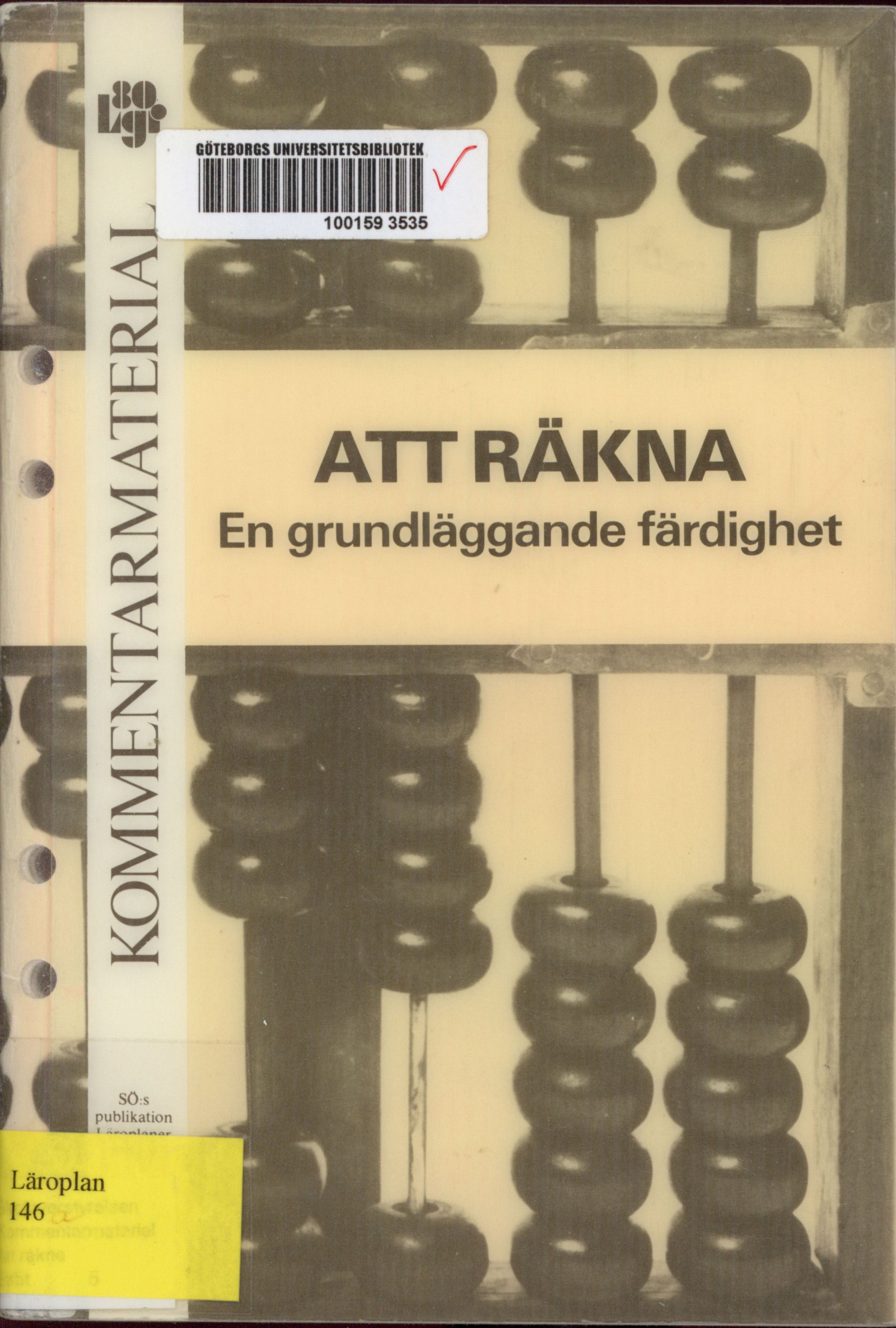


KOMMENTARMATERIAL

Lgr 80

ATT RÄKNA
En grundläggande färdighet

SÖ:s publikation Läroplaner

[Skolöverstyrelsen]

SÖ

Kommentarmaterial Lgr 80

Att räkna

En grundläggande färdighet

Liber Utbildningsförlaget Stockholm

Liber Utbildningsförlaget
162 89 STOCKHOLM

Upplysningar och beställningsadress
Liber distribution
Order Utbildning
162 89 STOCKHOLM
Tel 08-739 91 00

SÖ

Läroplan för grundskolan

Läroplan för grundskolan, Lgr 80, består av två delar, en allmän del och ett kommentarmaterial som ansluter till denna. Dessa utges i SÖ:s publikation Läroplaner.

Att räkna — En grundläggande färdighet är ett av kommentarmaterialen. Avsikten med detta kommentarmaterial är i första hand att det skall förtydliga och ge konkreta tolkningar av innehållet i kursplanen i matematik och därigenom vara ett stöd i det lokala utvecklingsarbetet.

Materialet syftar till att ge uppslag till diskussioner ute på skolorna och underlätta den planering som skolorna själva svarar för.

Redaktion Kerstin Thorsén

Ateljé Stig Kesselmark

Fotografier s 17 Ann Eriksson, MIRA; s 20 Ann Christine Eek, MIRA; s 23 Roger Stenberg, MIRA; s 34 Benny Lorentzon, MIRA; s 39 Inger Björneloo; s 45 Ann-Margret Johansson; s 51 Lars G. Säfström, MIRA; s 55 Tomas Södergren, MIRA.

Tecknade illustrationer Stig Kesselmark

Teknisk produktion Hans Finnman

Teknisk data *Sättning* Times 10/12
Tryckmetod Offset
Papper 100 g Matt Klippcote

Presslagd Oktober 1982

ISBN 91-40-70802-0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Axlings Tryckeri AB, Södertälje 1982

FÖRORD

Riksdagen och regeringen har beslutat att i SÖ:s publikation Läroplaner skall ingå kommentarer till Läroplan för grundskolan (Lgr 80).

Kommentarmaterialet innehåller inte föreskrifter. Det skall ge uppslag och information inom olika områden. Det skall också diskutera olika metoder att klara av de målkonflikter, problem och svårigheter som finns i skolan. Kommentarmaterialet kan användas när man diskuterar och beslutar om arbetssätt, innehåll och organisation i skolarbetet. Det kan också användas när man i en skola skall besluta om sina arbetsplaner och sitt utvecklingsprogram.

Kommentarerna utges fortlöpande och revideras under hand.

Eftersom praktiska erfarenheter och vetenskapliga rön måste ligga till grund för innehållet i de olika läroplanskommentarerna tar SÖ gärna emot information, uppslag och synpunkter som kan komma till nytta i det fortsatta arbetet med grundskolans utveckling.

Stockholm i oktober 1982

Skolöverstyrelsen

INNEHÅLL

INLEDNING

KOMMENTARMATERIALETS UPPLÄGGNING OCH FUNKTION

Avsikten med detta kommentarmaterial är i första hand att det skall förtydliga och ge konkreta tolkningar av innehållet i kursplanen i matematik och därigenom vara *ett stöd i det lokala utvecklingsarbetet.* Det innehåller alltså *inga föreskrifter.*

Utgångspunkten har i stället varit att söka ge några enkla tips och idéer om hur man kan arbeta för att leva upp till kursplanens intentioner. Givetvis finns det flera alternativa metoder att göra detta på och långt ifrån alla kan redovisas i ett kommentarmaterial. Metodisk mångsidighet och valfrihet är angelägen men metodisk aningslöshet en styggelse.

VILKA RIKTAR SIG KOMMENTARMATERIALET TILL?

Ungefär 60 000 lärare i Sverige undervisar i matematik. Merparten av dessa är lärare på låg- och mellanstadierna. Nästan 1 000 av de ca 1 400 matematiklektioner en elev har på grundskolan ges av klasslärare. Under låg- och mellanstadietiden inhämtas de viktigaste delarna av de grundläggande färdigheter som alla elever måste ha då de lämnar grundskolan.

Det är viktigt att lärare på alla tre stadierna samverkar mot ett gemensamt slutmål. Repetitioner och uppföljningar är nödvändiga. Utan kontinuitet i undervisningen kan en stor del av tidigare arbete vara bortspillt. Det här kommentarmaterialet riktar sig följaktligen till *alla lärare som undervisar i matematik.*

Enligt Mål och riktlinjer i Lgr 80 får färdighetsträningen i att räkna inte ensidigt koncentreras till ämnet matematik. Den matematik eleverna lär sig skall användas både i andra skolämnen och i vardagslivet. Det finns därför anledning för lärare i *alla* ämnen att studera och följa upp vissa delar av detta kommentarmaterial.

KURSPLAN I MATEMATIK

(Lgr 80 s 98–107)

FÖRÄNDRINGAR I KURSPLANENS UPPLÄGGNING

Matematikkursplanen i Lgr 80 är utformad som en *differentierad* kursplan. Den anger vilka moment som är *nödvändiga* för alla elever och vilka som är *önskvärda* för en elev som redan behärskar dessa moment.

I en differentierad kursplan begränsas inte målen för någon elev, men de mål som man vill att *alla* skall nå på ett visst stadium framhävs tydligt och begränsas starkt. Arbetet måste därför i första hand koncentreras på att *alla* skall nå dessa mål, men därutöver skall varje enskild elev föras framåt så långt som förutsättningarna räcker.

Detta sätt att utforma en kursplan medför också, att lärare och elever inte behöver känna sig pressade av kursomfånget.

Beskrivningen på s 99 i Lgr 80 av hur huvudmomentens stoff fördelats kan enkelt åskådliggöras med följande schema:

Det som är nödvändigt på lågstadiet och *alla* bör lära sig	Lågstadiet	Nödvändiga kunskaper
Det som är önskvärt på lågstadiet och nödvändigt för *alla* på mellanstadiet	Lågstadiet och mellanstadiet	Önskvärda kunskaper Nödvändiga kunskaper
Det som är önskvärt på mellanstadiet och nödvändigt för *alla* på högstadiet	Mellanstadiet och högstadiet	Önskvärda kunskaper Nödvändiga kunskaper
Det som är önskvärt på högstadiet är nödvändigt för framgångsrika studier på matematikintensiva gymnasielinjer	Högstadiet	Önskvärda kunskaper

Tillämpas ovanstående schema på de moment som hör till *Grundläggande aritmetik* kan följande resonemang föras. (Studera s 101 i läroplanen samtidigt med nedanstående. Detta huvudmoment väljs enbart för att det är enklast att exemplifiera.)

Lågstadiet.
Alla elever som lämnar lågstadiet bör för att kunna följa undervisningen på mellanstadiet behärska additions- och subtraktionstabellerna upp till 18 samt 2-ans, 3-ans, 4-ans och 5-ans multiplikationstabeller såsom dubbeltabeller, t ex både $5 \cdot 8$ och $8 \cdot 5$. Dessutom bör eleverna behärska additions- och subtraktionsuppställningarna.

På lågstadiet arbetar eleverna dels med de moment som finns angivna under rubrikerna *Lågstadiet* och dels med de som finns angivna under *Lågstadiet och mellanstadiet.*

Vid övergången till mellanstadiet är det viktigt att information ges om vilka elever som inte behärskar de olika momenten under rubriken *Lågstadiet.*

Lågstadiet och mellanstadiet.
En del elever kan mycket av det nämnda redan när de börjar skolan. För dem skulle undervisningstiden på lågstadiet utnyttjas dåligt om man inte gick vidare. Om vi fortsätter att hålla oss till tabellerna bör förstås varje lågstadielärare sträva efter att lära så många av sina elever som möjligt både multiplikationstabellen och divisionstabellen. Eleverna ges även lämplig träning i huvudräkning och i multiplikation i uppställning. Några av dem kan även arbeta med tal som är större än 1 000 och med tal i decimalform med två decimaler (kopplat till kronor och ören).

Lågstadiet och **mellanstadiet.**
Mellanstadieläraren tar emot elever med lika varierande förkunskaper som lågstadieläraren fick göra. Hans/hennes uppgift inom huvudmomentet Grundläggande aritmetik bli nu att i första hand se till att ingen elev lämnar mellanstadiet utan att behärska alla tabellerna samt räkneuppställningarna för addition och subtraktion samt för multiplikation med ena faktorn ensiffrig. Divisionsuppställningen *kan* däremot undvaras, men alla elever bör tränas på s k *kort division.* Talområdet sträcker sig upp till 10 000. Observera vad det gäller decimaltal att man i första hand bör arbeta med *två* decimaler, eftersom eleverna först möter decimaltal i samband med priser. Eleverna måste hela tiden få träna på att använda den matematik de behärskar.

Mellanstadiet och högstadiet.
Många elever kan det mesta av det nyss nämnda, när de kommer till mellanstadiet. För dessa gäller det att fortsätta att utvidga talområdet, att gå vidare med decimaltalen, att arbeta med mer komplicerade mul-

tiplikationsuppställningar samt att påbörja träningen av division i uppställning. En del elever kanske lär sig att dividera även med tvåsiffriga tal i en uppställning.

Matematikens praktiska tillämpning blir allt viktigare. Problemlösning och då inte minst huvud- och överslagsräkning i anslutning till vardagsproblem ägnas stort utrymme. Läraren måste även utnyttja alla de möjligheter som samverkan med andra ämnen ger.

Mellanstadiet och **högstadiet.**
Matematikläraren på högstadiet har nu ansvaret för att *ingen* elev lämnar grundskolan utan nödvändiga kunskaper i grundläggande aritmetik. Dit hör, vilket framgår av läroplanen, bl a praktisk tillämpning av de fyra räknesätten med och *utan* hjälpmedel. Utgångsläget bör vara gott eftersom ingen elev förhoppningsvis kommer från mellanstadiet utan att behärska tabellerna.

Högstadiet
De elever som redan har de nödvändiga kunskaperna i grundläggande aritmetik kan använda tiden till ytterligare träning av huvud- och överslagsräkning samt till att träna problemlösning. Den praktiska tilllämpningen kan göras mer omfattande och komplicerad. Alla tillfällen till samverkan med andra ämnen bör tas tillvara.

Motsvarande resonemang som här gjorts för huvudmomentet *Grundläggande aritmetik* kan göras för *Problemlösning, Reella tal* etc. För varje huvudmoment beskrivs alltså vad som är nödvändiga respektive önskvärda kunskaper och färdigheter på varje stadium. På så sätt framhävs *kontinuiteten* i undervisningen. Det är viktigt att en lärare vet både vad som behandlats tidigare och vad som kommer senare i inlärningsgången inom ett visst moment.

Kursplanen i matematik i Lgr 80 utgår alltså från att gränserna mellan stadierna måste vara mycket flytande. Nödvändiga och önskvärda kunskaper och färdigheter har angivits, men det går inte att beskriva *ett* kursinnehåll som passar *alla* elever.

FÖRÄNDRINGAR I KURSPLANENS MÅL

I förhållande till tidigare kursplaners mål märks en väsentlig skillnad i målet för kursplanen i matematik i Lgr 80. Medan man tidigare främst siktat på att bygga upp en matematik för vidare studier anges nu klart, att matematiken främst syftar till att ge var och en brukbara kunskaper så att man skall kunna ta vara på sina rättigheter och fullgöra sina skyldigheter som samhällsmedlem.

FÖRÄNDRINGAR I INRIKTNINGEN AV KURSPLANEN

Det är välkänt att olika moment i matematikundervisningen bygger på varandra. Därför är det nödvändigt att man genom en diagnostisk undervisning gör klart för sig, att eleven har nödvändiga förkunskaper då man försöker bygga vidare. Kursplanen är kategorisk härvidlag:

"En elev får inte börja med ett nytt moment utan tillräcklig grund från tidigare moment."
(Lgr 80 s 99).

Detta innebär givetvis inte, att en elev skall tvingas "traggla" med ett visst avsnitt utan att komma vidare under hela sin skoltid. Det innebär i stället att för en elev, som t ex inte kan hela multiplikationstabellen, vissa uppgifter med dessa kombinationer tills vidare måste utgå, då multiplikationsalgoritmen behandlas. Det kan också innebära, att några elever får mäta arean med hjälp av en areamall, då andra gör beräkningar av samma area, eller att vissa elever får använda miniräknaren för t ex division vid problemlösning.

I första hand innebär formuleringen dock, att läraren måste ta reda på vari elevens svårigheter består och i samarbete med specialläraren utarbeta ett lämpligt åtgärdsprogram. Ofta måste ett sådant program vara en kompensation för att eleven alltför tidigt har fått lämna konkreta, laborativa metoder. Det räcker emellertid inte med att låta en elev som saknar grunden i ett moment få använda laborativt material för att ensam klara uppgifterna. Läraren måste också hjälpa den svaga eleven så att svårigheterna utreds och efter hand övervinns. För att klara detta krävs ofta samarbete i ett arbetslag och varierande elevgrupperingar. Härvid är det viktigt att inte handla slentrianmässigt, så att grupperingen i stället får en negativ effekt på elevens självtillit och arbetslust. Alla elever behöver känna, att skolarbetet är meningsfullt och leder framåt.

