frågeställningarna

Mina frågeställningar är följande:
1. Vad innebär begreppsbildning?
2. Hur kan konflikter uppstå i medvetandet när elever lär sig ett nytt begrepp?
3. Behöver eleverna lära sig matematik utantill?
4. Kan eleverna förstå matematiska begrepp omedelbart när de lär sig?
5. Vilken betydelse har instrumentell och relationell inlärning för eleverna och kan de båda komplettera varandra?

3. Metod

Jag använder textanalysmetod för att undersöka mitt material. Ett redskap som gör att jag kan fånga in och lyfta upp till ytan de viktigaste begreppen och meningarna i forskningstexterna så att de blir synliga (Bergström, 2005, s. 25). För att kunna förstå och tolka begreppen och meningarna krävs förförståelse. Utan en viss sådan är kanske arbetet omöjligt. Att välja bra kurslitteratur är det viktigaste i arbetet. Då var det viktigt att få råd av min handledare. Litteraturen kan ge mig en djupare kunskap och en bredare tankegång, en bättre förmåga till att analysera och jämföra forskningstexterna och relatera dem till litteraturen och vice-versa. I slutet svarar det på mina frågor, samtidigt visar jag samband mellan begreppen och mina erfarenheter.

3.1 Textanalys

Textanalys innebär att man på systematiskt sätt tar fram det viktigaste innehållet i texterna. Man gör en noggrann läsning av texterna i helhet. Man läser snabbt några gånger och översiktligt sedan långsamt och fundersamt. Filosofen Mats Furberg säger att det handlar om att man läser aktivt och ställer upp frågor (Esaiasson, 2007, s. 237) (Andersson & Furberg, 1972, s. 58-72). Johansson (2010, s. 56-58) säger att man undersöker dokument och anknyter till litteratur, läroplanen och så vidare. Det är viktigt att man förstår vad texter säger på ett djupare plan. Det innebär att en ordentlig läsning kan svara snabbt på huvudlinjerna eller huvudtankarna. Man tar fram något som man är mycket intresserad av och stannar till och funderar. Man läser aktivt genom att stryka under eller anteckna viktig text eller ord. Man formulerar egna frågor och sammanfattar innehållet. Detta sätt kallar man närläsning.

3.2 Urval av litteratur

Med hjälp av min handledare har jag valt två böcker som står i centrum av mitt arbete tillsammans med de tre forskningsrapporterna (se teoretiska inramningsdelen). Det bestämde vi tillsammans när jag berättade att jag ville undersöka ett område som handlar om matematiskt tänkande. Det ökar studiens tillförlitlighet. Jag började med att läsa igenom dem snabbt så att jag kände vad det var jag ville ha. De två böckerna är:

1. “The psychology of learning mathematics” av Skemp R.R. (1987).
2. “Learning mathematics” av Orton, A. (2004).

Jag upplevde i början att Skemps bok var mycket lättare att läsa än den andra. Detta på grund av att Ortons bok bygger på Skemps.

3.3 Genomförande

På följande sätt (Johansson 2010, s. 58) har jag utfört mitt arbete:

1. Jag har läst forskningsrapporterna snabbt och sen långsamt. Jag har strykt under det som är relevant och ställt upp frågor.
2. Jag har sammanfattat var och en. Vad säger författarna? Vad är de speciella perspektiv som jag kan hitta?
3. Jag har läst böcker. Först läste jag alla kapitel noggrant, sen strök jag under det som är relevant och ställde upp frågor.
4. Jag sammanfattade varje kapitel.
5. Jag gjorde ett samband och klarlade innehållet noggrant mellan litteraturen och forskningsrapporterna.

6. Jag läste igenom de speciella områden som jag tyckte hade samband med mitt syfte. Sambanden kanske inte kan ses direkt men det kommer efter en natt. Man behöver avslöja dem med inre tankar. Det innebär att jag behövde tänka på ett djupare sätt och på ett annat plan. Kan det ge förklaring på mina frågor? Att tänka är att fundera på ett kreativt sätt.
7. Jag skrev teoriinramningen. Det som var relevant i forskningsrapporterna för mitt syfte.
8. Jag skrev resultatet utifrån syftet och den teoretiska inramningen. Vad har jag hittat? Jo, att det finns gemensamma tankegångar. Jag har frågat mig om det finns skillnader. Detta har jag utvecklat vidare i diskussionen.
9. Jag skrev diskussionen. Jag diskuterade hela tiden fram och tillbaka mellan teoriinramning, resultat och syfte.

4 Teoretisk inramning

Jag introducerar de resultat som andra forskare har kommit fram till och hur dessa forskningsresultat kan hjälpa mig att lyfta fram mitt område. Begreppen i matematik är svårt att definiera, dessutom har många forskare försökt att hitta ett sätt så att man kan förklara vad ”begreppen” egentligen innebär. Jag har gått igenom tre uppsatser som skrevs 1981, 1991 och 2007. Två av dessa är ganska lika och den tredje talar mer om tillämpning.

4.1 Tidigare forskning

Jag börjar med att sammanfatta innehållet för de tre dokumenten. Begreppsbilden och begreppsdefinitionen kommer att undersökas, därefter matematiskt tänkande.
I forskningsrapporten *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity* beskriver Tall och Vinner (1981, s. 1-2) hur begreppsbilden uppstår när var och en lär sig en begreppsdefinition. Jag undrar vad de menar med begreppsbild och begreppsdefinition? Enligt Tall och Vinner (1981, s. 2-4) definierar den begreppsbild som alla kognitiva strukturer skapar i varje människas sinne när man lär sig ett begrepp. Vad innebär det som de kallar för kognitiva strukturer? Författarna påpekar att det uppkommer en kognitiv konflikt när det finns en skillnad mellan begreppsbilden och begreppsdefinitionen då individen lär sig. Hur allvarligt är detta och vad menar de? Det innebär att begreppsbilden och begreppsdefinitionen kan strida mot varandra i matematiskt lärande. För att understryka detta ytterligare visar författarna några exempel i arbetet om hur de skillnaderna eller konflikterna kan medföra allvarliga problem i förståelse när eleverna senare läser på en mer avancerad nivå i matematiken. Kan det förklara att många elever ger upp matematiken? Att många elever räknar utan att de egentligen begriper vad de gör, de räknar utantill? Man använder sig av utantillkunskap och saknar djupare förståelse. Enligt författarna kan de allvarliga problemen orsaka olyckliga situationer för många elever för vilket alltså undervisningen behöver ta sitt ansvar. Här menar jag pedagogisk personal. Spända situationer kan lätt göra att elever ger upp och bär med sig föreställningen om att de inte kan och att matematik blir obegriplig och kanske tråkig i hela livet. Hur undgår man detta? Svårigheter uppkommer i formellt lärande i matematik senare när begreppsbilden som ställs in i ens medvetande inte går ihop med den formella begreppsdefinition som man träffat på. Matematik är ett språk fyllt av symboler och ord med sin speciella betydelse.

Sfard (1991) har skrivit *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Sfard (1991, s. 2-3) anser att man har svårigheter att “se” de abstrakta föremålen när man lär sig matematik. Hon skriver att för hundra år sedan fanns det en berömd fransk matematiker och filosof som hette Henri Poincaré (1952) (Sfard, 1991, s. 1) och han skrev: ” … hur kommer det sig att det finns någon som kan förstå matematik?” Vi vet redan att det finns många som har svårigheter att lära sig matematik, det är inte något nytt idag. Detta har man diskuterat länge. Hur kan vi då lösa detta problem? Kan det vara lika svårt som att vi söker ett botemedel för en förkylning? Hur ställer vi de epistemologiska frågorna, de exakta eller rätta frågorna, till den karaktären av matematiska kunskaper? Just de frågorna som är relevanta för det stadium där eleverna befinner sig i sitt lärande. Frågan är ju hela tiden hur? Hur ska man veta som lärare var eleverna befinner sig med detta? Dessutom så är alla individer olika i sin utveckling. Enligt Sfard (1991, s. 4-5), måste det vara något som är alldeles speciellt och unikt i tankarna som kan bygga upp ett matematiskt universum. Hon söker den egenheten i matematiskt tänkande genom funderingarna kring den kunskapsteoretiska och den ontologiska[5] ställningen i matematiska modeller. Hon menar att de flesta materialen i föremålens former i universum kan ses med blotta ögonen. Detta gäller dock inte i matematiken för där kan de bara ”ses”

[5] Att beskriva vilka egenskaper som ligger i modellen.

med våra ”inre ögon”, de bilder som vi skapar i vårt tänkande. Hur skapar vi just de bilder som hör ihop så att eleverna kan ”se” dem och vinna kunskap?
Här följer en fråga: Vilka är de metoder, om det nu finns några, som kan öppna våra elevers sinnen så att de ”ser” dessa osynliga föremål? Hon säger att det kan vara ett stort problem om eleverna inte har denna förmåga. Här definierar författaren det ”abstrakta begreppet”. Hon påpekar att det ”abstrakta begreppet” kan förklaras på två olika grundläggande sätt (Sfard, 1991, s. 6):

1. *Strukturellt* – som ett föremål, som en ”bild” som skapas i tänkandet.
2. *Operativt* – som en fortgående process, en förståelse som man bygger upp.

Dessa två tillvägagångssätt är inte förenliga men de kompletterar varandra. Som sagt, inlärningsprocessen och problemlösningen kan vara ett komplicerat samspel mellan operativa- och strukturella- faser för varje begrepp. Författaren säger att ett föremål är ett objekt som man kan se med sina ögon eller som man kan nå med sin kropp – en statisk struktur i rum och tid. Strukturellt tänkande är speciellt och unikt, men det är inte så enkelt som man tror, det är mycket mer komplicerat precis som människans ansikte. Vad innebär det? Menar författaren att det finns underförstådda eller dolda meningar inne i bilden? Är det rätt att göra ett samband mellan det här strukturella tänkandet till vårt ansikte? Innebär det att man måste vara lika intresserad av matematik som av en persons ansikte som man gillar? Enligt Sfard (1991, s. 7) kan den strukturella fasen uppfattas som att den är odynamisk, momentan och integrativ, däremot är den operativa dynamisk, sekventiell och detaljerad. Hon tror att skillnaden mellan de båda, den strukturella och den operativa, är underförstådd, därför säger hon: “det finns en djup ontologisk klyfta mellan operativa och strukturella föreställningar.” Varför? Finns det något annat än ontologiska? Författaren förklarar att de inre bilderna stödjer eller står bakom det strukturella begreppet. Dessutom, tycker författaren att den icke-bildmässiga inre presentationen är mer relevant till det operativa sättet att tänka. På samma sätt säger tidigare forskare att matematiken innehåller två sidor med olika meningar. Vilka är dessa båda två sidor? Halmos (1985) (Sfard, 1991, s. 7) säger att de är abstrakta och algoritmiska; Andersson (1976) (Sfard, 1991, s. 7) kallar dem deklativa och processuella; eller en process eller en produkt med dualitet av matematisk symbolik, sagt av Kaput (1979) och Davis (1975) (Sfard, 1991, s. 7). Tydligen är det inte så enkelt att förklara på ett exakt sätt! Piaget (1970) (Sfard, 1991, s. 7-9) urskiljer också två sätt i matematiskt tänkande:

1. *Figurativa*... som är statisk och momentan,
2. *Operativa*... som är förändringen med tiden.

