Läroplan för gymnasieskolan

Lgy 70

Matematik
för treårig humanistisk, ekonomisk och samhällsvetenskaplig linje

II Supplement 93

SKOLÖVERSTYRELSEN 1983

Föreliggande supplement i matematik på treårig humanistisk, ekonomisk och samhällsvetenskaplig linje skall tillämpas fr o m läsåret 1984/85 och ersätter sidorna 257–264 i Lgy 70:II Supplement 3-årig E, H, N, S och 4-årig T linje.

Lgy70 II

Läroplan för gymnasieskolan

SKOLÖVERSTYRELSEN

Liber Utbildningsförlaget Stockholm

Supplement 93

Fastställt 1983-06-11
Dnr 5050-83:1590

Matematik

för treårig humanistisk, ekonomisk och samhällsvetenskaplig linje

Liber Utbildningsförlaget
162 89 STOCKHOLM

Separata exemplar kan beställas genom
Liber distribution
Order Utbildning
162 89 STOCKHOLM

FÖRORD

Läroplanen för gymnasieskolan (Lgy 70) består av en allmän del (del I), som är gemensam för samtliga studievägar, samt av supplement (del II) för skilda studievägar och ämnen.

Den allmänna delen (del I) innehåller av Kungl Maj:t fastställda mål och riktlinjer, timplaner och kursplaner (mål och huvudmoment i enskilda ämnen) samt av SÖ utfärdade allmänna anvisningar för gymnasieskolans verksamhet.

Supplementdelen (del II) återger timplaner och kursplaner (mål och huvudmoment), fogar till dessa i förekommande fall delmoment och årskursfördelningar samt ger allmänna riktlinjer för undervisningens bedrivande i de olika ämnena.

Föreliggande supplement i matematik på treårig humanistisk, ekonomisk och samhällsvetenskaplig linje skall tillämpas fr o m läsåret 1984/85 och ersätter sidorna 257–264 i Lgy 70:II Supplement 3-årig E, H, N, S och 4-årig T linje.

Med tanke på den fortlöpande läroplansöversynen är det angeläget att erfarenheter av läroplanens tillämpning som görs på skolorna delges SÖ.

Stockholm i oktober 1983

Skolöverstyrelsen

ISBN 91-40-71088-2 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

LiberTryck Stockholm 1983 301424

INNEHÅLL

HUMANISTISK LINJE

Mål

Eleven skall genom undervisningen i matematik

uppöva den numeriska räknefärdigheten med och utan tekniska hjälpmedel

skaffa sig kunskap om några begrepp och metoder inom matematiken samt

utveckla förmågan att tillämpa matematiken inom olika områden.

Huvudmoment

Numerisk räkning med de fyra räknesätten, enhetsbyten, närmevärden, potenser och procent

Användning av räknetekniska hjälpmedel

Beskrivande statistik

Geometri. Längd-, area- och volymberäkning

Datalära

Funktionslära. Grafiska metoder, proportionalitet, exponentiell förändring. Räta linjens ekvation

Sannolikhetslära

EKONOMISK OCH SAMHÄLLSVETENSKAPLIG LINJE

Mål

Eleven skall genom undervisningen i matematik

uppöva den numeriska räknefärdigheten med och utan tekniska hjälpmedel

bli förtrogen med några väsentliga matematiska begrepp och metoder samt

utveckla förmågan att tillämpa matematiska begrepp och metoder inom olika områden.

Huvudmoment

Numerisk räkning med de fyra räknesätten, enhetsbyten, närmevärden och procent

Användning av räknetekniska hjälpmedel

Geometri. Längd-, area- och volymberäkning

Datalära, tolkning och skrivning av enkla program

Sannolikhetslära

Statistik, normalfördelning

Funktionslära, proportionalitet, räta linjens ekvation

De fyra räknesätten med bokstäver. Algebraisk lösning av ekvationer av första och andra graden och linjära ekvationssystem

Lösning av ekvationer, ekvationssystem och olikheter med grafiska metoder

Potenser, logaritmer, exponentialfunktioner

Geometriska summor, ränta på ränta, annuitet, nuvärde

Begreppen ändringskvot och derivata med tillämpningar. Derivatan av polynomfunktioner och exponentialfunktioner

Integralbegreppet

Fritt val bland följande alternativa områden:
Matriser och ekvationssystem
Linjär optimering
Numeriska metoder
Fördjupad sannolikhetslära
Behandling av stora datamängder t ex i samband med en statistisk undersökning
Annat lämpligt område

För allmänna kommentarer till matematiken i årskurs 1 på HSE-linjerna hänvisas till supplement 69 "Matematik för tvåårig ekonomisk och social linje".

Innehållsmässigt är kursen för HSE-linjerna i årskurs 1 densamma som kursen för tvåårig ekonomisk och social linje. För SE-eleverna bör studierna läggas upp så att man särskilt betonar de moment som är av störst betydelse för de fortsatta studierna i matematik t ex bokstavsräkning och funktionslära.

Allmänna kommentarer

Matematiken skall förbereda för fortsatta studier och vara ett hjälpmedel i studier av andra ämnen. Det är angeläget att matematikens tillämpningar inom andra områden belyses med meningsfulla exempel.

Utöver dessa nyttosynpunkter har matematiken, liksom ämnen som historia, filosofi, religionskunskap, ett bildningsvärde som en viktig del av den västerländska kulturen. Det är därför värdefullt att undervisningen också ger idéhistoriska utblickar och ett historiskt perspektiv.

Planering och samverkan

Momentförteckningen ger ett förslag till kronologisk ordning mellan de olika momenten. Annan ordning än den föreslagna är naturligtvis möjlig. Krav från andra ämnen kan medföra att ett avsnitt behövs vid en viss tidpunkt. Även andra skäl kan anges för en annan ordning än den föreslagna.

I beskrivningen av *alternativa områden* anges hur dessa kan väljas. Lärare och elever bör gemensamt diskutera valen. Detta ger möjligheter att tillgodose olika elevers behov av matematikkunskaper. I en klass kan det vara lämpligt att alla elever läser samma område, medan i en annan klass olika grupper studerar skilda områden. Lokala resurser och elevönskemål får tillsammans avgöra vilken modell som väljs.