"För elevernas motivation är det centralt att de har näraliggande, klara etappmål att sträva emot. De måste kunna uppleva att de lyckas, lär sig något och gör framsteg."
(Lgr 80 s 29)

En slentrianmässig undervisning utan plan och mål är ofta det största hindret för en elev att komma framåt. Specialläraren har givetvis ett speciellt ansvar då det gäller att se till att alla elever går framåt. Forskning visar, att medveten metodik ger resultat för *alla* elever.

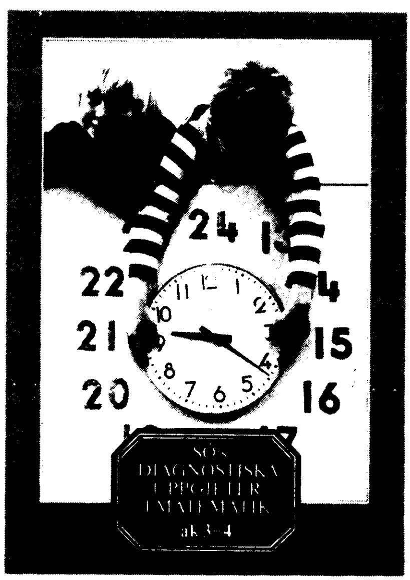
GRUNDLÄGGANDE FÄRDIGHETSTRÄNING

Läroplanen betonar på flera ställen, att den grundläggande färdighetsträningen i att tala, läsa, skriva och räkna måste bedrivas målmedvetet och konsekvent.

"Brister i dessa färdigheter förstärker skolsvårigheterna på högre stadier. Stadiegränser får inte utgöra gräns för färdighetsträningen." (Lgr 80 s 53)

Det är en uppgift även för *skolledaren* att se till, att kontinuiteten i undervisningen inte blir eftersatt vid stadieövergångarna. SÖ:s DIAGNOSTISKA UPPGIFTER kan vara en bra hjälp i det fallet. Genom uppgifterna kan man följa elevens kunskapsutveckling på olika moment inom den grundläggande matematikundervisningen. Uppgifterna är direkt kopplade till kursplanen i matematik och ger snabbt besked om inom vilka moment en elev saknar tillräcklig grund för att arbeta vidare. Handledningen anvisar dessutom vägar för att komma tillrätta med elevens svårigheter. Det är dock omöjligt att med generella anvisningar klara enskilda elevers problem – det måste bli ett lokalt ansvar inte minst för *specialläraren*. Det finns gott om materiel och hjälpmedel att ta till men det är ofta svårt att välja den för en speciell elev lämpligaste åtgärden.

Färdighetsträningen måste varieras och göras meningsfull. Genom att problemlösning av vardagskaraktär betonas får den grundläggande färdighetsträningen mening och innehåll. Ett stort problem i dagens undervisning är nämligen, att många elever slentrianmässigt tar sig igenom ett stort antal uppgifter i läroboken utan annat mål än att komma framåt i boken och få samma svar som i facit.



HUVUDRÄKNING OCH ÖVERSLAGSRÄKNING

En stor del av den matematik man använder sig av i det dagliga livet är av typen huvudräkning och överslagsräkning. I och med att räknetekniska hjälpmedel och datorer tar över de flesta komplicerade beräkningarna i morgondagens samhälle ökar betydelsen av att snabbt kunna göra enkla beräkningar och överslag i huvudet. Kursplanen i matematik betonar också på flera ställen dessa moment och de står även upptagna i målet. Den förskjutning uppåt i årskurserna som gjorts beträffande algoritmräkning skall därför kompenseras med en ökad satsning på huvudräkning och problemlösning.

En orsak till att huvudräkningen försummas i dagens undervisning är den stora bundenheten till läromedlet som fortfarande finns. Givetvis måste läromedlet ordentligt uppmärksamma huvudräkningen, men framför allt gäller det att läraren tar sitt ansvar härvidlag. Det räcker inte att slentrianmässigt anslå viss tid då och då till huvudräkning av typen "frågor och svar". Vid en sådan undervisning får dels de elever, som bäst behöver träningen, aldrig tid att lösa uppgifterna och dels leder uppgifterna oftast inte framåt. En rätt bedriven huvudräkningsträning måste vara både systematisk och individualiserad. Scheman och hjälpmedel för att bedriva huvudräkningsträningen på det sättet finns utarbetade.

TRÄNING I HUVUDRÄKNING

Steg 1a enligt schemat s 38
NÄMNAREN 1 1980/81

Namn: ....

....

Klass: ....

Skriv svaren i spalten längst ut till höger.

För in tid och antal rätt i tabellen nedan.

Klipp därefter bort svaren.

Låt några veckor gå.

Upprepa övningen med ett par veckors mellanrum tills Du genomfört den felfritt två gånger i följd.

	Datum	Tid (min)	Antal rätt
A			

	Uppgift	F	E	D	C	B	A
1.	$6 \cdot 4 + 6$						
2.	$9 \cdot 9 + 9$						
3.	$6 \cdot 7 + 8$						
4.	$6 \cdot 6 + 6$						
5.	$7 \cdot 4 + 5$						
6.	$8 \cdot 8 + 7$						
7.	$9 \cdot 4 + 7$						
8.	$6 \cdot 8 + 3$						
9.	$7 \cdot 9 + 8$						
10.	$9 \cdot 8 + 9$						
11.	$7 \cdot 7 + 5$						
12.	$8 \cdot 4 + 9$						

Forskning visar, att eleverna utvecklar ett mycket större antal olika tankeformer vid huvudräkning än läraren har en aning om. Så länge det rör sig om tankeformer som kan vidareutvecklas och som tyder på att eleverna har ett klart talbegrepp är det givetvis inget som behöver ändras på. Många elever utnyttjar dock tankeformer som leder till att alltför många deluträkningar måste administreras i korttidsminnet samtidigt.

För många elever är de fyra räknesätten kopplade till algoritmuppställningar, vilket leder till att eleverna även vid huvudräkning försöker använda sig av uppställningar.

EXEMPEL

En elev räknar 207 – 8 i huvudet och konstaterar att 7 – 8 "går inte" och lånar från tvåan över nollan men klarar inte att hålla detta i korttidsminnet utan svarar 299.

Algoritmuppställningen i huvudet leder också till att eleverna utför subtraktionerna åt fel håll och får det orimliga svaret 196 på uppgiften 401 – 397. Detta visar ju också en bristande taluppfattning.

Även om de flesta eleverna får rätt svar på den sistnämnda uppgiften visar undersökningar, att många här använder en onödigt komplicerad metod. Eleverna ser inte att de båda talen ligger nära varandra utan börjar med att exempelvis konstatera att 401 – 300 blir 101, 101 – 90 blir 11 och får sedan svaret genom att minska med 7.

Detta och många andra exempel visar vikten av att bygga upp talbegrepp och huvudräkningsmetoder på ett systematiskt sätt. Undervisningen i huvudräkning måste innehålla samtal och diskussioner med eleverna om olika metoder och tankeformer, så att eleverna kan göra goda metoder till sin egendom. Eftersom människor har många olika uppfattningar och "bilder" av tal måste läraren vara lyhörd för elevernas idéer och låta eleverna successivt bygga upp en säkerhet i huvudräkning.

Undervisningen måste också innehålla konkret träning i positionssystemets uppbyggnad inte bara vad gäller ental och tiotal utan också med hundratal och tusental. En elev som tillräckligt arbetat med konkreta positionsövningar har t ex den inbördes storleken av talen 401 och 397 helt klar för sig och får inte det orimliga svaret 196 på subtraktionen i exemplet ovan.

PROBLEMLÖSNING

Problemlösning är ett nytt huvudmoment i Lgr 80. Kursplanen betonar i målavsnittet i första hand förmåga att lösa sådana matematiska problem, som vanligen förekommer i vardagslivet. Sådana problem ryms inte i tillräcklig omfattning inom de övriga huvudmomenten, trots att problemlösning givetvis skall förekomma inom alla huvudmoment.

Ofta måste läromedlets mer eller mindre konstruerade och tillrättalagda uppgifter kompletteras med problem från närmiljön och med problem av mera öppen karaktär, där svårigheten inte enbart består i att välja rätt räknesätt. Genom att ofta tillämpa ett undersökande arbetssätt även i matematik får undervisningen en annan dimension. Det eleverna lär sig genom att utnyttja alla sina sinnen och genom en ständig växelverkan mellan aktivt handlande och intellektuell bearbetning blir deras egendom på ett helt annat sätt än det som bara "pluggats" in.

Matematiken skall för eleverna vara *"en källa till nytta och glädje"*. (Lgr 80, s 99). Även om nyttoaspekten betonas hårt får man inte glömma bort, att lek, knep och knåp och matematiska gåvor är naturliga inslag i undervisningen. Matematik som ett glädjeämne bygger *både* på att man lyckas och har roligt.

Såsom tidigare berörts har algoritmräkningen i Lgr 80 tonats ner och skjutits uppåt i årskurserna. Även i övrigt har förändringar gjorts i stoffvalet i förhållande till Lgr 69. Många av dessa förändringar har dock redan gjorts i läromedlen och i undervisningen. Förändringarna innebär främst att mycket av det formella stoff och den terminologiexercis som infördes i och med "den nya matematiken" nu försvinner.

Ett annat utmärkande drag är att moment av gymnasieförberedande karaktär mer eller mindre kan undvaras utom för de elever som behärskar grundläggande moment och siktar på matematikintensiva gymnasielinjer. Kursplanen är inte uppdelad efter allmän och särskild kurs utan istället betonas en mycket konkret och praktiskt inriktad matematik för de flesta elever och i varje fall för alla, som valt allmän kurs.

Huvudmomenten *Reella tal* och *Algebra och funktionslära* har gjorts väsentligt mindre ambitiösa och rensats på stoff som inte används i vardagslivet i någon större utsträckning.

Kursplanen tonar ner *procenträkning* på mellanstadiet. Momentet är dock av vardagsnära karaktär och har en hög prioritet i det stoff som är *önskvärt* på mellanstadiet. Begreppet procent kan diskuteras tidigt t ex vid samtal i orienteringsämnen.

Geometrin har en praktisk, empirisk och konkret inriktning. Endast för vissa elever har den formaliserade geometrin någon större betydelse och då som grund för vidare studier.

Det stoff som tillkommit är främst av vardagsnära karaktär inom huvudmomentet *Problemlösning*.

Alla elever bör också redan tidigt i anslutning till undervisning om

SKOLÖVERSTYRELSEN

Anvisningar

till standardprov i

matematik

årskurs 9

Allmän och särskild kurs

Årskurs	Provperiod	Sista dag för insändning av resultatblanketter och provhäften för samtliga elever
9	1982-09-20--1982-10-29	1982-11-04

2905-01 ht 82

samhället orienteras om *datorernas* roll på gott och ont i de förändringar som förestår. På högstadiet ges en utförligare inblick i området i samarbete med samhällskunskap men inriktningen är fortfarande datorernas roll i samhället. Tillämpningarna skall i första hand förekomma inom de naturvetenskapliga och samhällsorienterande ämnesområdena.

I de nya standardproven för årskurs 9 tillåts *miniräknare* som hjälpmedel på ett av fyra olika delprov. Det gäller problemlösning med uppgifter av vardagsnära karaktär utan tillrättalagda talvärden. Det är alltså avsikten att datorer och miniräknare skall kunna användas i undervisningen, och att man därigenom skall kunna tillföra undervisningen nytt intressant stoff direkt från vardagen. Vid sådana uppgifter är miniräknaren ett hjälpmedel som i dagens skola inte kan undvaras.

Miniräknaren får dock inte användas urskillningslöst. Eleverna skall *även* ha säkerhet i räkning utan hjälpmedel och måste lära sig att inte använda miniräknaren vid bagatellartade huvudräkningsuppgifter. Systematisk träning i huvudräkning och ingen ständig tillgång till miniräknare leder efter hand till att eleverna lär sig använda rätt hjälpmedel vid rätt tillfälle. Det gäller alltså att lära sig utnyttja miniräknarens alla fördelar utan att för den skull bli slav under densamma.

PROBLEMLÖSNING

Problemlösning är det första och viktigaste av huvudmomenten i den nya kursplanen. Eftersom det dessutom är ett *nytt* huvudmoment kommenteras det ganska utförligt här.

Vad menas med ett matematiskt *problem?* En vanlig tolkning är att det är en matematisk uppgift, som leder till problem, då man försöker lösa den. Ett matematiskt problem skulle alltså nödvändigtvis vara krångligt eller svårlöst för en vanlig elev. Så har det ju också alltför ofta varit i skolans matematikundervisning.

I Lgr 80 används ordet problem inte i den betydelsen. Med problem menas här en *frågeställning som man vill lösa och som kan lösas med en matematisk modell, som inte är given.* Modellen kan ibland vara mycket enkel, ibland mera komplicerad. Det som är ett problem för en elev kan givetvis vara en automatiserad rutinuppgift för en annan. Ett viktigt mål med undervisningen i problemlösning är att göra eleverna förtrogna med enkla men generella problemlösningsstrategier, så att de flesta matematiska vardagsproblem man stöter på efter hand blir välkända rutinuppgifter.

Det är just *problem som förekommer i vardagslivet* som i första hand betonas i Lgr 80. En vanlig invändning mot att införa sådana problem i matematikundervisningen är, att vuxna människors vardagsproblem inte är vardagsnära för eleverna. Det är förstås en mycket dålig ursäkt för att inte arbeta med vardagsproblem i matematik.

Däremot kan man påstå att det finns två typer av vardagsproblem, som vi bör arbeta med i skolan:

- ☐ dels problem och problemsituationer som vi kan räkna med är kända och verklighetsnära för (de flesta) elever
- ☐ dels sådana problem, som troligen inte är så välkända för eleverna, men som vi vill göra dem förtrogna med eftersom grundskoleutbildningen i första hand är en utbildning för rollen som vuxen medborgare.

Båda områdena har ofta försummats eftersom skolan främst sysslat med matematiskt inriktade problemtyper.

VILKA PROBLEM ÄR VARDAGSNÄRA FÖR ELEVERNA?

Att arbeta med vardagsnära problem innebär ofta att man måste frigöra sig från läroboken i viss utsträckning. Många lärare har med glädje upptäckt, att det inte alls är så svårt att lämna den invanda "vända-sida-i-boken"-strategin och ibland ha helt andra utgångspunkter i matematikundervisningen. Redan i första årskursen kan eleverna tränas i problemlösning genom att de får skriva och illustrera matematiksagor. Eleverna lär sig snart att "klä" matematiska utsagor i ord och visar en oanad kreativitet. På så sätt tränas viktiga grundläggande färdigheter – inte bara i matematik. Efter hand kan eleverna också göra matematikproblem åt varandra. Det är en viktig färdighet som måste tränas och utvecklas under hela skoltiden.

Då man gör matematikundervisningen konkret gör man den också verklighetsnära för eleverna. Det är inte svårt att spela upp eller arrangera konkreta problemlösningssituationer i skolan. Sådana kan omfatta allt från att man "leker affär" (inte bara på lågstadiet) till att man skall tapetsera, måla och inreda ett eget rum. Man får heller inte glömma de vardagsnära problem som ständigt uppstår vid arbetet i skolan eller som eleven möter på sin fritid.

NÅGRA EXEMPEL

- ☐ Vad kommer klassfesten att kosta per elev?
- ☐ Hur mycket tjänar vi på att baka bullarna själva?
- ☐ Hur stor del av dygnet (året) är vi i skolan?
- ☐ Hur mycket tyg går det åt för att sy blusen (skjortan)?
- ☐ Hur länge måste jag spara för att kunna köpa en...?
- ☐ Vad kostar det att ha en...?
- ☐ Hur många gånger större än Sverige är...?
- ☐ Hur lång tid tar det att åka till...?

Man måste givetvis ha klart för sig att alla problem av denna typ inte är intressanta för alla elever men också att det går att finna problem som intresserar var och en.

VILKA MATEMATISKA VARDAGSPROBLEM MÖTER MAN SOM VUXEN?

Under en normal arbetsdag ställs de flesta människor inför hundratals problem av matematisk natur – ofta utan att tänka på det. Vissa personer kan genom erfarenhet, begåvning eller utbildning lösa de här problemen ganska lätt, andra kan det inte. De som inte kan får svårt att ta tillvara sina rättigheter och att uppfylla sina skyldigheter i samhället. De har ofta även begränsade möjligheter att välja arbete eller att planera för sitt liv. De saknar med andra ord *brukbara kunskaper i matematik*.

