GÖTEBORGS UNIVERSITET
INST FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

Elevers svårigheter och missuppfattningar i aritmetik i åk

Paula Wiktorell

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	Specialpedagogiska programmet, SPP600
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år:	Ht/2012
Handledare:	Jan-Åke Klasson
Examinator:	Anders Hill
Rapport nr:	HT12-IPS-01 SPP600

Abstract

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Program och/eller kurs: Specialpedagogiska programmet, SPP600
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: Ht/2012
Handledare: Jan-Åke Klasson
Examinator: Anders Hill
Rapport nr: HT12-IPS-01 SPP600
Nyckelord: matematik, matematiksvårigheter, aritmetik

Syfte:
Syftet med studien var att undersöka elevernas strategier samt eventuella svårigheter och missuppfattningar med avseende på aritmetikkunskaper i åk 7 på en högstadieskola.

Teoretisk referensram:
Studien tar sin utgångspunkt i det postpositivistiska paradigmet och har både en kvantitativ med lösningsfrekvenser och en kvalitativ del med innehållsanalys. I det postpositivistiska paradigmet kan man använda sig av flera metoder (Denzin & Lincoln, 2011). Enligt Denzin och Lincoln är en av grundtankarna inom postpositivismen att vi aldrig kan förstå naturen helt och hållet, det finns alltid dolda faktorer som vi kanske inte kan upptäcka och detta utgör drivkraften för nya studier inom samma område. Grundidén med innehållsanalys är att kvantifiera någonting i texter utifrån ett speciellt syfte och som stöd för kvantifieringen kan intervjuerna användas (Bergström & Boréus, 2005).

Metod:
Undersökningen genomfördes i samtliga klasser i åk 7 på en skola och från denna grupp av elever valdes några elever ut för intervjuer. Den kvantitativa delen undersöker lösningsfrekvensen för de olika uppgifterna genom statistik över vilken typ av fel som eleverna gjort samt över hur många elever som har löst samtliga uppgifter inom ett räknesätt korrekt och vilken metod de har använt. I den kvalitativa delen används innehållsanalys som metod med syfte att försöka förstå vilken typ av misstag som eleverna gör genom att analysera de uppgifter som de har löst samt genom intervjuer med några elever. Databearbetningen har skett genom kodning och kategoriseringar av datan från testuppgifterna och transkriberingen av intervjuerna. Dessa kategorier har sedan använts i tolkningen av resultaten.

Resultat:
I studien framkommer det att eleverna redovisade testuppgifterna på i huvudsak tre olika sätt: vertikal algoritmräkning, skriftlig huvudräkning och endast svar. Den positiva lösningsfrekvensen är högst för vertikal huvudräkning för uppgifter som innehåller addition och subtraktion. För multiplikation var den högst för redovisningar som endast innehöll ett svar. Eftersom inte alla elever intervjuades är det svårt att veta hur eleverna har gjort när de löst uppgiften. När det gäller division användes i huvudsak kort division. De vanligaste felen som eleverna gör när de använder vertikal algoritmräkning är beräkningsfel och att de använder minnessiffrorna på ett felaktigt sätt. De vanligaste felen när det gäller skriftlig huvudräkning är att eleverna gör den typ av fel i beräkningarna som skulle kunna bero på brister i kunskapen om positionssystemet eller antalskonstansen. När det gäller division har eleverna svårast att lösa den uppgift som innehåller innehållsdivision.

Förord

Att skriva detta examensarbete har varit som en resa på ett delvis okänt hav. Jag har fått många nya insikter och utvecklats både som pedagog och individ under resan. Genom studien har jag fått en ökad förståelse för hur det kan vara att vara elev i matematiksvårigheter och på vilket sätt man kan underlätta i undervisningen.

Jag vill rikta ett stort tack till skolan som lät mig göra min undersökning hos dem och då främst till eleverna som jag fick möjligheten att intervjua. Utan er hade det inte blivit en studie. Jag vill även rikta ett stort tack till Jan-Åke Klasson som har handlett mig på min resa. Tack för alla goda råd och kommentarer.

Det största tacket vill jag rikta till min familj och svärmor som har stöttat mig. Tack för att ni har stått ut med alla papper och en ganska frånvarande mamma och svärdotter.

Innehållsförteckning

Inledning

Enligt ett pressmeddelande 1 december 2008 från Skolverket minskade andelen elever med gymnasiebehörighet och orsaken var att fler flickor än tidigare inte nådde målen för godkänt i matematik. År 2008 var det 7,2 % av flickorna och 7,7 % av pojkarna som inte nådde målen för godkänt i matematik och det var en ökning när det gällde antalet flickor som inte nådde godkänt i matematik. I ett annat pressmeddelande (Skolverket, 29 november 2011) meddelas att 19,3 % av eleverna i årskurs nio inte fick godkänt på nationella provet i matematik vårterminen 2011. Det är den högsta siffran sedan skolverket började mäta 2003. För att komma tillrätta med denna negativa trend beslutade regeringen att ge skolverket i uppdrag att genomföra en matematiksatsning under åren 2009 och 2011. I satsningen deltog 200000 elever och 12000 lärare. Enligt ytterligare ett pressmeddelande (Skolverket, 21 december 2011) har satsningen lett till bättre undervisning i matematik och slutsatsen att det är bättre att satsa på att utveckla lärarens förmåga att undervisa än att bara satsa på datorer och laborativt undervisningsmaterial. Skolverket väntar nu på ytterligare en satsning där fler lärare och elever kan delta.

I utbildningsplanen för specialpedagogprogrammet står det att en specialpedagog skall kunna:

> visa förmåga att vara en kvalificerad samtalspartner och rådgivare i pedagogiska frågor för kollegor, föräldrar och andra berörda (Göteborgs Universitet, 2009)

Som specialpedagog förväntas du att finnas där som en rådgivare i olika pedagogiska frågor med fokus på de specialpedagogiska dilemman som kan uppstå i undervisningen. Enligt Engström (2003) är misslyckandet i matematik ett stort problem för våra skolor. Lunde (2010) skriver att man har kallat matematiksvårigheter ”lärandeproblem som skolan glömde” och det ligger mycket i den beskrivningen. Som specialpedagog är det viktigt att uppmärksamma elever som har svårigheter när det gäller matematik. Detta kan göras genom att man observerar och testar elevernas förmåga att lösa matematiska uppgifter, men det räcker inte. Man måste även ta reda på vad svårigheterna och eventuella missuppfattningar beror på samt hur man kan hjälpa eleverna fram till strategier som fungerar. Denna kunskap kan sedan användas för att ge råd och stöd till undervisande lärare så att undervisningen utvecklas och fler elever når kunskapskraven. För att kunna göra detta krävs att man dels tillägnar sig den kunskap som forskningen har kommit fram till inom detta område samt intervjuar eleverna hur de tänker när de försöker att lösa uppgifter i matematik. Jag har för avsikt att ta reda på vilka svårigheter och eventuella missuppfattningar elever kan ha i matematik när det gäller de fyra räknesätten addition, subtraktion, multiplikation och division. Anledningen till att jag har valt dessa är att de ofta utgör en grund för att kunna lösa andra uppgifter i matematik.

Syfte och frågeställningar

Studien tar sin utgångspunkt i det specialpedagogiska forskningsområdet som berör matematiksvårigheter, ett område som inte är tydligt avgränsat mot närliggande forskningsområden. Enligt både Engström (2003) och Lunde (2010) saknas det internationell evidensebaserad forskning som undersöker matematiksvårigheter och vad som hjälper elever som upplevs ha svårigheter i matematik. Bentley har bedrivit forskning inom området aritmetik och hans studier visar på en del missuppfattningar och svårigheter som elever i matematiksvårigheter har eller gör. Bentley och Bentley (2011) menar att det inte räcker med diagnoser för att avgöra vad eleverna kan eller inte kan utan det krävs även intervjuer och gruppsamtal. De elever som är i matematiksvårigheter har bland annat ofta en bristfällig kunskap när det gäller antalskonstansen, talkombinationerna och positionssystemet enligt författarna. En annan forskare som har bedrivit studier som berör elevers matematikkunskaper är Löwing. I hennes undersökning från 2011 framkom det att stora delar av eleverna i de klasser hon undersökte hade så stora brister i sina matematikkunskaper att de inte kunde lösa grundläggande uppgifter. Löwing (2006) har även tidigare visat på att en allt för läroboksstyrd undervisning kan leda till inlärningssvårigheter. Foxman och Beiszhusern (2002) visar i sin undersökning att eleverna som använder vertikal algoritm har en högre lösningsfrekvens för bland annat additionsuppgifter med tiotalsövergång och multiplikation med decimaltal än de elever som använder talsortsvis beräkning (i Sverige ofta kallad skriftlig huvudräkning).

Syfte för den här studien formades med utgångspunkt från delar av de fyra tidigare nämnda forskarnas studier och formuleras på följande sätt: syftet med den här studien är att undersöka elevernas strategier samt eventuella svårigheter och missuppfattningar med avseende på aritmetikkunskaper i åk 7 på en högstadieskola.

Nedanstående frågeställningar kommer att användas i studien:

- Vilka strategier använder elever när de löser uppgifter med de fyra räknesätten?
- Kan man se någon tendens om någon metod eller strategi är mer effektiv?
- Vilka svårigheter kan uppstå när det gäller de strategier som eleverna använder för att lösa uppgifter?
- Vad är orsaken till dessa svårigheter?

Litteraturgenomgång och tidigare forskning

Under den här rubriken kommer olika delar av det matematiska området att presenteras ur ett specialpedagogiskt perspektiv och därefter presenteras vilka svårigheter som olika forskare har funnit att elever uppvisar med fokus på aritmetiska uppgifter. I litteraturgenomgången kommer även två strategier som är vanligt förekommande i läromedel i matematik att presenteras. Slutligen presenteras några centrala didaktiska principer för att utveckla undervisningen i matematik så att elever som har svårigheter i matematik kan få stöd och utveckla sin matematiska förmåga.

Specialpedagogiska frågeställningar i matematik

Att ge en bild av det specialpedagogiska synsättet när det gäller matematiksvårigheter är svårt av många anledningar. En anledning är att det finns många olika definitioner på matematiksvårigheter och man är heller inte överens om vad man skall kalla dessa svårigheter. Det är också ett forskningsfält där det inte har förekommit så mycket forskning. Till exempel skrevs det 14 gånger fler forskningsrapporter om lässvårigheter än om matematiksvårigheter under perioden 1996-2005 (Lunde, 2010). Forskare definierar matematiksvårigheter på olika sätt och väljer olika uttryck när de beskriver elevers svårigheter i matematik. Även orsakerna till svårigheterna varierar hos forskarna beroende på vilket perspektiv de väljer att ta.

Matematikstoffet, elevens personlighet och omgivningen är tre faktorer som samspelar när elever arbetar med matematik (Magne 1998; Engström & Magne 2003). Alla dessa tre faktorer måste beaktas när man undersöker varför en elevs matematikprestationer ser ut som de gör. Matematik handlar inte främst om enkla räknefärdigheter, memorering, att följa regler och träning, utan av *tankeaktiviteter* som abstraktioner, skapa mönster, resonera och utveckla (Engström, 2003).

I en skola som förespråkar integrering istället för segregering är individuella skillnader i matematik tydliga och bör ses som ett uttryck för en naturlig variation av olikhet. Detta är inte en grund för specialpedagogiska åtgärder utan något som skolan behöver lära sig att hantera (Engström, 2003).

Engström (2003) pekar på tre olika specialpedagogiska perspektiv när det gäller barns lärandesituation: 1) Det kompensatoriska perspektivet – där grundtanken är att man skall försöka kompensera eller väga upp de svårigheter och problem som eleven har. För att veta vilka åtgärder som skall sättas in används diagnoser och tester. 2) Det kritiska eller relationistiska perspektivet – orsakerna till elevens svårigheter söks inte främst hos eleven utan utanför, i skolsystemet. Grundidén är att om en elev inte lär sig måste vi titta på hur lärandesituationen skall förändras. Detta perspektiv är kritiskt till diagnosers och testers objektivitet och hävdar att dessa ofta är negativa för eleven. 3) Dilemmaperspektivet – skolsystemet står inför problem som är motstridiga och olösliga. Fokus bör ligga på vad eleven har användning av på lång sikt snarare än på kompensationer i skolan.

Lunde (2010) menar att det enda som elever med matematiksvårigheter har gemensamt är att de har svårigheter i matematik och att man egentligen kanske borde tala om elever i matematiksvårigheter än elever med matematiksvårigheter. Engström (2003) beskriver detta som det relationistiska perspektivet där man ser elevens svårigheter som något som uppstår i samspelet mellan eleven och den miljö som den befinner sig i.

Enligt Van de Walle (1994) finns det en risk att termen specialpedagogik leder tankarna till att tro att elever som har matematiksvårigheter lär sig på något annat sätt än ”normala” elever gör. Van de Walle menar att det inte är så, det finns inget särskilt sätt som barn med matematiksvårigheter lär sig på. Engström (2003) hävdar att det inte finns någon internationell forskning som visar på att elever med specifika matematiksvårigheter skulle behöva någon särskild undervisningsmetod eller material som är annorlunda från den som elever med allmänna matematiksvårigheter behöver. Han menar vidare att det på grund av detta inte finns någon mening med att skilja mellan allmänna och specifika matematiksvårigheter. Även Lunde (2010) saknar evidensbaserad forskning som visar hur inlärningssituationen bör vara för elever med matematiksvårigheter.

Engström (2003) menar att det är *”bestickande”* att argumentera för vikten av att tidigt diagnostisera barn så att olika funktionsnedsättningar och andra svårigheter kan upptäckas i tid. Han hävdar att det är ett vanligt medicinskt angreppsätt där motivet är att förebygga svårigheter innan de uppstått. Engström menar att forskningen idag inte vet vad som faller inom det normala och att man inte kan hävda att barn som har svårt med enkla räkneuppgifter i tidig skolålder kommer att utveckla matematiksvårigheter längre fram. Lunde (2010) menar däremot att det är viktigt att tidigt identifiera elever med svårigheter i matematik.

Enligt Engström (2003) vill många forskare skilja mellan begreppslig och procedurinriktad kunskap och skriver följande:

> att en elev kan följa en räkneregel säger inte mycket om hans/hennes förståelse av samma regel. Att en elev uppvisar svårigheter med att utföra vissa räkneuppgifter betyder inte att samma elev har matematiksvårigheter (sid 32).

Det finns många förklaringar till varför en elev misslyckas med matematiken i skolan. Engström (2003) listar följande förklaringsmodeller:

1. *medicinska/neurologiska* – defektorienterad, eleven har en hjärnskada eller annan fysisk eller psykisk funktionsnedsättning,
2. *psykologiska* – förklaringar sökes i bristande ansträngning eller koncentrationssvårigheter hos eleven, ångest eller olika kognitiva orsaker,
3. *sociologiska* – miljöfaktorer, social deprivation, det vill säga att eleven kommer från en understimulerande miljö, skolsystemet missgynnar barn med exempel arbetarbakgrund,
4. *didaktiska* – felaktiga undervisningsstrategier, ensidig färdighetsträning, etc.

Författaren anser att det inte är meningsfullt att försöka reducera förklaringen till matematiksvårigheter till den ena eller andra modellen eftersom det är ett problem med många dimensioner, alltså menar han att man kan förkasta den medicinska förklaringsmodellen utan att förkasta de resultat som den forskningen har kommit fram till. Lunde (2010) menar att man måste hänsyn till samtliga förklaringsmodeller och att en diskussion mellan förespråkare för de olika modellerna bör uppmuntras.

Lunde (2010) menar att man kan finna en rad olika kännetecken för elever med specifika matematiksvårigheter i modern forskningslitteratur, även om de inte nödvändigtvis säger något om orsakssamband. Ett av dessa är minnesfunktionen. Det har visat sig att elever med matematiksvårigheter ofta har svårigheter att hämta fram eller aktualisera talfakta ur minnet. Att lösa matematikuppgifter kräver att man kan hämta begrepp och strategier från minnet samt att man planerar i vilka steg lösningen skall ske och till sist bedömer svaret i förhållande till uppgiften. Kunskapen om hur man löser ett matematiskt problem finns lagrat i långtidsminnet medan själva lösandet sker i korttidsminnet och det krävs alltså ett samspel mellan långtidsminnet och korttidsminnet. Elever med matematiksvårigheter tycks enligt Lunde (2010) inte har någon generell försvagad fonologisk bearbetningsförmåga i arbetsminnet men de kan ha ett specifikt problem som är knutet till arbetsminnet när det gäller numerisk information. Ett annat är språkfunktionen. Det antas att för att man skall uppfatta ett antal större än fyra krävs språkfärdighet. Två andra talfärdigheter är verbalt baserad objektsräkning och ”spontaneous focusing on numerosity” (Lunde, 2010). Det finns individer som genom en hjärnskada har fått sina språkfärdigheter skadade men där färdigheten för matematik finns kvar. Av detta skulle man kunna dra slutsatsen att språkfärdigheten och färdigheten för matematik är två skilda fenomen. När det gäller den matematiska utvecklingen och förståelse är språkets roll en komplicerad process. Elever kan använda flera olika strategier när de löser matematikuppgifter. De kan till exempel hämta svaret direkt från minnet eller använda olika former av strategier för räkning, så kallade backupstrategier. Ett kännetecken för elever med matematiksvårigheter är att de ensidigt använder bakupstrategier, att dessa strategier ofta är primitiva, de använder samma strategier för olika typer av uppgifter samt att detta kännetecken finns kvar under hela skolgången (Lunde, 2010). Enligt författaren tycks elever med matematiksvårigheter använda tunga och långsamma strategier och det tycks vara likadant för alla fyra räknesätten. Ett samband som ofta kan ses hos elever med matematiksvårigheter är uppfattningen av rumsliga förhållanden och problem i taluppfattningen. Lunde drar följande slutsatser när det gäller kännetecken hos elever med matematiksvårigheter: Matematiksvårigheter beror inte på någon generell defekt och det finns inga isolerade faktorer som skapar dessa problem, till exempel enbart visuospatial förmåga. Det verkar inte heller finnas någon speciell matematisk färdighet som har en central funktion och slutligen drar han slutsatsen att det kanske inte finns några typiska matematiksvårigheter. Elever med matematiksvårigheter tycks, enligt Lunde (2010), vara en mycket heterogen grupp.

Enligt Lunde (2010) har man börjat fundera på om det finns olika grupper av elever med matematiksvårigheter där problemen visar sig på olika sätt. Det kan finnas olika orsaker till svårigheterna och dessa kan samvariera. Lunde har formulerat fyra olika typer av svårigheter: 1) emotionella faktorer och ångest – matematikångest kan störa och blockera lärprocessen, 2) understimulering hos eleven vid skolstarten – kan även kallas sociologiska faktorer och det kan handla om att eleven är tvåspråkig eller inte har mött böcker hemma, 3) undervisningen i klassrummet – de didaktiska faktorerna påverkar elevernas resultat och 4) neuropsykologiska faktorer – påverkar elevens förmåga att tänka.

