Läroplan för gymnasieskolan **Lgy 70**

Matematik
för treårig naturvetenskaplig linje och fyraårig teknisk linje

II Supplement 75

SKOLÖVERSTYRELSEN 1981

Föreliggande supplement i matematik på treårig naturvetenskaplig linje och fyraårig teknisk linje skall tillämpas fr o m läsåret 1982/83 och ersätter sidan 175 i Lgy 70:I Allmän del, andra översedda upplagan 1975 och sidorna 257–264 i Lgy 70:II Supplement 3-årig E, H, N, S och 4-årig T linje.

Lgy 70 II

Läroplan för gymnasieskolan

SKOLÖVERSTYRELSEN

Liber UtbildningsFörlaget Stockholm

Supplement 75

Fastställt 1981-04-09

Matematik för treårig naturvetenskaplig linje och fyraårig teknisk linje

r Eab

LiberUtbildningsförlaget
162 89 STOCKHOLM

Separata exemplar kan beställas genom
Liber distribution
Läromedelsorder
162 89 STOCKHOLM

FÖRORD

Läroplanen för gymnasieskolan (Lgy 70) består av en allmän del (del I), som är gemensam för samtliga linjer, samt av supplement (del II) för skilda linjer och ämnen.

Den allmänna delen (del I) innehåller av Kungl Maj:t fastställda mål och riktlinjer, tim- och kursplaner (mål och huvudmoment i enskilda ämnen) samt av SÖ utfärdade allmänna anvisningar för gymnasieskolans verksamhet.

Supplementdelen (del II) återger tim- och kursplaner (mål och huvudmoment), fogar till dessa i förekommande fall delmoment och årskursfördelningar samt ger allmänna riktlinjer för undervisningens bedrivande i de olika ämnena.

Föreliggande supplement i matematik på treårig naturvetenskaplig och fyraårig teknisk linje skall tillämpas fr o m läsåret 1982/83 och ersätter sidan 175 i Lgy 70:I Allmän del, andra översedda upplagan 1975 och sidorna 257-264 i Lgy 70:II Supplement 3-årig E, H, N, S och 4-årig T linje.

SÖ avser att efter hand revidera och komplettera supplementen med hänsyn till erfarenheterna vid läroplanens tillämpning. Det är därför angeläget att sådana erfarenheter meddelas SÖ.

Stockholm i november 1981

Skolöverstyrelsen

ISBN 91-40-70692-3   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

LiberTryck Stockholm 1982

INNEHÅLL

Mål

Eleven skall genom undervisningen i matematik

bli väl förtrogen med några väsentliga matematiska begrepp och metoder,

förvärva färdighet i att tillämpa matematiska begrepp och metoder samt

uppöva färdigheten i numerisk räkning även med tekniska hjälpmedel.

Huvudmoment

Numerisk räkning med tal i bråk- och decimalform.

Några enkla satser om cirkeln och månghörningar, likformighet samt några enkla konstruktioner med passare och linjal.

Sinussatsen, cosinussatsen, enhetscirkeln, additionssatserna.

Lösning av ekvationer, ekvationssystem och olikheter med grafisk-numeriska metoder.

Proportionalitet, räta linjens ekvation.

Gränsvärdesbegreppet.

Studium av grafer och derivator till polynomfunktioner, enkla rationella funktioner, potensfunktioner, exponential- och logaritmfunktioner samt trigonometriska funktioner.

Derivata av sammansatt funktion, produkt och kvot.

Omformning av enkla bokstavsuttryck, faktoruppdelning av andragradspolynom.

Algebraisk lösning av ekvationer av första och andra graden och linjära ekvationssystem.

Potens- och logaritmlagar.

Integralbegreppet.

Volym av cylinder, kon och rotationskroppar.

Areaberäkning.

Sannolikhetsbegreppet.

Datalära, tolkning och skrivning av enkla program; enkla numeriska metoder för ekvationslösning och integralberäkning.

Minst två av följande alternativa områden:

Komplexa tal, integrationsmetoder, differentialekvationer, fördjupad sannolikhetslära, vektorer, serier.

Allmänna kommentarer

Studiernas syfte

Endast ett fåtal av eleverna kommer senare att ägna sig åt matematik som vetenskap. För de flesta kommer matematiken att vara ett instrument som är nödvändigt för fortsatta studier eller senare yrkesverksamhet samt i rollen som samhällsmedborgare. Matematikundervisningen bör utformas med detta som utgångspunkt.

Matematiken skall också vara ett hjälpmedel vid studiet av andra ämnen. Det är därför viktigt att matematikens tillämpningar inom dessa ämnen belyses med meningsfyllda exempel.

Undervisningen bör också ge historiska aspekter och utblickar på matematiken. Detta har stort principiellt värde och underlättar ofta elevernas förståelse för ämnet. Lämpliga områden kan vara negativa tal, differential-och integralräkning samt sannolikhetslära. I detta sammanhang kan man beröra stora matematikers insatser på olika områden.

Planering och samverkan

Med undantag av *datalära* och *numeriska metoder* är avsnitten i tidsplanen numrerade i en tänkt kronologisk ordning. Datalära och numeriska metoder behandlas vid lämpliga tillfällen i de årskurser där de är placerade.

Vid planeringen av matematikkursen måste hänsyn tas dels till matematikens egna krav på en både logisk och sammanhängande ordning mellan de olika avsnitten, dels till andra ämnens krav på att eleverna skall ha vissa kunskaper i matematik. Man bör också sträva efter att använda likartade symboler och beteckningar i matematik och tillämpningsämnena.

Annan ordning än den i det följande föreslagna är naturligtvis möjlig. Krav från andra ämnen kan medföra att ett avsnitt behövs vid en viss tidpunkt. Även andra skäl kan finnas för en annan ordning än den föreslagna.

I beskrivningen av *alternativa områden* anges hur dessa kan väljas. Lärare och elever bör gemensamt diskutera valen. Detta ger möjligheter att tillgodose olika elevers behov av matemtikkunskaper. Särskilt viktigt är att de tekniska ämnenas krav på matematik tillgodoses. Så t ex får det förutsättas att elever som läser ellära väljer *komplexa tal* som ett alternativt område. I en klass kan det vara lämpligt att alla elever läser samma områden, medan i en annan klass olika grupper studerar skilda områden. Lokala resurser och elevönskemål får tillsammans avgöra vilken modell som väljs.

Arbetssätt

Undervisningen skall karakteriseras av ett aktivt samarbete mellan lärare och elev och bör därför ofta bedrivas i diskussionsform. Elevernas insikt blir bättre, om de själva får medverka, när nya begrepp, metoder och satser införs. Dialog mellan lärare och elev är viktig även för det individuella arbetet. Det är vidare angeläget att eleverna inser varför man utformat en matematisk definition på ett visst sätt och varför man gjort vissa förutsättningar i en matematisk sats.

Inom varje moment bör eleverna uppnå säkerhet i fråga om såväl den mekaniska räknefärdigheten som förmågan att lösa tillämpningsuppgifter. Det är viktigt att dessa färdigheter underhålls genom repetition. Eleverna bör ha tillgång till sådant arbetsmaterial att de själva med lärarens hjälp kan välja lämplig svårighetsgrad. Denna måste avvägas med hänsyn till elevernas förutsättningar. Matematikämnets struktur gör att ett moment i regel bygger på förkunskaper från andra moment. Detta måste noga beaktas, så att en elev inte börjar på ett nytt moment utan tillräcklig grund från tidigare moment.

Eleverna bör också få tillfälle att muntligt beskriva sitt arbete och dess resultat, vilket ibland kan ske i helklass, ibland i mindre grupper. Det väsentliga är träningen i muntlig framställning av frågeställningar och tankegångar. Kraven bör anpassas efter elevernas förutsättningar.

Miniräknare bör vara ett hjälpmedel inom alla moment, men huvudräkning, räkning med papper och penna samt överslagsräkning bör planeras in i undervisningen och ägnas systematisk övning. Nödvändigheten av ständiga kontroller genom överslagsräkning bör betonas. Eleverna bör ofta påminnas om att tänka efter om ett resultat förefaller rimligt. Det bör ofta förekomma problem, i vilka flera tankesteg ingår och flera i sig enkla deluppgifter kombineras.

Begreppsbildningen i matematik kan underlättas genom ett laborativt arbetssätt. Ett sådant kan också hjälpa eleverna fram till upptäckter av matematiska samband. Både geometrin och sannolikhetsläran är områden som erbjuder tillfällen till ett laborativt arbetssätt. – I geometrin kan mätningar av längder, areor och volymer göras, och i sannolikhetsläran kan det vara lämpligt att utföra praktiska försök för empiriskt studium av relativa frekvenser, varvid datorer kan utnyttjas.

Geometrin är också ett område, inom vilket det är lämpligt att öva på bevisföring, muntlig framställning och problemlösning i flera steg.

Dataläran är avsedd att vara en orienteringskurs, vars syfte är att eleven skall förstå att all databehandling styrs av program skrivna av människor. Syftet är inte att utbilda eleverna till att skriva program. Då dataläran samhällsaspekter behandlas i samhällskunskap, är samplanering mellan ämnena nödvändig.

Numeriska metoder har fått ökad betydelse genom den ökade användningen av datorer inom alla områden av samhället. Detta bör beaktas inom olika avsnitt av kursen. Enkla metoder för iteration, stegning och simulering kan, då datorer eller programmerbara miniräknare utnyttjas, ge mycket effektiva metoder för problemlösning. Genom matematiska experiment stimuleras kreativitet och självständigt tänkande. Målet är att ge eleverna ökad förståelse för olika begrepp, inte att ge insikt i programmeringstekniska detaljer.

Diskussioner om *studieteknik* torde vara mest givande i samband med konkreta arbetsuppgifter. Så t ex är det vid problemlösning av vikt att alltid tänka igenom om resultatet är rimligt, om det stämmer med erhållna figurer eller lätt insedda specialfall osv. Det ankommer på läraren att vänja eleverna vid kontroller av detta slag.

Ibland kan det vara nyttigt att diskutera möjligheten att lösa en viss uppgift med flera olika metoder.

Råd om studieteknik bör återkomma ofta.

Utvärdering av studiearbetet

Betygssättningen i matematik får inte göras enbart utifrån resultaten av skriftliga prov utan skall grundas på en helhetsbedömning av elevernas arbete i matematik.

Utformningen av de skriftliga proven bör variera. Elevernas förmåga att tillämpa begrepp och metoder bör inte prövas enbart med typexempel.

Varje prov bör innehålla uppgifter både av huvudsakligen räknemässig karaktär och av teoretisk natur. En uppgift av det senare slaget kan vara att bevisa en sats som ansluter sig till någon som tidigare har gåtts igenom. En sådan uppgift kan gärna innehålla flera moment av olika svårighetsgrad.

Ett skriftligt prov bör också i regel omfatta områden som nyligen behandlats i undervisningen och områden som behandlats tidigare. De teoretiska uppgifterna bör dock avse moment som inte ligger alltför långt tillbaka. Vidare bör man undvika alltför speciella problem på tidigare avsnitt.

Övervägande delen av uppgifterna bör vara sådana att de kan lösas av flertalet elever. Skrivningarna bör också ge varje enskild elev möjlighet att visa sin förmåga. Det bör dock framgå för eleverna vilka uppgifter som är av större svårighetsgrad, t ex genom uppgifternas placering eller på annat sätt.

Läraren skall vid rättningen kommentera felaktigheter, så att eleverna utan svårighet inser vari felen ligger. Inte minst av pedagogiska skäl bör skrivningarna återlämnas och efterbehandlas snarast och helst inte senare än efter en vecka. Vid genomgången av skrivningen kan läraren kommentera vanliga fel, diskutera olika lösningsalternativ och ge förslag till kompletteringsuppgifter.