De båda är ekvivalenta med det strukturella begreppet och det operativa tillvägagångssättet. Enligt Hieberts och Lefevres (Sfard, 1991, s. 9) observationer har de båda strukturellt och operativt behandlats som två olika enheter... men att de är lika samexisterande som åtskilda som grannar i ett bostadområde. Därför anser Sfard (1991, s. 9) att operativa och strukturella är inte enskilda enheter men man kan inte särskilja dem från varandra. Det förklarar varför man inte kan “se” de abstrakta föremålen i ens inre och det leder till en inställning att det är väldigt svårt att nå dem. För att stödja sina synpunkter resonerar Sfard (1991, s. 10-33) att operativa och strukturella begrepp kan ses i de tre olika föreställningarna:

1. *Historikt perspektiv*. Till exempel talmängdens utveckling: $N \subseteq Q \subseteq R^{+} \subseteq R \subseteq C$. Hon menar att detta har gått igenom en lång bearbetning med tre faser :

i) *Den förbegreppsmässiga fasen*. Man vänjer sig vid vissa metoder som redan är kända.
ii) *Den långa perioden av det dominerande operativa tillvägagångssättet*. En ny typ av talmängder börjar växa fram.

iii) *Den strukturella fasen*. Det kommer nu ännu mer avancerade typer av talmängder. Sfard (1991) sammanfattar att det finns en lång kedja av övergångar från operativa till strukturella föreställningar som kan uppfattas som ett slags hierarki. Man börjar med det enkla för att sen gå vidare med det mer komplicerade. (s. 10-16)

2. Ur *psykologiskt* sätt tar det lång tid att bilda den strukturella föreställningen och det är en långsam och plågsam process. Hon säger att när man är van vid vissa nya matematiska begrepp då först utvecklar man det operativa begreppet. Det innebär att elevernas lärande på en högre nivå i matematiken inte kan förväntas att äga rum utan att eleven får hjälp av sina lärare eller av en bra lärobok. Som sagt... Sfard (1991, s. 17) säger att ”operativt kommer före strukturellt” detta borde förstås bara ses som ett sätt att undervisa... och hon påpekar att begreppsbildningsarbetet kan särskiljas genom tre steg:

i). *Interiorisation,*
ii). *Kondensation,*
iii). *Reifikation.*

I varje fall kan man diagnostisera dem genom att undersöka elevernas beteende, attityder och kunskaper. Vid interiorisationsfasen får elever bekanta sig med processen som kan ge upphov till ett nytt begrepp... och operativ utförs på en lägre nivå av matematiskt objekt. Sfard (1991, s. 19-20) säger att eleverna kan höja sin förmåga i inlärningsprocessen – realisering, med ett helhetstänkande utan att gå in på detaljer som hon kallar kondensationsfasen. När eleverna kommer till reifikationsfasen kan de se det som de redan kan på ett helt nytt sätt. Sfard (1991, s. 21-23) ger ett namn för detta: “ett momentant kvantsprång”! Med andra ord menar hon att det är en process som stelnar till ett objekt, till ett statiskt strukturellt begrepp. Kunskaper bygger på varandra, vid matematisk inlärning tar man ett steg i taget. Man måste göra färdigt varje steg innan man kan gå vidare. Det innebär att det är en hierarki som finns mellan de olika faserna.

3. Sfard (1991, s. 23-33) ger båda begreppen en koppling till den *kognitiva* processen. Hon påpekar att begreppsbildningen bara bör betraktas som fullt utvecklad om och endast om den kan uppfattas både operativt och strukturellt. Hur gör man det? Vad kan eleverna nå och få om de ska kunna se de båda begreppen? Genom att studera historia drar då Sfard (1991, s. 24) en slutsats att nästan all matematik är rent operativ, det är från den grundläggande processen till den avancerade processen som bara kan hänvisas till ett riktigt objekt... sedan utför Sfard (1991, s. 25-28) ett experiment för att lösa matematiska problem så att hon kan visa övergången från operativa till strukturella tillvägagångssätt och så konstaterar hon att arbete med matematiska problem kan bli lättare om och när eleverna har kommit fram till den strukturella föreställningen. Sfards experiment bevisar för oss att det rent operativa tillvägagångssättet kan behandlas på ett besvärligt sätt som senare kan leda eleverna till en stor kognitiv spänning och helt emot eget syfte blir då inlärningen improduktiv. Min fråga är: Finns det ett mönster för detta?
Kan det strukturella tillvägagångssättet ge ett lärande som blir mer effektivt och meningsfullt? Svaret är ja! ... Sfard (1991, s. 28) säger att det uppväcker förväntningarna och skapar insikterna medan det operativa tillvägagångssättet bara inbjuder elever till den verkan som producerar resultatet. Det skulle bli mer effektivt och lättare i elevernas inre aktivitet om det abstrakta objektet är närvarande, däremot kan frånvaron av detta hindra elevernas utveckling. Frågan är hur? Det förklarar att det är en av de faktorer som förhindrade utvecklingen av matematikvetenskapen i det antika Grekland. Det innebär också att övergången från processen till det abstrakta objektet ökar elevernas känsla av förståelse för matematikens värld. När eleverna kommer till reifikationen ökar de förmågan att lösa de matematiska problemen med bättre kompetens och konsekvensen blir att de lär sig mer… det gör att de eleverna har starkare självförtroende. Skemp (1976, s. 29-30) säger att det är viktigt att veta varför och hur

vi gör. Det innebär att eleverna behöver informeras om anledningar och regler. Det stämmer med författarens tanke att den strukturella föreställningen förmodligen är vad som ligger bakom relationerna till förståelsen.

Slutligen säger författaren att det att ha förmågan att se något, som är redan bekant på ett nytt sätt kan vara svårare än vi tror. Hon säger att det är det som oftast är svårast i inlärning. Matematiker har använt flera århundraden för att komma fram till en mycket komplicerad strukturell uppfattning av de mest grundläggande begreppen, till exempel talen och funktionerna… och utan en högre nivå i interiorisationen kan inte den reifikationen förekomma. Sfard (1991, s. 31) kallar detta ”grym cirkel”[6]. Detta kan förklara varför det finns många elever som kan ge rätt svar i problemlösning utan att de förstår vad de gör även om de använder utantillmetoder eller tillämpningar av de korrekta reglerna för problemlösning. Kilpatrick (1998) (Sfard, 1991, s. 31) skriver … färdigheten och förståelsen handlar om att främja det harmoniska fullgörandet av matematiska förfarandet och att utveckla förståelsen av hur och varför förfaranden fungerar och vad det betyder… . Browell (1935) (Sfard, 1991, s. 32) berättar att när idéerna och processerna redan är förstådda ska de tillämpas på något sätt för att öka kunskaper; Carpenter (1980) (Sfard, 1991, s. 32) säger att utvecklingen av någon färdighet är nästan knuten till den förståelsen om det begreppet som ligger bakom den kunskapen … dessutom enligt Sfard (1991) (Sfard, 1991, s. 33), att det inte ska förvåna att våra elever verkar ha lärt sig många matematiska färdigheter utantill. De kan utföra beräkningar men förstår fortfarande inte de begrepp som ligger bakom de beräkningarna. Varför händer det? Det handlar om, att ha förmågan att ”se” de abstrakta strukturerna. Utan dem kan eleverna drabbas av tveksamhet, osäkerhet och en känsla av otillräcklighet. Halmos (1985a) (Sfard, 1991, s. 33) säger att han fattade ingenting om vad matematikämnet handlade om, inte förrän efter några år. Detta kan förklaras med att det först handlar om kondensation och sedan kommer reifikation som kan ta så lång tid… och den reifikationen som kan ge en relationell (sammanhang) förståelse som kräver mycket arbete men tyvärr är det så att den reifikationen som det gäller ofta kan komma försenad. Detta har skadat eleverna, en skada som de kan bära med sig ständig i hela livet!

Chick och Harris (2007, s. 1) använder begreppen i sitt experiment så som det står i *Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio* , som är deras forskningsrapport. Det kommer upp ett väldigt viktigt begrepp. Det är den ”*proportionella resonemangen*” som bygger på ett grundläggande *multiplikativt tänkande*. De menar att för att bygga upp denna typ av förståelse i klassrummet behöver lärarna ett pedagogiskt innehåll i kunskapen (PCK)[7] (Chick och Harris, 2007, s. 2-4) så att lärarna kan välja ett korrekt läromedel som senare kan hjälpa dem att förmedla de matematiska begreppen på ett meningsfullt sätt till eleverna i klassrummet genom att

1. introducera och förklara begreppen till eleverna i början av lektionen.
2. utföra ett arbete så att eleverna kan öva begreppen efter undervisningen – den stärkande processen.

Chick och Harris (2007, s. 1) menar att det är väldigt viktigt för lärare att välja ett lämpligt undervisningsmaterial så att de kan göra en stark koppling till matematiken. Detta innebär att det är ett mer relevant innehåll och att problemlösningen anpassas bättre till elevernas förmågor. Författaren påpekar att de flesta lärarna använder exempel i klassrummet för att visa eller lösa problem i matematikundervisningen. Men frågan är hur kan man göra detta? Här kommer en fråga… den viktigaste frågan är hur man väljer ett lämpligt exempel i klassrummet så att den allmänna principen kan dyka upp ur ”oljud” av de specifika detaljerna som visas av Skemp (1971) (Chick och Harris, 2007, s. 1). Matson och Mason (2005), Ball

[6] På engelska kallar Sfard den ”viscious circle”.
[7] PCK står för det engelska uttrycket: Pedagogical Content Knowledge. Chick och Harris (1991, s. 1)

(2000) och Bills (2006) (Chick och Harris, 2007, s. 1-2) påpekar alla fyra att det är viktigt att lärare väljer bra exempel i sina val så att undervisningen kan göra det lättare samt enkelt att illustrera den allmänna principen … de är överens, det är också andra forskare, till exempel Zazla och Tjernoff (2006), Zaslavsky, Harel och Manaster (2006) med flera … men att hitta ett bra och samtidigt lämpligt exempel är inte så helt enkelt som man tror (Chick och Harris, 2007, s. 1-2). Watson (2003) (Chick och Harris, 2007, s. 2) föreslår att det finns ett komplicerat samspel mellan vad som är möjligt och vad som kan ses som möjligt … och författarna citerar idéerna från Rissland-Michener (1978) (Chick och Harris, 2007, s. 2) att det är skillnad på de exempel som man introducerar med och elevernas övningar där man fokuserar på antingen förfarandet eller begreppet… och en rutinövning som kan bygga upp vissa kognitiva konflikter fast dess syfte är att lyfta fram ytterligare aspekter av den allmänna principen eller en icke-rutinmässig uppgift som kan förbättra och utöka elevernas förståelse.

4.2 Hur bildas det matematiska begreppet?

Enligt Skemp (1987, s. 9), så används termen ”begrepp” i stor utsträckning, men den är inte lätt att definiera. För att förklara ”begrepp” använder man flera tillvägagångssätt tillsammans med flera olika exempel. De matematiska begreppen är de mest abstrakta. Varje dag kommer begreppen från vardagliga erfarenheter och de medför exempel som leder till bildandet av nya begrepp i tid och rum. Dessa vardagliga begrepp förekommer slumpmässigt. När begreppen bildas kan vi prata om olika exempel på dem. Därför är ett begrepp en slutprodukt, det är resultatet av en abstraktion. En abstraktion är en typ av bestående mental förändring hos oss, ett resultat av abstrakt tänkande. Abstrakt tänkande betyder en process, en process av en aktivitet som vi blir medvetna om bland våra andra erfarenheter (Skemp, 1987, s. 11). Varje begrepp har sitt namn. Det innebär att begreppet och namnet inte är detsamma. Det är en skillnad. Ett begrepp[8] är en idé, namnet på ett begrepp är ett ljud, eller ett tecken på pappret. Den associationen mellan begreppet och dess namn behöver en lång process. Det är associeringsprocessen. Denna förening kan bara äga rum efter det att begreppet har bildats. Vid tiden då ett begrepp bildas, har namnet blivit intimt förknippat med det. Det är en ny upplevelse i våra tankar. Men det leder ibland till konflikt och förvirring (Skemp, 1987, s. 12). Att namnge spelar en viktig roll i bildandet av nya begrepp. Då kan vi klassificera de olika egenskaperna på rätt sätt i vårt medvetande. Finns det någon ordning i begreppen? Svaret är ja. Det finns verkligen en ordning bland begreppen, en del bygger på de andra. För att förstå komplicerade begrepp måste man ha tagit till sig enklare. Dessa begrepp som bygger på andra kallas ”sekundära begrepp” (Skemp, 1987, s. 13) och de begrepp som vi kan känna med våra sinnen är så kallade ”primära begrepp” (Skemp, 1987, s. 13). Det sekundära begreppet ger oss möjlighet att se ”mer abstrakt”, till exempel kan man inte förstå ”färg” innan man en gång har upplevt det röda, blåa, gröna och de andra färgerna i sinnet. Därför, enligt Skemp (1987, s. 13), kan ett begrepp av högre ordning inte underlätta en definition för dem som inte har någon erfarenhet.

