Läroplan för grundskolan

Lgr 69

II Supplement

SKOLÖVERSTYRELSEN 1969

Matematik

Lgr 69 II: Ma

Lgr 69 II

Läroplan för grundskolan

SKOLÖVERSTYRELSEN

Utbildningsförlaget

Supplement

Matematik

Kompletterande anvisningar och kommentarer

Förord

Läroplan för grundskolan består av en **allmän del** (del I) och en **supplementdel** (del II), båda utfärdade av SÖ enligt förordnande i Kungl Maj:ts brev den 29 maj 1969.

Supplementdelen innehåller kompletterande anvisningar, kommentarer och exempel till kursplanerna och till vissa avsnitt i allmänna anvisningar för skolans verksamhet. Av praktiska skäl är den uppdelad på häften, varierande i fråga om både omfång och karaktär.

SÖ avser att efter hand revidera och komplettera supplementdelen med hänsyn till erfarenheterna vid läroplanens tillämpning. SÖ är därför angelägen om att sådana erfarenheter på lämpligt sätt och efter hand förmedlas till SÖ.

Stockholm den 1 augusti 1969

Kungl Skolöverstyrelsen

Produktion ● 1969 Svenska Utbildningsförlaget Liber AB

Redaktion ● Ulf Åkersten

Formgivning ● Paul Hilber

Teckningar ● Louise Lindström

Producent ● Rune Jarenfelt

Tryck ● Bröderna Lagerström AB Stockholm 1969

Innehåll

Allmän och särskild kurs

Följande moment är centrala i den allmänna kursen:

Räkning med naturliga tal i tiosystemet, räkning med positiva decimaltal.

Mätningar, enheter och enhetsbyten, närmevärden, räkning med närmevärden, avrundning, överslagsräkning.

Geometriska grundbegrepp, avbildningsövningar, koordinatsystemet, tillämpningar av geometri. Procenträkning.

Användning av räknemaskiner, räknesticka och tabeller.

Tillämpningar av statistik.

Grafiskt åskådliggörande av funktioner.

Följande moment tillhör främst den särskilda kursen och bör endast i ringa omfattning behandlas i den allmänna kursen:

Kongruensavbildningar, likformighetsavbildningar.

Multiplikation och division av negativa tal.

Standardavvikelse och variationsbredd, utfall, utfallsrum och händelser, räkning med sannolikheter.

Polynom, rationella uttryck, trigonometriska funktioner, ekvivalensrelationer, ordningsrelationer och ekvivalensklasser.

Kvadratrötter.

System av linjära ekvationer och olikheter, andragradsekvationer.

Matematiska modeller.

Därutöver bör ett antal moment differentieras kraftigt med hänsyn till elevernas intresseinriktning och alternativkursens karaktär. Detta gäller särskilt moment som avbildningsövningar, koordinatsystemet, vektorer, procentbegreppet, negativa tal, räknemaskiner, räknesticka, tabeller, statistik och funktioner.

A

Terminologi

Begreppsbildningen bör understödjas genom att ett klart och koncist språk används vid undervisningen, och när en matematisk terminologi införs, måste denna vara korrekt. SÖ har i annat sammanhang lämnat anvisningar om de termer och beteckningar, som bör användas (Matematikterminologi i skolan, SÖ:s skriftserie 87).

Förslag till disposition av en studieplan

Siffrorna inom parentes avser de årskurser inom vilka momentet företrädesvis bör behandlas. Stjärna (★) anger moment, som kan förbigås i allmän kurs. Förteckningen är inte kronologiskt uppställd.

1. Naturliga tal

1: 1. Mängd och antal (1).
1: 2. Talen 0—9. Siffrorna (1).
1: 3. Talområdet vidgas till 100. Tiosystemet (1).
1: 4. Större än, mindre än, lika med (1).
1: 5. Union. Addition. Kommutativa och associativa lagarna (1—2).
1: 6. Subtraktion (1).
1: 7. Tallinjen (1—3).
1: 8. Talområdet utvidgas till 1 000 (2).
1: 9. Addition med tiotalsövergång. Additionsalgoritmen (2—4).
1:10. Subtraktion med tiotalsövergång. Subtraktionsalgoritmen (2—4).
1:11. Multiplikation. Kommutativa och distributiva lagarna (2—4).
1:12. Division (2—4).
1:13. Mängden av naturliga tal (3—4).
1:14. Associativa lagen för multiplikation. Multiplikationsalgoritmen (3—6).
1:15. Divisionsalgoritmen (4—7).
1:16. Positionssystem med andra baser än tio (3—7).

2. Mätningar

2: 1. Principen för mätning. Mätningsövningar (1—6).
2: 2. Enhetsbyten (3—9).
2: 3. Närmevärden (5—9).
2: 4. Vinklar (4—7).
2: 5. Omkrets, area och volym (6—9).

B

3. Geometri

3: 1. Geometriska grundbegrepp. Avbildningsövningar (1—7).
3: 2. Koordinatsystemet (3—7).
★ 3: 3. Kongruensavbildningar (7—8).
3: 4. Vektorer (7—8).
★ 3: 5. Likformighetsavbildningar (8—9).

4. Decimaltal

4: 1. Decimaltalsbegreppet, tallinjen, ordning (4).
4: 2. Addition och subtraktion (4—5).
4: 3. Multiplikation och division (4—7).
4: 4. Avrundning (4—5).
4: 5. Potenser med positiv heltalsexponent (5—7).
4: 6. Tiopotenser med negativ heltalsexponent. Räkning med potenser (7—8).

5. Rationella tal

5: 1. Bråkbegreppet, tallinjen, ordning (4).
5: 2. Addition och subtraktion (5—8).
5: 3. Multiplikation och division (5—8).
5: 4. Decimaltal som närmevärde för rationellt tal (5—7).
5: 5. Procentbegreppet (5—6).
5: 6. Räkning med procent (6—9).

6. Negativa tal

6: 1. Begreppet negativt tal, tallinjen, ordning (4).
6: 2. Addition och subtraktion (4—7).
★ 6: 3. Multiplikation och division (7—8).

7. Räknemaskiner. Räknesticka. Tabeller

7: 1. Räknemaskiner (7—9).
7: 2. Räknesticka (7—9).
7: 3. Tabeller (8—9).
7: 4. Datamaskiner (9).

8. Statistik och sannolikhetslära

8: 1. Insamling av statistiskt material. Tabeller och diagram (2—9).
8: 2. Medelvärde, median (6—9).
8: 3. Relativa frekvenser och deras stabilitet. Sannolikhet (8—9).
★ 8: 4. Standardavvikelse, variationsbredd (9).
★ 8: 5. Utfall, utfallsrum, händelser. Räkning med sannolikheter (9).

C

9. Funktionslära

9: 1. Relation och funktion (6—7).
9: 2. Funktioner givna genom fomler (7—9).
9: 3. Grafiskt åskådliggörande av funktioner (7—9).
9: 4. Linjära funktioner (8—9).
★ 9: 5. Polynom (7—9).
★ 9: 6. Rationella uttryck (9).
★ 9: 7. Trigonometriska funktioner (9).
★ 9: 8. Ekvivalensrelationer, ordningsrelationer, ekvivalensklasser (8—9).

10. Reella tal

10: 1. Begreppet reellt tal. Tallinjen, ordning (7).
★ 10: 2. Kvadratrötter (9).

11. Ekvationer, olikheter och ekvationssystem

11: 1. Utsaga. Lösningsmängd (1—7).
11: 2. Linjära ekvationer och olikheter (7—9).
★ 11: 3. System av linjära ekvationer och olikheter (8—9).
★ 11: 4. Andragradsekvationer (9).

12. Matematiska modeller

★ 12: 1. Matematiska modeller (9).

Kommentarer till föreslagna moment

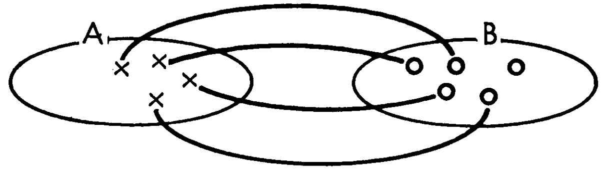
Kommentarerna är i regel mera omfattande och konkretiserade beträffande de moment, som tidigare inte ingått i grundskolans matematikkurs. Likaså har de moment eller delar av moment, som rör låg- och mellanstadiet, vanligen kommenterats utförligare än de delar av matematikkursen, som behandlas på högstadiet. Olikheter i kommentarernas omfattning och konkretisering innebär alltså inte att de moment, som kommenterats mera utförligt, är viktigare än andra.

1. NATURLIGA TAL

1 :1. Mängd och antal (Årskurs 1)

Eleverna arbetar med konkreta föremål, t ex knappar, stavar och klossar i olika färger. De kan få sortera föremålen efter olika egenskaper, t ex efter färg, form, storlek, längd, vikt, tjocklek, materialbeskaffenhet. Föremål med en eller flera gemen-

A



samma egenskaper sammanförs till en *mängd* och föremålen som tillhör samma mängd kallas för *mängdens element.* Eleverna får muntligt beskriva de mängder som de bildar. Begrepp som "lika många", "fler än" och "färre än", kan införas genom hopparning av elementen i två mängder.