Miniräknare bör vara ett naturligt hjälpmedel för eleverna både vid lektioner och skrivningar.

Det bör klargöras för eleverna att ett aktivt behärskande av formler och definitioner är en förutsättning för att de skall ha framgång med problemlösning. Då mängden inlärda formler börjar bli svåröverskådlig kan eleverna vid de skriftliga proven få använda formelsamling.

Momentbeskrivning

Efter varje rubrik anges inom parentes förslag till antal undervisningstimmar för avsnittet.

Exemplen anger den ambitionsnivå som bör eftersträvas för de flesta elever.

TIDSPLAN

Årskurs 1

D Datalära (10)
N Numeriska metoder (10)
1 Inledande geometri och trigonometri (15)
2 Numerisk räkning (25)
3 Enkla funktionssamband och ekvationer (20)
4 Geometri (25)
5 Funktionslära och ekvationssystem (20)
6 Algebra (30)
7 Potenser, exponentialfunktioner och logaritmer (25)

Årskurs 2

N Numeriska metoder (15)
8 Derivata (60)
9 Integraler och areaberäkning (35)
10 Trigonometri (45)

Årskurs 3

11 Rymdgeometri (20)
12 Elementär sannolikhetslära (20)
13–18 Alternativa områden (60)
13 Serier
14 Komplexa tal
15 Integrationsmetoder
16 Differentialekvationer
17 Fördjupad sannolikhetslära
18 Vektorer

Tid för repetitioner är beräknad till 10 timmar vardera i årskurserna 2 och 3.

En extra tid för problemlösning på 10 timmar är avsatt för årskurs 3.

D DATALÄRA (10)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
	Ett viktigt syfte med detta avsnitt är att eleven skall förstå att all databehandling styrs av program skrivna av människor. Syftet är inte att utbilda eleverna till att skriva komplicerade program.	
D.1 Datorns delar	Detta moment kan lämpligen behandlas successivt under hela avsnittet. Här kan också något om binär representation tas upp.	Datorns huvuddelar beskrivs, centralenhet, in- och utmatningsenheter och minnesenheter. Olika typer av databärare (såsom magnetband, hålkort, streckkodade etiketter).
D.2 Programmering och program 1 tolkning av program	Som programspråk används ett enkelt högnivåspråk av typ BASIC	Vilken utskrift ger följande BASIC-program? 10 LET S = 0 20 FOR X = 1 TO 29 STEP 2 30 LET S = S + X 40 NEXT X 50 PRINT "S ="; S 60 END
2 enkla program	Flödesplaner kan användas. Programmen skrivs lämpligen i små steg, som testas var för sig, korrigeras och sätts ihop till färdiga program. Följande program behandlas: Program som innehåller villkorliga hopp och slingor. Program som beräknar och skriver ut funktionsvärden. Enkla simuleringsprogram.	Skriv ett program som visar hur ett kapital *K* växer med ränta på ränta under 10 år. Värdet på kapitalet skall skrivas ut för varje år. Räntesatsen är 7,5%. Skriv ett program som skriver ut en värdetabell för funktionen $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ för $-2 \leqq x \leqq 3$ Bestäm också funktionens största och minsta värde i intervallet. Skriv ett program som simulerar kast med två tärningar.
3 demonstration och användning av färdigskrivna program	Detta moment kan också studeras via studiebesök. Samverkan med samhällskunskap kan göras här.	Befolkningsprognoser. Energiprognoser. Register.

N Numeriska metoder (25)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

N.1 Numeriska experiment, algoritmer

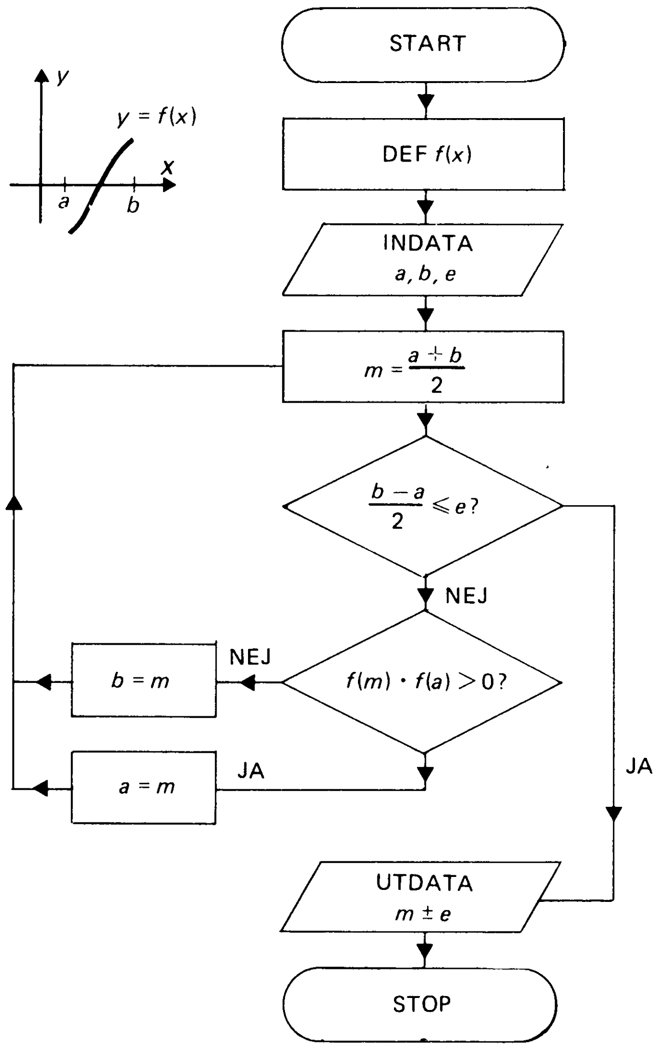
Numeriska metoder uppdelas i undervisningen på övriga avsnitt där dessa metoder kan tillämpas. Därvid kan både miniräknare och dator användas.
Richardson-extrapolation kan tas upp som fördjupning.
Eleverna övas i att skriva program efter algoritmer i punktform eller flödesform.

Undersök numeriskt om det är troligt att följande talföljder konvergerar. Ange i så fall ett troligt gränsvärde.

a) $t_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$

b) $t_n = \left(\dfrac{n - 20}{n + 20}\right)^5$

Skriv ett program efter flödesplanen för lösning av ekvationen $f(x) = 0$.



Flera metoder för ekvationslösning utnyttjas:
värdetabell,
intervallhalvering,
Newton-Raphsons metod och
iterationen $X_n = f(X_{n-1})$

Lös ekvationen $x = \dfrac{x^3 + 3}{5}$

med iterationen $X_n = f(X_{n-1})$

1) Gissa en begynnelseapproximation till roten.

2) Beräkna med hjälp av högerledet en ny approximation till roten.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
		3) Om den nya approximationen ligger tillräckligt nära den gamla så avbryt. I annat fall gå till punkt 2) och genomför ytterligare en iteration. Ekvationen $2^x + x - 2 = 0$ har exakt en rot. Bestäm denna med tresiffrig noggrannhet. Använd intervallhalveringsmetoden. Använd Newton-Raphsons metod för att lösa ekvationen $3x^3 = x - 1$
N.2 Numerisk integration	Rektangel- och trapetsuppskattning för beräkning av areor behandlas. Simpsons formel demonstreras. I dessa sammanhang införs skrivsättet $\int_a^b f(x)dx$ och summasymbolen Σ Numerisk areaberäkning skall vara behandlad före moment 9.2.	Beräkna med någon lämplig numerisk metod med tresiffrig noggrannhet a) $\int_0^2 e^{-x^2/2}dx$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3}$ Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = e^{-x}$, koordinataxlarna och linjen $x = 1$. Ange svaret med tre värdesiffror.

1 Inledande geometri och trigonometri (15)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

1.1 Skalor

Enbart längdskala.

En ritning på en tomt ges i figuren.
Beräkna tomtens sidor.

Skala 1:2000

1.2 Vinklar

Räta, spetsiga och trubbiga vinklar behandlas

Begreppen sido- och vertikalvinklar införs.

Alternatvinklar vid parallella linjer behandlas.

Några logiska samband mellan olika satser kan behandlas.

Vinkelsumman i trianglar och andra månghörningar behandlas.

Visa att om alternatvinklar vid parallella linjer är lika stora så är vinkelsumman i en triangel 180°.

Bestäm vinkelsumman i en månghörning där sidantalet är a) 3 b) 4 c) 5 d) 11 e) n

1.3 Trianglar, kongruens

Man visar att om sidan *a* är större än sidan *b* i en triangel så är den vinkel som står mot sidan *a* större än den som står mot sidan *b*.
I anslutning till konstruktioner av den typ som anges i exemplen formuleras kongruensvillkoren för trianglar.

Rita en triangel då

a) två sidor är 4,0 cm och 5,0 cm och mellanliggande vinkel är 83°.
Mät också den trejde sidan med linjal.

b) sidorna är 3,0 cm, 6,0 cm och 7,9 cm.
Mät också vinklarna med gradskiva.

c) två vinklar är 44° och 57° och mellanliggande sida är 7,0 cm.
Mät också återstående sidor med linjal.

d) två sidor är 6,0 cm och 5,0 cm och den mot sidan med längden 5,0 cm stående vinkeln är 50°.
Mät också den tredje sidan med linjal.

e) Rita en triangel med sidorna 8,0 cm och 9,0 cm samt undersök hur stor den mot sidan 8,0 cm stående vinkeln kan vara. Då denna vinkel har sitt största värde hur stor är då den mot sidan 9,0 cm stående vinkeln?

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

1.4 Likformighet, talet π

Förslagsvis studeras triangar, rektanglar och femhörningar. Elevernas intuitiva uppfattning av likformighet kan utnyttjas. En diskussion kan leda fram till att det gemensamma för "likformiga" månghörningar är motsvarande vinklar och förhållandet mellan motsvarande sidor

Likformighet för månghörningar definieras. Man konstaterar att det för att avgöra om två rektanglar är likformiga räcker med att jämföra kvoterna av sidorna.

För trianglar kan man på laborativ grund ställa upp villkor för likformighet.

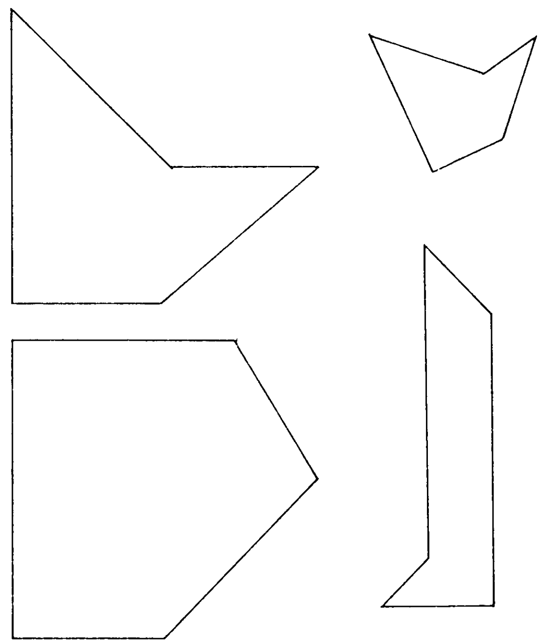
Därefter kan likformighetsvillkoren för trianglar formuleras (men behöver ej bevisas)

Enkla ekvationer t ex

$\frac{2{,}12}{x} = \frac{x}{5{,}34}$ kan förekomma i detta avsnitt.

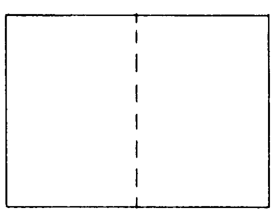
Taket π definieras som kvoten av en cirkels omkrets och diameter.

