GÖTEBORGS UNIVERSITET

En studie av orsaker till gymnasieelevers aritmetiksvårigheter

Simon Eddeland, Olle Häggdahl, Clara Johansson

Inriktning: LAU395

Handledare: Per-Olof Bentley

Examinator: Elisabeth Hesslefors

Rapportnummer: VT2012-2611-213

Abstract

Examensarbete inom Lärarprogrammet LP01
Titel: Aritmetiksvårigheter **-** En studie av orsaker till gymnasieelevers aritmetiksvårigheter
Författare: Simon Eddeland, Olle Häggdahl, Clara Johansson
Termin och år: VT 2012
Kursansvarig institution: Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap
Handledare: Per-Olof Bentley
Examinator: Elisabeth Hesslefors
Rapportnummer: VT2012-2611-213
Nyckelord: Aritmetiksvårigheter, beräkningsstrategier, talfakta, addition, subtraktion, övergeneraliseringar.

Syftet med den här studien är att undersöka bakomliggande orsaker, gällande matematiskt tänkande, till en elevgrupps färdigheter och svårigheter inom aritmetik med fokus på vilka metoder eleven använder sig av för att utföra beräkningarna. Studien genomfördes genom att ge ut en diagnos till fyra utvalda klasser för att sedan följa upp diagnosresultaten från eleverna med intervjuer. Detta för att få en tydligare bild av elevernas beräkningsstrategier och därigenom finna orsaker till varför eleverna presterar som de gör. Intervjuerna gjordes till större delen med minderåriga och föräldrarnas tillstånd krävdes. Detta för att underlätta i analysarbetet. Vi har erhållit resultat, varibland en del troligen inte finns beskrivet av tidigare forskning, bestående av beräkningsstrategier och orsaker till elevernas prestationer. Rapporten bidrar till att ge matematiklärare en insikt om elevers beräkningsstrategier: val av strategi och adaptivitet, vilka typer av fel som är vanliga hos de elever som intervjuats och varför eleverna ibland misslyckas.

Innehåll

Figurförteckning

Bakgrund

Aritmetik är ofta den första delen av matematiken som elever stöter på i grundskolan. Av de fyra räknesätten är addition och subtraktion de som ofta lärs ut först, men tidigare forskning (Bentley, 2008a, 2009; Foxman, 2001; Olsson, 2012) har funnit att elever i högre årskurser trots detta har problem med just dessa räknesätt. Det verkar till och med vara så att en del elever tycker att subtraktion är mycket svårare än multiplikation (Englund, Källgården & Persson, 1992), trots att subtraktion behandlas i tidigare årskurser än multiplikation.

Den nuvarande läroplanen för grundskolan (Skolverket, 2011b) behandlar vad som ska vara det centrala innehållet i matematikundervisningen i Sverige, och innefattar många olika områden såsom geometri, algebra, sannolikhetslära och statistik. Aritmetik är här en av byggstenarna, något som ska läras ut redan från första klass och sedan användas som ett verktyg under resten av elevernas matematikstudier. Bentley (2008a) menar dock att elever utan grundläggande aritmetikkunskaper som har blivit automatiserade får svårt att ta till sig mer avancerade matematikområden. Det är inte bara bland yngre elever som aritmetikproblemen återfinns, även hos svenska gymnasieelever har sådana svårigheter funnits (Olsson, 2012). Detta kan bli problematiskt, eftersom innehållet i gymnasiematematiken är ännu mer avancerat än vad innehållet är i grundskolan, och avsaknad av t ex talfakta leder till svårigheter att lära sig avancerad matematik. Även i läroplanerna för gymnasiet (Skolverket, 2011a) betonas det att eleverna ska behärska olika huvudräkningsstrategier som t ex överslagsräkning, något som kräver utantillkunskap inom aritmetik (Hedrén, 2001) som de tidigare diskuterade studierna visat att många svenska elever saknar.

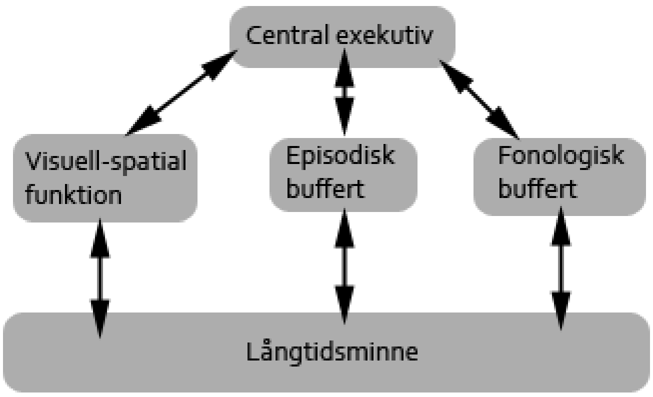
Många olika beräkningsstrategier inom aritmetik har tidigare beskrivits (Baroody, 2003; Bentley, 2008a; Klein & Beishuizen, 1999; Löwing, 2008; Thompson, 1998), både strategier som undervisas i skolan och även sådana som elever har utvecklat själva. Många av strategierna är matematiskt korrekta och ger korrekta svar, medans andra leder till felaktiga matematiska uppfattningar och inkorrekta lösningar.

Vi fick möjlighet att arbeta tillsammans med vår handledare, Per-Olof Bentley, och medverka i den forskning som han bedriver. Vår förhoppning var att denna studie skulle hitta andra beräkningsstrategier än de som finns beskrivna i tidigare forskning. Vi anser att en sådan upptäckt skulle kunna gynna förståelsen av hur elever uppfattar matematik, särskilt aritmetik.

Tidigare forskning

Arbetsminnet

Många av de orsaker som finns för matematiksvårigheter kan på något sätt kopplas till arbetsminnet och hur det är uppbyggt, och därför är det lämpligt att redogöra för hur arbetsminnet fungerar. Tidigare kallades arbetsminnet för korttidsminnet, men numera gör man en distinktion mellan de båda (Baddeley, 2012). Korttidsminnet syftar på den del av hjärnan som endast lagrar information under korta perioder, medan arbetsminnet också kan manipulera denna information. Den rådande allmänt accepterade modellen av arbetsminnet är att den består av 4 delar: den centrala exekutiven, en visuell-spatial funktion, en episodisk buffert och en fonologisk buffert (Baddeley, 2012; Lundberg & Sterner, 2009).



Figur 1. Modell av arbetsminnet.

I den fonologiska bufferten lagras information som kan översättas till verbal form, t ex om man försöker komma ihåg ett telefonnummer som man upprepar i huvudet (Lundberg & Sterner, 2009). I den visuell-spatiala funktionen lagras i stället bilder som man försöker komma ihåg. Den episodiska bufferten integrerar information från övriga arbetsminnet samt långtidsminnet, och binder ihop allting till en sammanhängande episod. Den centrala exekutiven koordinerar och styr över de andra tre delarna av arbetsminnet, och genomför även operationer (Bentley, 2008a).

Matematiksvårigheter

Matematiksvårigheter är inte lika välstuderat som lässvårigheter (Baroody, 2003), och matematiksvårigheter är inte heller kopplat till samma skamkänsla som lässvårigheter. Det finns ett antal kännetecken för matematiksvårigheter som Lunde (2011) har presenterat. Ett av dessa tecken är att elever med matematiksvårigheter kan ha problem med att arbetsminnet inte fungerar som det ska gällande numerisk information. Det innebär att eleverna har svårt att hämta information från långtidsminnet, som ska användas under lösningsprocessen av en uppgift, till arbetsminnet där processen sker. Med andra ord krävs det ett samspel mellan långtids- och arbetsminnet.

Lunde (2011) anser att för att en elev ska kunna konstruera antalsbegrepp som är högre än 4 måste eleven ha språkfärdigheter. Även Lundberg och Sterner (2009) menar att människor har en medfödd förmåga att uppfatta antal och göra jämförelser mellan dessa. De menar också att människors medfödda förmåga att uppfatta antal ligger till grund för att kunna associera antal till det språkliga uttrycket. Lundberg och Sterner anser att människan, för att kunna utveckla en mental tallinje, måste kunna associera antal till det språkliga uttrycket och till de arabiska siffrorna. Om ett barn har svårigheter med något av dessa steg, till följd av en försenad språkutveckling, finns det en större risk för att barnet utvecklar räknesvårigheter. Malmer (2002) anser också att en bristande språklig kompetens kan vara en av de faktorer som kan leda till matematiksvårigheter hos elever.

Ytterligare ett kännetecken för att en elev har matematiksvårigheter är att eleven har svårt att hämta lagrad information, i sådana fall är det också relevant hur informationen som eleven ska hämta har lagrats (Lunde, 2011). Det är ofta så att dessa elever lagrar information som är starkt knuten till en viss kontext och inte kan användas i andra situationer, vilket kan jämföras med procedurell kunskap (Bentley, 2008b; 2009). Det är också vanligt att den information som lagrats är irrelevant.

En annan faktor som kan ge upphov till matematiksvårigheter är den kognitiva utvecklingen (Malmer, 2002). Malmer anser att om inte svaga elever får det stöd de behöver så får de ofta stora svårigheter i matematik, ett ämne som kräver stor abstraktions- och koncentrationsförmåga. Hon anser också att misslyckanden i läs- och skrivprocessen kan påverka matematikutvecklingen negativt.

Lunde (2011) menar att på vilket sätt som elever använder olika strategier för att lösa uppgifter kan ge en fingervisning om eleven har matematiksvårigheter. Eleven kan antingen använda sig av retrievalstrategier, där man får fram svaret direkt från minnet, eller backupstrategier där eleven använder sig av olika algoritmer för att få fram svaret. Retrievalstrategier kallas också för talfakta (Bentley, 2008a). De elever som har matematiksvårigheter använder sig ofta av primitiva algoritmer och har ofta samma strategi för att lösa olika typer av uppgifter.

Ett annat kännetecken för matematiksvårigheter är att eleven har svårt att skapa mentala bilder (Lunde, 2011). Elever med matematiksvårigheter har ofta svårt med den rumsliga uppfattningen, vilken hänger ihop med taluppfattningen. De mentala bilder som eleverna kan ha svårt att skapa kan exempelvis vara tallinjen. Svårigheter att skapa mentala bilder kan vara kopplat till problem med den visuell-spatiala funktionen i arbetsminnet (Lundberg & Sterner, 2009). Olsson (2012) har funnit att flera elever använder sig av en inre mental tallinje när de ska lösa aritmetikuppgifter.

Färdigheter och svårigheter i matematik

Tidigare forskning (Bentley 2008a) har funnit att en del svenska elever har problem med vissa aritmetikuppgifter. Svårigheterna har i vissa fall med enkodning att göra, d v s att ur en problemställning av text kunna förstå vad som ska beräknas, men i andra fall så är det själva räkneoperationen som är problemet. Detta är särskilt fallet när det gäller subtraktion där växling krävs, d v s när man inte enbart kan använda talsortsvis räkning. Svenska elever har uppvisat dessa brister både i internationella studier och på de nationella proven i årskurs 5 (Bentley 2008a). Dessa studier har också visat att elever kan behärska flera olika beräkningsstrategier för att lösa problem, men att de kan känna osäkerhet på vilken strategi de ska använda. Detta har lett till att samma elev anger olika svar på samma fråga ställd två gånger på samma prov, en gång utan kontext och en gång i en kontext. I likhet med att eleverna kan blanda ihop eller behärska olika beräkningstrategier, så kan de också ha olika begreppsuppfattningar. I matematikundervisningen kan modeller användas för att förklara och förtydliga olika matematiska begrepp. Bentley (2009) menar att om man undervisas om flera olika begreppmodeller samtidigt, så kan detta leda till att eleven får svårt att särskilja vilka attribut som tillhör respektive begreppsmodell.

Exempel på felaktig räkning -
Övergeneralisering av "störst först"

45 - 37 = ?
4 tiotal - 3 tiotal = 1 tiotal
5 ental - 7 ental vänds av eleven till 7 -5 med övergeneraliseringen "störst är först"
7 ental - 5 ental = 2 ental
1 tiotal och 2 ental = 12
45 - 37 = 12

Figur 2. Störst först-övergeneralisering.

Bentley (2009) menar också att elever i vissa fall gör övergeneralisering av räkneregler, som kan leda till att eleverna drar inkorrekta slutsatser. När det gäller elevers svårigheter med subtraktionsuppgifter som kräver växling kan regeln "störst först" ha använts, d v s att man alltid ska ta det största talet minus det minsta (se figur). Vid subtraktion som kräver växling kommer en sådan lösningsmetod leda till felaktiga resultat. Övergeneralisering av "störst först" har även tidigare funnits vara ett problem bland svenska elever (Englund et. al., 1992; Löwing, 2006; Olsson, 2012). En annan typ av övergeneralisering är att vid uppställning av additionsuppgifter använda sig av rak högerkant (Bentley & Bentley, 2011). Detta innebär att tal med olika antal decimaler kommer att adderas på fel sätt.

När elever i Sverige, och även andra länder i västvärlden, gör misstag på matematiklektionerna uppfattas de ofta som störande, oönskade moment i undervisningen (Bentley 2009). Det fanns en rädsla för att om man fokuserade på misstagen så skulle ännu fler elever begå dessa misstag. I vissa ostasiatiska länder, t ex Taiwan, ses däremot sådana misstag som en del av inlärningen, och lärarna i dessa länder diskuterade elevmisstag i större grupper för att andra elever skulle undvika att själva göra misstagen.

Strategier för addition och subtraktion

I en annan studie så fann Bentley (2008a) att elevernas lösningsstrategier för aritmetiska problem kunde delas upp i fem kategorier: *talfakta*, *stegvis beräkning*, *talsortsvis beräkning*, *kompensationsberäkning* och *standardalgoritm*. Vissa av de lösningsstrategier som Bentley tar upp beskrivs även av Thompson (1999), särskilt vid addition och subtraktion av tal mindre än 20, och han anser dessutom att de olika strategierna kan rangordnas efter hur sofistikerade de är. Även Klein och Beshuizen (1998) redogör för flera av de diskuterade strategierna, så den diskuterade uppdelningen av lösningsstragier har stöd hos ett flertal forskare.