1 :2. Talen 0—9. Siffrorna (Årskurs 1)

Eleverna arbetar med två eller flera mängder, som alla har någon gemensam egenskap, alla innehåller t ex gula föremål, kvadrater, bollar, knappar. De bildar också mängder vars gemensamma egenskap är att de innehåller samma antal element. Antalet element blir på detta sätt en egenskap som karakteriserar mängden. Talet noll införs tidigt och anger antalet element i mängden, som saknar element (den tomma mängden). Symbolerna 0, 1, 2, . . . 9 införs efter hand. Det kan ofta vara lämpligt att låta eleverna arbeta med sifferkort för att kombinera antal och siffra innan skrivning av siffror införs. Det bör dock observeras att inte minst på detta stadium skillnaden i intresse och förmåga mellan eleverna kan vara avsevärd. Lika litet som de långsamma eleverna bör forceras utöver sin förmåga, bör de snabba eleverna inte hindras från att gå fram i en för dem avpassad takt.

1 :3. Talområdet vidgas till 100. Tiosystemet (Årskurs 1)

Eleverna arbetar först inom talområdet 0—10. Symbolen för talet tio kan i början betraktas som en helhet. Läraren behöver alltså inte genast klargöra att i det positionssystem som har talet tio som bas, tiosystemet, betecknar symbolen 10 ett tiotal och noll ental. Efter arbete med addition (1 :5.) och subtraktion (1 :6.) inom talområdet 0—10, förbereds genom laborativa övningar förståelsen av principerna för positionssystem. Så kan t ex eleverna ordna en samling klossar i delmängder med 2, 3, . . . 10 element i varje delmängd och muntligt redogöra för resultatet. Elva föremål uppdelade i femmängder kan beskrivas som två femmängder och ett enstaka element, samma antal föremål uppdelade i fyramängder som två fyramängder och tre enstaka ele-

B

ment, i tiomängder som en tiomängd och ett enstaka element.

Eleverna får uppleva att det är lättare att överblicka antalet element, om dessa är grupperade på något sätt. Särskild vikt läggs vid grupperingen i tiomängder.

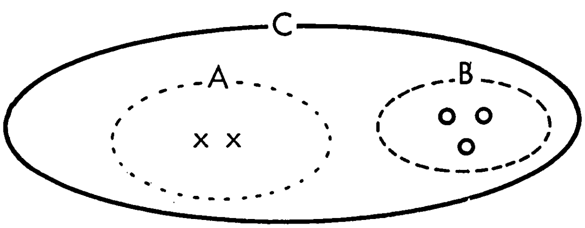
Efter omfattande laborativa övningar inom talområdet 0—20 utvidgas detta successivt till 99. Övergången från 99 till 100 konkretiseras på sätt som beskrivits i exemplet ovan.

1:4. Större än, mindre än, lika med (Årskurs 1)

Efter införandet av antalsbegreppet kan uttrycken *fler än* och *färre än* ersättas av *större antal än* och *mindre antal än*. Tecknen för "större än" ($>$), "mindre än" ($<$) och "lika med" ($=$) införs efter hand. Så småningom införs även tecknet för "inte lika med" ($\neq$). Efter införandet av addition och subtraktion får man många olika namn på varje tal varigenom symbolerna ovan kan komma till stor användning. (Se även 11:1.)

1:5. Union. Addition. Kommutativa och associativa lagarna (Årskurserna 1—2)

Begreppet addition bör förberedas genom laborativt arbete där eleverna sammanför två mängder av föremål till en mängd, bildar unionen.

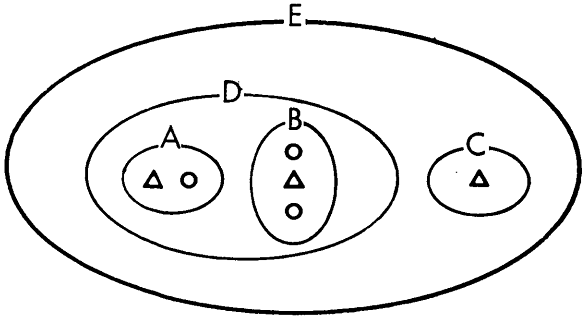


Om antalet element i unionen, som åskådliggjorts ovan, kan sägas att den innehåller 5 element eller 2 + 3 element eller 3 + 2 element. Man ser att 2 + 3 = 3 + 2 (kommutativa lagen). Antalet element i unionen är detsamma oavsett hur mängderna har förenats. En förutsättning är givetvis att mängderna inte har några gemensamma element, dvs att mängderna är disjunkta.

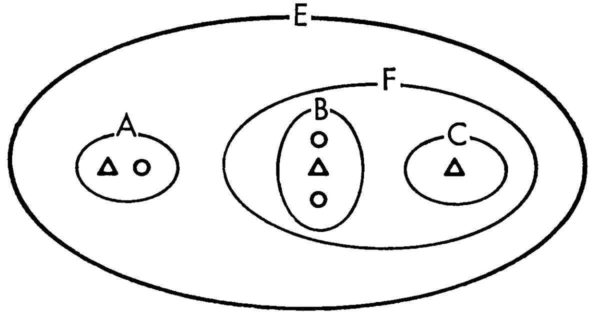
Eleverna får t ex med konkret material undersöka på vilka olika sätt talet åtta kan skrivas som en summa. En mängd kan också delas upp i delmängder och motsvarande additionssamband kan skrivas t ex 4 + 4, 3 + 5, 2 + 6, 1 + 7, 0 + 8.

C

Eleverna får även bilda unionen av tre mängder och därvid uppleva att antalet element i unionen är lika oavsett hur mängderna förenas (associativa lagen) t ex.



$(2 + 3) + 1 = 5 + 1 = 6$

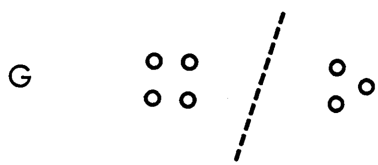


$2 + (3 + 1) = 2 + 4 = 6$

$$(2 + 3) + 1 = 2 + (3 + 1)$$

1 :6. Subtraktion (Årskurs 1)

Subtraktion knyts nära an till addition. Av föremål får eleverna själva ställa samman en grundmängd, G, med t ex sju element. De får sedan bilda en delmängd med förslagsvis fyra element, plocka bort dessa element från grundmängden och undersöka hur många som därefter återstår.



$4 + \square = 7$

Så småningom införs minustecknet. Eleverna bör göras medvetna om att sambandet $3 + 4 = 7$ medför att $4 + 3 = 7$, $7 — 3 = 4$, $7 — 4 = 3$.

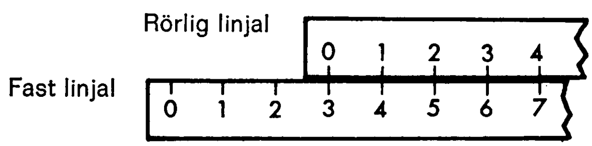
1 :7. Tallinjen (Årskurserna 1—3)

När eleverna kan kombinera antalet element i olika mängder med rätt tal och även ange talen i rätt ordningsföljd bör tallinjen kunna införas för talområdet i fråga. Eleverna får inse att en punkt på tallinjen som svarar mot ett större tal ligger till

A

höger om en punkt som representerar ett mindre tal. Vid dessa övningar kan symbolerna $>$ och $<$ vara till hjälp.

Eleverna kan åskådliggöra addition och subtraktion genom att addera och subtrahera sträckors längder. Eventuellt kan man låta eleverna använda två tallinjer, en fast och en rörlig, för detta ändamål.



Eleven kan med inställningen i figuren avläsa: $3 + 0$, $3 + 1$, $3 + 2$, $3 + 3$, $3 + 4$ och $7 — 4$, $6 — 3$, $5 — 2$ osv. Sådana övningar belyser sambandet mellan addition och subtraktion samtidigt som de övar begreppen "höger" och "vänster".

1 :8. Talområdet utvidgas till 1 000 (Årskurs 2)

Arbete med konkret material, varvid ett visst antal element ordnas i femmängder, åttamängder osv kan föregå introduktionen av större tal skrivna i tiosystemet.

B

Genom att skriva tal i utvecklad form kan eleverna ledas till att förstå vad siffrorna i talsymbolerna representerar. Så skrivs t ex 327 i utvecklad form som 300 + 20 + 7.

1:9. Addition med tiotalsövergång. Additionsalgoritmen (Årskurserna 2—4)

När eleverna första gången skall utföra addition med tiotalsövergång bör de ha övat att ange talen 2—10 som en summa av två tal, liksom att skriva tal i utvecklad form (se 1:8.). Union av tre mängder övas (se 1:5.). Laborativt material utnyttjas varvid eleverna får komplettera till tiomängder: 7 + 5 = 7 + 3 + 2 = 10 + 2 = 12. I anslutning till 7 + 5, 8 + 4, 9 + 3 osv behandlas 5 + 7, 4 + 8 och 3 + 9 för att underlätta inlärningen av summanamnen till ett och samma tal. Tallinjen och många spel kan utnyttjas för samma ändamål.

Vid beräkning av exempelvis 67 + 8 kan man gå till väga som ovan: 67 + 8 = 67 + 3 + 5 = 70 + 5 = 75 eller 67 + 8 = 60 + 7 + 8 = 60 + 15 = 75. Den senare metoden förutsätter god färdighet i addition av ensiffriga tal.

Den traditionella additionsalgoritmen förbereds med laborativt material. Genom att skriva talen i utvecklad form kan eleverna först använda en något omständligare algoritm innan den slutliga formen införs.