Vad innebär en definition? Skemp (1987, s. 13) förklarar att en definition är en avgränsning av ett begrepp. När vi kommer utanför denna gräns så kommer vi till ett annat begrepp. Det innebär att ett begrepp är avgränsat. Detta är naturligtvis abstrakt för de flesta av oss. Därför är det något mycket viktigt när elever möter det nya begreppet av en lägre ordning för första gången. Så till exempel kan man inte förstå innebörden av ordet magenta utan att ha upplevt röd och blå färg. Skemp (1987, s. 13) drar slutsatsen att de flesta av de nya begreppen som vi behöver i vardagen är av ganska låg ordning. De är ”avgränsade”! De nya högre ordningarnas begrepp måste också vara naturligt avgränsade. Ett av syftena till definitionen är att den gör att högre ordningens begrepp blir lättare att kommunicera. I matematiken är det något annorlunda. Skemp (1987, 14) menar att begreppen i matematiken är mycket mer abstrakta än

[8] Det är inte bara osynligt, ohörbart men också förgängligt (Skemp, 1987, s.50).

de i vardagen. De har större abstraktion i vårt tänkande. Således gör detta att kommunikationen av matematiska begrepp mellan lärare och studenter blir mycket svårare. Vidare är ett begrepp ett sätt att bearbeta data. Hur kommer det sig? Begreppet gör det möjligt för elever att få tidigare erfarenheter som hjälp att bearbeta och förstå den nuvarande situationen. Studenter bildar begrepp i åtanke på det förflutna, det gör att eleverna kan lösa matematiska problem. Begreppets uppbyggnad bygger på tidigare kunskap (kumulativ), det är en långsam process men den kan påskyndas genom att man använder rätt språk. Skemp (1987, s. 16) definierar ett ”oljud” i matematiken. Detta ”oljud” betyder att det finns information som är irrelevant för en viss kommunikation. Detta betyder inte att det är ”oljud” i andra situationer. Tänk om undervisningen är irrelevant information, då är allt ”oljud” för eleverna! Ju mer ”oljud” desto svårare blir det att bilda begreppet. Att tänka på är att ”oljudet” kan framgå ur oorganiserad och oförberedd undervisning, oanpassade läromedel och andra felaktiga metoder som används. Allt detta kan vara störande ”oljud” för eleverna. Begreppstänkandet ger användarna en stor makt och större adaptivitet (anpassning) och flexibilitet. Det kommer från förmågan att kombinera och relatera människans olika erfarenheter och nivån av erfarenhet. Hur kraftfullt är begreppstänkandet i matematiken? Skemp (1987, s. 16, 18) säger att ju mer abstrakt begreppet är, desto större makt har det. Matematik är det mest abstrakta och mest kraftfulla av alla teoretiska system. Därför är det det potentiellt mest användbara av sådana system. Hur användbart är det då? Jo! Matematiken är viktig inom vetenskaper, ekonomi, affärskommunikationer och teknik. Den är ett viktigt ”verktyg” för alla dessa områden. Men i ett klassrum skulle det kunna vara en annan sak. Eleverna tycker inte att klassrumslärande i matematik är särskilt nyttigt. Ibland är lärandet till och med smärtsamt. För en del elever är det kanske till och med alltid smärtsamt. Det betyder att de eleverna inte lär sig någon matematik alls, inte i skolan och inte i det vuxna livet heller. Matematik blir något plågsamt som hör skolan till och saknar verklighetanklytning. Även om lärande i matematik för de flesta är en intressant och rolig process, tycker många att detta är svårt att tro. Att lära sig symboler och ett antal utantillregler är inte bara tråkigt, det är också mycket svårt för flertalen elever. Detta beror på att det kan vara svårt att se att reglerna har ett samband med vardagliga begrepp. Hur kan lärare som undervisar i matematik göra så att begreppen kan förstås väl och förmedla detta till eleverna? Hur undervisar man om matematiska begrepp och hur lär eleverna sig begreppen i ett klassrumsperspektiv?

4.3 Matematisk begreppsinlärning och undervisning

De begrepp som är involverade i vår vardagliga kunskap är inte så abstrakta (Skemp, 1987, s. 18). Men det gäller inte alltid i matematiken. Matematik kan inte läras direkt från vardagsmiljön utan bara från matematiklärare och läroböcker i matematik. I samband med detta krävs elevens egen reflekterande intelligens. Det är bra om eleverna till stor del är beroende av lärare och läroböcker. Dåligt är det om elever utsätts för risken att förvärva en livslång rädsla och motvilja för matematik. Därför är det verkligen svårt att få någon att vara intresserad av matematik när lektionen är slut och eleven är utanför klassrummet. Hur kan vi, som blivande matematiklärare, hjälpa elever att förebygga denna rädsla. Och om den redan finns, hur ska vi då ta bort den? Skemp (1987, s. 18) säger att i själva verket är principerna för lärande i matematik okomplicerade. Lärarna är den allra viktigaste faktorn. Det handlar om att kunna förmedla matematiska idéer. Inte bara de enkla utan också de som kräver mycket hårt tankearbete innan man lärt sig dem och kan tillämpa dem.
Dessa två principer är:

1. *Den högre ordningens begrepp kan bara meddelas av en lämplig samling exempel, inte av en definition.*
Problemet är att majoriteten av läroböckerna introducerar nya idéer inte genom exempel, utan bara med definitioner (Gäller det idag?). Definitioner är begripliga för läraren, men

obegripliga för den studerande. Bra lärare lär intuitivt ut en definition med passande exempel. Men att välja en lämplig samling exempel är svårare än det låter. Det betyder att de måste vara liknande och ha de gemensamma egenskaper som utgör begreppet, inget annat, allt övrigt blir ”oljud”. Men ”oljud” är inte alltid onödigt. Skemp (1987, s. 18-19) säger att positiva ”oljud” är nödvändiga för begreppsbildningen. När begreppet blir starkare etablerat ökar ”oljud” inlärandet för eleven till abstrakt tänkande om begreppets egenskaper, genom att studera svåra exempel. Väl valda exempel minskar elevens beroende av läraren. Det är viktigt att använda ett begrepp på en intuitiv nivå utan att vara medvetet beroende av det, så är det med de mest grundläggande och vanligaste idéer. Resultatet är att ju mer automatiskt varje verksamhet utförs, ju mindre tänker vi på vad vi gör. Därför är det viktigt att införa de mest grundläggande idéerna i matematiken vid en tidig ålder, till exempel Pythagoras sats.

2. *I matematiken är dessa alltid andra begrepp. Därför måste man först vara säker på att dessa redan har bildats i elevens tankar*.
Den andra principen innebär att det tidigare begreppet är nödvändigt för nästa steg. Tidigare begrepp måste finnas inlärda innan nästa steg av abstraktion. Det betyder att innan vi försöker förmedla ett nytt begrepp, måste vi ta reda på vad det ska bygga på, vad eleven redan kan ... vi måste undersöka elevens kunskaper tills vi når antingen primära begrepp eller erfarenhet som vi kan använda. Därefter gör vi en lämplig plan för eleven. Eleven behöver en möjlig uppgift att lösa, men inte en omöjlig uppgift. Denna begreppsanalys innebär mycket mer arbete än att bara ge en definition. Skemp (1987, s. 20) säger att om man gjort detta kommer det att leda till några överraskande resultat.
Två konsekvenser av andra principer är:

i) I bildandet av strukturen av på varandra följande abstraktionsprocesser gäller att om eleven inte förstår en viss nivå så bra, då är all elevens inlärning härefter i fara.
ii) Det gäller att det nödvändiga begrepp som behövs för varje nytt steg av abstraktion måste vara tillgängligt. Om eleven inte redan kan detta måste det läras in.

Det finns konsekvenser. Den första är att eleverna har svårigheter att förstå den avancerade nivån av matematiken innan grundnivån är klar. Det innebär att alla efterföljande begrepp som bygger på grundnivåerna aldrig kan förstås, och att eleverna inte kommer någonstans vidare i sin inlärning! Kan en sådan situation vändas (”back-tracking”) (1987, s. 21)? Den andra är att det bidragande begrepp som behövs för varje nytt steg av abstraktion måste vara tillgängligt. Allt det som eleverna har lärt sig i det förflutna måste vara tillgängligt när det behövs ... en tillgång för elever för ”back-tracking”).
Eleverna lär sig begrepp som uppnåtts med stor möda av tidigare matematiker. Det är för mycket kunskap att själv skapa för ett geni under en livstid. Som en följd av detta blir inlärning av matematik för nybörjaren och för den genomsnittlige eleven väldigt beroende av god undervisning. Att behärska och förstå matematik är en sak och att kunna lära ut den till dem som är på en lägre begreppsnivå är en annan sak. Tyvärr är det denna senare kunskap som mest saknas.

4.4 Vad innebär förståelsen?

Vad betyder det att ha ”förståelse i matematik”? Att förstå något betyder att tillgodogöra sig det i ett speciellt *schema* [9] i vårt medvetande. Men det kan också hända att assimileringen går till ett annat lämpligt ställe. Om en elev har förstått förklaringen av reglerna i matematik, då har denna elev en större anpassningsförmåga till nya problem. Enligt Skemp (1987, s. 33-34) kommer oförstådda tidiga scheman att göra assimilering av senare idéer mycket svårare, kanske är det omöjligt. Å andra sidan innebär ett lämpligt schema att man tar hänsyn till det

[9] Det är ett organiserat mönster av tankar. De tankarna är begreppsstrukturer. (Skemp, 1987, s. 22-34)

framtida långsiktiga lärandet och inte bara till det som är för stunden. Läraren måste se mycket längre till än den nuvarande uppgift som eleven håller på med. Det är viktigt att i möjligaste mån kommunicera nya idéer på ett sådant sätt att lämpliga långsiktiga scheman bildas. Problemet är att det ibland är svårt att välja mellan att hitta lätta kortsiktiga scheman och långsiktiga som kan vara svårare att finna. Därför är lärarna i de tidiga stadierna av lärande mycket viktiga och har ett stort ansvar. De måste se till att eleverna lär sig och förstår och inte bara räknar utan att begripa vad de gör. Risken är stor att elever bara lär sig hur man löser problem utantill, utan att de egentligen förstår varför.

Det läraren kan göra är:

1. att hjälpa eleverna att hitta fram till kunskap. Läraren lägger ett grundläggande mönster för undervisningen.
2. att lära eleverna att leta efter dessa mönster på egen hand i matematikinlärning för att förbereda dem för framtidens studier.
3. att lära eleverna att vara beredda att själva kunna rekonstruera[10] sina scheman i inlärningen av matematik, detta för att förbereda dem för den okända framtiden.

Skemp (1987, s. 153) påpekar att olika slag av förståelse kan urskiljas genom att kalla den *relationell förståelse* och *instrumentell förståelse*[11]. *Detta* kan definieras som:

1. Relationell förståelse – eleverna vet vad de ska göra och varför.
2. Instrumentell förståelse – inlärningen handlar om regler som är givna utan att man anger skäl.

Det finns tre typer av matematisk inlärning som inte passar ihop med detta och som kan uppstå (Skemp, 1987, s. 155-158):

1. Om elevernas mål är att förstå på instrumentellt sätt, men läraren vill att de ska förstå det på relationellt sätt. Det betyder att, vad eleverna vill ha är någon form av regler för att få korrekt svar och sen ignorerar de resten. De förstår inte riktigt vad det är de gör.
2. Det kan också vara tvärtom. Det betyder att eleverna försöker förstå matematik relationellt men undervisningen gör detta omöjligt, därför att läraren tänker instrumentellt.
3. Lärares uppfattning om förståelse är instrumentell, men av någon anledning använder man en lärobok vars syfte är att skapa relationell förståelse hos eleven. Detta kommer att göra mer skada än nytta för eleverna. Eleverna kan då ha svårt att rekonstruera sina scheman.

Enligt Skemp (1987, s. 158), finns det många lärare som undervisar på instrumentellt sätt i matematiken. Frågan är, kan detta bero på att det har vissa fördelar? Skemp (1987, s. 158) ger tre exempel på sådana fördelar:

1. På något sätt kan det ofta vara lättare för eleverna att förstå.
2. Det ger omedelbara resultat och detta kan vara mycket givande. Den återställer snabbt elevernas självförtroende.
3. Det kräver mindre kunskaper av den undervisande läraren.