Talfakta innebär att hjärnan har lagrat viss information i långtidsminnet. Den centrala exekutiva delen av arbetsminnet hämtar denna information från långstidsminnet, vilket innebär att belastningen på övriga delar av arbetsminnet minskar (Bentley, 2008a). Bentley menar att om en person inte har utvecklat talfakta så blir det svårt att ta till sig undervisning om mer avancerade matematiska begrepp, eftersom den personen kommer att fastna i själva beräkningarna. Löwing (2008) menar att på längre sikt är målet att alla elever i skolan direkt skall kunna se svaret på enkla additioner, d v s att de har utvecklat talfakta. Talfakta kan liknas med det som kallas för *tabellkunskap* (Hedrén, 2001), men det är inte samma sak. Tabellkunskap är något som har blivit upprepat så att man kan svaret på t ex en addition utantill, medan talfakta snarare är att se som en färdighet där den centrala exekutiven avlastar övriga arbetsminnet. Talfakta används mer frekvent som lösningsstrategi desto äldre personen i fråga är (Baroody, 2003).

Stegvis beräkning innebär enligt Bentley (2008a) att man räknar upp ifrån ett tal, för subtraktionen 51 - 48 skulle detta innebära att man börjar på 48 och sedan räknar hur många steg det är till 51. Denna strategi kan också användas vid addition. Stegen eller hoppen vid stegvis beräkning sker entalsvis eller tiotalsvis.

Talsortsvis beräkning innebär att man räknar entalen för sig, tiotalen för sig, hundratalen för sig o s v (Bentley, 2008a). Detta kan, som tidigare diskuterats, leda till att elever drar inkorrekta slutsatser vid vissa typer av uppgifter. I de fall som elever övergeneraliserar principen "störst först" räknar de ofta med talsortsvis beräkning. Studier har funnit att elever som använder sig av talsortvis beräkning lyckas sämre på aritmetikuppgifter än elever som använder andra strategier (Foxman, 2001).

Kompensationsberäkning innebär att man utför beräkningen i delar. För additionen 9 + 5 så kan detta ske genom att man först beräknar 9 + 1 = 10, därefter beräknar man 10 + 5 = 15, och slutligen 15 - 1. Det som denna strategi går ut på är att modifiera det första talet så att uträkningen blir enklare (Bentley, 2008a), i detta fall genom addition med 1 i början. Detta leder till att man måste subtrahera med 1 i slutet av beräkningen.

Att använda sig av *standardalgoritm* innebär i fallen subtraktion och addition att eleven har lärt sig att ställa upp talen, och följer en bestämd algoritm (procedur) för att lösa uppgifterna (Bentley, 2008a). Många av eleverna i Bentleys studie visade att de behärskade eller kände till flera av de olika lösningsstrategierna, men alla utfördes inte korrekt. Vid en analys av de läroböcker som eleverna hade visade det sig att flera av lösningsstrategierna återfanns, men att de saknades förklaringar när de olika strategierna var lämpliga att användas.

Att lösa subtraktionen 51 - 48 genom att börja på talet 48 och sedan räkna hur många steg det är upp till 51, av Bentley (2008a) kallat för stegvis beräkning, har också kallats för att *komplettera* eller *lägga till* (Kilborn, 1997; Löwing, 2007). Löwing kallar det i det här fallet för att räkna upp från delen, men hon menar dock att alla elever inte behärskar denna strategi helt. För subtraktionen 5 - 3 är talet 3 delen och talet 5 det hela, och att räkna upp från delen innebär i detta falet att börja på 3 och räkna hur många steg det är till 5. Ett fel som kan göras är att eleven både räknar från och med delen och till och med det hela (se figur 3). Detta leder till att man får ett för mycket i sitt svar, ett fel som kan kallas för "plus-minus-ett-felet" (Olsson, 2012).

Figur 3. Stegvis beräkning.

Strategin komplettera skiljer sig från strategin ta bort (Kilborn, 1997; Löwing, 2008), och Löwing menar att "en vanlig uppfattning är att subtraktion enbart handlar om att minska eller ta bort" (s 85). För subtraktionen 5 - 3 innebär strategin ta bort att man börjar på talet 5 och sedan räknar 3 steg nedåt. Vissa elever har svårt att behärska även denna strategi, och ett fel som kan göras med denna strategi är att man inkluderar det hela i sin nedräkning, likt den felaktiga metod som kan användas med strategin komplettera. Löwing (2006) menar att många elever uppfattar de tre olika subtraktionsstrategier som hon tar upp när de börjar skolan, men efter en tid i skolan lär sig eleverna att subtraktion handlar om att ta bort, och förtränger därmed de andra två strategierna. Löwing (2009) menar också att en av orsakerna till att elever i grundskolans tidigare år inte når upp till den potential de har är lärarnas bristfälliga matematikdidaktiska utbildning.

Den sista strategin som Kilborn (1997) och Löwing (2008) beskriver för subtraktion är strategin jämföra. Denna strategi går ut på att jämföra storleken på två olika kvantiteter med varandra, göra en parbildning mellan de båda kvantiteterna och sedan utesluta alla par ur beräkningen. Löwing ger som exempel frågan "Lina har 11 kr och Linus har 9 kr. Hur mycket mer pengar har Lina?" (2008, s 87). Man kan lösa frågan med strategin jämföra genom att lägga 2 rader av enkronor bredvid varandra. När man jämför de båda raderna ser man att den ena raden har 2 enkronor fler än den andra, alla övriga enkronor bildar par, med en enkrona från varje rad i varje par. Parbildningen i jämförelsen i exemplet är när eleven parar ihop enkronorna från varje rad. När eleven har vidareutvecklat sin matematiska förmåga kan man göra mer abstrakta jämförelser för att lösa uppgifter, som att vid subtraktionen 43 - 38 jämföra de båda talen med 40.

Det finns även flera olika strategier för grundläggande addition (Kilborn, 1997; Löwing, 2008). En strategi som fungerar bäst för små tal är räkna från början (räkna alla). Ett exempel som Löwing ger är att för additionen 2 + 5 hålla upp 2 fingrar på ena handen och 5 fingrar på den andra handen, och sedan räkna antalet fingrar som man håller upp totalt. Löwing menar dock att detta egentligen inte kan ses som en addition, utan endast en uppräkning, samt att det blir svårt att använda denna strategi för stora tal. Att istället räkna från första termen innebär, i fallet 2 + 5, att man börjar på talet 2 och sedan räknar 5 steg till, något som Bentley (2008a) inkluderar i stegvis beräkning. Den tredje och sista additionsstrategin som Kilborn (1997) och Löwing (2008) beskriver är räkning från största termen. Denna strategi utnyttjar att addition är kommutativt, d v s att a + b = b + a. För additionen 2 + 5 innebär det att man börjar på talet 5 och sedan räknar 2 steg till.

Löwing (2008) menar att alla de strategier som hon beskriver för addition och subtraktion kan förfinas när man utvecklat sin matematiska förmåga, t ex till att göra beräkningen i flera delar på det sätt som Bentley (2008a) kallar för kompensationsräkning. Löwing (2008) menar dock att för att klara av svårare aritmetiska operationer är det är viktigt att man har ett flyt i räkningen och att dessa grundläggande aritmetiska operationer behärskas utantill, d v s att eleven utvecklar talfakta (Bentley, 2008a). Hedrén (2001) menar att utantillkunskap (ska ej förväxlas med talfakta), av honom kallad tabellkunskap, är nödvändig för de räknesätt som de hör till. Han menar att det framförallt är viktigt vid överslagsräkningar, eftersom sådana tal oftast löses med generaliserad tabellkunskap.

Lester (2007) redogör för hur barn utvecklar strategier för beräkning av uppgifter som innehåller heltal och hur de lär sig att välja mellan olika strategier. Han menar att

> "The available research over the past 10 years has provided further documentation that acquiring proficiency with single-digit computations involves much more than rote memorization. This domain of whole number arithmetic demonstrates (a) how the different components of arithmetic skill (strategies, principles, and number facts) contribute to each other, (b) how children begin with understanding of the meaning of operations and how they gradually develop more efficient methods, and (c) how they choose quite adaptively among different strategies depending on the numbers involved." (s. 564).

Detta betyder alltså att aritmetik i talområdet 0 - 9 är mycket mer än bara utantillkunskap. Eleverna lär sig hur de olika delarna av aritmetiken är sammanflätade och de utvecklar en förståelse för operationer samt utvecklar effektivare metoder. De lär sig också att välja mellan olika strategier beroende av vilka tal som är inblandade i uppgifterna.

Procedurell och konceptuell kunskap

Bentley (2008b; 2009) menar att konceptuell kunskap är ett begrepp som beskriver kunskap som bygger på förståelse av matematiska begrepp. Procedurell kunskap å andra sidan bygger på procedurer och regler som används för att lösa uppgifter. Den konceptuella kunskapen kan generera procedurell kunskap, men oftast inte tvärtom. Han menar också att procedurer kan läras in i vissa kontexter, d v s att proceduren utgör en metod för att lösa en viss typ av uppgift. För att proceduren ska kunna användas i andra situationer måste proceduren ibland modifieras. En grupp procedurer kan också ha en begreppslig förankring, vilket innebär att denna kunskap består av flera delar och på så sätt ses som konceptuell kunskap. Vidare menar Bentley (2008b; 2009) att den konceptuella kunskapen består av procedurer, begrepp etc som är sammanvävda till en bred kunskap som bygger på matematiska principer, medan den procedurella kunskapen består av kunskap om regler inom olika områden. Dessa områden ligger var för sig, utan några broar emellan, d v s den kunskapen är beroende av en specifik kontext. Ofta ligger det dock spår av konceptuell kunskap under den procedurella (Baroody, 2003).

Bentley (2009) menar undervisningen skiljer sig mellan olika länder i världen. Matematikundervisningen i västvärlden består nästan enbart av procedurell undervisning, medan undervisningen i ostasiatiska länder, som Hong Kong, Japan, Singapore och Taiwan, till stor del består av konceptuell undervisning. Enligt de kunskapsmätningar som gjorts, där jämförelser mellan olika länder förekommit, har resultatet visat på att elevernas prestationer till stor del är beroende av vilken undervisning eleverna fått, d v s om undervisningen varit procedurell eller konceptuell. Enligt Bentley (2009) arbetar eleverna i de ostasiatiska länderna huvudsakligen på tre olika sätt när de i undervisningen löser uppgifter självständigt: de övar på procedurer, tillämpar procedurerna i nya situationer och arbetar med att hitta på något nytt eller analysera situationer på nya sätt.

Sammanfattning av avsnittet tidigare forskning samt dess relevans för studien[1]

För att kunna göra en fullkomlig analys av elevers färdigheter och svårigheter har vi presenterat de begrepp som kommer att användas. Arbetsminnet och dess uppbyggnad, samt hur elever använder arbetsminnet, påverkar hur svårt elever tycker att aritmetik är, särskilt om de inte har byggt upp talfakta, och därför är det intressant för oss. Vi har diskuterat matematiksvårigheter i allmänhet för att sedan röra oss mot det mer specifika för vår studie, aritmetiksvårigheter. Vårt mål är att fylla ut de beskrivningar och kategoriseringar som redan finns med hjälp av våra intervjuer. Det finns redan ett flertal studier om olika beräkningsstrategier, och även i detta område hoppas vi på att ytterligare beskriva olika elevers tankegångar med hjälp av vår studie. Detta kommer att diskuteras i termer av konceptuell och procedurell kunskap, samt hur detta påverkar inlärning av strategier och metoder.

[1] Inga referenser har upprepats i avsnittet ”Sammanfattning av tidigare forskning”

Syfte och frågeställning

Syftet med den här studien är att undersöka bakomliggande orsaker, gällande matematiskt tänkande, till en elevgrupps färdigheter och svårigheter inom aritmetik genom att följa upp elevers diagnosresultat med intervjuer. Vi vill finna orsaker till varför eleverna räknar fel vid addition och subtraktion, samt att undersöka vilka strategier elever använder när de löser additions- och subtraktionsuppgifter.

Frågeställningar

- Vilka additions- och subtraktionsmetoder använder sig elever av?
- Är eleven adaptiv i sin lösningsprocess, d v s anpassar eleven beräkningsmetod efter typ av uppgift?
- Behärskar eleven dessa additions- och subtraktionsmetoder?
- Vilka typer av fel gör eleverna?

Metod och tillvägagångssätt

Vi valde att genomföra samtalsintervjuer med eleverna i studien för att få reda på hur de genomförde sina beräkningar och undersöka ifall de hade några matematiksvårigheter. Att genomföra samtalsintervjuer är dock tidskrävande, och för att få intressanta intervjuer behövde vi först välja ut vilka elever vi skulle intervjua. Detta gjordes med hjälp av en matematikdiagnos som prövade elevernas aritmetiska färdigheter, och som baserades på Diamantdiagnoserna (Skolverket, 2009). De elever som uppvisade tecken på aritmetiksvårigheter intervjuades, efter att vi först frågat deras föräldrar om tillåtelse via en hemskickad lapp. Intervjuerna genomfördes för att på ett djupare sätt få insikt i de matematiska orsakerna till elevernas aritmetiksvårigheter. Efter den genomförde studien hoppades vi på att kunna uttala oss om hur eleverna tänker när de löser aritmetikuppgifter, samt beskriva vilka strategier de använder sig av.