Så här kan ett antal vardagsproblem se ut för en vanlig medborgare:

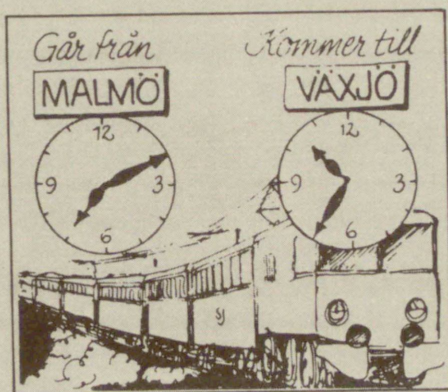
EXEMPEL

Antag att jag skall ta mig hemifrån till en ny arbetsplats under min första arbetsdag. Onekligen är det då speciellt viktigt att komma i tid. Jag vill ju behålla jobbet. För att klara av detta måste jag kvällen före tänka efter vilket pendeltåg (vilken buss osv) jag bör ta, och när jag i så fall måste stiga upp. Detta är ett komplicerat matematiskt problem och många löser det säkert genom att under en tid pröva sig fram. I problemet ingår en hel del uppskattningar av tid, tolkning av tidtabeller samt ett antal additioner och subtraktioner.

Men sådana triviala uppgifter kan väl alla klara? Det är väl inget för skolans matematikundervisning?

De som kan tror ofta så, men att inte ens hälften av eleverna i årskurs 7 kunde klara följande exempel på SÖ:s diagnostiska uppgifter 1981 ger en helt annan bild av verkligheten:

98



Hur många timmar och minuter tar det för tåget att gå från Malmö till Växjö?

Svar: ____________

Både svenska och utländska undersökningar visar för övrigt på stora problem med vardagsmatematiken även hos vuxna.

EXEMPEL

Vid stationen (hållplatsen) får jag ett nytt problem. Skall jag köpa lösa biljetter, ett rabatthäfte eller ett månadskort? Kanske är det så att det skulle löna sig att köpa en bil och samköra med en eller flera arbetskamrater. Hur skall jag i så fall planera in det bilköpet i min långsiktiga hushållsekonomi? Hur kommer t ex ett eventuellt bilköp att påverka min självdeklaration? Får jag göra avdrag för bilresorna till jobbet, och hur påverkar räntan på avbetalningarna min marginalskatt?

Av det här exemplet framgår att vardagliga problem som till en början verkar innehålla endast enkla beäkningar oftast kan byggas ut till relativt svåra problem med flera lösningsalternativ och flera acceptabla svar.

På det här temat går det att göra ett obegränsat antal uppgifter som kan klassificeras som vardagliga problem. Under en normal dag kanske jag besöker banken eller posten, handlar mat, kläder eller något annat. Jag kanske syr kläder eller gör något i min lägenhet. Jag lagar mat, läser tidningen och tittar på TV. Hela tiden utövar jag också ma-

tematiska aktiviteter i form av uppskattningar, överslag, mätningar och beräkningar. Det är den här typen av problem som skall prioriteras enligt Lgr 80. Anledningen till denna prioritering är förstås främst, att alla människor behöver kunna lösa den här typen av problem. Dessutom är det så att problemlösning av detta slag ger mening åt matematikundervisningen för en stor grupp elever, som ofta slentrianmässigt tar sig igenom matematikboken utan att ägna sig åt egentlig tankeverksamhet.

ANDRA TYPER AV PROBLEM

Det andra problemområdet som nämns i Lgr 80 är matematik som eleverna har *användning för vid studier i andra ämnen*. Självklart är det så att de flesta ämnen i grundskolan omfattar viktiga vardagskunskaper. Ofta är dessa vardagskunskaper kopplade till färdigheter i svenska och matematik. Det vore ur elevernas synvinkel olyckligt om det i dessa fall inte sker en integration mellan ämnena. I samhällskunskap, geografi, hemkunskap och slöjd för att inte nämna de naturvetenskapliga ämnena krävs ofta mycket goda färdigheter i matematik.

Detta innebär inte att man skall försöka skapa en konstlad samverkan mellan en grupp av ämnen. Däremot är det så att en hel del matematiska problem *uppstår* naturligare i andra ämnen än i ämnet matematik. Detsamma gäller motivationen för och behovet av en viss matematisk färdighet. Behovet av geometriska kunskaper upptäcker man ofta på ett naturligt sätt i såväl trä-, metall- som textilslöjd. Bråkräkning förekommer på ett naturligt sätt i hemkunskap liksom tillämpning av olika enheter och enhetsbyten. I samhällskunskap och geografi finner man diagram av olika slag liksom stora tal och olika typer av avrundningar. Ett utnyttjande av sådana naturliga problemställningar skulle sannolikt betyda en hel del för elevernas möjligheter att lära sig såväl en tillämpad matematik som matematikens roll i samhället.

En samverkan mellan matematik och andra ämnen är ganska lätt att genomföra på låg- och mellanstadierna. Ett arbete med den här synen skulle på högstadiet kunna innebära, att man t ex under en studiedag gör en inventering av hur och när viktiga matematiska moment kommer in i övriga ämnen. Därefter bestämmer man sig för att vid några tillfällen under läsåret t ex vid temastudier, behandla en problemtyp gemensamt. Antingen kan därvid problemet ställas på en annan lektion och lösningsmetoden utarbetas under matematiklektionerna, eller också kan man inom ämnet matematik ta fram en modell som sedan exemplifieras och tillämpas inom det andra ämnet. Ett exempel på den senare modellen skulle kunna vara att man, sedan man arbetat med ränta på ränta i ämnet matematik, följer upp hur en avbetalning går till eller hur snabbt befolkningen expanderar i vissa länder.

Vanliga problem från arbetsliv och fritid hör också till det som bör tas upp i undervisningen. Här kan man arbeta på flera olika sätt. Många lärare har nått bra resultat genom att låta elever och föräldrar tillsammans göra matematiska uppgifter på sådant, som man under en dag eller en vecka stött på i hemmet, på fritiden och i arbetslivet.

Det är givetvis inte enbart praktiskt inriktade problemtyper som skall lösas i grundskolan. En hel del elever skall efter grundskolan studera mera matematik, som de i sin tur behöver för andra ämnen och kanske för ett kommande yrke. Därför är det nödvändigt att arbeta även med de matematiska modellerna i sig. Visst utrymme måste därför ägnas åt mera *matematiskt inriktade problemtyper* för vissa elever främst på särskild kurs. Det bör alltså ges utrymme åt matematiska bevis, funderingar kring de reella talen, lösningar av algebraiska problem etc. Dessa typer av problem bör fokuseras till sådant stoff, som underlättar elevernas förståelse för senare matematiska sammanhang. Det bör emellertid påpekas, att detta skall ske med stor urskillning, och att de elever som ännu inte har vardagsfärdigheter inte bör arbeta med ett avancerat matematiskt stoff.

RUTINUPPGIFTER OCH FLERSTEGSPROBLEM

Barns attityder till matematik utvecklas tidigt och redan i 11–12-årsåldern har de bestämt sig för att "tycka om" eller "inte tycka om" ämnet. Därför är det viktigt att man från början ägnar en del av tiden åt problemlösning, så att den viktigaste och roligaste delen av matematiken uppmärksammas. Efter hand bör eleverna få en vana vid att lösa anpassade problem och inte bara erbjudas tillämpningsuppgifter. Det ger säkerhet och ökad motivation. Många vardagsproblem bör vara så väl inövade, att de kan lösas mer eller mindre automatiserat.

☐ Hinner jag med tåget som går 14.08?

☐ Räcker pengarna till för att både gå på bio och köpa en tidning?

☐ Hur mycket skall jag ta, om jag bara vill baka en halv sats?

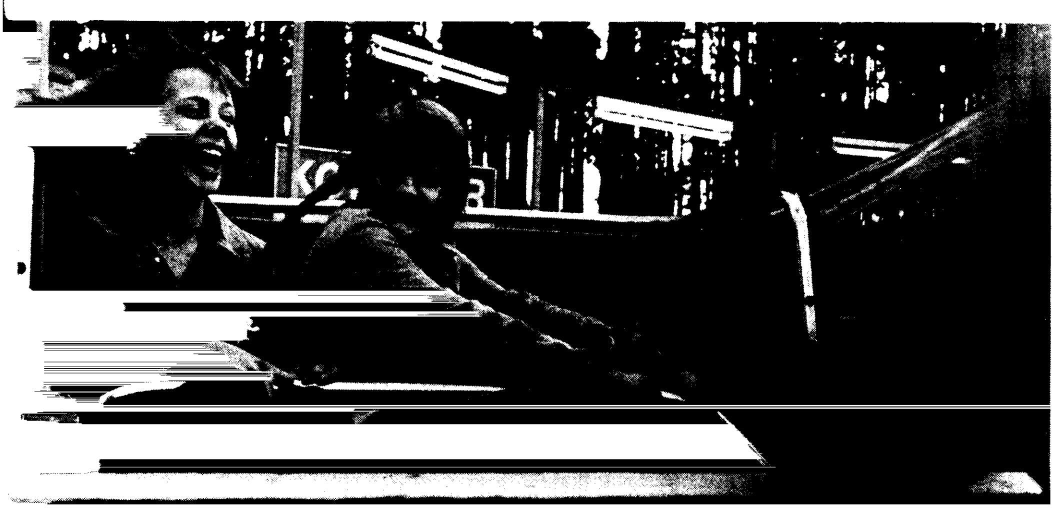
Vardagsproblem i likhet med ovanstående skall självklart inte leda till långa funderingar eller till att man ger upp. Målet bör i stället vara att eleverna löser uppgifterna med *rutinkunskaper,* gärna i huvudet. Det måste därför bli en strävan i undervisningen att ge eleverna goda tankeformer för vanligen förekommande problem och en så stor erfarenhet av sådana, att de med lätthet kan finna rätt modell, t ex rätt räknesätt.

När en elev har nått en viss färdighet och fått en viss erfarenhet av problemlösning kan det vara dags att även introducera *flerstegspro-*

blem, d v s problem som inte går att lösa med en enkel beräkning utan som förutsätter en kombination av två eller flera *kända* modeller. Hit kan man också räkna de problem som inte har någon entydig lösning utan där lösningen kan bero på ett personligt val eller någon annan omständighet, t ex "Vad skulle du göra om du fick 50 kronor att roa dig för på Gröna Lund?"

En tredje typ av problem är de som inte går att lösa med hjälp av *modeller som eleverna tidigare använt.* Den typen av uppgifter förutsätter en stor matematisk säkerhet och bör förbehållas de mest intresserade eleverna. Ett undantag härifrån är sådana problem som man kan lösa i grupp genom att pröva sig fram eller problem som används som introduktion till ett nytt moment eller av en ny modell.

Genom att hålla isär de olika typerna av problem kan man lättare vidta de differentieringsåtgärder, som ibland behövs. Erfarenheten visar dock, att man vid arbete med praktiska vardagsproblem når bra resultat genom samarbete i grupper av varierande sammansättning. På så sätt kan man också bidra till att nå en del av läroplanens övergripande mål.



DE OLIKA LEDEN I EN PROBLEMLÖSNING

Under huvudmomentet problemlösning i Lgr 80 kan man läsa att det ofta krävs tre steg för att lösa ett problem:

- ☐ att förstå problemet och ha en lösningsmetod,
- ☐ att klara de numeriska beräkningar som krävs,
- ☐ att analysera, värdera och dra slutsatser av resultatet.

Tyvärr har dessa olika aspekter av en problemlösning ofta försummats i undervisningen. Alltför stor uppmärksamhet har ägnats åt själva beräkningssteget. Ofta har det t o m varit så att eleverna inte ens har behövt ta ställning till vilka räknesätt som bör användas. Detta har nämligen framgått av rubriken.

Att lösa ett problem i vardagen kräver mera än så. I en tågtidtabell står det t ex inte: Du skall resa med ett tåg till Stockholm som är framme i så god tid, att du kan börja ett sammanträde kl 9.30. I butiken ställs inte frågan: Ett kilo rostbiff kostar 92 kronor, hur mycket kostar 4 hekto? Inte finner man heller en rubrik som säger att det är lämpligt att multiplicera.

För att kunna lösa de här två problemen måste man själv formulera dem. Därefter måste man ta fram en modell för hur beräkningen bör ske. Man kan inte lista ut räknesättet genom att se i facit och pröva.

Möjligen kan man – som allt fler gör – enbart lita på experter. Detta är förstås ingen bra metod. Därför gäller enligt Lgr 80 att man måste ägna betydligt mera tid åt detta första steg i problemlösning än nu. Att tala matematik, d v s diskutera olika modeller och tankeformer samt att bygga upp ett språk för problemlösning måste bli ett viktigt delmoment.

Detta moment börjar för övrigt redan före själva problemlösningen. I motivationsfasen måste man oftast diskutera, förklara nya ord och på andra sätt få eleven att uppleva problemsituationen.

EXEMPEL

En klassfest skall ordnas och skilda inköpsalternativ diskuteras. Några elevgrupper åtar sig att räkna ut hur mycket de olika alternativen kommer att kosta.

Det är ganska vanligt att en elev vill ha hjälp av läraren genast, då ett problem skall lösas. Eleven ger upp och försöker inte ens ta itu med uppgiften. Det är ett ganska säkert tecken på att problemsituationen inte är helt klar. Då man nått därhän kan eleven t ex formulera problemet med *egna ord*, och bara det är ett stort steg mot en lösning.

EXEMPEL

Jag skall ta reda på hur mycket rostbiff kostar per kilo. Jag räknar ut hur många kilo rostbiff vi behöver köpa, om var och en skall ha 1 ½ hg. Sedan skall jag räkna ut vad varje portion kostar och vad rostbiffen kostar totalt.

När problemet är formulerat gäller det att försöka få den matematiska situationen klar för sig: Vilken väg skall jag gå för att komma fram till en lösning? Har jag löst något liknande problem? Vilka faktauppgifter har jag redan? Vilka av dessa behöver användas för att lösa problemet? Saknas några uppgifter? Vad kan jag göra med de uppgifter jag redan har? Vilket räknesätt ska jag använda?

I denna fas är det särskilt viktigt att eleven får vara kreativ och söka olika vägar. Det är också viktigt att göra ett enkelt överslag, då en lösningsmetod börjar klarna.

EXEMPEL

Vi är 23 elever och då behöver vi mer än 23 hg rostbiff. Om vi köper 3 kg kostar det 3 gånger mer än 1 kg – det blir omkring 300 kronor.

När man väl har hittat en lämplig matematisk modell vidtar beräkningen. Det är viktigt att de beräkningar som ingår i problemlösningen anpassas till den enskilde elevens förmåga. En god utgångspunkt för individualisering av problemlösning kan vara att alla elever ges i princip samma problem, men att de beräkningar som ingår anpassas till olika elevgruppers förmåga. Våra elever lär sig onekligen problemlösningsmetoder effektivare och blir mer motiverade om de kan utföra alla beräkningar som behövs. Troligen är det också så att eleverna lär sig mera om problemlösning genom att lösa flera numeriskt sett enkla uppgifter än ett fåtal numeriskt svåra. Även uppgifternas art måste dock ofta individualiseras.

Då man har gjort beräkningen vid en problemlösning är inte problemet färdigbehandlat. Man måste nu analysera, värdera och dra slutsatser. I detta ingår också att man kontrollerar om lösningen är rimlig och om den är ett svar på det ställda problemet. I exemplet ovan visar det sig kanske, att rostbiffen blir för dyr i förhållande till klasskassan eller att de flesta elever egentligen föredrar en billigare rätt. Man måste också fundera över, hur resultatet skall användas eller presenteras.

Givetvis är det så att man varken kan eller behöver penetrera *varje* problem på detta sätt. Inte heller går alla problem in i samma mönster. Det är dock viktigt att man allt som oftast och redan tidigt uppmärksammar eleverna på problemlösningens olika faser och på hur man kan bygga upp olika strategier för att lösa problem. Ibland kan det därvid vara lämpligt att också använda matematiska gåtor och nötter, som anpassas och konkretiseras på lämpligt sätt.

PROBLEMLÖSNING OCH BARNENS UTVECKLING

En förutsättning för att man skall kunna tala matematik är att barnen är förtrogna med den miljö problemen är hämtade ifrån. Känner man inte miljön blir det svårt att såväl tolka problemet som att analysera det eller göra en rimlighetskontroll. Detta vållar ofta stora problem i skolarbetet. Dels blir de numeriska beräkningarna ibland svåra, då man väljer problem från verkligheten, dels är den vuxnes värld ofta för komplicerad för barnet. Barnet har åtminstone en mycket begränsad erfarenhet av den.