Vilka av figurerna anser du vara "likformiga"? Vad är gemensamt för dessa "likformiga" figurer?

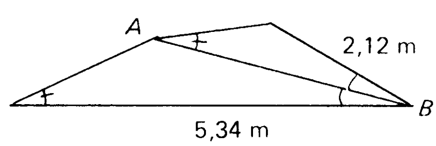


Triangeln ABC är likformiga med triangeln $A'B'C'$. Sidan BC är 7,0 cm och sidan $B'C'$ är 5,0 cm. Höjden mot sidan AB, är 4,0 cm. Beräkna höjden mot sidan $A'B'$.

Ett rektangulärt papper med den största sidan 8,0 cm delas med ett snitt enligt figuren i två lika delar. Varje del är likformig med det ursprungliga papperet. Beräkna förhållandet mellan den längre och den kortare sidan hos ett av papperen.



I figuren är vinklar som markerats på samma sätt lika stora. Beräkna längden av sträckan AB.



Ett cykelhjul med diametern 72 cm rullar 50 varv. Hur långt har det rullat?

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

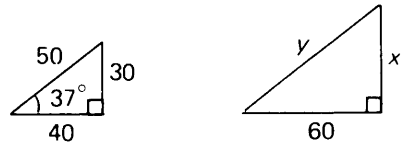
1.5 Trigono-metri

1 definitioner

Problem kan tas upp som löses med hjälp av likformiga trianglar. Cosinus, sinus och tangens definieras för vinklar mellan 0° och 90°.

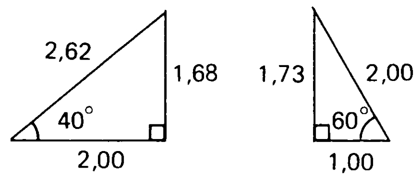
Trianglarna är likformiga. Ange den högra triangelns
a) vinklar b) sidor.

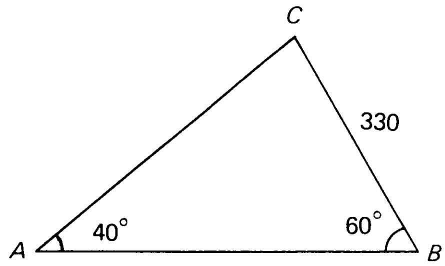
(cm)



Utnyttja de två rätvinkliga trianglarna för att bestämma avstånden AC och AB i triangeln ABC.

(cm)



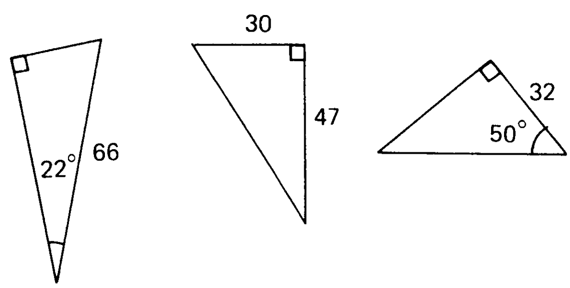


2 solvering av rätvinkliga trianglar

Begreppen "närliggande" och "motstående" brukar behöva belysas.

Bestäm övriga vinklar och sidor i trianglarna.

(cm)

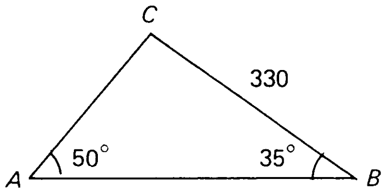


3 solvering av godtyckliga trianglar

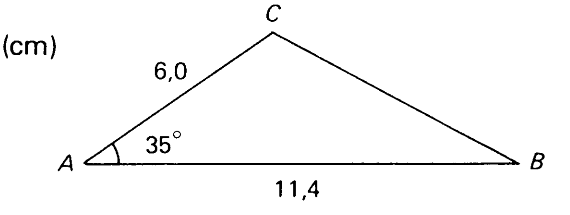
Triangelsolveringen sker genom att en lämplig höjd ritas i triangeln.

Bestäm sidorna AB och AC i triangeln ABC.
Bestäm också triangelarean.

(m)



Bestäm sidan BC i triangeln ABC.

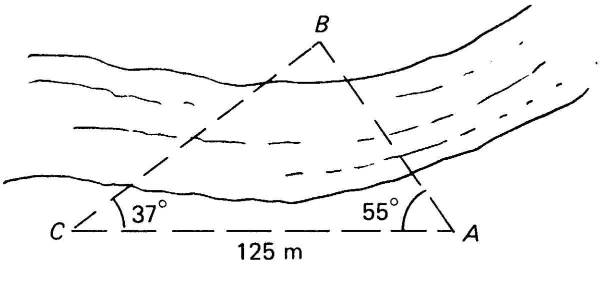


1.6 Tillämpade uppgifter

Här kan väljas uppgifter på avståndsbestämning men även exempel på användning av trigonometri i andra sammanhang.

Fyren långe Jan är 93 m hög. En seglare ser fyren under vinkeln 9°. Hur långt från fyren är seglaren?

Man vill mäta avståndet mellan punkterna B och C som ligger på var sin sida av en flod. Man mäter därför upp sträckan AC till 125 m, vinkeln C till 37° och vinkeln A till 55°.
Beräkna avståndet BC.



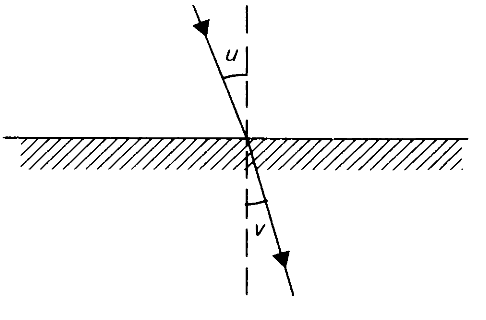
Då en ljusstråle träffar en vattenyta bryts den. Därvid gäller

$$\frac{\sin u}{\sin v} = n$$

n kallas för brytningsindex som är en materialkonstant vilken är oberoende av vinklarna u och v.

a) Bestäm brytningsindex för vatten då $u = 22{,}1°$ och $v = 16{,}4°$.

b) För glas är brytningsindex 1,5. Bestäm v om $u = 30°$. Formeln ovan gäller även för en glasyta.



2 Numerisk räkning (25)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
2.1 Tals ordning efter storlek	Uppgifter av typ a), b) och c) löses genom resonemang. Uppgifter av typ d) kan lösas genom att nämnarna i de två leden görs lika stora.	Avgör om a) $\frac{3}{7} < 1$ b) $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ c) $\frac{3}{7} > \frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$
2.2 De fyra räknesätten	Eleverna övas i att behandla tal skrivna på bråkform. Negativa tal behandlas. Prioriteringsregler och parentesräkning övas.	1. Beräkna a) $1 + 2 \cdot 3$ b) $(1 + 2) \cdot 3$ c) $(2 + 3) \cdot (6 - 4)$ d) $7 + 3 \cdot 8 - 4 \cdot 2^2$ Beräkna uppgifterna 2–7 och skriv svaren på bråkform i så enkel form som möjligt 2. a) $\frac{8}{24}$ b) $\frac{16}{48}$ c) $\frac{-17}{102}$ d) $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} - 1\right)$ 3. a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ b) $-\frac{2}{9} + \frac{7}{15}$ c) $\frac{3}{4} - \frac{16}{24}$ d) $-\frac{2}{7} - \frac{1}{9} + \frac{7}{18}$ 4. a) $18 \cdot \frac{6}{3}$ b) $\frac{(-3)}{15} \cdot \frac{105}{(-21)}$ c) $(-2) \cdot (-2) \cdot (2)$ 5. a) $\frac{22}{\frac{-11}{2}}$ b) $\frac{16/3}{18/45}$ 6. a) $\frac{-0{,}5}{0{,}02}$ b) $\frac{-10{,}8}{3{,}9}$ 7. a) $\frac{1}{2} + 0{,}3 \cdot \frac{2}{7}$ b) $\frac{5 + 2 \cdot (3\frac{1}{2} - 0{,}7)}{5 \cdot 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{6}}$
2.3 Huvudräkning	Momentet övas lämpligen under hela studietiden i matematik, speciellt vid överslagsräkning och rimlighetsbedömning.	Hur mycket är 1/8 av 200 kg? Hur många dagar räcker 200 m^3 olja om förbrukningen är 8 m^3/h?

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
2.4 Potenser 1 introduktion	Potenser med heltalsexponenter definieras. Någon räknelag kan behandlas i detta sammanhang. Potenser av nedanstående form behandlas: $2^2 \quad 2^{-3} \quad 2{,}3^{-4} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^{-5}$	
2 grundpotensform[1)]	Såväl positiva som negativa exponenter skall förekomma.	
3 de fyra räknesätten	Övning på att skriva tal med hjälp av tiopotenser. Potenslagarna kan lämpligen behandlas i samband med algebra.	Skriv utan hjälp av miniräknare följande tal i grundpotensform a) $1{,}25 \cdot 10^3 - 370$ b) $\frac{3{,}6 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^2}{1{,}8 \cdot 10^7}$ c) $5 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ d) $\frac{4{,}5 \cdot 10^{-3} + 2{,}3 \cdot 10^{-2}}{4{,}8 \cdot 10^{-6}}$
4 tillämpningsuppgifter		Ljuset utbreder sig med hastigheten 300 000 km/s. Skriv i grundpotensform ljusets hastighet uttryckt i m/s. Ett billass sand väger 10 ton. Hur många sandkorn är detta, om varje korn sand väger 2 mg?
2.5 Enhetsbyten, prefix		Skriv som kilogram a) 7 g b) 650 g Skriv som kubikcentimeter a) 40 mm^3 b) 3 m^3 Skriv som timmar, minuter och sekunder 1) 3,23 h b) 65,3 min Skriv som m/s a) 36 km/h b) 11,3 km/min Skriv som kvadratmillimeter och svara i grundpotensform a) $2 \cdot 10^6$ m^2 b) 367 cm^2

[1)] Grundpotensform : Ett tal på formen $a \cdot 10^b$ där $1 \leqq a < 10$ och b ett heltal.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
2.6 Närme-värden 1 avrundning, värdesiffror, maximala felet	Det största och minsta tänkbara värdet på den undersökta storheten beräknas. Man konstaterar experimentellt med miniräknaren att vid multiplikation och division bör man vanligen avrunda till lika många värdesiffror i resultatet som i den faktor som har minst antal värdesiffror.	Avrunda a) 17,44 till 2 värdesiffror b) 0,026 till 1 värdesiffra c) 2,5049 till 3 värdesiffror En rektangels sidor är uppmätta till (2456 ± 2) cm och (29 ± 1) cm. Bestäm det största respektive minsta värdet på rektangels area. En rektangels sidor är 2456 cm och 29 cm. Beräkna arean. I en bil med massan 1,23 ton lastas en resväska med massan 24 kg och en verktygslåda med massan 35 kg. Beräkna bilens massa med last. (Svaret skall anges med korrekt antal värdesiffror).
2 överslags-räkning		Beräkna a) 5000/202 b) $11{,}2 \cdot 6{,}4$
3 rimlighets-bedömning		Är det rimligt att 50 personer väger sammanlagt 40 ton?
2.7 Insättning i formler	Eleverna övas i att lösa ut den sökta storheten ur ett givet samband och därefter utföra beräkningen av den sökta storheten.	Jorden kan anses vara ett klot med radien $R = 640$ mil. Beräkna jordens volym V då sambandet mellan V och R är $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$ Den effekt P som en kokplatta avger kan beräknas med formeln $P = \frac{U^2}{R}$ *där* U är spänningen över kokplattan och R kokplattans resistans. a) Lös ut R ur sambandet b) Beräkna en kokplattas resistans då den avger 2,4 kW och spänningen över kokplattan är 220 V.
2.8 Procent-räkning	Tillväxtfaktorn kan införas. Skillnaden mellan procent och procentenhet uppmärksammas.	