Exempel: 347 + 238 kan ställas upp på följande sätt.

$$\begin{array}{r} 300 + 40 + 7 \\ +\ 200 + 30 + 8 \\ \hline 500 + 70 + 15 \end{array} \quad = 500 + 80 + 5 = 585$$

eller

$$\begin{array}{l} 10 \qquad \leftarrow \text{"hyllan"} \\ \hline 300 + 40 + 7 \\ 200 + 30 + 8 \\ \hline 500 + 80 + 5 = 585 \end{array}$$

1:10. Subtraktion med tiotalsövergång. Subtraktionsalgoritmen (Årskurserna 2—4)

Subtraktion med tiotalsövergång kan inledas på så sätt att eleverna med laborativt material utför räkneoperationen i flera steg.

C

Exempel:
$15 - 7 = 15 - 5 - 2 = 10 - 2 = 8$.

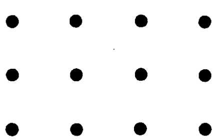
Anknytningen till addition är viktig. (Se 1:6.). Den traditionella subtraktionsalgoritmen förbereds med laborativt material. Detta arbete leder naturligt fram till en något omständligare algoritm.

Exempel: 24 — 11 respektive 35 — 17 kan ställas upp på följande sätt.

$$\begin{array}{r} 20 + 4 \\ -10 - 1 \\ \hline 10 + 3 = 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 + 15 \\ -10 - 7 \\ \hline 10 + 8 = 18 \end{array}$$

1:11. Multiplikation. Kommutativa och distributiva lagarna (Årskurserna 2—4)

Vid introduktionen av multiplikation bör eleverna ha tillgång till laborativt material. Man kan därefter arbeta med nät, som figuren visar.



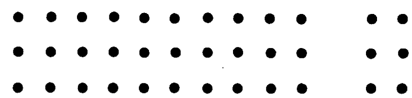
Produkten av 3 och 4 är då antalet element i ett nät med tre rader med fyra element i varje eller fyra rader med tre element i varje. Genom att utnyttja näten kan eleverna på ett naturligt sätt få erfarenhet av kommutativiteten, i det här fallet $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Detta rationaliserar inlärningen. Även andra sätt att konkretisera multiplikation bör utnyttjas. Multiplikationsdata kan sammanfattas i exempelvis följande tabell:

10	0					50					100
9		9					54			81	
8			16					56	64		
7				21				49	56		
6					24		36			54	
5						25					50
4	0				16		24				
3		3		9				21			
2			4						16		
1		1		3						9	
0	0				0						0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

A

Inlärningen av multiplikationstabellen kan åstadkommas genom korta och ofta förekommande muntliga övningar som även bör omfatta multiplikation med faktorn noll. Kommutativiteten bör likaså uppmärksammas. Vid mera komplicerade beräkningar utnyttjas den distributiva lagen.

Exempel: $3 \cdot 12$ kan utföras på följande sätt.



$$\begin{array}{llllllll} 3 \cdot 12 = & & 3 \cdot 10 & + & 3 \cdot 2 & & \\ = & & 30 & + & 6 & = & 36 \end{array}$$

1:12. Division (Årskurserna 2—4)

Eleverna kan lösa divisionsuppgifter med hjälp av nät, sedan de i början arbetat med laborativt material. Divisionens samband med multiplikationen betonas. Eleverna uppmärksammas på att sambandet $4 \cdot 3 = 12$, medför att $3 \cdot 4 = 12$, $\frac{12}{3} = 4$ och $\frac{12}{4} = 3$.

I detta sammanhang kan det vara naturligt att ta upp uttryck som "hälften av 6", "tredjedelen av 9" osv.

1:13. Mängden av naturliga tal (Årskurserna 3—4)

Naturliga tal med mer än tre siffror introduceras. Så långt möjligt eftersträvas att åskådliggöra skrivsättet för större tal med laborativt material. Även tallinjen utnyttjas. I princip sätts ingen gräns för hur stora tal som diskuteras. Eleverna bör bibringas en uppfattning att det finns oändligt många naturliga tal.

1:14. Associativa lagen för multiplikation. Multiplikationsalgoritmen (Årskurserna 3—6)

Innan multiplikationsalgoritmen presenteras får eleverna arbeta med uttryck som $4 \cdot 10$, $2 \cdot 100$, $30 \cdot 4$, $200 \cdot 9$ och $40 \cdot 60$. Detta bör föregås av övningar med laborativt material. Multiplikation med 10, 100 och 1 000 uppmärksammas särskilt. Produkten $3 \cdot 20$ kan skrivas $3 \cdot 2 \cdot 10 = 6 \cdot 10 = 60$ (associativa lagen).

B

För att visa principen för multiplikationsalgoritmen kan laborativt material användas. Vid multiplikation av större tal används den distributiva lagen, t ex $8 \cdot 12 = 8 \cdot 10 + 8 \cdot 2 = 80 + 16 = 96$. Eleverna bör få uppleva denna lag som ett hjälpmedel.

Inledningsvis kan man skriva algoritmerna litet utförligare än den gängse algoritmen, och på sådant sätt att sambandet med distributiva lagen framgår tydligare.

Exempel:

$$\begin{array}{rl} 342 & \\ \underline{\cdot\ 8} & \\ 16 & = (8 \cdot 2) \\ 320 & = (8 \cdot 40) \\ \underline{+\ 2\,400} & = (8 \cdot 300) \\ 2\,736 & \end{array}$$

Multiplikation bör övas med naturliga tal av i praktiskt bruk förekommande storlek.

1:15. Divisionsalgoritmen (Årskurserna 4—7)

Inlärandet av divisionsalgoritmen kan föregås av övningar med bl a material som åskådligt visar hur man finner delkvoter.

Exempel:

$$\begin{array}{cccccccc|cccc} \multicolumn{8}{c}{\text{24 element}} & \multicolumn{4}{c}{\text{12 element}} \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \end{array}$$

$$\frac{36}{3} = \frac{24}{3} + \frac{12}{3}$$

$$= 8 + 4$$

$$= 12$$

eller

$$\begin{array}{cccccccccc|cc} \multicolumn{10}{c}{\text{30 element}} & \multicolumn{2}{c}{\text{6 element}} \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array}$$

$$\frac{36}{3} = \frac{30}{3} + \frac{6}{3}$$

$$= 10 + 2$$

$$= 12$$

C

Man kan t ex skriva på följande sätt:

$$\frac{36}{3} = \frac{24+12}{3} = \frac{24}{3} + \frac{12}{3} = 8 + 4 = 12$$

Genom annan delning av nätet kan man få:

$$\frac{36}{3} = \frac{30+6}{3} = \frac{30}{3} + \frac{6}{3} = 10 + 2 = 12$$

$$\frac{36}{3} = \frac{15+21}{3} = \frac{15}{3} + \frac{21}{3} = 5 + 7 = 12 \text{ osv.}$$

$$\frac{639}{3} = \frac{600+30+9}{3} = \frac{600}{3} + \frac{30}{3} + \frac{9}{3}$$
$$= 200 + 10 + 3 = 213$$

eller

$$\frac{639}{3} = \frac{450+150+30+9}{3} = \frac{450}{3} + \frac{150}{3} + \frac{30}{3}$$
$$+ \frac{9}{3} = 150 + 50 + 10 + 3 = 213$$

Sådana övningar får leda fram till en mera omfattande algoritm, där eleven dock inte behöver finna de största delkvoterna omedelbart. Exempel (jfr de sista övningarna ovan):

$$\begin{array}{rl}
 & \underline{213} \\
 & 3 \\
 & 10 \\
 & 50 \\
 & 150 \\
3 \,| & \overline{639} \\
- & \underline{450} \;(= 3 \cdot 150) \\
 & 189 \\
- & \underline{150} \;(= 3 \cdot 50) \\
 & 39 \\
- & \underline{30} \;(= 3 \cdot 10) \\
 & 9 \\
- & \underline{9} \;(= 3 \cdot 3) \\
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
 & \underline{213} \\
 & 3 \\
 & 10 \\
 & 200 \\
3 \,| & \overline{639} \\
- & \underline{600} \;(= 3 \cdot 200) \\
 & 39 \\
- & \underline{30} \;(3 \cdot 10) \\
 & 9 \\
- & \underline{9} \;(= 3 \cdot 3) \\
 & 0
\end{array}$$

Den slutliga algoritmen kan vara den som exemplet nedan visar.

$$\begin{array}{rl}
 & 213 \\
3 \,| & \overline{639} \\
- & \underline{6} \\
 & 3 \\
- & \underline{3} \\
 & 9 \\
- & \underline{9} \\
 & 0
\end{array}$$

A

1:16. Positionssystem med andra baser än tio (Årskurserna 3—7)

Behandlingen av tiosystemet kan redan på lågstadiet förberedas genom arbete med andra baser än tio. (Se 1:3. och 1:8.).

Även i högre årskurser kan man arbeta med positionssystem med annan bas än tio. Förutom att eleverna får en fördjupad förståelse för tiosystemet får de god räkneträning. Goda möjligheter till differentiering föreligger: medan en elev skriver talen 13_{fem}, 23_{fem} etc i tiosystemet, kan en annan elev studera algoritmerna i tvåsystemet. Anknytningen till datamaskiner och deras användning av det binära systemet bör uppmärksammas. (Se 7:4.)