Av dessa skäl måste man i undervisningen ibland manipulera något med beskrivningen av verkligheten, åtminstone under låg- och mellanstadierna. Detta behöver emellertid inte innebära någon nackdel på sikt. Poängen är ju att eleven lär sig vissa generaliserbara principer. Detaljerna blir oftast enklare, när man senare fått erfarenhet.

En tumregel för hur man kan bygga upp bra problem för olika åldrar enligt fördelningen i Lgr 80 är

- ☐ att under lågstadiet hålla sig till sådana problem som finns i eller i närheten av klassrummet. Genom att bygga upp en butik eller en "verkstad" i klassrummet kan man få en konkret bild av de problem man arbetar med och träna ett problemlösningsspråk i anslutning därtill,

- ☐ att under mellanstadiet arbeta med sådana problem i närmiljön, som man redan har eller håller på att skaffa sig erfarenhet av. Här finns för övrigt goda möjligheter till samverkan med andra ämnen. Att ta reda på hur det fungerar i butiken, på posten, på banken etc är exempel på lämpliga arbetsområden,

- ☐ att på högstadiet börja introducera även sådana problem, som man inte har nära inpå sig. Det kan gälla naturvetenskapliga problem, energiproblem, statistik för riket eller för världen, enkel kommun- eller nationalekonomi, vår ojämlika värld etc. Även arbete med hypotetiska problem kan förekomma.

PROBLEMLÖSNINGEN OCH SPRÅKET

Av naturliga skäl kommer en hel del problem såväl i skolan som i samhället att ges i skriftlig form. Detta leder självklart till svårigheter för speciella elevgrupper och under de tidigare årskurserna. Det är viktigt att den lärare som undervisar i matematik är medveten om dessa problem. Det speciella språk som ofta används i matematik gör inte situationen bättre. Speciellt utsatta är dels de lässvaga barnen och dels de stora invandrargrupper, som ännu inte behärskar matematikämnets inlärningsspråk.

Under matematiklektionerna gäller det därför att eliminera onödiga språkliga svårigheter genom att diskutera problemen och bygga upp en god matematisk språkförståelse. Detta arbete är mycket viktigare för problemlösningsförmågan än de flesta anar och måste givetvis förekomma även i andra ämnen än matematik.

EXEMPEL

- ☐ **Laborativa övningar för att *introducera och befästa begrepp* som t ex billigare–dyrare, längre–kortare, fler–färre, trubbig–spetsig, area–volym.**
- ☐ **Konkreta handlingar med matematisk innebörd beskrivs muntligt (och eventuellt skriftligt). Det kan t ex ske i form av att man "leker affär" i skolan eller utför konstruktionsövningar. Det gäller både att *utföra en handling som beskrivs och beskriva en handling som utförs*.**
- ☐ **Författande av matematiksagor, matematikhistorier och matematikuppgifter liksom övningar i att tolka sådana, dvs olika övningar i att *överföra matematiska tankar till tal (skrift) och tal (skrift) till matematiska tankar*.**
- ☐ **Träning i att *uttrycka matematiskt kodspråk i tal och skrift liksom att översätta tal och skrift till matematiskt kodspråk*. Det kan gälla så enkla saker som att t ex på olika sätt i tal (och skrift) beskriva uttryck i stil med**
  $7 + 8 = 15$
  $3 \cdot 1{,}35 = 4{,}05$
  $9/6 = 1{,}5$ osv
  samt att från tal och skrift åstadkomma sådana enkla koder.

Det är också viktigt att påpeka, att den formella behandlingen och en korrekt terminologi inte får bli ett självändamål vid problemlösning. *Förståelsen och språket måste komma i första hand. På längre sikt* måste strävan vara att göra såväl terminologi som formell behandling så korrekt som möjligt men formalism får inte bli ett hinder i grundskolans medborgarutbildning.

GRUNDLÄGGANDE ARITMETIK

"Undervisningen i aritmetik skall utgå från och förankras i vardagsnära problem och för eleverna konkreta situationer."

Så inleds kursplanens huvudmoment *Grundläggande aritmetik*. Observera att det står *för eleverna* konkreta situationer. Det betyder att eleverna inte alltid kan konfronteras med problem som är direkt tagna från verkliga livet. Sådana problem innehåller dessutom ofta en alltför svår aritmetik, åtminstone för låg- och mellanstadieelevernas del. Det gäller därför att välja lämpliga problem och bevara den naturliga prägeln, samtidigt som aritmetiken anpassas till respektive elevs kunskaper. Att ge eleverna problem med beräkningar som vissa elever ännu inte behärskar är ett vanligt misstag. Sådant försvårar inlärningen av både problemlösning och aritmetik.

Samtidigt som eleverna ges rikliga möjligheter att tillämpa sina aritmetiska färdigheter vid problemlösning måste det ske en systematisk inlärning och färdighetsträning i aritmetik. Denna träning bör både syfta till att *öka elevernas säkerhet* i olika typer av beräkningar och att *förbättra snabbheten.*

- ☐ En elev som är osäker på en beräkning och som därför har en hög felprocent tappar snart självförtroendet, speciellt om beräkningen ingår i en problemlösningssituation och kanske måste upprepas flera gånger.
- ☐ En elev som är alltför långsam vid aritmetiska beräkningar behöver ofta lägga så stor tid och så stor uppmärksamhet på själva beräkningsmomenten, att uppmärksamheten på själva problemet splittras. Detta begränsar möjligheterna att utveckla förmågan i problemlösning.

"En elev får inte börja med ett nytt moment utan tillräcklig grund från tidigare moment." (Lgr 80, s 99)

Detta citat gäller i allra högsta grad momentet grundläggande aritmetik. Det innebär att en elev inte skall behöva arbeta med ett visst moment, t ex en svårighetsgrad inom ett räknesätt, bara för att eleven går i en viss årskurs. Kursplanens hela uppläggning betonar ju detta. I stället skall man vara noga med att ingen elev arbetar med ett stoff, som han eller hon saknar förkunskaper för. Ingen skall heller behöva arbeta på en för låg nivå, även om det är ofarligare. Ett arbete enligt de här principerna kräver en noggran planering och en god individualisering. För att lyckas med detta krävs i sin tur en successiv diagnostik så att man känner till respektive elevs aktuella kunskaper.

ARITMETIKENS UPPBYGGNAD

En subtraktion som 342 − 167 eller en multiplikation som 87 · 46 är lätt att utföra för den som kan. För en elev som ännu inte behärskar uppgifterna är det emellertid en mängd komplicerade steg att ta. Enligt PUMP-projektet kräver multiplikationen ovan bl a följande förkunskaper:

☐ Att man klarar de båda beräkningarna 6 · 87 och 4 · 87. Under slutet av höstterminen i årskurs 4 räknade enligt en undersökning i slutet av 1970-talet ca 55% av eleverna fel på minst var *fjärde* uppgift av det här slaget. Samtidigt gjorde ca 30% av eleverna vid samma tidpunkt fel på minst var fjärde uppgift av typen 2 · 34. Dvs multiplikation utan minnessiffra.

Av detta kan man dra den viktiga slutsatsen att många ofta hastar vidare i kursen utan att ta reda på vad eleverna faktiskt kan. I det här fallet är det uppenbarligen en stor grupp elever, som inte riktigt förstår multiplikationsuppställningen. Samtidigt har vi en nästan lika stor grupp elever som visserligen behärskar de enklaste uppställningarna men som inte behärskar minnessiffror.

☐ Att man behärskar vissa kombinationer i multiplikationstabellen, i det här fallet 6 · 7, 6 · 8, 4 · 7 och 4 · 8, samt att man dessutom kan addera i huvudet en minnessiffra till resultatet, i det här fallet 6 · 8 + 4 och 4 · 8 + 2. I årskurs 4 har enligt PUMP-projektet ca 50% av eleverna problem med multiplikationstabellen. Detta är en mycket hög procent jämfört med länder på kontinenten. Dessutom är det faktiskt så att i *genomsnitt* var fjärde uppgift av typen 84 · 46 blir fel, om en elev missar var femtonde kombination i tabellen.

För räknesätten subtraktion och division är svårigheterna i stort sett lika stora som för multiplikation. Vad gäller subtraktion kan de flesta felen direkt härledas till det faktum, att eleverna inte behärskar subtraktionstabellen.

TABELLERNA

Additions-, subtraktions-, multiplikations- och divisionstabellerna måste behärskas snabbt och lätt. Alltför många barn bestämmer 6 · 7 eller 13 − 7 med hjälp av fingrar eller andra omständliga metoder. Detta hindrar dem från att med säkerhet klara beräkningar i huvudet eller i samband med en uppställning. Det kan därför inte nog betonas vikten av att eleverna behärskar de tabeller som skall användas, innan de börjar arbeta med motsvarande uppställda beräkningar.

Försök visar att det är möjligt att lära i stort sett alla elever de enkla tabellerna. Det gäller emellertid att använda en medveten metodik och att framför allt ha tålamod.

ARITMETIKEN OCH MINIRÄKNAREN

Det är inte osannolikt att vi på sikt kan skära ned aritmetikkursens omfång på grund av miniräknaren. Först måste vi emellertid skaffa oss mera kunskaper om i vilken utsträckning vi idag faller tillbaka på befintliga kunskaper i aritmetik, då vi löser problem med miniräknarens hjälp. Miniräknaren bör därför i första hand användas för att utföra för eleverna krångliga eller tidsödande beräkningar. Ett undantag från denna regel gäller de elever, som trots mycken träning har stora svårigheter med aritmetik. Dessa elever har ofta svårigheter att lösa problem på grund av sitt handikapp. Detta kan överbryggas med miniräknarens hjälp. Parallellt med detta arbete bör man emellertid fortsätta aritmetikräkningen och sträva efter så goda kunskaper i aritmetik som möjligt.

REELLA TAL

För många elever är steget från de naturliga talen till de övriga reella talen stort och besvärligt. Anledningen till detta är sannolikt

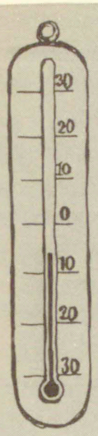
- ☐ dels att de flesta vardagliga problem kan lösas med hjälp av enbart de naturliga talen. Eleverna har därför alltför liten konkret erfarenhet att falla tillbaka på vad gäller övriga talområden
- ☐ dels att vi krävt alltför formellt arbete med svåra räkneregler, som sällan eller aldrig kan översättas till praktiskt konkreta situationer.

Målen i Lgr 80 skiljer sig här avsevärt från målen i Lgr 69. Många moment kan därför undvaras av elever, som inte siktar på matematikintensiva gymnasielinjer.

DE NEGATIVA TALEN

De flesta vardagliga problem går att lösa utan att använda negativa tal i egentlig mening. En skuld på 250 kr anses vara större än en på 150 kr trots att -250 är mindre än -150 och temperaturen -10°C är "mer än" (kallare än) -5°C trots att $-10 < -5$.

På motsvarande sätt kommer man ofta till vanskliga tankeformer, då man försöker konkretisera räknereglerna för hela tal.



EXEMPEL

$7-(-5)$ är en ganska komplicerad subtraktion. För att förklara denna eller för att ge ett praktiskt exempel i anslutning härtill använder man ofta tillämpningar som denna:

En morgon är temperaturen $-5°C$. På eftermiddagen är temperaturen $7°C$. Med hur många grader har temperaturen stigit? Tankeformen $7-(-5)$ är i det här fallet egentligen långsökt. För de flesta är det självklart att temperaturen först har gått upp med $5°$ till $0°C$ och därefter ytterligare $7°$ dvs sammanlagt $(5+7)°C$.

Då man arbetar enligt Lgr 80 gäller det att göra klart för sig vad som är viktigt att kunna för olika elevgrupper enligt kursplanen:

□ För *alla* elever är det viktigt att kunna göra beräkningar i anslutning till vardagsproblem. Här kommer man naturligt fram till problem som rör skuld och lån, temperatur, höjd och djup relativt havet etc. För att lösa sådana problem krävs relativt enkla tankeformer.

□ För elever som ämnar studera mera matematik eller som skall studera ämnen, som fordrar djupare kunskaper i matematik, krävs det enligt kursplanen mera än så. Man skall därför sträva efter att ge så många elever som möjligt en djupare insikt i området. Detta kan ske på åtminstone två sätt:

A. Man kan verifiera eller ge en rimlig "förklaring" till de svårare räknereglerna. Följande resonemang brukar accepteras av eleverna:

$4-2=2$
$4-1=3$
$4-0=4$
$4-(-1)=\ldots$
$4-(-2)=\ldots$
$\ldots$

Observera vikten av att för eleverna klargöra minustecknets två olika innebörder. Detta blir inte minst viktigt, då eleven skall använda miniräknare. Tecknen $\boxed{-}$ och $\boxed{+/-}$ har då två helt olika funktioner och får inte sammanblandas.

B. Man ger hållbara och korrekta bevis för räknereglerna. Detta steg vållar ofta problem eftersom det överstiger de flesta elevers förmåga med avseende på förkunskaper, erfarenhet och abstraktionsnivå. För elever som senare skall studera matematik är det å andra sidan viktigt, att man får korrekta modeller och tankeformer från början. Man bör här lägga märke till att motsvarande bevis förekommer även inom algebran och att ekvationen är en naturlig miljö, där de här räknereglerna uppstår. En formellt korrekt behandling av de hela talen kan därför med fördel sparas till slutet av högstadiet och då tas upp i ett logiskt sammanhang.

TAL I BRÅKFORM

Redan under 1950-talet försökte man på många håll i världen helt gå över till att räkna med decimaltal som närmevärden till bråk. Detta stupade på att man inte hade tillgång till enkla och billigare räknare. Att räkna för hand blev alldeles för tidsödande.

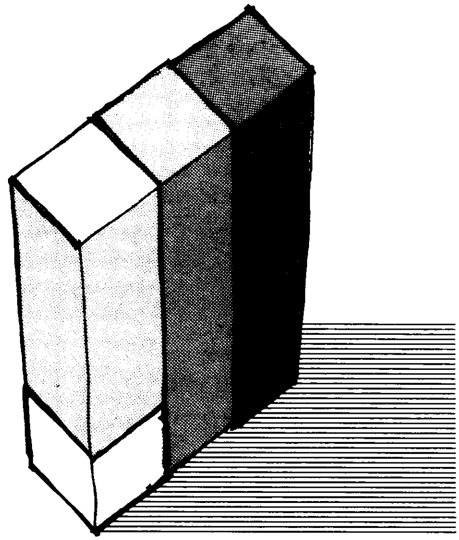
Vi vet att alltför många svenska elever har svårt för att räkna med bråk. På högstadiet får en elev ofta $1/3 + 2/5$ till $3/8$ och $2 \cdot 1/3$ till $2/6$. Av detta drar man slutsatsen, att eleverna varken har en klar taluppfattning inom området eller behärskar de räkneregler som gäller. Detta är synd eftersom de enkla bråken har en mycket stark verklighetsanknytning och mycket lätt kan konkretiseras. Förmodligen går man i skolan in för enbart matematiskt kodspråk ($1/3$ i stället för en tredjedel eller en bild) alltför tidigt.

I vardagliga situationer uppstår ett bråk oftast genom att något delas. Det intressanta är emellertid att det *inte är naturliga tal som delas* utan storheter. Man får alltså inte en tredjedel utan en tredjedels limpa, en tredjedels tipsvinst, ett tredjedels arv osv. Arbetet med bråk bör därför i huvudsak handla om händelser av det här slaget och kopplas till de konkreta storheterna.

Eleverna har ofta luckor i den grundläggande begreppsbildningen. De saknar förståelse för

- ☐ bråkens inbördes storlek t ex $1/3 > 1/5$ samt att $1/3 \approx 0{,}333$
- ☐ bråkets förhållande till det hela dvs $1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$
- ☐ att man kan få $2/3$ dels genom att addera $1/3$ och $1/3$, dels genom att dela 2 i tre delar. Detta kräver två helt olika tankeformer även om det kan täckas av samma matematiska modell
- ☐ att divisionen $2/3$ och bråket $2/3$ "råkar" ha samma decimalutveckling och svarar mot samma tal.

Det är viktigt att man på mellanstadiet lägger ned ett grundläggande arbete på den här beskrivna nivån, så att man sedan kan falla tillbaka på sunda tankeformer och en klar taluppfattning när eleverna skall räkna med bråk.



Det är mycket sällan man i en vardaglig situation behöver ett svar i bråkform. Ofta är det därför lämpligt att skriva om bråk i decimalform eller som närmevärde i decimalform och räkna med dessa. Detta ger f ö en kunskap av stort generellt matematiskt värde: *Samma räknelagar gäller för de rationella talen som för de hela talen.* Detta är något som många av dagens gymnasieelever är helt okunniga om. Den lärare som tidigare sett till att eleverna har en god taluppfattning om bråk behöver knappast vara rädd för att låta eleverna använda en miniräknare vid många av dessa beräkningar.