3 Enkla funktionssamband och ekvationer (20)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

3.1 Grafiska metoder

rätvinkliga koordinatsystem, mittpunktsformeln, tolkning av grafer, kurvritning

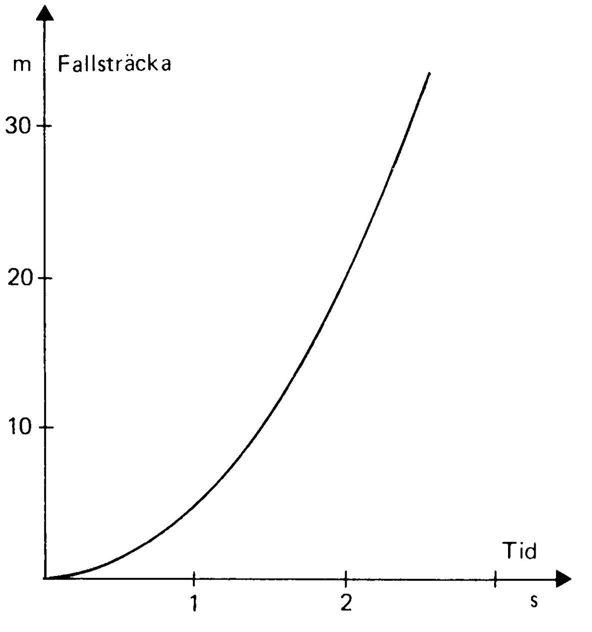
Bestäm koordinaterna för mittpunkten på sträckan *AB* då *A* har koordinaterna (−4,8; −11,8) och *B* har koordinaterna (6,6; −2,4).

En sten faller fritt till marken. Diagrammet nedan visar sambandet mellan fallsträcka och tid.
Bestäm med hjälp av diagrammet

a) hur lång tid det tar för stenen att falla 25 m från tidpunkten 0 s.

b) hur lång sträcka stenen fallit under de två första sekunderna.

c) stenens medelhastighet i tidsintervallet (1,5−2,0) s.

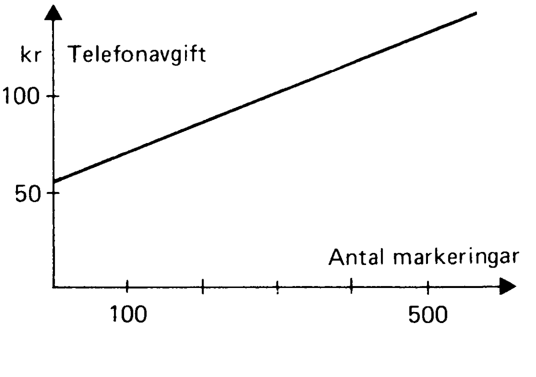


Diagrammet visar hur telefonavgiften varierar med antalet markeringar under ett kvartal.
Bestäm med hjälp av diagrammet

a) kvartalsavgiften (fast avgift)

b) markeringsavgiften för ett samtal (rörlig kostnad)

c) totala avgiften för ett kvartal då 400 markeringar registrerats.



MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Kurvritning görs via värdetabell. I punkt d) i första exemplet är avsikten att eleven skall finna ett samband mellan x och y utan att någon teori har presenterats.

I tabellen finns samhörande värden på x och y angivna

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−14	−11	−8	−5	−2	1	4	7	10

a) Pricka in punkterna i ett koordinatsystem och sammanbind punkterna med varandra.
b) Ange med hjälp av grafen de y-värden som svarar mot x-värdena 1,5 och 2,5.
c) Ange de x-värden som svarar mot y-värdena −9 och 2.
d) Ange ett samband mellan x och y

En kula kastas rakt uppåt. En person mäter samhörande värden på tid och höjd enligt tabellen.

tid (s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,4	1,8	2,0
höjd (m)	0	1,9	3,2	4,1	4,8	5,1	4,2	1,7	0

a) Markera punkterna i ett koordinatsystem och förena dem i en så jämn kurva som möjligt.
b) Vid vilken tidpunkt vänder stenen?
c) Efter hur lång tid återkommer stenen till utgångsläget?

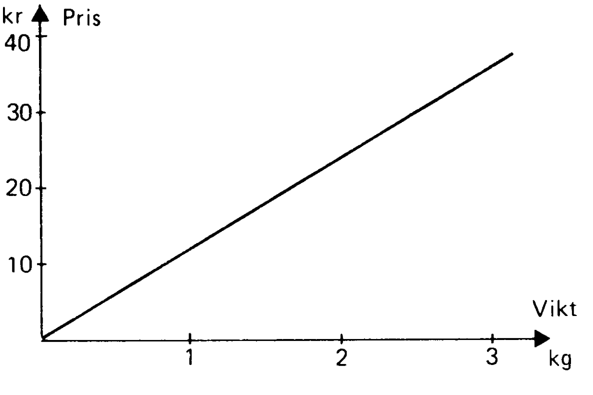
3.2 Proportionalitet

1 värdetabell, diagram

Proportionalitet införs lämpligen genom att värdetabeller och diagram studeras.

Tabellen och diagrammet visar hur priset på en vara varierar med vikten.
a) Fyll i de värden som är utelämnade i tabellen.
b) Ange med hjälp av diagrammet priset för 2,8 kg av varan.

pris (kr)	0	6	12	18	24	30	36
vikt (kg)	0	0,5		1,5	2		3



MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
2 tabeller, kurvritning	Proportionalitet används och inövas exempelvis via tabellifyllning och kurvritning.	Överljudsplanet Concorde kan flyga med den konstanta farten 0,65 km/s. Flygsträckan är proportionell mot flygtiden. a) Gör en tabell som visar hur flygsträckan beror av flygtiden. Låt flygtiderna vara 0 s, 500 s, 1000 s, . . . , 4000 s. b) Rita in punkterna i ett diagram och sammanbind dem med en rät linje. c) Använd diagrammet för att beräkna flygsträckan efter 1 timmes färd. d) Beräkna med hjälp av diagrammet den tid det tar för planet att flyga 340 mil. Ange svaret i timmar och minuter.
3 proportionalitetsfaktor	$y = k \cdot x$ används för att beskriva proportionalitet, proportionalitetsfaktorn k bestäms.	Årsräntan, r kronor, på ett lån är proportionell mot lånesumman, s kronor. Räntesatsen är 10%. a) Ange ett samband mellan r och s. b) Åskådliggör sambandet i ett diagram. c) Bestäm årsräntan då lånesumman är 126 000 kr.
4 proportionalitet mot x^p	$y = k \cdot x^2$, $y = k/x$, $y = k/x^2$, $y = k \cdot \sqrt{x}$ behandlas. Formuleringen "omvänd proportionalitet" införs.	En kropps rörelseenergi är proportionell mot hastigheten i kvadrat. Teckna detta samband. Proportionalitetskonstanten kan tolkas som kroppens massa dividerad med två. Beräkna rörelseenergin hos en kropp med massan 10 kg och hastigheten 5,0 m/s.
		Trycket p i en bestämd mängd av en gasmassa är omvänt proportionellt mot gasmassans volym V, om temperaturen inte ändras. a) Teckna detta samband. b) Trycket i en gasmassa med volymen 2,8 m^3 är 0,24 MPa. Vad blir trycket om volymen minskas till 1,2 m^3.
		Då en pianosträng anslås blir grundtonens frekvens proportionell mot kvadratroten ur den kraft med vilken strängen är spänd. Teckna sambandet mellan frekvens och spännkraft. En sådan sträng avger vid anslag 440 Hz då den är spänd med en kraft på 80 N. Bestäm den frekvens som uppstår då strängen är spänd med kraften 45 N.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

3.3 Ekvationer

Parentesräkning och huvudräkning övas.
Enkla bokstavsekvationer behandlas, mer komplicerade tas upp i avsnittet ALGEBRA.
Lösning av problem som leder till uppställning av en ekvation behandlas. Huvudsakligen behandlas ekvationer av första graden men även uppgifter behandlas som leder till ekvationer av typ:
$x^2 = a$ och $\sqrt{x} = a$

Lös följande ekvationer (huvudräkningsuppgifter)

a) $11 - x = 8$ b) $92 - 8x = 20$ c) $\frac{x}{15} = \frac{4}{10}$

d) $17 - \frac{42}{x} = 18$

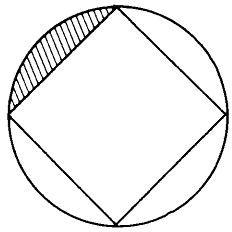
Lös ekvationerna
a) $3x - 7 + 18x + 14 = 4x + 8 - 4x + 5x$
b) $13 - 2\frac{1}{7} = 5x - 1\frac{2}{5} + 4\frac{6}{7}x$
c) $\frac{x-3}{30} = \frac{3-2x}{40} + \frac{1}{8} \cdot (3x - 7)$

Lös ekvationerna
a) $(a - b) \cdot x - a + b = 0$
b) $2bx - b = 4abx - 2ab$ för $a = \frac{3}{7}$ och $b = \frac{6}{14}$

I ett bråk är täljaren 4 enheter mindre än nämnaren. Ökas både täljaren och nämnaren med 3, erhålls ett nytt bråk, vars värde är 0,8. Vilket var det ursprungliga bråket?

Ett badkar kan fyllas med varmvattenkranen på 6 min och med kallvattenkranen på 9 min.
Hur snabbt fylls badkaret med båda kranarna öppna?

En kvadrat är inskriven i en cirkel.
Kvadratens area 15 cm^2.
Bestäm
a) cirkelns radie
b) arean av det i figuren streckade området.
Lös också uppgiften då kvadratens area är A areaenheter.



4 Geometri (25)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
4.1 Konstruktioner med passare och ograderad linjal	Följande konstruktioner bör tas upp: mittpunktsnormal, normal genom given punkt till given linje, linje genom given punkt parallell med given linje, bisektris, cirkel genom tre givna punkter och omskriven och inskriven cirkel till triangel.	Konstruera med hjälp av passare och linjal a) en regelbunden sexhörning med given sida. b) en rektangel med givna sidor. Konstruera med hjälp av passare och linjal en triangel med givna sidor och mellanliggande vinkel lika med 60°. Konstruera den omskrivna cirkeln till en given triangel.
4.2 Pythagoras sats, avståndsformeln i koordinatsystem	Eleverna skall kunna ge ett bevis för Pythagoras sats. Kvoten av en höjd och en sida i en liksidig triangel beräknas. Kvoten av en diagonal och en sida i en kvadrat beräknas.	Bestäm exakt höjden i en liksidig triangel med sidan 4a. I en kvadrat är diagonalen 12 l.e. Bestäm exakt kvadratens sida. I en likbent triangel är den minsta sidan 6 l.e. och en vinkel 120°. Bestäm de exakta värdena av höjderna mot sidorna i triangeln.
4.3 Randvinkelsatsen, bisektrissatsen		Genom mittpunkten på en radie dras en korda vars delar är 2,0 cm och 3,0 cm. Bestäm radiens längd. På en cirkels omkrets tas i ordning fem punkter *A, B, C, D* och *E* så att kordorna *AB, BC* och *CD* är lika med cirkelns radie och att *E* delar bågen *DA* mitt itu. Bestäm vinklarna i den triangel, som bildas av *A, C* och *E*.
4.4 Areor	Med utgångspunkt från formeln för rektangelarea härleds formlerna för arean av parallellogram, triangel och parallelltrapets. Sambandet mellan areaskala och längdskala behandlas. Sambandet $\text{arean} = \dfrac{\text{bågen} \cdot \text{radien}}{2}$ för en cirkelsektor troliggörs. Formeln för cirkelns area härleds.	En parallellograms sidor är 6,0 cm och 11 cm. Den spetsiga vinkeln mellan sidorna är 35°. Bestäm parallellogrammens area. Diagonalen i en kvadrat är lika stor som höjden i en liksidig triangel. Sök det exakta förhållandet mellan kvadratens och triangelns areor. En rombs ena diagonal är 12,0 cm och dess area 24 cm^2. Bestäm den andra diagonalen och den trubbiga vinkeln mellan rombens sidor. Höjden i ett parallelltrapets är 7,0 dm, den ena av de parallella sidorna är 2,0 dm och arean 112 dm^2. Beräkna den andra av de parallella sidorna. Omkretsen av en cirkelsektor är 8,0 cm och radien är 2,0 cm. Beräkna medelpunktsvinkeln och arean. I en cirkel med 5,0 cm radie inskrivs en liksidig triangel. Hur stor är arean av vart och ett av de tre cirkelsegment, som ligger utanför triangeln?