För alla moment gäller att kontakt bör tas med lärare i de ämnen som använder matematik. Matematikundervisningen kan därigenom ge det stöd som behövs bl a i form av aktuella tillämpningar. I vissa ämnen, t ex företagsekonomi, kan förekomma andra beteckningssätt och symboler än dem som gäller inom matematikämnet. Eleverna bör vänjas vid att ett och samma begrepp kan ha olika traditionella beteckningar. På så sätt kan eleverna för fortsatta studier i ekonomisk eller matematisk litteratur få en beredskap för förekommande skiftande språkbruk.

Alla tillfällen till samverkan över ämnesgränserna bör tas tillvara för att ge eleverna en känsla för hur matematik används inom andra ämnen. Detta kan ske genom en aktiv och medveten samplanering mellan lärarna, men också genom att matematikläraren ständigt är beredd att fånga upp situationer som ger möjlighet till samverkan. Genom att aktivt lyssna till vad som sker i andra ämnen kan matematikläraren vid tillfällen då eleverna är högt motiverade för att kunna lösa en viss typ av problem sätta in en kort intensiv insats som ger högt kunskapsutbyte. Särskilt inom avsnittet statistik bör exempel hämtas från flera källor i samverkan med andra ämnen.

Arbetssätt

De flesta elever anser att matematik är viktigt men många elevers självförtroende inför matematikstudierna är dåligt. Det bör därför regelbundet förekomma inslag i ämnet som motverkar elevers rädsla för matematik. Alla bör få uppleva känslan av att lyckas och att ämnet kan vara roligt och spännande.

Undervisningen skall karakteriseras av ett aktivt samarbete mellan lärare och elev och bör därför ofta bedrivas i diskussionsform. Elevernas insikt blir bättre, om de själva får medverka, när nya begrepp och metoder införs. Dialog mellan lärare och elev är viktig även för det individuella arbetet.

Både vid klassundervisning och individuell handledning gäller att avvägningen mellan instruktionsundervisning och heuristiskt bedriven undervisning ställer stora krav på lärarens professionella kunnande. Det finns enstaka tillfällen då en enkel instruktion av typen "Gör så här" är effektiv även på lång sikt men i normalsituationen bör en skickligt insatt heuristisk frågeföljd ge eleven aha-upplevelser, som gör den då förvärvade kunskapen mera bestående.

Inom varje moment bör eleverna ges möjlighet att bli säkra både i räknefärdighet och i att lösa tillämpningsuppgifter. Läraren bör organisera regelbundet återkommande repetitioner för att underhålla kunskaperna. Överslagsräkning och huvudräkning är viktiga inom alla delar av kursen och bör ägnas systematisk övning.

Matematikämnet kan bidra till att ge varje elev en ökad insikt om den egna förmågan. Det är därför viktigt att använda läroböcker och annat studiematerial ger eleven möjlighet att med lärarens hjälp bestämma svårighetsgraden hos det som studeras. Det är lämpligt att läraren före varje nytt moment kontrollerar elevernas förkunskaper.

Miniräknaren är ett viktigt hjälpmedel inom alla delar av kursen. Miniräknarens främsta användningsområde är naturligtvis numeriska beräkningar i samband med problemlösning t ex prickning av funktioners grafer, men den kan också användas som ett instrument för matematiska laborationer t ex vid studiet av gränsvärden och variation av tillväxtfaktorer.

Ett viktigt mål för undervisningen är att träna upp elevernas omdöme när det gäller noggrannheten i angivelser. Miniräknarens långa rad av siffror ger många tillfällen att diskutera vad som är rimligt när man lämnar ett numeriskt svar. Matematikläraren bör vara medveten om att det inom ekonomiska tillämpningsämnen finns en inbyggd spänning mellan kameral noggrannhet, som kan ange miljonbelopp intill sista öret, och beräkningar där för många värdesiffror kan ge helt missvisande uppfattning om tillförlitligheten i resultatet. Överhuvudtaget bör eleverna vid problemlösning ofta påminnas om att tänka igenom om resultatet är rimligt, om det t ex stämmer med erhållna figurer.

Huvuddelen av undervisningstiden används till problemlösning. Eleverna bör övas att själva fundera ut tillvägagångssättet dvs välja matematisk modell och metod. Det är därför nödvändigt att problemen är av väl avpassad svårighetsgrad. Man får börja med mycket enkla problem och därefter successivt öka svårighetsgraden. Det är också nödvändigt att problemen är konkreta så att de lätt uppfattas på ett riktigt sätt. Man får dock beakta att de matematiska modellerna förutsätter en viss idealisering av verkligheten. Detta gäller inte minst i ekonomiska sammanhang. Penningflöden får t ex förutsättas ske dygnet runt i jämn takt och inte som i verkligheten vid vissa tidpunkter om man skall kunna tillämpa derivat- och integralkalkyl.

Utvärdering av studiearbetet

Betygsättning i matematik får inte göras enbart utifrån resultatet av skriftliga prov utan skall grundas på en helhetsbedömning av elevernas arbete i matematik.

Utformningen av de skriftliga proven bör variera. Elevernas förmåga att tillämpa begrepp och metoder bör inte enbart prövas med typexempel.
Ett skriftligt prov bör i regel omfatta områden som nyligen behandlats i undervisningen och områden som behandlats tidigare. Man bör undvika alltför speciella problem på tidigare avsnitt.

Övervägande delen av uppgifterna bör vara sådana att de kan lösas av flertalet elever. Skrivningarna bör också ge varje enskild elev möjlighet att visa sin förmåga. Det bör dock framgå för eleverna vilka uppgifter som är av större svårighetsgrad, t ex genom uppgifternas placering eller på annat sätt.

Läraren skall vid rättningen kommentera felaktigheter, så att eleverna utan svårighet inser vari felen ligger. Inte minst av pedagogiska skäl bör skrivningarna återlämnas och efterbehandlas snarast och helst inte senare än efter en vecka. Vid genomgången av skrivningen kan läraren kommentera vanliga fel, diskutera olika lösningsalternativ och ge förslag till kompletteringsuppgifter.

Miniräknare bör vara ett naturligt hjälpmedel för eleverna både vid lektioner och skrivningar.

Kommentarer till speciella moment

Jämfört med tidigare kursplan har *statistiken* utökats och jämte avsnitten *derivata* och *integral* fått en delvis annan utformning.