Svårigheter och missuppfattningar i matematik

Definition av vad matematiksvårigheter är

Lunde (2011) menar att begreppet är oprecist och att man inte vet hur många elever som har/är i matematiksvårigheter. Det kan beskrivas som störningar eller avbrott i lärandeprocessen. En del elever har svårigheter med räkning (uppräkning) samt att de inte kan hålla aritmetiska kombinationer i minnet och automatiskt återge dessa. En sen språk- och läsutveckling har visat sig även påverka inlärningen i matematik. Elever med matematiksvårigheter har ofta problem med att jämföra tal och säga vilket som är störst. De använder även outvecklade och arbetskrävande strategier när de skall lösa matematiska uppgifter. Eleverna kan även ha svårigheter att snabbt uppfatta antal i en mängd samt upprepa talserier, särskilt baklänges (a.a.).

Tidiga tecken på svårigheter

Bentley och Bentley (2011) beskriver att de i Lilla Edet-projektet fann att elever som skrev spegelvända siffror konsekvent räknade upp från början när de skulle addera två tal, medan de elever som inte skrev spegelvända siffror räknade upp från delen. Författarna menar att om man väntar med att uppmärksamma eleven på de spegelvända siffrorna kan det försena elevens aritmetiska utveckling. De menar att en orsak till förseningen skulle kunna vara att arbetsminnet är fullt upptaget med funderingar om hur siffror skrivs, detta medför att endast lite uppmärksamhet kan riktas mot den matematiska inlärningen. Om en elev inte har förståelse för antalskonservationen är det viktigt att detta uppmärksammans av läraren och att läraren skapar aktiviteter så att den utvecklas. Enligt McIntosh (2008) kan det ibland verka som att barnet har svårigheter med antalskonservationen när det egentligen handlar om hur frågan ställs och hur eleven tolkar frågan. Exempel på detta är att en elev kan uppfatta frågan ”hur många är det?” som en uppmaning att räkna antalet även om eleven vet antalet, eller ”i vilken hög är det mest?” kan uppfattas som en fråga som handlar om storlek och inte antal.

Språkliga svårigheter

Funderingar hos eleven kring sambandet mellan talens sifferkoder och språkliga koder kan också belasta arbetsminnet, så att den aritmetiska utvecklingen försenas. I svenskan kan våra språkliga omkastningar för talen 13 till och med 19 samt att vi har andra uttryck för 11 och 12 vara orsaker till att en del elever får svårigheter med att automatisera de språkliga uttrycken för talen (Bentley & Bentley, 2011; McIntosh, 2008). Bentley och Bentley menar att en allt för intensiv träning av talområdet under 20 kan leda till att elever kastar om siffrorna i talen över 20. Till exempel kan en elev skriva 72 när man ber den skriva ”tjugosju”. För elever med ett annat modersmål än svenska eller för tvåspråkiga elever kan en interferens, en överlagring, ske. Det innebär att språken har olika samband mellan talens språkliga koder och sifferkoder, t.ex. kan modersmålet sakna den omkastning för talen 13 till 19 som svenskan har. Detta kan medföra svårigheter för eleven, speciellt om eleven inte har fullt utvecklade språk. McIntosh (2008) menar att det oftast är en övergående fas när elever kastar om siffrorna i talen och behöver inte vara ett tecken på en begreppslig missuppfattning, men att det är viktigt att samtal och aktiviteter om hur vi skriver och säger talen 11-19 utgör en del av undervisningen.
Om eleven använder sig av en så kallad sammanlänkad struktur kan detta också leda till en försenad aritmetisk utveckling. En elev som använder sig av en sammanlänkad struktur skriver 207 när den ombeds att skriva ”tjugosju”. Detta verkar, enligt Bentley och Bentley (2011), bero på att eleven inte har förstått positionssystemet utan skriver talet som det läses. En annan svårighet kan vara om symbolerna för talen ser olika ut som i t.ex. det arabiska och indiska notationssystemet samt att de i vissa fall liknar varandra men symboliserar olika siffror.

Positionssystemet

Om eleverna inte har förstått hur vårt talsystem är uppbyggt kan de stöta på problem senare med tiotalsövergångar samt tal i decimalform. När det gäller tal i decimalform kan mönstret från uppräkning med heltal få eleverna att tro att efter ”ett komma nio” kommer ”ett komma tio” (McIntosh, 2008).

Eleverna kan även ha svårigheter med positionssystemet på olika nivåer. För en del kan det vara svårt att behandla en grupp med tio objekt som en enhet och uttrycka den med symbolen 1. När eleverna lärt sig att behandla tio objekt som en enhet uppstår relativt få problem med tvåsiffriga tal, förutom vid tiotalsövergångar (McIntosh, 2008).

Tal i decimalform kan uppfattas som två skilda tal, heltalen som en del och talen efter decimaltecknet som en annan del. Denna missuppfattning tros komma från hur vi i vardagen säger tal i decimalform, en vara kostar ”sex och nittiofem”. En annan missuppfattning är decimaltecknet som mittpunkt istället för entalet. Decimaltecknet markerar var entalet finns. Att talet blir större ju fler decimaler talet har är en annan missuppfattning hos elever som inte riktigt har förstått decimalernas platsvärde. Det omvända, att eleven tror att ju färre decimaler desto större tal, kan även förkomma och orsaken till det kan vara att många decimaler kan ses som små delar och därmed ett litet tal. Ytterligare en missuppfattning är att det inte finns några tal mellan två intilliggande tiondelar eller hundradelar (McIntosh, 2008).

Addition och subtraktion

Genom ett beskriva ett matematiskt problem med text får man ett benämnt matematiskt problem där något efterfrågas. Innan man utför beräkningen som oftast krävs måste man beskriva problemet i texten med en matematisk modell, detta kallas enkodning. För att klara av att enkoda en situation som beskrivs i en text måste eleven vet vad de fyra grundläggande operationerna i matematik innebär samt kunna använda dem obehindrat. De fyra grundläggande operationerna i matematik är addition, subtraktion, multiplikation och division. Det finns tre typsituationer som modelleras med addition och tre med subtraktion, vanligtvis fyra med multiplikation som också oftast kan modelleras med division (Fuson, 1992).

Additionssituation, förändring lägga till: Man startar med en kvantitet och som genom ett tillägg förändras så att en ny kvantitet bildas. Exempel: Lisa har 15kr och får 8 kr av pappa. Hur många kronor har hon då?

Additionssituation, kombination fysiskt: Man utgår från två kvantiteter, som benämns delar, som kombineras och bildar en fysisk helhet. Exempel: I burken finns 16 röda kulor och 14 blå? Hur många kulor finns det?

Additionssituation, kombination begreppsligt: Även här utgår man från två kvantiteter, som också benämns delar, som kombineras men inte fysiskt. Exempel: I laget finns 6 pojkar och 8 flickor. Hur många finns i laget? Skillnaden mot förra situationen är att de inte nödvändigt behöver befinna sig på spelplanen samtidigt.

Subtraktionssituation, förändring ta bort: Utgångspunkten är en kvantitet från vilken man tar bort en del så att en ny kvantitet bildas. Exempel: Lisa har åtta frimärken och ger bort två. Hur många har hon kvar?

Subtraktionssituation, jämför: Man jämför hur många fler eller färre en kvantitet har jämfört med en annan. Det finns alltså två alternativ beroende på om det handlar om fler eller färre i jämförelsen. Exempel: Ahmed har åtta kort och Per har fyra kort. Hur många fler kort har Ahmed än Per?

Subtraktionssituation, utjämna: I dessa situationer handlar det om att utjämna de skillnader som finns mellan två kvantiteter antingen genom att lägga till eller ta bort. Exempel: Mohammed har fyra kakor och Hanna har två. Hur många fler måste Hanna få för att ha lika många som Mohammed? Hur många måste Mohammed ta bort för att ha lika många som Hanna? Båda situationerna modelleras med samma subtraktion.

I en undersökning som genomfördes av Löwing (2011) i en kommun med ca 1600 elever per årskurs visade det sig att hälften av eleverna i åk 3 och en tredje del i åk 4 inte hade sådana kunskaper i matematik att uppgifter av typen 8-5 kunde generaliseras på uppgifter av typen 48-5 och 48-45. När eleverna skulle lösa subtraktionsuppgifter med tiotalsövergång kunde inte 39 % av eleverna i åk 3 och inte en tredje del av eleverna i åk 4 lösa uppgifter av typen 12-7. Den positiva lösningsfrekvensen sjönk kraftigt när eleverna skulle lösa uppgifter av typen 42-7 och 42-37, 22 % för åk 3 respektive 35 % för åk 4. Löwing menar att när talområdet blir för stort kan eleverna inte räkna på fingrarna eller använda mindre lämpliga strategier. Hon menar även att det är vid dessa tillfällen som kvaliteten på undervisningen visar sig. I åk 7 var det bara 60 % av eleverna som klarade uppgifter av typen 0,54+0,52 och ännu färre klarade av att lösa uppgiften 7,2–3,9.

Enligt McIntosh (2008) kan det leda till svårigheter om eleven inte ser sambandet mellan uppräkning och addition och subtraktion utan tror att man alltid börjar på ett när man räknar. Författaren menar att genom att tidigt visa och arbeta med sambanden mellan uppräkning och addition och subtraktion kan vi utveckla elevens erfarenheter. För elever som inte har insett sambandet mellan räknesätten eller för de som inte vågar använda dem på ett flexibelt sätt uppstår ibland onödiga svårigheter. McIntosh menar att de svårigheter en del elever har med räknelagarna inte handlar om missförstånd, utan i vissa fall har eleverna inte upptäckt räknelagarna, ingen har förklarat dem eller så använder de dem inte (a.a.).

Det finns två huvudsakliga problem när det gäller de grundläggande additions- och subtraktionskombinationerna: Eleverna kommer inte ihåg dem tillräckligt snabbt och/eller de kan inte beräkna dem tillräckligt fort eller effektivt. När det gäller det senare problemet hänger det samman med att en för stor del av eleverna använder endast metoden att räkna uppåt för addition och neråt för subtraktion, ibland även med hjälp av fingrarna. De flesta elever behärskar multiplikationstabellen bättre än additions- och subtraktionstabellerna. Orsaken till detta kan vara antingen att det är lätt att räkna ut additioner och subtraktioner med tal upp till tio och att eleverna på grund av detta inte är motiverade att lära dem sig utantill eller att läraren inte lägger så stor vikt vid detta i undervisningen (McIntosh, 2008).

Löwing (2006) visar att många elever har svårigheter med minustecknet på grund av att det används på två sätt, dels för att visa på negativa tal och dels för att visa operationer av typen 8-6. Författaren menar även att det finns tre olika typer av subtraktioner, ta bort, lägga till och jämföra. Efter en tid i skolan förträngs lägga till och jämföra av ta bort.

Multiplikation och division

Det finns fyra typsituationer som modelleras med multiplikation och som också oftast kan modelleras med division (Fuson, 1992).

Multiplikations- och divisionssituation, ”lika grupper”: Här utgår man från en multiplikand och en multiplikator som multipliceras eller en grupp som fördelas jämt på ett visst antal grupper. Åtskillnaden mellan multiplikand och multiplikator har stor betydelse enlig Bentley och Bentley (2011) då innehållsdivision och fördelningsdivision skall särskiljas. Exempel: Sex barn har fyra äpplen var. Hur många äpplen har de tillsammans? 12 kulor skall fördelas på sex barn. Hur många får de tillsammans?

Multiplikations- och divisionssituation, ”förändring”: I den här situationen handlar det om något som förstoras eller förminskas. Exempel: Ett elastiskt rep är 4 meter och kan sträckas ut till fem gånger sin egen längd. Hur långt är det efter sträckningen? Det är viktigt att lägga märke till att frågeställningen är hur långt repet är efter sträckningen, inte hur många gånger längre det har blivit efter sträckningen.

Multiplikations- och divisionssituation, ”jämförelse”: Här jämförs två kvantiteter med varandra. Exempel: Rami har 7 kolor och Osam har fem gånger så många. Hur många har Osam?

Multiplikations- och divisionssituation, ”rektangelns area”: Areor beräknas med formeln A=b*h och det spelar ingen roll vilken av rektangelns sidor som man benämner som b eller h.

När det gäller division finns två typer att ta hänsyn till. Den ena är fördelningsdivision som innebär att en kvantitet fördelas på ett visst antal grupper och svarar på frågan hur många finns i varje grupp efter fördelningen. Den andra är innehållsdivision där man får veta hur stor kvantitet man har och hur många det skall finnas i varje grupp. Denna typ av division svarar på frågan hur många grupper kan få ett visst antal av den givna kvantiteten.

Multiplikation och division är tvådimensionella räkneoperationer till skillnad från addition och subtraktion som är endimensionella. De endimensionella räkneoperationerna kan visas genom att räkna uppåt eller neråt på en tallinje. Multiplikation och division är mer komplexa och detta i samband att de behandlas efter addition och subtraktion kan bidra till att göra det mer komplicerat för eleverna (McIntosh, 2008).

I Löwings (2011) undersökning visade det sig att många elever i åk 5 inte behärskade multiplikationstabellerna. När det gäller den skriftliga räkningen kunde hon konstatera att det fanns stora brister hos eleverna när det gällde taluppfattningen. Varannan elev som deltog i undersökningen och gick i åk 6 räknade fel på uppgifter av typen 864/8, detta gällde även för elever som ingick i undersökningen och gick i åk 7 och 8. Även när det gällde multiplikation och division av tal i decimalform hade eleverna stora svårigheter, endast 55 % av eleverna i undersökningen i åk 7 klarade av att multiplicera ett tal med en decimal med ett ental. 65 % av eleverna kunde lösa uppgiften 2,42/2. Enligt Löwing beror detta på att eleverna inte behärskar de mest grundläggande räknelagarna och på grund av det inte ser de enkla lösningar som finns.

En viktig grundförutsättning för att eleven skall förstå multiplikation är att han/hon har förmågan att uppfatta en grupp föremål som en enhet. Det finns elever som har svårigheter att representera multiplikationer med symboler på grund av att de inte har förstått innebörden av multiplikation. De kan även ha svårt att identifiera olika situationer som multiplikation. Vid huvudräkning med multiplikation är det vanligt att eleven inte multiplicerar alla led. När det gäller räknelagarna för multiplikation finns det två typer av problem: antingen använder eleven inte lagarna när det skulle kunna underlätta eller så använder de dem där det inte är lämpligt (McIntosh, 2008).

Division är ännu mer komplext än multiplikation för elever och det beror på att det finns två olika typer av division, fördelningsdivision och innehållsdivision samt att det ibland förekommer en ”rest” när man utför beräkningar med division. Det finns elever som har svårt att skilja mellan delning i vardagslivet som kan vara orättvis och den matematiska delningen som bygger på ”likadelning”. Det muntliga språket när det gäller division kan också göra det svårt för eleven. Exempel: 12/3 kan uttalas ”tolv delat med tre”, ”tolv delat på tre”, ”dela tolv i tre” eller ”tre i tolv”. Det sista exemplet kan leda till att eleven skriver 3/12 istället för 12/3 (McIntosh, 2008).

I Skolverkets rapport (2008) framkom det att eleverna hade stora svårigheter med att enkoda uppgifter som krävde multiplikation och enkodningen av divisionsproblem var den avgörande svårigheten för eleverna då innehållsdivision testades. Lösningsfrekvensen påverkades även negativt i ett fall av att det inte var möjligt att direkt tillämpa kort divisionsräkning.

Procedurer

Enligt Rittle-Johnsson och Wagner Alibali (1999) finns det två typer av kunskap när det gäller matematik: procedurell och konceptuell kunskap. Den procedurella kunskapen handlar om kunskaper om matematiska procedurer och deras tillämpning i olika kontexter. Med procedurer avses olika steg som utförs i en viss given ordning. Man skiljer mellan om en elev kan använda en procedur på ett korrekt sätt och om eleven vet i vilken kontext eller på vilken sorts uppgiftstyper proceduren kan tillämpas. Den konceptuella kunskapen utgörs i första hand av förståelsen av begrepp och principer. Om undervisningen till stor del fokuseras på procedurer istället för konceptuell kunskap finns det en stor risk att elever lär in en massa isolerade detaljer utan sammanhang, som dessutom gör dem svåra att memorera. Om eleven främst behärskar procedurell kunskap inom ett delområde av matematiken så behärskar den lösningsprocedurer som ofta är kopplade till specifika kontexter och är svåra för eleven att överföra till andra eller nya kontexter. Konsekvensen blir att eleven som skall lösa uppgifter inom ett delområde i matematiken endast kan lösa enstaka uppgifter trots att uppgifterna kräver samma procedur. Om däremot eleven har tillägnat sig konceptuell kunskap inom delområdet så kan kunskaper från ett visst sammanhang eller kontext överföras till ett annat.

Enligt Bentley och Bentley (2011) behöver man ha kännedom om fyra situationer för att kunna upptäcka och undanröja hinder för eleverna så att kunskapsutvecklingen fortsätter i rätt riktning. Dessa fyra situationer är:

1. Proceduren utförs korrekt och på rätt typ av uppgifter.
2. Proceduren utförs inkorrekt, men på rätt typ av uppgifter.
3. Proceduren utförs korrekt, men på fel typ av uppgifter.
4. Proceduren utförs inkorrekt och på fel typ av uppgifter (s. 49).

Om en elev utför en procedur korrekt på rätt typ av uppgifter anses eleven behärska proceduren (a.a.).

McIntosh (2008) menar att det är en komplex uppgift att överföra en textuppgift till matematiska symboler samt att den förmågan är mindre användbar utanför skolan. Eleverna behöver få tillfällen att diskutera och öva på olika textuppgifter och vilken typ att uträkningar som är nödvändiga.

Orsaker i undervisningen som kan leda till matematiksvårigheter

Löwing (2006) kom i sin forskning fram till att de flesta lärarna lät eleverna arbeta på egen hand styrda av läroboken eller annat arbetsmaterial och att bristen på anpassning av innehållet efter elevens behov ledde till inlärningsproblem. När eleven inte förstod de förklaringar som läraren gav valde läraren att undvika problemet och lotsade eleven fram till svaret istället. De problem som uppstod på grund av detta var att eleven inte kunde lösa nya, liknande uppgifter, långa väntetider för att få hjälp samt större förkunskapsproblem hos eleven. Vidare fann Löwing (2006) att en anledning till elevernas problem i matematik var att eleverna inte förstod språket i läromedlen samtidigt som lärarna inte försökte att lära eleverna ett korrekt matematikspråk. Lärarnas ambition var att genom ett ungdomligt vardagsspråk förenkla och underlätta förståelsen, men att det i själva verket ledde till missförstånd och nya problem på grund av att språket saknade den precision som krävs för att lära matematik. De flesta av lärarna som ingick i studien var så fokuserade på att använda moderna arbetssätt att det blev viktigare än innehållet i undervisningen. Det handlade mer om att göra än att upptäcka och förstå matematiska principer. Löwing (2006) anser att på grund av att dagens lärare är så osäkra när det gäller matematikämnets didaktik blir de läromedelsbundna. I de observationer som hon gjorde fann hon att ett vanligt problem var att läraren och författaren till läromedlet hade olika uppfattningar om hur det aktuella innehållet kunde byggas upp och förklaras. Detta ledde till att eleverna fick motstridande förklarningar. I studien synliggjordes även vikten av att som lärare ta sig tid till att förstå vad som egentligen är elevens problem. Alltför ofta stannade lärarna bara några sekunder hos eleven vilket ledde till att eleven och läraren pratade förbi varandra. Det räcker inte heller med diagnoser för att få en förståelse av elevernas kunskaper (a.a.).