2. MÄTNINGAR

2:1. Principen för mätning. Mätningsövningar (Årskurserna 1—6)

Det är viktigt att diskutera principen för mätning med utgångspunkt i konkreta situationer. De första uppgifterna kan t ex bestå i att mäta längden och bredden på skolbänken med en penna som längdenhet eller att stega upp avståndet från den ena väggen till den andra i klassrummet. Genom flera sådana praktiska längdmätningsövningar och diskussion av resultaten bör eleverna bibringas en uppfattning om betydelsen av väldefinierade längdenheter. På lågstadiet behandlas endast ett fåtal längdenheter, i första hand meter och centimeter. Eleverna får efter hand lära sig att använda linjaler samt andra instrument för längdmätning. Genom praktiska övningar med dessa mätinstrument bör eleverna få en uppfattning om att mätningar inte är exakta. De bör även göra avrundningar och överslagsräkningar i praktiska situationer. I samband med mätningarna får eleverna uppskatta längder och avstånd. Mätningarna kan även följas av en diskussion om när det är lämpligt att använda längdenheterna centimeter, decimeter och meter. På mellanstadiet utförs mätningar med ytterligare enheter, t ex millimeter, och dessutom bestämningar av avstånd i kilometer och mil med hjälp av kartor över hemtrakten i angiven skala. I likhet med längdbegreppet införs area- och volymbegreppet genom laborativa övningar.

Rektangelns och kvadratens area erhålls till en början genom att eleverna räknar antalet rutor, varigenom principen för areamätning belyses. På

B

lågstadiet införs t ex kvadratcentimeter, på mellanstadiet används ytterligare enheter i anslutning till undervisningen i andra ämnen.

I årskurs 2 introduceras volymbegreppet. Lämpliga praktiska övningar är att räkna hur många koppar man kan fylla med innehållet i en viss kastrull, hur många dricksglas man kan fylla med innehållet i en läskedrycksflaska osv. Härefter införs volymenheterna deciliter och liter och görs mätningar med hjälp av dessa enheter. För att få en uppfattning om vad man avser beskriva med begreppet volym bör eleverna även arbeta med kroppar som kan tas isär i småkuber. Liksom vid längdmätning är det vid area- och volymmätning viktigt att betona osäkerheten i de erhållna mätvärdena liksom att öva eleverna att göra storleksuppskattningar av areor och volymer.

I anknytning till hembygdskunskapen får eleverna använda balansvåg. Att avgöra vilket av två föremål som väger mest är en lämplig övning i årskurs 1, där också viktenheterna "hektogram" och "kilogram" introduceras. I årskurs 3 och 4 införs enheten "gram". Övningar att uppskatta föremåls vikt utan hjälp av våg bör förekomma.

Mätning och skattning av tid behandlas i samband med hembygdskunskap.

När man gör väderleksiakttagelser blir användningen av termometern aktuell. Eleverna möter här för första gången en tallinje med punkter på båda sidorna om nollpunkten. Beteckningar som 5° och — 3° införs.

2:2. Enhetsbyten (Årskurserna 3—9)

På lågstadiet behandlas enhetsbyten i mycket liten omfattning och även på mellanstadiet övas enhetsbyten endast i sådana fall där man kan anta, att eleverna direkt inser det praktiska i att byta enhet. I största möjliga utsträckning bör övningar i enhetsbyten göras i anslutning till praktiska mätningsövningar. Vilka enheter som skall behandlas bestäms av undervisningen i övriga ämnen. Detta gäller t ex införandet av icke samstämda enheter av typen km/h för hastighet, kg/dm^3 för densitet och ljusår för längd. Allt arbete med enheter bör grundas på elevernas konkreta föreställningar om enheternas inbördes storlek.

2:3. Närmevärden (Årskurserna 5—9)

Redan i de första övningarna med mätningar och uppskattningar på lågstadiet och under de därpå följande diskussionerna om noggrannheten i de er-

C

hållna värdena, förbereds begreppet "närmevärde". Under mellanstadiets senare årskurser diskuteras begreppet mera ingående. Härvid betonas att man vid mätningar endast kan finna närmevärden.

I samband med t ex beräkningar av cirkelns omkrets och cirkelområdets area påvisas att det ofta är mest praktiskt att använda sig av ett närmevärde, trots att det finns ett exakt värde.

Överslagsräkning bör övas så ofta tillfälle ges. Detta gäller alla stadier. Dessa övningar ger osökta tillfällen för träning i huvudräkning.

Eleverna bör också bibringas en viss uppfattning om storleken av den avvikelse som uppstår då man vid räkningar ersätter tal med närmevärden som är räknemässigt mer lätthanterliga. Detta kan åstadkommas genom att eleverna får genomföra räkningarna dels med de angivna talen, dels med närmevärden för dessa, samt jämföra resultaten. På mellanstadiet nöjer man sig kanske med att beräkna avvikelsen från det riktiga värdet och att diskutera avvikelsens storleksordning. På högstadiet får eleverna med räknestickans hjälp beräkna avvikelsen uttryckt i procent av det riktiga värdet.

Vid tillämpningsuppgifter bör eleverna uppmärksamma antalet gällande siffror så att resultatet anges med rimlig noggrannhet. Med numeriska exempel illustreras hur man uppskattar felet när närmevärden adderas, subtraheras, multipliceras eller divideras.

2:4. Vinklar (Årskurserna 4—7)

Under mellanstadiet tas vinkelmätning upp. Uppskattningen av vinklars storlek kan t ex introduceras genom att man låter eleverna bedöma om en viss vinkel är rät eller ej med hjälp av en vinkelhake. Därefter inför man begreppen "spetsig" respektive "trubbig" vinkel samt låter eleverna såväl rita som med gradskiva mäta ett antal sådana vinklar. Genom mätningsövningar får eleverna påvisa troligheten av några enkla satser om vinklar såsom triangelns vinkelsumma, sidovinklars vinkelsumma, vertikalvinklars storlek och vinklar vid parallella linjer.

2:5. Omkrets, area och volym (Årskurserna 6—9)

I anslutning till längdmätningsövningar får eleverna med linjal mäta omkretsen på figurer som de själva ritat. Med hjälp av snören eller måttband kan de mäta omkretsen av cirkelformade föremål, hur

A

långt det är runt en burk etc. En kurvas längd kan uppskattas genom att kurvan approximeras med sträckor. Redan på mellanstadiet kan eleverna laborativt komma underfund med att det finns ett samband mellan en cirkels omkrets och diameterns längd.

Begreppet "area" införs mycket tidigt och på ett laborativt sätt. Genom att upprita kvadrater och rektanglar på rutat papper samt räkna antalet rutor kan eleverna få en uppfattning om areamätning. Arean av cirkelområden och områden med oregelbunden rand kan uppskattas med hjälp av ruträkning i in- och omskrivna polygoner.

På högstadiet uppställs med utgångspunkt i laborativt arbete formlerna för cirkelns omkrets och area samt cirkelsektorns area. Detta arbete anknyts till funktionsbegreppet.

På mellanstadiet får eleverna lära sig hur man bestämmer volymen av rätblock genom att bygga sådana med hjälp av kuber som är 1 kubikcentimeter. På högstadiet får eleverna likaså med laborativa metoder bestämma volym av cylinder, kon och klot samt pröva giltigheten av uppställda volymformler.

På mellanstadiet bör eleverna få en uppfattning om begreppet "skala". På högstadiet får eleverna genom laborativt arbete studera area och volym hos likformiga figurer och kroppar.

3. GEOMETRI

3:1. Geometriska grundbegrepp. Avbildningsövningar (Årskurserna 1—7)

Den egentliga geometriundervisningen förbereds på lågstadiet, där eleverna ofta i lekens form och genom enkla sorterings-, klassificerings- och ritövningar lär känna innebörden i ord som rak, krokig, spetsig, trubbig, plan, buktig, stor, liten, höger, vänster, upp, ner, innanför, utanför, på, ovanför och nedanför.

Med hjälp av t ex snören som eleverna lägger ut på sina bänkar åskådliggörs begreppen "öppen" respektive "sluten" kurva. Med hjälp av knappar som placeras på olika sätt i förhållande till dessa snörfigurer inlärs begreppen innanför och utanför. Så småningom lär de sig att en del slutna kurvor har speciella namn som triangel, fyrhörning, rektangel, kvadrat och cirkel. Sorterings- och klassificeringsövningar med hjälp av s k logiska block kan

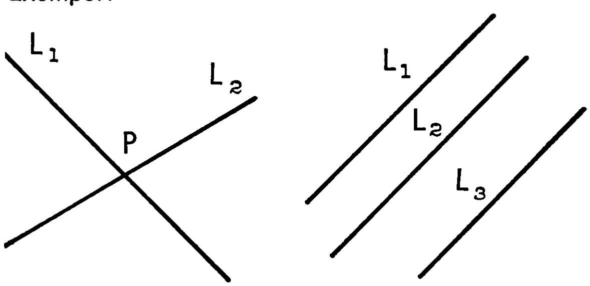
B

göras för att ge eleverna kunskaper om dessa begrepp.

Begreppen punkt, linje och sträcka införs i samband med de första längdmätningsövningarna. Andra geometriska begrepp som kan tas upp på lågstadiet är plan, rum, kropp, yta, område, rand, hörn, sida. På mellanstadiet och i årskurs 7 förs geometristudiet vidare enligt samma mönster, dvs med utgångspunkt i laborativa erfarenheter lär eleverna känna nya begrepp som stråle, konkavt resp konvext område, polygon, vinkel, halvplan, radie, diameter, sektor, segment, rymdområde, rätblock, kub, klot, kon, (pyramid), cylinder, (prisma), kant, parallell, vinkelrät, normal, skära, sammanfalla, kongruent, likformig, tangera, symmetrisk. Vid diskussionerna om geometriska begrepp kan mängdlärans begrepp och terminologi med fördel utnyttjas.

Så t ex kan skärningspunkten mellan två ickeparallella linjer i ett och samma plan betraktas som det element, som ingår i snittet av de mängder som linjerna utgör. Om snittet av några linjer i ett och samma plan är tomt innebär det att linjerna är parallella.