Diskussion av förutsättningar och datas kvalitet samt tolkning av erhållna resultat bör få en framträdande plats i avsnittet *statistik*. Exempel kan med fördel hämtas från samhällsvetenskapliga och ekonomiska områden. Man bör eftersträva att gärna i samverkan med andra ämnen, särskilt samhällskunskap, ge eleverna träning i kritisk granskning av statistiska material och på dessa baserade slutsatser. Definitionsproblem, mätproblem, tveksamma urvalsmetoder, bortfallsfel, snedvridande faktorer, förväxling av orsak och verkan kan härvidlag exemplifieras. Vid denna undervisning är det viktigt att rätt balans upprättshålls så att även ett positivt synsätt på statistikens roll i samhället förmedlas.

Förståelsen av de svårare avsnitten inom statistiken och sannolikhetsläran underlättas ofta av laborationer och datorsimuleringar.

I samband med momentbeskrivningen till statistiken beskrivs kortfattat en laboration som syftar till att ge ökad insikt i konstruktionen av konsumentprisindex (KPI) och som även antyder svårigheterna att betämma ett allmänt mått på prisförändringarna i samhället.

I avsnittet *ändringskvot och derivata* är det väsentligt att eleverna får en god begreppsuppfattning. De måste därför få se många olika konkreta tillämpade exempel för att förstå vad ändringskvoten mäter och hur den beräknas samt hur den kan användas för beräkning av ändringar. Den begreppsmässiga tyngdpunkten bör ligga på begreppet *ändringskvot* och inte på den gränsövergång som sedan ger derivatan. Först när man visat vad ändringskvoten eller derivatan mäter, bör man övergå till att formelmässigt beräkna derivatan till enkla funktioner. Därefter är det dags att utnyttja derivatan som ett hjälpmedel för att beräkna ändringskvoter och lutningar och för att göra maximi- och minimibestämningar.

Vid studiet av *integraler* måste en hel del tid ägnas åt att ge eleverna olika konkreta exempel, där en kvantitet beräknas med hjälp av den speciella typ av produktsummor som leder fram till integraler. Därefter definieras begreppet integral. Genom att sedan knyta integralbegreppet till en standardsituation, areaberäkning, visar man hur alla integraler kan tolkas som areor och hur en del integraler kan beräknas eller uppskattas denna väg. Därefter visar man hur en del enkla integraler kan beräknas med hjälp av primitiva funktioner.

Momentbeskrivning

Efter varje rubrik anges inom parentes förslag till antal undervisningstimmar för avsnittet.

Exemplen anger den ambitionsnivå som bör eftersträvas för de flesta elever.

ÅRSKURS 1 HSE-linjerna

1 Numerisk räkning (25)*
2 Beskrivande statistik (15)
3 Geometri och ekvationer (15)
4 Mer numerisk räkning (30)
5 Datalära (10)
6 Funktionslära (30)
7 Area- och volymberäkningar (10)
8 Sannolikhetslära (15)

(Betr. momenten 1–8, se supplement nr 69.)

ÅRSKURSERNA 2 OCH 3 SE-LINJERNA

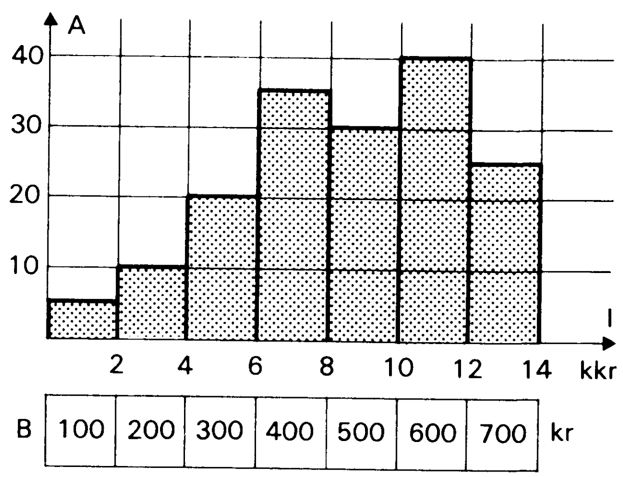
9 Statistik (35)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Viktat medelvärde Klassindelat material Histogram Summapolygon	Beräkning av medelvärde och standardavvikelse ur histogram. Beräkning av median ur summapolygon.	Närvaron vid daghemmen under en dag redovisas i en kommun på följande sätt:

Daghem	Antal barn	Närvaro
A	50	52%
B	40	58%
C	30	80%
D	25	73%
E	30	71%

Hur många procent av barnen var närvarande denna dag?

I en kommun är antalet barn (A) med daghemsplats fördelade efter föräldrarnas månadsinkomst (I) så som figuren visar. I denna visas också månadsavgiften (B) per barn för de olika inkomstklasserna. Ingen familj har mer än 1 barn i daghem.



a) Vilken är medelinkomsten per månad för de familjer som har barn i daghem?

b) Hur stor blir kommunens inkomst av daghemsavgiften per månad?

c) Hur stor är medianinkomsten per månad för de familjer som har ett barn i daghem?

*Antalet undervisningstimmar.

MOMENT | **KOMMENTARER** | **EXEMPEL**

Snedvridande faktorer

Eleverna bör övas i att finna snedvridande faktorer och diskutera deras inverkan. T ex är män och kvinnor på en arbetsplats ofta olika fördelade beträffande ålder och typ av arbete. Därför kan medelfrånvaron bland män och kvinnor ge ett missvisande mått på könsfaktorns betydelse för sjukfrånvaron.

Standardpopulationsmetoden för eliminering av snedvridande faktorers inverkan behandlas.

Tabellen visar resultatet från en tentamen. Materialet är klassindelat efter resultatet från ett tidigare förkunskapsprov.

Poäng på förkunskaps-provet	Tentamensresultat			
	Grupp 1		Grupp 2	
	Antal	Medelpoäng	Antal	Medelpoäng
−50	3	25,0	2	23,0
51−75	11	32,0	8	32,5
76−100	6	40,5	7	40,0
101−	2	48,0	5	52,0

a) Beräkna medelvärdet i grupperna.

b) Gör en jämförelse enligt standardpopulationsmetoden så att inverkan av förkunskaper elimineras.