Elever som avser att studera mera matematik eller studera ämnen som kräver kunskaper om bråk måste givetvis kunna räkna även med tal i bråkform. Utan kunskaper om hur man kalkylerar med tal i bråkform saknas den kanske viktigaste förkunskapen för att man skall kunna arbeta med algebra. Alla elever bör enligt kursplanen få arbeta med addition och subtraktion av liknämniga bråk samt med multiplikation och division av ett bråk med ett naturligt tal. De elever som behärskar dessa steg och som är mogna därför bör även arbeta med bråkräkning i full utsträckning. Ju mera eleven behärskar desto större möjligheter att studera mera matematik med behållning.

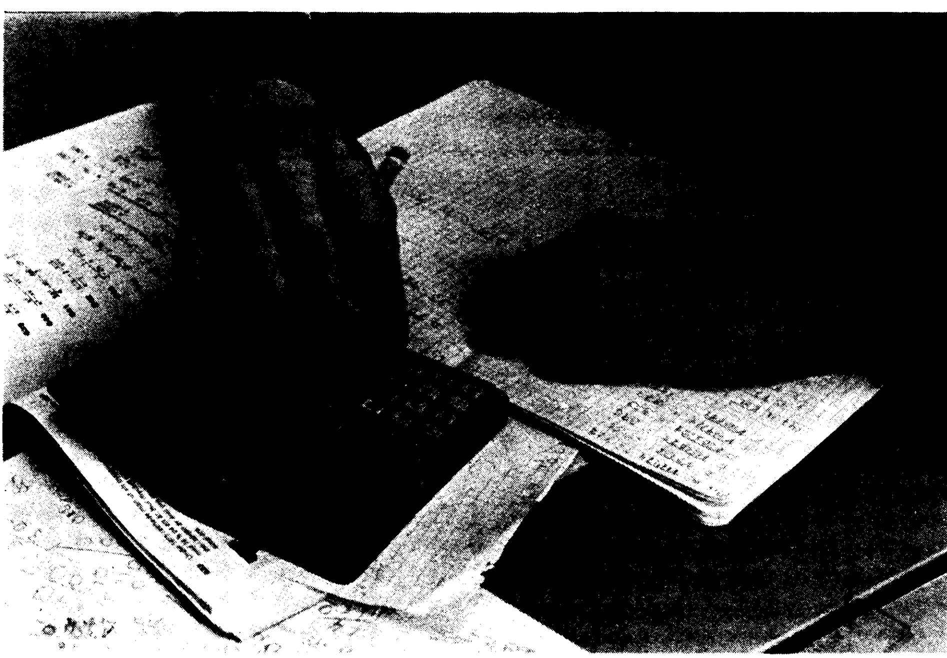
Bråk förekommer ofta även i andra situationer än som här nämnts, framför allt i form av proportionaliteter. Tidigare förekom momentet reguladetri och dess mer avancerade form kedjeräkning. Numera förekommer den typen av bråk istället som proportionalitetskonstant vid arbete med linjära ekvationer, vid grafritning, vid procenträkning och inom sannolikhetsläran. Den här formen av bråk (liksom resten vid division) är begreppsmässigt något helt annorlunda än de tidigare nämnda bråken. Det är viktigt att eleverna får klart för sig att olika situationer och olika tankeformer kan leda fram till samma matematiska modell.

DE IRRATIONELLA TALEN

Även de irrationella talen förekommer ytterst sparsamt i vardagslivet annat än som avrundade till decimaltal. Vad varje elev bör känna till är att det finns andra tal än de rationella, bl a π och kvadratrötter som $\sqrt{2}$ eller $\sqrt{12}$. Liksom bråken kan emellertid dessa tal skrivas i decimalform och avrundas till ett lämpligt decimaltal. Även för dessa tal gäller de vanliga räknereglerna. Med hjälp av en miniräknare kan man både ta reda på dessa närmevärden och kalkylera med dem. Med denna strategi har man helt avdramatiserat de reella talen och återfört beräkningar med dem till en känd nivå.

Förutom denna grundläggande kunskap bör varje elev ha en taluppfattning som omfattar åtminstone kvadratrötternas storlek. Denna kan t ex grundas på kunskapen att $\sqrt{a^2} = |a|$, t ex att $\sqrt{49} = 7$ och $\sqrt{64} = 8$. Man kan då avgöra att t ex $\sqrt{55}$ är ca 7,5. Ett bättre närmevärde som t ex 7,416 kan man vid behov få genom miniräknaren.

Självklart behöver en del elever ha mera kunskaper om reella tal för sin fortsatta skolgång, t ex vad gäller kvadratrötter. Det är emellertid viktigt att göra klart för sig vad som är väsentligt att kunna i dag och vad som blott och bart är ett gammalt arv. Anledningen till att man hittills har utfört operationer av typen $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21}$, $\sqrt{5\,210\,000} = 1000\sqrt{5{,}21}$ och $\sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{6}/2$ är främst att vi tidigare var bundna till räknetabeller vid överföring av rötter till närmevärden i decimalform. Med tanke på att vi utan ansträngning kan utföra dessa operationer med hjälp av en miniräknare kan en hel del av dessa övningar bytas ut mot algebraiskt intressantare stoff.



PROCENT

Tyngdpunkten i Lgr 80 på sådana matematiska problem som vanligen förekommer i vardagslivet ger procentbegreppet och procenträkning en central ställning i matematikundervisningen. Samtidigt kan vi konstatera att resultaten på de senaste standardproven och på SÖ:s diagnostiska uppgifter i matematik visar oroande låga lösningsfrekvenser på procentuppgifter. Detta gör att en kraftig satsning på undervisning om procentbegreppet och problemlösning i anslutning till detta begrepp är ytterst angelägen.

I kursplanens huvudmoment *Procent* betonas vikten av att procentbegreppet behandlas konkret och med utgångspunkt i miljöer och sammanhang, där det ofta förekommer och används. Det gäller då framför allt i samband med olika vardagsekonomiska företeelser som löner, kostnader, priser, rabatt, ränta, lån, amorteringar osv. Men det är också viktigt att man arbetar med procentbegreppet i samband med andra samhällsföreteelser som t ex energiförbrukning, miljövård, befolkningstillväxt och alltså med andra storheter än dem, som kan uttryckas i kronor och ören. Flertalet av dessa företeelser behandlas i undervisningen i samhälls- och naturorienterande ämnen och det är därför viktigt med en innehållsmässig samordning med matematikundervisningen.

En stor del av arbetet med procent bör ta sin utgångspunkt utanför det läroboksbundna arbetet. Tidningar och samhällsinformation av olika slag använder sig rikligt av procentbegreppet och har ofta en överlägsen aktualitet, inte minst då det gäller att uttrycka förhållanden i närmiljön.

Konsumentverket säger att varje grads sänkning av innetemperaturen innebär en besparing på

6%

Det är angeläget att man ägnar stort utrymme åt innebörden av procentbegreppet dels genom att diskutera enkla exempel från vardagen och dels genom ett omfattande konkret och laborativt arbete. Härvid bör man speciellt uppmärksamma relationen mellan olika procentsatser och relationen till motsvarande bråkformer. Särskilt viktigt är det att eleverna får arbeta med de vanliga procenttalen 10%, 50%, 100%, 25%, 75%, 5%, 20% osv. Detta arbete ger inte bara eleverna ett stabilt procentbegrepp utan också en god grund för huvudräkning och överslagsräkning med procent. Därvid bör de lära sig att utnyttja sådana samband som 6% = 5% + 1% och 18% = 20% − 2%.

Beräkning av procentuella andelar kan ske på en rad olika sätt och med olika hjälpmedel. Här måste man vara mycket uppmärksam på de olika krav som ställs på kunskaper om relationerna mellan procentform, bråkform och decimalform och på förkunskaper i aritmetik. Några exempel:

EXEMPEL 1

50% av 400 via "hälften" kräver att man kan dividera 400 med 2.

20% av 400 via "en femtedel" kräver att man kan dividera 400 med 5.

20% av 400 via "dubbelt så mycket som 10%" kräver att man kan dividera 400 med 10 och multiplicera 40 med 2.

EXEMPEL 2

3% av 400 via "1% av 400" kräver att man kan dividera 400 med 100 och multiplicera 3 och 4.

6,75% av 3 800 via "1% av 3 800" kräver att man kan dividera 3 800 med 100 och multiplicera 6,75 och 38.

EXEMPEL 3

3% av 400 via "3% = 0,03" kräver att man kan multiplicera 0,03 och 400.

23,46% av 4 765 via "23,46% = 0,2346" kräver att man kan multiplicera 0,2346 med 4765.

Kraven på förkunskaper beror sedan på hur man väljer att utföra själva beräkningarna – i form av huvudräkning, algoritmräkning eller med tekniska räknehjälpmedel. I huvudmomentet *Grundläggande aritmetik* anges för de olika stadierna nödvändiga och önskvärda räknefärdigheter. Denna prioritering skall självklart styra komplexiteten i de beräkningar som ingår i procentuppgifterna.

Huvudräkning med olika procenttal bör ägnas mycket stort utrymme och föregå arbetet med procentuppgifter som kräver algoritmuppställning. Detta gäller oavsett vilken metod man använder för att beräkna de procentuella andelarna. En god färdighet i huvudräkning på procentuppgifter är en förutsättning för goda färdigheter i den överslagsräkning, som så starkt betonas i kursplanen. I praktiska livet förekommer procenträkning framför allt som huvudräkning.

Överslagsräkningen får inte enbart grunda sig på de vanliga avrundningsreglerna. Andra typer av avrundningar leder ofta till procentsatser, som direkt eller i bråkform är betydligt enklare att räkna med.

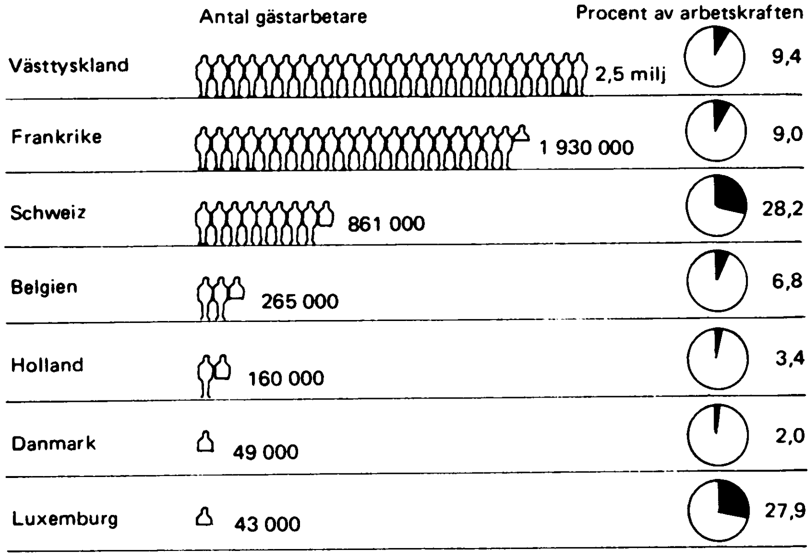
EXEMPEL 4

34% av 750≈30% av 800 efter avrundningsreglerna. Här är det bättre att uppfatta 34% som ungefär 1/3 och komma fram till 750/3.

Om beräkningarna utförs med hjälp av en uppställning måste man se till att eleverna har nödvändiga förkunskaper. Valet av a och b i "a% av b" måste göras med stor omsorg, så att bristande räknefärdigheter inte förstör elevernas möjligheter att lära sig lösa grundläggande procentuppgifter.

Vi har idag ingen entydig bild av konsekvenserna av att använda miniräknare i olika omfattning i skolan. Därför får man inte okritiskt använda miniräknare. Speciellt gäller detta användningen av $\boxed{\%}$-knappen. Uppenbart spelar denna funktion en stor roll utanför skolan men en för tidig användning i skolan kan försvåra möjligheten att ge eleverna ett fungerande procentbegrepp.

Det ovan behandlade har nästan uteslutande gällt procentbegreppet i situationer, där procentsatsen varit given dvs områden under rubriken *Mellanstadiet och högstadiet* i kursplanen. Det är emellertid också viktigt att eleverna får möta problem, där det gäller att bestämma procentsatser för t ex en ökning eller en minskning. Detta förutsätter goda kunskaper om relationen mellan bråkform, decimalform och procentform och oavsett vilken metod eller vilka hjälpmedel som används gäller det att vara uppmärksam på förkunskapskraven.



Antalet gästarbetare bara i EG-länderna uppgick år 1973 till 4 miljoner. Med familjer var de i runt tal 10 miljoner människor, eller ungefär lika många som invånarna i EG-landet Belgien. Gästarbetarna brukar därför ibland beskrivas som EG:s tionde medlemsstat. I Schweiz utgjorde gästarbetarna hela 28 % av arbetskraften, och av dessa pendlade dagligen ca 12 % över gränsen.

Beräkningar av procentsatser då delen och det hela är givna har i kursplanen placerats under rubriken *Högstadiet.* Detta betyder att de flesta elever bör orienteras om denna typ av problem, och att de som ämnar studera på matematikintensiva gymnasielinjer här bör skaffa sig grundliga kunskaper. Hit hör också uppgifter som innehåller flera procentuella förändringar efter varandra som t ex problem med ränta på ränta. Innan eleverna möter denna typ av problem är det viktigt att man behandlat beräkningar av procentuella andelar med hjälp av procenttal skrivna i decimalform. En sådan behandling underlättar väsentligt arbetet med tillväxtfaktorer.

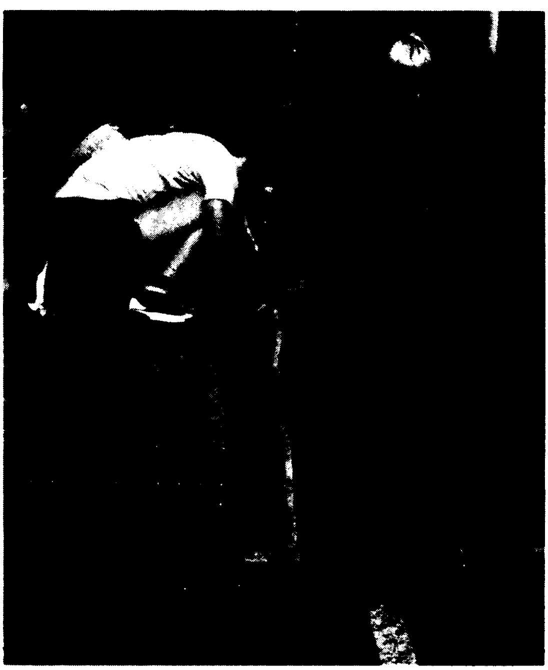
Utöver huvudmomentet *Problemlösning* berörs procentbegreppet speciellt av huvudmomenten *Grundläggande aritmetik* och *Reella tal.* Det är också angeläget att använda procentbegreppet på områden som ingår i huvudmomenten *Algebra och funktionslära, Mätningar och enheter* och *Beskrivande statistik och sannolikhetslära.* Det kan ingå i formler och ekvationer och i funktionsläran, speciellt i samband med proportionaliteter. Det kan användas för att beskriva storleken av olika fel vid mätningar och avrundningar. Det kan användas när procentuella fördelningar skall åskådliggöras i olika typer av diagram, speciellt i cirkeldiagram och areadiagram.

MÄTNINGAR OCH ENHETER

Kursplanen behöver knappast några omfattande kommentarer på det här området. Några påpekanden är emellertid på sin plats.

När man på lågstadiet arbetar med de i hemmet vanligaste enheterna för längd, massa och volym, är det viktigt att eleverna även utför mätningar. Arbetet bör därför till stor del handla om de vanligaste förpackningarna och de i hemmen vanligaste mätverktygen. Med ett decilitermått kan man kontrollera hur mycket vätska det ryms i olika förpackningar, med en hushållsvåg hur mycket en påse ärtor eller ett paket knäckebröd väger etc.

Eleverna kan även få leta efter mätverktyg och enheter i hemmen eller i omgivningen. Mjölk köps i en- eller tvålitersförpackningar men i pannkaksreceptet står det att man skall ta 8 dl mjölk, och då använder man ett decilitermått. Mormor däremot tar 6 kaffekoppar mjölk. Tyg köper man i meter men tyget är 60 cm eller 90 cm brett. Virke köper man i meter, men dess dimension anges i cm. Virke mäter man med tumstock men tyg mäter man med ett måttband. Den här listan kan göras mycket lång och kan ge upphov till många intressanta diskussioner och framför allt situationer där eleverna verkligen får mäta. En del skolor brukar anordna en mätdag, då eleverna kan gå runt till olika stationer och mäta. I hemkunskapen, textilslöjden, trä- och metallslöjden, fysiken och gymnastiken finns de flesta viktiga mätverktygen.