Det finns minst fyra fördelar med den relationella inlärningen i matematik (1987, s. 159):

1. Undervisningen blir lättare att anpassa till nya uppgifter.
2. Undervisningen blir lättare att komma ihåg på lång sikt.
3. Den relationella kunskapen kan vara effektiv som ett mål i sig själv.

---

[10] Det innebär att förbättra eller ersätta det gamla.
[11] Introduceras av Stieg Mellin-Olson, Bergen Universitet. (Skemp, 1987, s.173)

4. Relationella scheman är ekologisk[12] ur kvalitetsynpunkt.

Det verkar som om den instrumentella matematiken bara fungerar på kort sikt och inom ett begränsat sammanhang, men att den inget är för långsiktiga skeenden och i större sammanhang. Så varför är det då så att många barn undervisas enbart med den instrumentella matematiken under hela sitt skolliv? Orsakerna kan vara (Skemp, 1987, s. 160):

1. Att slutbetyget är viktigast för en framtida anställning.
2. Att kursplaner är överbelastade.
3. Att det är svårt att bedöma om en elevs förståelse är relationellt eller instrumentellt förankrad.
4. Att det kräver arbete och tid.

Så vad kan vi göra?
Sir Herman Bondi (1976) säger (1987, s. 161):

”... Att den negativa inställningen till matematik är olyckligtvis så vanlig, även bland dem som är högutbildade, är säkert det största måttet på vårt misslyckande och det är verklig fara för vårt samhälle ... det är inte svårt att skylla på utbildningen som åtminstone kan ta en del av ansvaret ... och problemet är att det är ännu svårare att föreslå nya åtgärder. ”

Inlärning av den relationella matematiken består i att bygga upp ett schema som har sin motsvarighet i att hitta ”nya vägar att gå dit” utan hjälp av vägledning. De nya vägarna kan vara mycket svårare att konstruera än den första vägen som står i vägledningen i läroböcker. Det relationella matematiska lärandet kan skiljas på flera sätt från instrumentellt lärande (1987, s. 163):

1. Eleverna blir mer oberoende av läraren.
2. Självändamålet. Det är tillfredsställande att bygga upp ett schema för sig själv.
3. Förtroendet byggs upp när scheman är klara. Eleven hittar ett nytt sätt ”att komma fram” utan att vara beroende av så mycket hjälp utifrån (av lärare).
4. Det ger eleven en ständigt pågående och givande process. Det innebär att det inte tar slut i och med att lektionen är slut utan eleven fortsätter att bygga scheman i hela sitt liv.

4.5 Symbolisk[13] förståelse

Vad innebär en symbol? Tidigare säger Skemp (1987) (se 4.2) att ett begrepp betyder ett objekt rent mentalt – det är ohörbart och osynligt, så frågan är hur gör vi så att vi kan läsa innehållet i någon annans medvetande? Faktum är att det gör man genom symbolen. Enligt Skemp (1987, s. 47, 49) får vi veta att en symbol är ett ljud, synligt och som är mentalt kopplat till en idé. En idé som bifogas till en symbol som inte är tom utan meningsfull annars blir den just tom och meningslös.
Två personers medvetande är anslutna till en symbol med samma begrepp. Sedan kan man, genom att yttra[14] denna symbol, framkalla begreppet från andras minnen i deras medvetande, och få dem att tänka på det aktuella begreppet. Det är svårt att inse att det ibland är det som är meningsfullt i sig självt för en person kanske inte är meningsfullt för åhöraren, vilket kan skapa en svårbegriplig situation. Vi kanske tycker att vi kommunicerar men vi gör inte det i verkligheten. Det är omöjligt att veta på vilken nivå vi befinner oss. När vi yttrar en symbol, vill vi påkalla uppmärksamheten hos mottagaren. Vi vill att idén som bifogas uppfattas i

[12] Det är som ett träd med sina rötter eller ett djur som utforskar nya områden för att hitta mat. (Skemp, 1987, s.159)
[13] Det innebär ett symbolsystem som innehåller många symboler. Skemp, 1987, s.185.
[14] Det kan vara när man talar, skriver eller ritar någonting.

stället för symbolen själv. Så hur noggrann för kommunikationen är då symbolen? I själva verket kan vi försöka komma mottagarens idéer så nära som möjligt. Det är omöjligt att exakt samma idé uppkommer i huvudet på mottagarna. Det gäller att fånga upp deras uppmärksamhet. I tidigare avsnitt säger Skemp (1987), att begreppet byggs upp gradvis. Det betyder att det uppkommer så småningom, steg för steg:

Närmevärden → Exakta begrepp

För att undvika förvirringen är varje symbol bara förknippad med ett begrepp, och vice versa. Men i verkligheten kan en enda symbol stå för en mängd olika begrepp. Detta leder till förvirring (Skemp, 1987, s. 50). Det finns tre regler för att förmedla önskad betydelse när en symbol motsvarar många olika begrepp (Skemp, 1987, s. 51):

1. Man måste se till att scheman som används är kända för alla.
2. Inom schemat motsvarar varje symbol bara ett begrepp.
3. Man måste informera eleverna om vilka scheman som måste ändras.

Reglerna verkar enkla och självklara, men de är inte alltid lätta att följa. Exempel (Skemp, 1987, s. 52, 58):

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	Detta är uppenbart eftersom x och a behåller samma betydelse i hela sammanhanget.
$a \times b$ och $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$	Här har ”$\times$” skillnad i betydelse i båda sammanhangen. Detta leder till förvirring för eleven.

För att förstå något som eleverna inte förstod innan behövs en bra förklaring så att assimilering till ett befintligt schema kan äga rum. Det finns tre möjliga orsaker som gör att kommunikationen har misslyckats (Skemp, 1987, s. 56):

1. Fel schema har används. Ord som ”funktion”, ”image” och ”grupp” används i matematiken och även i dagliga samtal. Det är viktigt att observera att orden då inte behöver har samma betydelse.
2. Gapet mellan det nya begreppet och det befintliga schemat kan vara för stort.
3. Det befintliga schemat kan kanske inte assimilera den nya idén.

Efter mycket diskussion om symboler, så är frågan vad innebär symbolisk förståelse? Skemp (1987, s. 184) föreslår detta till Byers och Herscovics (1977):

”*formell förståelse*[15] är möjligheten att ansluta matematisk symbolik och beteckningar till relevanta matematiska idéer ...”.

När man har utvecklat den symboliska förståelsen i matematik, blir förståelsen senare ännu större. Kraften i den matematiska symboliken är ett mycket speciellt fall av kraften i språket. Enligt Skemp (1987, s. 185) kan man förvänta att den har stor makt. Men i klassrummet, finns det ändå många elever som har svårigheter att lära sig att förstå den matematiska symboliken. Varför är det så?

En symbol är en uppsättning tecken som motsvarar en uppsättning begrepp eller relationer

[15] Det är en form som accepteras av många. Skemp, 1997, s.171

mellan symbolerna som i sin tur motsvarar relationerna mellan begreppen. Den symboliska förståelsen är en ömsesidig assimilering mellan en symbol och en lämplig begreppsstruktur. Enligt Skemp (1987, s. 187) är denna typ av kommunikation genom användning av symboler så uppbyggd att all muntlig eller skriftlig kommunikation går först till ett symbolsystem. För att förstå symbolerna relationsmässigt, måste de vara attraherade av en lämplig begreppsstruktur, det vill säga i termer av förhållandet inom den strukturen, snarare än av symbolsystemet. En symbol är ju bara en symbol så länge den inte har en specifik betydelse.

Exempel: 572 är inte bara tre ensiffriga tal utan ett enda nummer som bildas av summan $5 \times 10^2 + 7 \times 10 + 2$.

Två krav behövs för att få detta att hända (Skemp, 1987, s. 188):

1. Begreppsstrukturen har en starkare attraktion än symbolsystemet.
2. Det starka sambandet mellan symbolsystemet och begreppsstrukturen gör det lätt att gå från det första systemet till det andra.

Hur ska detta gå till? Skemp (1987) har fem förslag:

1. All kommunikation utgår från symbolsystemet. Det finns en punkt utan återvändo för begreppsstrukturen. Lärande i matematik kräver lång tid, ofta är det en process på många år. Om begreppsstrukturer inte kan bildas tidigt i lärandet, kommer de aldrig att få chansen att utvecklas. Om det inte finns någon begreppsstruktur eller om den är svag, kommer inlärningen att likställas med symbolsystemet. Man förstår inte vad man gör, man lär sig bara symbolen. Inlärning på denna nivå kan lätt bli kortsiktig, på lång sikt blir den omöjlig. Den relationella matematiken är mycket lättare att lära sig och den kan man behålla i minnet på grund av dess inbördes konsekvens och sammanhang. Därför måste vi presentera materialet i en sådan följd och på ett sådant sätt att det nya materialet alltid kan fattas begreppsmässigt.
2. Under de första åren av matematikinlärning går sinnesintrycken först till begreppsstrukturen och sedan kopplas den till motsvarande symbol.
3. Det talade språket är viktigast i början sedan kommer tankar och skrivna ord. Talade ord är också mycket snabbare och enklare att producera.
4. Man behöver använda en övergångsperiod med informella beteckningar som sedan ersätts med formella. Dessa står ju för mycket koncentrerad kunskap i den etablerade matematiken.
5. Om det behövs ska man använda sig av anteckningar.

Slutligen säger Skemp (1987, s. 188):

”Symbolisk förståelse är en ömsesidig assimilering mellan en symbol och en begreppsstruktur. Förståelsen domineras då av begreppsstrukturen. Symbolen är just en symbol”

4.6 Instrumentell förståelse eller relationell förståelse?

I Ortons bok (2004, s. 3), menar författaren att metoden att lära sig utantill är ett speciellt sätt för lärande. Han tror att barn lär sig genom att själva skapa känsla för världen. Han önskar att barnen ska lära sig den grundläggande relationen genom samspel med en lämplig miljö. Han säger också att det är nödvändigt att säkerställa att beteckningen framträder som logisk och effektiv, så att vissa lärares medverkan är nödvändig. Han säger att på detta sätt växer förståelsen inifrån. Han säger att det skulle vara fel att knyta instrumentellinlärning alltför hårt till behaviorismens strategi. Barn behöver utveckla sin egen förståelse inifrån sig själva. Orton (2004, s. 4) säger att lärande är en mental aktivitet. Vår hjärnas funktion fungerar som en datorprocessor av information. Om vi förstår den bättre då förstår vi mer om lärandet utifrån psykologisk synvinkel.

4.7 Elever lär sig i olika takt

Shulman (1970) säger (Orton, 2004, s. 4): Hur utbildning överförs (transfer of training) är det viktigaste enskilda begreppet i någon pedagogiskt relevant teori om lärande. Orton (2004, s. 4) hävdar att det inte är enkelt att anta att överföringen bara ska ske vid undervisning, eftersom det inte är så vanligt. Han säger att lärandet inte kan uppnås snabbt och att vissa barn kanske är långsammare än andra. Andra barn gör snabba framsteg, några gör till och med överraskande framsteg när de ges möjlighet att lära sig i sin egen takt istället för att vänta in hela klassens takt. Han väcker några frågor:

Bland dem väljer jag (Orton, 2004, s. 5):

1. Vad är det som avgör hur mycket eleverna lär sig? Varför lär sig vissa snabbare än andra?
2. För vissa verkar matematik vara svår att lära sig. Så varför är matematisk förmåga en märklig fallenhet som inte delas av alla?

Han visar att individuella skillnader kan vara en viktig faktor inom lärandet av matematik. Hadamard (Orton, 2004, s. 5) säger att olika barn behöver olika undervisningsmetoder och olika inlärningsmiljöer.

4.8 Elever behöver lära sig matematik i lugn och ro

Att lära sig är inte en helt enkel uppgift. Lärarna har alltid haft svårt att förklara metoder och hur de fungerar i matematiska begrepp. Orton (2004, s. 8) säger att barn lär sig framgång bara när de växer sakta och med ökande takt på kraven. Men det är inte lätt att vara säker på vad barn kan lära sig. Ibland leder våra beslut till motstridiga åsikter. Hur vet vi det? Orton (2004, s. 10) säger att förmodligen är det bästa verktyget för att undersöka vad eleverna verkligen har lärt sig och vad de har missförstått och missuppfattat genom den individuella intervjun. Orton (2004, s. 11) säger vidare, att alla har en större förmåga att lära sig när de verkligen vill lära sig. Naturligtvis påverkas kvaliteten på inlärningen av motivation, intresse, beslutsamhet och viljan att lyckas kommer också in i bilden. Elevernas självförtroende kan påverka deras framgång i matematik (Orton, 2004, s. 11). Om barnen kommer i panik när de ska lära sig matematik då hjälper inte någon välmenande undervisning.