Urval

Då tidigare undersökningar rörande aritmetiksvårigheter (Olsson, 2012) har gjorts i naturvetar- och teknikklasser har vi istället lagt lite större fokus på klasser i yrkesförberedande program. Detta för att bidra till en större spridning av de undersökta fallen i populationen och därigenom ge utrymme för en vidare generalisering och tillämpning av resultaten, detta enligt spridningsprincipen (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson & Wängnerud, 2007). Valet att i så stor mån som möjligt undersöka klasser på yrkesförberedande program gjordes tillsammans med vår handledare Per-Olof Bentley, som har bedrivit liknande forskning tidigare. Klasser från barn och fritid-programmet, vård och omsorg-programmet samt naturprogrammet har deltagit i vår studie. Totalt utvaldes fyra klasser till att delta i studien, två från naturprogrammet, en från barn och fritid och en som var en blandning av barn och fritid samt vård och omsorg. Samtliga elever gick i årskurs 1 på gymnasiet. Orsaken till att två klasser från naturprogrammet undersöktes, trots att vi helst ville undersöka klasser från yrkesförberedande program, var att vi på en av skolorna inte få tag på några yrkesförberedande klasser.

Klasserna vi har kommit i kontakt med är knutna till våra respektive VFU-områden. Vårt urval är alltså gjort efter tillgänglighetsprincipen, vad gäller val av skola. Valet av klasserna på skolorna är dock gjorda efter spridningsprincipen, eftersom vi ville intervjua elever från yrkesförberedande program. Tre av klasserna som deltog är klasser som någon av oss har träffat tidigare, men den sista klassen hade vi aldrig träffat tidigare. Eftersom vi är intresserade av vilka räknesvårigheter som finns samt de matematiska orsakerna till dessa, men däremot inte i vilken utsträckning svårigheterna förekommer i olika sociala grupper, är det för oss inte relevant vad eleverna har för sociokulturell bakgrund. Av den anledningen ställde vi inga personliga frågor till eleverna mer än deras namn, och den informationen behövde och använde vi endast för att veta vilka elever som vi senare skulle intervjua.

Ett problem som dök upp rörande urvalet när det var dags att välja ut de elever som vi skulle intervjua var tillståndslapparna (se avsnittet “Etiska hänsyn”). Många elever hade inte med sig lapparna tillbaka till skolan, en del av de elever vi ville intervjua var sjuka eller av annan anledning frånvarande under de lektioner vi hade intervjuer, och en del av eleverna ville helt enkelt inte delta i studien. Till viss del var det så att de elever som hade med sig tillståndslapparna tillbaka var de elever som hade lyckats bäst på diagnosen, och därmed de elever som vi minst ville intervjua. Urvalet av eleverna som intervjuades blev så klart lidande av detta, och när det gäller de frånvarande eleverna vi fick nöja oss med att analysera deras diagnosresultat.

	Diagnoser	Intervjuer
Killar	30	3
Tjejer	65	13
Totalt	95	16

Tabell 1. Könsfördelning i studien.

Diagnos

Grunden till diagnosen utgörs av uppgifter från Diamant (Skolverket 2009), vilken är en samling matematikdiagnoser avsedda för i första hand grundskolans tidigare år. Tanken är att dessa diagnoser ska användas av lärare för att kartlägga hur långt eleverna nått i sin kunskapsutveckling i matematik. Syftet är att diagnoserna ska ge lärare ett underlag för planering av undervisningen för att eleven ska nå uppställda kursmål. Inom matematiken förutsätts det att elever lär sig använda grundläggande matematiska modeller för att senare kunna använda dessa på ett flexibelt sätt i syfte att lösa problem, kommunicera och lära sig mer matematik. Med hjälp av diagnoserna ska läraren kunna se vilka kunskaper eleven behärskar och i vilken utsträckning eleverna lyckats abstrahera de mål som beskrivs i kursplanen. Diamant fokuserar på grundläggande färdigheter och begrepp och vi har valt ut uppgifter ur de diagnoser som behandlar addition och subtraktion.

De 24 uppgifter som utgör diagnosen täcker såväl enklare additioner och subtraktioner som mer invecklade beräkningar. Dessa uppgifter av mer komplicerad karaktär innefattar både tio- och hundratalsövergångar, vilket kan ge extra belastning på arbetsminnet om eleven inte har utvecklat talfakta (Bentley 2008a).

Tillsammans med diagnosen får eleverna ett kladdpapper att ställa upp sina uträkningar på, vilket vi också samlar in. I många fall kan det vara intressant att analysera elevernas tankar under diagnosen, särskilt vid valet av de elever som skulle bli intervjuade. Exempel på detta är att en del av eleverna gjorde helt korrekta uträkningar på sina kladdpapper, men när de sedan skulle skriva svaret på diagnosen råkade de skriva fel, t ex skrev en elev 502 i stället för 205. Även orsaker till räknefelen kan tydliggöras på ett kladdpapper, t ex kan det framgå om ett felaktigt svar beror på talfakta, övergeneraliseringar eller andra orsaker.

Intervju

De elever som visade tecken på aritmetiksvårigheter och som vi bedömde som relevanta respondenter tog vi vidare till intervju. Vi gjorde urvalet genom att analysera antalet fel som eleverna hade på sina diagnoser, samt om det gick att urskönja vad orsaken till felet var. Om svaret tydde på tidigare kända felaktiga strategier, t ex övergeneralisering av "störst först", så räknades felet som mer intressant. I vissa fall hade eleven gjort rätt på kladdpapperet men sedan skrivit av kladdpapperet fel, sådana fel sågs som mindre intressanta. På intervjuerna fick eleven redogöra för sin tankegång samtidigt som de löste av oss utvalda uppgifter från diagnosen. Syftet är att här komma till insikt om den bakomliggande orsaken, gällande matematiskt tänkande, till elevens uppvisade svårigheter. Tidigare forskning (Bentley 2008a) har redan funnit vissa orsaker till de räknefel eleverna gör, men eftersom samtalsintervjuer ger goda möjligheter att registrera oväntade svar (Esaiasson et. al., 2007) hoppas vi på att om möjligt finna ännu fler orsaker.

Under intervjun utgick vi från en intervjuguide som hade som syfte att fungera som stöd för oss. Syftet med detta är att intervjuerna ska behandla i stort sett samma frågor för alla elever, dock så blev intervjuerna lite olika eftersom eleverna har olika beräkningsstrategier som vi ville diskutera med dem. Intervjuguiden, och således intervjuerna, inleddes med några allmänna uppvärmningsfrågor om matematik och elevens inställning till ämnet, med syfte att skapa en god kontakt och stämning mellan intervjuaren och eleven (Esaiasson et. al., 2007). Dessa frågor är endast till för att skapa en bra intervjumiljö, och därigenom för att höja kvaliteten på svaren på de efterföljande frågorna. De innehåll som dessa inledande frågor behandlar är inte något som vi anser vara av intresse i vår studie, och därför analyserades inte elevernas svar på dessa frågor.

Intervjuerna lades upp som halvstrukturerade intervjuer (Lantz, 2007). Efter de inledande frågorna om matematik och provet i allmänhet övergick frågorna till att röra de diagnosuppgifter som eleven inte lyckats svara rätt på. Eleven ombads att räkna igenom dessa uppgifter en gång till, och att samtidigt beskriva hur och varför han gjorde uträkningarna som han gjorde. I vissa fall hade eleverna fel svar på en uppgift men rätt svar på en snarlik uppgift, och i dessa fall ombads eleven att även räkna den uppgift han hade rätt på igen. Detta gjordes för att utreda om uppgifterna var olika svåra för eleven eller om det fanns någon annan orsak till att eleven hade rätt på den ena uppgiften och fel på den andra. Vissa elever använde olika beräkningsstrategier vid olika uppgifter, och de ombads då motivera vad det var som gjorde att de inte använde samma beräkningsstrategier på de bägge uppgifterna. Frågorna hade ibland förslag på svarsalternativ för att förtydliga frågan för eleverna, men i övrigt så hade samtliga frågor öppna svar (jfr Lantz, 2007).

Analys

Målet med studien är att göra en kvalitativ analys av de samtalsintervjuer som vi har genomfört (Esaiasson et. al., 2007; Lantz, 2007). När alla intervjuer var genomförda transkriberades samtliga intervjuer, för att underlätta för den kommande analysen. När de sedan hade transkriberats fullständigt påbörjade vi det första steget av vår analys, nämligen att läsa igenom alla transkriberade intervjuer och behandla den data som var av intresse för vår frågeställning. Intervjuerna sammanfattades och den behandlade datan lyftes fram för vidare analys och fördjupning (jfr Esaisasson et. al., 2007).

Vårt sammanfattade resultat, bestående av val av beräkningsstrategier och typer av räknefel, delades sedan upp i olika kategorier. Dessa kategorier var i de flesta fall redan definierade i tidigare forskning, men i övriga fall skapade vi nya kategorier, vilka vi sedan arbetade vidare med och fördjupade oss i.

En kvantitativ analys av alla diagnoserna gjordes för att motivera vårt urval av elever att intervjua. Denna analys av elevernas prestationer på diagnoserna tabellfördes för vidare analys och presentation i rapporten.

Under analysen togs både uträkningarna, som eleverna gjort på papper under intervjun, i beaktning såväl som deras muntliga förklaringar av tankegångar och tillvägagångssätt. De beräkningar som föreföll vara av intresse jämfördes med tidigare forskningsresultat för att kunna kategoriseras och, i de fall det behövdes, namnges. På så sätt integrerades tidigare forskning med de resultat vi erhållit.

Etiska hänsyn

En del av de elever som vi delade ut diagnosen till och sedan intervjuade var minderåriga, och då var det nödvändigt att fundera på den etiska aspekten som finns närvarande när man gör en undersökning. Vetenskapsrådet (2002) anser att det finns fyra huvudkrav, varav samtyckeskravet innebär att

> Forskaren skall inhämta uppgiftslämnares och undersökningsdeltagares samtycke. I vissa fall bör samtycke dessutom inhämtas från förälder/vårdnadshavare (t.ex. om de undersökta är under 15 år och undersökningen är av etiskt känslig karaktär). (Vetenskapsrådet 2002, s. 9)

Eftersom vi intervjuade elever om de beräkningsstrategier de har, och vårt urval grundar sig på de fel eleverna har gjort på en diagnos, så skulle vissa elever eller vårdnadshavare kunna uppfatta detta som känsligt. Därför gjorde vi bedömningen att det bästa vore att dela ut lappar som föräldrarna kunde meddela sitt samtycke på, som eleven sedan behövde ta med tillbaka till skolan för att bli intervjuad. De elever som var över 18 år behövde inte få föräldrars samtycke då de är myndiga och kan bestämma över sig själva.

De tre övriga krav som Vetenskapsrådet (2002) föreslår är informationskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Informationskravet innebär att eleverna ska veta att det är frivilligt att delta, och att vi som genomförde studien informerade eleverna om deras uppgift i studien. Konfidentialitetskravet innebär främst att eleverna ska förbli anonyma och att inga obehöriga ska få reda på elevernas personuppgifter. Det sista kravet, nyttjandekravet, innebär att insamlade uppgifter om enskilda personer endast får användas för forskning. Alla dessa tre krav har följts i vår studie, de namn som används i resultatet är inte elevernas riktiga namn.

Vi analyserade även resultat från de diagnoser som eleverna gjorde, även diagnoserna från de elever som vi inte intervjuade. Diagnosen gjordes av samtliga elever, och vi gjorde bedömningen att den inte är av samma etiskt känsliga karaktär som intervjuerna, där eleverna valdes ut p g a sina inkorrekta svar. Av den anledningen beslutade vi att inte kräva föräldrarnas tillstånd för att göra en analys av alla diagnoserna.

Validitet, reliabilitet och generaliserbarhet

Reliabiliteten i en studie är ett mått på kvaliteten på själva mätinstrumentet som man använder (Stukát, 2011). En hög reliabilitet innebär också frånvaro av slumpmässiga fel (Esaiasson et. al., 2007). Vid kvalitativa studier kan reliabiliteten uppskattas med hjälp av hur väl olika bedömare är överens om en viss bedömning (Stukát, 2011). Vid intervjuer innebär en hög reliabilitet att intervjusituationen ska vara avslappnad och att intervjuaren inte ställer ledande frågor (Bentley, 2008a). När det gäller diagnosen innebär en hög reliabilitet att noggrannheten vid diagnosens genomförande ska vara stor.

Validiteten för en studie är ett mått på hur väl man mäter det som man påstår sig mäta (Esaiasson et. al., 2007; Stukát, 2011). När man studerar någonting empiriskt måste teorin knytas ihop med praktiken, vilket innebär att de teoretiska begreppen måste översättas till operationella indikatorer (Esaiasson et. al., 2007). Hur väl de operationella indikatorerna överensstämmer med de teoretiska begreppen kallas för begreppsvaliditet.

Generaliserbarheten, som också kan kallas extern validitet (Esaiasson et. al., 2007), handlar om hur väl studiens resultat från det urval man har gjort kan överföras på populationen i stort. Till viss del kan man också diskutera om studiens resultat kan generaliseras till grupper utanför den utvalda populationen (Esaiasson et. al., 2007).

Resultat

Kategorisering av räknefelen

I uträkningarna till diagnoserna samt under intervjuerna har vi kunnat urskilja ett antal olika fel som eleverna gör. Vi har kategoriserat dessa utifrån redan kända typer av räknefel.

Talfakta

Talfakta innebär att eleven inte har utvecklat grundläggande kunskaper om talen, eller vissa tal, och deras egenskaper. Dessa egenskaper lagras i långtidsminnet för att minska belastningen på korttidsminnet under beräkningar. Fingerräkning, då den förekommit, har även kategoriserats som talfakta eftersom det kan ses som en konsekvens av densamma. Brist på talfakta medför att eleven tar hjälp av fingrarna för att utföra enklare beräkningar, såsom 9 - 6.