Svarsbortfall

Svarsbortfallets inverkan på en undersökning belyses med olika antaganden, bl a extremfallen att a) alla b) ingen i bortfallet har den undersökta egenskapen.

Enkät i Eskilstunaområdet:

Hälften inom Metall positiva till arbetet

Rubriken baseras på de 2 550 som svarat av 7 500 tillfrågade. Beräkna andelan "positiva till arbetet" bland samtliga 7 500 tillfrågade om man antar att a) alla b) ingen c) 30% d) 70% i bortfallet är positiva till arbetet. e) Är rubriken bra? Sätt annars ny rubrik till referatet.

Man behandlar metoden att genom ett stickprov skatta andelen med den undersökta egenskapen i bortfallet.

Vid en rundfråga till 4 000 hushåll om de ville ha en kvällsöppen butik svarade endast 1 600 och bland dessa svarade 30% ja. I bortfallet valdes slumpmässigt 200 hushåll för personligt besök och av dessa svarade 100 hushåll ja. Den använda urvalsmetoden gör det rimligt att låta andelen ja-svarare i stickprovet utgöra skattning av motsvarande proportion bland de 2 400 hushållen i bortfallet. Gör en uppskattning av hur stor andel av de 4 000 hushållen som vill ha en kvällsöppen butik.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Index	Användning av olika index, speciellt konsumentprisindex. Omräkning till fast penningvärde med hjälp av index.	Under vilken av femårsperioderna 1971–1976 och 1976–1981 var prisändringen (procentuellt) störst? En person hade år 1975 nettoinkomsten 40 000 kr. År 1978 var hennes nettoinkomst 50 000 kr. Har nettoinkomsten ökat eller minskat om man räknar i fast penningvärde? Använd tabellen för konsumentprisindex för omräkning.
	Omräkning mellan olika indexserier	Konsumentprisindex har numera 1980 som basår (tidigare 1949). För huvudgruppen "Kläder och skor" var indextalet 106,1 för januari 1982 enligt 1980 års serie. I 1949 års serie var indextalet för "Kläder och skor" 310 för år 1980. a) Beräkna indextalet för huvudgruppen "Kläder och skor" för januari 1982 med 1949 som basår. b) För huvudgruppen "Kläder och skor" var indextalet 175 för år 1971 i 1949 års serie. Vilket blir motsvarande indextal i 1980 års serie?

År	Konsumentprisindex
1971	254
1972	269
1973	287
1974	316
1975	347
1976	382
1977	426
1978	469
1979	502
1980	571
1981	640
1982	695

MOMENT | **KOMMENTARER** | **EXEMPEL**

Normal-fördelningen

Arbetet med histogram får föra över till frekvensfunktioner. Speciellt studeras den normala frekvensfunktionen som approximation av motsvarande histogram som visas i figur 1.

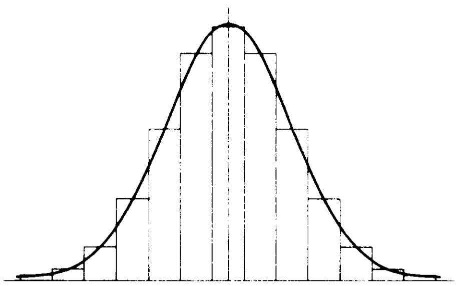


Fig. 1

Normalfördelningen presenteras grafiskt eller i en förenklad tabell så som framgår av figurerna 2 och 3. För normalfördelade material gäller följande symmetriska fördelning.

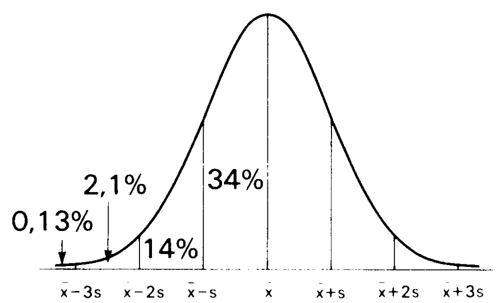


Fig. 2

eller i tabellform:

Observation	Relativ frekvens	Kumulerad relativ frekvens
$x<\bar{x}-3s$	0,13%	0,13%
$\bar{x}-3s<x<\bar{x}-2s$	2,14%	2,28%
$\bar{x}-2s<x<\bar{x}-1,5s$	4,41%	6,68%
$\bar{x}-1,5s<x<\bar{x}-s$	9,18%	15,87%
$\bar{x}-s<x<\bar{x}-0,5s$	14,99%	30,85%
$\bar{x}-0,5s<x<\bar{x}$	19,15%	50,00%

Fig. 3

Innehållet i en storförpackning djupfrysta grönsaker anges vara 500 g. I själva verket är mängden grönsaker i förpackningen normalfördelad med medelvärdet 510 g och standardavvikelsen 7,5 g.
Hur många förpackningar i ett parti på 100 000 kan väntas väga minder än 487,5 g?

En maskin kapar metalltrådar. Längden i mm av en tråd är normalfördelad med medelvärdet 265 och standardavvikelsen 2,0 mm. Hur stor del av produktionen kan väntas ha en längd mellan 261 mm och 269 mm?

Vid försäljningen av ovannämnda metalltrådar vill företaget uppge en minsta längd som ca 98% av trådarna i en stor leverans skall ha. Vilken minsta längd kan företaget uppge?

Konsumentprisindex (KPI)

Här beskrivs en laboration som syftar till att ge ökad insikt i konstruktionen av konsumentprisindex (KPI) och som även antyder svårigheterna att bestämma ett allmänt mått på prisförändringar i samhället.

Som arbetsmaterial behöver eleverna tillgång till indextabeller ur någon årgång av "Konsumentpriser och indexberäkningar" (SOS, LiberFörlag). Dessutom behövs prisuppgifter som eleverna samlar in bland ortens affärer. Eleverna skall nämligen, enskilt eller i grupp, konstruera ett "personligt" konsumentprisindex och därvid utgå från en faktisk eller tänkt månadsbudget. Följande instruktioner kan ges:

"Uppskatta hur dina månatliga utgifter fördelar sig procentuellt på följande s k huvudgrupper:

1. Livsmedel.
2. Alkoholhaltiga drycker, tobak.
3. Bostad, bränsle, lyse.
4. Kläder och skor.
5. Diverse (nöjen, resor, tidningar, böcker etc).