Två strategier

Skriftlig huvudräkning och vertikal algoritmräkning är de två strategier som i huvudsak används i läromedlen i matematik idag. Under den här rubriken kommer dessa två strategier att beskrivas.

Skriftlig huvudräkning

Metoden har förespråkats av bland annat Rockström[1] (2000) och är en metod för att förenkla numeriska uttryck genom att använda räknelagarna och sambanden mellan räknesätten. Den skriftliga huvudräkningen synliggörs genom att ett mellanled som visar tankegången skrivs ner. Ibland kan man kombinera skriftlig huvudräkning med vertikal algoritmräkning, t.ex. när man skall addera eller subtrahera decimaler. Dessa omvandlas då till heltal och adderas eller subtraheras. Svaret man får omvandlas sedan till decimaltal. Syftet med metoden är att elevens taluppfattning och förståelse för positionssystemet skall stärkas och utvecklas. Enligt Rockström leder den även till att tabellkunskaperna utvidgas till att omfatta även andra talsorter än ental samt att likhetstecknets innebörd blir tydlig. Genom skriftlig huvudräkning får eleven förståelse för räknelagarna samt ser sambanden mellan räknesätten. Metoden tränar eleven i att uttrycka sig matematiskt korrekt, både muntligt och skriftligt. Den ger även förutsättningar för överslagsräkning och på så sätt leder den till att eleven får en tydlig taluppfattning och generaliserande tabellkunskaper. Författaren menar att den även utvecklar ett aktivt, flexibelt och logiskt tänkande på grund av att lösningarna kan variera beroende på uppgift och elevens kreativitet. Författaren skriver följande:

> Elever som inte påtvingas någon på förhand bestämd teknik får möjlighet att tänka fritt och självständigt, pröva nya idéer, förklara och argumentera för dessa och – om de känner för det – ta till sig nya tankegångar (Rockström, 2007, s. 34).

Addition: Grundprincipen är att man beräknar varje talsort för sig och att man alltid börjar med den största talsorten. Om uppgiften inte kräver växling över talsorterna och eleven har en god taluppfattning kan eleven skriva ner svaret direkt. Vid de uppgifter som kräver växling över talsorterna kan mellanleden se olika ut beroende på uttryckets utseende samt elevens förmåga att se den enklaste lösningen. Finns det flera termer i uppgiften kan variationen på

[1] Rockström är inte någon forskare utan arbetar som lärare. Anledningen till att Rockströms tankar kring skriftlig huvudräkning har fått så stor plats i litteraturgenomgången är att hennes tankar har haft stor inverkan på de läromedel som används i Sverige idag.

lösningar bli stor. Man kan ta varje talsort för sig, flytta över ental från den ena termen till den andra (man adderar ett ental från den ena termen och minskar med lika mycket i den andra termen) samt ändra ordningen av termerna så att det blir lättare att addera dem. Rockström visar lösningarna som en klass i åk 7 redovisade på uppgiften 21,65+28,5 (Rockström, 2007):

26,65 + 28,5 = 49 + 1,1 + 0,05 = 50,15

= 49 + 1,15 = 50,15

= 20,15 + 30 = 50.15

= 50 + 0,15 = 50,15

= 49 + 0,70 = 47,70 (s. 25)

Den sista lösningen används som en utgångspunkt för diskussion om varför felet uppstått och hur man skall rätta till det. Om man inte är säker på decimalernas värde är det enligt Rockström (2000) lätt att tro att 0,65 + 0,5 = 0,70.

Subtraktion: Rockström (2000) anser att det går lättast att använda skriftlig huvudräkning för de elever som inte har hunnit lära sig subtraktionsalgoritmen och blivit låsta vid tankegången att ta bort. Hon menar att subtraktionsalgoritmen är en metod som säger att ”3 – 8 går inte”. Även här är grundprincipen att man beräknar varje talsort för sig. Precis som med addition finns det flera olika sätt att lösa uppgifterna på. Man kan öka båda termerna med samma tal för att få en lättare beräkning eller tänka utfyllnad vilket innebär att man ser talen på en tallinje och räknar upp subtrahenden till närmsta tiotal och adderar de stegen med de som är kvar för att komma till minuenden. Hon ger följande exempel från en klass i åk 6 på den variation som kan uppstå när eleverna använder skriftlig huvudräkning:

30,5 – 15,65 = 15 – 0,15 = 14,85

= 15 – 0,1 – 0.05 = 14,85

= 15,5 – 0,65 = 14,85

= 30,85 – 16 = 14,85

= 34,85 – 20 = 14,85

= 30 – 15,15 = 14,85

= 0,05 + 0,3 + 4 + 10,5 = 14,85

= 0,35 + 14,50 = 14,85

= 4,35 + 10,5 = 14,85

= 4,35 + 10,5 = 14,40 (s.30)

Även när det gäller subtraktion används de felaktiga lösningarna för diskussion.

Multiplikation: Precis som i de två tidigare räknesätten finns det flera olika sätt att lösa uppgifter med multiplikation på. Genom att använda den distributiva lagen kan man ta varje talsort för sig och här kan elever hitta genvägar som t.ex. 6*295 = 6*300 – 6*5 = 1800 – 30 = 1770. Eleverna kan även använda sig av att dela upp ett tal i två faktorer och på så sätt använda sig av associativa lagen: 4* 350 = 2*2*350 = 2*700 = 1400 eller 5*624 = 5*2*312 = 10*312 = 3120. Rockström (2000) visar hur två elever har löst uppgiften 698*437:

698*437 = 700*437 – 2*437 = 305900 – 874 = 305026 (s.37)

Multiplikationen 700*437 löstes med det som författaren kallar för kort multiplikation vilket innebär att man multiplicerar 7 med 437 och sedan sätter man ut nollorna i svaret. Författaren menar att sätta en miniräknare i händerna på elever som kan lösa dessa uppgifter med skriftlig huvudräkning eller tvinga dem till att använda vertikal algoritmräkning vore att ta bort tjusningen med matematiken.

Division: Rockström (2000) visar på flera olika sätt att lösa uppgifter med division. Ett sätt är att täljaren delas upp i lämpliga tal som finns i divisionstabellen, t.ex. 81/3 = 60/3 + 21/3 = 20 + 7 = 27 eller 57/3 = 60/3 – 3/3 = 20 – 1 = 19. Författaren visar ytterligare ett sätt är att göra på:

$$\frac{298}{2} = 100 + 45 + 4 = 149 \quad \text{(s.38)}$$

För uppgifter där nämnaren innehåller fler siffror än en går det enligt Rockström ofta att få ensiffrig nämnare genom att förkorta eller förlänga uttrycket (Rockström, 2007):

$$\frac{126/2}{12/2} = \frac{63}{7} \quad \text{(s.39)}$$

$$\frac{435*2}{5} = \frac{870}{10} \quad \text{(s.39)}$$

Enligt Rockström (2000) är kort division relativt lätt för eleverna att förstå om den lärs ut med innehållsdivision.

Foxman och Beiszhuserns (2002) genomförde en studie där de bland annat undersökte elevers lösningsstrategier och lösningsfrekvensen på dessa på APU-materialet (Assessment of Performance Unit) från 1987 som användes i England, Wales och Nordirland. Författarna sorterade eleverna i tre grupper med hjälp av uppgifter om begreppslig förståelse, en grupp med god begreppslig förståelse, en med medelgod och en med mindre god. Grupperna studerades sedan med hänsyn på användning av huvudräkningsprocedurer. De fann att den positiva lösningsfrekvensen var marginellt högre för vertikal algoritmräkning än för talsortsvis beräkning[2], 87 % respektive 85 %, för uppgiften 238+143. För subtraktionsuppgiften med tiotalsövergång var den positiva lösningsfrekvensen väsentligt högre för vertikal algoritmräkning än för talsortsvis beräkning, 75 % respektive 33 %. För multiplikationsuppgiften 16*25 hade talsortsvis beräkning en högre lösningsfrekvens än vertikal algoritmräkning, 20 % respektive 9 %, men det omvända förhållandet rådde på en benämnd uppgift där multiplikation med ett decimaltal ingick. Den positiva lösningsfrekvensen var i detta fall 48 % för vertikal algoritmräkning och 25 % för talsortsvis beräkning. I Foxman och Beiszhuserns (2002) studie ingick en uppgift med innehållsdivision. Lösningsfrekvensen för talsortsvis beräkning var 57 % och för vertikal algoritmräkning 79 %. De kom även fram till att talsortsvis beräkning användes mest frekvent av gruppen med mindre god begreppslig förståelse och minst av gruppen med god begreppslig förståelse. Foxman och Beiszhusern visar att strategin vertikal algoritmräkning var mer framgångsrik än

[2] I Sverige kallas talsortsvis ofta skriftlig huvudräkning.

talsortsvis beräkning. När det gällde vertikal algoritmräkning användes den mest frekvent av gruppen med medelgod begreppsförståelse och minst av gruppen med mindre god begreppsförståelse.

I Skolverkets rapport (2008) redovisas att ett av de misstag som eleverna gjorde var att de använde fel version av talsortsvis beräkning i t.ex. subtraktion. Enligt rapporten finns det två versioner för subtraktion, den ena används för uppgifter utan växling och den andra för uppgifter med växling. I uppgifterna använde eleverna högfrekvent fel version och det vanligaste felet då var att de använde versionen utan växling på uppgifter som kräver växling.

Vertikal algoritmräkning

I Sverige brukar den här metoden kallas för att ”ställa upp” och metoden går ut på att man placerar talen under varandra så att talsorterna hamnar under varandra.

Enligt Rockström (2000) är finessen med den vertikala algoritmräkningen att talen räknas som om alla vore ental. Vilket innebär att om eleven kan tabellerna med ensiffriga tal så går uträkningen snabbt och smidigt. Författaren menar att vertikal algoritmräkning har ett berättigande i undervisningen men att den har fått ta alltför stor plats i matematikundervisningen i skolan. Hon menar att genom att det har lagts ner mycket tid och arbete på att lära ut reglerna har det bidragit till att det har blivit den enda metoden som eleverna har använt även för enklare uppgifter. Vidare menar hon att genom den mängdträning som har funnits i undervisningen har eleverna uppfattat vertikal algoritmräkning som det samma som räkning. Genom att vertikal algoritmräkningen är effektiv, tidsbesparande och kräver minimalt med tankearbete leder den till att matematiken upplevs som tråkig och fantasilös (a.a.). Rockström menar att när alla tal måste räknas som ental måste eleven lära sig många och skiftande regler för hur man ska placera talen, hur minnessiffror skall hanteras, var man skall ”stryka”, var decimaltecknet skall placeras och hur man gör med nollor beroende på vilket räknesätt eleven skall använda. Vidare menar hon att elevens förmåga att förstå skillnaden mellan tiotal och tiondelar, hundratal och hundradelar osv. hämmas. Inte heller betydelsen av likhetstecknet, som enligt Rockström är det viktigaste tecknet, tränas.

I Skolverkets rapport (2008) visade det sig att endast en femtedel av eleverna lyckades att använda vertikal algoritmräkning på ett korrekt sätt och enligt rapporten behärskade en tredjedel av eleverna vertikal algoritmräkning på ett korrekt sätt på de nationella proven för åk 5.

Några centrala didaktiska råd

Enligt Lunde (2011) vet man förvånansvärt lite om vad som fungerar för elever med matematiksvårigheter, det finns för lite evidensbaserad kunskap om vilka insatser som fungerar. Kroesbergen och Van Luit (2003) menar att det finns tre centrala områden som bör analyseras när man svarar på frågan vad som fungerar för elever med matematiksvårigheter: talförståelse, enkel aritmetik inom de fyra räknesätten och färdigheten i problemlösning. De menar att eleven måste kunna föra över en strategi för problemlösning till nya situationer och att det är denna färdighet som utgör grunden för bedömningen av problemlösningsförmågan.

Bentley och Bentley (2011) menar att det är viktigt att talfakta så fort det är möjligt etableras i långtidsminnet för att arbetsminnet skall kunna utnyttjas optimalt. När det gäller addition och subtraktion bör den omfatta talområdet 0-20 och för multiplikation 0-144. Det har visats sig, enligt författarna, att standardalgoritmer och beräkningsstrategin omgruppering är bland de mest framgångsrika. Det är viktigt att orsakerna till elevernas beräkningsmisstag spåras och rättas till annars kommer utvecklingen av aritmetiska talfakta att hämmas. De anser även att konkret material endast bör användas om det kan tillföra eleverna någon matematisk förståelse och att tal är abstrakta storheter och skall tränas som sådana. Det är viktigt att skilja mellan tal, uppgifter och siffror, en siffra är symbolen som man bygger tal med och en uppgift löser man. Begrepp är centrala i matematiken och bör ha en central plats i undervisningen. Författarnas råd är att vara systematisk och planera elevernas begreppsinlärning med hjälp av begreppskartor. För att tydliggöra för eleverna vad som tillhör sammanhanget och vad som är egenskaper hos begreppet bör sammanhangen där begreppet presenteras varieras. Genom att använda kvalitetskriterierna, strukturell validitet, ekologisk validitet, enkelhetsvaliditet och operationell validitet, kan man kritiskt granska begreppsmodellerna som används i undervisningen. Undvik att använda flera modeller för ett begrepp och ställ stora krav på dem. Bentley och Bentley (2011) menar att det inte räcker med diagnoser för att avgöra vad eleverna kan eller inte kan utan det krävs även intervjuer och gruppsamtal.

Myndigheten för skolutveckling (2003) förespråkar att det är viktigt att matematikämnet inte framställs som en rad fakta som skall memoreras och reproduceras. I den undervisning där samtal om matematik förs, där alla får komma till tals och där läraren tillsammans med eleverna gör ämnets strategier, teorier och resultat legitima med hjälp av förnuftiga argument kommer skolans övriga undervisning att stödjas.

Löwing (2006) visar på vikten av att som lärare uttrycka sig och använda termer på ett korrekt sätt för att inte försvåra det för eleverna. Hon ger ett exempel som kan göra att eleven blir förvirrad. Exemplet är divisionen 1/4 som beskrevs av eleverna på flera olika sätt: 4 i 1, 1 delat på 4 osv.

Engström (2003) för fram att små grupper i klassen som arbetar tillsammans stimulerar eleverna till att ta ansvar för sitt eget lärande och till samarbete med kamraterna har visats sig har en god effekt. Grupperna skall göras utifrån andra motiv än elevernas begåvning, till exempel intresse för fördjupning av olika områden osv. Program som är inriktade i första hand på tänkande, problemlösning och andra högre processer har visat sig effektiva medan ensidig färdighetsträning sällan leder till utveckling av elevens kompetens.

Addition och subtraktion

Johansson (2011) menar att orsaken till att elever behåller en mer primitiv strategi när det gäller att lösa additions- och subtraktionsproblem inte handlar om för lite färdighetsträning, utan att den sätts in vid fel tillfälle. Eleverna har också fått uppfattningen att det gäller att få så många rätt som möjligt oavsett vilken tankekvalitet som lösningen har. På detta sätt upprepas och befästs tankeformer istället för att undervisning utvecklas.

McIntosh (2008) anser att det är viktigt att man på ett tidigt stadium låter räkningen bli ett svar på frågan hur många det finns i en viss mängd. Han menar även att man bör träna barnen på att gå vidare från att räkna alla till att räkna från det största när det gäller addition. Man bör inte heller införa skriftligt arbete för tidigt utan använda mycket av tiden inledningsvis till muntligt arbete. Fokus bör ligga på processen hur en situation översätts till symboluttrycket istället för på själva svaret. McIntosh ger som förslag att man skall ge elever uppgifter i symbolform och låta eleverna skriva räknehändelser till dem. Eleverna bör även uppmuntras att se sambandet mellan addition och subtraktion genom att de kan kontrollera sina svar genom att använda addition för att kontrollera uppgifter med subtraktion och tvärtom. Det är viktigt enligt McIntosh att tid ägnas åt den fas där eleverna förvärvar idéerna om hur additions- och subtraktionskombinationerna är uppbyggda. Författaren anser att mycket tid har använts åt den andra fasen som innebär befästande av kunskapen. I den första fasen är det viktigt att eleverna får möjlighet att beskriva hur de tänker när de löser uppgifter samt att presentera effektiva strategier. Han ger även exempel på hur man kan gruppera additionskombinationerna för att underlätta för eleven. McIntosh (2008) betonar att det är viktigt att eleven har en förståelse för additionskombinationerna samt att de befästs. Genom att använda talens positionsvärde kan eleverna lära sig att generalisera additions- och subtraktionskombinationerna till högre tal (11 hundradelar minus tre hundradelar). McIntosh menar att om man i undervisningen enbart använder exempel där det inte behövs någon minnessiffra när eleverna börjar använda tvåsiffrig addition kan eleverna tro att tiotalssiffran och entalssiffran inte har något med varandra att göra och därför inte påverkar varandra. Han menar att det är bättre att använda slumpvis valda tal, eller tal från vardagsproblem, så att eleverna lär sig hur man gör generellt först. För att åskådliggöra tiotalsövergången kan tiobasmaterial användas.

Multiplikation och division

McIntosh (2008) uppmanar att man skall växla mellan berättelser, bilder, skrivna uttryck och symboluttryck samt betona den rektangulära representationen för multiplikation så ofta som möjligt. Introducera division genom praktiska aktiviteter, det är viktigt att både fördelningsdivision och innehållsdivision finns representerade. När termerna införs i undervisningen är det viktigt att det görs på ett korrekt sätt och att de används ofta av både lärare och elever. I undervisningen bör man även diskutera hur man kan använda de olika räknelagarna och ge flera exempel på tillämpningar. McIntosh menar att det finns pedagogiska nackdelar med att lära ut multiplikationskombinationerna som tabeller. Enligt författaren kan eleven gå miste om sambandet mellan olika tabeller, t.ex. tvåans och fyrans. Han förordar två strategier: med talföljdsräkning (skutträkning) och med hjälp av speciella strategier för varje multiplikand. Två exempel på strategier är 3*7=14+7 (dubbelt och en mängd till) eller 5*7=hälften av 70 (hälften av tio gånger). McIntosh förespråkar att man först koncentrerar undervisningen på laborativa aktiviteter. Han anser inte att man skall ha multiplikationstabellerna uppsatta i klassrummet eftersom det då inte finns någon anledning för eleverna att lära sig den utantill. När eleverna räknar med större tal bör de uppmuntras till att göra överslagsberäkningar (a.a.).