Samtidigt lär eleverna känna sin skola – även högstadiedelen om den finns i närheten.

På lågstadiet börjar man införa tidsbegreppet, som efter hand utvidgas från delar av sekunder till år och århundraden. Det är inte bara tidsbestämning som är intressant. Ännu viktigare är tidsdifferenser, dvs att kunna avgöra hur lång tid det gått mellan två tidpunkter. Detta har i dag blivit något mer komplicerat sedan många börjat använda digitalur. Tidsdifferenser kan då inte längre tas fram geometriskt utan måste beräknas aritmetiskt.

De vanligaste prefixen och deras användning måste efter hand ägnas stor uppmärksamhet. Dels är de viktiga att kunna, dels kan lätt förvirring och felaktigheter uppstå vid avläsning.

När det gäller enheter och enhetsbyten har man i skolan ofta arbetat på ett något stereotypt sätt, varvid de mest otroliga enhetsbyten skett. En bra metod är att lära eleverna hur man, genom att från början fundera över vilken enhet som är den mest lämpliga, helt enkelt undviker onödiga enhetsbyten. När enhetsbyten sker av naturliga skäl är det viktigt att förankra operationen konkret, så att det blir möjligt för eleven att på egen hand göra om dessa. Enhetsbyten i samband med skala är viktiga.

För elever som har behov därav och som t ex i samband med andra ämnen kommer att få genomföra viktiga enhetsbyten krävs även ett mera formellt arbete. Som exempel kan nämnas m/s – km/h och ml – cl – cm^3.

Mätningar och enheter är ett huvudmoment, som man lättare arbetar konkret med i andra ämnen än i matematik. Läraren i matematik har ansvaret för helheten och måste genom samverkan och uppföljning av det som sker i olika ämnen se till, att momentet verkligen konkretiseras på alla tre stadierna.

GEOMETRI

Den nya kursplanens mål är att i första hand ge eleverna positiva erfarenheter av att handskas med geometriska problem i vardagen. Man får då inte glömma bort, att många elever behöver göra samma eller liknande erfarenheter många gånger för att nå fram till förståelse och skaffa sig brukbara kunskaper. Detta kan bara uppfyllas genom en individualiserad undervisning. Inom geometrin är det svårare än inom de flesta andra områden att finna någon gemensam plattform att utgå ifrån eller någon medelnivå att arbeta på. Detta gäller vid en konkret, erfarenhetsinriktad undervisning men det gäller *i än högre grad* en geometriundervisning som är inriktad på att tillämpa geometriska formler och modeller.

"Förmågan att tänka i geometriska modeller är i hög grad kopplad till elevernas utveckling. Möjligheterna att uppfatta och arbeta teoretiskt med begrepp som area och volym är mycket begränsade hos de flesta elever under lågstadiet och mellanstadiet. Detsamma gäller också en formell och formelinriktad geometriundervisning på högstadiet."
(Lgr 80 s 104)

Eftersom kursplanen förordar en empiriskt inriktad geometri utan onödiga definitioner och satser bör det finnas möjligheter att mera bygga på elevernas egna upptäckter och intuitiva förmåga än tidigare. Genom att man låter den *konkreta* undervisningen bli en arbetsform inriktad på att lösa problem kan man appellera till den lekfullhet och upptäckarglädje, som barn naturligt är utrustade med. Ofta får man bästa utbytet genom att vädja till elevernas kreativitet.

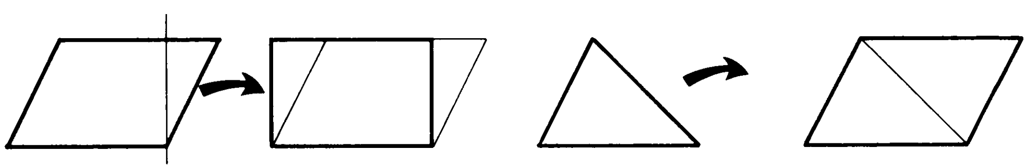
Förr i tiden var geometrin ofta en plåga för många elever. Orsaken till detta var alla de krångliga bevis som krävdes, bevis som i mycket liten utsträckning hade med geometrins praktiska användning att göra. Eftersom Lgr 80 genomsyras av vardagskunskapen och tillämpningen av stoffet är det viktigt att ställa frågan vilken användning vi faktiskt har av geometri.

Redan på lågstadiet har de flesta elever upptäckt symmetrins betydelse. De vet hur bladen på en växt brukar vara symmetriska, hur granen strävar efter att växa symmetriskt och hur symmetriska de flesta insekter är. Denna naturens symmetri har vi överfört till vår kultur. Vi möblerar symmetriskt, de flesta bruksföremål är symmetriska osv. Ett sätt att grundlägga geometriundervisningen på är att låta eleverna arbeta med och bygga upp enkla symmetriska föremål. Detta gjordes ofta tidigare i den s k pappslöjden.

Nära knutet till begreppet symmetri är kongruens. När man gör pepparkakshjärtan använder man en mall som tillverkar kongruenta (symmetriska) hjärtan. När man syr ett plagg klipper man först till ett antal tygstycken, som är kongruenta med det mönster man utgår ifrån. Vid hopfogandet av de olika tygstyckena utnyttjar man kongruens i form av vikning, arbete på avigsidan av plagget etc.

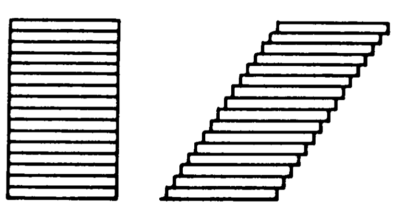
Nästa steg i kedjan är likformighet. När man i geografin eller i gymnastiken använder en karta, i trä- och metallslöjden en ritning eller då man studerar ett foto eller en stordiabild, arbetar man med en bild av verkligheten, förstorad eller förminskad. Bilderna är likformiga med verkligheten. Med exempel av det här slaget är det lätt att visa, att den geometri som tidigare gjordes formell och krånglig faktiskt existerar runt oss i vardagen. Betraktad genom vardagen blir geometrin bekant och verklig. Enligt idéerna med Lgr 80 bör man börja på den här nivån, alltså i verkligheten och i de mer praktiskt betonade skolämnena. Senare kan man för de elever, som även behöver en mera formell geometriundervisning, utöka undervisningen med sådan. De grundläggande praktiska färdigheterna underlättar då förståelsen av det formella arbetet.

För att ge eleverna en strukturerad bild av geometrin bör man ägna uppmärksamhet åt de vanligaste plana figurerna och kropparna. Det är därvid minst lika viktigt att man analyserar hur figurer och kroppar är uppbyggda som att man enbart räknar på dem. Egenskaper som att parallellogrammen enkelt kan omvandlas till en rektangel eller att mot varje triangel svarar en parallellogram etc är viktiga egenskaper, som dels hjälper eleverna att förstå geometrin, dels hjälper dem att göra en beräkning, även om de för tillfället glömt en formel.



$A = b \cdot h$ $\qquad$ $A = b \cdot h$ $\qquad$ $A = \frac{b \cdot h}{2}$ $\qquad$ $A = b \cdot h$

På motsvarande sätt kan man behandla egenskaper hos kroppar. Prismats och cylinderns volym får man båda med formeln *Volymen = Basytan · höjden*. Detta är inte en slump. Att den raka cylindern har samma volym som en sned cylinder med samma basarea och samma höjd är heller inte en slump. Man kan t o m lätt övertyga eleverna om detta genom att visa hur man kan snedställa en trave med vanliga kex.



Båda travarna innehåller exakt lika många kex och har alltså samma volym.

En sak som man ofta glömmer bort i skolan eller som man kanske inte anser sig ha tid med är att konstruera de olika figurerna och kropparna och därvid närmare studera deras egenskaper. I många situationer i hemmet och på fritiden har man behov av att göra en skiss eller en mall till något. Kanske vill man lägga in en matta i badrummet eller bygga en möbel i spånskiva. I så fall kan det underlätta arbetet om man först tillverkar en mall i naturlig storlek respektive i lämplig skala. Mallen kan göras i papper eller i kartong. Då blir det viktigt att på ett rationellt sätt kunna konstruera en rät vinkel, en rektangel etc. Därför måste vi i skolan lära eleverna att konstruera figurer och kroppar. Därvid finns det betydligt enklare metoder att använda än de gamla grekernas med passare och linjal.

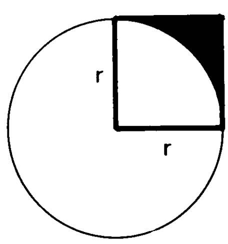
En viktig erfarenhet som gjorts inom gymnasieskolan under senare år är att de elever som kommer från grundskolan har dåliga förkunskaper i elementär geometri. De känner inte till de enklaste satserna om vinklars förhållande till varandra vid parallella linjer eller i cirklar. De har problem med Pythagoras' sats och med likformighetssatserna. Detta ger många onödiga problem bl a inom funktionsläran men framför allt inom ämnet fysik. För de elever som siktar på att gå vidare till i första hand de mer matematikintensiva linjerna bör man därför ägna viss tid åt den typen av mera formell geometri och arbeta med formler. Detta kan på ett naturligt sätt ske som en fördjupning av det mera konkret betonade arbetet.

Liksom i samband med all annan problemlösning bör man även i geometrin dela upp problemlösningen i olika steg. Genom att grunda geometriska begrepp i en konkret verklighet blir det första steget "att förstå problemet och ha en lösningsmetod" mindre komplicerat. Men det är lätt att bryta ned förståelsen genom att välja så komplicerade mätetal, att beräkningen blir alltför svår att genomföra. En bättre metod är att till en början alltid välja mätetal som leder till så rimliga beräkningar, att alla elever har tillräckliga förkunskaper. En individualisering kan ske så att de elever som har bättre förkunskaper även får numeriskt svårare uppgifter. Huvudsaken är att ingen elev går miste om viktiga geometriska kunskaper enbart av det skälet, att eleven saknar förkunskaper i aritmetik.

På motsvarande sätt kan arbetet med formler göras mer eller mindre förståeligt beroende på hur konkret man är och på hur formella krav man ställer.

- ☐ Fastslår man rätt och slätt att cirkelområdets area är $\pi \cdot r^2$ och kräver att $\pi \approx 3{,}14$, så får många elever genast problem.

- ☐ Om man i stället till att börja med avrundar π till 3 och beskriver arean som 3 gånger den avbildade kvadraten, så blir problemen genast mindre. Har eleverna dessutom genom att klippa och klistra fått övertyga sig om att formeln är riktig ökar deras insikt.



Det senast beskrivna tillvägagångssättet hindrar inte någon elev från att senare använda den mer exakta formeln. Snarare ökar arbetet insikten om formelns betydelse.

Även om de geometriska bevisen inte får göras till ett självändamål, så bör om möjligt varje grundskoleelev ha sett och helst även deltagit i att genomföra ett par enkla bevis. Dessa bevis bör emellertid först förklaras idémässigt, varvid kravet på generalitet och på att man kan missta sig på en figur tas upp. Exempel på bevis som lätt kan genomföras är

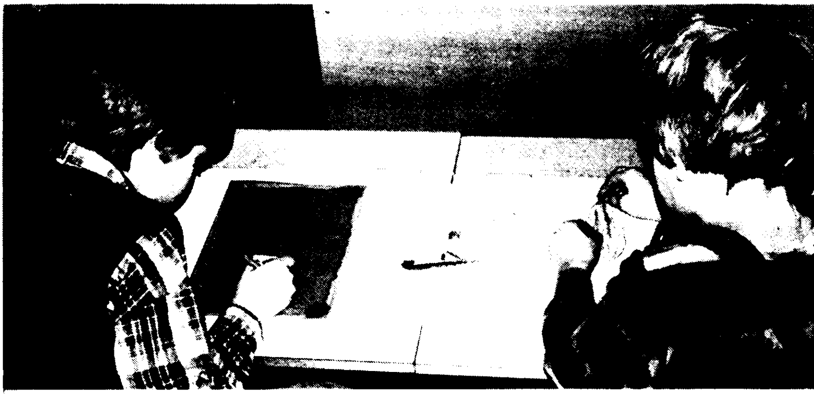
- ☐ beviset om vinkelsumman i en triangel,
- ☐ satsen om att yttervinkeln i en triangel är lika stor som summan av de båda motstående vinklarna,
- ☐ satsen om alternatvinklar vid parallella linjer,
- ☐ Pythagoras' sats.

ALGEBRA OCH FUNKTIONSLÄRA

Detta huvudmoment är *"av mindre vikt i vardagslivet"* (Lgr 80, s 105). Däremot har det fundamental betydelse för all vidare utbildning i matematik och utgör en mycket viktig förkunskap i ämnen och verksamheter som använder matematik som verktyg. Det gäller då framför allt vid begreppsbildning, vid problemlösning och vid beskrivningar av olika fenomen i naturvetenskapliga, tekniska och ekonomiska ämnen. Vikten av att lära sig algebrans och funktionslärans grunder har inte blivit mindre genom den datorisering som vårt samhälle för närvarande genomgår. I många beslutsunderlag ingår dessutom formler och beräkningar, som man behöver viss kunskap om.

Grundskolans undervisning skall i första hand ge eleverna sådana kunskaper i matematik som behövs för att de skall kunna fungera väl som samhällsmedborgare. Detta betyder emellertid inte, att undervisningen i matematik helt och hållet skall domineras av aritmetik och problemlösning kring olika vardagsföreteelser. Så många elever som möjligt måste få tillfälle att tillägna sig algebrans och funktionslärans grunder. Men det får alltså inte ske på bekostnad av otillräckliga räknefärdigheter eller svårigheter att lösa matematiska vardagsproblem.

Redan under lågstadietiden kan en del elever få komma i kontakt med detta huvudmoment i form av enkla likheter. Genom att utelämna tal i sådana likheter kan eleverna få laborera med eller "låtsas" olika tal på det utelämnade talets plats. Sådana övningar formar så småningom grunden till ett stabilt *variabelbegrepp* och är mycket lämpliga fördjupningsuppgifter i arbetet med grundläggande aritmetik. De ger också rika tillfällen att upptäcka viktiga relationer mellan addition–subtraktion och senare mellan multiplikation–division.



Arbetet bör göras så konkret som möjligt och helst utföras med hjälp av laborativt materiel. Eleverna kan också få göra räknesagor som leder fram till en likhet med ett utelämnat tal eller göra räknesagor till på förhand givna likheter. Sådana aktiviteter anser många lärare på lågstadiet vara mycket viktiga.

Den ingående aritmetiken skall inte enbart bestå av tabelluppgifter eller uppgifter som lätt kan lösas i huvudet. Även algoritmräkning måste så småningom komma till användning för att få fram ett utelämnat tal i en likhet.

Eleverna kan själva få formulera likheter med obekanta tal. Det kan då inträffa att man hamnar utanför det talområde man behärskar, t ex genom

$2 + \_\_ = 0$, $3 \cdot \_\_ = 1$ eller $\_\_ \cdot \_\_ = 10$

Det är mycket viktigt att eleverna får reflektera över sådana likheter. De används ju så småningom som utgångspunkter för införande av nya talområden t ex de hela talen, de rationella talen och de reella talen.

En del elever kan också få arbeta med flera obekanta i samma likhet och med likheter som har många lösningar. Sådana övningar kan varieras på ett otal sätt, inte minst genom att eleverna själva konstruerar uppgifter åt varandra. Genom detta arbete kan eleverna själva få upptäcka många av de egenskaper, som kännetecknar olika naturliga tal. Det ger också en fördjupad kunskap om innebörden i de fyra räknesätten. Ingenting hindrar att övningarna utformas som lek eller spel.

$\_\_ - \_\_ = 0$ $\_\_ + 0 = \_\_$ $1 \cdot \_\_ = \_\_$

Mot slutet av mellanstadietiden kan eleverna få komma i kontakt med likheter eller ekvationer, där det obekanta talet betecknats med en bokstav. Stor uppmärksamhet bör då ägnas åt innebörden i ekvationsbegreppet liksom åt vad de olika termerna representerar, vad som menas med att lösa en ekvation och vad som menas med en lösning. Ekvationslösningen skall liksom tidigare i första hand ske genom prövning. Genom att så småningom använda olika bokstäver för det obekanta talet kan variabelbegreppet utvecklas och eleverna bli mer och mer förtrogna med symboler som beteckningar för obekanta tal. Enkla formler bör även tas upp.