Plus-minus-ett-felet

Detta är ett räknefel som har sin grund i att eleven vid additioner och subtraktioner använder sig av stegvis beräkning eller komplettering men tar fel på var eleven ska börja räkna stegen. Detta resulterar i ett felaktigt svar som antingen är ett större eller ett mindre än det korrekta.

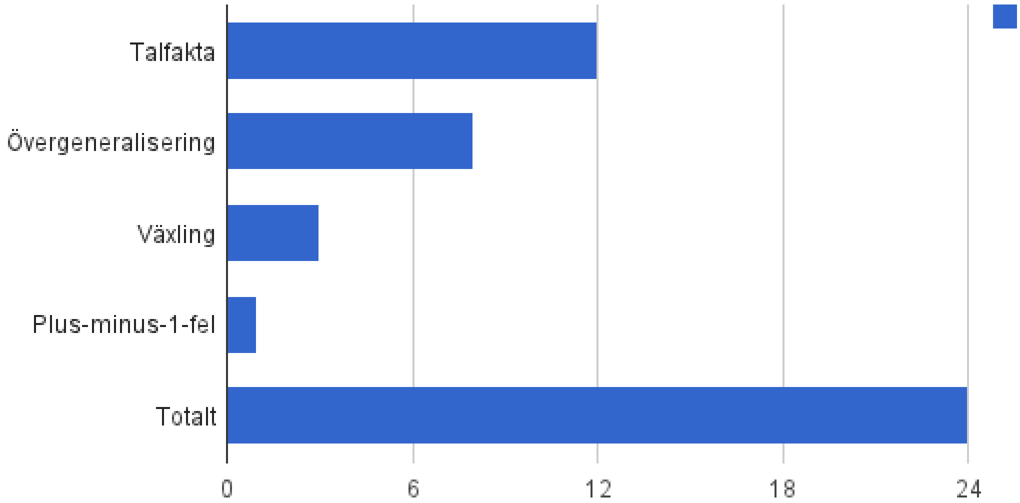
Övergeneralisering

Detta är en ganska bred kategori som innefattar olika typer av övergeneraliseringar som eleven gjort. Vid subtraktion kan störst-först förekomma, som innebär att eleven konsekvent tar och subtraherar det mindre talet från det större. Vid uppställning kan störst-först även förekomma genom att eleven talsortsvis beräknar differenserna med störst tal först, oberoende av vilket som står överst i uppställningen.

Övergeneraliseringar innefattar även de situationer då elever konstruerat egna regler för hur olika algoritmer används. Vissa elever som använt sig av talsortsvis beräkning har trott att eftersom de vid addition adderar de talsortsvis beräknade summorna subtraherar dessa vid subtraktioner.

Växling

När eleverna använder sig av standardalgoritmen, såväl vid addition som vid subtraktion, får de ofta problem då växling krävs. Likadant får eleverna problem med talsortsvis beräkning då växling krävs, vilket därför placerar dessa beräkningar i denna kategori.



Figur 4. Antal intervjuade elever per typ av fel.

Lösningsmetoder

Den lösningsmetod som, efter analys av intervjuerna, förekommer oftast bland eleverna är talsortsvis beräkning. Denna metod används både vid addition och subtraktion, med varierande framgång. Vid addition verkar inte eleverna ha några problem med att använda metoden, medan metoden skapar problem för vissa elever vid subtraktion.

Karin visar här på att hon är fullt medveten om att metoden hon väljer för den här uppgiften är densamma som hon använt vid tidigare uppgifter och beskriver sitt val och hur hon gör på det här sättet: “Då hade jag gjort min sån här metod som jag gjorde i början igen. Att jag tar 7 + 5 som är 12, eh sen 4 + 2 som är 6, plus 1 då, som är 7, eh och sen 2 + 3 som är 5, 572.” Karin visar också på att hon använder en viss metod även om beräkningen sker i huvudet och inte med hjälp av papper och penna: “Fast den tar jag egentligen mest i hjärnan kanske, det går väldigt snabbt på det.”

Standardalgoritmen används också bland de intervjuade eleverna, och de flesta eleverna som använt metoden har inga svårigheter med denna gällande addition. Vid subtraktion uppstod dock en del osäkerhet och felberäkningar för vissa elever. Det verkar som att dessa elever får problem med standardalgoritmen vid de uppgifter som kräver växling.

När eleverna väljer att använda standardalgoritmen har det oftast sin grund i att eleven känner sig säkrare på att svaret blir rätt eller i att eleven känner sig bekvämare med den metoden än andra. Olivia beskriver sitt val av metod så här: “Jag skulle ju kunna räkna ut först hundratalen, sen tiotalen, men jag tror ändå jag använder uppställning bara för att det är mer säkert.”, medan Karin beskriver sitt val på det här sättet: “Ah, den hade jag nog ställt upp eftersom det är så här 5 - 8, så hade jag nog ställt upp den för jag känner att det går snabbare typ.” Diana motiverar sitt val av metod så här: “Men jag ställer mest upp egentligen såhär, större tal egentligen, som jag är mer osäker på.”

Det fanns också elever som inte använde sig av standardalgoritmen överhuvudtaget, eftersom de kände att de inte behärskade standardalgortimen. Ida beskriver sin anledning till att inte använda sig av standardalgoritmen på det här sättet: "Alltså jag är så dålig på att ställa upp, jag kommer inte ihåg hur man gör." Maria beskriver det så här, när hon blev ombedd att försöka då hon själv föreslagit att uppgifterna även kan lösas med standardalgoritmen: "Nej, jag kommer inte ens ihåg hur man gör." Frida motiverar sitt val på det här sättet: "Det blir bara fel om jag gör en uppställning ändå."

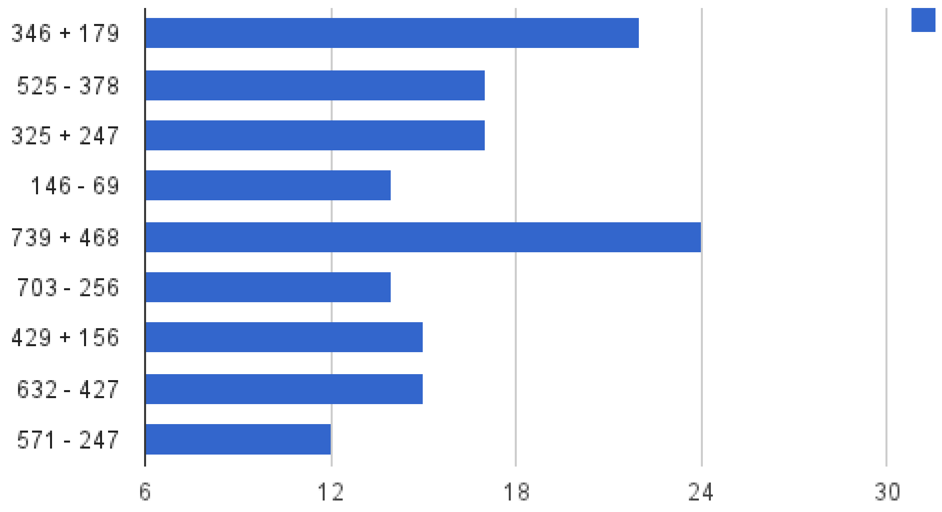
Kompensationsberäkning används också av en del elever. Denna metod förekommer mestadels vid mindre tal där termerna består av tvåsiffriga tal respektive ensiffriga tal. Metoden används av eleverna både vid addition och vid subtraktion. En del elever använder endast metoden vid addition och en del elever endast vid subtraktion, medan en elev använder metoden både vid addition och vid subtraktion och dessutom oberoende av hur stora talen är. Niklas beskriver hur han använder sig av kompensationsberäkning på det här sättet: "Jag ville försöka få 500 till, 525 då till 500, så då tog jag minus 25 och så gjorde jag samma sak på 378. Så blev det 353, så då bara tänkte jag. Hur mycket behöver jag lägga till för att 353 ska bli 500."

Stegvis beräkning förekommer också en del, men oftast där termerna inte skiljer sig så mycket från varandra, exempelvis 51 - 49. Detta kallas också för att komplettera (Löwing, 2007), när eleverna räknar från delen upp till det hela. En del elever använder också denna metod när de är osäkra på om de räknat rätt från början. Anna beskriver en subtraktion med två närliggande tal som en addition, d v s en komplettering: "Jag vände liksom på det, så det blev plus istället för minus, plus är ändå lättare än minus." Fem av de 16 intervjuade eleverna använder sig också av fingerräkning när de är osäkra på om de räknat rätt, men fingerräkning förekommer också, av samma elever, i de fall då det inte uppstått någon osäkerhet.

En del av eleverna använder också olika metoder beroende på vilken operation som ska utföras och vilka siffror som ingår i talen. En elev använder sig exempelvis av talsortvis beräkning vid addition och standardalgoritmen vid subtraktion. En elev använde sig exempelvis istället kompensationsberäkning vid addition och standardalgoritmen vid subtraktion.

Uppgifter som skapade svårigheter

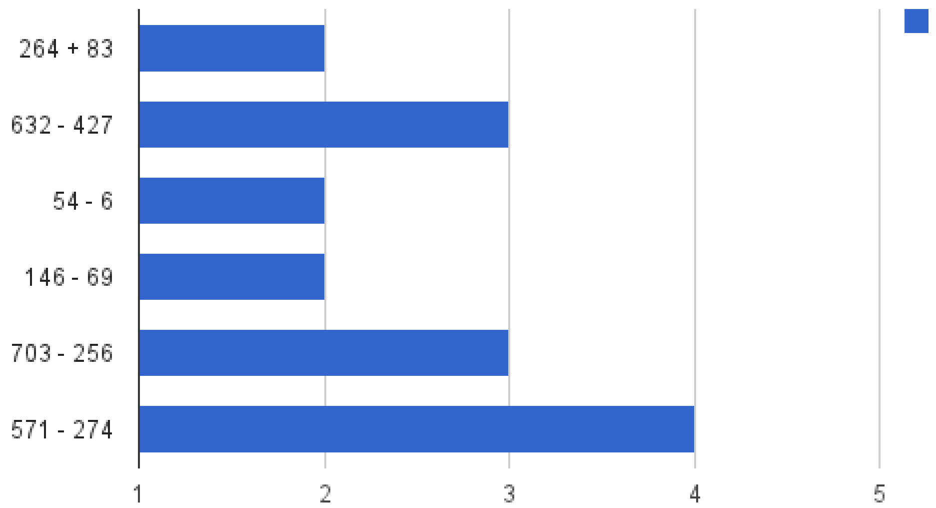
Vid analys av de 95 diagnoserna upptäcktes att det bara var två uppgifter som alla elever hade svarat rätt på. Dessa var 7 + 65 och 6 + 78. Resterande uppgifter var det åtminstone en elev som hade angett ett inkorrekt svar på. Följande tabell visar vilka uppgifter som flest elever svarat fel på.



Figur 5. Antal elever som svarat fel på respektive uppgift.

I figuren ovan (se figur 5) kan man se att de subtraktionsuppgifter som flest elever svarat fel på är uppgifter där det krävs växling antingen vid endast entalen eller både vid ental och vid tiotal. De uppgifter som allra flest elever svarat fel på är dock additionsuppgifter. Gemensamt för dessa är att summan för entalen överstiger talet 10.

Det var även 7 elever som inte hade angett något svar på åtminstone en av de 24 uppgifterna som var med på diagnosen. Totalt var det 15 uppgifter som åtminstone en elev inte svarat på. Tabellen nedan illustrerar vilka uppgifter som flest elever inte svarat på.



Figur 6. Antal elever som ej svarat på respektive uppgift.

Svårigheter med liknande uppgifter

Vi har även under intervjuerna och diagnoserna sett att elever i vissa fall klarar en typ av uppgift, men räknar fel på en annan av liknande karaktär. En av respondenterna, Frida, har i diagnosen beräknat 91 - 89 korrekt, men erhållit 77 som differens vid 81 - 3. Under intervjun har hon sedan utan någon som helst svårighet löst 81 - 3 genom kompensationsberäkning. Om hon använt sig av en annan strategi under diagnosen går ej att avgöra då hon utelämnat uträkning och endast skrivit svar.

Under intervjun med Cecilia visar hon på liknande tendenser. 91 - 89 = 18 står att finna på diagnosen, men under intervjun ser hon direkt att det är ett felaktigt svar men kunde ändå inte beräkna den korrekta differensen. Cecilia gavs sedan liknande uppgifter, 51 - 49 samt 21 - 19, men kunde heller inte lösa dessa. Däremot löste hon 11 - 9 utan problem. Hon visar alltså goda talfaktakunskaper för talen åtminstone upp till 11, men har svårigheter för större tal.

Det har även visat sig att vissa elever uppvisat detta fenomen på samma uppgift, fast vid olika tillfällen. I fallen Karin, Olivia och Patrik har samtliga inte klarat lösa vissa uppgifter på diagnosen, men under intervjun löst dessa utan problem. I några av fallen handlar det om att eleverna har räknat med fel operation. I tabellen nedan visas de aktuella uppgifterna för respektive elev.

Uppgift (Rätt svar)	Kommentar
325 + 247 = 573 (572)	5 + 7 = 12, talfakta
525 - 378 = 197 (147)	
146 - 69 = 67 (77)	13 – 6 = 6, talfakta
72 - 8 = 54 (64)	

Tabell 2. Patriks uppgifter.

Uppgift (Rätt svar)	Kommentar
325 + 247 = 78 (572)	Bytt operation
75 + 8 = 93 (83)	
146 - 69 = 75 (77)	
739 + 468 = 1261 (1207)	

Tabell 3. Olivias uppgifter.