Teoretisk referensram

Studien tar sin utgångspunkt i det postpositivistiska paradigmet och har både en kvantitativ och en kvalitativ del. I det postpositivistiska paradigmet kan man använda sig av flera metoder, både kvantitativa och kvalitativa (Denzin & Lincoln, 2011). Åsberg (2001) hävdar att det inte finns någon anledning att diskutera om man skall välja att använda en kvantitativ eller kvalitativ metod och menar till och med att den diskussionen kan vara hämmande för forskningen. Enligt Denzin och Lincoln (2011) är en av grundtankarna inom postpositivismen att vi aldrig kan förstå naturen helt och hållet, det finns alltid dolda faktorer som vi kanske inte kan upptäcka. Forskningen och den statistik som framkommer i forskningen ger oss vägledning när vi skall fatta beslut. Statistik ger forskaren möjlighet att visuellt tolka det som kommer fram i undersökningen. Forskarens mål bör vara att skapa ny kunskap och göra nya vetenskapliga upptäckter. Forskaren bör ställa frågor till sitt material för att synliggöra de dolda faktorerna (Denzin & Lincoln, 2011).

I den kvalitativa delen används innehållsanalys som metod med syfte att försöka förstå vilken typ av misstag som eleverna gör genom att analysera de uppgifter som de har löst. Grundtanken med innehållsanalys är att det är en metod för att kvantifiera någonting i texter utifrån ett speciellt syfte. Att kvantifiera en text innebär att man skapar kategorier eller teman utifrån textens innehåll och dessa används sedan i jämförelser. Metoden kan även ha ett vidare syfte nämligen att på ett systematiskt sätt beskriva textinnehållet och när man vill göra mer komplicerade tolkningar. Enligt Bergström och Boréus (2005) är metoden lämplig för att finna mönster i ett material.

Metod

Studien har, som nämnts, såväl ett kvantitativt som ett kvalitativt angreppssätt. Den kvantitativa delen undersöker lösningsfrekvensen för de olika uppgifterna, statistik över vilken typ av fel som eleverna gjort samt över hur många elever som har löst samtliga uppgifter inom ett räknesätt korrekt och vilken metod de har använt. I den kvalitativa delen används innehållsanalys som metod med syfte att försöka förstå vilken typ av misstag som eleverna gör genom att analysera de uppgifter som de har löst. I analysen används innebördsaspekten: Vad säger texten?

Urval och bortfall

Jag har använt mig av närhetsprincipen när det gäller val av skola och undersökningen har skett i årskurs 7 i samtliga åtta klasser på skolan.

När det gäller urvalet av elever har det skett i flera steg. I testet finns uppgifter som behandlar addition, subtraktion, multiplikation och division. Jag har valt att undersöka elevernas resultat inom varje räknesätt var för sig. Urvalet av elever till intervjun skedde på samma sätt för samtliga räknesätt. I det första steget sorterades de elever bort som hade svarat rätt eller fel på samtliga uppgifter. I det andra steget valdes två elever ur den grupp som hade löst någon eller några men inte alla av uppgifterna korrekt samt där jag trodde mig kunna få intressanta samtal. I urvalet till intervjuerna har det inte tagits hänsyn till kön. Valet att inte intervjua elever som svarat fel på alla uppgifter beror på att jag ville se vad det är som gör att elever ibland kan lösa uppgifter men ibland misslyckas trots att det kräver samma matematiska procedur. Jag ville även undersöka hur eleverna som ibland kan lösa rutinuppgifter och ibland misslyckas med samma uppgifter resonerar kring de olika lösningarna och att de har fått olika svar. Dessa elever riskerar att inte nå kunskapskraven i matematik när det gäller att lösa rutinuppgifter och därmed att få ett åtgärdsprogram.

På skolan finns det 152 elever i åk 7 och av dem deltog 134 elever i undersökningen. Bortfallet i hela undersökningen bestod av 18 elevers uppgifter och berodde på att de vid något av testtillfällena inte deltog och på grund av det sorterades deras uppgifter bort. Dessutom föll två klasser (37 elever) bort i analysen av testuppgifterna addition, subtraktion och multiplikation i den delen där jag undersökte hur många uppgifter varje elev hade lyckats lösa på grund av att eleverna inte hade skrivit sitt namn på alla uppgifterna. Dessa klasser (37 elever) föll även bort på samtliga uppgifter med division.

Syftet var att intervjua åtta elever, två för varje räknesätt, men när det gällde de elever som var aktuella för att intervjuas för multiplikation avböjde samtliga utom en.

Genomförande

Rektor och sex undervisande lärare i matematik på skolan kontaktades och tillfrågades om de kunde tänka sig att delta i undersökningen. Två av lärarna undervisar i två klasser, övriga lärare undervisar i en klass var.

Det konstruerades 12 uppgifter, tre i varje räknesätt. Dessa 12 uppgifter fördelades på tre olika test (se bilaga 1) och delades sedan ut till lärarna tillsammans med en instruktion. Hälften av klasserna fick lösa uppgifterna vid samma tillfälle och hälften fick lösa dem vid tre olika tillfällen. Detta gjordes för att se om tiden mellan uppgifterna spelar någon roll. Uppgifterna rättades sedan av mig och ett urval gjordes till intervjuerna.

Genom intervjuerna vill jag förstå några elevers tankar och föreställningar när de löser uppgifter med fokus på vilka missförstånd och svårigheter som kan uppstå. Intervjuerna med eleverna skedde på skolan och spelades in för att kunna transkriberas efteråt. Under intervjun gjorde jag även korta minnesanteckningar. Intervjuerna inleddes med en kort orientering där syftet med studien och användningen av inspelningsapparatur presenterades för eleven. Under intervjun användes en intervjuguide med halvstrukturerade frågor (se bilaga 2). Guiden inspirerades av den typ av intervjufrågor som Kvale och Brinkmann (2009) presenterar och som innehåller följande grupper av frågor: inledande, uppföljande, sonderande, specificerande, direkta, indirekta, strukturerade, tystnad och tolkande. I intervjuerna bads eleverna att berätta och förklara hur de hade gjort och tänkt när de löste testuppgifterna. Eleverna fick även lösa några nya uppgifter och samtidigt berätta hur de tänkte. Intervjuerna avslutades med att eleven fick möjlighet att komplettera intervjun. Efter intervjuerna transkriberades inspelningen för att kunna användas vid analysen.

I analysen används innebördsaspekten: Vad säger texten? Analysen av texterna har skett manuellt genom att koda uppgifterna efter vilken metod som används och vilken typ av misstag som är synliga. Kodschemat har anpassats under processens gång. Kodschemat har sedan använts i resultatsdelen (Bergström & Boréus, 2005).

Databearbetning

Testuppgifterna rättades av mig och korrekt svar markerades med en etta (1) och inkorrekt svar med en nolla (0) i en tabell för varje klass där varje elevs resultat redovisades. Utifrån dessa tabeller gjordes sedan urvalet för intervjuerna. Efter redovisningen av resultaten på testen gjordes en innehållsanalys av varje lösning som kodats för att ge en bild av hur eleverna har valt att lösa uppgifterna, vilken strategi som använts samt om den har använts korrekt eller inkorrekt. När det gäller de inkorrekta lösningarna har de i sin tur kodats för att ge en bild av vilken typ av missförstånd eller misstag som kan ha uppstått samt hur vanligt förekommande de var i undersökningen.

I den kvalitativa delen används innehållsanalys som metod med syfte att försöka förstå vilken typ av misstag som eleverna gör genom att analysera de uppgifter som de har löst. Grundidén med innehållsanalys är att kvantifiera någonting i texter utifrån ett speciellt syfte, i den här studien är syftet att analysera vilka misstag eleverna gör när de löser uppgifter i matematik. Intervjuerna som genomfördes användes som stöd till analysen av testuppgifterna.

Genomförandet av analysen av intervjuerna (Kvale & Brinkmann, 2009).

1. Genomläsning av hela transkriberingen för att få en helhetsbild.
2. Kodning av den transkriberade intervjun.
3. Meningstolkning av texten både som del och som helhet.
4. Genomläsning av den transkriberade intervjun som helhet.

Reliabilitet och validitet

För att höja reliabiliteten på mätinstrumentet och därmed också höja validiteten i undersökningen gjordes pilottester i två klasser i åk 7. Dessa har sedan använts i undersökningen. När det gäller intervjuerna gjordes pilotintervjuer. Dessa har inte använts i studien. Resultaten från intervjuerna har även använts för att undersöka validiteten i undersökningen. För att höja reliabiliteten i studien har en dubbelkodning gjorts vilket innebär att delar av materialet har kodats om efter ett par veckor. Materialet som har använts i innehållsanalysen är de testuppgifter som eleverna har gjort. Som vid all annan textanalys är det viktigt att ha en viss kännedom om det sammanhang som texterna är hämtade ifrån (Bergström & Boréus, 2005).

Etiska ställningstaganden

I studien har de etiska ställningstagandena följt de som Vetenskapsrådet (2002) presenterar. Informationskravet och samtyckeskravet har följts genom att efter urvalet kontaktades eleverna som jag önskade intervjua personligen av mig och vårdnadshavare via brev (se bilaga 3) för medgivande till intervjuerna och de informerades om syftet med studien samt att de när som helst kan avbryta deltagandet i studien. När det gäller konfidentialitetskravet avkodades både testuppgifterna och intervjuerna. I intervjuerna gavs eleverna andra namn för att underlätta läsningen. Både eleverna som intervjuades och deras vårdnadshavare informerades om att resultaten endast kommer att användas i den aktuella studien. Detta gjordes för att följa nyttjandekravet i Vetenskapsrådets forskningsetiska krav.

Resultat

Under den här rubriken har jag valt att dela upp resultatet utifrån de fyra räknesätten, addition, subtraktion, multiplikation och division. Anledningen till uppdelningen är att det är på detta sätt jag kommer att diskutera mina resultat. Under varje underrubrik kommer resultat från både den kvantitativa delen och den kvalitativa delen att återges. I undersökningen deltog 134 elever, vilket gav 402 lösningar i varje räknesätt. Vid redovisningen av hur många uppgifter varje enskild elev lyckats lösa och på vilket sätt deltog 97 elever. Bortfallet berodde på att två klasser inte hade skrivit namn på samtliga uppgifter. Tabellerna för addition, subtraktion och multiplikation visar de kategorier som beskriver vilken strategi eleverna har använt för att lösa uppgifterna. På grund av lästekniska orsaker har jag tvingats dela upp tabellerna i flera men de skall ses som sammanhängande. När det gäller division skiljer sig kategorierna i tabellerna åt och visar hur eleverna lyckats lösa de olika uppgifterna. Anledningen till detta är att nästan alla elever använde kort division när de löste uppgifterna. Under samtliga tabeller redovisas resultaten från textanalyserna som gjorts på de svar eleverna har lämnat på uppgifterna. I samtliga diagram visas den positiva lösningsfrekvensen och detta har valts dels för att kunna jämför med andra forskares resultat samt för att besvara frågan om det finns någon strategi som är effektiv. I slutet av varje räknesätt redovisas resultaten från textanalyserna som gjorts på de transkriberade intervjuerna.

Addition

Lösningsfrekvensen för hur varje enskild elev har löst uppgifterna som berör addition

Tabellerna nedan visar hur de 97 eleverna som deltog i undersökningen lyckas att lösa de tre uppgifterna samt vilken strategi de använder. I testuppgifterna ingår tre uppgifter som innehåller en obenämnd uppgift, en uppgift som behandlar additionssituationen förändring ”lägga till” och en som behandlar additionssituationen ”kombination fysiskt”. Totalt blir det 291 uppgifter. 60 av 97 elever löser alla tre uppgifterna korrekt, 26 elever löser en eller två av uppgifterna korrekt och 11 elever löser ingen av uppgifterna. Det fanns ingen skillnad i resultaten om eleverna gjorde samtliga uppgifter vid samma tidpunkt eller om de gjorde dem vid olika tidpunkter.

Tabell 1 Hur varje enskild elev lyckas lösa de tre uppgifterna med hjälp av olika strategier

Antal lösta uppgifter	Vertikal algoritmräkning	Skriftlig huvudräkning	Blandar vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning
3	43	11	0
1 eller 2	11	4	1
0	2	4	0
Löser ej uppgiften	0	1	0
Σ	56	20	1

Av tabell 1 framgår det att 43 av eleverna löser samtliga uppgifter med hjälp av vertikal algoritmräkning korrekt och 11 elever använder vertikal algoritmräkning när de löser uppgifterna men de löser bara en eller två korrekt. Två elever försöker att lösa samtliga uppgifter med vertikal algoritmräkning men lyckas inte. 11 elever löser samtliga uppgifter korrekt med skriftlig huvudräkning, fyra elever som använder skriftlig huvudräkning när de löser uppgifterna men löser bara en eller två uppgifter korrekt. Fyra elever använder skriftlig huvudräkning utan att lyckas med någon uppgift. En elev börjar lösa uppgifterna med skriftlig huvudräkning men fortsätter inte. En elev blandar både skriftlig huvudräkning och vertikal algoritmräkning i samma uppgift men löser inte någon uppgift korrekt.

Tabell 2 Hur varje enskild elev lyckas lösa de tre uppgifterna med hjälp av olika strategier

Antal korrekt lösta uppgifter	Växlar mellan vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning båda korrekt	Redovisar endast svar och vertikal algoritmräkning	Redovisar endast svar och skriftlig huvudräkning
3	3	2	0
1 eller 2	4	3	1
0	2	1	0
Löser ej uppgiften	0	0	0
Σ	9	6	1

Tabell 2 visar att tre elever växlar mellan att lösa uppgifterna korrekt med vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning och löser samtliga uppgifter korrekt. Att växla mellan skriftlig huvudräkning och vertikal algoritmräkning betyder att eleven löser en eller två av uppgifterna med skriftlig huvudräkning och övriga med vertikal algoritmräkning. Vidare växlar fyra av eleverna i undersökningen mellan skriftlig huvudräkning och vertikal algoritmräkning när de löser uppgifterna, men de löser bara uppgifterna korrekt när de använder vertikal algoritmräkning. Två elever växlar mellan att använda skriftlig huvudräkning och vertikal algoritmräkning utan att lyckas med någon uppgift. Två elever löser en av uppgifterna korrekt med vertikal algoritmräkning och övriga uppgifter redovisas endast med korrekt svar. Tre elever redovisar några av uppgifterna med bara svar som inte är korrekta men löser övriga korrekt med hjälp av vertikal algoritmräkning. En elev redovisar endast svaret på den obenämnda uppgiften och använder vertikal algoritmräkning i de två benämnda uppgifterna men ger ett inkorrekt svar på samtliga. En elev ger ett inkorrekt svar i den obenämnda uppgiften utan att redovisa lösningen men löser de båda benämnda uppgifterna korrekt med skriftlig huvudräkning.

Tabell 3 Hur varje enskild elev lyckas lösa de tre uppgifterna med hjälp av olika strategier

Antal korrekt lösta uppgifter	Redovisar endast svar	Avrundat	Svarar ej
3	1	0	0
1 eller 2	1	1	0
0	0	0	0
Löser ej uppgiften	0	0	1
Σ	2	1	1

Tabell 3 visar att en elev redovisar svaret på samtliga uppgifter korrekta men visar inte hur hon löser uppgiften. En elev redovisar svaret på uppgifterna men redovisar bara ett korrekt svar på uppgifterna. I undersökningen avrundar en elev de två benämnda uppgifterna så att hon har får ett inkorrekt svar med motiveringen att det är så man brukar göra i affärerna. Slutligen skriver en elev inte någonting alls på samtliga uppgifter som berörde addition

Lösningsfrekvensen på samtliga uppgifter som berör addition samt vilka misstag eleverna gör

Nedan redovisas resultaten där samtliga uppgifter grupperats utan hänsyn till den enskilda eleven. Av 402 lösningar används vertikal algoritmräkning i 270 fall och 28 av dessa lösningar är inkorrekta, vilket visar att 90 % av de lösningar där vertikal algoritmräkning används är korrekt lösta. Av de 10 % med inkorrekta lösningar framkommer att de två vanligaste felen är att eleverna antingen får fel summa när de adderar ihop två tal med varandra eller använder minnessiffrorna på ett felaktigt sätt. När det gäller felaktigt användande av minnessiffror kan eleverna t.ex. placera ”entalssiffran” i summan de får när de adderar två tal som minnessiffra eller så placeras minnessiffran på fel ställe t.ex. ovanför hundratalet istället för över tiotalet. Ytterligare ett fel som förekommer med minnessiffrorna är att eleverna gör en omkastning och placerar entalet från additionen som minnessiffra istället för tiotalet. Ett annat misstag som eleverna gör är att de inte placerar decimaltecknen under varandra (4 lösningar) eller att de lägger till en nolla på fel ställe så att 40,5 blev 40,05 (4 lösningar). I fyra lösningar räknar eleverna subtraktion istället för addition.

I 84 lösningar används skriftlig huvudräkning och av dessa är 48 korrekt lösta, dvs. 57 % av uppgifterna som löses med skriftlig huvudräkning är korrekt lösta. I 34 lösningar adderas decimaltalen ihop på ett felaktigt sätt, de skriver 0.95+0.5=1. I en uppgift glömmer eleven att addera en talsort med varandra och i ytterligare en glömmer eleven att addera talsorterna med varandra på slutet.

I sex lösningar blandar eleverna vertikal algoritmräkning och skriftlighuvudräkning med varandra genom att ställa upp talsorterna var för sig och sedan addera ihop dem. Tre av lösningarna löses korrekt och tre löses inkorrekt. I en av lösningarna adderar eleven ihop decimaltalen felaktigt, 0.95+0,5=1. De två andra lösningarna löses felaktigt på grund av att eleven (samma elev redovisar båda lösningarna) adderar ihop summorna felaktigt, 108+1,45=108,5.

34 lösningar redovisas bara med svar och 18 av dem redovisas med ett korrekt svar, 15 med ett felaktigt svar och en använder troligtvis subtraktion istället för addition. 53 % av lösningarna med enbart svar är alltså korrekta. I två uppgifter avrundar eleven (samma elev redovisar de båda lösningarna) talen och adderar sedan ihop dem med motivationen att det är så man gör i affärerna. Sex uppgifter saknar lösning. I diagrammet nedan redovisas lösningsfrekvensen för de olika strategierna.