Exempel:

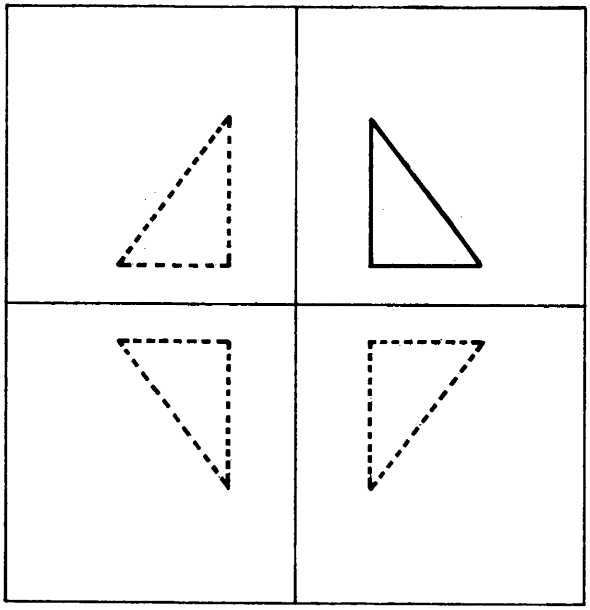


$L_1 \cap L_2 = \{P\}$ $\qquad$ $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$

Från årskurs 3 kan man inleda enkla avbildningsövningar med att eleverna "flyttar" sträckor och månghörningar med hjälp av genomskinligt papper. Så kan t ex spegling i en linje åstadkommas om eleverna på ena sidan av ett dubbelvikt, genomskinligt papper ritar en figur och sedan vänder på papperet och ritar längs de därifrån synliga konturerna. Då papperet rätas ut kommer vikningslinjen att vara den linje i vilken den första figuren speglats. Genom att därefter vika papperet vinkelrätt mot den första vikningen och rita av den så synliga figuren får man en figur som är spegelbilden av den ursprungliga figuren, då denna speglats i en punkt.

C

Exempel:



På liknande sätt kan man med hjälp av kalkerpapper åskådliggöra parallellförskjutning och vridning. Arbetet leder fram till ett närmare studium av de grundläggande kongruensavbildningarna. Senare konstrueras sådana avbildningar med hjälp av passare, smygvinkel och linjal. Eleverna tränas även i att i givna figurer finna eventuell symmetri samt ange symmetriaxlar och symmetricentrum. När eleverna arbetat någon tid med koordinatsystemet, kan avbildningsövningar även utföras i detta. På högstadiet får eleverna finna det samband som råder mellan koordinaterna för en viss punkt och koordinaterna för punktens spegelbild för de fall att punkten speglats i t ex koordinataxlarna, i linjen $y = x$ eller i origo. Några enkla satser om vinklar, polygoner och cirklar tas upp efter hand.

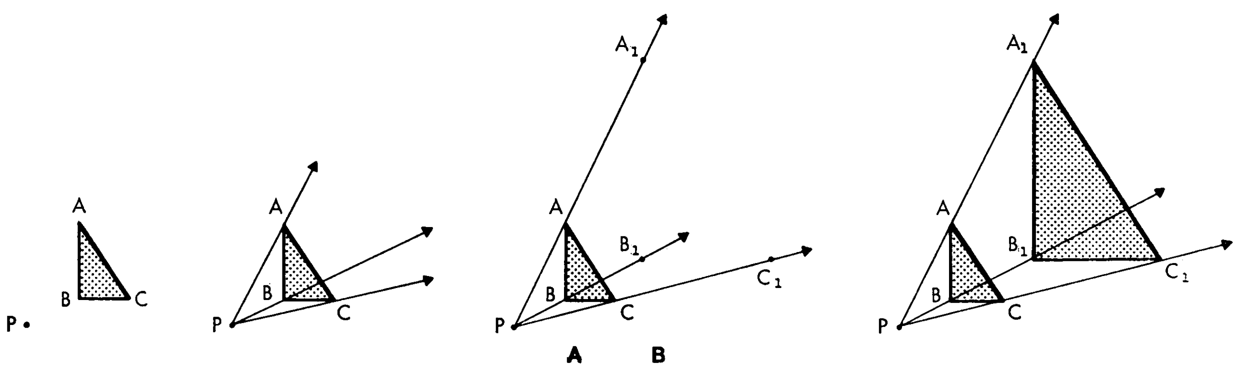
Genom att rita och mäta sträckor av olika längder kan skalbegreppet införas. Man övergår sedan till att genom sträckning konstruera likformiga tvådimensionella figurer och mäta och jämföra längderna av motsvarande sträckor i dessa figurer. Så småningom får eleverna göra likformighetsavbildningar av en viss given figur i en viss skala. Ritningar och kartor kan bilda ett lämpligt underlag för dessa övningar. Om sträckning se nederst på denna sida.

3:2. Koordinatsystemet (Årskurserna 3—7)

Principerna för användningen av koordinater vid lägesbestämningar kan upptas tidigt i undervisningen. Man kan utgå från en praktisk situation, t ex att beskriva var en viss elev har sin plats i skolsalen, var ett visst kvarter ligger på en stadskarta, på vilken ruta en viss schackpjäs står osv. Koordinatbegreppet kan också utnyttjas vid en lek, där det gäller för en elev att med utnyttjande av begreppen "framåt", "bakåt", "höger", "vänster" samt med angivande av antalet steg få en kamrat att med förbundna ögon hitta ett föremål som placerats på klassrumsgolvet.

Så småningom övergår man till att låta eleverna rita koordinatsystem och i dessa markera punkter med givna koordinater samt ange koordinaterna för utlagda punkter. Detta kan ske samtidigt som man lär dem att rita och tolka enkla diagram som skildrar iakttagelser som gjorts eller data som noterats i undervisningen i hembygdskunskap och senare i orienteringsämnena. För axlarnas riktningar kan man införa att "till höger" och "uppåt" är positiv riktning. Allteftersom talområdet utvidgas att omfatta decimaltal, rationella tal och reella tal får eleverna arbeta i koordinatsystem med par av dessa tal.

Sträckning:



★ 3:3. Kongruensavbildningar (Årskurserna 7—8)

Arbetet med de grundläggande avbildningarnas spegling i linje och punkt, vridning och parallellförskjutning sammanfattas och de karakteristiska egenskaperna hos en kongruensavbildning diskuteras. Kongruensavbildningarna utnyttjas för att göra vissa viktiga geometriska satser troliga. På detta sätt behandlas t ex satser som gäller likbenta och liksidiga trianglar, parallella linjer, parallellogrammer och rektanglar. Några av de satser som framtagits vid en empirisk undersökning bevisas genom ett deduktivt bevis. Även om inte alla elever som studerar detta kursavsnitt kan genomföra ett sådant deduktivt bevis, bör de vara informerade om att ett strikt logiskt bevis förutsätter ett axiomsystem samt att man genom mätning av sträckor och vinklar endast kan troliggöra riktigheten i en viss geometrisk sats.

3:4. Vektorer (Årskurserna 7—8)

Genom att arbeta med ett kvadratiskt rutnät kan vissa egenskaper hos och satser om vektorer illustreras. Flertalet elever bör grafiskt kunna utföra additionen $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ där $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är i ett rutnät givna vektorer samt t ex konstruera vektorn $-3\,\mathbf{a}$. Likaså bör de grafiskt kunna visa att $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. De flesta elever bör kunna rita vektorer som angivits i koordinatform. Uppgifter, som behandlar subtraktion av vektorer samt räkning med vektorer som angivits i koordinatform, differentieras efter elevernas förmåga. Tillämpningarna av vektorer, t ex inom fysiken, belyses med exempel. I årskurs 9 kan man eventuellt behandla vektorer och koordinatsystem i rymden.

★ 3:5. Likformighetsavbildningar (Årskurserna 8—9)

När likformighetsavbildningar tas upp till ett mera systematiskt studium kan man bygga på både avbildningsövningarna på mellanstadiet och på elevernas kunskaper om vektorer. Den s k transversalsatsen kan t ex få formen av en distributiv lag vid multiplikation av en vektor med ett tal. Några enkla satser angående likformighetsavbildningar och sträckning behandlas. Pytagoras sats kan visas genom att utnyttja likformiga trianglar.

C

4. DECIMALTAL

4:1. Decimaltalsbegreppet, tallinjen, ordning (Årskurs 4)

Decimaltalens stora användning motiverar att de införs före de rationella talen. Man bör utgå från elevernas erfarenheter angående kronor—ören samt anknyta till längd-, volym- och viktbestämningar. Talen åskådliggörs bl a med hjälp av tallinjen.

4:2. Addition och subtraktion (Årskurserna 4—5)

Med utgångspunkt i erfarenheter av kronor—ören, meter—centimeter kan addition och subtraktion av decimaltal införas. Det är väsentligt att arbetet har en konkret förankring. Samtidigt anknyter man till tallinjen och tiosystemet. Parallellt med att eleverna lär sig att använda algoritmerna med decimaltal väljs svårare övningar även med de naturliga talen.

4:3. Multiplikation och division (Årskurserna 4—7)

Inledningsvis behandlas uppgifter där ena faktorn (respektive nämnaren) är heltal.

Exempel:

$4 \cdot 0{,}1$ kan betraktas som $0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}4$;

$0{,}1 \cdot 2 = 2 \cdot 0{,}1$;

$3 \cdot 0{,}3 = 3 \cdot 3 \cdot 0{,}1 = 9 \cdot 0{,}1 = 0{,}9$.