Dessa procenttal blir dina s k *vägningstal* (som kan vara noll t ex för alkohol och tobak).

I din tabell finns bl a en förteckning över de representantvaror som KPI baseras på. Välj ut minst fem av representantvarorna ur grupp 1 och minst tre varor ur vardera av grupp 2, 4 och 5. Som "representantvara" för grupp 3 väljer du din eller familjens bostad. Tänk efter (och notera) hur mycket du förbrukar per månad av var och en av dina representantvaror.

Gå nu ut i butikerna och ta reda på de dagsaktuella priserna på dina representantvaror. I "Konsumentpriser och indexberäkningar" finner du sedan respektive pris år 19xx.

För var och en av huvudgrupperna kan du nu beräkna ett delindextal. För t ex grupp 1 "Livsmedel" gör du så här. Beräkna vad din månadsförbrukning av de fem representantvarorna sammanlagt kostar idag. Räkna också ut vad denna förbrukning hade kostat år 19xx. Kvoten av dessa två summor multiplicerad med 100 utgör delindextalet för grupp 1. På liknande sätt erhålls delindextalen för de övriga grupperna.

Du har nu beräknat fem delindextal (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5). För att få ett sammanfattande mått på prisutvecklingen för hela din konsumtion skall de beräknade delindextalen vägas samman till ett totalindex. Som vikter används dina tidigare uppskattade vägningstal (w_i). Formeln ser ut så här:

$$I_{\text{total}} = \frac{w_1I_1 + w_2I_2 + w_3I_3 + w_4I_4 + w_5I_5}{100}$$

Det framräknade indextalet beskriver alltså prisutvecklingen från år 19xx till dagens datum. Detta indextal skall sedan kedjas till KPI år 19xx så att du får det dagsaktuella värdet på ditt personliga KPI med 1980 (eller 1949) som basår. Jämför slutligen ditt personliga KPI med SCB:s senast publicerade värde."

I en klass är vanligen elevernas indextal olika. Olikheter i indextalen jämfört med KPI kan ge upphov till intressanta diskussioner om dettas lämplighet som mått på prisförändringarna för olika grupper i samhället.

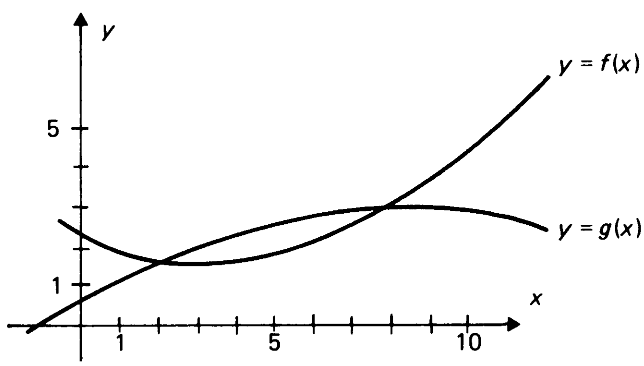
Laborationen lämpar sig som koncentrationsdag tillsammans med samhällskunskap.

10 Algebra (20)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
De fyra räknesätten med bokstäver **Distributiva lagen** **Konjugatregeln** **Kvadreringsregeln**	Momentet avser att tillgodose behovet av algebra i momenten 11–14. Förenklingar och uppdelning i faktorer med hjälp av reglerna.	Skriv som ett bråk $\frac{1}{a} - \frac{1}{3a}$ Förenkla $3(a+2b) - 2(3a-b)$ Skriv som en summa a) $(x+h)(x^2+2xh+h^2)$ b) $x(1+\frac{1}{x})$ I ett bråk är täljaren $x^2 - p^2$. Nämnaren är $x - p$. Förenkla bråket. Förenkla $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$
Nollställen		Lös ekvationen a) $x(x-1)(x+5) = 0$ b) $t^3 - 4t = 0$
Andragradsekvationer	Övning i att införa en beteckning på en obekant storhet och att ställa upp en ekvation.	Lös ekvationen $\frac{1}{x} = 4 - x$ a) Ange svaret exakt b) Ange svaret med minst tre värdesiffror. Lös ekvationen $2{,}19u^2 - 25{,}8u + 71{,}3 = 0$ Ange svaret med tre värdesiffror. Bestäm sidorna i en rektangel med omkretsen 28 l.e. och diagonalen 10 l.e.

11 Funktionslära (fortsättning) (20)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Värdetabeller och grafer Symbolen *f(x)*	En repetition av momentet 6.1 med tonvikt på tillämpningar. Beräkning av värdetabeller och prickning av funktioners grafer. Kännedom om andragradsfunktioners grafer.	Pricka kurvorna a) $y = 2x^2 - 3x + 2$ b) $y = x^3 - 2x$ c) $y = \frac{3}{x} + 5$ d) $y = 5 - 4x - 3x^2$ Bestäm $f(5)$ där a) $f(x) = 3 - 0{,}2x$ b) $f(x) = \frac{2}{x}$ c) $f(x) = x(8 - x)$ d) $f(x) = 1{,}2^x$ Man har $f(x) = x^2 + 3x$ Beräkna $f(3) - f(2)$
	Övning i att införa en variabelbeteckning och att bilda ett funktionsuttryck med denna variabel.	Ett hushålls totala elkostnad under ett år består av en fast del 420 kr och en rörlig del 0,20 kr/kWh. a) Ställ upp en formel som anger hur den totala elkostnaden beror av antalet förbrukade kilowattimmar. Ange sambandet i ett koordinatsystem. b) Beräkna antalet förbrukade kilowattimmar om den totala elkostnaden är 1500 kr. Vid priset x kr/enhet kan man sälja $(100 - x)$ enheter. Ange ett uttryck för intäkten.
Grafiska lösningar	Lösning av ekvationer, olikheter och ekvationssystem med grafisk-numeriska metoder (en kombination av grafritning och användning av miniräknare).	Lös grafiskt ekvationssystemet a) $\begin{cases} 1{,}2x - 3{,}1y = -3{,}2 \\ 3{,}4x + 2{,}2y = 6{,}1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$ Lös med hjälp av värdetabell och graf ekvationen $x^3 - 3x - 5 = 0$ Lös grafiskt olikheten $f(x) < g(x)$ med hjälp av nedanstående figur.