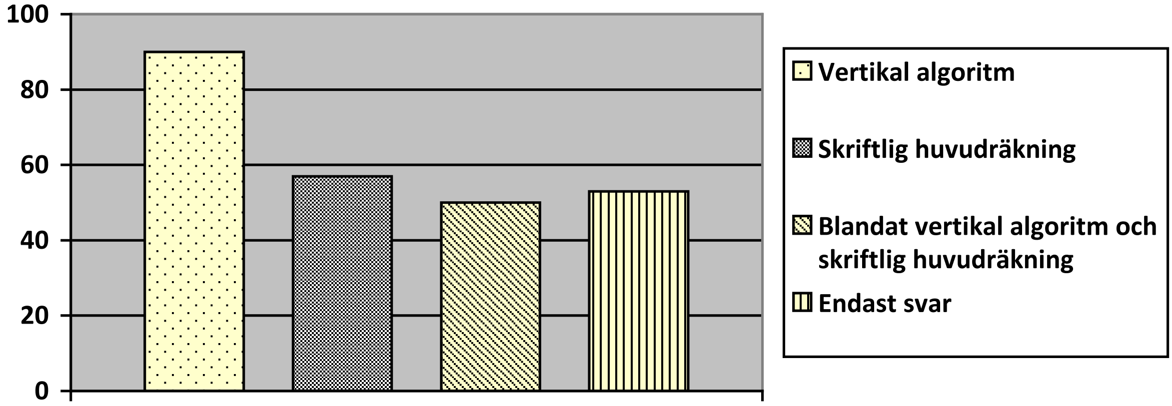

Diagram 1 Antalet korrekta lösningar visat i procent

Redovisning av intervjuerna som berör addition

I intervjuerna med den första eleven som hade valts ut när det gäller addition kom det fram att han inte har någon svårighet med att avgöra vilket räknesätt som skall användas i de benämnda uppgifterna som de fick, varken de i testomgången eller de som han får under intervjun. Eleven, som kommer att kallas Peter i fortsättningen, löser den obenämnda uppgiften i testomgången inkorrekt på grund av att han löser den i huvudet. Han adderar ihop decimaltalen på ett felaktigt sätt så att summan inte blir korrekt. I samtliga benämnda uppgifter använder han vertikal algoritmräkning och löser dem korrekt. På frågan om det spelar någon roll var decimaltecknet placeras när man ”ställer upp” talet svarar han:

> Nej, det har nog ingen betydelse.

När han får se ett exempel där decimaltecknen inte har placerats under varandra ändrar han sig och säger:

> Nej, så kan man inte göra då blir det fel sort under varandra… det går inte.

När Peter förklarar hur han tänkte när han löste testuppgifterna berättar han att han brukar titta på hur många decimaler det finns i termerna som ingår i additionen. När det påpekas att alla tal i testuppgifterna inte har lika många decimaler säger han:

> Jag tänker i huvudet hur mycket det blir ungefär och då vet jag var jag skall sätta kommatecknet.

Peter kan snabbt lösa enkla uppgifter i huvudet och ”bara vet” att t.ex. 5+3 är lika med 8 och att 15+3 är 18. När båda termerna i additionen blir tvåsiffrig adderar han den lägsta termens ental till den större termen och sedan adderar han den lägsta termens tiotal. Om någon av termerna är nära ett tiotal räknar han upp till närmsta tiotal och subtraherar det från den andra termen, för att sedan addera den två nya talen med varandra. Peter har lätt för att ramsräkna både uppåt och neråt.

Den andra eleven som intervjuades, kommer att kallas David i fortsättningen, använde både vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning när han löste uppgifterna i testomgången. När han löste uppgifterna med vertikal algoritmräkning fick han korrekta svar medan när han löste uppgiften med skriftlig huvudräkning adderar han decimalerna på ett felaktigt sätt. Han adderar 0.95 med 0,5 och får svaret 1. En kommentar som är värd att uppmärksammas är när han säger att placeringen av decimaltecknet beror på hur många decimaler det finns i termerna.

> -…och så sätter jag kommatecknet där [David sätter ut decimaltecknet på rätt ställe]
> -Hur vet du att decimaltecknet skall vara där?
> -Det är två decimaler där [pekar på termen 67,95].
> -Varför skall det vara två decimaler, det är ju inte två decimaler i 40,5?
> -Då kan man lägga till en nolla så att det blir två decimaler.

När det påpekas att 40,5 bara har en decimal svarar han att man kan lägga till en nolla så blir det två även där. I en av testuppgifterna har David använt skriftlig huvudräkning. När han använder den metoden gör han ett beräkningsfel och får 0,95+0,5 till 1. På grund av detta får han ett felaktigt svar på uppgiften. På frågan om man kan få två olika svar när man adderar samma tal med varandra svarar han:

> -Ja, det kan man nog, det beror på vilken metod man använder.
> -Så det kan bli olika svar när man använder olika strategier?
> -Ja, för här blir det det.

Han ”bevisar” det genom att peka på sina uppgifter och säger att det måste det kunna bli eftersom det blir det här. I uppgift 2 i intervjuuppgifterna använder David subtraktion istället för addition när han skall lösa uppgiften, men upptäcker detta när han får frågan vilken person som springer snabbast. David använder fingrarna när han räknar, även i enkla uppgifter som t.ex. 5+3. Han använder även fingrarna som stöd när han ställer upp och verkar inte ha additionstabellerna klart för sig. Ett undantag från detta finns och det är när han skall addera ett tal med nio som entalssiffra. Då använder han sig av att räkna upp till närmaste tiotal och ta bort lika mycket från den andra termen och sedan adderar han de två nya talen med varandra. David kan ramsräkna både uppåt och neråt, men utesluter hundratalet eller tusentalet och håller det i minnet för att slippa säga det. David upplever att det är enklare att räkna då. När han skall räkna neråt är han lite tveksam vid tiotalsövergångarna.

Subtraktion

Lösningsfrekvensen för hur varje enskild elev löser uppgifterna som berör subtraktion

Tabellerna nedan visar hur de 97 eleverna som deltog i undersökningen lyckas att lösa de tre uppgifterna samt vilken strategi de använder. I testuppgifterna ingår tre uppgifter som innehåller en obenämnd uppgift, en uppgift som behandlar subtraktionssituationen förändring ”ta bort” och en som behandlar subtraktionssituationen ”jämför”. Totalt blir det 291 uppgifter. 63 elever löser samtliga uppgifter korrekt, 26 elever löser en eller två uppgifter korrekt och åtta elever löser ingen av uppgifterna korrekt. Det fanns ingen skillnad i resultaten om eleverna gjorde samtliga uppgifter vid samma tidpunkt eller om de gjorde dem vid olika tidpunkter.

Tabell 4 Hur varje enskild elev lyckas lösa de tre uppgifterna med hjälp av olika strategier

Antal korrekt lösta uppgifter	Vertikal algoritmräkning	Skriftlig huvudräkning	Blandar vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning
3	37	7	0
1 eller 2	17	3	0
0	1	2	0
Löser ej uppgiften	0	0	0
Σ	55	12	0

Tabell 4 visar att 37 av eleverna löser samtliga uppgifter i testomgången korrekt med hjälp av vertikal algoritmräkning och 17 elever använder vertikal algoritmräkning men lyckas inte lösa alla korrekt. Åtta av dessa elever gör ett beräkningsfel när de skall subtrahera och fyra elever glömmer att ta bort ett tiotal när de växlar ner, av dessa gör en elev även ett beräkningsfel. Tre elever, som använder vertikal algoritmräkning när de försöker lösa uppgifterna men lyckas inte, de kastar om entalen när de räknar så de subtraherar fyra med ett istället för tvärtom. En elev av dessa 17 löser en av uppgifterna med vertikal algoritmräkning men redovisar inget svar på de övriga två. En elev använder vertikal algoritmräkning på samtliga tre uppgifter men räknar addition istället för subtraktion på en. Enligt tabell 4 löser en elev inte någon av de tre uppgifterna korrekt men försöker att lösa dem med vertikal algoritmräkning. Sju löser dem korrekt med skriftlig huvudräkning. Tre elever använder skriftlig huvudräkning när de försöker lösa uppgifterna men lyckas inte med alla och samtliga gör beräkningsfel. Två av dem gör ett beräkningsfel i subtraktionen av tiotalen och en när det gäller entalen. Ingen elev blandar vertikal algoritmräkning och skriftlighuvudräkning.

Tabell 5 Hur varje enskild elev lyckas lösa de tre uppgifterna med hjälp av olika strategier

Antal korrekt lösta uppgifter	Växlar mellan vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning	Växlar mellan algoritmräkning, skriftlig huvudräkning och endast svar
3	3	2
1 eller 2	2	1
0	2	2
Löser ej uppgiften	0	0
Σ	7	5

Tabell 5 visar att tre elever växlar mellan vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning och löser samtliga korrekt. De använder bara en metod per uppgift. Två elever försöker lösa uppgifterna genom att antingen lösa dem med vertikal algoritmräkning eller skriftlig huvudräkning. När de använder vertikal algoritmräkning löser de uppgiften korrekt. Ytterligare två elever använder antingen vertikal algoritmräkning eller skriftlig huvudräkning men löser inte någon av uppgifterna korrekt. Två redovisar uppgifterna med ett svar där vertikal algoritmräkning används, en där skriftlig huvudräkning används och i en uppgift redovisas endast svaret. Samtliga uppgifter är korrekt lösta. En elev löser uppgifterna på samma sätt men redovisar endast ett korrekt svar när han redovisar endast svar och två andra elever gör också på samma sätt men löser inte någon av uppgifterna korrekt.

Tabell 6 Hur varje enskild elev lyckas lösa de tre uppgifterna med hjälp av olika strategier

Antal korrekt lösta uppgifter	Redovisar endast svar och vertikal algoritmräkning	Redovisar endast svar och skriftlig huvudräkning	Redovisar endast svar
3	6	2	6
1 eller 2	0	2	1
0	1	0	0
Löser ej uppgiften	0	0	0
Σ	7	4	7

Enligt tabell 6 redovisar sex elever antingen uppgiften med vertikal algoritmräkning eller endast svar och löser samtliga korrekt. En elev har gör på liknande sätt men löser inte någon av uppgifterna korrekt. Två elever redovisar antingen endast svar eller skriftlig huvudräkning och löser samtliga uppgifter korrekt. Två elever har gör likadant men löser inte uppgifterna korrekt. Båda eleverna redovisar ett korrekt svar när de enbart redovisat svaret, på en uppgift redovisar de enbart ett inkorrekt svar och slutligen gör de ett bräkningsfel när de har använder skriftlig huvudräkning. Sju elever redovisar enbart svaret och visar inte hur de har kommit fram till resultatet. Sex av dem löser samtliga uppgifter korrekt och en redovisar två korrekta svar.

Lösningsfrekvensen på samtliga uppgifter som berör subtraktion samt vilka misstag eleverna gör

Nedan redovisas resultaten från den del där uppgifterna tolkades utan hänsyn till den enskilda eleven och samtliga klassers resultat användes. Av 402 uppgifter löses 222 korrekt med hjälp av vertikal algoritmräkning och 41 inkorrekt. Den positiva lösningsfrekvensen för korrekta lösningar för denna metod är 84 %. 13 uppgifter får ett inkorrekt svar på grund av felberäkningar när eleverna använder vertikal algoritmräkning (de får fel summa när de adderar två siffror med varandra) och nio inkorrekta svar beror på att eleverna kastar om siffrorna när de räknar. De får 1-4 till 3. I sju uppgifter glömmer eleven att ta bort ett tiotal när de växlar ner och i två uppgifter tar eleven bort för många tiotal när de använder vertikal algoritmräkning. Sex uppgifter löses med fel räknesätt, i fem av dem används addition och i ett fall används multiplikation. I två uppgifter kastas subtrahenden och minuenden om när talet ställs upp. I två uppgifter använder eleven (samma elev löser båda uppgifterna) minnessiffrorna efter nerväxlingen på ett felaktigt sätt. Hon subtraherar minuendens ental med minnessiffran men glömmer sedan att räkna med subtrahendens ental i svaret.

44 uppgifter löses korrekt med hjälp av skriftlig huvudräkning och 18 inkorrekt, den positiva lösningsfrekvensen för denna metod är 71 %. När de gäller de misstag som eleverna gör när de använder skriftlig huvudräkning är beräkningsfel det vanligaste misstaget, i 17 uppgifter, och det vanligaste beräkningsfelet är att eleven får 1-4 till 3 och inte -3. En elev använder fel räknesätt när uppgiften löses med skriftlig huvudräkning.

En elev blandar vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning när uppgiften löses och får ett korrekt svar.

72 uppgifter redovisas bara med svar och i 50 av dem redovisas ett korrekt svar. I fyra uppgifter redovisades ingen lösning eller svar.

I diagrammet nedan redovisas resultatet i procent för de fyra olika strategierna med undantag av den uppgift som löses genom att vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning blandades. Undantaget görs på grund av att resultatet skulle vara missvisande då endast en uppgift löses på detta sätt. Av de uppgifter som löses med vertikal algoritmräkning löses 84 % korrekt, av de som löses med skriftlig huvudräkning är 71 % korrekt och av de uppgifter som enbart redovisas med svar är 69 % rätt.

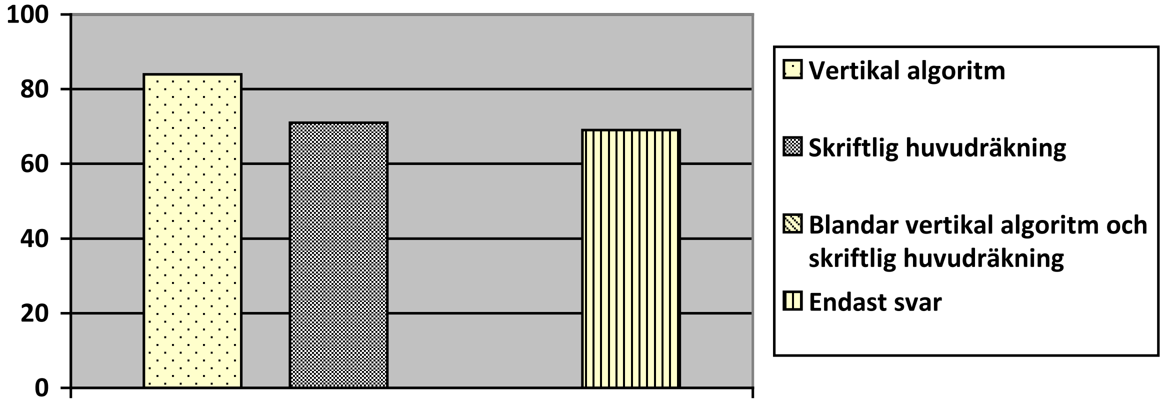

Diagram 2 Antalet korrekta lösningar visat i procent

Redovisning av intervjuerna som berör subtraktion

I studien gjordes två intervjuer där två elever fick beskriva hur de tänker och gör när de löser uppgifter med hjälp av subtraktion. Den ena eleven, som vidare kommer att kallas Frida, använder vertikal algoritmräkning i testuppgifterna och använder minnessiffran på ett felaktigt sätt. I två uppgifter använder eleven minnessiffrorna efter nerväxlingen på ett felaktigt sätt. Hon subtraherar minuendens ental med minnessiffran men glömmer sedan att räkna med subtrahendens ental i svaret. I den sista uppgiften räknar hon med subtrahendens entalssiffra när hon räknar. När detta påpekas upptäcker hon sitt misstag i de två föregående och säger följande som svar på frågan om man kan göra olika när man växlar:

> Jag vet inte, kanske … Det blir nog elva för om det hade stått nittio och jag hade lånat från nian så hade det blivit tio [syftar på nerväxlingen].

Frida tycker att det ibland kan vara svårt att veta hur man skall göra när man växlar. Hon har inga svårigheter att avgöra vilket räknesätt som hon skall använda varken i testuppgifterna eller de uppgifter som hon får i intervjun. När hon skall lösa uppgifter med ensiffriga tal kan hon svaret direkt och behöver inte tänka efter. När något av talen är tvåsiffrigt under tjugo räknar hon ner från det största talet till det mindre. Detta gäller inte om det tvåsiffriga talet enbart består av tiotal. Om båda talen innehåller fler siffror än en och inte enbart består av tiotal använder hon vertikal algoritmräkning. När Frida får en uppgift med två decimaltal där talen har olika antal decimaler använder hon vertikal algoritmräkning och löser uppgiften korrekt. Hon kan använda skriftlig huvudräkning men tycker att det är svårt.

> Jag ställer alltid upp för det är enklare, de andra sätten är så svåra. Det är svårt när det blir många, många saker [syftar på stora tal och att det då blir många led].

Frida kan ramsräkna både uppåt och nedåt utan problem, men tvekar lite vid tiotalsövergångarna. Hon säger att hon ser som en tallinje i huvudet när hon tänker.

Den andra eleven som intervjuades använde både skriftlig huvudräkning och vertikal algoritmräkning när hon löste testuppgifterna. Hon kommer i fortsättningen att kallas för Ester. Två löser hon med skriftlig huvudräkning, en med korrekt svar och en med ett felaktigt svar, och en med vertikal algoritmräkning med ett korrekt svar. I den uppgift där Ester får ett inkorrekt svar gör hon ett beräkningsfel och får 60-54 till 4. På frågan om man kan få två olika svar trots att det är samma tal som ingår i uppgifterna svarar hon:

> Nej, jag har gjort fel där [pekar på 54 till 60 = 4]. Det skall bli 6.

När hon får frågan vilket räknesätt som hon föredrar svarar hon att hon tycker att vertikal algoritmräkning är lättare.

> -Det sättet kan jag och man ser direkt vad det blir.
> -Varför använde du dig av olika strategier i uppgifterna?
> -Jag vet inte, jag ville testa olika.

Ester uttrycker även att hon litar mest på den vertikala algoritmräkningen, trots detta använder hon skriftlig huvudräkning när hon löser uppgifterna som hon får i intervjun. När Ester skall lösa uppgifter med ensiffriga tal kan hon svaret direkt och behöver inte tänka efter. När något av talen är tvåsiffrigt ser hon också direkt vad det skall bli genom att subtrahera entalen och sedan lägga till tiotalet. När hon får två- eller tresiffriga heltal subtraherar hon varje talsort för sig eller räknar upp till närmsta tiotal eller hundratal, men löser inte uppgifterna på ett korrekt sätt. När hon ombeds att visa hur hon löser uppgifterna med vertikal algoritmräkning löser hon samtliga uppgifter korrekt. Uppgifter som innehåller decimaltal löser hon genom att använda vertikal algoritmräkning och gör det på ett korrekt sätt. Ester kan ramsräkna både uppåt och nedåt utan problem, men blir ibland lite tveksam vid tiotalsövergångarna när hon skall räkna uppåt. Hon uppger att hon tänker på vilket tal som kommer efter eller innan och ”ser” inte någon tallinje i huvudet.