Uppgift (Rätt svar)	Kommentar
325 + 247 = 573 (572)	
525 - 378 = 247 (147)	
429 + 156 = 273 (585)	Bytt operation
63 + 8 = 55 (71)	Bytt operation
739 + 468 = 271 (1207)	Bytt operation

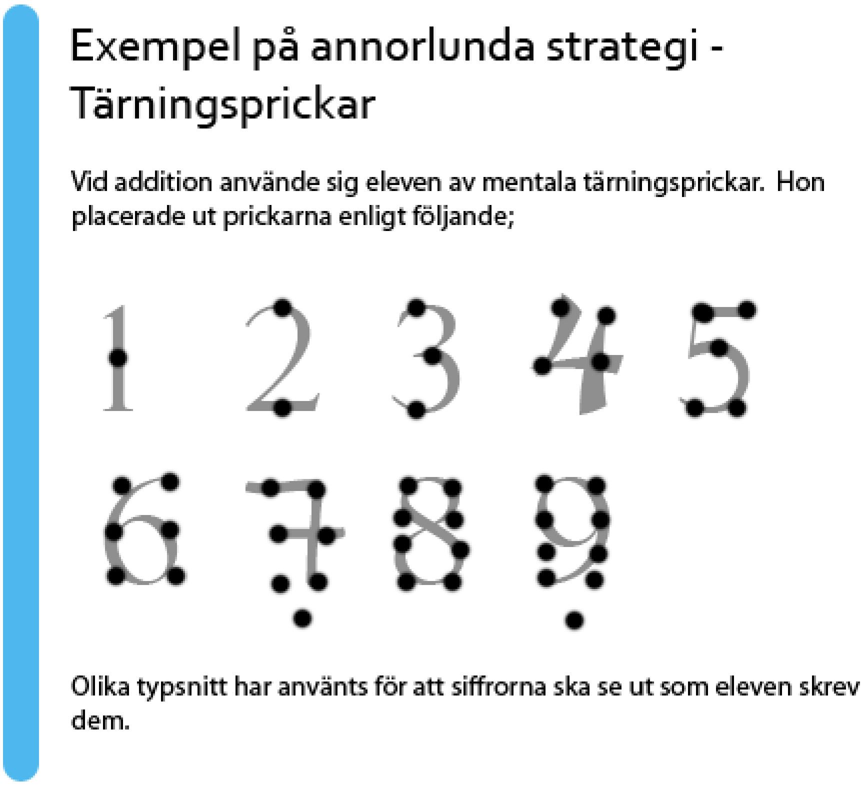
Tabell 4. Karins uppgifter.

Annorlunda beräkningsstrategier

Under intervjuerna har vi stött på många olika metoder som eleverna använt sig av för att lösa uppgifterna. Beräkningsstrategierna har varierat mellan elever och uppgifter. Vissa använder sig t ex konsekvent av standardalgoritmen både vid addition och subtraktion oberoende av uppgift, samtidigt som vissa elever är mer flexibla och väljer beräkningsstrategi utefter typ av uppgift. Det har dock visat sig att vissa elever ibland använder sig av egenkonstruerade beräkningsmetoder, av olika komplexitet, med varierat resultat. Dessa har vi gjort en närmare studie av och presenteras nedan.

Tärningsprickar

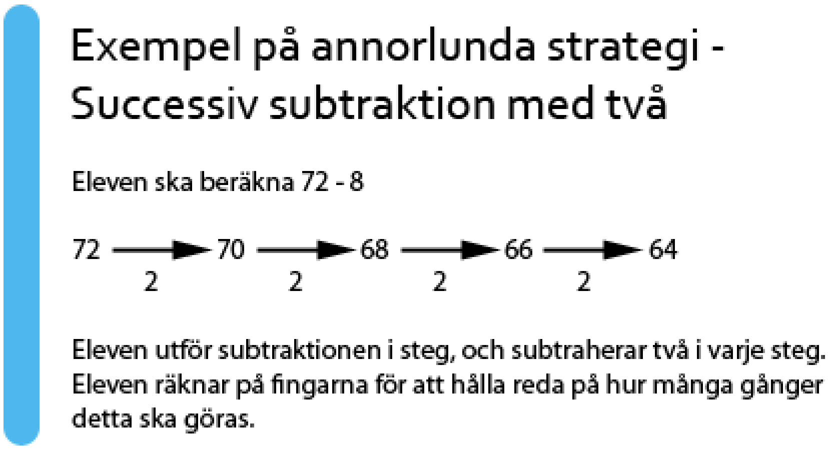
En av eleverna som intervjuades, Bianca, använder sig av en egenkonstruerad strategi för att addera tal med termer upp till och med 9. När Bianca skulle addera två tal, t ex 3 + 6, så tryckte hon på trean 3 gånger och sexan 6 gånger med sin penna. Varje penntryckning skedde på olika ställen på talet. Bianca förklarade det med att hon, vid additioner med termer upp till och med 9, såg prickar på talen likt prickarna på en tärning. För varje tal upp till 9 hade hon ett mönster med prickar som hon räknade (se figur 7). När hon adderade talen och tryckte med pennan så räknade hon genom att säga talen tyst för sig själv, och kom på så sätt fram till svaret genom uppräkning från början.



Figur 7. Exempel på annorlunda beräkningsstrategi.

Successiv subtraktion med två

När Hanna under intervjun skulle beräkna 72 - 8 använde hon sig av en egenkonstruerad beräkningsstrategi, nämligen att successivt ta bort två från minuenden. (Vid subtraktion kallas termerna minuend respektive subtrahend. Minuenden är den positiva termen och subtrahenden den negativa.) Hon kombinerar detta med att räkna på fingrarna för att hålla reda på hur mycket hon subtraherat. Denna metod kräver först och främst en subtrahend som är jämn, samt att hon först utfört divisionen för att veta hur många tvåor som går i subtrahenden. Det är som synes en väldigt komplicerad metod för att utföra en såpass enkel subtraktion och visar på tydliga brister i talfakta, då hon inte känner igen mönstret från 12 - 8, vilket borde finnas i långtidsminnet.



Figur 8. Exempel på annorlunda beräkningsstrategi.

Variant av talsortsvis beräkning

När Erik ska beräkna uppgiften 146 - 69 använder han sig av en variant av talsortsvis beräkning. Istället för att subtrahera hundratalen, tiotalen och entalen för sig, beräknar han först 140 - 60. Erik beskriver sin egen tankegång så här: “Då tar jag 140 - 60. Det blir 80, eller hur. Så tar jag 6 - 9, då går det under. Det blir 86. Då tar jag sexan hit till åttan. Då blir det 86 - 9.” Erik använder sig av ytterligare en variant av talsortsvis beräkning när han löser uppgiften 525 - 378. Han börjar då med att beräkna 500 - 300 vilket han får till 200. När han sedan ska beräkna de återstående delarna tar han tiotalen och entalen samtidigt, 25 - 78, men ändrar sig snabbt till 78 - 25. Störst först-generalisering återkommer under intervjun och verkar vara ett djupt rotat problem för honom. 78 - 25 får han korrekt till 53 och adderar slutligen 200 och 53 och svarar 253.

Diskussion

Det centrala i resultatet

I vår studie har vi funnit 3 (Karin, Olivia och Patrik) fall där elever klarar att lösa en uppgift vid ett tillfälle, men svarar fel på samma uppgift vid ett annat. (Dessa fall utgörs enbart av elever vi intervjuat då de är de enda vi gett chansen att svara på samma fråga två gånger.) I vissa av fallen handlade det om att eleven använt fel operation (addition istället för subtraktion och vice versa). I de fall det inte handlar om operationsbyte kan inte vår studie visa på någon orsak. I och med att vissa elever uppvisar detta fenomen får det konsekvenser för både vår studie och tidigare studier med liknande metod, då det utifrån vårt resultat inte behöver vara ett säkert sätt att mäta elevers kunskaper inom aritmetik med hjälp av diagnoser.

Vi har även i vår studie funnit mycket intressanta fall där elever beskrivit sina beräkningsstrategier när de löst uppgifter under intervjuerna, vilka i vissa fall varit egenkonstruerade eller modifierade redan existerande metoder. I de fall eleverna modifierat tidigare kända metoder, såsom standardalgoritmen och talsortsvis beräkning, har det i de flesta fallen resulterat i felberäkningar från elevens sida. Som vi sett i resultatet är övergeneralisering av algoritmer och metoder en frekvent orsak till felberäkningar bland de elever vi intervjuat och det bör därför anses viktigt att uppmärksamma för matematiklärare. Varför elever modifierar en redan inlärd algoritm eller metod kan ha sin grund i flera orsaker, men vårt resultat tyder på att det bottnar i en osäkerhet med algoritmen. Detta leder i sin tur till att fall som de vårt resultat beskriver, t ex störst först-fenomenet, uppenbarar sig.

Resultatet av vår studie visar också på att det, bland de intervjuade eleverna, oftast är talfakta som resulterar i många felaktiga uträkningar. Då vi inför intervjun har valt ut de elever som vi anser är av intresse att intervjua är det inte så konstigt att de i så stor utsträckning har brist på talfakta. Det som är intressant är att talfakta har en så pass avgörande roll i elevernas beräkningar. Har eleven inte lagrat talfakta i långtidsminnet belastas istället arbetsminnet, som tidigare beskrivits, vilket i sin tur leder till ökad felfrekvens hos eleven.

Vi har också i vår studie sett prov på intressanta och mycket kreativa beräkningsstrategier som eleverna själva utvecklat. I de fall vi observerat under intervjuerna har detta varit ett resultat av att eleverna inte till fullo behärskat de konventionella metoderna, varför de sökt andra sätt att genomföra uträkningarna. Dessa metoder har också visat sig framgångsrika för de elever som använt dem, men har varit än mer komplexa och omfattande än de metoder som lärs ut i skolan. De egenkomponerade beräkningsstrategierna kan även i vissa fall ha varit en konsekvens av brist på talfakta som i fallet "Successiv subtraktion med två".

Studiens begränsningar

I vår studie använde vi oss av en diagnos som mätinstrument, denna diagnos är konstruerad med hjälp av uppgifter hämtade från Diamant-diagnoserna (Skolverket, 2009). Diamantdiagnoserna är det senaste stora diagnosmaterial som Skolverket har tagit fram, något som motiverar uppgifternas kvalitet och höjer vår studies reliabilitet. Vi har dock inte använt en av deras diagnoser rakt av, utan vi har gjort ett urval av uppgifter som passar vårt syfte från två olika diamantdiagnoser, något som skulle kunna påverka reliabiliteten negativt. Intervjuerna vi genomförde inleddes med allmänna frågor om matematik för att skapa en avslappnad intervjumiljö, för att på så sätt höja studiens reliabilitet (Bentley, 2008a). När vi kom till analysstadiet så läste vi igenom varandras transkriberingar, för att på så sätt se ifall vi kommer till samma analytiska slutsatser. När vi analyserar varandras intervjuer och vi kommer fram till samma slutsatser så höjs reliabiliteten enligt medbedömarkriteriet (Stukát, 2011).

Vi vill i vår studie mäta de fel som eleverna gjorde på en diagnos, för att sedan intervjua dem om varför de gjorde de felen. Vi ville fånga upp de elever som hade svårigheter med aritmetik, och vi menar att flera fel på diagnosen tyder på detta. När det gäller diagnosen är syftet att mäta antalet fel, vi utgick då från facit till diagnosen för enkelt sammanställa antalet fel. I detta fall anser vi att validiteten är hög; att se om svaret på en uppgift är rätt eller fel är precis det vi vill mäta på diagnosen. Frågan som kvarstår är då ifall fel på vår diagnos tyder på aritmetiksvårigheter. För att höja validiteten så analyserades elevernas svar, d v s att alla felaktiga svar inte var jämlika. Genom att analysera felen på detta sätt menar vi att validiteten på diagnosen höjdes.

Syftet med intervjuerna var att mäta vad orsakerna till elevernas fel var. Vi nöjde oss här inte med att fråga eleverna varför de trodde att de blev fel, utan vi bad dem att räkna uppgifterna igen och tänka högt hela tiden när de gjorde detta. Genom att vi själva analyserade elevernas uträkningar från intervjun, och inte bara lät eleverna själva säga varför de trodde att de hade fel, höjdes studiens validitet (Esaiasson et. al., 2007).

Några omständigheter under studien påverkade den dock negativt. Alla eleverna ville inte delta i studien, tyvärr gällde det med högre frekvens bland de elever som vi såg som mest intressanta. Vi hade också begränsat med tid under vår studie till att genomföra intervjuerna på grund av att vi inte fick störa den vanliga undervisningen alltför mycket, och en del av de elever vi ville intervjua var frånvarande under de lektioner som vi genomförde intervjuerna. Vårt mål var att undersöka orsaken till svenska elevers svårigheter i aritmetik, och särskilt undersöka en tidigare ej undersökt grupp elever (jfr Olsson, 2012). Ett idealt urval för att maximera generaliserbarheten, hade varit att i stället för att välja ut elever från 4 olika klasser välja ut elever från ett stort antal klasser i hela Sverige. De praktiska omständigheterna tillåter oss tyvärr inte att göra ett sådant urval. Något som däremot talar för en ökad generaliserbarhet är att de kunskaper som vi är intresserade av, aritmetiska färdigheter, är sådant som främst undervisas i de lägre årskurserna i grundskolan. Genom att intervjua elever i gymnasiet lyckas vi fånga in elever med ett stort antal olika grundskolelärare, trots att vi bara intervjuat elever från fyra olika klasser.

I studien har det visat sig att några elever räknar rätt vid ett tillfälle, men får fram ett inkorrekt svar vid ett annat trots att uppgifterna är de samma. Med anledning av detta anser vi att diagnos som metod inte fångar upp alla elever som har aritmetiksvårigheter. Detta kan innebära att en del elever säkert hade varit intressanta att intervjua, men att det inte går att få reda på vilka dessa är med bara en diagnos.