När man senare tar upp fallet där båda faktorerna är skrivna i decimalform är det angeläget, att man motiverar räknemetoden. Man kan t ex utnyttja areaberäkningar. Eleverna vet att 10 cm = 1 dm, 1 cm = 0,1 dm, 100 cm^2 = 1 dm^2 och att 1 cm^2 = 0,01 dm^2. De får sedan bestämma arean av en rektangel där sidorna är t ex 2 cm och 3 cm. Arean är $2 \cdot 3$ cm^2 = 6 cm^2 = 0,06 dm^2. Sidornas längder kan skrivas i decimeter, alltså 0,2 dm resp 0,3 dm. Arean är då: $0{,}2 \cdot 0{,}3$ dm^2. Vi vet redan att arean är 0,06 dm^2.

Exempel:

$$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 3 \cdot 0{,}1 = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1$$

$$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06 = 6 \cdot 0{,}01$$

$$6 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 6 \cdot 0{,}01$$

$$\boxed{0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01}$$

A

Division introduceras som omvändningen till multiplikation.

$\frac{15}{3}$ är det tal som multiplicerat med 3 ger produkten 15 (se 1:12.).

$\frac{0{,}5}{0{,}1}$ är det tal som multiplicerat med 0,1 ger produkten 0,5 dvs 5. Divisioner av typen $\frac{3{,}96}{1{,}2}$ kan behandlas efter bråkräkningen. Vid placering av decimaltecknet är överslagsräkning betydelsefull.

4:4. Avrundning (Årskurserna 4—5)

Att avrunda ett tal i decimalform betyder att hitta närmaste decimaltalet med ett mindre antal decimaler. För att eleverna skall förstå principen för avrundning, kan man utgå från tallinjen. Med hjälp av en linjal får eleverna själva komma fram till regler för avrundning. Eleverna får möta problemet att på tallinjen ange var det exakta värdet till ett angivet avrundat närmevärde kan ligga.

Beträffande reglerna för avrundning hänvisas till SÖ:s skriftserie 87: "Matematikterminologi i skolan" s 15 f.

4:5. Potenser med positiv heltalsexponent (Årskurserna 5—7)

Potenser med positiva heltalsexponenter används på mellanstadiet i samband med area- och volymberäkning samt vid arbete med positionssystem. Eleverna bör kunna tolka 3^2, 10^3 osv redan på mellanstadiet. Genom att skriva tal som fyra trillioner dels med alla nollor utskrivna, dels som $4 \cdot 10^{18}$ får eleverna motivation för det sista skrivsättet.

I anslutning till orienteringsämnena får eleverna skriva stora tal som en produkt av ett decimaltal och en tiopotens t ex "Sverige har ungefär $7{,}8 \cdot 10^6$ invånare", "18 g vatten innehåller ungefär $6{,}02 \cdot 10^{23}$ st molekyler".

I årskurs 7 kan eleverna få utnyttja tiopotenser vid storleksuppskattningar i samband med övningar med räknesticka. Lämpliga uppgifter för dessa övningar finner man inom orienteringsämnena.

4:6. Tiopotenser med negativ heltalsexponent. Räkning med potenser (Årskurserna 7—8)

Med hänsyn till tillämpningarna bör alla elever känna till skrivsättet 10^{-n}, där n är ett naturligt tal.

B

Inom detta moment kan man räkna med stor spridning av elevernas räknefärdighet. En del elever kan skriva tal som $5 \cdot 10^{-3}$ i decimalform och skriva 0,02 som $2 \cdot 10^{-2}$. Andra elever kan räkna med produkter som $1{,}2 \cdot 10^{12} \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-10} = 0{,}36 \cdot 10^{2} = 36$. Det sista exemplet liksom motsvarande för kvoter visar att potenser kan användas som hjälpmedel vid överslagsräkning och räkning på räknesticka.

Man definierar $10^0 = 5^0 = 2^0 = 1$ och ger exempel som visar ändamålsenligheten av definitionen.

Exempel:

$$1 = \frac{1000}{1000} = \frac{10^3}{10^3} = 10^{3-3} = 10^0$$

Några elever kommer kanske så långt som till att formulera räknelagar med bokstavsbeteckningar.

5. RATIONELLA TAL

5:1. Bråkbegreppet, tallinjen, ordning (Årskurs 4)

Tal som en halv, en tredjedel, en fjärdedel uppfattas intuitivt av många elever redan före mellanstadiet och kan beröras i undervisningen på lågstadiet. För de flesta eleverna erfordras dock en ingående behandling baserad på arbete med laborativt material. Tallinjen bör också utnyttjas. Tillämpningar hämtas ur vardagslivet samt från mätningar och ur geometrin.

Att olika bråk kan vara namn för samma tal betonas tidigt, varvid man skiljer mellan det rationella talet å ena sidan och beteckningen — bråket — å den andra sidan. Ett rationellt tal kan betecknas på ett obegränsat antal sätt: $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}$, osv är t ex alla namn för samma rationella tal.

5:2. Addition och subtraktion (Årskurserna 5—8)

Addition och subtraktion bör koncentreras till bråk med enkla nämnare. Vid addition av bråk med olika nämnare bör undervisningen kraftigt differentieras i fråga om svårighetsgraden. Eftersom de flesta enhetssystem är decimala, är det för många elever inte meningsfullt att träna t ex additioner av bråk med olika nämnare. Här ligger det närmare till hands att approximera de rationella talen med decimaltal och i stället addera dessa.

C

5:3. Multiplikation och division (Årskurserna 5—8)

Först behandlas multiplikation och division av ett tal i bråkform med ett naturligt tal. Multiplikation kan då introduceras som upprepad addition. Divisionen anknyts till multiplikation. Multiplikation och framförallt division av bråk med bråk kan behandlas sent och differentieras starkt. Vid multiplikation med tal i bråkform kan man utnyttja funktionsbegreppet.

Vid användning av de fyra räknesätten på rationella tal bör eleverna i första hand vinna förståelse för räknemetoderna. Den rent mekaniska färdigheten att snabbt kunna göra dessa operationer torde vara av sekundär betydelse.

5:4. Decimaltal som närmevärde för rationellt tal (Årskurserna 5—7)

Eleverna bör kunna approximera ett tal i bråkform med ett tal i decimalform, t ex för att kunna övergå till närmevärden vid räkning. Så småningom blir räknestickan ett lämpligt hjälpmedel.

5:5. Procentbegreppet (Årskurserna 5—6)

Utgångspunkten kan vara att procent betyder hundradelar och att man därigenom erhåller enkla namn för tal. Innebörden av skrivsätten 150 %, 200 % osv bör klargöras. Överslagsräkning bör förekomma. På mellanstadiet behandlas företrädesvis enkla frågor som "Vad är 10 procent av 80 kronor?" "10 procent av landets tillverkning exporteras. Hur många procent förbrukas inom landet?" Praktiska tillämpningar bör förekomma i orienteringsämnena inom motsvarande årskurser, t ex i samband med diagram.

5:6. Räkning med procent (Årskurserna 6—9)

Efterhand kan en mera fullständig behandling av räkning med procent genomföras. Man diskuterar därvid problem där procenttalet är givet och där det efterfrågas, samt jämförelser såsom i frågeställningarna "Priset ökar först med 10 % och sedan återigen med 10 %. Hur många procent är den sammanlagda ökningen?" — "Vilket är fördelaktigast för kunden, att lägga på 11 % varuskatt först och sedan dra av 5 % rabatt eller tvärtom?"

Procentbegreppet har stor användning i dagens samhälle, varför meningsfyllda uppgifter lätt insamlas, t ex ur dagstidningar. Användningen av räknestickan möjliggör på högstadiet behandling av verklighetsnära problem utan att de numeriska beräkningarna behöver ta lång tid i anspråk. God kontakt bör hållas mellan matematiken och orienteringsämnena, så att numeriska beräkningar av procenttal, diagramritning osv ibland kan ske på matematiktimmarna, medan insamling av data och tolkning av resultaten sker inom andra ämnens ram. Ekonomiska frågeställningar, t ex olika former av avbetalningsköp kontra kontantköp, jämförande av priser med olika rabattsystem osv bör ingå. Dylika uppgifter bör helst vara dagsaktuella och även i viss utsträckning avpassade efter förhållandena på skolorten.

A

6. NEGATIVA TAL

6:1. Begreppet negativt tal, tallinjen, ordning (Årskurs 4)

Eleverna på lågstadiet har lärt känna termometern och använt ord som "plusgrader" och "minusgrader". Därifrån kan man utveckla elevernas erfarenheter till att omfatta situationer som läge över och under havsytan, våningar över och under jorden, nedräkning av rymdraketer, spel med plus- och minuspoäng, vinst—förlust m m. Från dessa utgångspunkter kan man införa koordinater för punkter på tallinjen till vänster om origo.

6:2. Addition och subtraktion (Årskurserna 4—7)

Eleverna får på mellanstadiet arbeta med addition och subtraktion av negativa tal, företrädesvis i anslutning till tillämpningar såsom temperaturmätning. Man bör inskränka sig till praktiskt motiverade övningar samt till att framhäva de negativa talens egenskaper i förhållande till tallinjen. En mera ingående behandling av de negativa talen uppskjuts till högstadiet.

★ 6:3. Multiplikation och division (Årskurserna 7—8)

Flertalet elever bör kunna utföra multiplikation och division av negativa tal med positiva heltal. I övrigt kan undervisningen differentieras. Ändamålsenligt är dock att elever som skall arbeta med reduktioner av algebraiska uttryck gör detta med en fullständig behandling av de negativa talen som grund.