Multiplikation

Lösningsfrekvensen för hur varje enskild elev löser uppgifterna som berör multiplikation

Tabellerna nedan visar hur de 97 eleverna som deltog i undersökningen lyckas att lösa de tre uppgifterna samt vilken strategi de använder. I testuppgifterna ingår tre uppgifter som innehåller en obenämnd uppgift, en uppgift som behandlar multiplikationssituationen ”lika grupper” och en som behandlar multiplikationssituationen ”jämför”. Totalt blir det 291 uppgifter. 38 elever av 97 löser samtliga uppgifter korrekt, 20 elever löser en eller två uppgifter korrekt, 36 elever löser ingen uppgift korrekt och tre elever redovisar inte någonting. Det fanns ingen skillnad i resultaten om eleverna gjorde samtliga uppgifter vid samma tidpunkt eller om de gjorde dem vid olika tidpunkter.

Tabell 7 Hur varje enskild elev lyckas lösa de tre uppgifterna med hjälp av olika strategier

Antal korrekt lösta uppgifter	Vertikal algoritmräkning	Skriftlig huvudräkning
3	25	3
1 eller 2	13	2
0	19	12
Σ	57	17

Enligt tabell 7 löser 25 elever samtliga tre uppgifter korrekt med vertikal algoritmräkning och 13 elever använder vertikal algoritmräkning men löser inte samtliga uppgifter korrekt. Tre elever gör ett beräkningsfel när de multiplicerar på en uppgift, av dessa redovisar en elev enbart ett korrekt svar på en av uppgifterna. Sex stycken av dessa 13 använder minnessiffran på ett felaktigt sätt. En av använder produktens ental som minnessiffra istället för tiotalets. En annan elev sparar minnessiffran från det övre produktledets sista multiplikation och adderar den sedan i det nedre produktledets första multiplikation på två uppgifter medan en uppgift löses korrekt. Ytterligare en annan elev gör samma misstag fast bara på en av uppgifterna övriga löses korrekt. En elev gör samma misstag som de två tidigare men vid den sista multiplikationen i det nedre produktledet adderar han inte minnessiffran med produkten utan skriver ut minnessiffran först och sedan produkten. 19 elever löser ingen av uppgifterna korrekt när de använder vertikal algoritmräkning. Av dessa gör en ett beräkningsfel vid multiplikationen och får att 4*5 blir 25 på samtliga uppgifter. 12 elever använder minnessiffrorna felaktigt och skriver inte ut tiotalet i när de har multiplicerat 45*25 utan får svaret 25. Minnessiffran adderar de sedan till det nedre produktledet. En elev adderar produkterna felaktigt på samtliga uppgifter. Fem elever placerar det nedre produktledet felaktigt på samtliga uppgifter så att tiotalet hamnar under entalet o.s.v.

Tre elever löser samtliga tre uppgifter korrekt med skriftlig huvudräkning. Två elever använder skriftlig huvudräkning men löser inte samtliga uppgifter korrekt. En av dem gör ett beräkningsfel i multiplikationen 45*5 och får det till 235. Den andra eleven multiplicerar 40*20 istället för 45*20 i en av uppgifterna, i övriga redovisar han en korrekt lösning var av en bara redovisas med ett svar. 12 elever använder skriftlig huvudräkning på samtliga uppgifter men löser inte någon korrekt och samtliga multiplicerar 40*20 istället för 45*20 eller 25*40 på samtliga uppgifter.

Tabell 8 Hur varje enskild elev lyckas lösa de tre uppgifterna med hjälp av olika strategier

Antal korrekt lösta uppgifter	Växlar mellan vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning	Växlar mellan vertikal algoritmräkning, skriftlig huvudräkning och upprepad addition	Redovisar endast svar	Ej löst uppgiften
3	0	0	10	0
1 eller 2	5	0	0	0
0	1	1	3	3
Σ	6	1	13	3

Tabell 8 visar att sex elever växlar mellan att antingen använda vertikal algoritmräkning eller skriftlig huvudräkning. Fem av dem löser de obenämnda uppgifterna med skriftlig huvudräkning på ett inkorrekt sätt men löser de benämnda med vertikal algoritmräkning korrekt. När de har använder skriftlighuvudräkning multiplicerar de 40*20 istället för 45*20 eller 25*40. En elev löser den obenämnda uppgiften med skriftlig huvudräkning och gör samma misstag som de fem tidigare beskrivna eleverna. De benämnda löser han med vertikal algoritmräkning, men gör ett beräkningsfel i multiplikationen.

En elev använder antingen skriftlig huvudräkning, vertikal algoritmräkning eller upprepad addition. Hon löser inte någon av uppgifterna på ett korrekt sätt. I uppgiften där hon använder skriftlig huvudräkning multiplicerar hon 40*20 istället för 45*20 eller 25*40. När hon använder vertikal algoritmräkning använder hon minnessiffrorna felaktig samt placerar det nedre produktledet fel. Vid den upprepade additionen gör hon beräkningsfel.

13 elever redovisar endast svar och tio av dem redovisar ett korrekt svar. Tre elever löser inte uppgifterna.

Lösningsfrekvensen på samtliga uppgifter som berör multiplikation samt vilka misstag eleverna gör

Nedan redovisas resultaten från den del där uppgifterna tolkades utan hänsyn till den enskilda eleven och samtliga klassers resultat användes. Av 402 uppgifter löses 156 korrekt med vertikal algoritmräkning och 105 uppgifter löses inte korrekt. 22 av dessa är uppgifter där eleverna gör ett beräkningsfel när de multiplicerar och 31 stycken misstag beror på att de inte multiplicerar med tiotalet i det nedre talet. 7 uppgifter löses inkorrekt på grund av felberäkningar när produkterna adderas ihop. 22 uppgifter får inkorrekta svar på grund av att det nedre produktledet placeras fel så att tiotalet kommer under entalen osv. I 21 uppgifter används minnessiffrorna på ett felaktigt sätt och i två uppgifter glömmer man bort att använda minnessiffrorna. Vanliga fel när det gäller hanterandet av minnessiffror är att eleven använder entalet i produkten som minnessiffra istället för tiotalet, att tiotalet från produkten i det övre ledet sista multiplikation sparas och adderas till det nedre ledet eller att eleven glömmer att addera minnessiffran med produkten.

14 uppgifter löses korrekt med skriftlig huvudräkning och 60 uppgifter löses inkorrekt med skriftlig huvudräkning. När det gäller de uppgifter som inte löses på ett korrekt sätt med hjälp av skriftlig huvudräkning görs en felaktig multiplikation i 59 uppgifter. Istället för att multiplicera 45*20 eller 25*40 multiplicerar man 40*20 och får på så sätt ett felaktigt svar. I en uppgift görs ett beräkningsfel i multiplikationen.

48 uppgifter redovisas endast med svar varav 30 har ett korrekt svar. 18 uppgifter saknar lösning och en uppgift löses inkorrekt med upprepad addition. I ingen uppgift blandas skriftlig huvudräkning med vertikal algoritmräkning.

I diagrammet nedan redovisas resultatet i procent för de tre olika strategierna som används i uppgifterna Upprepad addition redovisas inte på grund av att resultatet skulle vara missvisande då endast en uppgift löses på detta sätt. Av de uppgifter som löses med vertikal algoritmräkning löses 60 % korrekt, av de som löses med skriftlig huvudräkning är 19 % korrekt och av de uppgifter som enbart redovisades med svar är 63 % rätt.

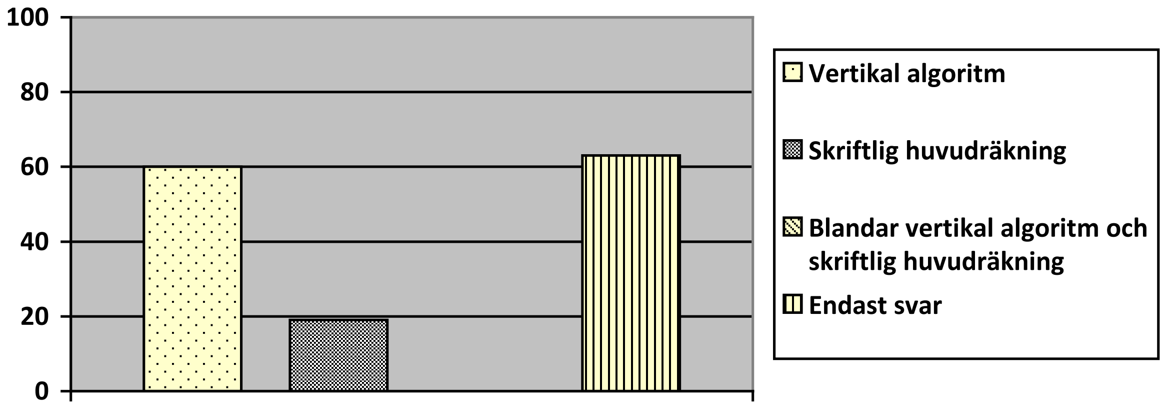

Diagram 3 Antalet korrekta lösningar visat i procent

Redovisning av intervjun som berör multiplikation

Syftet i studien var att intervjua två elever för varje räknesätt, men samtliga elever utom en som var aktuella för multiplikation avböjde. Eleven som intervjuades för multiplikation använde vertikal algoritmräkning i samtliga uppgifter och han kommer i fortsättningen att kallas för Alexander. Alexander löser de två benämnda testuppgifterna korrekt men inte den obenämnda. I den obenämnda adderar han ihop minnessiffran med tiotalet och får fyra istället för 12. För att inte placera produktleden fel under varandra sätter han ut en nolla under entalen i det nedre produktledet. På frågan om man kan få olika svar när man multiplicerar två tal med varandra svarar han:

– Det känns inte så för det är exakt likadant.
– Så om man multiplicerar två olika tal så kan det aldrig bli olika svar?
– Jo, det kan det… vänta nu det skall bli samma, för 4*5 är samma sak som 5*4.

När han har studerat sina tre lösningar på testuppgifterna ser han vad han har gjort för fel och förklarar det. När han får frågan om man kan lösa uppgifterna på något annat sätt än med vertikal algoritmräkning svarar han att man kan göra på andra sätt och beskriver skriftlig huvudräkning. Alexander visar hur man gör och efter några misstag, som han rättar till, löser han uppgiften korrekt. Han uppger att han tycker att vertikal algoritmräkning är enklare.

> Det blir inte lika mycket kludd att hålla reda på. Gör man detta [pekar på uppställningen] så blir det bara ett svar istället för som på det andra sättet där man måste ta från ett ställe till det stället till det stället.

Han tycker inte att det är svårt att hålla ordning på de olika reglerna som finns för vertikal algoritmräkning utan det har han lärt sig tidigare. När han får uppgifter under intervjun med decimaltal använder han vertikal algoritmräkning men placerar kommatecknen under varandra och får på grund av detta felaktiga svar. Under intervjun får Alexander en uppgift där han skall räkna ut hur många facebooksvänner en person har. Han konstaterar innan han börjar lösa uppgiften att personen i uppgiften har orimligt många vänner. Alexander upplever att uppgifterna i matematikundervisningen ofta är orimliga och att detta kan störa. Han ger exempel där någon hade tusen enkronor och Alexander tycker att det är orimligt, ”det finns ju ingen som går omkring med tusen enkronor”. Alexander uppger att han känner sig säker på 1:ans, 2:ans, 4:ans, 5:ans, 9:ans, 10:an och 11:ans multiplikationstabeller. 6:ans och 7:ans tabeller är lite svåra när man multiplicerar med tal över fem. 8:ans och 12:ans tabeller är svåra, särskilt 8:ans. Alexander använder upprepad addition när han skall räkna med tal i de tabeller som han tycker är svåra.

Division

Här har grupperingen av uppgifter skilt sig från grupperingen av de övriga räknesätten. Grupperingen har istället fokuserats på skillnaderna mellan fördelningsdivision och innehållsdivision. Endast ett fåtal har försökt att lösa uppgifterna på något annat sätt än med kortdivision.

Lösningsfrekvensen för hur varje enskild elev löser uppgifterna som berör division

Tabell 9 visar hur de 97 eleverna som deltog i undersökningen lyckas att lösa de tre uppgifterna. I testuppgifterna ingår tre uppgifter som innehåller division, en obenämnd, en som innehåller fördelningsdivision och en som innehåller innehållsdivision. Totalt blir det 291 uppgifter.

Tabell 9 Hur varje enskild elev har lyckats lösa uppgifterna med fördelningsdivision med hjälp av olika strategier.

	Obenämnd uppgift	Fördelnings-division	Innehålls-division
Korrekt löst	80	79	64
Löses ej korrekt	17	18	33
Σ	97	97	97

I tabell 9 kan avläsas att 80 elever löser den obenämnda uppgiften korrekt och 75 elever löser den obenämnda uppgiften korrekt med hjälp av kort division på ett korrekt sätt, fyra elever löser den genom talsortsvis beräkning och en elev använder trappan för att lösa uppgiften. 17 löser den obenämnda uppgiften inkorrekt med kort division. Av dessa gör åtta elever beräkningsfel av typen 605/5=52,1. Tre elever får 5/5 till 5 och två får 5/5 till 0. En elev skriver inte någon lösning. Två elever använder talsortsvis beräkning men gör beräkningsfel i divisionen och en elev får ett inkorrekt svar genom att använda upprepad addition.

När det gäller den benämnda uppgiften som innehåller fördelningsdivision är det 79 elever som löser uppgiften korrekt och av dessa är det 75 som använder kort division. Tre elever löser uppgiften korrekt genom att använda talsortsvis beräkning och en elev använder trappan. 18 elever löser inte den benämnda uppgiften korrekt. Tre elever skriver inte någon lösning och sex elever gör beräkningsfel. Fyra elever får 5/5 till 0 och två elever får 5/5 till 5. Två elever prövar sig fram med hjälp av upprepad addition men får inte ett korrekt svar och en elev försöker att lösa uppgiften med talsortsvis beräkning men börjar med att dividera entalet i täljaren istället för hundratalet och får på grund av detta ett felaktigt svar.

Tabell 9 visar även att 64 elever löser den benämnda uppgiften som innehåller innehållsdivision och av dem löser 31 elever uppgiften med kortdivision. Av dem går 13 baklänges och använder nämnare som svar och redovisar 605/5=121 och skriver sedan 5 som svar. Övriga redovisar 605/121=5. Nio elever använder upprepad addition och löser uppgiften korrekt. En elev löser uppgiften genom upprepad subtraktion och 16 elever löser uppgiften med hjälp av multiplikation. En av dessa 16 elever multiplicerar 121 med tio för att sedan dividera produkten med 2 och får på så sätt fram att svaret är 5. Sex elever redovisar endast ett korrekt svar. Ytterligare en elev löser uppgiften korrekt genom att använda trappan. 17 elever använder kort division men löser inte uppgiften för innehållsdivision korrekt. Sex av dessa elever redovisar 605/5=121 men inte skrivit något svar och övriga gör beräkningsfel. Tre adderar bara 121 fyra gånger men stannat där och en adderar 121 sex gånger. En elev löser inte den korrekt med hjälp av subtraktion utan subtraherar 605 med 121 och svarar att de kan ha 485 kr var. Två löser inte uppgiften korrekt med hjälp av multiplikation utan redovisar ett felaktigt svar, men de använder 121*5. Åtta elever redovisar inte någon lösning på uppgiften som handlar om innehållsdivision. En elev avrundar och försöker sedan att uppskatta antalet men får ett felaktigt svar.

Redovisning av intervjuerna som berör division

I studien intervjuades två elever om hur de tänker och gör när de löser uppgifter som handlar om division. Den första eleven, som kallas Viktor i fortsättningen, försökte att lösa samtliga testuppgifter som handlade om division med hjälp av att pröva sig fram men lyckas inte. Han använder både multiplikation och upprepad addition när han försöker att lösa uppgifterna. Viktor löser däremot uppgiften med innehållsdivision genom att använda multiplikation och upprepad addition korrekt. Viktor försöker även att pröva sig fram med hjälp av multiplikation i de uppgifter som han får under intervjun. När han t.ex. får uppgiften som kräver beräkningen 448/8 börjar han med att hitta en lösning för 48/8. Han börjar med 8*8 och letar sig sedan fram till att 6*8 är 48. Sedan tar han 400/8 och börjar med att ta 8*10 för att sedan genom upprepad addition komma fram till att 8 går 50 gånger i 400. Han skriver upp hur många gånger han har adderat 8 i kanten på pappret för att komma ihåg. Slutligen adderar han 50 med 6 och får svaret 56. När han skall lösa uppgiften som kräver divisionen 162/18 använder han sig av upprepad addition tills han kommer fram till 162 men får ett felaktigt svar på grund av att han när han addera 72+72 skriver att han har adderat med 18 sex gånger istället för åtta. Viktor tycker själv att hans sätt att lösa divisionsuppgifter är bra men kräver mycket tid och att det kan bli jobbigt att hålla reda på hur många gånger han har använt talet i nämnaren.

> Jag tycker det om man har tid på sig. Men det tar ju väldigt lång tid ibland.

Enkla divisionsuppgifter, som t.ex. 6/2, 60/3 och 600/30, kan Viktor utantill och löser snabbt i huvudet. Han har heller inga problem när han skall dividera med 10 eller hundra även om svaret blir ett decimaltal som är mindre än 1. Viktor känner sig säker på alla multiplikationstabeller till och med elvans. Tolvans multiplikationstabell tycker han är lite svår.

Den andra eleven, som kallas för Dennis, brukar först räkna i huvudet och sedan redovisar han uppgiften på pappret. Om han inte får samma svar när han räknar på pappret och i huvudet tänker han att han har räknat fel i huvudet. I de testuppgifter som handlade om fördelningsdivision använder han kort division medan han använder upprepad addition i den uppgift som handlade om innehållsdivision. Han löser de två första uppgifterna korrekt men inte innehållsdivisionsuppgiften som han löser på följande sätt: 121+121+121+121=484, 605-121= 484. Han har sedan svarat att fyra elever kan få 121 kr. När han blir ombedd att förklara hur han tänkte kommer han inte ihåg hur han gjorde eller tänkte. I intervjun får han en uppgift som handlar om fördelningsdivision och den löser han på korrekt sätt med kort division. När han får en uppgift som handlar om innehållsdivision använder han upprepad subtraktion och skriftlig huvudräkning.

> Å det var jobbigt. Ett sätt är ju att ta minus, minus det funkar ju som delat.
> 162-18=128-18=110-18=92-18=76-18=58-40-18=22-18=6 [Han berättar hur han gör samtidigt som han skriver ner uträkningen]

Dennis får ett inkorrekt svar på grund av att han gör flera beräkningsfel, men reagerar inte när han får en rest utan svarar nio. Dennis tycker att det är svårt när det är flersiffriga tal i nämnaren. Han har inga svårigheter med att räkna enkla divisionsuppgifter i huvudet, t.ex. 6/3, 60/3 och 600/30, och uppger att han använder multiplikationstabellerna när han löser dem.

> Jag tänker multiplikation.