Relation till tidigare forskning

I vår studie har många av de företeelser som tidigare tagits upp i forskningen kring matematiksvårigheter bekräftats. Vi har också fått fram resultat som troligtvis inte tidigare beskrivits i någon forskning.

I resultatet har vi kategoriserat de fel de intervjuade eleverna har gjort. De kategorier vi använt oss av är *talfakta*, *plus-minus-ett-felet* och *övergeneralisering*. Talfakta var det några elever som visade avsaknad av. Brist på talfakta gör att eleverna inte ser svaret på exempelvis enkla additioner, något som Löwing (2008) menar att eleverna bör kunna göra. Några elever visade på plus-minus-ett-felet, där eleverna får ett svar som är ett större eller ett mindre än det korrekta svaret. Anledningen till varför dessa elever får ett inkorrekt svar kan vara att de har en felaktig strategi gällande *från och med delen och till och med det hela* (Olsson, 2012). Vårt resultat beskriver att några av eleverna som intervjuats övergeneraliserar olika metoder, vilket också har beskrivits av Bentley (2009). En övergeneralisering av talsortsvis beräkning som förekommit vid subtraktion är att alla de differenser som räknats ut ska subtraheras på samma sätt som vid addition, där alla summorna adderas.

De lösningsmetoder som eleverna använt har i enlighet med tidigare forskning (Bentley, 2008a) delats in i kategorierna: *talsortsvis beräkning*, *standardalgoritmen*, *kompensationsberäkning* och *stegvis beräkning*. En del av de elever som har intervjuats hade problem med att beräkna uppgifter med talsortsvis beräkning där växling förekom. Bentley (2008a) har i en av sina studier pekat på just detta. Eleverna i vår studie som hade svårigheter med detta övergeneraliserade ofta principen "störst först" och subtraherade således den minsta termen från den största oavsett i vilken ordning termerna stod från början. Vissa av eleverna i vår studie använder sig av standardalgoritmen när de ska lösa uppgifterna, men några av eleverna som valt att använda den metoden behärskade inte riktigt proceduren och fick således fram ett inkorrekt svar. Detta har också visat sig i en studie av Bentley (2008a). I och med att eleverna inte behärskar proceduren innebär det att det finns luckor i den konceptuella kunskapen, då konceptuell kunskap ses som en samling av procedurer och begrepp (Bentley, 2008b; 2009).

Eleverna som intervjuats använde sig av stegvis beräkning då termerna vid subtraktion inte skiljer sig så mycket åt. Det var också några elever som använde sig av fingerräkning, vilket kan vara ett tecken på att eleverna har matematiksvårigheter. Detta är också något som Lunde (2011) tar upp, och att eleverna använder sig av en primitiv strategi för beräkning tyder på att eleverna inte har utvecklat talfakta, d v s eleverna använder sig inte av retrievalstrategier utan backupstrategier.

Analysen av intervjuerna visade också på beräkningsstrategier som troligtvis inte finns beskrivna i någon tidigare forskning. Dessa var *tärningsprickar*, *successiv subtraktion med två* och *variant av talsortsvis beräkning*. Successiv subtraktion med två är dock en form av kompensationsberäkning, där eleven delar upp subtrahenden i flera delar och subtraherar delarna successivt hela tiden. Bentley (2008a) beskriver också kompensationsberäkning som en beräkning i delar.

Enligt vårt resultat var det några uppgifter som flera elever hade svårt att lösa. Vid analys av uppgifterna fann vi att subtraktionsuppgifterna var av en karaktär där det krävdes växling vid antingen endast entalen eller vid både ental och tiotal. Enligt tidigare forskning (Bentley 2008a) har en del svenska elever i viss mån svårigheter med att använda metoden talsortvis beräkning när det förekommer växling. Detta kan tyda på att de elever som använder sig av talsortsvis beräkning lyckas sämre än de elever som använder sig av andra metoder, vilket också Foxman (2001) menar. Men några av de elever som intervjuats i vår studie visade också på vissa svårigheter med att använda standardalgoritmen vid subtraktion med växling. Detta kan också vara en orsak till att många elever svarade fel på just denna typ av uppgifter.

Vi har också funnit att några av de intervjuade eleverna räknar rätt på en typ av uppgift i vissa fall, men i andra fall får eleverna ut ett inkorrekt svar. En av eleverna, Frida, visar på att hon kan ha svårigheter med att välja vilken strategi hon ska använda vid beräkning av uppgifterna, men det är inget som direkt går att utläsa från våra data. Detta är dock en möjlig orsak till att elever svarar rätt vid ett tillfälle och inkorrekt vid ett annat, vilket också Bentley (2008a) menar. Det kan vara på så vis att eleven saknar någon eller några av de grundläggande kompetenserna, som exempelvis talfakta, och därmed inte utvecklat en god strategi för att välja metod vid uträkningarna, något som också Lester (2007) menar. Den andra eleven, Cecilia, visar istället på avsaknad av talfakta vid större tal och vid användning av standardalgoritmen behärskar hon inte alltid växling. Om dessa två företeelser hör ihop eller inte är svårt att säga, men om en elev inte utvecklat talfakta ordentligt kan det, för eleven, uppstå svårigheter vid mer avancerade matematiska operationer, vilket även Bentley (2008a) menar. De andra eleverna har under diagnosen räknat fel på ett antal uppgifter, men under intervjun hade de inga problem med att utföra beräkningarna. Vad detta beror på är dock inget som går att svara på med det data som finns i denna studie, men även här kan en anledning till att elever får olika svar vid olika tillfällen vara att de inte vet vilken strategi de ska använda sig av (Bentley, 2008a).

Resultatet i relation till syftet

Ett av våra syften med studien var att undersöka de bakomliggande orsakerna, gällande matematiskt tänkande, till de färdigheter och svårigheter med aritmetik som eleverna i urvalsgruppen hade och vi har erhållit resultat som pekar på att talfakta och övergeneralisering är de störst bidragande orsakerna till dessa elevers svårigheter med aritmetik. Att just talfakta är en så pass utbredd orsak till elevernas felsvar har flera orsaker. Först och främst har vi valt ut elever som i diagnosen visat på fel som vi ansett vara av intresse för vår studie. Dessa fel har bland annat varit av enklare karaktär, t ex 81 - 79, vilka har tendens att ge indikationer på talfaktafel då eleverna bland annat använt sig av fingerräkning. I och med detta urval har vi i resultatet sett en högre frekvens av talfaktafel än vad som möjligen skulle vara rimligt och vi kan därför heller inte dra några egentliga slutsatser om detsamma. En annan orsak till varför talfaktafelet är såpass utbrett kan vara att det faktiskt kan förekomma i alla situationer, oavsett beräkningsstrategi. Det spelar ingen roll om eleven behärskar strategierna till fullo om de saknar talfakta, då detta i sin tur är en bidragande orsak till felsvar.

Eleverna i undersökningen har under intervjuerna och diagnoserna visat prov på många olika additions- och subtraktionsmetoder och även i vissa fall egenkonstruerade metoder. Det har i studien visat att den beräkningsalgoritm som är mest frekvent bland eleverna i vår urvalsgrupp är talsortsvis beräkning. Denna metod har i många av fallen använts oberoende av uppgift vilket visar på att dessa elever antingen inte känner att de behärskar andra metoder lika bra, eller att de saknar förmåga att variera lösningsmetod efter typ av uppgift. Denna beräkningsstrategi har av många elever övergeneraliserats vid subtraktion. Vid såväl addition som subtraktion gäller att de summor och/eller differenser som beräknats talsortsvis adderas till den slutgiltiga summan/differensen. Vi har dock sett att vissa elever i studien (se intervjuer med Ida, Lisa och Maria) tror att det endast vid addition gäller att man adderar och att man istället subtraherar de talsortsvis beräknade termerna vid subtraktion.

Exempel på övergeneralisering - Samma räknesätt i slutet

När Lisa ska beräkna 632 - 427 så använder hon talsortsvis beräkning på följande sätt.

600 - 400 = 200
30 - 20 = 10
7 - 2 = 5 (Här har hon räknat "störst först", ska egentligen vara 2 - 7)

Vid addition summerar man ihop alla tal man har fått i slutet, och det gör man också vid subtraktion. Lisa använder sig dock av subtraktion i stället, och börjar med de största talet (i det här fallet hundratalet) i en subtraktion.

200 - 10 - 5 = 185

Figur 9. Exempel på övergeneralisering.

I de flesta fall då eleverna använt sig av egna lösningsmetoder har de lyckats lösa uppgifterna fullständigt, dessa har dock visat sig vara mer komplicerade än de vanliga metoder som används i skolan. Erik som har räknat med sin egna variant av talsortsvis beräkning, har använt störst först-generaliseringen och därför erhållit fel svar. Flera elever som använt sig av redan existerande metoder och själva dragit slutsatser om hur de används har inte haft samma framgång. Övergeneralisering av beräkningsstrategier har varit en bidragande orsak till de konsekventa fel som eleverna i studien gjort. Det har vi sett prov på bland annat i intervjuerna med Ida, Lisa, Maria och Cecilia. De har alla övergeneraliserat en beräkningsstrategi och därigenom erhållit fel svar på uppgiften.

Ser vi till de resultat vi ovan diskuterat och vad som framkommit under intervjuerna visar eleverna i studien på en medvetenhet om att olika beräkningsstrategier lämpar sig olika bra till olika uppgifter. Det verkar dock vara så att de har en metod som de känner att de behärskar och använder denna i de fall de inte behärskar någon metod som lämpar sig bättre. Under intervjun med Diana har det visat sig att hon under diagnosen i stort sett genomgående använt sig av standardalgoritmen för att utföra beräkningarna, även i de fall andra metoder vore bättre lämpade. Hon hade alla rätt på sin diagnos och säger själv att hon föredrar att använda sig av standardalgoritmen då hon känner sig säkrare med den och annars riskerar att göra slarvfel. När vi interjvuar Cecilia säger hon sig använda främst talsortsvis beräkning vilket hon gör i huvudet, utan hjälp av papper och penna. Denna metod lyckas hon i stora drag bra med, hon har endast tre fel på diagnosen, men har dock lämnat sex frågor obesvarade. När hon under intervjun använder sig av standardalgoritmen för att beräkna 739 + 468 tycks hon inte tillåta ett fyrsiffrigt svar och väljer att svara 127, istället för det korrekta 1207. Likadant säger sig Anna använda sig av standardalgoritmen i de flesta fall, då hon känner sig mest bekväm med den. Vi ser alltså återigen prov på hur dessa intervjuade elever känner en större trygghet i en enstaka beräkningsstrategi och väljer att använda den i de flesta fallen. Detta tyder på att dessa elever är medvetna om att det finns olika metoder lämpade för olika typer av uppgifter men har såpass undermåliga färdigheter gällande dessa metoder att de håller sig till den metod de är mest bekväma med. De är alltså medvetna om att en adaptiv lösningsförmåga är användbar, men har inte kunskapen att kunna utnyttja det.

När vi ser till de olika fel som uppkommer under intervjuerna har de flesta sin grund i bristande talfakta. Cecilia visar tydliga tecken på bristande talfakta vid intervjun då hon inte kan beräkna varken 91 - 89, 51 - 49 eller 21 - 19 men enkelt löser 11 - 9. Detta visar på att hon utvecklat talfakta för talen åtminstone i området 0 - 11, men har inte kunnat generalisera dessa samband till de andra talen. På diagnosen har hon fått 91 - 89 till 18 vilket dock pekar på att hon i och med dessa felsvar inte fått en tillräcklig kontinuitet i sina uträkningar till att faktiskt se sambanden de nämnda uppgifterna har. För att talfakta ska utvecklas förutsätts att eleven räknar rätt på uppgiften och att hon utsätts för den tillräcklig många gånger för att den ska lagras i långtidsminnet. Är det då ingen kontinuitet i svaren kan eleven heller inte upptäcka detta samband och därför inte erhålla talfakta (Bentley, 2008a).

Förslag på framtida forskning

Vår studie visade på nya beräkningssätt som ej tidigare har redovisats i tidigare forskning. En större studie, med en större urvalsgrupp, hade kunnat ge mer data för att kunna avgöra om strategierna återfinns i någon större utsträckning eller om de funna strategierna är mer av enskilda företeelser.

Vår studie visade också på att övergeneraliseringar är en stor bidragande faktor till att elever får ett felaktigt svar på de uppgifter de räknar. En större studie inom detta område skulle kunna bidra till att kartlägga vilka övergeneraliseringar som är mest frekventa och med hjälp av resultatet från studien förebygga uppkomsten av dessa övergeneraliseringar hos eleverna.

Studien visade också på att ett par av de intervjuade eleverna räknar rätt vid ett tillfälle och får fram ett inkorrekt svar vid ett annat tillfälle, även om uppgifterna är desamma. En ny studie, som är inriktad på detta problemområde, skulle vara av värde då man kan ta reda på orsakerna till att eleverna räknar rätt i en situation och räknar fel i en annan. Inför en sådan studie bör också val av metod noga testas så att detta fenomen framkommer med tydlighet.

Referenser

Baddeley, A. (2012). Working Memory: Theories, Models, and Controversies. *Annual Review of Psychology, 63*. 1-29.

Baroody, A., Dowker, A. (Ed.). (2003). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills : Constructing Adaptive Expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Bentley, P-O. (2008a). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007 – En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar procedurer.* Stockholm: Skolverket.

Bentley, P-O. (2008b). *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models : A New Field of Research*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bentley, P-O. (2009). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007 – En jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan*. Stockholm: Skolverket.

Bentley, P-O., Bentley, C. (2011). *Det beror på hur man räknar! : Matematikdidaktik för grundlärare*. Stockholm: Liber.