B

7. RÄKNEMASKINER. RÄKNESTICKA. TABELLER

7:1. Räknemaskiner (Årskurserna 7—9)

Med tanke på hur viktiga och vanliga räknemaskiner är i dagens samhälle kan eleverna redan på mellanstadiet få en orientering om några vanliga typer av räknemaskiner, t ex additionsmaskiner och manuella kalkyleringsmaskiner ("räknesnurra"). Orienteringen ges lämpligen i samband med studiebesök.

På högstadiet får eleverna själva göra beräkningar med hjälp av additionsmaskiner och kalkyleringsmaskiner (manuella eller elektriska "räknesnurror"). Genom dessa praktiska övningar bör eleverna kunna komma till insikt om vilka uträkningar som kan utföras på respektive maskintyp. Någon egentlig färdighet behöver inte eftersträvas.

På högstadiet utgör statistikmomentet ett utomordentligt tillämpningsområde för maskinräkning. Även den numeriska behandlingen av värden som erhållits vid laborationer i biologi, fysik och kemi bör kunna utföras med hjälp av räknemaskiner. Undervisningen bör ske enskilt eller i mindre grupp. Härvid erbjuds goda möjligheter för eleverna att träna att följa en skriftlig bruksanvisning eller instruktion, liksom instruktioner på ljudband.

7:2. Räknestickan (Årskurserna 7—9)

Alla elever på högstadiet bör ha en räknesticka för personligt bruk. Det är för många elever en fördel om denna förutom grundskalorna är försedd med π- eller $\sqrt{10}$-förskjutna skalor samt de vanligaste trigonometriska skalorna. Redan i början på höstterminen i årskurs 7 bör eleverna arbeta med skalavläsning och inställning av slid och löpare samt enkla multiplikationer och divisioner. Arbetet med stickan blir för nybörjaren ofta tröttsamt varför man inte bör låta hela lektioner upptas av sådana övningar. Det är viktigt att man under hela högstadiet regelbundet använder räknestickan. Målet för undervisningen är att eleverna skall uppfatta räknestickan som det naturliga hjälpmedlet, då man vill utföra multiplikation och division med empiriskt funnet siffermaterial. På samma sätt skall stickan för flertalet av eleverna vara det självklara hjälpmedlet då man vill bestämma närmevärden för rationella och reella tal. Detta mål uppnås inte om stickan endast används under matematiklektionerna. Många tillämpningsuppgifter finner man vid

C

undervisningen i orienteringsämnena samt i slöjdundervisningen. I samband med användningen av räknestickan beaktas problem om noggrannhet i uppgivna eller uppmätta data samt möjlig och önskvärd noggrannhet i svaret. Eleverna bör vidare vänjas vid att göra överslagsräkningar för att finna det önskade svarets storleksordning innan beräkningen utförs med hjälp av räknestickan. Elever med svårigheter vid algoritmräkning kan kompensera dessa genom att använda räknesticka.

7:3. Tabeller (Årskurserna 8—9)

På mellanstadiet tränas eleverna att hämta uppgifter ur enkelt uppställda tabellverk och siffertablåer. Läroböckernas geografiska och historiska tabeller liksom serietabeller på tidningarnas sportsidor utgör ett lämpligt övningsmaterial.

På högstadiet bör alla eleverna få rutin att använda mer komplicerade tabeller såsom tabeller över inverterade tal och kvadratrötter samt trigonometriska tabeller.

7:4. Datamaskiner (Årskurs 9)

Avsnittet är av orienterande natur. Eleverna bör bibringas en uppfattning om vad utnyttjandet av datamaskiner innebär för såväl den enskilda människan som för samhälle och näringsliv. I samband med denna orientering kan eleverna arbeta med tal skrivna i tvåsystem samt med flödesdiagram.

8. STATISTIK OCH SANNOLIKHETSLÄRA

8:1. Insamling av statistiskt material. Tabeller och diagram (Årskurserna 2—9)

Förslag till fördelning på årskurser:

Moment:	Årskurs:
enkla diagram	2 — 3
frekvenstabell	2 — 5
klassindelning	3 — 9
stolpdiagram	4 — 5
histogram	5 — 9
areadiagram (bl a cirkeldiagram)	5 — 9
klassmitt, klassbredd	8 — 9
summapolygon	8 — 9
"ljuga med statistik"	7 — 9

A

Redan på lågstadiet bör eleverna få insamla material och sammanställa detta i tabeller och i diagram. Eleverna får själva komma med förslag på hur tabellerna bör utformas för att de skall bli så åskådliga som möjligt. De får sedan öva sig i att ur dessa tabeller bestämma, t ex det största respektive minsta värdet och det vanligaste värdet (typvärdet).

Dessa tabeller får sedan ligga till grund för framställning av enkla diagram. De första diagrammen kan bestå av verkliga eller ritade föremål, där varje föremål representerar t ex 10 personer, 100 bilar, 1 000 kr osv. Man bör inte låta eleverna göra t ex olika stora bilar för att beskriva olikheten i antal, eftersom förhållanden mellan areor och volymer är svåra att arbeta med. Dessa enkla diagram utvecklas sedan till stolpdiagram. Relativt tidigt införs en klassindelning av det erhållna materialet, varefter stolpdiagrammen så småningom kan utvecklas till histogram. Cirkeldiagram och andra typer av areadiagram kan införas redan på mellanstadiet. På samma sätt som vid arbetet med tabellerna övas eleverna att tolka diagrammen. I samband därmed behandlas några olika sätt "att ljuga med statistik".

Successivt görs materialet mer omfattande, terminologin striktare samt tabeller och diagram mer lika den beskrivande statistikens allmänt vedertagna. På högstadiet är räknemaskin och räknesticka naturliga hjälpmedel vid arbete med statistiskt material. All verksamhet i samband med den beskrivande statistiken ger stora möjligheter till såväl individuellt arbete som grupparbete. Statistikmomentet i matematikundervisningen behandlas i intim samverkan med övriga undervisningsämnen.

På *lågstadiet* ger hembygdskunskapen osökta tillfällen att statistiskt bearbeta för eleverna intressant material. Tabeller och diagram kan upprättas över väderleksiakttagelser, trafikräkning, olika aktiviteter under ett dygn, en skoldag, en lektion osv.

På *mellan- och högstadiet* utnyttjas stoff från orienteringsämnena. Samhällskunskap och geografi innehåller många moment där upprättandet av tabeller och diagram är det naturliga arbetssättet. På högstadiet ger resultaten från elevlaborationer i de naturorienterande ämnena ett utomordentligt primärmaterial för statistisk behandling. Förslagsvis kan den matematiska bearbetningen av materialet ske under matematiklektionerna och tolkningen av det färdiga resultatet under lektion i respektive orienteringsämne.

B

8:2. Medelvärde, median (Årskurserna 6—9)

Medelvärde kan behandlas tidigt, företrädesvis i anslutning till det material som eleverna insamlat i orienteringsämnena. Man diskuterar behovet av ett lägesmått då jämförelse skall ske mellan två eller flera jämförbara material.

I samband med studiet av ett material med mycket sned fördelning diskuteras otillräckligheten av lägesmåttet medelvärde, varefter man inför begreppen median och eventuellt kvartil. Detta bör ske på högstadiet. I samband härmed behandlas summapolygoner.

8:3. Relativa frekvenser och deras stabilitet. Sannolikhet (Årskurserna 8—9)

För att möjliggöra viss insikt i innebörden av sannolikhetsbegreppet är det nödvändigt att eleverna arbetar något med relativa frekvenser för så stora material att stabiliteten hos de relativa frekvenserna blir belyst. Långa försöksserier, t ex vid kast med tärning, tändsticksask, häftstift eller vid dragning av kort, kan man lätt få genom lämpligt organiserat grupparbete. Räknestickan är vid beräkningen av de relativa frekvenserna ett oumbärligt hjälpmedel. Begreppet sannolikhet införs med utgångspunkt i de relativa frekvensernas stabilitet.

★ 8:4. Standardavvikelse, variationsbredd (Årskurs 9)

När kvadratrötter genomgåtts kan beräkning av standardavvikelse ske. Samtidigt diskuteras variationsbredd. Eventuellt kan man arbeta med summatecknet. Räknemaskin bör utnyttjas vid långa beräkningar.

★ 8:5. Utfall, utfallsrum, händelser. Räkning med sannolikheter (Årskurs 9)

Eleverna bör få möta några vanliga begrepp från sannolikhetsläran, t ex utfall, utfallsrum, händelse samt sannolikhet för utfall och händelse. Elevernas kunskaper från arbetet med mängder utnyttjas härvid. Vid räkning med sannolikheter är det väsentligt att övningarna väljs lätta, så att inte formella svårigheter döljer enkla principer eller motverkar elevernas intresse för momentet. Man kan i detta sammanhang diskutera begreppet matematisk modell.

C

9. FUNKTIONSLÄRA

9:1. Relation och funktion (Årskurserna 6—7)

Eleven har ofta i sitt dagliga liv mött situationer som matematiskt motsvaras av relationer och funktioner. Med hjälp av begrepp från mängdläran kan man på ett enkelt och konkret sätt låta eleverna ange mängder av ordnade par inom en viss grundmängd. Grundmängden kan t ex vara "Eleverna i klass 6 c vid Åby skola", relationsföreskriften "A bor på samma gata/väg som B", "A har lika många syskon som B", eller "A har fler syskon än B". De ordnade paren anges med hjälp av pilar samt så småningom i listform. När eleverna någon tid arbetat med relationer mellan element i en och samma grundmängd utvidgas begreppet till att gälla ordnade par, där komponenterna är tagna från två mängder som saknar gemensamma element, exempelvis "Eleverna i klass 6 c" och "Skonummer mellan 30—45".