4.9 Samspelet mellan instrumentell förståelse, relationell förståelse och kortsiktigt och långsiktigt minne

Psykologer uttrycker åsikten att vi har både ett kortsiktigt och ett långsiktigt minne. Om vi vill uppnå en korrekt långtidsförvaring tillsammans med allt annat vi minns, är frågan hur man skall uppnå detta? Utifrån psykologin är det viktigt för att berika kunskap att minnet används effektivt men på samma gång är mekanisk utantillinlärning utan mening till föga hjälp. Repetition är verkligen en del av lärandet, men dessvärre otillräckligt. Vi föredrar att ha en underliggande mening till den kunskap vi förväntas lagra i vårt minne . Med andra ord, det är lättare att behålla och minnas det som lärs om det är meningsfullt i termer av det nätverk av kunskap som redan finns i huvudet på eleven. Samtidigt är repetitioner ofta vad som gör att kunskap etablerar sig i länken till lämpliga nätverk (Winston, 2003) (Orton, 2004, s. 14). I början av matematiklärandet är symboler och ord godtyckliga och måste därför läras utantill. Orton (2004, s. 14) säger att ett visst element av utantillärande måste finnas kvar i matematiken. Till exempel: uttrycken ”liter” och ”centiliter” används inte ofta i det dagliga livet och måste alltså övas för att kunna bli ihågkomna. Därför måste symbolerna övas ofta med uttantillärande, det är oundvikligt! Repetition då och då, för att kontrollera förståelsen är viktigt. Men att lära sig utantill utan en länk till ett nätverk av kunskap underlättar inte förmågan att minnas. Orton (2004, s. 16-17) introducerar en ”begreppskarta”. Han menar att ett länkat nätverk av närstående delar som läromedel, gör att man kan relatera matematiska idéer. Det kan vara lämpligt för att hjälpa till att minnas.

Några konstruktivister antyder att studerande inte minns material precis likadant som det lärdes ut. Detta innebär att det inte absorberas utan det är konstruerat och att lagring innebär en aktiv process av konstruktioner. Att lagra och hämta fram en process är komplicerat. Enligt Orton (2004, s. 18), är ”steg för steg” fortfarande viktigt för minnet. Han oroar sig för det ”oljud” som ibland skapas under inlärningen av processen. Han pekar även på att om man uppnår instrumentell förståelse så är detta inte nödvändigt för att uppnå relationell förståelse. Han säger att det är något av en parallell mellan denna skillnad och mellan att memorera utantill och att memorera genom att etablera kontakter i medvetandet.

Exempel: $\frac{3}{5} \div \frac{7}{10}$

Instrumental förståelse innebär att man ”inverterar” den andra fraktionen och ersätter ’$\div$’ med ’$\times$’ tecken. Men detta leder ofta till att eleven upplever förvirring. Vilket bråk är det som man ska invertera?
Vad sägs då om relationell förståelse? Kommer denna att kunna hjälpa eleverna?
Men tyvärr verkar det inte som om de flesta eleverna kan uppnå denna efter avslutad skolgång. Så vad är då problemet?
Det finns vissa belägg för att instrumentell förståelse kan bidra till att främja relationell förståelse. Orton (2004, s. 19) säger att lärande är komplext, och att vi alla lär oss på så många, olika sätt. Det är lite som ”hönan och ägget-situation” (Orton, 2004, s. 20).
Det är ingen tvekan om att alltför mycket instrumentell inlärning accepteras i matematik med elever för vilka passande relationell förståelse aldrig uppkommer. För mycket beroende av instrumentell förståelse kan snarare liknas vid att bygga ett torn på osäkra grunder.
Så hur kan då vi lära ut matematik om vi vet att den relationella förståelsen är omöjlig att uppnå (Orton, 2004, s. 20)?

4.10 När mognar begreppen?

Orton (2004, s. 21) säger att lärande i matematiska algoritmer är svårt, men att begreppsstrukturen bakom är ännu svårare att lära sig och mer krävande. Hans åsikter liksom Skemps (1987): Att skapa ny begreppsförståelse är att bygga ut och ta in tidigare förstådda begrepp. Orton (2004) säger att begreppet inte är lätt att förklara. Novak (1977) (Orton, 2004, s. 21) ger en definition för detta: ”Begrepp beskriver en viss regelbundenhet eller relation inom en grupp av fakta som betecknas av några tecken eller symboler”. Orton (2004) håller med Skemp (1987) som sa att för att kunna definiera vad vi menar med ett begrepp i matematiken behöver vi ha många exempel i åtanke. Orton (2004, s. 22) säger att vi måste vara mycket försiktiga när vi försöker införa abstrakta matematiska idéer. Några idéer kan vara mer abstrakta och därför svårare att lära sig än vad vi anar.

Här är ett intressant enkelt ordstäv (Orton, 2004, s. 23):
”Jag hör och jag glömmer.
Jag ser och jag kommer ihåg.
Jag gör, och jag förstår”.

Enligt Orton (2004, s. 23), är detta ett starkt budskap om att det behövs aktivitet. Orton (2004) hävdar att barn lär sig bäst med utgångspunkt från det konkreta för att kunna minnas det abstrakta. Här delger Orton (2004, s. 24) en intressant tanke: En fullständig förståelse av ett begrepp är nödvändig men detta kan även vara ouppnåeligt. Det kan vara studier av parallella eller ännu mer avancerade begrepp som leder till bättre förståelse av begrepp som man tidigare stött på. Enligt Ausubel (1968) (Orton, 2004, s. 24): ”Den enskilt viktigaste faktorn som påverkar lärandet är vad den lärande redan vet ...”. Askew och William (1995) (Orton, 2004, s. 24) säger att: ”... lärarna ska använda en blandning av exempel och icke-exempel. De bör välja dessa så att regeln bevisas så mycket som möjligt av exemplen och de bör välja det som kallas icke-exempel för att dessa inte bevisar regeln.”

4.11 Assimilering av och ackommodation i lärandet

Piaget (Orton, 2004, s. 51) har gjort många experiment som undersöker förståelse av matematiska innehåll och begrepp. Innehållet i dessa experiment har jag inte diskuterat här. Jag är mer intresserad av hans resultat och de effekter som processen av lärande i matematik har på eleverna. Han föreslår att barns strukturella och naturliga intellektuella beteenden förändras avsevärt i olika stadium av intellektuell utveckling. Detta är inte bara att visa ny förståelse utan är också ett radikalt annorlunda sätt att tänka och att se på världen. Barn är helt enkelt inte redo för matematik om de inte har nått just det stadiet i sin intellektuella utveckling.
Piaget föreslår fem steg som han kallar (Orton, 2004, s. 52):

1. Det sensoriska -motor stadiet.
2. Det föroperativa stadiet .
3. Den konkreta operativa fasen.
4. Den formella operativa fasen.

Enligt Piaget (Orton, 2004, s. 52-53), måste eleverna gå igenom alla stadier följande på varandra. Elever måste kunna se, höra, göra saker, lära sig och tänka i klassrummet. Vid den formella operativa fasen, föreslår Piaget en teori om att det är det svåraste stadiet på grund av den abstraktionsnivå som har kommit med in i spelet. Lärare är alltid ivriga att trycka på med nästa ämne och att införa någonting nytt (idéer) som ibland kommer alltför tidigt och alltför snabbt. För Piaget är den formella operativa fasen en hypotes om att tänka eller om att ta bort, logiska argument. Därför behöver man mer konkret praktisk introduktion på en nivå som kan hjälpa eleverna. Nu blir konsekvenserna för lärande i matematik tydliga. Matematiska idéer kräver den typ av tänkande som inte är tillgänglig från början. Det är omöjligt att införa begreppsbilder innan eleverna har kommit till det sista steget, eftersom de ännu inte är redo för dessa abstrakta idéer. Vissa kan kanske förstå början av en abstrakt idé på ett intuitivt och konkret sätt men de kan inte förstå lärarens tankegång. Detta förklarar varför lärare ibland misslyckas. Det är klart, om eleverna inte klarar av att plötsligt gå från ett stadium till nästa, hur ska de då kunna förstå - det måste väl till en övergångsperiod mellan två olika faser.

Piaget introducerar två idéer (Orton, 2004, s. 56):

1. *Assimilering*.
2. *Ackommodation*.

Assimilering avser att ta in, att anta eller absorbera nya idéer. Ackommodation hänvisar till vad som kan vara nödvändigt på vägen till ändring och förändring av tidigare förståelse för att ett antagande ska vara möjligt. Orton (2004, s. 57) menar att assimilering inte kan ske utan ackommodation, och ackommodation behöver inte alltid vara så lätt. Ett exempel är när linjära ekvationer införs och metoder för att lösa linjära ekvationer introduceras och praktiseras. Det senare införandet av den kvadratiska ekvationen kan mycket väl visa upp problemet med ackommodation. Problemet med ackommodation kan vara att metoder lämpliga för linjära ekvationer inte längre fungerar, men att eleven verkligen ibland försöker använda dem. Detta visar på dessa svårigheter. Det är möjligt att hitta personer som visar att de behärskar matematiken i klassrummet. Men att ändå deras åsikter utanför klassrummet återgår till populära felaktiga föreställningar. Detta är en situation där ackommodation även kan kräva fullständig borttagning av vad eleverna tidigare haft för åsikter. Det verkar även som om de rätta lagarna kan likställas och ändå bli till felaktiga lagar som fortsätter att finnas tillsammans. Den enskilde eleven måste komma till ett tillstånd av mental balans, även om detta innebär att en sak är rätt i klassrummet och en annan i den verkliga världen.

Orton (2004, s. 57-58) säger att om man skapar ett tillstånd av psykisk obalans för eleven så genererar detta en konstruktiv verksamhet som krävs för ackommodation och lärandet blir mer permanent än om idéer presenteras positivt. Om lärarna i klassrummet presenterar konflikter av idéer eller teorier som måste lösas kan detta leda till framgångsrik inlärning med motiverade elever. Konflikten mellan felaktig teori och observerade resultat (experiment eller beräkning) leder eleverna till en ny teori och nya experiment. Detta leder slutligen till acceptans av universellt accepterade lagar. Sådant lärande kommer sannolikt att bli mer framgångsrikt och bestående än alla försök att presentera de rätta lagarna utan att eleverna har aktiv medverkan. Det är exempel på felaktiga teorier som kan leda till användbara och konstruktiva konfliktexperiment.
Två viktiga principer är grundläggande för allt matematiskt tänkande (Orton, 2004, s. 61-62):

1 ... konsten att förstå kan inte läras ut och inte heller kommer den av sig själv … det betyder inte att läraren inte kan göra någonting förutom att vänta på den första förståelsens gryning. Istället kan läraren ge eleven den typ av erfarenhet som kommer att hjälpa honom att gå från intuitivt till operativt tänkande.

2. Barn lär sig matematiska begrepp långsammare än vi förstår och tror. De lär sig bäst av sina egna aktiviteter. Även om barn tänker och resonerar på olika sätt så passerar de alla genom vissa stadier beroende på deras kronologiska och mentala åldrar och deras erfarenheter.

Här är teorier som accepteras av många lärare idag:

1. Det är en fara med att introducera matematiska idéer för tidigt för barn. Idéer är det förstås bara i en intuitiv bemärkelse, inte i en analytisk bemärkelse, för barnen.
2. Det är inte meningen att barnet alltid måste vara ”redo” för en viss idé innan läraren introducerar den. Läraren kan använda sin kompetens och erbjuda lärandesituationer för de elever som kräver tänkande. Läraren kan vara precis intill dem och tillgänglig för dem när de är redo för en idé. Den inlärningssituationen som läraren kan mycket väl innebär att läraren kan passa in sin undervisning så att den kommer lagom till barnets förståelse för en idé. Läraren har en viktig roll att spela. Vi som lärare kan inte slå oss till ro, inte luta oss tillbaka och vänta.