För vilka $x > 0$ gäller att $U(x) > E(x)$ då

$$\begin{cases} U(x) = x^2 + 2 \\ E(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Ekvationssystem	Algebraisk lösning av linjära ekvationssystem.	Lös exakt ekvationssystemet $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 5x-2y=5 \end{cases}$ En eldistributör säljer elenergi till en fabrik inom processindustrin. Taxan var ett år 11 öre/kWh för natt och 22 öre/kWh för dag. Fabrikens elkostnad var då 2 750 kr/dygn. Tre år senare hade taxan höjts till 16 öre/kWh för natt 28 öre/kWh för dag, och fabrikens dygnskostnad för elenergi var då 3600 kr. Vilken blir fabrikens dygnskostnad för elenergi, om taxan höjs till 20 öre/kWh för natt och 30 öre/kWh för dag? Man förutsätter att fabrikens elkonsumtion är oförändrad under årens lopp.

12 Ändringskvot och derivata (35)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Ändringskvot

Värdet av ändringskvoten,

$$\frac{\text{ändringen } i\ y}{\text{ändringen } i\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

skall ingående studeras för olika funktioner. Genom numeriska och grafiska undersökningar i många exempel observeras, att ändringskvoten för små Δx är nästan oberoende av Δx. Det kan vara lämpligt att först studera ändringskvoten för funktioner där denna är konstant. Ändringskvoten är här lika med k-värdet och ett mått på linjens lutning.

Begreppen ändringskvot och lutning studeras sedan även för icke-linjära förlopp. Man finner att ändringskvoten för små Δx kan användas som ett mått på kurvans lutning och att tangentens riktningskoefficient nära överensstämmer med denna ändringskvot.

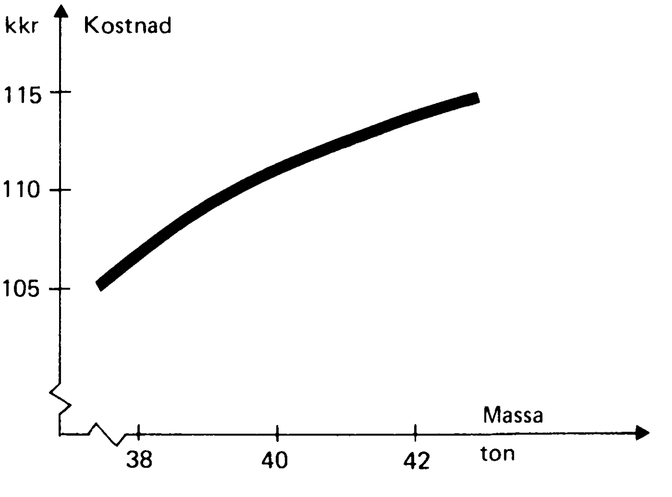
Hur stor är ändringskvoten (marginalskatten) i följande skattetabell)

Inkomst (kr)	Skatt (kr)
60 100	25 011
60 200	25 074
60 300	25 137
60 400	25 200
60 500	25 263

Man studerar hur omkretsen och arean av en cirkel beror av radien r. Beräkna i vartdera fallet ändringskvoten då r ökar från a) 8 till 8,2 b) 8 till 8,1

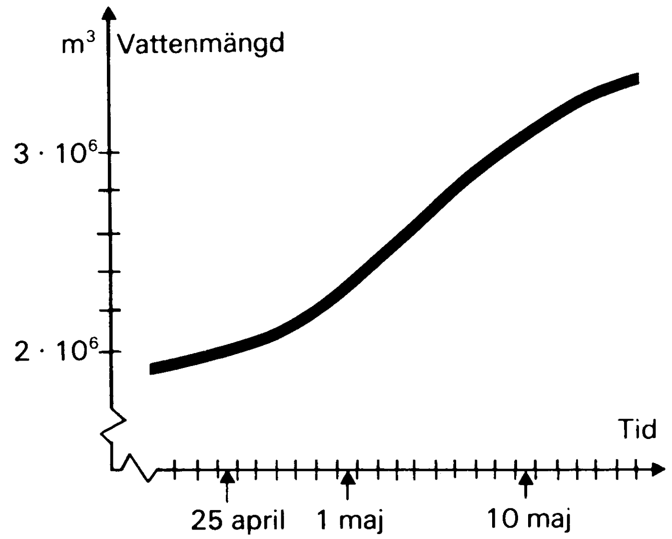
Skatten på 70 000 kr är 32 950 kr. Marginalskatten i detta inkomstläge är 0,75.
Vad är skatten på
a) 73 500 kr b) 69 000 kr.

Kostnaden att producera x kg av en viss kemikalie framgår av grafen nedan. Bestäm ändringskvoten (marginalkostnaden) i kr/kg då man ökar produktionen vid nivån 40 ton.



MOMENT | **KOMMENTARER** | **EXEMPEL**

Vattenmängden i en damm beror av tiden enligt nedanstående diagram. Med vilken hastighet (i kubikmeter per minut) ökar vattenmängden mitt på dagen den 1:a maj?



Bestäm med grafisk metod lutningen hos kurvan $y = x^2 + 3x$ i punkten (1,4).

Man beräknar tangentens k-värde och därmed lutningen hos en kurva.

Bestäm k-värdet för ett antal linjer genom punkten P(2,1) på kurvan $y = x^2/4$ och andra punkter Q på kurvan i närheten av P. Bestäm därur k-värdet för kurvans tangent i punkten P.

Derivata

Derivatan definieras som gränsvärdet av ändringskvoten.

Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = x^2$ med hjälp av derivatans definition.

Symbolen $f'(x)$.

Man skriver

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

och

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

och accepterar en intuitiv uppfattning av symbolen lim.

Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition då
a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = x^2 - 1$ c) $f(x) = 2x^2$

För en funktion f gäller att $f(2) = 3$ och $f'(2) = 4$.
a) Ange ungefärliga värden på $f(2{,}05)$ och $f(1{,}95)$.
b) Gör en jämförelse med de exakta värdena på $f(x) = x^2 - 1$.

Kostnaden för att tillverka 2 000 burkar lingonsylt är 3 000 kr. Marginalkostnaden för att tillverka fler burkar lingonsylt är 4 kr per burk. Ange den totala kostnaden för att tillverka 2 050 burkar lingonsylt.