Speciell uppmärksamhet måste senare ägnas åt ekvationer, där ena ledet innehåller flera operationer och där x-termen innehåller koefficienter. Innebörden av t ex 3x måste vara helt klar när termen dyker upp i ekvationer som t ex

$$3x + 2 = 8 \text{ eller i } \frac{3x}{2} = 3$$

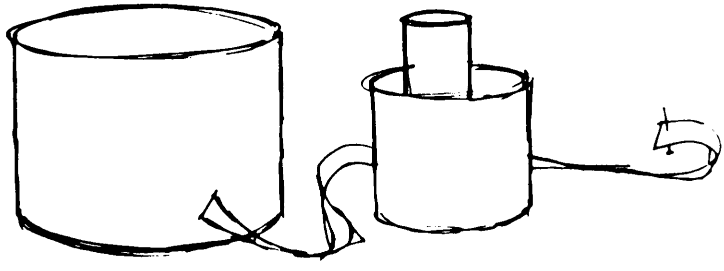
Här måste eleverna lära sig att uppfatta 3x dels som en helhet (= 6) och dels som en produkt (= 6) av två faktorer 3 och x, där x = 2. Viktigt är också att eleverna har klart för sig innebörden i begreppen term, faktor, täljare och nämnare och summa, differens, produkt och kvot.

De ekvationer som tas upp i undervisningen bör i första hand utgå från problem från olika områden, t ex geometri eller procenträkning. Även om man kan lösa problemen på ett enklare sätt, t ex genom huvudräkning, bör eleverna få tillfälle att teckna enkla ekvationer och diskutera relationen till de ursprungliga problemen.

Som fördjupningsavgift kan eleverna få arbeta med t ex räknegåtor som kan lösas med ekvationer. Att själv formulera sådana räknegåtor ger ytterligare insikt i hur ekvationer kan användas vid problemlösning.

"Funktionsbegreppet introduceras genom praktiska experiment."
(Lgr 80 s 106).

Så kan t ex sambandet mellan omkrets och diameter av en cirkel studeras med hjälp av cylinderformade burkar, pappersremsor, nål och linjal. Tyngdpunkten skall ligga på funktionsbegreppet som ett uttryck för hur olika storheter hänger ihop och man bör vara mycket försiktig då det gäller att formalisera de allmänna egenskaperna hos en funktion.



Det är viktigt att eleverna får lära sig att beskriva en funktion på olika sätt; i form av en värdetabell som ett direkt resultat av ett experiment, i form av en grafisk bild i ett koordinatsystem och i en formel (algebraisk form).

Sådana formler som i sin allmänna form innehåller flera obekanta, t ex $s = v \cdot t$, bör i första hand behandlas som funktion av en variabel och alltså med v eller t konstanta från början. Dessutom bör funktionsvärdet från början var explicit uttryckt i formeln. Så småningom kan en del av eleverna lära sig se på formler som uttryck för funktioner av flera variabler och att olika värden på variablerna kan leda till samma funktionsvärde (t ex genom formeln för arean av en triangel $A = b \cdot h/2$). Genom att utnyttja ekvationslösning kan dessa elever också få pröva på situationer, där det funktionsvärde som söks är implicit uttryckt.

Det ovan behandlade har till största delen gällt sådant stoff, som alla elever bör arbeta med under sin tid i grundskolan. Det som nu följer är kommentarer till områden inom algebran och funktionsläran som betecknats med *Högstadiet.* Här är en *"omsorgsfull individualisering byggd på elevernas val och förmåga"* (Lgr 80 s 105) av synnerlig vikt.

Med utgångspunkt i det tidigare arbetet med ekvationer och formler får eleverna komma i kontakt med uttryck av olika slag. Här måste man gå mycket försiktigt fram så att arbetet inte blir ett enda hokus—pokus. Skenbart mycket enkla uttryck kan vålla mycket stora problem vid en förenkling eller vid beräkningar av uttryckens värde. Därför måste man förvissa sig om i förväg, att eleverna har tillräckliga förkunskaper och diskutera innebörden i uttryckens olika termer. Ämnesområdet är starkt hierarkiskt till sin karaktär och ställer speciellt stora krav på elevernas räknefärdigheter med hela tal. I de inledande övningarna är det därför viktigt att gå varsamt fram med minustecknen och göra klart för eleverna skillnaden mellan *operationstecknet* minus och tecknets roll för att beteckna *motsatta tal* och *negativa tal.* Att $-x + 1 = 1 - x$ är t ex inte självklart ens för en matematikbegåvad högstadieelev. Det kan vara lämpligt att börja med konkreta exempel av typen vinst/förlust, där minustecknet bara är av operationstyp.

Så småningom ökas svårighetsgraden i uttrycken, så att de kommutativa, associativa och distributiva lagarna kommer flitigt till användning. Speciell uppmärksamhet ägnas åt prioriteringsreglerna, som ofta innebär stora svårigheter för många elever.

Ekvationer av första graden löses med allmänna lösningsmetoder, och man får inte glömma bort att då och då konkretisera lösningsförfarandet. Eleverna får lära sig addera, subtrahera, multiplicera och dividera båda leden med samma tal. Man kan sedan successivt förenkla lösningsförfarandet och efterhand få eleverna att förstå, att en term byter tecken när den flyttas från det ena ledet till det andra, att en faktor i ena ledet blir nämnare i det andra och vice versa. Det är mycket viktigt att lösningarna prövas, inte bara i den ursprungliga ekvationen utan då och då också i de ekvationer, som utgör mellanled vid lösningsprocessen.

Stor omsorg måste läggas ner på sekvenseringen av uppgifterna vid ekvationslösning. Man måste härvid uppmärksamma inte bara olika svårigheter med förenklingen av de uttryck som ingår i ekvationerna utan också på det talområde som lösningen tillhör. Elever som inte har mycket goda förkunskaper i bråkräkning, räkning med hela tal och om relationen mellan tal i bråkform och tal i decimalform har små möjligheter att lösa annat än mycket enkla ekvationer.

För att undvika att eleverna uppfattar en funktion enbart som t ex en "rät linje genom origo" eller som "$y = 3 \cdot x$" är det viktigt att man poängterar, att det finns många sätt att beskriva en funktion på. De former som behandlas på matematiklektionerna är sådana som visat sig mest funktionella i matematik och angränsande ämnen, men kan i t ex en vardagssituation vara klart olämpliga. Att uttrycka kommunalskatten som $y = 0{,}3125 \cdot x$ är i vardagslag en betydligt sämre form än att helt enkelt säga att den är 31,25 (underförstått kr/100 kr). Likaså är det ofta vid problemlösning lättare att använda förhållanderäkning (reguladetri) än att arbeta med en funktion.

Om det finns tillgång till dator på skolan kan man med några enkla program visa, hur algebra och funktionslära utnyttjas vid programmering och hur datorn kan utnyttjas när det gäller t ex beräkning av funktionsvärden, sammanställningar i värdetabeller, konstruktion av grafer osv.

BESKRIVANDE STATISTIK OCH SANNOLIKHETSLÄRA

Statistik handlar om att insamla, sammanställa och analysera data. Dessa tre steg måste betraktas som en helhet. Vet man inte på vilket sätt och under vilka betingelser data har insamlats eller om sammanställningen har utförts på ett felaktigt sätt, så blir analysen av data meningslös.

De flesta personer i vårt samhälle träffar dagligen på statistiska uppgifter t ex i reklam och i massmedia. Det är då viktigt att kunna tolka denna information på ett riktigt sätt. En förutsättning för detta är, att man är medveten om statistiska metoder och konventioner. Även om tolkningen av statistiska data är det egentliga målet måste man därför även arbeta med de andra leden i undervisningen.

I målet för ämnet matematik påpekas vikten av att eleverna får sådana kunskaper och färdigheter som de har användning för i andra skolämnen. Beskrivande statistik förekommer ofta inom orienterings-

ämnena. På alla stadier är det därför både viktigt och möjligt att genomföra en samverkan. Denna bör helst omfatta alla de viktiga leden från insamling och sammanställning till analys av data. Liksom man gör inom de samhällsvetenskapliga ämnena, är det viktigt att man bearbetar data från samhället. Förutom egna insamlingar av data kan Sifos och IMUs väljarundersökningar och Statistisk årsbok nämnas som lämpliga informationskällor att bearbeta och analysera.

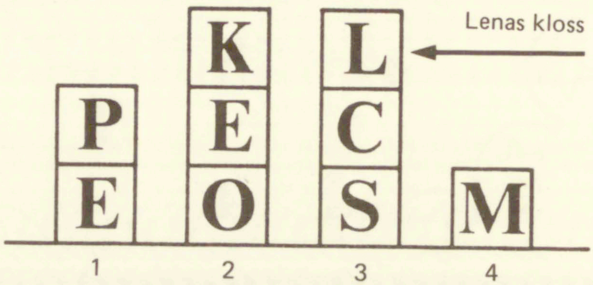
Huvuddelen av de statistiska data vi möter till vardags är alltför komplexa och alltför abstrakta för lågstadiets elever. Trots detta är det dock möjligt att arbeta med statistik även på lågstadiet. Det gäller emellertid dels att undvika besvärliga beräkningar, dels att välja data från elevernas närmiljö, så att det blir rimligt och meningsfullt med statistik. Exempel på lämpliga områden är t ex

- ☐ Vilket väder har det varit under den gångna månaden?
- ☐ Hur många elever har varit frånvarande under veckan?
- ☐ Hur många syskon är ni i familjen?

När uppgifter av motsvarande slag bearbetas i högre årskurser, brukar man kräva att eleverna gör en avprickning av data, som därefter införs i frekvenstabeller. Detta blir alltför formellt och krångligt för lågstadiets elever. Man kan emellertid lätt undvika detta steg och ändå ge full förståelse för sammanställningstekniken genom att använda t ex följande modell:

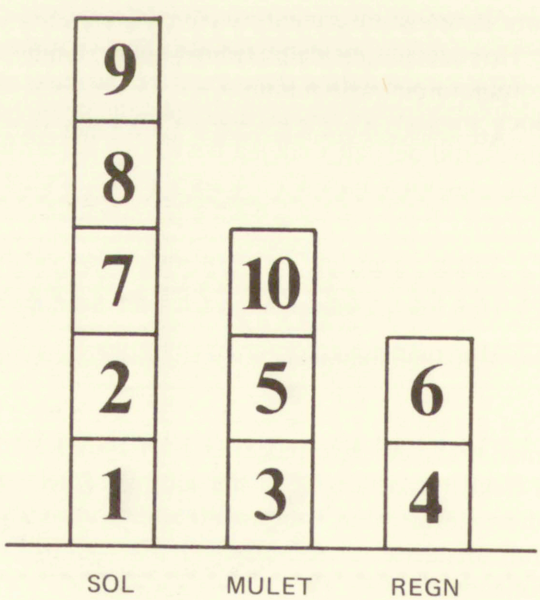
EXEMPEL

Hur många barn är det i din familj? Varje barn har en stor legokloss eller liknande. I Lenas familj är det tre barn. Lena går fram till katedern och placerar sin kloss på stapel 3. Hon kan nu se sin roll i det större materialet.



EXEMPEL

Vilket väder har det varit under månaden? När eleverna drar av datumlappen på väggalmanacken klistras denna upp på ett färgat papper. Eleverna kan nu följa hur månadens väder växer fram dag för dag.



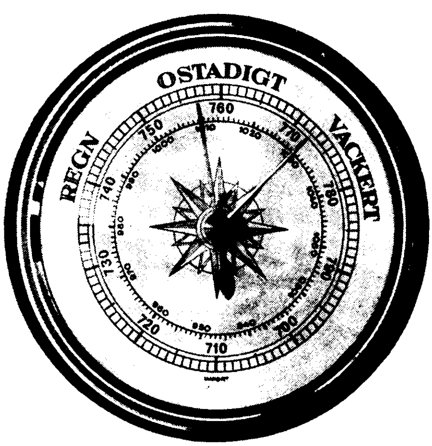
Redan på lågstadiet bör man gå ett steg längre än att enbart färdigställa och tolka diagrammen. I samband med exemplen ovan kan man även diskutera om de här resultaten är typiska eller om de är speciella för klassen. Statistisk årsbok och andra mer lokala sammanställningar talar om hur många barn det finns i en typisk svensk familj eller hur vädret brukar vara under månaden i fråga. Genom dessa jämförelser mellan population och stickprov lägger man en första viktig grund för sannolikhetsläran.

Inom olika områden av matematikämnet är olika arbetsformer både lämpliga och möjliga. Inom den beskrivande statistiken är arbete i mindre grupp och pararbete ofta bra arbetsformer. Dels blir det lättare att sammanställa data om man är två eller tre, dels är det viktigt att man verkligen diskuterar data. Den beskrivande statistiken bygger till stor del på att den som tolkar data är välbekant med statistiska metoder och konventioner. Genom att man behandlar data gruppvis och sedan presenterar resultaten för varandra kommer man på ett påtagligt sätt att inse vikten av att alla grupper använder samma konventioner och samma metoder. Data blir ju annars otolkbara eller misstolkade.

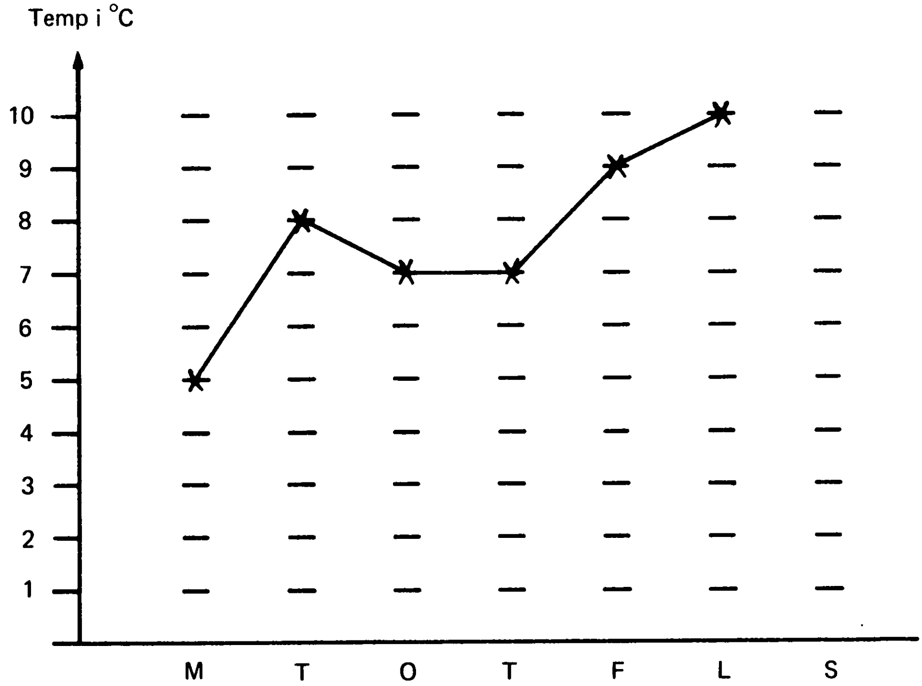
Förutom stapeldiagrammet kan man på lågstadiet diskutera vissa centralmått som t ex typvärde och kanske t om median och medelvärde. Typvärdet är det enklaste. Man kan med utgångspunkt från detta diskutera hur många familjer som har mer än typvärdet 2 barn, hur vädret avviker från typvärdet solsken i maj etc. Om vi utgår från figuren i exempel 1 ovan blir det lätt att ta reda på medianen. Det är bara att samtidigt ta bort en kloss till höger och en till vänster, tills det bara är en eller två klossar kvar.

I slutet av lågstadiet eller i början av mellanstadiet är det dags att införa linjediagrammet. Lämpliga exempel att börja med är:

- ☐ Att avläsa temperaturen utomhus vid en viss tidpunkt varje dag.
- ☐ Att värma upp is tills vattnet kokar. Under tiden avläser man temperaturen varje minut.
- ☐ Att avläsa regnmätare eller barometer varje morgon.



Ofta betraktar man linjediagrammet som en funktion och axlarna som ett koordinatsystem. Detta är inte nödvändigt. Man kan bygga upp linjediagrammet k ring hjälpstaplar och därmed koppla det till förkunskaper från stapeldiagrammet.



Linjediagrammet kan nu utnyttjas i de naturorienterande ämnesområdena liksom stapeldiagrammen i de samhällsorienterande. I mellanstadiets läromedel finns det tabeller och diagram av olika slag. Dessa bör tas till underlag för att arbeta vidare med statistiken. Tabeller och diagram bör diskuteras noggrant och analyseras. I vissa fall kan eleverna få göra egna små enkäter som kan belysa hur deras del av samhället förhåller sig till bokens material.