Dennis har inga svårigheter med att dividera med 10 eller 100 även om svaret blir ett decimaltal som är mindre än 1. Han känner sig säker på alla multiplikationstabeller utom åttans tabell. När han skall räkna uppgifter där multiplikation eller division med åtta ingår tycker han att det blir krångligt. Dennis tycker att siffrorna i åttans tabell flyttar sig hela tiden och tycker att det är lättare att se talmönstret i de övriga tabellerna. När han skall multiplicera 7 med 6 så tänker han det är sju steg över 35, 7*9 är sju mindre än sjuttio och 4*7 löser han genom upprepad addition med sju.

Diskussion

Under den här rubriken inleder jag med en metoddiskussion och fortsätter sedan med en diskussion av de resultat som kom fram i studien.

Metoddiskussion

En kritik som riktats mot att använda flera metoder i samma studie är att studien får en slagsida åt något håll och oftast då åt det kvantitativa hållet. Den kvalitativa delen i studien blir då bara ett stöd åt den kvantitativa delen. Detta har uppstått i den aktuella studien och för att motverka detta skulle till exempel fler intervjuer kunna ha gjorts, vilket det inte fanns utrymme att göra inom ramen för studien. En annan kritik som har framförts är att studierna som har använt flera metoder har blivit röriga och svåra att tolka för läsaren. I den aktuella studien har jag försökt att undvika detta genom att göra en tydlig uppdelning i resultatsdelen (Denzin & Lincoln, 2011).

En kritik som riktas mot innehållsanalyser är att de visar det uttalade snarare än det outtalade. Det outtalade kan vara tecken på att det inte anses som vikigt eller som självklart. För att undvika detta ställdes fördjupande och förklarande frågor till de elever som intervjuades som sedan användes som stöd vid kodningen och analysen av resultatet. Syftet med innehållsanalysen var att genom att analysera de resultat som framkom i den kvantitativa delen undersöka vilka svårigheter och misstag som uppstår samt vad de kan bero på, inte bara konstatera att det blir fel. För att öka reliabiliteten gjordes en dubbelkodning av några av klassernas resultat för att säkerställa kodschemat. De tydliga avgränsningarna till att testuppgifterna enbart handlade om de fyra räknesätten och de strategier som eleverna använder när de försöker att lösa sådana uppgifter ökar validiteten av studien. Även syftet med intervjuerna var att säkerställa validiteten av studien (Bergström & Boréus, 2005).

Resultatsdiskussion

Under denna rubrik har jag valt att dela upp resultatsdiskussionen under underrubrikerna addition, subtraktion, multiplikation och division. Under varje underrubrik kommer följande frågor att diskuteras: Finns det någon strategi som är mer effektiv än de övriga?, Vilka misstag kan eleven göra när den använder de olika strategierna?, Vad kan dessa misstag bero på? och slutligen Hur tänker/gör elever när de löser uppgifter med hjälp av de fyra räknesätten? Avsnittet kommer att avslutas med en sammanfattning av vad som har kommit fram i studien av mer generell karaktär.

Syftet med studien är att jämföra de olika strategier som eleverna i åk 7 i åtta klasser använder för att lösa matematikuppgifter samt ta reda på vilka typer av missförstånd och svårigheter som kan uppstå. Fokus ligger på vilka svårigheter och missuppfattningar som kan uppstå, men även på om det finns någon strategi som är mer effektiv.

Addition

Eleverna i undersökningen använder sig i huvudsak av tre olika strategier när de löser uppgifterna som handlar om addition i testomgången: vertikal algoritmräkning, skriftlig huvudräkning samt att enbart redovisa svaren. När det gäller de elever som enbart redovisar svaren är det svårt att uttala sig om hur de har gått tillväga, om de har använt någon av de ovannämnda strategierna eller någon annan. Det finns även elever som blandar strategierna med varandra. I redovisningen framkom det att den positiva lösningsfrekvensen för den vertikala algoritmräkningen var betydligt högre än för skriftlig huvudräkning, 90 % respektive 57 %. Den positiva lösningsfrekvensen för den skriftliga huvudräkningen låg på samma nivå som för dem som enbart redovisat svar eller blandat vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning med varandra, 53 % för enbart svar och 50 % för den blandade metoden. I Foxman & Beishuizens (2002) studie skilde sig inte den positiva lösningsfrekvensen för vertikal algoritmräkning och skriftlig huvudräkning nämnvärt åt. De båda studierna skiljer sig åt i både storlek och utformning och detta skulle kunna vara orsaken till skillnaderna. Foxman & Beishuizens studie hade ett större elevunderlag och undersökte elevernas huvudräkningsprocedurer. Det skulle kunna vara så att det är lättare att använda vertikal algoritmräkning när man får skriva ner den på ett papper eftersom man då t.ex. inte behöver hålla minnessiffror i huvudet och föra över dem till nästa led. Detta skulle kunna vara orsaken till att informanten Peter löste den obenämnda uppgiften fel. Ytterligare en skillnad var att man i Foxman & Beishuizens undersökning använde sig av addition med heltal medan i den här undersökningen användes tal med decimaltal. En annan skillnad som den här studien inte tar upp men som är avgörande är de olika undervisningskulturer som finns i olika länder.

När man granskar resultaten av hur många av de tre uppgifterna som varje enskild elev har lyckats lösa kan man även där se att det är betydligt fler procentuellt sett som löser alla tre uppgifterna korrekt med hjälp av vertikal algoritmräkning, 72 % respektive 18 %. Även för de elever som löser två eller en av uppgifterna så är den positiva lösningsfrekvensen högre för vertikal algoritmräkning än för skriftlig huvudräkning och det omvända förhållandet råder för de elever som inte har löst någon av uppgifterna korrekt.

De misstag som eleverna gör när de använder de olika strategierna är olika men en gemensam faktor verkar vara att eleverna har brister i sin taluppfattning och i uppfattningen av talkonstansen. Detta blev tydligt i de intervjuer som gjordes efter testuppgifterna då de båda eleverna visade att de var osäkra på var decimaltecknet skulle placeras och att de får 0,95 + 0,5 till 1. David visade även en osäkerhet när det gällde talkonstansen och säger att två tal som adderas med varandra kan få olika svar beroende på vilken metod man använder. Enligt McIntosh (2008) kan elever som inte har förstått hur vårt talsystem är uppbyggt stöta på problem vid tiotalövergångar och tal i decimalform. Elever kan på grund av mönstret från uppräkningen av heltal tro att efter ”ett komma nio” kommer ”ett komma tio” och detta skulle kunna vara en av anledningarna till att eleverna kan få 0.95+0,5 till 1.

När det gäller de elever som använder vertikal algoritmräkning är det vanligast att de antingen gör beräkningsfel eller använder minnessiffran felaktigt. När det gäller den felaktiga summeringen skulle det kunna vara ett slarvfel men det skulle även kunna tyda på att eleven inte har automatiserat additionstabellerna. McIntosh (2008) menar att elever ofta behärskar multiplikationstabellerna bättre än additionstabellerna. När det gäller den skriftliga huvudräkningen är det vanligaste felet att eleverna adderar decimalerna felaktigt. Många elever i undersökningen får 0,95+0,5 till 1 och en del elever omvandlar decimalerna till heltal genom att göra om 0,95 till 95 och 0,5 till 5 och sedan skriver de 1. Detta var även något som David gjorde när han löste uppgifter. Detta skulle kunna tyda på att eleverna inte har positionssystemet riktigt klart för sig. McIntosh (2008) beskriver att elever kan uppfatta tal i decimalform som två skilda tal, heltalen som en del och talen efter decimaltecknet som en annan del. Denna uppfattning tros komma ifrån hur vi säger tal i decimalform, ”sex och nittiofem”. Rockström (2000) visar även på att man skall göra om decimalerna i ett tal till heltal och addera dem för att sedan göra om dem till decimaler igen när man använder sig av skriftlig huvudräkning. Löwing (2011) menar att när talområdet blir för stort kan eleverna inte räkna på fingrarna eller använda mindre lämpliga strategier. Detta verkar vara en av orsakerna till att David, som intervjuades, har svårigheter med att lösa uppgifterna. I åk 7 var det bara 60 % av eleverna som klarade uppgifter av typen 0,54+0,52 i Löwings (2011) undersökning. Enligt Johansson (2011) är orsaken till att elever behåller en mer primitiv strategi när det gäller att lösa additions- och subtraktionsproblem inte för lite färdighetsträning, utan att den sätts in vid fel tillfälle. Eleverna har också utvecklat uppfattningen att det gäller att få så många rätt som möjligt oavsett vilken tankekvalitet som lösningen har. På detta sätt upprepas och befästs tankeformer istället för att genom undervisning utvecklas.

Enligt Lunde (2010) finns det allt för lite evidensbaserad kunskap om vad som fungerar för elever i matematiksvårigheter. McIntosh (2008) ger en del råd om vad man som lärare bör uppmärksamma och tänka på när man möter missuppfattningar och svårigheter i addition. Han anser att det är viktigt att man i ett tidigt stadium låter räkning bli svaret på frågan hur många det finns i en mängd och att eleverna tränas i att gå vidare från att räkna alla till att räkna från den största och uppåt när det gäller addition. McIntosh menar även att man bör uppmuntra eleverna att se sambandet mellan addition och subtraktion och använda detta för att kontrollera sina uträkningar. Han betonar även vikten av att eleverna förstår additionskombinationerna och att de befästs. Detta är något som även Bentley och Bentley (2011). De fann i sin studie att de elever som hade befäst kunskapen om talkombinationerna inte gjorde några misstag när de använde beräkningsstrategierna, medan de som inte hade befäst dem gjorde upprepade misstag. McIntosh (2008) ger förslag på hur man kan gruppera additionskombinationerna för att underlätta förståelsen av sambandet mellan dem samt befästandet av dem. Han menar även att man inte enbart skall använda exempel där det inte behövs någon minnessiffra när man introducerar addition med tvåsiffriga tal på grund av att eleverna kan uppfatta det som att entalen och tiotalen inte är beroende av varandra.

Subtraktion

Eleverna använde även här i huvudsak tre olika strategier: vertikal algoritmräkning, skriftlig huvudräkning och endast redovisat svar. Även här är det svårt att uttala sig om hur eleverna som enbart har redovisat svar har gått till väga. Vid granskningen av resultaten framkom det att den positiva lösningsfrekvensen för vertikal algoritmräkning var högre än för skriftlig huvudräkning, 84 % respektive 71 %. Den positiva lösningsfrekvensen för de uppgifter som enbart redovisats med svar låg på samma nivå som för de som använt skriftlig huvudräkning. Eftersom de elever som inte har redovisat hur de har löst uppgifterna inte har intervjuats kan man inte med säkerhet uttala sig om med vilken metod de har löst uppgiften. Foxman & Beishuizen (2002) fick en större skillnad i sin undersökning än vad denna studie fick, men båda studierna fick ett resultat som visar vertikal algoritmräkning har en högre lösningsfrekvens än övriga. Av de båda studiernas resultat att döma kan man dra slutsatsen att de elever som använder vertikal algoritmräkning oftare lyckas lösa uppgifter som kräver subtraktionsberäkningar korrekt. Som tidigare har nämnts så skiljer sig de båda studierna åt i storlek och utformning, men en jämförelse kan ändå göras. I Löwings (2011) studie var den positiva lösningsfrekvensen för subtraktionsuppgifterna betydligt lägre. Denna studie skiljer sig både i storlek och i ålder när det gäller informanterna. I Löwings studie deltog betydligt fler informanter och de var yngre än i den här studien. En viktig slutsats som gjordes i Löwings studie, och som trots skillnaderna skulle kunna vara giltig även i denna studie, var att eleverna inte hade sådana kunskaper i matematik att de kunde generalisera subtraktionskombinationerna till andra tal än ensiffriga heltal.

Vid granskningen av resultaten för hur många uppgifter varje enskild elev har löst korrekt är den positiva lösningsfrekvensen för vertikal algoritmräkning betydligt högre än för skriftlig huvudräkning hos de elever som har löst alla tre uppgifter korrekt, 84 % respektive 16 %. Samma förhållande råder för de elever som har löst en eller två uppgifter korrekt, den positiva lösningsfrekvensen för vertikal algoritmräkning är betydligt högre än för skriftlig huvudräkning.

De misstag som eleverna gör när de använder vertikal algoritmräkning är främst beräkningsfel, när de subtraherar två tal med varandra får de fel svar. Det näst vanligaste felet är att de kastar om siffrorna när de skall subtrahera och tar störst först istället för att växla ner. Ytterligare ett fel är att de glömmer att ta bort t.ex. ett tiotal när de har växlat ner. Detta skulle kunna tyda på att de inte har subtraktionstabellerna klart för sig, men det skulle också kunna vara att eleverna inte ser sambandet mellan addition och subtraktion (McIntosh, 2008). McIntosh menar att det finns två huvudproblem när det gäller de grundläggande subtraktionskombinationerna. Det ena är att eleverna inte kommer ihåg dem tillräckligt snabbt och/eller inte kan beräkna dem tillräckligt fort eller effektivt. En annan orsak skulle kunna vara att eleverna inte förstår minustecknets betydelse, utan som Löwing (2006) beskriver det blandar ihop operationen subtraktion med negativa tal. När det gäller den skriftliga huvudräkningen är det vanligaste felet att eleverna inte växlar ner utan tar störst först och får 1-4 till 3 istället för -3. Även här kan orsaken vara osäkerhet som kan uppstå när det gäller minustecknet som Löwing (2006) beskriver. Under intervjun med Frida kom det fram att hon känner sig osäker på hur man växlar ner och detta skulle kunna tyda på att hon inte har mött detta tillräckligt ofta i undervisningen och ser entalen och tiotalen som oberoende av varandra. McIntosh (2008) varnar för att om man vid introduktionen av addition och subtraktion med tvåsiffriga tal endast använder uppgifter utan tiotalsövergång kan detta problem uppstå. Både Frida och Ester ger uttryck för att de mest använder den vertikala algoritmräkningen när de löser subtraktionsuppgifter. Trots det använder Ester skriftlig huvudräkning när hon räknar under intervjun. När hon gör det löser hon inte uppgifterna korrekt och detta skulle kunna tyda på att hon inte har räknelagarna klart för sig. Detta är något som både Löwing (2011) har sett i sin undersökning och som McIntosh (2008) berör.

Även när det gäller subtraktion ger McIntosh (2008) en del råd om vad som skulle kunna undanröja svårigheter i matematik samt underlätta för eleverna. Han betonar vikten av att se sambandet mellan subtraktions- och additionskombinationerna och använda dessa för att kontrollera sina uträkningar. McIntosh anser att det är viktigt att förståelsen för detta samband får ta tid och undervisningen inte enbart fokuserar på befästandet av kombinationerna. Genom att använda sig av siffrornas positionsvärde kan man lära eleverna att generalisera additions- och subtraktionskombinationerna till både högre och lägre tal.

Multiplikation

Även när eleverna löste uppgifterna med multiplikation användes i huvudsak tre olika strategier: vertikal algoritmräkning, skriftlig huvudräkning och att enbart redovisa svar. Det är värt att notera att lösningsfrekvensen för samtliga strategier sjunker jämfört med addition och subtraktion och att flera av uppgifterna saknar lösningar. Den positiva lösningsfrekvensen för vertikal algoritmräkning är högre än den för skriftlig huvudräkningen, men är ändå inte mer än 59,8 %. För skriftlig huvudräkning är den endast 18,9 % vilket innebär att bara var femte lösning har en korrekt lösning. Den positiva lösningsfrekvensen är högst för de uppgifter som endast har redovisat svar. Vad detta beror på är svårt att säga något om och det är även svårt att veta hur eleverna har gått till väga eftersom de inte har intervjuats. Foxman och Beiszhusern (2002) fick omvänt förhållande när de undersökte lösningsfrekvensen när det gällde multiplikation med två tvåsiffriga tal i en obenämnd uppgift. När de däremot undersökte en benämnd uppgift där multiplikation av ett decimaltal var den positiva lösningsfrekvensen högre för vertikal algoritmräkning än för skriftlig huvudräkning. De slutsatser som kan dras ifrån resultaten från den här studien och Foxman och Beiszhuserns (2002) studie när det gällde multiplikation med ett decimaltal är att lösningsfrekvensen är högre för vertikal algoritmräkning. Det är dock anmärkningsvärt att så många lösningar inte blir korrekta oavsett vilken metod eleven använder i de båda studierna, i den här studien löses endast hälften av uppgifterna på ett korrekt sätt.

Av resultaten för hur många uppgifter varje elev lyckats lösa framkom det att det är betydligt fler som löser samtliga uppgifter med hjälp av vertikal algoritmräkning än med skriftlig huvudräkning, 44 % respektive 18 %. Även resultatet från de elever som löste en eller två av uppgifterna visar de elever som använder vertikal algoritmräkning lyckas bättre. Det omvända förhållandet gällde för de elever som inte löste någon av uppgifterna korrekt.

De misstag som eleverna gör när de använder vertikal algoritmräkning är främst att eleverna inte multiplicerar med tiotalet i det nedre ledet. Ett annat vanligt misstag är beräkningsfel som skulle kunna tyda på att multiplikationskombinationerna inte är tillräckligt befästa. Osäkerheten när det gäller multiplikationskombinationerna är något som kommer fram under intervjun med Alexander. Han upplever att han är osäker på 6-8:ans tabell och 12:ans tabell och tycks inte se sambandet mellan till exempel 3:ans och 6:ans. Ytterligare ett annat vanligt misstag är hanterandet av minnessiffror. Eleverna kan till exempel använda entalssiffran som minnessiffra istället för tiotalssiffran eller så adderar de minnessiffrorna på ett felaktigt sätt. Ytterligare ett misstag är att eleverna placerar produkterna från de olika leden felaktigt så att tiotal hamnar under ental. De vanligaste misstaget som eleverna som använder skriftlig huvudräkning gör är att de multiplicerar tiotalen för sig och entalen för sig. De har multiplicerat 40 med 20 och istället för 45 med 20 eller 25 med 40.

De råd som McIntosh (2008) ger när det gäller undervisningen som handlar om multiplikation är att växla mellan berättelser, bilder, skrivna uttryck och symboluttryck. Han anser även att det kan finnas pedagogiska nackdelar med att lära ut multiplikationskombinationerna som tabeller. Eleverna kan då gå miste om att se sambanden mellan de olika kombinationerna. McIntosh tycker inte heller att man skall ha multiplikationstabellerna uppsatta i klassrummet på grund av att det då inte finns någon anledning för eleverna att lära sig dem utantill. När de arbetar med större tal är det vikigt att uppmuntra dem till att göra överslagberäkningar för att kontrollera sina resultat.