MOMENT	KOMMENTAR	EXEMPEL
Derivering	Man bevisar $Dx^n = nx^{n-1}$ för några n-värden och accepterar regeln för övriga n. Derivatan härleds för $y = ax+b$, $y = ax^2$ Man accepterar utan härledning uttrycken för y' då $y = 1/x$ och för ett polynom.	
	Satserna $D(kf(x)) = kf'(x)$ $D(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$ accepteras utan bevis	Beräkna $f'(x)$ då $f(x) = 3x^2-2x+5$ Beräkna $f'(2)$ då $f(x) = 5x+\frac{2}{x}$
	Tillämpningar på olika förändringar, t ex hastighet.	En fallande sten kan beräknas ha fallit $5x^2$ meter efter x sekunders fall, där $0 \leqq x \leqq 10$. Beräkna stenens hastighet för $x = 1,5$.
Kurvritning, maximum-minimum-problem	Intuitiv förståelse av att derivatan är noll i inre extrempunkter. Detta utnyttjas vid ritning av enkla kurvor.	Betrakta kurvan $y = x^3-9x^2+24$. a) Beräkna derivatans nollställen. b) Gör en värdetabell för y som innefattar derivatans nollställen. c) Rita kurvan.
	Några enkla maximum- och minimumproblem studeras.	Vid priset x kr kan man sälja $(8-0,2x)$ enheter. Beräkna den maximala intäkten. Att tillverka q enheter kostar $T(q)$ kr, där $T(q) = 1\,600+40q+q^2$ $(10 \leqq q \leqq 50)$. Beräkna lägsta genomsnittskostnaden.

13 Exponentialfunktioner (30)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Potenser med heltalsexponent **Geometrisk summa**	Potenslagarna behandlas och definitionerna av a^0 och a^{-n} ($n \in Z_+$) motiveras. Formeln för geometrisk summa härleds.	Skriv som en potens a) $7^5 7^{-8} 7^9$ b) $3^9/3^{-5}$ Visa att $25^{90} = 125^{60}$ Beräkna $500+500 \cdot 1{,}08+500 \cdot 1{,}08^2+\ldots+500 \cdot 1{,}08^{23}$ Beräkna $5+15+45+135+\ldots+32805$
Ränta på ränta **annuitet** **nuvärde**		Vid åtta årsskiften i följd sätts vid varje årsskifte in 2 000 kr på en bankbok. Hur stort är nuvärdet av dessa insättningar vid tidpunkten för den första insättningen? Räntesats 9%. Ett lån på 150 000 kr samt ränta skall betalas med 20 lika stora årliga belopp med början ett år efter det att lånet erhölls. Beräkna annuiteten om räntesatsen är 11%.
	Problem som leder till räkningar med uttryck av typen $a \cdot b^n$ ($n \in Z$) behandlas.	I en bakterieodling fördubblas antalet bakterier varje timme. Hur många bakterier finns i odlingen efter 14 h om det fanns 200 från början?
Potenser med reell exponent	Symbolerna $\sqrt[n]{a}$ och $a^{\frac{m}{n}}$ definieras Problem som leder till räkningar med uttryck av typen $a \cdot b^c$ ($c \in R$) behandlas. Potenslagarna formuleras.	Antag att kronans värde minskar med 10% per år. Hur mycket är i så fall en krona värd i dagens penningvärde om 8 år? Lös ekvationen $4^x = 8$ I ett visst land är folkmängden 17 miljoner och den antas vara fördubblad om 25 år. Hur stor är den om 10 år om tillväxten är exponentiell? En kub har volymen 5,00 dm^3. Beräkna kubens totala begränsningsarea. Hur stor är inflationen varje 2-årsperiod om den är 50% varje 7-årsperiod? Den årliga inflationen förutsätts vara konstant.
Exponentialfunktioner	Kurvor $y = a^x$ ritas och lutningen för $x = 0$ diskuteras. Talet e införs i samband med att $De^x = e^x$ troliggörs.	Rita kurvan a) $y = 2^x$ b) $y = 3^x$ c) $y = 0{,}5^x$
Sammansatt funktion	Regeln $D(f(ax+b)) = f'(ax+b) \cdot a$ troliggörs.	Beräkna $f'(3)$ då $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$ Bestäm talen A och k i likheten $f(x) = A \cdot e^{kx}$ så att $f(0) = 5$ och $f'(0) = 0{,}5$

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Logaritmer	Aktivt behärskande av logaritmlagarna krävs ej, men exempel kan ges i övningsuppgifter. Huvudsakligen diskuteras baserna 10 och e.	Visa att $10^{\lg 2 + \lg 3} = 10^{\lg 6}$

Visa att a) $1{,}15^x = 10^{x \cdot \lg 1{,}15}$

b) $\lg 1{,}15^x = x \cdot \lg 1{,}15$

Bestäm talet k så att $2^x = e^{kx}$ för alla x.

Beräkna $f'(0)$ då $f(x) = 2^x$

Beräkna $f'(2{,}5)$ då $f(x) = 5 \cdot 3^{2x}$

Om I betecknar ljudintensiteten i W/m^2, så definieras ljudnivån L i enheten decibel enligt

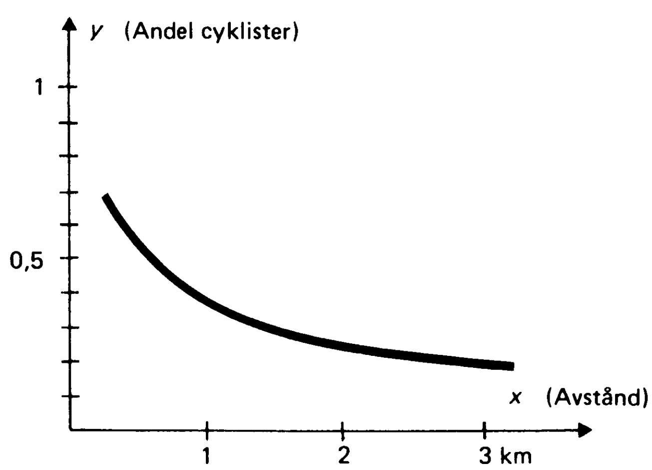
$L = 10 \cdot \lg I/I_0$ där $I_0 = 10^{-12}$W/m^2.