5 Funktionslära (20)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

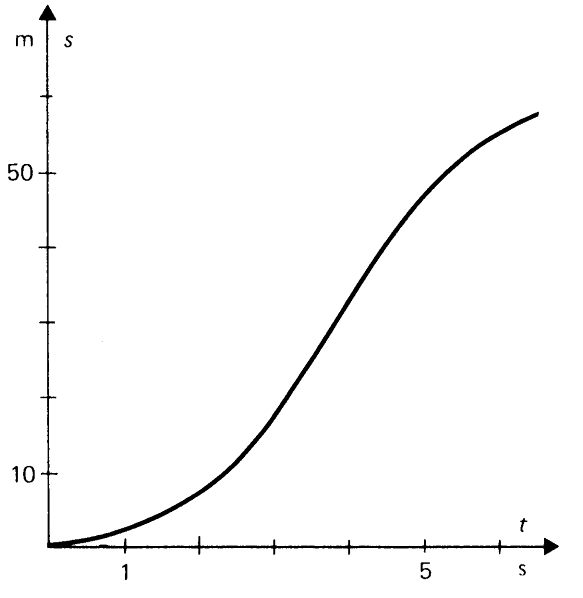
5.1 Räta linjen

Företrädesvis behandlas formerna $y = kx + m$ och $x = a$
Eleverna görs väl förtrogna med att bestämma ekvationer för räta linjer.
För bl a fysikens del är det viktigt att eleverna kan bestämma k och m från en given rät linje.
Likaså bör elverna övas i att anpassa rät linje till en given punktmängd och grafiskt bestämma linjens ekvation.

Bestäm konstanten a så att den räta linjen $ax + 3y - 4 = 0$ av de positiva koordinataxlarna avskär en triangel vars area är 12 areaenheter.

För vilka värden på p och q sammanfaller linjerna $px + 3y - 5 = 0$ och $-2x + 7y + 2q = 0$?

En kropps förflyttning s beror av tiden t så som diagrammet visar.
Bestäm kroppens hatighet då $t = 4{,}0$ s.



Följande samhörande värden mellan x och y är givna:

x	0	2	3	5	6
y	0	3	4,5	9	12

Avsätt punkterna i ett diagram och rita därefter en rät linje som ansluter sig till punkterna så väl som möjligt.
Bestäm också en ekvation för linjen.

5.2 Linjära ekvationssystem

Företrädesvis behandlas ekvationssystem med två obekanta.

Både grafiska och algebraiska metoder bör förekomma.

Bestämning av ett polynoms koefficienter behandlas.

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{3x + y}{6} - \dfrac{y - 8x}{5} = 6{,}6 \\[2ex] \dfrac{3x + 2y}{2} - \dfrac{y - 5x}{5} = 0{,}3 \end{cases}$$

Lös ekvationssystemet med avseende på x och y

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

Bestäm konstanten a så att skärningspunkten mellan linjerna $2x + ay = 2$ och $x + y = 0$ ligger på linjen $y = \frac{x}{2} - 3$

Bestäm konstanterna A och B så att kurvan $y = x\,(Ax + B) + 4$ går genom punkerna $(-\frac{1}{3}\,;\frac{4}{3})$ och $(-2\,;-7)$

För vilka värden på p och q har ekvationssystemet

$$\begin{cases} px + 4y = q \\ 2x - y = 11 \end{cases}$$

a) en lösning b) ingen lösning c) oändligt många lösningar?

5.3 Enkla kurvor

Följande kurvor kan ritas:

$x^2 \quad x^3 \quad x^{-1} \quad x^{-2} \quad \sqrt{x}$

$a\,(x - b)^2 + c$

5.4 Symbolen $f(x)$

Förenkla $f(a + 0{,}1) - f(a)$ då $f(x) = 3x - 4$

5.5 Grafisk-numerisk lösning

Skärningspunkter mellan räta linjer och kurvor bestäms. Andragradskurvors skärningar med linjen $y = 0$ kan vara en introduktion till andragradsekvationer.
Olikheter av typ $f(x) > g(x)$ behandlas.

Bestäm grafiskt-numeriskt med 3 decimaler koordinaterna för skärningspunkten mellan linjerna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ där

$$f(x) = \frac{1{,}01x - 4{,}68}{7{,}64} \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{3{,}14x - 0{,}77}{4{,}13}$$

Ange också de x för vilka $f(x) > g(x)$

Bestäm med tvåsiffrig noggrannhet skärningspunkten mellan

a) linjen $y = \frac{x}{2} + 1$ och kurvan $y = x^3$
b) linjen $y = 5 - x$ och kurvan $y = \sqrt{x}$

Bestäm med tvåsiffrig noggrannhet skärningspunkterna mellan x-axeln och kurvan $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$

Lös ekvationen $x^2 - 2x - 5 = 0$ genom att grafiskt bestämma skärningspunkterna mellan kurvan $y = x^2$ och den räta linjen $y = 2x + 5$.
Ange svaret med tresiffrig noggrannhet.

Lös ekvationen $7 - 3x - 2x^2 = 0$ grafiskt.
Ange svaret med tvåsiffrig noggrannhet.

Lös olikheten $x > \frac{1}{x}$ grafiskt.

6 Algebra (30)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
6.1 De fyra räknesätten	Parentesräkning övas	Förenkla så långt som möjligt uttrycket $1\frac{1}{4}a - [(2\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b) + \frac{2}{5}b]$ Beräkna dess värde för $a = 2\frac{2}{5}$ och $b = 33\frac{1}{3}$ Förenkla så långt som möjligt uttrycket $(a+b)(c+d) - (a-b)(c-d)$
6.2 Potenser	Begreppet potens repeteras. Potenslagarna med heltalsexponenter behandlas.	Beräkna t^5 då a) $t = 2$ b) $t = \frac{1}{2}$ c) $t = \frac{5}{6}$ Skriv på så enkel form som möjligt $8\frac{1}{6} \cdot x^2y \cdot 1\frac{2}{7} \cdot (xy)^2 \cdot (\frac{7}{6})^{-1}$ Skriv på så enkel form som möjligt $\frac{2u^2v - 6u^3v^2 + 8u^2v^5}{2u^2v}$
6.3 Konjugat- och kvadreringsregler	Reglerna bör kunnas utantill	Använd kvadreringsregeln för att bestämma a) 99^2 b) 102^2 Använd konjugatregeln för att bestämma a) $39 \cdot 41$ b) $290 \cdot 310$ Skriv på så enkel form som möjligt a) $(3r-s) \cdot (2r+s)^2 - (3r+s) \cdot (2r-s)^2$ b) $(3p-q)^2 - (3p+q)(p-3q) - (2p+3q)(2p-3q)$
6.4 Uppdelning i faktorer	Reglerna i 6.3 tillämpas	Uppdela följande uttryck i faktorer a) $6x^3 - 6xy^2$ b) $a + bx + ax + b$
6.5 Bråkräkning		Skriv på så enkel form som möjligt a) $\frac{x-y}{y-x}$ b) $\frac{ax+a}{a}$ c) $\frac{a^2 - 9 + (a-3)^2}{(a-3)^2}$ d) $(5a - \frac{9}{5a})(1 - \frac{3}{5a+3})$ e) $2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot (\frac{2}{3a^2} - \frac{4a^2}{7} - \frac{6}{35})$ f) $\frac{\frac{z}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{z+3} + \frac{1}{z}}$

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
6.6 Kvadrat-rötter, absolut-belopp	Sambanden $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ och $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ behandlas.	Beräkna $7 \cdot \sqrt{51\frac{1}{49}}$ Visa att $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
6.7 Andragrads ekvationer, produkters nollställen		Lös ekvationerna a) $42x^2 + 59x - 11 = 0$ b) $12x^2 + 7x + 3 = 0$ c) $x + 4 = \frac{x}{2x-3}$ d) $x - 1 = \sqrt{x}$ En plastburk utan lock skall tillverkas. Burkens botten skall vara kvadratisk och burkens höjd skall vara 12 cm. Till varje burk åtgår 324 cm^2 av en plastskiva. Beräkna sidan av burkens botten. En bilist kör 8,0 mil med konstant hastighet. Tiden att köra denna sträcka minskar med 15 minuter om hastigheten ökas med 12 km/h. Bestäm den lägre hastigheten. Lös ekvationen $(x-5)(2x-1)(6+7x) = 0$
6.8 Faktorupp-delning av andragrads-polynom		Uppdela i faktorer a) $\frac{64}{21} - \frac{8x}{21} - 2x^2$ b) $3x^2 - 6x - 12$