Efter hand som eleverna blir förtrogna med tabeller och diagram kan man låta dem sammanställa enkla data i frekvenstabeller och övergå från att laborativt bygga upp diagram till att rita diagram i arbetshäften. Många barn har svårt att välja lämpliga axlar på diagrammen och att besiffra axlarna på lämpligt sätt. Detta bör alltså läraren hjälpa till med. Eleverna kan nu även börja räkna fram enkla median- och medelvärden. Den lämpligaste arbetsformen för sådant här arbete anser de flesta vara den lilla gruppen. Det är lätt att övertyga eleverna om att det går fortare att pricka av ett insamlat material om en elev läser och en annan prickar av. Resultatet blir då oftare rätt också. Grupperna bör jämföra sina resultat sinsemellan och diskutera sina slutsatser.

Under mellanstadiet är det även dags att börja med cirkeldiagram och stolpdiagram. Svårigheterna ligger oftast inte på det egentliga förståelseplanet utan i det formella beräkningsarbetet. En elev som har problem med att multiplicera med 3,6 får t ex problem med att överföra 42 % till 151,2. En elev som inte kan hantera en gradskiva får nya problem etc. Detta betyder att man under mellanstadiet bör undvika ett alltför formellt arbetssätt. De diagram man bygger upp bör vara relativt enkla. Däremot kan man *tolka* mer komplicerade diagram. Just att tolka och verkligen analysera vilken information man får från olika typer av diagram bör vara det viktigaste ledet under mellanstadiet. Den kritiska granskningen av statistik i reklamen är också viktig liksom diskussioner om de vanligaste metoderna att ljuga med statistik.

Mot slutet av mellanstadiet och början av högstadiet brukar eleverna vara mogna att börja med sannolikhetsläran. Man kan därvid börja på olika sätt. Oftast utgår man från formella försök kring kast av tärning el dyl. En annan metod som närmare ansluter till statistiken är att bilda sig en uppfattning om populationen med utgångspunkt från stickprovet. När man t ex gör enkäter i skolan om rökvanor, hur många som kört moped före 15 års ålder etc, får man ett stickprov, som har en viss relation till ett större material (populationen). Man kan då diskutera hur det större materialet sannolikt ser ut, liksom metoder att med bättre stickprov komma sanningen närmare. Man kan också med hjälp av t ex Sifos väljarundersökningar uppskatta (extrapolera) resultatet vid nästa mätning. Dessa exempel på hur sannolikhetsläran används i praktiken kan efter hand följas upp med formella experiment som visar den relativa frekvensens stabilitet.

EXPRESSEN ★ den 3 juni 1981 — 3

Det är cykeln som är farlig

Några läkare vill införa körkort på moped.

Anledningen: År 1978 förekom 206 olyckor på vanlig cykel och 64 olyckor på moped bland 15–17-åringar.

Av statistiken att döma var mopedolyckorna betydligt färre än de vanliga cykelolyckorna.

Körkort för moped är endast ett onödigt krångel. Byråkrati har vi tillräckligt av ändå.

Däremot bör mopedåldern höjas.

Prickfri mopedist i 26 år.

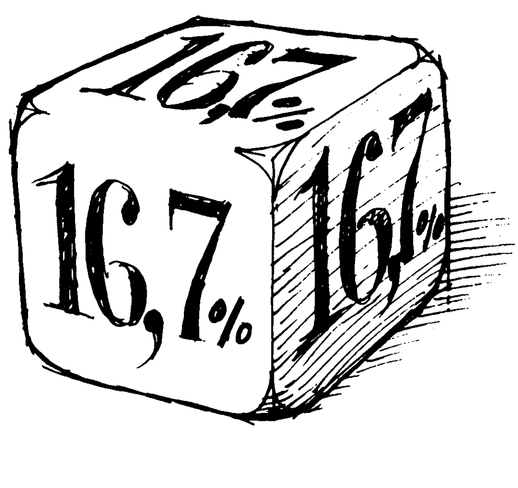
DAGENS ROS

För de elever som behärskar de tidigare nämnda momenten och som är mogna härför kan man under högstadiet gå vidare. Även om de flesta elever kan lära sig tolka de vanligaste histogrammen, så är konstruktionen av dem relativt svår. Detta gäller speciellt val av klassgräns, klassbredd och antal klasser. En hel del elever kan emellertid följa med om de får hjälp med dessa formella beslut t ex genom arbete i en grupp. Detta arbete får emellertid inte bli ett självändamål.

På samma sätt måste den mer formella sannolikhetsläran bearbetas med urskillning. Den relativa frekvensen bygger på proportionalitetstänkande och utnyttjandet av den blir därför en relativt komplicerad operation för många elever. För att undvika detta problem man man ofta i stället ange en procentsats, något som är bättre förankrat bland de flesta elever. Att relativa frekvensen för sexa vid kast med en tärning är 0,167 kan enklare beskrivas som att 16,7% av kasten ger en sexa.

Inom sannolikhetsläran bör eleverna få möta sådana problem som syftar till att ge dem ett sunt förhållningssätt till olika hasardspel. De bör lära sig att inse det orimliga i att i längden tjäna stora pengar på kedjebrev eller på det perfekta tipssystemet.

Ett problem med statistik och sannolikhetslära brukar vara att data ofta blir såväl omfattande som svåra att hantera. Detta kan lätt medföra att det intellektuella utbytet blir relativt litet i förhållande till arbetsinsatsen. Problemet kan ofta undvikas om eleverna får tillgång till tekniska räknehjälpmedel. Såväl miniräknare som en mikrodator kan här vara till stor hjälp.



DATALÄRA

Datalära ingår i Lgr 80 som nytt huvudmoment i matematik men det ingår också i samhällsorienterande och naturorienterande ämnen. Undervisningen i datalära förutsätts bygga på en samverkan mellan i första hand samhällskunskap och matematik. Möjligheterna till konkretion inom främst de naturorienterande ämnena måste tas till vara, men det är viktigt att momentet inte heller i matematik får en teoretisk prägel.

Syftet är att ge alla elever en handlingsberedskap inför en kommande vuxenroll i ett modernt samhälles accelererande datorisering. Man bör då utgå från den kunskap om och den beröring med datoriseringen, som eleverna redan har. Så här står det i slutrapporten från projektet *Datorn i skolan* (DIS).

"Syftet med undervisningen i datalära är att ge eleverna sådana kunskaper att de vill, vågar och kan ta ställning till och påverka användningen av datorer i vårt samhälle."

Projektet belyser undervisning *om, med* och *av* datorer. I det följande behandlas undervisning *om* datorer (datalära) men också i någon mån undervisning *med* datorer, eftersom det ibland är samma sak.

DET HISTORISKA PERSPEKTIVET

Ett viktigt avsnitt är den historiska utvecklingen. Maskinernas muskelhjälp har utvecklats i ca 250 år. Datorernas tankehjälp har utvecklats på ca 40 år. Maskiner och datorer är båda produkter av teknik. De har och har haft ett avgörande inflytande på samhällsutvecklingen. För att belysa hela detta stora komplex fordras bl a insatser från lärare i historia, samhällskunskap, fysik, teknik och matematik. Datoriseringen är därför ett tacksamt ämnesområde för temastudier.

BEHÖVER MAN DATORER I GRUNDSKOLAN?

Sett ur snäv pedagogisk synpunkt måste svaret bli ett tveklöst "ja". Att man inte har ett ämnesrum med 8–10 smådatorer på en högstadieskola är däremot ingen ursäkt för att inte börja med datalära. Tillgång till en enda smådator kan dock vara vad som behövs för att få igång undervisningen. Följande erfarenheter från försöksverksamheten kan vara av värde:

- ☐ Efter en lärarfortbildning fick varje skola disponera en eller flera datorer längre respektive kortare tid. Det visade sig att vid de skolor, där en dator köptes in fortsatte arbetet även *efter* försöksperioden.
- ☐ En undervisning utan tillgång på datorkraft blir teoretisk. Datoriseringen har medfört ett nytt språk med nya ord och uttryck. Det behövs dataexperter emellan, men det är lite hårt att pracka alla uttryck på oskyldiga skolelever. Förvirring uppstår, och den teoretiska undervisningen förstärker bilden av datorn som en hemlighetsfull trollerilåda.
- ☐ Även dataläran dvs datoriseringen som samhällsaspekt klaras av bättre med datorkraft, om man verkligen vill nå målet med att våga, vilja och kunna ta ställning till datoriseringen. Här handlar det egentligen om en känslomässig undervisning – att själv få pröva och uppleva. Elever som har suttit vid ett tangentbord och använt sig av färdiga, för elevens kunskaps- och mognadsnivå realistiska program, har en annan handlingsberedskap och attityd den dag han eller hon kommer i kontakt med datorer i samhället. Och den dan kommer.

ATT PROGRAMMERA

Många tror att en lärare måste vara skicklig i att programmera för att undervisa i datalära. Inget är felaktigare.

Ungefär en miljon svenskar använder datorn i jobbet. Därav utnyttjar ca 300 000 dataterminaler. Däremot är det ganska få som arbetar med datorer som systemmän och programmerare. Att köpa en dator för att lära alla elever programmera är alltså helt felaktigt. För de allra flesta elever måste programmeringsövningar uppta en mycket liten del av den tid, som anslås till undervisning om datoriseringen och det är då frågan om att använda mycket enkla program.

Det viktiga är inte att programmera utan att använda sig av för eleven relevanta program. Det kommer att finnas hjälp i form av bra programvaror för den lärare som har viljan, men kanske inte tiden eller förmågan. Om skolan har tillgång till en dator och lämpliga läromedel kommer säkert frågan om vilka som skall lära sig att programmera att lösa sig själv. Det blir de som har fallenhet och intresse och finner det vara en kreativ uppgift. Många kommer säkerligen att finna, att de intresserade eleverna snart går om sina lärare. Det är bara att acceptera. Vänd det till en fördel! Lägg t ex ut beställningar på program, som går att använda i klassen tillsammans med alla elever.

HUR KOMMER MAN IGÅNG?

I många grundskolor finns redan nu en fungerande dataundervisning. Det största problemet att komma igång har oftast varit att lyckas finansiera inköp av en smådator. Det har ibland gått att lösa genom att man sparat in på andra läromedel eller bedrivit fria aktiviteter med datorer lärarlöst och använt anslaget till att köpa in en dator. En del skolor har fått bidrag från komvux, sålt reklam till företag i samband med julskyltningar m m. Ibland har det bildats en datorklubb på skolan och lärarna har fortbildats vid lokala studiedagar. En viktig erfarenhet är att då en eller flera datorer anskaffas kräva en lokal och ett fungerande schema, så att arbetet kan bedrivas även på raster och håltimmar.

LÄROMEDEL

Behovet av läromedel är väl tillgodosett. Konkurrerande läromedelsföretag har sett till att sådana har producerats både i datalära och i programmering. Det finns också handledningar i datalära och i programvara till datalära. Till programvaran finns programmen inspelade på kassett och flexskiva till de vanligaste datorerna.

Flera politiska partier har redovisat sin syn på datoriseringen i rapporter. Bl a LO och SAF har producerat filmer med studie- och diskussionsunderlag. Dessa läromedel är delvis partsinlagor – vilket inte skall ses som en nackdel.

Undervisningsradion har producerat flera TV-serier om datoriseringen. Aktuellt just nu (våren 82) är BITS. Videokassetter med dessa program och andra finns på AV-centralen.

Tidningarna innehåller ofta artiklar om datoriseringen. Här finns möjligheter att skaffa andra läromedel än de traditionella.

STUDIEBESÖK

Datoriseringen i samhället är så spridd, att det på de flesta orter är lätt att ordna studiebesök. DIS-rapporten säger att "eleverna bör ges ett stort eget ansvar vid planeringen av studiebesök". Bäst resultat når man, om studiebesöken får vara en avrundning på arbetet om datoriseringen, så att besöken är väl förberedda.

Själva studiebesöken kan ofta ske i smågrupper utan lärare. Frågor och svar kan sammanställas till stenciler och/eller planscher. Genom studiebesöken får eleverna en uppfattning om vad datoriseringen innebär för olika arbetsplatser och vad som eventuellt kommer att vänta dem den dag de själva blir yrkesverksamma. Har man lyckats låna eller hyra datorer för programmeringsövningar kan halva klassen ägna sig åt det och andra halvan åt studiebesök, om skolan inte har egna datorer.

TEMASTUDIER

Mycket av arbetet med samhällets datorisering lämpar sig bra för temastudier. Huvudmomentet datalära är som förut påpekats inte fristående utan arbetet skall ske genom samverkan mellan olika ämnen. Även om man har tillgång till många datorer, blir programmeringsövningar lätt temaarbetets propp. Många skolor har programmering som fri aktivitet. Där finns elever, som är kompetenta att handleda sina kamrater. De kan vara en stor tillgång vid bl a temastudier på det här området.

SKOLANS DATORANVÄNDNINGSSITUATIONER

Vad gör man nu, om man har lyckats skaffa skolan en smådator? Första frågan är var den skall placeras. De flesta skolor har förmodligen inga lediga grupprum, som är lämpligt belägna. Datorn bör få en plats, så att den bli lätt att använda för så många som möjligt.

Datorn kommer säkert att användas i fria aktiviteter. Håltimmar, raster och eftermiddagstid måste användas för att få maximalt utnyttjande och ett fungerande schema. Fritt tillträde till datorrummet eller utkvittering av nyckel får bli en fråga för den enskilda skolan. De fria aktiviteterna kan t ex bestå av en lärarledd lektion och en med arbete på egen hand.

Tillgång till datorer ger eleverna möjligheter att få uppleva, hur de själva reagerar i samspelet med en dator – en lektion i datalära så god som någon annan. Det gäller alltså att skapa tillfällen då datorn behövs. En lämplig programbank med realistiska, på elevernas nivå fungerande program läggs upp på kassett eller annat yttre minne. De program man använder skall ha anknytning till elevens skolvardag. Endast då inser eleverna, vad en dator kan göra fortare och bättre än de själva. Sofistikerade program som dataexperter njuter av men vars nytta en grundskoleelev inte begriper fyller ingen funktion i programbanken.

Om smådatorn är utrustad med mätfunktioner för att mäta korta tider är den mycket användbar i fysikundervisningen. Data samlas och bearbetas. Resultatet presenteras sorterat och prydligt tabellerat redan när den siste eleven har gjort sitt försök. En felmarginal kan läggas in i programmet och eleven får reagera när datorn godkänner ett försök eller när den ber eleven kontrollera eller göra om försöket. I den efterföljande diskussionen diskuterar man *datorn som tjänare* – den hjälper till med beräkningarna *och herre* – den avgör godkänt eller icke godkänt.

Datorer kan också användas i matematik eller samhällskunskap för att bearbeta och presentera statistik. Den kan träna eleverna i huvudräkning, multiplikationstabellen, formelräkning osv. Ekvationssystem och andragradsekvationer kan lösas och man kan lätt komma åt tals delbarhet, primtal m m. Användningsområdena är otaliga.

En smådator rätt använd skall göra varje lektion med en dator till en lektion i datalära. Det var dit DIS-projektet ville nå med orden vilja, våga och kunna ta ställning till och påverka datoriseringen i samhället.

LITTERATURFÖRSLAG

NÄMNAREN — Fortbildningstidskrift
Utkommer med 4 nr/år
Utges av Liber Utbildningsförlaget i samarbete med SÖ och Lärarhögskolan i Mölndal.

NÄMNAREN — temanummer

- ☐ MALM I-III. Matematik för låg- och mellanstadiet.
- ☐ Program för studiedagar i matematik – grundskolan.
- ☐ PUMP-projektet – studiehandledning

SÖ:s rapportserie Utbildningsforskning
PUMP-projektet – bakgrund och erfarenheter (FoU-rapport nr 37).
Utges av Liber Utbildningsförlaget på uppdrag av skolöverstyrelsen

SÖ:s diagnostiska uppgifter i matematik
Utges av Liber Utbildningsförlaget på uppdrag av skolöverstyrelsen.

Matematikterminologi i skolan
En uppslagsbok för alla som undervisar i matematik på alla stadier.
Utges av Liber Utbildningsförlaget på uppdrag av skolöverstyrelsen.

Matematikämnet i skolan
Ny upplaga 1983: Matematik i skolan – metodbok.
Utges av Liber Utbildningsförlaget.

Läroplan för grundskolan, Lgr 80, består av två delar, en allmän del och ett kommentarmaterial som ansluter till denna. Dessa utges i SÖ:s publikation Läroplaner.

Att räkna — En grundläggande färdighet är ett av kommentarmaterialen. Avsikten med detta kommentarmaterial är i första hand att det skall förtydliga och ge konkreta tolkningar av innehållet i kursplanen i matematik och därigenom vara ett stöd i det lokala utvecklingsarbetet.

Materialet syftar till att ge uppslag till diskussioner ute på skolorna och underlätta den planering som skolorna själva svarar för.

KOMMENTARMATERIAL

Lgr 80

SÖ:s publikation Läroplaner 1982:6

Liber Utbildningsförlaget

ISBN 91-40-70802-0