I den *I do, and I understand* (1967) boken (Orton, 2004, s. 62) säger man:

”Varje försök att skynda på barnets utveckling genom detta stadium av utveckling (konkreta åtgärder) riskerar att leda till en allvarlig förlust av förtroende för läraren ... och så småningom, när eleverna på nytt ställs inför ett problem, kommer de kanske att ignorera alla tillgängliga material och närma sig problemet utan att ta det till sig.”

4.12 När visar elever matematisk förmåga?

Det har visat sig av studier att det som har det mest dominerande inflytandet på matematisk förmåga är samlad intellektuell kapacitet. Några elever visar mer fallenhet för matematik än andra. Så det är alltså en fråga om individuella skillnader. En stor studie av elevernas matematiska förmåga utfördes av Krutetskii (1976) (Orton, 2004, s. 142-143). Här följer några av komponenterna:

1. Eleverna kan utföra och behandla problemet i formell strukturform.
2. Eleverna kan generalisera resultaten. De kan överföra utförandet till andra exempel.
3. Eleverna kan använda och förstå symboler och siffror.
4. Eleverna ska äga förståelse för rumsliga begrepp och kunna föra logiska resonemang .
5. Eleverna ska visa flexibilitet och förmåga att tänka fram och tillbaka ...

Suydam och Weaever (1977) (Orton, 2004, s. 143) beskriver att de elever som är mer impulsiva ofta är dåliga problemlösare, medan de elever som är mer reflekterande sannolikt är bättre på detta. De menar att dessa elever kan följa en plan, prova idéer systematiskt och se vilka idéer som är värda att följa. Å andra sidan, de elever som är sämre problemlösare uppvisar blinda, omotiverade manipulationer och gör kaotiska och osystematiska försök. Krutetskii (1976) (Orton, 2004, s. 144) beskriver att oförmågan för matematik är en låg nivå av funktionell mognad av hjärnans inre regioner. De olika delarna av hjärnan ansluter sämre till varandra! Men han föreslår också att det finns olika typer av matematisk förmåga:

1. Vissa elever har en ”analytisk” förmåga och tänker i verbala och logiska banor;
2. Vissa har en ”geometrisk” förmåga och tycker om ett visuellt eller bildmässigt sätt att närma sig problemen.
3. De flesta elever har en ”harmonisk” förmåga att kunna kombinera typ 1 och typ 2.

Krutetskii (1976) säger att elever av den tredje typen är de som mest sannolikt kommer att kunna visa en verklig matematisk begåvning.

Enligt Orton (2004, s.144), bevisar ingen av dessa verklig information om matematisk förmåga. Så vad är då matematisk förmåga? Orton (2004, s. 145-146) säger att många förklaringar har gjorts tidigare genom undersökningar som inte har lett oss fram till en tillfredsställande förståelse av matematisk förmåga. Det är också en risk med att försöka bedöma elevers förmåga. Enligt Hadamard (1945) (Orton, 2004, s. 144-145, 147), kan den i själva verket ta sig många former som numerisk förmåga, spatial förmåga, förmåga till konvergent och divergent tänkande, och så vidare.

4.13 Vad är spatial förmåga?

Man kan hitta ett brett utbud av bilder, diagram, grafer osv. i matematiskt lärande. Ett särskilt problem är det med den tvådimensionella representationen av tredimensionella objekt. Det skulle vara mycket svårare för eleverna att visualisera dessa objekt. Smith (1964) (Orton, 2004, s. 148) drar slutsatsen att den spatiala förmågan är en viktig del av den matematiska förmågan. Orton (2004) påpekar att kanske är det så att alla mänskors förmågor är likadana. Var och en av oss besitter en unik kombination av olika nivåer av förmåga. Därför bör det inte komma som någon överraskning att studiet av förmågor, såsom matematiska och rumsliga, är så komplex. Forskningen visar att detta inte är den viktigaste delen av matematisk förmåga. I själva verket är vi ju inte alla exakt likadana. Så vad är då problemet? Det kan vara en fråga om vilka preferenser och attityder som lärare och elever har. (Orton, 2004, s. 147-150)

5 Resultat

Först ska jag relatera till vad författarna i de tre forskningsrapporterna tycker om det som de har definierat som begreppsbild och begreppsdefinition. Detta ska vara relevant till mina funderingar och till konflikter mellan dem. Sedan handlar det om instrumentell förståelse och relationell förståelse, detta behandlat i förhållande till de båda begreppen. För att man ska kunna se detta tydligt ska jag rita diagram. Det underlättar för läsaren att följa med i diskussionen och vad det innebär, detta med begrepp i schemat, som har bildats under instrumentell förståelse och relationell förståelse.

5.1 Vad innebär begreppsbilden?

Enligt Tall och Vinner (1981), uppstår begreppsbilden när man lär sig begreppsdefinitionen (detta ska jag förklara i nästa del). De säger att begreppsbilden består av alla kognitiva strukturer som skapas i vars och ens tanke när man lär sig ett begrepp. Begreppsbilden i matematiken handlar inte bara om en enda symbol, den är mer komplicerad än någon annan bild i tanken. Den kan vara i form av symbolik, bilder, ord eller något annat. Nu blir det tydligt. Begreppsbilden är alla totala kognitiva strukturer som är anslutna till begreppet och som ingår i alla mentala bilder med egna egenskaper och processer. Vad säger Sfard (1991) om begreppsbilden? Hon beskriver att man kan se "bilderna" med våra "inre ögon". Det innebär att man inte kan se dem med blotta ögon utan man "ser" dem i tankarna. Hon ger inte en tydligare förklaring till detta. Jag anser att hon menar att begreppsbilden uppkommer först i den operativa processen . Hon menar att man kan öppna elevernas tankar så att de ”ser” dessa ”osynliga föremål”. Sen förklarar hon att dessa ”osynliga föremål” är som ett föremål, som en ”bild” som skapas i vårt tänkande, och den "bilden" kan ta lång tid att skapa. Det betyder att man bygger upp bilderna från sin egen förståelse. Det är en lång process innan den strukturella processen äger rum. Men enligt Tall och Vinner (1981), skapar man inte alltid en passande begreppsbild i sitt lärande, det innebär att detta kan leda en till en konflikt med begreppsdefinitionen. Sfard (1991) påpekar att detta att ha förmågan att ”se” begreppsbilden kan vara svårare än man tror.
Här visar jag ett exempel:

”Tigern tillhör A-familjen”. Här uppstår ett problem. Vad innebär A? A är ju en symbol eller en bokstav i alfabetet. Utan att förstå vad ”A” innebär kan man inte förstå riktigt hela meningen. Det blir ju ett ”oljud” (se teoretisk inramningsdelen). Dessutom gör det att ens tanke inte kan gå vidare för att bilden för ”A” inte finns i ens medvetande. Ett samband kan inte skapas mellan tigrar och A-familjen. Detta visar oss hur viktigt det primära begreppet är i matematikinlärning.
Om nu A står för katt blir meningen "Tigern tillhör kattfamiljen". Om man har sett och lärt sig hur ett kattdjur ser ut och känner till kattens egenskaper (det kan ta lång tid att lära sig vad en katt är) då är det tydligt. Det innebär att man har tidigare skapat kattens begrepp i sitt medvetande på den primära nivån. Att göra ett samband mellan tigrar och kattfamiljen är ju inte längre så svårt. Man kan ju säga att tigern har kattens egenskaper. Detta medvetande bygger man på den sekundära nivån. Sfard (1991) säger att detta medvetande är "osynliga föremål" som bara kan ses med våra "inre ögon". I nästa del ska jag använda detta exempel för att visa hur konflikten uppstår om A är något annat än katt.

Chick och Harris (2007) använder denna begreppsbild i sitt experiment. De menar att lärare behöver ett PCK (se teoretisk inramning delen, s. 12) för att välja ett passande läromedel så att eleverna själva kan skapa en korrekt begreppsbild som senare kan leda dem till rätt begrepp. Bra exempel kan illustrera en allmän princip i undervisningen. Skemp (1987) säger att begreppet är en slutprodukt och att denna är abstrakt. Jag anser att han menar begreppsbilden. Sfard (1991) säger att varje begreppsbild som man skapar står bakom strukturellt. För att sedan bilda en begreppsbild behöver man börja med operativ process och sedan fortsätta med strukturell process (se teoretisk inramningsdelen). Hon påpekar att bildandet av en begreppsbild går genom tre steg. Första steget är att eleverna får bekanta sig med en process som är på lägre nivå (interiorisation). Det andra steget är att eleverna realiserar processen utan att gå in på detaljer (kondensation). Det sista steget är att eleverna kan ”se” denna bild som står bakom detta begrepp (begreppsdefinition). Detta objekt som eleverna har skapat är en bild som är helt ny.

Sammanfattning: En rätt begreppsbild kan skapas i tänkandet med hjälp av tillämpliga exempel. Men att hitta bra exempel är inte helt enkelt. En korrekt begreppsbild kan underlätta förståelsen i begreppsinlärning. Lärarens roll är att hjälpa eleverna att själva skapa sig en begreppsbild genom att arbeta med exempel. Läraren kan ju inte skapa bilden för eleverna. Eleverna behöver jobba med detta själva.

5.2 Vad innebär begreppsdefinition?

Tall och Vinner (1981) säger att begreppsdefinition är när man använder ord för att beskriva ett begrepp. Då skapar man en begreppsbild när man försöker att förstå detta. Man kan lära sig begreppsdefinition på två olika sätt: på mekaniskt (instrumentellt) sätt eller på relationellt sätt. Sen kan den, som har skapat en begreppsbild tidigare, förklara denna begreppsdefinition med egna ord. Detta innebär att man skapar en ny version av en begreppsdefinition för sig själv. En personlig begreppsdefinition som kan vara annorlunda än en redan given formell begreppsdefinition. Varje personlig begreppsdefinition har precis sin egen begreppsbild. Denna varierar med tiden. Ta till exempel att varje person skapar sig en bild för katt. När man förklarar vad en katt är försöker man förklara denna begreppsdefinition om katten med egna ord och egen bild. I matematik säger Sfard (1991): En operativ process börjar äga rum när elever är vana vid vissa nya matematiska begrepp, då bygger de upp en förståelse; Piaget (1970) (Sfard, 1991, s. 8) säger att det är ett operativt sätt som förändras med tiden. Detta kompletteras tillsammans med en strukturell process. Det är ett samspel likadant som det i Talls och Vinners (1981) begrepp.

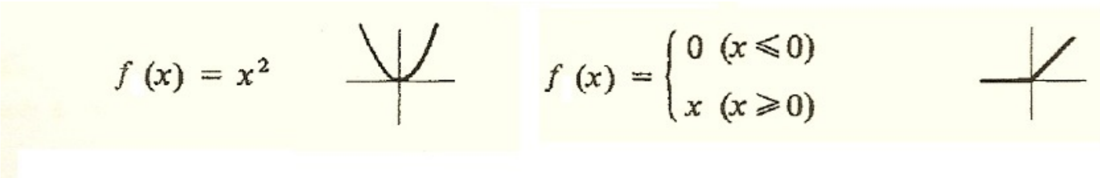
Skemps (1987) förklaring till begreppsdefinition är till och med mer abstrakt. Han säger att begreppsdefinition är en avgränsning av ett begrepp. Det innebär att ett begrepp består av många nivåer. Begreppsdefinitionen ligger ju på den första nivån. Begreppsdefinitionen beskrivs i form av ord. Men detta abstrakta tänkande ligger på en högre nivå. När man vill lära sig detta behöver man tänka på en annan nivå eller på en högre nivå. Ju mer abstrakt det är desto mer är det på en högre nivå. Därför blir begreppsbilden så abstrakt. Detta förklarar varför det matematiska begreppet som finns i lärarnas tankar är svårare än man tror att kunna “överföra” till deras elever.

Sammanfattning: Begreppsdefinitionen kan man se med blotta ögat. Dess tänkande kan man ”se” bara med vår inre tanke. Det är den inre “bilden” som står bakom begreppsdefinitionen.