7 Potenser, exponentialfunktioner och logaritmer (25)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
7.1 Definitioner och räknelagar för potenser	Potenser med rationell exponent införs. Beteckningen $\sqrt[n]{a}$ för $a^{1/n}$ presenteras. Räknelagarna presenteras och någon eller några bevisas. Potenser med reell exponent införs t ex genom grafiskt studium av $y = a^t$, $t \in Q$.	Skriv på så enkel form som möjligt a) $\left(\frac{ab}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{b^2}{cd}\right)^{-1/3} \cdot \left(\frac{b^2}{a^2d^2}\right)^{1/4}$ b) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ a) Rita i ett koordinatsystem Kurvan $y = x^3$ och linjen $y = 4$. b) Ange skärningspunktens x-koordinat exakt och approximativt. Rita kurvorna $y = 2^x$ och $y = 10^x$ $x \in R$.
7.2 Potensekvationer		Lös ekvationen $2 \cdot x^{3,4} = 5$
7.3 Kurvritning	Graferna ritas till b^x $A \cdot b^x$ och $A \cdot 10^{k \cdot x}$ Basen e kan införas här eller i samband med derivator.	Rita kurvorna a) $y = 0{,}1 \cdot 8^x$ b) $y = 120 \cdot 0{,}67^x$ c) $y = 3 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$
7.4 Exponentialekvationer	Ekvationer med den obekanta i exponenten löses med hjälp av värdetabell och kurvritning.	Sambandet $y = 6^x$ är givet. Bestäm det x (två värdesiffror) för vilket y är a) 144 b) 14,4 c) 1,44 d) 0,144 Rita kurvorna $y = 4^x$ och $y = 2x + 3$. Lös därefter ekvationen $4^x = 2x + 3$. med tre värdesiffror.
7.5 Exponentiella förändringar	Procentuell tillväxt och tillväxtfaktor behandlas.	En person sätter in pengar på en bank. Kapitalet y kr som han har på banken efter t år kan beräknas ur sambandet: $y = 1600 \cdot 1{,}07^t$ a) Hur mycket satte han in? b) Ange räntesatsen c) Hur mycket har personen innestående efter 7 år? d) Beräkna hur lång tid det tar för kapitalet att fördubblas. I en glesbygd förutsätts befolkningen minska så, att den vid varje års slut är 5% mindre än den var vid årets början. Bestäm folkminskningen under en 20-årsperiod. Bestäm också efter hur många år som befolkningen har minskat med 90%.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
7.6 Logaritmer 1 definitioner	$\log_b p$ definieras ($b > 0$ och $b = 1$, $p > 0$) ur sambandet $b^x = p \quad x = \log_b p$. Kurvor av typ $y = \log_b x$ ritas för några b ($b > 1$). Vid tillämpningar används huvudsakligen bas 10 eller e. Symbolen lg införs. Symbolen ln införs här eller i samband med derivator.	Skriv som en potens med basen 10 a) 9 b) 4 c) 1/9 d) 1/4 Lös ekvationerna. Ange svaret både exakt och approximativt. a) $2^x = 9$ b) $3 \cdot 6^{-4x} = \frac{2}{7}$ Bestäm med två värdesiffror a) $\log_2 1024$ b) $\log_2 10$ c) lg2 Rita kurvorna a) $y = 3^x$ b) $y = \log_3 x$
2 logaritm-lagar	Följande lagar behandlas: $\log pq = \log p + \log q$ $\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$ $\log p^t = t \log p$ $\log_b P = \frac{\log_c p}{\log_c b}$ Eleverna bör kunna presentera ett bevis för någon av lagarna.	Skriv på så enkel form som möjligt $\lg x + \lg \frac{100}{x}$ Lös ekvationen a) $\log(9x-7) = \log 24x - \log 2^3$ b) $4 \cdot 3^{3x} = 15$ c) $\lg(2x-1)^2 = \lg(x-2)^2 + 4$ d) $2 = 3(1 - e^{-x/2})$ Det radioaktiva ämnet radon 220 sönderfaller så att det efter 52 sekunder endast återstår hälften av vad som fanns från början. Efter hur lång tid återstår endast 1 ‰ av den ursprungliga mängden? Kurvan $y = 10^{-x}$ går genom punkterna (p; 0,5) och (5p; q). Bestäm p med två decimaler. Bestäm dessutom det exakta värdet av q.

8 Derivata (60)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

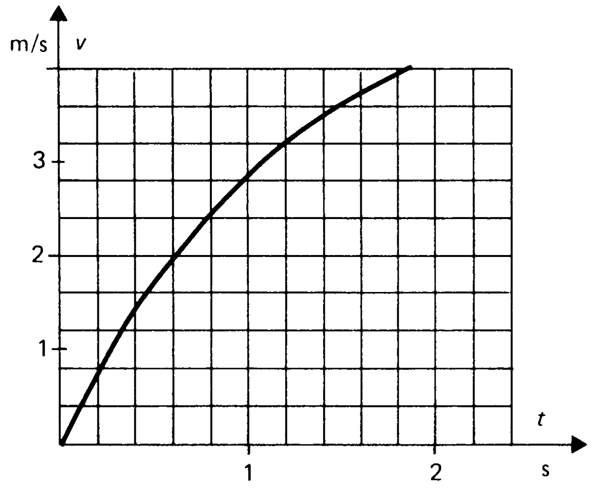
8.1 Differens, differens- kvot

Exempel ges på differenskvot tolkad som t ex medelhastighet, medelacceleration, marginal- kostnad, marginalskatt. Begreppet (strängt) växande (avtagande) införs.

Funktionen $f(x) = 2^x$ är given.
Komplettera tabellen nedan.

Δx	$\Delta y = f(4 + \Delta x) - f(4)$	$\Delta y/\Delta x$
1		
10^{-1}		
10^{-2}		
10^{-3}		
10^{-4}		
10^{-5}		
10^{-6}		

Grafen i figuren anger hur hastigheten v för en kropp varierar med tiden t. Bestäm med hjälp av grafen medelaccelerationen under tidsintervallet $0{,}5\ s < t < 0{,}5\ s + \Delta t$, då Δt är lika med
a) 1,0 s b) 0,6 s c) 0,4 s
d) 0,2 s e) 0,1 s



En affärsman säljer räknedosor. Han inköper dessa för 40 kr styck. Erfarenheten säger honom att om han sätter försäljningspriset till x kr så kommer han att sälja 120-x räknedosor per månad.
Hur stor är hans månadsförtjänst på räknedosorna om han säljer dessa för a) 60 kr per styck b) 70 kr per styck?
Uppskatta hur hans månadsförtjänst ändras om han höjer priset från
a) 60 kr till 61 kr
b) 70 kr till 71 kr
c) 90 kr till 91 kr

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
8.2 Definition av derivata	Både skrivsättet $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ och $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ införs Tangent till funktionskurva definieras.	Bestäm utgående från derivatans definition $f'(-1)$ då a) $f(x) = 2x^2 - 3x$ b) $f(x) = -\frac{4}{x^2}$
8.3 Deriverings-regler	Följande beteckningar för derivata presenteras: $y', \frac{dy}{dx}$ $f'(x)$ och $Df(x)$ Derivatan bestäms för x^p där $p \in \{-2, -1, 2, 3, 4$ $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}$ och för polynom. $Df(ax + b) = af'(ax + b)$ kan behandlas redan här. Eleverna bör kunna presentera ett bevis för någon av dessa deriveringsregler. Problem som innehåller begreppen hastighet, acceleration, marginalskatt, marginalkostnad kan behandlas.	Antag att skatteskalorna för inkomster mellan 30 000 kr och 70 000 kr är så konstruerade att man vid en inkomst på x kr betalar en skatt på $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{400000} - 10000$ Hur stor är marginalskatten uttryckt i procent vid en inkomst på a) 40 000 kr b) 50 000 kr c) 60 000 kr. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x(3x-5)$ för $x = 3$. Bestäm också koordinaterna för tangentens skärningspunkter med koordinataxlarna. Beräkna $f'(2)$ om $f(x) = 2x + 4 + \frac{2}{\sqrt{x}}$
8.4 Derivatan av exponentialfunktionen, logaritmfunktionen och potensfunktionen	Talet e definieras om detta ej är gjort tidigare. Följande deriveringsregler härleds: $De^x = e^x$, $D\ln x = \frac{1}{x}$ och $Dx^a = a \cdot x^{a-1}$ $a \in R$	Bestäm a) $D(3 \cdot e^{-4x+7})$ b) $D\ln(\frac{8}{3}x - 1)$ Bestäm konstanterna p och q i funktionen g där $g(x) = e^{px+q}$ så att $g(-1) = g'(-1) = e$. Visa att om $y = \ln(2x + 1) + x^2$ så är $y' \cdot (2x + 1) - 4x^2 - 2x = 2$ Beräkna riktningskoefficienten för tangenten till kurvan $y = 2{,}7^x$ i punkten $(0;1)$.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
8.5 Tangent och normal, kurvritning, maximum- och minimum-problem	Sambandet $K_1 \cdot K_2 = -1$ för vinkelräta linjer härleds här om det inte är gjort tidigare. Derivatans teckenväxling kring extrempunkter diskuteras. Största (minsta) värde och lokalt maximum (minimum) definieras.	Kurvan $y = 8x^3 + ax^2 - 18x + b$ har ett lokalt minimum i punkten (1/4, −9/2). Bestäm konstanterna a och b och eventuella övriga extrempunkter samt rita kurvan. Bestäm största och minsta värdet av $5y = x^3 - 27x - 4$ för $-4 \leqq x \leqq 7$ Rita därefter kurvan. I en rätvinklig triangel med kateterna $2a$ och $3a$ inskrivs en rektangel så att två av dess hörn hamnar på hypotenusan. Bestäm den största area en sådan rektangel kan ha.
8.6 Högre derivator och differentialekvationer.	Tolkning av andraderivata som t ex acceleration kan göras. Man prövar om en given funktion satisfierar en given differentialekvation. Följande beteckningar införs: $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'', $f''(x)$ och $f^{(n)}(x)$	En sten glider nedför ett lutande plan. Följande samband råder mellan den tillryggalagda vägen y m och tiden x s. $y = 1{,}2 \cdot x^2 + 0{,}26 \cdot x + 3{,}0$ Bestäm a) stenens hastighet då $x = 3{,}0$ b) stenens acceleration. Bestäm konstanterna p och q så att funktionen $y = 3x^3 + px^2 - qx + 5$ satisfierar differentialekvationen $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 4x = 0$ Bestäm k så att $y = e^{kx}$ blir en lösning till $y' - 4y = 0$ Visa att $y = Ae^{3x} + Be^{-3x}$ är en lösning till $y'' - 9y = 0$.
8.7 Derivatan av sammansatt funktion, produkt och kvot	Momentet lämpar sig väl för övning i bevisföring.	Bestäm derivatan av följande funktioner a) $x^2 + xe^{2x}$ b) $(x-1)^{19}$ c) $\ln(x^2 - x)$ d) $(x^2 - 1)(x^2 + 4x)$ Bestäm eventuella extrempunkter till kurvan $y = xe^{-x}$. Rita därefter kurvan. Bestäm det största värde som funktionen $e^{-x}/(x+1)$ kan anta för $x < -1$.

9 Integraler, areaberäkning (35)

MOMENT | **KOMMENTARER** | **EXEMPEL**

9.1 Primitiv funktion

Begreppet primitiv funktion kan införas med hjälp av exempel från andra ämnen.

Hastigheten u m/s för en raket strax efter start beror av tiden x s enligt sambandet,
$u = 0{,}10x^2$.

a) Vilket samband råder mellan raketens förflyttning y m och hastighet u m/s?
b) Bestäm sambandet mellan y och x.
c) Beräkna raketens höjd över utgångsläget efter 10 s.

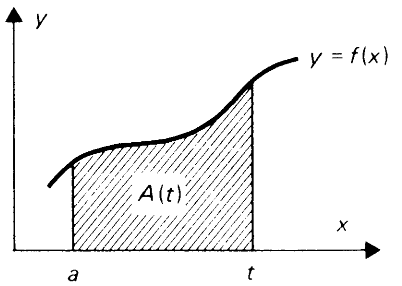
En kondensator urladdas genom en resistor. Vid tiden x ms har laddningen z mC passerat resistorn och strömmen är då y mA, där
$y = 16 \cdot e^{-x/25}$ och
$\frac{dz}{dx} = y$

a) Bestäm sambandet mellan z och x.
b) Hur stor laddning har passerat mellan tidpunkterna 1,0 ms och 3,0 ms?

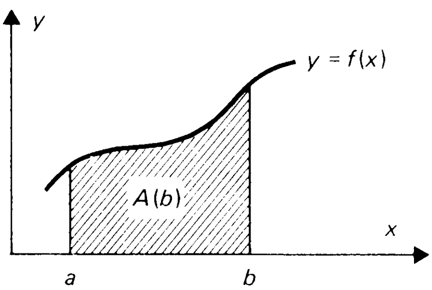
Före 9.2 behandlas numerisk integration enligt N.2 om det inte gjorts tidigare.

9.2 Areafunktion, generaliserad integral

Areafunktionen A införs som framgår av figuren.



Sambandet $A' = f$ visas (f kontinuerlig).
Sambandet mellan arean $A(b)$ (se figur) och den primitiva funktionen F till f visas.
$A(b) = F(b) - F(a)$, $F' = f$.



Bestäm arean mellan kurvan $y = 1/x$ och linjerna $x = 1$, $x = 4$ och $y = 0$.

Bestäm arean av det område som begränsas av kurvorna $y = 2x^2 + 1$ och $y = 3x + 6$.