Med hur många decibel ökar ljudnivån om

a) ljudintensiteten ökar från $8 \cdot 10^{-7}$ W/m^2 till $8 \cdot 10^{-4}$ W/m^2.

b) ljudintensiteten fördubblas.

En undersökning av färdmedelval (bil, cykel etc) i Malmö gav nedanstående resultat.
Man kan räkna med att $\ln y = Ax + B$. Läs av diagrammet vid $x = 0{,}5$ och $x = 3$ och beräkna därefter värdena på A och B.



MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
	Problem som leder till ekvationer av typen $a \cdot b^x = c$ behandlas.	Lös ekvationen $e^{0,7} = 10^x$ En population antas växa exponentiellt. Vid en viss tidpunkt bestod populationen av 190 000 individer och 15 år senare av 280 000. a) Hur stor är populationen efter ytterligare 10 år? b) Efter hur många år har populationen vuxit till 460 000 individer?
	Approximationen ändringskvoten ≈ derivatan tillämpas.	I en bakterieodling finns från början 300 bakterier. Antalet växer exponentiellt och fördubblas varje halvtimme under de första 5 timmarna. Hur många nya bakterier bildas per sekund efter 4 h?

14 Integraler (15)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Inledning

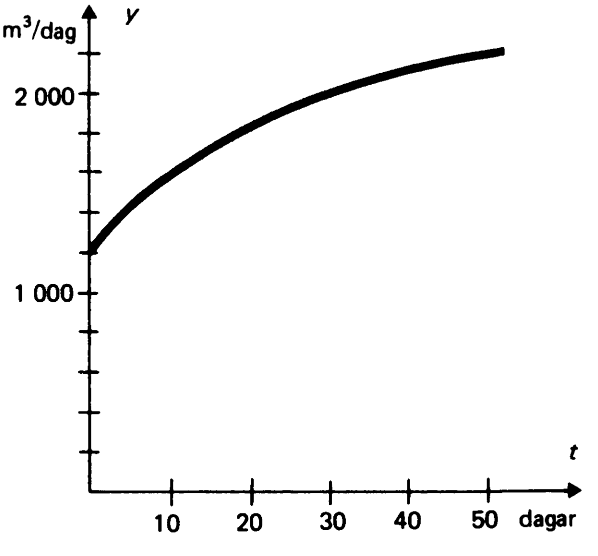
Det kan vara lämpligt att inleda med numeriska beräkningar av summor av produkter där den ena faktorn varierar. Dessa summor av produkter kan illustreras med exempelvis tabeller och areor.

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (m/s)	5	6	7	8	9	10	11

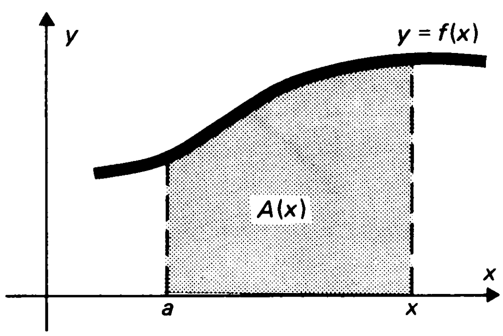
Tabellen visar en bils hastighet vid några tidpunkter. Gör en uppskattning av hur långt bilen har gått under de 3 första sekunderna.

Hur långt kör en bil under 5 sekunder om dess hastighet under detta tidsintervall kan beskrivas med formeln
a) $v = 5 + 2t$ b) $v = 5 + 2t - 0{,}2t^2$
där v är hastigheten i m/s vid tiden t sekunder efter intervallets början.

I en flod ökar vattenmängden på våren och i nedanstående figur visas hur y, som är antalet tusen kubikmeter vatten som per dag strömmar förbi ett visst mätställe, beror av tiden. Tiden t anger antalet dagar efter 1 april. Hur många kubikmeter vatten har strömmat förbi mellan den 1 april och 20 maj?



Försäljningen i ett nyöppnat varuhus ökar varje dag enligt formeln $y = 0{,}4t + 80$, där y anger dagskassan i tusentals kronor och t anger antalet dagar efter det varuhuset öppnat. Hur mycket säljer man sammanlagt under de första 100 dagarna?

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
Integral-begreppet	Beteckningen $\int_a^b f(x)dx$ införs för dylika summor av produkter. Numeriska integralberäkningar.	Beräkna $\int_0^1 x^n dx$ för olika n-värden.
	Beräkning av integral med hjälp av area.	Beräkna, t ex genom att tolka integralen som en area: a) $\int_0^b x dx$ b) $\int_a^t 2dx$ c) $\int_1^t (3x+1)dx$ En slalomåkares puls är 75 slag i minuten 2 minuter före ett åk. Sedan går den upp med konstant hastighet, så att den är ungefär 200 slag i minuten, när 30 sekunder av åket förflutit och även under resten av åket. Hur många slag slår slalomåkarens hjärta under ett åk som tar 2 minuter?
Primitiv funktion	Sambandet $A'(x) = f(x)$ troliggörs geometriskt. Likheten $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ härleds.  Endast områden i första kvadranten studeras.	Beräkna arean av området mellan $y = e^x$ koordinataxlarna och $x = 1$. Beräkna arean av området mellan $y = 2x+3$ och $y = x^2$
Tillämpningar		Antalet tusen kubikmeter vatten, som per dag strömmar fram i en flod, har under april visat sig kunna approximeras med uttrycket $1200 + 40t - 0{,}40t^2$ där t anger antalet dagar efter 1 april. Hur mycket vatten kan beräknas strömma förbi under maj månad om samma modell för vattnets strömning gäller? (t anger fortfarande antalet dagar efter 1 april). Sveriges valutareserv minskade under en 20-dagarsperiod med y Mkr om dagen, där $y = 5 - t + 0{,}1t^2$ och $t = 1, 2, 3, \ldots, 20$. Ge ett ungefärligt värde på den totala minskningen av valutareserven under dessa 20 dagar.

15 Fritt val bland följande alternativa områden (25)

Matriser och ekvationssystem

Linjär optimering

Numeriska metoder

Fördjupad sannolikhetslära

Behandling av stora datamängder t ex i samband med en statistisk undersökning

Annat lämpligt område

Läroplan för gymnasieskolan Lgy 70

II Supplement 93

Liber
Utbildningsförlaget

ISBN 9