5.3 Hur kan konflikter uppstå mellan begreppsbilden och begreppsdefinitionen?

Tall och Vinner (1981) säger att eleverna inte alltid skapar en korrekt begreppsbild som motsvarar en given formell begreppsdefinition. Detta kan orsaka konflikt när eleverna möter samma definition senare. De menar att när begreppsbilden inte stämmer med begreppsdefinitionen är det en kognitiv konflikt. Det innebär att båda strider mot varandra (ett exempel kommer senare). Detta kan leda eleverna till ett allvarligt problem i deras förståelse senare då det gäller en mer avancerad matematik. Hur kan man förklara detta? Här tar jag upp ett bra exempel från Talls och Vinners (1981) forskningsrapport:

Enligt Tall och Vinner (1981) finns det många elever som har olika begreppsbild om en kontinuerlig funktion enligt deras tidigare studier. En av de begreppsbilderna är att "det finns bara en ekvation". Om man tillämpar detta till funktionen $f(x) = x^2$ får eleven rätt svar men förklaringen är inkorrekt. Men denna begreppsbild fungerar inte alls till den funktionen som är $f(x) = 0$ för $x \leq 0$ och $f(x) = x$ för $x \geq 0$ för till denna funktion finns det två ekvationer och ändå är det en kontinuerlig funktion.



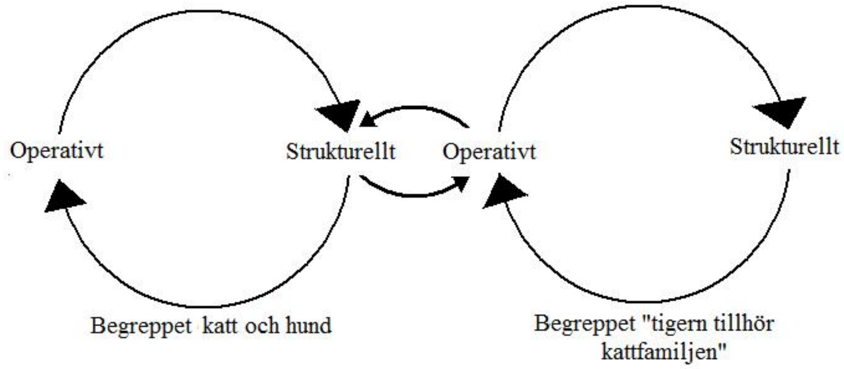
Det innebär att begreppsbilden står långtifrån begreppsdefinitionen. Detta är en kognitiv konflikt. Det betyder, enligt Skemp (1987), att en ny begreppsförståelse inte kan ske när tidigare begrepp är underförstått.

Sfard (1991) diskuterar inte om det uppstår konflikt i begreppsinlärningen. Hennes forskningsrapport berättar mest om processerna eller tillvägagångssätten. Dessa är operativa och strukturella när man lär sig abstrakta begrepp. Mot det strukturella står det inre bilder. Hon säger att båda kompletterar varandra och att var och en av dem är oförenliga. Om elever skapar en begreppsbild i den strukturella processen innebär det att eleverna redan har gått igenom en operativ process. Det innebär en felaktighet i början av den operativa processen. När elever möter ett nytt begrepp som bygger på det gamla kan det uppstå ett problem. Det händer i följande sekvens:

Operativt (begrepp 1) $\leftrightarrow$ Strukturellt (begrepp 1) $\leftrightarrow$ Operativt (begrepp 2) $\leftrightarrow$ Strukturellt (begrepp 2)

Jag använder "$\leftrightarrow$" för att man kan pendla fram och tillbaka. Jag tycker att om man möter konflikten i Operativt (begrepp 2) då kan man gå tillbaka till denna tidigare process så att man kan korrigera detta första begrepp. På det sättet (här tycker jag att Sfard (1991) menar den kognitiva processen) kan konflikten så småningom minska eller också kan det hända plötsligt så som Sfard (1991) säger: "ett kvantsprång" – en aha-upplevelse! Då kan både operativ och strukturell process betraktas som fullt utvecklade när man har kommit fram till en rätt begreppsbild i sin begreppsbildning precis som Sfard (1991) sagt. Skemp (1987) definierar "oljud" som innebär en information som är irrelevant. Detta "oljud" är störande och självklart det kan orsaka konflikter i begreppsinlärningen.

Nu kommer jag tillbaka till det tidigare exemplet: "Tigern tillhör kattfamiljen". Nu antar jag att vi blandar ihop begreppet om katter med det om hundar. Om vi försöker att göra ett samband mellan den nya begreppsdefinitionen "tigrar tillhör kattfamiljen" med den begreppsbild som blandar man ihop katten och hunden senare kan det leda oss till en begreppskonflikt. Det innebär en felaktighet i början av en operativ process som medför att det blir fel i en strukturell process när vi tänker att katten är som en hund. Vi får en felaktig begreppsbild. Detta ger oss svårigheter att komma fram till ny operativ process från tidigare strukturell. Så, vad vi kan göra åt denna konflikt är att vi går tillbaka till tidigare processer så att vi rättar till denna felaktighet i vårt medvetande. Här visar jag dessa processer:



Jag anser att man kan pendla mellan två cirklar. Om man inte riktigt förstår begreppet katt och hund, är det inte möjligt att assimilera det nya begreppet i andra cirkeln till det första begreppet i första cirkeln. Man behöver ”back-tracking”. Det innebär att man går tillbaka till den första cirkeln som visas genom en av pilarna. Där kan man gå till den första operativa processen och börja om därifrån. På så sätt kan konflikten i begreppsbilden mildras.

Sammanfattning: ”Oljud” i begreppsinlärning leder eleven till konflikt på en högre nivå i matematikinlärning. Operativ och strukturell process är inte kompletta (färdiga) om det finns ”oljud” i processen.

5.4 En jämförelse mellan instrumentell och relationell förståelse och hur det påverkar elevernas inlärning.

Enligt Tall och Vinner (1981) lär sig många elever matematik utan att begripa varför de gör som de gör[16]. Många av dem använder sig av utantillkunskap. Om de saknar relationell förståelse, kan matematiken bli obegriplig och tråkig. Svårigheter uppkommer när man möter formella begreppsdefinitioner på en mer komplicerad nivå. Det innebär att begreppsbilden som skapats i huvudet inte går ihop med den formella begreppsdefinitionen som man träffar på. Sfard (1991) säger, att kunna “se” begrepp med “inre ögon” - det är en typ av relationell förståelse. Hennes arbete ligger mycket på detta. För att kunna utveckla relationell förståelse behöver elever få hjälp av sina lärare eller läroböcker. Det innebär att förståelsen i operativa och strukturella processen kan ha tre steg: 1. Interiosation. 2. Kondensation, och 3. Reifikation. I utantillinlärningsmetoder kallar Sfard (1991) detta en “grym cirkel”. Det är när elever ger rätt svar i sin problemlösning utan att förstå vad de gör. Hon säger att eleverna använder regler korrekt på ett mekaniskt sätt. De utvecklar matematiska färdigheter utantill. Det innebär att eleverna “ser” inte de abstrakta begreppen som ligger bakom deras arbete. Deras mål är bara att söka efter ett rätt svar, sen är det färdigt! Hon säger... den relationella förståelsen sker i det sista steget, reifikation, om det är färdigt då är det komplett, annars kan eleverna drabbas av tveksamhet, osäkerhet och otillräcklighet. Tall och Vinner (1981) menar att det är en kognitiv konflikt. Men enligt Sfard (1991) är den relationella förståelsen något som kräver att man lägger ned mycket arbete och det kan ofta komma igång senare, till och med efter skoltiden. Denna försening kan ge eleverna en bestående skada för hela livet. Eleverna kan få en bestående dålig känsla för matematik.

Chicks och Harris (2007) arbete handlar om relationell förståelse. De tycker att det är viktigt att visa eleverna hur man tillämpar ett rätt begrepp för att lösa matematikproblem i undervisningen. Elever ska öva några uppgifter som kan ge en kognitiv konflikt så att eleverna senare kan begripa det begrepp som ligger bakom problemet. Det innebär att det är viktigt att visa eleverna vad som fungerar och vad som inte fungerar. De tycker att det är

[16] Se TIMSS rapport (2007), s. 81-82, 99-100, 114-115.

extremt viktigt att ge eleverna en inlärning steg för steg. Men frågan är, hur kan man vara säker på att eleverna lär sig på relationellt sätt och inte på utantillsätt? För det är ju så att olika individer kräver olika sätt att lära sig!

Sammanfattning: Relationell förståelse innebär en väldig mäktig kunskap. Inlärningen underlättas om eleverna utvecklar relationell kunskap. Men att leda dem till denna nivå kräver stort och kunnigt arbete.

6 Diskussion och avslutande reflektioner

Jag kommer att diskutera de frågor som jag har tagit upp i Syfte och frågeställningar utifrån litteraturstudier och resultaten som jag kommit fram till. Mina frågor är:

1. Vad innebär begreppsbildning?
2. Hur kan konflikter uppstå i medvetandet när elever lär sig ett nytt begrepp?
3. Behöver eleverna lära sig matematik utantill?
4. Kan eleverna förstå matematiska begrepp omedelbart när de lär sig?
5. Vilken betydelse har instrumentell och relationell inlärning för eleverna och kan de båda komplettera varandra?

6.1 Kopplingen mellan läroplanen och resultatet

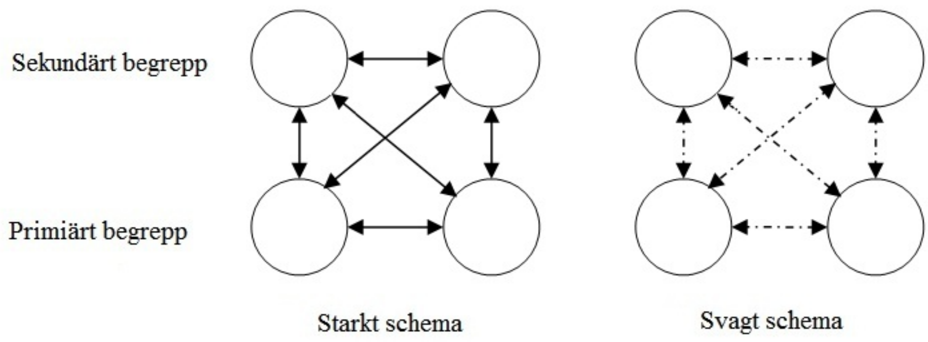
I läroplanen (Lpf 94, s. 5,7,11) säger skolverket att "skolan ska främja förståelse för andra människor...förmedla kunskaper och skapa förutsättningar för att eleverna ska tillägna sig och utveckla kunskaper...som förberedelse för studier vid universitet och högskolor...lärare ska utgå från den enskilda elevens behov...och tänkande". Det är tydligt att läroplanen inte säger någonting om matematiska begrepp utan bara om elevens förståelse. Vilken typ av förståelse ska eleverna bära med sig till sitt vuxenliv eller till högskolan? Om jag vänder mig till den nya läroplanen för gymnasieskolan (2011) står det att "undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen" och "elevernas kunskapsutvecklingen är beroende av om de får möjlighet att se samband" (Läroplan gymnasieskolan 2011, s. 9, 91). Budskapet är nu tydligt. Det krävs av eleverna att de ska kunna göra ett samband mellan de matematiska begreppen. Det innebär att eleverna behöver utveckla ett eget schema som innehåller de nödvändiga begreppen i sin förförståelse i inlärning och i sin tur kan detta göra att eleverna ska kunna lösa matematiska problem. Skemp (1987) säger att det ena begreppet bygger på det andra och att begreppen är kumulativa.

6.2 Starkt och svagt schema

Att bygga ett schema är en långsam process och det är något speciellt för vårt medvetande. Man kan skilja scheman åt på två sätt:

1. En starkt schema
2. En svagt schema

Ett starkt schema kan ge eleverna ett kraftfullt begreppstänkande i matematiken. Det innebär att det möjligör ett framtida långsiktigt lärande, det är inte bara för stunden utan det förbreder för framtiden.
Ett svagt schema kan ge eleverna konflikter och förvirring när de träffar på en ny begreppsdefinition. Detta gör lärandet smärtsamt, obegripligt, svårt och tråkigt. Oförstådda scheman kan göra assimileringen av senare begreppsdefinition mycket svårare och i många fall är den till och med omöjlig. Det är svagt operativt och strukturellt. Det utsätter eleverna för risken att förvärva en livslång rädsla och att de inte lär sig matematik längre. De mår bättre om de står utanför problemet. Följande diagram visar oss hur det ser ut.