Division

Här har grupperingen av resultaten skilt sig från grupperingarna för de övriga räknesätten och istället för att jämföra olika strategier har en jämförelse mellan uppgifter med fördelningsdivision och innehållsdivision gjorts. När man jämför om eleverna har löst uppgifterna eller inte kan man se en högre positiv lösningsfrekvens för uppgifterna som handlar om fördelningsdivision än för innehållsdivision, 80,5% respektive 70,6 %. Om man gör en jämförelse och tar hänsyn till hur eleverna har löst uppgifterna kan man se att skillnaderna ökar. 76,6 % av lösningarna gjordes korrekt med kortdivision när det gällde de beräkningar som innehöll fördelningsdivision medan 33,1 % av lösningarna använder kortdivision när det gäller uppgifterna med innehållsdivision. Skillnaden skulle kunna förklaras med att eleverna inte är vana vid att dividera med en flersiffrig nämnare. Löwing (2011) presenterar i sin undersökning resultat som visar att varannan elev i åk 7, 8 och 9 inte kunde lösa uppgifter av typen 864/8. Enligt Löwing beror detta på att eleverna inte behärskar de grundläggande räknelagarna och inte ser de enkla lösningarna som finns. Det skulle även kunna bero på att eleverna har lärt sig multiplikationskombinationerna som tabeller och inte ser sambandet mellan dem och division (McIntosh, 2008). Under intervjun med Viktor verkar han se sambandet mellan addition, multiplikation och division men verkar sakna strategier för hur man använder sambandet. Viktor väljer istället att pröva sig fram, vilket är en mycket tidskrävande och svår metod. När han får enkla uppgifter löser han dem direkt och i huvudet. Detta skulle kunna tyda på att han har multiplikationskombinationerna befästa och att han kan använda dem på enkla divisionsuppgifter men att han inte kan generalisera dem till svårare. Även Dennis ser sambanden mellan addition och multiplikation och använder dem när han räknar uppgifter med division, utom för 8:ans tabell där han tycker att det är svårt att se mönstret. Han använder kort division när han löser den obenämnda och benämnda divisionsuppgiften som innehåller fördelningsdivision, men väljer att använda upprepad addition eller subtraktion på uppgifterna med innehållsdivision. McIntosh menar även att det kan finnas elever som har svårigheter med att skilja mellan delning i vardagslivet som kan vara orättvis och den matematiska delningen som bygger på ”likadelning”. Även hur man uttrycker division muntligt kan göra det svårt för eleven som kan få flera olika muntliga uttryck för samma tal (a.a.). I Skolverkets rapport (2008) visade det sig att eleverna hade stora svårigheter med att enkoda divisionsuppgifter som innehöll innehållsdivision. I en av Skolverkets uppgifter påverkades även lösningsfrekvensen negativt på grund av att det inte var möjligt att direkt tillämpa kortdivision. Detta skulle kunna vara en av orsakerna till det låga resultatet när det gäller lösningsfrekvensen på uppgiften med innehållsdivision och Dennis svårigheter med att lösa uppgifterna med innehållsdivision. Multiplikation och division är tvådimensionella räkneoperationer till skillnad från addition och subtraktion som är endimensionella. De endimensionella räkneoperationerna kan visas genom att räkna uppåt eller neråt på en tallinje. Multiplikation och division är mer komplexa och detta i samband att de behandlas efter addition och subtraktion kan bidra till att göra det mer komplicerat för eleverna (McIntosh, 2008, s.73)

Den positiva lösningsfrekvensen för fördelningsdivision är högre än för innehållsdivision. En orsak till skillnaden skulle kunna vara att eleverna inte är vana vid att dividera med tvåsiffriga tal i nämnaren. De elever som har löst innehållsdivisionen har oftast gått baklänges genom att dividera 605 med 5 och sedan redovisat 5 som svar. Ytterligare några elever har prövat sig fram genom att använda upprepad addition eller multiplikation. Detta skulle kunna tyda på att de elever som använder upprepad addition har förstått sambandet mellan addition och multiplikation och sedan tagit det vidare till division. De elever som använder upprepad multiplikation skulle kunna ha förstått sambandet mellan multiplikation och division och kan använda detta på ett framgångsrikt sätt. Fem av eleverna använde sig av talsortsvis beräkning som i Foxman och Beishuizens (2002) undersökning. Foxman och Beishuizen kom fram till att de som använde algoritmräkning hade en högre positiv lösningsfrekvens än de som använder talsortsvis beräkning.

Det vanligaste misstaget som eleverna gör när det gäller fördelningsdivision och innehållsdivision är oftast beräkningsfel av karaktären 5/5=0 eller 5/5=5. Andra misstag är att de glömmer att ta med resten i beräkningen. Några elever försöker att pröva sig fram med hjälp av addition eller multiplikation men misslyckas på grund av beräkningsfel.

McIntosh (2008) ger några få råd om division i undervisningen. Han anser att introduktionen skall ske genom praktiska aktiviteter och att det är viktigt att både fördelnings- och innehållsdivision finns representerade. När termerna införs i undervisningen är det viktigt att det görs på ett korrekt sätt och att de används ofta av både elever och lärare.

Slutdiskussion och specialpedagogiska implikationer

Av resultaten i den här studien framkommer det att den positiva lösningsfrekvensen är högre för vertikal algoritmräkning än för skriftlig huvudräkning när det gäller samtliga räknesätt. Detta resultat sammanfaller med det den studie som Foxman och Beishuizen (2002) kom fram till i sin undersökning, utom när det gällde multiplikation med tvåsiffriga tal då de fick ett omvänt förhållande. Till skillnad från Rockströms (2000) intention kom det fram under intervjuerna att flera av eleverna tycker att det är svårare och mer att komma ihåg när de skall använda skriftlig huvudräkning än när de använder vertikal algoritmräkning. En informant uttrycker det på följande sätt:

> Det blir inte lika mycket kludd att hålla reda på. Gör man detta [pekar på uppställningen med vertikal algoritmräkning] så blir det bara ett svar istället för som på det andra sättet där man måste ta från ett ställe till det stället till det stället.

Orsaken till detta kan vara många: hur strategin har lärts ut, vilka diskussioner som har förts i klassrummet, men det kan också vara så att det som är tänkt att underlätta gör det i början av elevens skolgång men längre fram leder den till att det blir svårare för eleven att lösa uppgifter.

Både i litteraturgenomgången och från granskningen av resultaten i undersökningen kommer det fram att en del elever har svårigheter med den grundläggande matematiken så som tallinjen, positionssystemet och antalskonstansen. Detta visar sig bland annat i intervjuerna där fler elever uttryckte att samma tal kan få olika svar och en elev menar att det beror på vilken metod som används. Både Löwing (2011) och McIntosh (2008) tar upp detta som bidragande orsaker till de svårigheter och missuppfattningar som man kan se att elever ger uttryck för. En annan orsak enligt de båda författarna är att eleverna inte behärskar räknelagarna och McIntosh menar att det finns elever som inte har upptäckt dem och i vissa fall beror det på att ingen förklarat dem för dem. Löwing (2006) menar att det är viktigt hur lärare uttrycker sig och att termer används på ett korrekt sätt för att inte göra det svårare för eleverna. I hennes forskning kom det även fram att de flesta lärarna lät eleverna arbeta på egen hand i en lärobok eller något annat arbetsmaterial. Bristen på anpassning efter elevens behov ledde fram till inlärningsproblem. Eleverna hade även svårt att förstå språket i läromedlen samtidigt som lärarna inte försökte att lära eleverna ett korrekt matematikspråk. Löwing fann att lärarnas ambition var att genom ett vardagsspråk förenkla och underlätta förståelsen men i själva verket ledde det till missförstånd och skapade nya problem. De flesta av lärarna som ingick i hennes studie var så fokuserade på att använda ett modernt arbetssätt att det blev viktigare än innehållet. Fokus låg mer på att göra än att upptäcka och förstå matematiska principer. Löwing (2006) anser att på grund av att dagens lärare är så osäkra när det gäller matematikämnets didaktik blir de läromedelsbundna. I de observationer som hon gjorde fann hon att ett vanligt problem var att läraren och författaren till läromedlet hade olika uppfattningar om hur det aktuella innehållet kunde byggas upp och förklaras. Detta ledde till att eleverna fick motstridande förklarningar. När eleven inte förstod de förklaringar som läraren gav valde läraren att undvika problemet och lotsade eleven fram till svaret istället. De problem som uppstod på grund av detta var att eleven inte kunde lösa nya, liknande uppgifter, långa väntetider för att få hjälp samt större förkunskapsproblem hos eleven. I studien synliggjordes även vikten av att som lärare ta sig tid till att förstå vad som egentligen är elevens problem. Alltför ofta stannade lärarna bara några sekunder hos eleven vilket ledde till att eleven och läraren pratade förbi varandra. Det räcker inte heller med diagnoser för att få en förståelse av elevernas kunskaper (a.a.).

I den här studien finns det flera elever som tycks ha svårigheter med talkombinationerna, sambandet mellan dem och befästandet av dessa. Framförallt blir det tydligt när man granskar resultaten från multiplikationsuppgifterna. Även i intervjuerna kommer det fram att eleverna har svårt med talkombinationerna, i synnerhet när det gäller multiplikation. Detta ledde till att en elev använde en mer primitiv strategi när han försökte att lösa uppgifterna med division. Johansson (2011) menar att orsaken till att elever behåller en mer primitiv strategi när det gäller att lösa additions- och subtraktionsproblem inte handlar om för lite färdighetsträning, utan att den sätts in vid fel tillfälle. Eleverna har också fått uppfattningen att det gäller att få så många rätt som möjligt oavsett vilken tankekvalitet som lösningen har. På detta sätt upprepas och befästs tankeformer istället för att genom undervisning utvecklas.

Som specialpedagog är det viktigt att uppmärksamma elever som har svårigheter när det gäller matematik. Detta kan göras genom att man observerar och testar elevernas förmåga att lösa matematiska uppgifter, men det räcker inte. Man måste även ta reda på vad svårigheterna och eventuella missuppfattningar beror på samt hur man kan hjälpa eleverna fram till strategier som fungerar. Enligt både Engström (2003) och Lunde (2010) saknas det internationell forskning om matematiksvårigheter och vad som kan hjälpa elever som upplevs ha svårigheter i matematik. Inom detta område finns många obesvarade frågor som är av stor vikt för matematikundervisningen i Sverige och internationellt.

Det som kommer fram i den här och andra studier om vad som är viktigt när man möter elever i matematiksvårigheter är att inte nöja sig med att testa vad eleven kan eller inte kan utan att genom observationer och intervjuer ta reda på vilka svårigheter och missuppfattningar som finns. Det är även viktigt att undersöka vad dessa svårigheter och missuppfattningar beror på innan man sätter in åtgärder. Genom att ta del av forskning samt göra kartläggningar och analyser av de misstag och svårigheter som kan uppstå i matematiken kan både lärare och specialpedagoger få en djupare förståelse och kunskap om vad som kan hjälpa eleven som befinner sig i matematiksvårigheter.

Förslag till fortsatt forskning

Lunde (2010) menar att det inte finns tillräckligt med evidensbaserad forskning som visar hur inlärningssituationen skall se ut för elever i matematiksvårigheter och detta är ett område som skulle vara intressant att studera utifrån olika infallsvinklar. Den här studien har försökt att synliggöra vilka misstag och svårigheter som elever i åk 7 på en skola gör när de arbetar med aritmetiska uppgifter men också vad dessa misstag och svårigheter skulle kunna tänkas bero på. För att klarlägga vad misstagen och svårigheterna beror på skulle fler och större studier behöva genomföras. Det skulle även vara intressant att undersöka hur tidigare undervisning påverkar äldre elevers misstag och svårigheter samt hur man kan förebygga dessa.

Referenslista

Bentley, P.-O. & Bentley C. (2011). *Det beror på hur man räknar – matematikdidaktik för grundlärare.* Stockholm: Liber AB.

Bergström, G. & Boréus, K. (red.) (2005). *Textens mening och makt: Metodbok i samhällsvetenskaplig text- och diskursanalys.* Lund: Studentlitteratur.

Denzin, N.K. & Lincoln, Y.S. (2011). *The Sage Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks: Sage , cop.

Engström, A. (2003). *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik: en introduktion.* Arbetsrapport vid Pedagogiska institutionen, Örebro universitet, 2003:08. Örebro: Örebro universitet.

Engström, A. & Magne, O. (2003). *Medelsta-matematik: hur väl behärskar grundskolans elever lärostoffet enligt Lgr 69, Lgr 80 och Lpo 94?* Rapporter från Pedagogiska instutitionen, nr 4, Örebro universitet.

Foxman, D. & Beishuizen, M. (2002). Mental Calculation Methods Used by 11-year-olds in Different Attainment Bands: A Reanalysis o Data from the 1987 APU Survey in the UK. *Educational Studies in Mathematics,* 51 pp. 41-69.

Fuson, K. (1992). Addition and Subtraction. In D.A. Grouws (Ed). *Handbooks of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillian Publishing Company.

Göteborgs Universitet. (2009). Utbildningsplan – Specialpedagogiska programmet, 90 högskolepoäng. *Göteborgs Universitet.* Hämtat från www.ips.gu/digitalAssets/1270/1270349_Utbildnplan_Specpedex_SF2007_638t_UFLbeslut_09304.pdf

Johnsson, J. (2011). Antal. Addition och subtraktion. I B. Bergius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson & R. Ryding (Red.), *NämnarenTEMA Matematik - ett grundämne.* (s.65-72). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur AB.

Kroesbergen, E.H. & Van Luit, J.E.H. (2003). Mathematics Interventions for Children with Special Educational Needs: A Meta-Analysis. *Remedial and special Education,* vol. 24, nr 2, s. 97-114.

Lunde, O. (2010). *När siffror skapar kaos – matematiksvårigheter ur ett specialpedagogiskt perspektiv*. Stockholm: Liber.

Lunde, O. (2011). Mota matematiksvårigheter. I B. Bergius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson & R. Ryding (Red.), *NämnarenTEMA Matematik - ett grundämne.* (s.47-52). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemma: hur lärare kan hantera lärandets komplexitet.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2011). Elevers kunskaper i aritmetik. I . I B. Bergius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson & R. Ryding (Red.), *NämnarenTEMA Matematik - ett grundämne.* (s.79-84). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Magne, O. (1998) *Att lyckas med matematik i grundskolan.* Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbok.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Myndigheten för skolutveckling (2003). *Baskunnande i matematik.* Stockholm: Myndigheten för skolutveckling: Fritzes kundservice.

Rittle-Johnsson, B. & Wagner Alibali, M. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other?. *Journal of Educational Psychology.* Vol.91. No 1. s. 175-189.

Rockström, B. (2000). *Skriftlig huvudräkning: Metodbok.* Stockholm: Bonnier Utbildning.

Stukat, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* Lund: *Studentlitteratur*.

Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: en djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008, 1 december). Andelen elever med gymnasiebehörighet minskar – men andelen elever som når målen i alla ämnen ökar. *Skolverket.* Hämtat från www.skolverket.se/2.3894/publicerat/arkiv_pressmeddelanden/2008

Skolverket. (2011, 29 november). Var femte klarade inte provet i matematik. *Skolverket.* Hämtat från www.skolverket.se/2.3894/publicerat/arkiv_pressmeddelanden/ 2011/-var-femte-klarade-inte-provet –i-matematik-1.162124

Skolverket. (2011, 21 december). Över 200 000 elever deltog i satsningen på matematik. *Skolverket.* Hämtat från www.skolverket.se/2.3894/publicerat/arkiv_ pressmeddelanden/2011/over-200-000-elever-deltog-i-satsning-pa-matematik-1.164930

Van de Walle, J.A. (1994). *Elementary School Mathematics. Teaching Developmentally.* White Plains, N.Y.: Longman.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Åsberg, R. (2001). Det finns inga kvalitativa metoder – och inga kvantitativa heller för den delen. Det kvalitativa-kvantitativa argumentets missvisande retorik. *Pedagogsik forskning i Sverige, årg 6, nr4, s. 270-292.*

Bilaga 1

Lös följande uppgifter. Visa hur du gör.

1. 67,95+ 40,5=
2. 91-54=
3. 25*45=
4. 605/5=

Lös följande uppgifter. Visa hur du gör.

1. Hanna köper en vara för 67,95 kr och en för 40,5 kr. Hur mycket kostar de tillsammans?
2. Peter har 91 kr och handlar för 54 kr. Hur mycket har han kvar?
3. 25 elever har 45 kr var. Hur mycket har de tillsammans?
4. 605 kr skall delas på 5 elever. Hur mycket får varje elev?

Lös följande uppgifter. Visa hur du gör.

1.Erik har 67,95 kr på sitt konto och får 40,5 kr. Hur mycket har han på sitt konto?

2.Mohammed har 94 kr och Awes har 57 kr. Hur mycket mer pengar har Mohammed än Awes?

3.Sholo har 45 kr och Eno har 25 gånger så mycket. Hur mycket har Eno?

4.Hur många elever kan ha 121 kr var om man från början har 605 kr?

Bilaga 2

Intervjuguide

- Kolla att inspelningsapparaten fungerar innan intervjun.
- Se till att hitta en lugn plats.
- Förklara hur intervjun kommer att gå till och syftet med den.
- Tala om att ingen annan kommer att lyssna på att intervjun och att resultatet kommer att vara anonymt.
- Börja med att titta på de uppgifter som de gjort på lektionerna.
- Titta på extrauppgifterna.

Förslag på frågor

Kan du beskriva för mig hur du gör/tänker när du löser den här uppgiften?

Kan uppgiften få ett annat svar?

Är svaret rimligt?

Finns det fler sätt att lösa uppgiften på?

Kan man få ett annat svar?

Fråga om ängslan för matematik: Hur känns det när du skall arbeta med matematik?

Jag skulle vilja att du tittar på en annan uppgift.

- Ställ kontrollfrågor
- Var öppen
- Våga vänta in svaret
- Berätta mer
- Uppmuntra berättandet med ljud
- Avbryt inte

Avrunda intervjun med att kort sammanfatta vad som har kommit fram och fråga om det är okej att du kommer tillbaka och ställer fler frågor vid behov.

Bilaga 3

Hej!
Mitt namn är Paula Wiktorell och jag arbetar på XXXskolan som specialpedagog. Jag läser till specialpedagog vid Göteborgs Universitet och skall skriva ett examensarbete den här terminen. Syftet med examensarbetet är att undersöka vilken strategi eleverna använder sig av när de räknar med de fyra räknesätten samt vilka misstag de kan göra. I undersökningen skulle jag vilja intervjua några elever om hur de tänker när de räknar och med anledning av det skulle jag vilja intervjua ditt/ert barn. Intervjun kommer att spels in men det är bara jag som kommer att lyssna på inspelningen och i examensarbetet kommer alla namn ändras så att man inte vet vem som har sagt vad. Om du/ni tillåter att ditt/ert barn intervjuas kommer intervjun att ske i skolan på skoltid. Ditt/ert barn kan när som helst under intervjun välja att inte delta i undersökningen om ni väljer att vara med. Om du/ni har några frågor får du/ni gärna höra av dig/er till mig på telefonnummer XXXX-XXXXXX.

Med vänliga hälsningar Paula Wiktorell

☐ Mitt/vårt barn får delta i intervjun.

☐ Jag/vi vill inte att mitt/vårt barn deltar i intervjun.

Namn:____