Genom att variera grundmängderna och relationerna får eleverna komma i kontakt med såväl ekvivalensrelationer som ordningsrelationer och funktioner. I detta första skede behöver endast funktionsbegreppet definieras. Symbolen $f(x)$ för funktionsvärde bör införas i årskurs 7.

9:2. Funktioner givna genom formler (Årskurserna 7—9)

Sedan eleverna arbetat med relationer och funktioner samt kommit till klarhet om vad som menas med ordnade par, kan de börja att tolka och använda formler. Formlerna kan betraktas som kortfattade relationsföreskrifter. Vid införandet av formler betonas vikten av att de beteckningar som utnyttjas i en formel är entydigt definierade.

De första formler som införs bör beskriva samband som eleverna kommit till insikt om genom laborativt arbete eller som omedelbart inses intuitivt. Som exempel på sådana samband kan nämnas:

$A = b^2$ för "arean av en kvadrat med sidan b längdenheter";

$O = \pi \cdot d$ för "omkretsen av en cirkel med diametern d längdenheter";

$r = k \cdot t$ för "räntan i kronor är proportionell mot tiden".

Undervisningen i fysik och kemi behandlar många

A

moment där det är naturligt att använda funktionsbegreppet. Man kan t ex använda:

$I = \frac{k}{a^2}$ för "ljusstyrkan avtar med kvadraten på avståndet",

$t = \frac{k}{c}$ för "reaktionstiden är omvänt proportionell mot en reaktants koncentration i en viss kemisk reaktion".

Då eleverna använder sig av en formel bör de även arbeta med att lösa ut olika variabler i denna.

9:3. Grafiskt åskådliggörande av funktioner (Årskurserna 7—9)

Många egenskaper hos en viss funktion kan åskådliggöras grafiskt i ett koordinatsystem.

Såväl empiriskt funna talpar som sådana som erhållits genom insättning i en viss given ekvation, åskådliggörs. Förutom linjära funktioner kan eleverna få rita funktioner av typ $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ samt någon trappfunktion. Räknestickan är ofta ett utmärkt hjälpmedel att finna närmevärden för funktionsvärdena. Övningarna bör även omfatta tolkning av givna grafiska bilder av funktioner.

9:4. Linjära funktioner (Årskurserna 8—9)

I vardagslivet kommer eleverna ofta i kontakt med begreppet proportionalitet. Sådana samband bör särskilt uppmärksammas i undervisningen varför de linjära funktionerna och deras egenskaper bör ägnas ett särskilt intresse. Räknestickan är ett utmärkt hjälpmedel för att finna närmevärden på proportionalitetskonstanter samt utföra beräkningar med proportionaliteter.

★ 9:5. Polynom (Årskurserna 7—9)

Addition, subtraktion och multiplikation av polynom övas. Konjugat- och kvadreringsreglerna introduceras. Enkla faktoruppdelningar med användning av distributiva lagen och nyssnämnda regler övas. Stoffet bör vara starkt differentierat.

★ 9:6. Rationella uttryck (Årskurs 9)

De fyra räknesätten med brutna rationella uttryck övas i enklare fall.

B

★ 9:7. Trigonometriska funktioner (Årskurs 9)

Funktionerna "sinus" och "cosinus" införs med hjälp av enhetscirkeln. Eleverna kan åskådliggöra t ex sinusfunktionen grafiskt i ett koordinatsystem. Funktionerna tillämpas på beräkning av sidor och vinklar i en rätvinklig triangel samt på beräkning av areor av ytor som bildats genom vinkelrät projektion. De numeriska beräkningarna utförs med hjälp av räknesticka eller tabell.

★ 9:8. Ekvivalensrelationer, ordningsrelationer, ekvivalensklasser (Årskurserna 8—9)

Tidigare (9:1.) har eleverna studerat relationer och därvid ritat pildiagram. Dessa bör användas fortlöpande för att åskådliggöra relationer. Studiet kan efter hand systematiseras, varvid eleverna undersöker om olika relationer är symmetriska, reflexiva eller transitiva. Särskilt studeras ekvivalens- och ordningsrelationer. Med hjälp av ekvivalensrelationer får eleverna dela upp givna mängder i ekvivalensklasser. Som exempel på ekvivalensklasser kan man diskutera mängden av trianglar med samma area, mängden av trianglar likformiga med en given triangel, mängden av bråk som är namn för samma rationella tal, mängden av riktade sträckor som är lika riktade och lika långa som en given riktad sträcka etc.

10. REELLA TAL

10:1. Begreppet reellt tal. Tallinjen, ordning (Årskurs 7)

Något ingående studium av de reella talen kan givetvis ej ifrågakomma. De introduceras genom sina egenskaper visavi tallinjen. Det meddelas att det finns reella tal som inte är rationella. För vissa elever kan man antyda hur varje reellt tal kan anges genom en följd av olikheter.

★ 10:2. Kvadratrötter (Årskurs 9)

Tonvikten läggs på bestämning av närmevärden till kvadratrötter och eleverna övas att använda tabell och räknesticka. Beträffande räkneregler för rötter kan stoffet starkt differentieras. Vissa elever kan möta beviset för att t ex $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal.

C

11. EKVATIONER, OLIKHETER OCH EKVATIONSSYSTEM

11:1. Utsaga, lösningsmängd (Årskurserna 1—7)

På lågstadiet införs uttrycken "sann utsaga" och "falsk utsaga". De inledande övningarna bör vara mycket enkla. Läraren håller t ex upp ett föremål och formulerar en utsaga om detta, varefter eleverna får avgöra om utsagan är sann eller falsk. Därefter får eleverna arbeta med slutna utsagor av typen $3 + 4 = 4 + 3$, $5 + 2 = 9 - 2$, $2 + 3 < 2 + 4$, $9 - 5 = 3 + 1$. Så småningom introducerar man begreppet "öppen utsaga". Detta kan t ex ske genom att eleverna får pröva med tal ur en viss ändlig mängd (grundmängd) och på så sätt avgöra vilka tal x som gör att $x + 4 = 6$ blir en sann utsaga eller vilka tal y som gör att $2y < 8$ blir en sann utsaga. Grundmängden i ovanstående exempel kan förslagsvis vara $\{1, 2, 3, 4\}$. Med hjälp av laborativt material kan eleverna också finna de tal x och y som gör att utsagan $x + y = 6$ blir sann.

Laborativt material utnyttjas också för att, gärna i lekens form, införa begreppen union och snitt samt klargöra den logiska innebörden i "eller" respektive "och".

Några mängdsymboler som $\{.....\}$, $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$ kan införas efterhand och vid behov.

11:2. Linjära ekvationer och olikheter (Årskurserna 7—9)

På högstadiet utvidgas behandling av ekvationer och olikheter till att omfatta lösning med hjälp av ekvivalenserna:

$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c \ (c \neq 0)$

och motsvarande för olikheter. Ekvationer och olikheter bör behandlas parallellt. Eleverna bör också möta fall där lösningsmängden är tom eller mängden av reella tal. Stoffet bör differentieras starkt.

A

★ 11:3. System av linjära ekvationer och olikheter (Årskurserna 8—9)

För flertalet elever inskränks behandlingen till ekvationssystem med två variabler. Alla elever kan arbeta med att lösa enkla system grafiskt. Man kan även beröra linjära olikheter i två variabler. De praktiska tillämpningarna bör framhävas. Härvid kan principen för linjär programmering belysas genom att man behandlar fall med två variabler med grafisk metod.

★ 11:4. Andragradsekvationer (Årskurs 9)

Elever som lärt sig behärska kvadreringsregeln kan tillämpa den för att med kvadratkomplettering lösa andragradsekvationer. Med denna metod kan också maximum eller minimum hos ett andragradspolynom studeras.

12. MATEMATISKA MODELLER

★ 12:1. Matematiska modeller (Årskurs 9)

Begreppet matematisk modell förklaras, varvid man diskuterar sambandet mellan en matematisk teori och verkligheten. Goda tillämpningsuppgifter finner man t ex i lärostoffet för fysik och kemi.

Man kan vidare diskutera hur man arbetar inom matematiken, dvs hur man utgår från vissa grundsatser (axiom) och grundbegrepp och sedan med hjälp av logikens regler bevisar satser och gör definitioner. Inom geometrin är axiomsystemet mycket komplicerat. Man kan dock eventuellt demonstrera en axiomatisk uppbyggnad av en mindre del av geometrin. Instruktivt är att behandla ett enkelt axiomsystem. Därvid är gruppbegreppet lämpligt. Man kan finna flera exempel på grupper inom grundskolans kurs i aritmetik och geometri. Gruppbegreppet kan utnyttjas för att illustrera ekvationslösning och introduktionen av vektorer.

B

Läroplan för grundskolan

Lgr 69

II Matematik Ma

Allmän del (Lgr 69 I)

Supplement (Lgr 69 II)

1969 UTKOMMER

Svenska
Matematik
Främmande språk. Engelska
Främmande språk. Franska. Tyska
Musik
Teckning
Slöjd
Hemkunskap. Barnkunskap
Gymnastik
Orienteringsämnen. Lågstadiet. Mellanstadiet
Orienteringsämnen. Högstadiet
Ekonomi
Konst
Teknik
Fritt valt arbete
Undervisning i klasstyp b och B
Specialundervisning
Planering

1970 BERÄKNAS UTKOMMA

Planeringsexempel. Lågstadiet. Mellanstadiet
Praktisk yrkesorientering
Maskinskrivning

Utbildningsförlaget