Englund, T., Källgården, E-S., Persson, I. (1992). *Kunskaper i aritmetik : en utvärdering av kunskaperna i aritmetik i årskurserna 3 och 6 i Stockholms skolor höstterminen 1991 : klassrapport (Rapporter från Stockholms skolor, 1992:3).* Stockholm: Stockholms skolors centralförvaltning.

Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H., & Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan. Konsten att studera samhälle, individ och marknad, uppl. 3.* Stockholm: Norstedts juridik.

Foxman, D. (2001). *Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: subtraction questions in the 1987 APU survey*. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 21(3). 25-30.

Hedrén, R. (2001). *Räkning i skolan i dag och i morgon. I B. Grevholm, (Red.), Matematikdidaktik : ett nordiskt perspektiv.* (s. 133-159). Lund: Studentlitteratur.

Kilborn, W. (1997). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1. Grundläggande aritmetik.* Stockholm: Utbildningsförl.

Klein, A. S., & Beishuizen, M. (1998). *The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic Versus Gradual Program Design. Journal for Research in Mathematics Education*. 29(4). 443-464.

Lantz, A. (2007). *Intervjumetodik*. Lund: Studentlitteratur.

Lester, F. (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics. Vol 1*. Charlotte, NC: Information Age Pub.

Lundberg, I., & Sterner, G. (2009). *Dyskalkyli - Finns det? : Aktuell forskning om svårigheter att förstå och använda tal*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet

Lunde, O. (2011). *När siffrorna skapar kaos : Matematiksvårigheter ur ett specialpedagogiskt perspektiv*. Stockholm: Liber.

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman : Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik : Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur

Löwing, M. (2009). *Elevers kunskaper i aritmetik - en kartläggning med utgångspunkt i diamantdiagnoserna*. Nämnaren 4. 12-18.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla : Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter*. Lund: Studentlitteratur.

Olsson, Z. (2012). *Vari ligger svårigheten med subtraktion? En undersökning av en kommuns Natur- och Teknikelever (Magisteruppsats)*. Göteborg: Institutionen för pedagogik och specialpedagogik, Göteborgs Universitet. Tillgänglig: http://hdl.handle.net/2077/28424

Skolverket. (2009). *Diamant - Diagnosområde: Aritmetik*. Hämtad 2012-04-17 från http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.111228!Menu/article/attachment/Diagnos_Matematik_aritmetik_dec2009.pdf

Skolverket. (2011a*). Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Västerås: Edita.

Skolverket. (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Västerås: Edita.

Stukát, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* Lund: Studentlitteratur

Thompson, I. (1999). *Mental Calculation Strategies for Addition and Subtraction. Mathematics in School* 28(5). 2-4.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Hämtad 2012-04-17 från http://www.vr.se/download/18.7f7bb63a11eb5b697f3800012802/forskningsetiska_principer_tf_2002.pdf

Bilagor

Tillståndsdokument

Anhållan om tillstånd för att ert barn kan delta i en undersökning inom ramen för ett examensarbete vid lärarutbildningen vid Göteborgs universitet

Vi är tre studenter som utbildar oss till lärare vid Göteborgs Universitet. Vi skall nu skriva den avslutande uppgiften inom lärarutbildningen som är vårt examensarbete och som ger oss vår lärarbehörighet. Arbetet motsvarar 10 veckors heltidsstudier och skall vara klart i juni 2012.

Examensarbetets syfte är att undersöka hur elever räknar med addition och subtraktion. De viktigaste frågorna vi behöver få svar på är vilka olika strategier som elever använder vid räkning med subtraktion och addition, och ifall de strategier de har kan bygga på felaktiga uppfattningar om tal och räkneprocesser. Studien syftar också till att hjälpa eleverna i deras matematikutveckling. För att kunna besvara dessa frågor behöver vi samla in material genom en matematikdiagnos och intervjuer med elever i en klass

På er skola kommer undersökningen att genomföras under perioden 16/4 – 27/4. Vi vill med detta brev be er som vårdnadshavare om tillåtelse att ert barn deltar i den intervju som ingår i examensarbetet. Alla elever kommer att garanteras anonymitet. De skolor/enheter/klasser som finns med i undersökningen kommer inte att nämnas vid namn eller på annat sätt kunna vara möjliga att urskilja i undersökningen. I enlighet med de etiska regler som gäller är deltagandet helt frivilligt. Ert barn har rättigheten att intill den dag arbetet är publicerat, när som helst välja att avbryta deltagandet. Materialet behandlas strikt konfidentiellt och kommer inte att finnas tillgängligt för annan forskning eller bearbetning.

Vad vi behöver från er är att ni som elevens vårdnadshavare skriver under detta brev och så snart som möjligt skickar det med eleven tillbaka till skolan så att ansvarig lärare kan samla in svaret vid tillfälle. Sätt således ett kryss i den ruta som gäller för er del:

☐ Som vårdnadshavare **ger jag tillstånd** att mitt barn deltar i undersökningen

☐ Som vårdnadshavare **ger jag inte tillstånd** att mitt barn deltar i undersökningen

Datum ……………………………………………..

……………………………………………………….. ………………………………………….
vårdnadshavares underskrift/er elevens namn

Har ni ytterligare frågor ber vi er kontakta oss på nedanstående adresser eller telefonnummer:

Med vänliga hälsningar

Simon Eddeland, guseddsi@student.gu.se

Olle Häggdahl, gusollha@student.gu.se

Clara Johansson, gusjclar@student.gu.se

Handledare för undersökningen är Per-Olof Bentley, Per-Olof.Bentley@ped.gu.se

Kursansvarig lärare är universitetslektor Daniel Seldén, Göteborgs universitet, Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap, telefon 031 786 47 82.

Matematikdiagnos om addition och subtraktion

Du behöver endast skriva svar på frågorna, inga uträkningar. Svara så gott du kan på alla frågorna.

Namn: ______________________________________

Årskurs: ______________________

Inriktning: _____________________

---

264 + 83 = ___	528 - 376 = ___	429 + 156 = ___
84 + 9 = ___	7 + 65 = ___	63 + 8 = ___
346 + 179 = ___	525 - 378 = ___	632 - 427 = ___
54 - 6 = ___	91 - 89 = ___	81 - 3 = ___
325 + 247 = ___	146 - 69 = ___	81 + 8 = ___
75 + 8 = ___	6 + 78 = ___	739 + 468 = ___
264 - 83 = ___	703 - 256 = ___	571 - 274 = ___
63 - 8 = ___	51 - 49 = ___	72 - 8 = ___

Intervjuguide

Ta med papper som eleven kan skriva/visa uträkningar på.

Inledning

- Vad tycker du om matte? Roligt/Tråkigt?
- Vad är det roligaste/bästa med matte?
- Vad är det tråkigaste/sämsta med matte?
- Tyckte du att provet var lätt eller svårt?
- Vad(Vilka?) var lättast med uppgifterna på provet?
- Vad var svårast av uppgifterna på provet?

Frågor om de felsvar eleven hade

- Be eleven att räkna uppgiften igen
- Visa hur du gör när du löser den här uppgiften och förklara de olika stegen.
- Fråga "Hur tänkte du på den här uppgiften?" när eleven räknar/har räknat uppgiften
- Om det finns någon liknande uppgift som eleven har klarat, be eleven förklara hur han/hon gjorde på den uppgiften.

Intervjuanalyser/sammanfattningar

Anna

Denna tjej hade ett fel på diagnosen, 571 - 274, som hon hade svarat 291 på. Genom att följa hennes kladdpapper ser man att hon använde sig av standardalgoritmen, men gjorde fel när hon räknade 11 - 4, hon skrev här 1. Hon föredrog att använda sig av standardalgoritmen på nästan alla uppgifterna, undantaget är t ex 51 - 49, där hon använde sig av stegvis beräkning, och 81 - 3, 63 + 8 samt 7 + 65, där hon använde kompensationsberäkning. Hon räknade på fingrarna på flera uppgifter, kanske tyder på avsaknad av talfakta. Hon visade prov på att kunna viss talfakta, då hon visste utan att behöva tänka att 9 + 9 (eller 9 · 2) är 18, hon använde sig av detta fakta när hon skulle beräkna 9 + 8. Intervjun pekar på att hon inte hade utvecklat talfakta för 9 + 8. Kanske har utvecklat talfakta för multiplikation men inte lika bra för addition. Uttryckte en intern regel, störst överst, när hon använde sig av standardalgoritmen. Denna regel fungerar ju bra vid addition, samt subtraktion som inte ger ett negativt svar. Denna regel kan ju dock ge problem vid svårare uppgifter (subtraktion med negativt svar). Som sagt så föredrog hon att ställa upp alla tal (standardalgoritmen), p g a att hon kände sig säkrast med den metoden.

Bianca

Hade ett fel på diagnosen, 632 - 427 = 502. På hennes kladdpapper står det 632 - 427 = 205 (korrekt), men när hon skrev av svaret på diagnosen så råkade hon vända på talet. Denna tjej föredrog att använda standardalgoritmen för de flesta uppgifter. På vissa uppgifter ställde hon först upp talen på kladdpapper, men använde sedan kompensationsberäkning för att räkna färdigt dom (t ex 84 + 9, 75 + 8). Hon använde endast kompensationsberäkning på additionstal, på subtraktion har hon använt sig av standardalgoritmen, även på 51 - 49 och 91 - 89. Tyder kanske på avsaknad av kunskap om stegvis beräkning. En väldigt intressant del av denna intervjun gick ut på att hon förklarade sitt sätt att räkna t ex 8 + 5. Hon såg prickar på talen framför sig, som hon sedan räknade ihop (se figur 7).

Cecilia

Hade 3 fel på provet, samt 6 uppgifter som hon inte svarade på. Samtliga uppgifter hon inte svare på var subtraktionsuppgifter där det första talet var större än 100. Hade fel på 51 - 49, 91 - 80 och 739 + 468. Hon ställde aldrig upp uppgifterna på papper, utan räknade hela tiden i huvudet. Hon räknade till stor del med talsortvis beräkning, och klarade väl av additionsuppgifterna. Hon gjorde dessa i huvudet och lyckades alltid komma ihåg när man skulle "ta med en etta" till nästa tiotal/hundratal. Använder även talsortvis beräkning för subtraktion, och lyckas ibland med växling på uppgifterna (fast hon gör själva växlingen efter i stället för före beräkningen, d v s hon kommer ihåg att hon ska ta bort 1 på nästa tiotal/hundratal), men ibland lyckas hon inte med växlingen. Vissa uppgifter tyder på avsaknad av talfakta eller +-1-felet. På diagnosen hade hon övergeneraliserat "störst först" vid subtraktion och fått 91 - 89 = 18, samt 51 - 49 = 42. På intervjun så identifierade hon direkt sin egen lösning (91 - 89 = 18) som felaktig, och visade insikt på att man inte ska ta störst först, så det verkar finnas en osäkerhet hos eleven om hur hon ska göra. Lyckades inte lösa 91 - 89 eller 51 - 49 korrekt på provet trots många försök och lång betänketid. Klarade inte heller av 21 - 19 när jag frågade henne, men löste snabbt och lätt 11 - 9 korrekt. Hade svårt för uppgiften 739 + 468, på provet hade hon svarat 127, och på intervjun svarade hon 117. Det verkar som att hon inte tyckte att svaret skulle ha fyra siffror, så när hon skulle skriva dit 11 och det redan stod 07 så strök hon 0 och skrev 11 över den (så det blev 117, på provet kanske samma sak fast med 127). Kan ju vara så att det, i stället för att bero på att svaret inte fick ha fyra siffror, berodde på att det var en nolla som stod där.

Diana
Denna tjej hade alla rätt på diagnosen (jag intervjuade henne för att det bara var 3 elever som kom till lektionen till en början, och de andra två hade jag redan intervjuat). Har använt standardalgoritmen på de flesta uppgifterna. Jag bad henne att försöka lösa några uppgifter på något annat sätt, hon var då lite osäker och försökte med några andra metoder, men slutade med stegvis beräkning (på 91 - 89). Trots att hon behärskade standardalgoritmen bra så visade hon på vissa brister, t ex avsaknad av talfakta och fingerräkning. Hon använde fingrarna för att räkna ut 84 + 9. Hon visade under intervjun att hon behärskade kompensationsräkning, men sa flera gånger att hon för det mesta föredrog standardalgoritmen för att hon kände sig säkrast då, och menade att hon kunde göra slarvfel annars. Hon förklade också att hon inte räknar med fingrarna när man adderar något större än 10, för hon “har inte 17 fingrar”.

Erik
Den här killen hade 4 fel på diagnosen (525 - 378, 632 - 427, 325 + 247 samt 146 - 69). När han räknar använder han en lite annorlunda variant av talsortvis beräkning (525 - 378 börjar han med 500 - 300, 146 - 69 börjar han med 140 - 60). I vissa fall lyckas han med subtraktionsuppgifter som kräver växling, i vissa fall gör han inte det. Han har övergeneraliserat “störst först” på uppgifter under intervjun, och en del av de felsvar han hade på provet (t ex 146 - 69 = 123) tyder också på detta, även om han under intervjun lyckas lösa uppgifter som han hade fel på innan. Han känner alltså till både felaktiga och korrekta strategier, och blandar användningen av dem. Visar under intervjun att han behärskar kompensationsberäkning, och även stegvis beräkning. Han använder fingrarna för att göra den stegvisa beräkningen. Uttrycker att det ibland blir för många siffror i huvudet så att man glömmer bort saker (begränsat arbetsminne har vi ju alla). Det mest intressanta med hans uträkningar är nog hans (som tidigare visats) egna variant av talsortvis beräkning.