Bestäm a) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\int_1^\infty e^{-2x}\,dx$

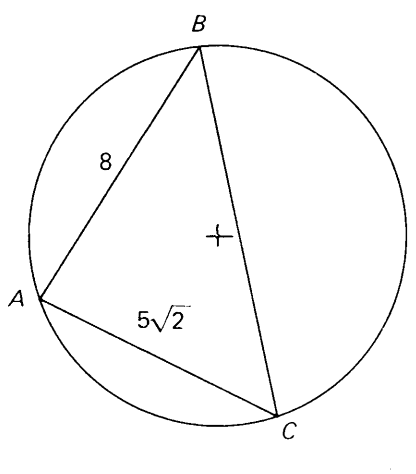
Ett byggnadsföretag bygger en skola under 400 dagar. Under denna tid betalar man kontinuerligt material och löner till de anställda. Utgifterna per dag är ungefär $x(600 - x)$ kr där x betecknar antalet dagar sedan bygget startades. Vad blir totalutgifterna för material och löner under dessa 400 dagar?

Vid läget x m påverkas en kropp av kraften $F(x)$ N
Kraften är riktad i positiv x-led.
$F(x) = 3\sqrt{x} + x$.
Beräkna det arbete som åtgår att förflytta kroppen från $x = 1$ till $x = 3$.

10 Trigonometri (45)

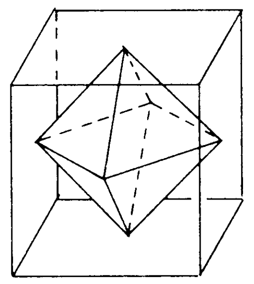
MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
10.1 Triangel-satser	Area-, sinus-, cosinussatserna behandlas. Problem som leder till två fall behandlas. Problem som kräver två eller flera steg vid lösningen bör förekomma.	I en triangel är en sida 97 mm samt den vinkel som står mot denna sida 33°. En av de övriga sidorna är 110 mm. a) Konstruera de två trianglar som är möjliga. b) Beräkna övriga sidor och vinklar i dessa trianglar. I ett parallelltrapets är de icke parallella sidorna 37,8 cm och 46,7 cm. Om dessa sidor dras ut så skär de varandra under vinkeln 24,0°. Beräkna vinklarna i parallelltrapetset. En triangel inskrivs i en cirkel med radien 5,0 cm. Två av sidorna i triangeln är 8,0 cm och 7,0 cm. Beräkna den tredje sidan (två fall).
10.2 Enhets-cirkeln	Sin, cos, tan och cot för en godtycklig vinkel definieras. Graferna ritas till: Sin x, cos x och tan x. Kurvor ritas av typ: $y = 3\cos 2x$ och $y = 2\sin(x + 30°)$.	Bestäm exakt sin t och cos t då t ligger i fjärde kvadranten och tan $t = -5$. Lös ekvationen $3\cos 4x + 5/3 = 0$
10.3 Formler	Följande formler behandlas: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\cos(x \pm y) =$ $= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\sin(x \pm y) =$ $= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	Bevisa likheten $\sin(u + v) - \sin(u - v) = 2 \cos u \cdot \sin v$ Bestäm exakt tan $2t$ då t ligger i tredje kvadranten och $\cos t = -3/5$ I figuren är cirkelns radie 5 l.e. Bestäm med hjälp av uppgifterna i figuren ett exakt värde på sin A.

l.e.



MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
10.4 Gränsvärde, derivata	$\lim\limits_{v \to 0} \frac{\sin v}{v}$ bestäms. I detta sammanhang införs radianer. Derivatan härleds av: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ och $\cot x$. Prövning görs av lösningar till differentialekvationen $y'' + k^2 y = 0$	Bestäm derivatan av a) $3x - \sin(4x + 3)$ b) $\tan 2x - \cos^2 2x$ Kurvan $y = 4\, e^{-2x} \sin x$ är given. Bestäm en ekvation för kurvans tangent i origo. Visa att funktionen $y = \cos 2x$ satisfierar ekvationen $y' + 4y - 4 \cos 2x + 2 \sin 2x = 0$. En kropp rör sig längs en z-axel. Kroppens förflyttning z m beror av tiden x s enligt sambandet $z = 8{,}0 \cdot \sin(2x - \frac{1}{2} \cdot \pi)$ Bestäm a) de tidpunkter då kroppen passerar origo. b) kroppens största hastighet. c) kroppens största acceleration. Bestäm k så att $y = 3 \sin kt$ blir en lösning till differentialekvationen $y'' + 64y = 0$ Visa att $y = A \cos 7t + B \sin 7t$ är en lösning till $y'' + 49y = 0$

11 Rymdgeometri (20)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
11.1 Volym, area	Cylinder och kon med specialfallen prisma och pyramid definieras. Samband mellan volym, höjd och basytans area för dessa kroppar behandlas. Vidare beräknas: rotationskroppars volym, mantelytornas areor för rak cirkulär cylinder och kon samt klotets volym och area.	 De sex mittpunkterna på en kubs begränsningsytor utgör hörnpunkterna på en kropp som begränsas av åtta plan (en oktaeder, se figur). Beräkna denna kropps volym, då kubens kant är 120 cm. Betrakta det område som begränsas av x-axeln, och kurvan $y = x^2 - a^2$. Man låter området rotera, dels kring x-axeln, dels kring y-axeln. Bestäm den positiva konstanten a så att de två rotationskropparna får lika stora volymer. En lampskärm skall tillverkas så att den får samma form som mantelytan hos en parallellt stympad kon. Avståndet mellan basytorna skall vara 25 cm och deras omkretsar 160 cm respektive 80 cm. Beräkna hur mycket material som går åt till mantelytan hos lampskärmen.
11.2 Maximi- och miniminproblem		Rita kurvan $y = 2x - x^2$ i intervallet $0 \leqq x \leqq 2$. En linje skär kurvan i origo O och i en annan punkt P. Vid rotation kring x-axeln alstrar sträckan OP mantelytan till en kon. Bestäm konens maximala volym. Svara med ett närmevärde med tre gällande siffror.

12 Elementär sannolikhetslära (20)

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

12.1 Enkla slumpförsök

Experimentell uppläggning med mätning av relativa frekvenser i såväl osymmetriska som symmetriska försök är lämplig. Relativa frekvensers stabilitet diskuteras och begreppet sannolikhet definieras. Samband diskuteras i enkla fall mellan begreppen:
utfall,
elementarsannolikhet och
händelse.

Följande tankekedja diskuteras:
symmetri,
förväntade relativa frekvenser
och lika elementarsannolikheter.

Likformig sannolikhetsfördelning definieras.

Ett häftstift kastas 10 000 gånger varvid stiftet hamnar med spetsen uppåt 6 589 gånger och med spetsen nedåt 3 411 gånger.

a) Ange det ungefärliga antalet gånger som stiftet kan förväntas hamna med spetsen uppåt, om man kastar det 25 000 gånger.

b) Ange ett ungefärligt värde på sannolikheten att stiftet vid nästa kast hamnar med spetsen uppåt.

Vid kast med en osymmetrisk tärning är sannolikheten för utfallen 1, 2, . . . , 6 ögon följande:

antal ögon:	1	2	3	4	5	6
sannolikhet:	0,19	0,18	0,13	0,12	0,17	?

Beräkna sannolikheten för följande händelser:

a) man får en sexa

b) man får ett udda antal ögon

Två symmetriska tärningar kastas.

a) Beräkna sannolikheten för att ögonsumman blir minst 10

b) Vilken ögonsumma är mest sannolik?

12.2 Försök i flera steg

Följande behandlas:
additionslagen,
varandra uteslutande händelser,
betingad sannolikhet och
oberoende händelser.

Utfallen åskådliggörs med diagram, t ex fyrfältdiagram och träddiagram.

Fyrfältdiagram för Persons bilfärd

2:a ljussignal

r	0,70	0,25	0,45
g	0,30	0,20	0,10
		0,45	0,55
		g	r

1:a ljussignal

Person passerar varje dag två trafikljus. Under ett år visade det sig att Person fick grönt ljus vid det första och andra trafikljuset i 45% resp 30% av antalet resor. I 20% av antalet resor fick han grönt ljus vid båda passagerna.

a) Åskådliggör de relativa frekvenserna i ett fyrfältdiagram.

b) Ange sannolikheten för att Person vid en slumpvis vald resa noterat
   1) rött ljus vid den första och grönt ljus vid den andra passagen
   2) rött ljus vid båda passagerna.

I var och en av två lådor finns 15 vita och 10 svarta kulor, av vilka 7 vita och 6 svarta är något tyngre än de övriga.

a) Vad är sannolikheten att en slumpvis vald kula är tung?

b) En slumpvis vald kula visar sig vara svart. Vad är sannolikheten att den också är tung?

c) Man drar först en kula ur den ena lådan och sedan en ur den andra. Vad är sannolikheten att den första kulan är svart och den andra tung?

d) Man drar två kulor ur samma låda. Vad är sannolikheten att den första är svart och den andra tung?

13 Serier

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
13.1 Ändliga summor	Aritmetiska och geometriska summor behandlas. Tillämpningar på problem med ränta på ränta, annuitet och nu-värde behandlas.	Hur många termer skall medtas i $1{,}1^1 + 1{,}1^2 + 1{,}1^3 + \ldots$ för att summan skall överstiga 1000?
13.2 Seriers summa	Delsummor och begreppet konvergens genomgås. Geometriska serier behandlas. Några exempel på andra serier ges.	Visa att de termer i den oändliga geometriska serien $0{,}4 + 0{,}16 + 0{,}064 + \ldots$ som slutar på siffran 4 bildar en ny geometrisk serie. Hur stor del av den ursprungliga seriens summa utgör summan av den sistnämnda serien? Beräkna $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$
13.3 Funktions-serier	Approximerande polynom används vid beräkningar MacLaurin-utvecklingar utförs av bl a $\sin x$, $\cos x$, e^x och $\ln(1+x)$ Stringent behandling med konvergensundersökning och resttermer krävs inte.	Ange ett approximerande polynom av grad fyra till funktionen $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$ genom att ersätta $\cos x$ med ett approximerande polynom.