Jag anser att ett fullständigt begrepp bildar ett starkt samband med ett annat begrepp på en högre nivå. Det ger elever möjlighet att se mer abstrakt. Därför är det enligt Skemp (1987) viktigt när eleverna för första gången möter ett nytt begrepp av en lägre ordning. Vad kan vi göra åt detta? Nu är ju det så att ansvaret faller på matematikläraren. Detta sker självklart i undervisningen. Enligt den nya läroplanen (2011) ska undervisningen hjälpa eleverna att bygga upp ett relationellt tänkande i matematiska begrepp. Det är tydligt att utantillinlärning hamnar utanför läroplanen. Det innebär att läraren är den viktigaste faktorn. När läraren introducerar en ny definition för sina elever behöver han noggrant lära ut den på ett intuitivt sätt tillsammans med passande exempel. Då kan enligt Skemp (1987) "oljudet" minskas. Innan dess behöver läraren veta elevernas tidigare begreppsbildning. Det är den, som eleverna redan kan. Därefter kan läraren göra en lämplig plan för varje enskild elev. Det innebär att läraren ger en möjlig uppgift till dem att lösa, inte en omöjlig uppgift, enligt Skemp (1987). Enligt Orton (2004) är det viktigt att presentera vad som gäller och vad som inte gäller i teorierna och i verkligheten. Läraren behöver veta att eleverna behöver en ackommodationsperiod innan assimilering kan äga rum. Detta förklarar varför en av mina handledare under min VFU-praktik sade till mig att det är viktigt att göra en möjlig uppgift till eleverna att lösa och att göra så att de blir nöjda och får självförtroende. Detta är viktigt. Om de inte förstår begreppen som gäller så kan vi hjälpa dem...det är så man ger eleverna en tillgång så de kan gå tillbaka till det som de redan behandlat - "back-tracking". Jag anser att det kan uppstå en konflikt på grund av begreppsbilden som eleverna lärt sig tidigare. Det är en svagt schema hos eleverna. Genom att använda "back-tracking" tillsammans med elevernas inre motivation kan ett svagt schema utvecklas till ett starkt schema med hjälp av en bra lärare. Eftersom processen kan ta så lång tid är risken att många inte har tålamodet att vänta och det kan göra dem besvikna senare. Enligt Orton (2004) är att lära sig utantill ett speciellt sätt för lärande, men det hjälper dem inte i deras relationella förståelse. Det kan vara skadligt. Ett svagt schema kan bestå till större del av instrumentellförståelse än av relationell förståelse. Detta gör att man kan referera till konflikten i kognitiva strukturer. Det gör inlärningen långsam, trög och kanske långtråkig.

6.3 Alla har olika förmåga

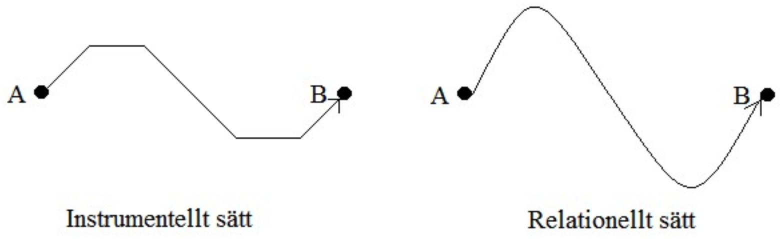
Varför är det så att en del kan lära sig snabbare än andra? Orton (2004) förklarar att elever lär sig i olika takt. En del är långsammare än andra. Han ger inte så mycket förklaring till detta. Individuella skillnader kan vara en viktig faktor inom lärandet av matematik. Alla har en stor förmåga att lära sig när de verkligen vill. Faktorer som påverkar kan vara elevernas intresse, motivation, viljan att lyckas och så vidare. Det är viktigt att eleverna inte ska känna panik när de ska lära sig matematik. Det kan ha en allvarlig effekt senare. Om det nu är så att korna behöver tid att i lugn och ro äta sitt gräs på landet, varför är det inte så i matematiken? Inlärning behöver tid för att mogna.

6.4 Vi behöver sättet att lära oss utantill

Behöver vi utantillinlärning i alla fall? Svaret är jo, det behöver vi. Orton (2004) säger att det finns många ord och symboler i matematiken som eleverna behöver komma ihåg och känna till. Då måste symbolerna övas in utantill. Skemp (1987) säger att en symbol är inte bara ett ljud eller ett namn. För att förstå ett symbol krävs att man har en relationell förståelse. Men Orton (2004) säger att den instrumentella förståelsen kan bidra till att främja den relationella förståelsen. Det är viktigt att man lär sig dem parallellt. Jag håller med honom. Som ett exempel vill jag berätta om mina egna upplevelser. Jag använde ett tag mycket instrumentell förståelse i inlärning av matematik så att jag kunde klara tentorna men utan att förstå varför. Detta innan jag insåg att det var nödvändigt att begripa hur jag gjorde för att kunna matematik. Detta säger Skemp (1987): Instrumentell inlärning kan vara lättare att förstå; den ger omedelbara resultat och är mycket givande; och den ger ett snabbt självförtroende till eleverna. När jag undervisade fysik under VFU-perioden såg jag att en del av eleverna ville förstå allting omedelbart. De kände panik när de inte kunde något och en del av dem slutade att lära sig. Är det ett allvarligt problem när man fokuserar för mycket på relationell inlärning utan att fundera på om eleverna lär sig långsammare än vi tror (Orton, 2004)? Det skapar onödig panik för eleverna och gör det nervöst och stressat för läraren, relationell förståelse behöver längre tid än vad vi tror. Jag anser att den relationella undervisningen kan vara svår att förstå för eleverna första gången. Den är alltför abstrakt. Resultatet är inte omedelbart och det kanske inte ger resultat med en gång. Dagens elever har ofta mindre tålamod att lära sig någonting som är nytt. Det kan hända att en del av eleverna använder sig av instrumentell förståelse därför att de inte behöver veta djupare varför. Detta är risken med att så länge de får ett korrekt svar så kan de ignorera att förstå hur de har gjort för att få denna lösning (Skemp, 1987). Hur många kan förklara varför 1/2 dividerat med 1/4 blir 2 på ett relationellt sätt? Det kan vara omöjligt att begripa för yngre studerande.

6.5 Relationell förståelse tar sin tid

Det är viktigt att eleverna behöver upprepa övningar gång på gång tills dess att de förstår ordentligt vad som händer bakom övningarna. Man blir lite bättre en bit i taget. Varje gång man övar växer ens relationella förståelse. Instrumentell förståelse är däremot begränsad, för relationell förståelse finns det inga gränser. Tänk på hur det vore om man kör bil i Göteborg i stället för att man åker med spårvagnen från hållplats A till B! När man sitter i spårvagnen behöver man självklart inte fundera så mycket på hur det hela ska gå till. Passagerarna är beroende av föraren. Det blir ett mekaniskt sätt att åka dit man ska. För att köra bilen krävs det att man har något begrepp om vart man ska och relationell förståelse. Om vi förflyttar den situationen till klassrummet, så säger Skemp (1987) att med ett instrumentellt lärande blir eleverna mer beroende av läraren; eleverna styr inte själva, dessutom blir inte deras studier så tillfredsställande ; elevernas självförtroende minskar; eleverna blir passiva och kan inte själva hitta ett nytt sätt att lösa problem. De vill ha så mycket hjälp som möjligt av läraren. Inlärningen avslutas när lektionen är slut. Det innebär att det schema de bygger upp är svagt. Med ett starkt schema blir det som att köra bil i Göteborg, som Skemp (2004, s. 107-114) säger, det blir som att hitta vägen dit man ska utan hjälp av någon annan, man lär sig hitta nya vägar dit man ska. Detta innebär att eleverna lär om de försöker att hitta “en ny väg” själva.



Diagrammet till vänster visar bara fyra lutningar. Det motsvarar instrumentell förståelse. Instrumentell inlärning är snabb, lätt och den kräver en lägre förståelse men är ändå viktig. Den som är på högre nivå kräver en högre uppfattning och ett mer abstrakt begrepp. Lutningarna är många och förändras i varje punkt. I diagrammet ”relationellt sätt” illustrerar jag detta.

6.6 Matematiskt förmåga

Nu kommer en fråga. När kan eleverna visa att de själva har matematisk förmåga? Det är inte lätt att förklara detta heller. Det finns fortfarande inget bra svar. Enligt Orton (2004) finns det alltid en risk med att försöka bedöma elevernas förmåga i matematik för tidigt. Jag anser att man inte ska dela in eleverna i grupper, det är ju så att eleverna mognar olika fort. Då kan eleverna hjälpa varandra, de har ju olika förutsättningar. Läraren hinner inte vara överallt. Piaget säger att när intellektet blir moget är det “en utveckling som går mot en allt högre grad av förmåga till abstraktion. När intellektet nått det högsta utvecklingsstadiet, kan man operera på verkligheten med hjälp av logiska och matematiska strukturer” (Säljö, 2000, s. 65). Orton (2004) har sagt att vi alla har på ett sätt samma förmåga och samtidigt att vi på andra sätt alla är olika. I läroplanen (2011, s. 12) står det att alla människor har lika värde och ska vara jämställda. I Ortons litteratur (2004) säger Hadamard (1945) att matematisk förmåga kan ta sig så många former. En del människor har numerisk förmåga och andra har spatial förmåga. Frågan om vad som händer i inlärningprocessen är viktig. Jag anser att den är ännu mer viktig än frågan när de kan uppnå matematisk förmåga. Processen är viktigare än slutprodukten.

6.7 Förslag till fortsatt forskning

Det är intressant att studera på vilket sätt man använder matematikinlärning i andra länder och jämföra med Sverige. Vilka är de fördelar och nackdelar som kan finnas med olika sätt? Jag är mycket intresserad av hur man bemöter eleverna från Sverige och Fjärran-Östern och att diskutera om hur de tänker matematiskt. Det är ju mycket intressant att vara med i klassrum och observera hur lärare undervisar matematik och hur eleverna lär sig. Jag tror att det är ett enormt intressant arbetsområde som skulle vara givande att studera närmare (se TIMSS 2007 i referenser).

6.8 Avslutande ord

Jag tycker att mina tankar blir tydliga efter det att jag har arbetat en tid med mina funderingar som jag har haft länge. I början av arbetet var det många abstrakta ting att förstå och jag kunde inte begripa innehållet och det gjorde att mitt arbete gick långsamt. Arbetet utmanade mitt tålamod. Svårigheten att kunna förklara begreppen med ord var en annan sak. Det gick runt i mitt medvetande. Men nu är jag säker på att jag har kommit fram till en ståndpunkt. Jag känner att jag kan stanna till på ett ställe så att jag kan se problemen med en bredare vinkel och med djupare kunskaper. När jag ser utifrån kan jag förklara varför verkligheten är som den är och jag kan använda teorierna som ger en förklaring till problem som jag har lärt mig mycket om i denna uppsats. Det blir en bra början på mitt arbete som lärare i matematik och fysik i skolan.

7 Referenserförteckning

Andersson, J. & Furberg, M. (1972). *Språk och påverkan.* Stockholm: Thales.

Bergström, G. & Boréus, K. (red.) (2005). *Textens mening och makt.* Lund: Studentlitteratur.

Chick, H.L. och Harris. K. (2007). *Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio.* Melbourne: University of Melbourne.

Esaiasson, P. & Gilljam, M. (2007). *Metodpraktikan.* Stockholm: Norstedts Juridik.

Johansson, B. & Svedner, P.O. (2010). *Examensarbetet i lärarutbildningen.* Uppsala: Kunskapsföretaget.

Orton, A. (2004). *Learning mathematics*. London & New York: Continuum.

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin.* I Educational studies in mathematics 22, s. 1-36.

Skemp R.R. (1987). *The psychology of learning mathematics.* New York and London: Routledge.

Skolverket (2006). *Läroplan för de frivilliga skolformerna Lpf 94*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2012). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm:Solkverket.

Sten, A. & Ove, H. (2007). *Att göra tänkande synligt.* Stockholm: Didactica 11.

Stukát, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (2000). *Lärandet i praktiken.* Stockholm: Norstedts.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* I Educational studies in mathematics 12, s. 151-169.

TIMSS (2007). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan.* Stockholm: Skolverket.