Frida
Eleven har fel på följande 7 uppgifter på diagnosen: 84 + 9, 346 + 179, 632 - 427, 81 - 3, 146 - 69, 739 + 468 och 571 - 274. 146 - 69 får hon till 73 vilket ger en viss antydan på störst-först. Vi ser genomgående i intervjun att hon inte fullt behärskar subtraktion, då hon förutsätter kommutativitet (t ex 9 - 11 = 2). Intressant är att hon på diagnosen räknar rätt på 91 - 89, men inte på uppgiften efter 81 - 3 vilken hon får till 77. Vad detta kan bero på är svårt att säga, då intervjun inte heller ger någon indikation på orsaker men det lutar åt talfaktafel. I intervjun säger sig eleven ha svårt med uppställning och försöker undvika detta då det bara blir fel när hon gör det. När hon ges uppgiften 571 - 274 räknar hon till en början talsortsvis. Hon tar bort 70 från båda, sedan 200 från 500 och räknar sedan “4 minus 301”. Återigen visar hon att hon inte riktigt förstår att subtraktion faktiskt är beroende av ordningen som talen står i.

I övriga uppgifter från intervjun (vilka hon löser utan problem) delar hon upp till jämna tiotal. T ex [81 - 3 = 80 - 2 = 78] och [84 + 9 = 90 + 3 = 93]. Då hon löser 61 - 59 använder hon sig av talsortsvis beräkning, [60 - 50 = 10, 11 - 9 = 2].

Gabriella
Denna elev hade endast 2 fel på diagnosen (632 - 427 och 63 - 8) men togs in på intervjun då de andra som var intressanta för uppsatsen inte ville delta. Hon verkar ju ha en metod som fungerar i de flesta fallen för uppgifter liknandes 63 - 8. Hon löser 54 - 6 och 72 - 8, vilka båda är snarlika 63 - 8, och felet kan väl endast förklaras med brist på talfakta. 632 - 427 visar på liknande tendenser där hon påstår att 12 - 7 är 4 och inte 5. Återigen indikationer på bristande talfakta. Under intervjun har hon dock inga problem att lösa just 63 - 8, då hon använder sig av kompenstaitonsberäkning [63 - 8 = 63 - 3 - (8 - 3) = 60 - 5 = 55]. När eleven sen ombeds att beräkna 703 - 256 visar hon att hon inte behärskar

standardalgoritmen fullständigt. Då det inte finns tiotal att låna ifrån måste hon gå till hundratalen, men placerar då de 10 tiotal hon lånat ovanför entalen och tappar en tiopotens. När hon beräknat 13 - 6 får hon låna från hundratalen igen, då hon inte tagit hänsyn till att det var hundratalen hon hämtat ifrån tidigare. När jag sedan ska testa henne på en liknande uppgift tänker jag helt fel och hon får 515 - 378, vilken inte alls ger det scenario jag önskar. Tanken var en uppgift där hon åter blir tvungen att låna från hundratalen till entalen, men jag gör bort mig. Uppgiften hon får löser hon utan problem med uppställning.

Hanna

Det här är en av de elever som efter diagnosen verkade mest intressanta att få intervjua. Hon har dock endast 6 fel på diagnosen (528 - 376, 429 + 156, 632 - 427, 81 - 3, 325 + 247 och 739 + 468). I två av additionsuppgifterna har hon istället räknat subtraktion, vilket kan tyda på att hon slarvat p g a stress när hon skrivit över uppgifterna på kladdpappret. Detta ger intervjun åtminstone indikationer på. Hon är väldigt nervös, vilket hon själv påtalar, och ger sken av att det även varit så under testet. (Kanske ska fråga henne?). Det kan då vara av intresse att söka efter stress inverkan på arbetsminne, talfakta och fokus.

I intervjun ges hon till att börja med uppgiften 72 - 8. Hon beskriver då att hon successivt tar bort två från 72 och räknar på fingrarna. Det ger uppenbara problem och hon ger först 67 som svar, men ändrar sig till 64. Hon visar senare under intervjun tecken på fingerräkning vilket är ett tecken på bristande talfakta. Hon ges även uppgiften 632 - 427 igen vilken hon i diagnosen svarat 505 på. Under intervjun börjar hon med att säga att hon använder sig av uppställning på sådana uppgifter men att hon är osäker på vilket tal som ska stå överst och att hon brukar ta det största. Hon börjar med att låna från tiotalen och anser sedan att hon måste låna från hundratalen för att kunna fullfölja beräkningen i tiotalen. Då får hon 12 - 2 till 10, men vet då inte hur hon ska skriva in detta i uppställningen. Hon är märkbart väldigt nervös och vi tar och räknar en annan uppgift emellan. När hon sedan får en andra chans på den börjar hon att låna från hundratalen istället och sedan från tiotalen. Hon får åter 5 kvar på entalen, men har nu 9 + 3 som hon får till 12 på tiotalens plats. Från detta ska hon ta bort 2 och har åter samma problem: hur göra med 10. Jag väljer att avsluta intervjun där, då hon är alldeles för nervös och stirrig för att kunna fortsätta intervjua.

Sammanfattningsvis är nog hennes största problem nervositet och brist på talfakta. Detta leder i sin tur till enkla misstag både p g a stressen och fingerräkningen.

Ida

Eleven hade 3 fel på diagnosen, alla dessa subtraktion med växlingar med tal i området 100 - 999. Vid intervjun påpekar hon att hon har svårt med uppställning vid subtraktion. Hon har dock visat på diagnosen att hon behärskar uppställning med addition utan problem. När hon löser 528 - 376 på diagnosen använder hon sig av talsortsvis beräkning, talet till trots. Uträkningen ser ut som följer: 500 - 300 = 200, 20 - 70 = -50, 8 - 6 = 2. Detta skulle ge 152, vilket är det korrekta svaret. Hon gör rätt hela vägen (200 + (-50) = 150) fram till att hon ska addera 2:an, vilken hon istället subtraherar och hon får då 148 istället. Detta tyder på att hon faktiskt behärskar negativa tal och subtraktion ganska bra, men brister i användandet av uppställning vid subtraktion samt en viss osäkerhet vid användning av talsortsvis beräkning. Vid intervjun påpekar hon dock att hon inte använder sig av talsortsvis beräkning när det blir växling. Hon löser till exempel 368 - 253 talsortsvis (“räknar upp”), men inte 647 - 159. Den väljer hon först att försöka lösa genom att räkna utifrån (ungefär som när man ställer upp), men hon tappar snabbt bort sig och blir osäker vilket förstärker det hon sagt; att hon är osäker på uppställning vid subtraktion. Hon går då över till talsortsvis beräkning: 600 - 100 = 500, sedan för 547

- 59 börjar hon med tiotalen 540 - 50 = 490. Till sist beräknar hon 497 - 9 och får det, efter lite om och men, till 488.

Eleven använder sig genomgående av talsortsvis beräkning vid subtraktion och visar goda färdigheter vid intervjun, men gör misstag på diagnosen. Vad skulle egentligen detta kunna bero på?

Jenny

Den här eleven hade 2 fel på diagnosen 525 - 378 och 146 - 69, båda subtraktion. Hon anser sig själv ha ganska lätt för huvudräkning och visar under intervjun och på diagnosen att hon behärskar standardalgoritmen vid subtraktion till viss grad. Under intervjun får hon först några uppgifter att börja med som är av enklare karaktär, 51 - 49 och 81 - 3. Dessa löser hon genom stegvis beräkning och kompensationsberäkning (81 - 1 - (3 - 1) = 80 - 2 = 78). Hon ges sedan en additionsuppgift med växling (325 + 247) vilken hon löser med uppställning i huvudet. När hon sedan får i uppgift att lösa 632 - 427 ställer hon inte upp utan räknar talsortsvis. Detta leder till ett störst först-fel och hon erhåller 152, vilket är felaktigt. 525 - 378 väljer hon dock att ställa upp, med motiveringen att 5 - 8 inte går (det gjorde inte 2 - 7 heller). Denna uträkning med uppställning gör hon felfritt.

Hon visar tydligt på att hon är osäker på subtraktion samtidigt som hon är väldigt säker på addition. Hon visar också på varierade lösningsstrategier vid subtraktion. På diagnosen hade hon 2 fel av 7 som var subtraktioner av liknande karaktär, vilket gör det svårt att avgöra bakomliggande orsaker.

Karin

På diagnosen hade denna elev ett antal fel, där några av dessa var att eleven hade räknat subtraktion när det skulle vara addition. Det var även ett par tal där det var ett entalsfel och ett hundratalsfel. Eleven uttryckte att hon kände sig lite stressad under diagnosen, eftersom det var så grundläggande och att man borde kunna detta. Under intervjun verkade eleven väldigt säker på metodval och räknade rätt. Eleven använde sig av talsortsvis beräkning vid addition och uppställning med växling vid subtraktion.

Lisa

Den här eleven använder sig av talsortsvis beräkning på både addition och subtraktion. Vid addition är det inga problem för eleven, det är vid subtraktion som eleven gör fel. Exempel:

528 - 376: 500 - 300 = 200

20 - 70 = 50 -----> 200 - 50 - 2 = 148 (Korrekt: 200 - 50 + 2 = 152)

8 - 6 = 2

632 - 427: 600 - 400 = 200

30 - 20 = 10 -----> 200 - 10 - 5 = 185 (Korrekt: 200 + 10 - 5 = 205)

7 - 2 = 5

Denna metod skulle kunna fungera, men det känns som att eleven har bristande kunskaper om tal. Eleven använder sig också av “störst först” ibland. I exemplet ovan skulle det innebära att eleven borde addera 5 till de andra talen, men eleven subtraherar. Det tyder på att eleven har någon form av övergeneralisering gällande talsortsvis beräkning, d v s att eleven tänker att allt ska subtraheras, precis som allt adderas när det handlar om addition.

Ett annat exempel är 146 - 69: 100 - 60 = 40, sen tänker eleven att denne har 40 kvar från 140 och 40 - 40 = 0. Då har eleven endast 9 - 6 kvar, och detta blir 3. Här använder eleven "störst först" igen och återigen blir det fel med var eleven ska addera och var eleven ska subtrahera.

Ytterligare ett exempel är 264 - 83: 200 - 80 = 20

60 - 20 = 40 -----> 40 - 1 = 39
4 - 3 = 1

På diagnosen har eleven fått oavstående tal till 64. Övriga exempel har eleven fått samma differens på diagnosen som i intervjun.

Eleven använder sig också av stegvis beräkning lite då och då, framför allt när eleven känner sig osäker på att denne räknat rätt.

Maria

Den här eleven gör under intervjun samma fel på en uppgift som denne gjorde på diagnosen. Vid addition använder eleven talsortvis beräkning. Detta gör eleven även vid subtraktion. Eleven använder sig även av "störst först", men verkar förstå att det blir motsatt tecken framför den differens som fås. Det är andra saker som skapar problem för eleven.

Exempel: 528 - 376: 500 - 300 = 200

76 - 28 = 48
200 - 48 = 148

Här är eleven helt säker på att 200 - 48 är lika med 148. Samma differens fick eleven på diagnosen. Detta kan tyda på någon form av lucka i tallinjen.

Ett annat exempel är 264 - 83: 83 - 64 = 19
200 - 19 = 189

På diagnosen fick eleven differensen 219. Vid intervjun gjorde eleven rätt, men räknade fel i slutskedet.

Ett annat exempel är att eleven på diagnosen fick 84 + 9 till 63. Vid intervjun fick eleven samma addition till 93.

Eleven använder sig också ofta av stegvis beräkning.

Niklas

På diagnosen hade eleven 4 st fel och alla fel var när beräkningar skulle göras med stora tal. Eleven använder sig av kompensationsberäkning, både gällande subtraktion och addition. Exempel: 525 - 378 = 500 - 353 = 147. Här subtraherar eleven med 25 på båda termerna. Eleven tänker sedan hur mycket denne behöver lägga till, till 353, för att det ska bli 500. Problemet för denna elev är att eleven använder samma metod även vid addition.

325 + 247 = 300 + 222 = 522. Detta tal hade eleven nästan rätt på vid diagnosen (573, ett entalsfel). Men vid intervjun räknade eleven fel. 739 + 468 = 730 + 459 = 700 + 429 = 1129.

703 - 256 = 700 - 259 = 701 - 260 = 501 - 60 = 441. Här börjar eleven använda denna rätta metoden för kompensationsberäkning vid addition, sedan övergår eleven till den korrekta för subtraktion.

Olivia

Den här eleven använder sig av uppställning för det mesta, om det inte är väldigt enkla tal. Eleven hade ett antal fel på diagnosen. Det går inte direkt att se något samband mellan felen eleven gjort på diagnosen.

Under intervjun räknade eleven talen med säkerhet. Det var dock ett tal som skapade lite problem, 75 + 8. Eleven räknade först rätt genom talsortvis beräkning, men sedan blev eleven osäker och velade fram och tillbaka mellan 83 och 93 (som eleven fått talet till på diagnosen). Till slut kom eleven fram till att det blev 83 genom att 70 + 8 = 78 och 78 + 5 = 83, men det var fortfarande en viss osäkerhet kvar i luften.

Patrik

Denna elev räknar det mesta i huvudet och använder sig väldigt lite av papper och penna för att räkna. Eleven använder sig av talsortvis beräkning vid subtraktion.

Exempel: 525 - 376:

Elevens beräkning: 525 - 378 = 200 - 50 - 3 = 147

Eleven använder sig också av kompensationsberäkning vid subtraktion:

72 - 8 = 70 - 6 = 64

Exempel: 146 - 69: Där tänker eleven hur mycket 69 är större än 46, vilket är 23. Sedan tänker eleven 100 - 23 och det blir 77.

Vid en uppgift räknar eleven samma fel som eleven gjorde på diagnosen. Talet var 325 + 247. Eleven använder sig av talsortvis beräkning och är helt säker på att 5 + 7 = 13. Men vid ett annat tal på diagnosen, 7 + 65, räknar eleven rätt och får det till 72. D v s eleven får här 5 + 7 till 12.