14 Komplexa tal

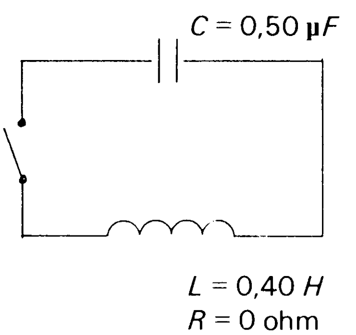
MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
14.1 Räkne-lagar	Komplexa tal införs på formen $a + i \cdot b$. Begreppen realdel, imaginärdel och konjugat[1] införs. De fyra räknesätten med komplexa tal behandlas.	Skriv det komplexa talet $\frac{2+3i}{5-2i}$ på formen $a + i \cdot b$. Beräkna $z/\overset{*}{w} - w/\overset{*}{z}$ då $z = 1 + 2i$ och $w = 3 - i$
14.2 Komplexa talplanet	Absolutbelopp och argument för komplexa tal definieras. Den polära formen $r(\cos v + i \cdot \sin v)$ presenteras. Följande regler behandlas: $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$, $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$, $\lvert z \cdot w \rvert = \lvert z \rvert \cdot \lvert w \rvert$ och $\lvert z/w \rvert = \lvert z \rvert / \lvert w \rvert$ Ekvationer av typ $x^n - 1 = 0$ löses.	Beräkna a) $\lvert z \rvert + \lvert w \rvert$ b) $\lvert z + w \rvert$ då $z = 3 - 11i$ och $w = -6 + 8i$ Ange belopp och argument av a) $3(\cos 30^\circ - i \cdot \sin 30^\circ)$ b) $5(\cos 20^\circ + i \cdot \sin 20^\circ)$ Rita in i det komplexa talplanet de tal som svarar mot $(2 + 2i) \cdot z$ då z är lika med a) i b) $1/(-1 - 2i)$ Lös ekvationerna a) $x^8 - 1 = 0$ b) $x^2 = 1 + i$
14.3 Komplex-värda funktioner av reell variabel	Derivatan definieras och beräknas för några enkla funktioner.	Derivera $z = \cos 2x + i \cdot \sin 2x + 3i \cdot x$
14.4 Formen $e^{s+i \cdot t}$	Sambandet $e^{i \cdot t} = \cos t + i \cdot \sin t$ motiveras t ex med hjälp av att $f'(t) = i \cdot f(t)$ och $f(0) = 1$ leder till $f(t) = \cos t + i \cdot \sin t$ Sambandet kan också motiveras med hjälp av funktionsserier. Räkneregler för potenser med basen e genomgås.	Beräkna $5e^{2+3i} \cdot 2e^{3+2i}$ Skriv svaret på formen $a + i \cdot b$ och ange såväl exakta som approximativa värden på a och b.
14.5 Faktor-satsen	Faktorsatsen bevisas. Algebrans fundamentalsats berörs utan bevis. Några enkla ekvationer med komplexa lösningar behandlas.	Lös ekvationen $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ Lös ekvationen $x^2 + 2i \cdot x + 1 = 0$

[1] Som beteckning för konjugatet till z används $\overset{*}{z}$ eller $\bar{z}$.

15 Integrationsmetoder

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
15.1 Partiell integration	Formeln för derivering av produkt utnyttjas vid härledning av formeln för partiell integration.	Bestäm de primitiva funktionerna till f då a) $f(x) = xe^x$ b) $f(x) = \ln x$ Beräkna $\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$
15.2 Variabelsubstitution	Formeln för derivering av sammansatt funktion utnyttjas.	Beräkna a) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x^2 \, dx$ b) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$ Bestäm en primitiv funktion till f då a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ Beräkna $\lim_{k \to \infty} \sqrt{k} \cdot \int_0^{\infty} e^{-(kx)^2} \, dx$

16 Differentialekvationer

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
16.1 $y' = H(x, y)$ **Eulers metod**	Begreppen riktningsfält, partikulärlösning och allmän lösning behandlas. Vid beräkning med Eulers metod används steglängdshalvering för skattning av trunkeringsfelet. Richardsonextrapolation bör användas. Man bör observera att Eulers metod inte fungerar om lösningsfunktionen har en diskontinuitet i det intervall som studeras. Sålunda går $f(2)$ ej att bestämma i det andra exemplet.	Differentialekvationen $y' = y - x$ är given. a) Rita motsvarande riktningsfält. b) Visa att $y = x + 1$ är en lösning. c) Visa att $y = x + 1 + A\,e^x$ är en lösning för varje värde på konstanten A. d) En lösningskurva går genom punkten (4;1). Bestäm en ekvation för kurvans tangent i punkten. Differentialekvationen $y' = 1 + y^2$ har en lösning $y = f(x)$ sådan att $f(0) = 0$. Beräkna med Eulers metod a) $f(1)$ b) $f(-1)$ c) $f(1{,}5)$
16.2 $y' + ay = 0$, $y' + g(x)y = h(x)$ **Integrerande faktor**	Eventuellt kan också ekvationen $\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)}$ behandlas.	Differentialekvationen $y' + y = x^2$ är given a) Visa att ekvationen har en lösning $y = ax^2 + bx + c$ och bestäm konstanterna *a, b* och *c*. b) Bestäm ekvationens allmänna lösning. c) Lös ekvationen genom att multiplicera med den integrerande faktorn e^x. Lös ekvationen $y' + 2xy = x$
16.3 $y'' + ay' + by = h(x)$	Det förutsätts inte att komplexa tal har behandlats. Differentialekvationen $y'' + ay' + by = h(x)$ löses för $h(x) = 0$ och några andra enkla funktioner. Man kan nöja sig med att studera de fall då den karaktäristiska ekvationen $k^2 + ak + b = 0$ har två reella rötter k_1 och k_2 samt fallet $a = 0$ och $b = \omega^2$ Man visar att $y = Ae^{k_1x} + Be^{k_2x}$ respektive $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ är en lösning för varje värde på konstanterna A och B.	 Kondensatorn i kretsen laddas till spänninngen $U = 120$ V. Därefter sluts kretsen ($t = 0$ s). Strömmen $i(t)$ i kretsen satisfierar differentialekvationen $i''(t) + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = 0$ Begynnelsevillkoren är $i(0) = 0$ och $i'(0) = \frac{U}{L}$ Bestäm strömmen i kretsen vid tiden 5,0 ms.

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
16.4 $y' = H(x, y, z)$, $z' = K(x, y, z)$, **Eulers metod**	Vid användning av Eulers metod diskuteras omformningen $\begin{cases} y'' + ay' + by = h(x) \\ y' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y' = z \\ z' = h(x) - by - az \end{cases}$ Biblioteksprogram kan användas.	Radiumisotopen $^{225}_{88}Ra$ är instabil och sönderfaller under β-strålning till aktiniumisotopen $^{225}_{89}Ac$ Halveringstiden är 14,8 dygn. Även aktiniumisotopen är instabil och sönderfaller under α-strålning till franciumisotopen $^{221}_{87}Fr$. Aktiniumisotopens halveringstid är 10,0 dygn. Vid en viss tidpunkt har man 1,000 g av isotopen $^{225}_{88}Ra$. a) Beräkna mängden radium och mängden aktinium efter *t* dygn. b) Efter hur lång tid är mängden aktinium i preparatet maximal?
16.5 Problem som leder till uppställandet av differentialekvationer	Eleverna övas i att ställa upp diffentialekvationer och bedöma vilken lösningsmetod som skall användas (t ex exakt eller numerisk).	En kastrull med vatten får svalna efter uppvärmning till kokning. Omgivningens temperatur är 20 °C. Vattnets temparaturändring per tidsenhet är proportionell mot differensen av vattnets och omgivningens temperaturer med proportionalitetskonstanten lika med 0,02 min^{-1}. Beräkna vattnets temperatur efter 20 minuter om dess begynnelsetemperatur är 100 °C. För en viss kropp med massan 12 kg som rör sig fritt i luften, är luftmotståndet proportionellt mot hastigheten med proportionalitetskonstanten $k = 54$ kg/s. Kroppen får falla fritt från vila vid tidpunkten $t = 0$ s. Hur långt har den fallit vid tiden $t = 5{,}0$ s? Lös motsvarande uppgift om luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten i kvadrat och där k nu är 3,0 kg/m.

17 Fördjupad sannolikhetslära

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL
17.1 Binomialfördelning, kombinatorik, väntevärde	I kombinatoriken behandlas: multiplikationssatsen, permutationer, antal följder och delmängder med k element valda ur given mängd med n element, symbolerna $n!$ och $\binom{n}{k}$, binomialsatsen och Pascals triangel. Begreppet väntevärde definieras. Beräkningar av väntevärden görs experimentellt i slumptalssimulerade försök. I enkla fall görs även exakt beräkning.	I en klass finns 17 flickor och 11 pojkar. På hur många sätt kan man bilda en grupp med 6 elever av vilka 4 skall vara flickor? Visa att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ Man har tio från början tomma lådor, numrerade 1, 2, . . . , 10, i vilka kulor skall läggas. I varje omgång väljs en låda slumpvis, och i den valda lådan läggs en kula. a) Beräkna sannolikheten att det efter 25 omgångar finns 2 kulor i låda nr 1. b) Beräkna sannolikheten att låda nr 1 är tom efter 8 omgångar och innehåller 1 kula efter den nionde. c) Varje gång som låda nr 1 får en kula räknas det sammanlagda antalet kulor i lådorna varefter lådorna töms. Beräkna väntevärdet av antalet kulor vid en räkning. d) Varje försök får som i a) ovan omfatta 25 omgångar. Därefter räknas antalet kulor i låda nr 1. Beräkna väntevärdet av antalet kulor i låda nr 1.
17.2 Kontinuerliga fördelningar	Frekvensfunktion och fördelningsfunktion definieras. Speciellt studeras normalfördelningen. Normalfördelningsapproximation av binomialfördelningen genomgås och tillämpas.	Försöket att bestämma brinntiden t timmar hos en viss lampsort beskrivs av fördelningsfunktionen $F(t) = 1 - e^{-t/400}$. a) Beräkna sannolikheten att brinntiden överstiger 800 timmar. b) Bestäm frekvensfunktionen. Beräkna sannolikheten att man vid 720 tärningskast får högst 100 sexor.
17.3 Punktskattning, konfidensintervall, urvalsförfarande	Punktskattning av medelvärde och standardavvikelse behandlas. I detta avsnitt kan motivering ges för nämnaren $(N - 1)$ i uttrycket för standardavvikelsen i ett material med N observationer. I anslutning till konfidensintervall behandlas också konfidensgrad. Som exempel på konfidensintervall kan konfidensintervall för medianvärdet behandlas.	

18 Vektorer

MOMENT	KOMMENTARER	EXEMPEL

18.1 Vinkelberäkningar

Vinkeln definieras
mellan två linjer,
mellan linje och plan och
mellan två plan.
I anslutning härtill görs vinkelberäkningar utan hjälp av vektorer.

En pyramids basyta utgör en regelbunden femhörning. Baskanten är 2,0 cm och sidokanten 4,0 cm
Bestäm vinkeln mellan basytan och en sidoyta samt vinkeln mellan basytan och en sidokant.

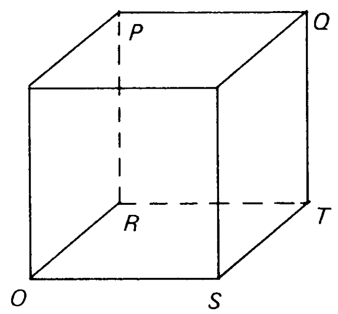
En tetraeder begränsas av fyra liksidiga trianglar (en s k regelbunden tetraeder). Beräkna vinkeln mellan en kantlinje och en sidoyta samt vinkeln mellan två sidoytor.

18.2 Vektorer

Räknelager genomgås.
Framställning i koordinatform presenteras.
Absolutbelopp och skalärprodukt definieras.
Vektorer utnyttjas vid vinkelberäkningar.

Betrakta kuben i figuren.
Bestäm vinkeln mellan

a) linjerna *OQ* och *PT*
b) planen *OPR* och *QRS*.



18.3 Analytisk geometri

Ekvationer för plan och linjer härleds.

Bestäm a så att vektorn $(a; 2; 2a - 1)$ blir parallell med planet $2x - 3y + z = 4$.

Bestäm skärningspunkten mellan planet $3x + 4y - 3z = 7$ och en normal till planet som går genom punkten $(2; -3;7)$

Bestäm en ekvation för det plan som är parallellt med linjen L_1 och som innehåller linjen L_2 om linjernas ekvationer är
L_1: $(x; y; z) = (1 + 2t; 3 + 3t; 2 + t)$
L_2: $(x; y; z) = (3 + 2t; 1 + t; 2 + 3t)$

Beräkna avståndet mellan x-axeln och linjen genom punkterna $(2; 3; 7)$ och $(1; 0; 5)$

Planet $2x - 3y + z = 4$ skär xz-planet längs linjen L_1 och yz-planet längs linjen L_2.
Beräkna vinkeln mellan linjerna L_1 och L_2.

Läroplan för gymnasieskolan Lgy 70

II Supplement 75

Liber UtbildningsFörlaget

ISBN 91-40