GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematikundervisning genom problemlösning – en väg till förståelse och engagemang inom matematiken

Anne-Marie Cederqvist

LAU395

Handledare: Florenda Gallos Cronberg

Examinator: Florentina Lustig

Rapportnummer: VT12-2611-216

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Abstract

Examensarbete inom Lärarprogrammet LP01

Titel: Matematikundervisning genom problemlösning – en väg till förståelse och engagemang inom matematiken

Författare: Anne-Marie Cederqvist

Termin och år: Vårterminen 2012

Kursansvarig institution: Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap

Handledare: Florenda Gallos Cronberg

Examinator: Florentina Lustig

Rapportnummer: VT12-2611-216

Nyckelord: Problemlösning, Matematikundervisning, Konstruktivism, Engagemang, Resonemang, Rika matematiska problem

Sammanfattning

Examensarbetet syftar till att synliggöra möjligheterna att lära elever i årskurs 2 matematik genom problemlösning. Huvudfrågornas avsikt är att utröna vilket engagemang eleverna visar utifrån kognitiva, beteendemässiga och känslomässiga aspekter samt vilken förmåga eleverna har att föra matematiska resonemang vid arbetet med rika matematiska problem vilkas syfte är att initiera till matematiska idéer och resonemang. Ämnesvalet baseras på tidigare erfarenheter av ett matematikutvecklingsprojekt under min verksamhetsförlagda utbildning.

Metodvalet resulterade i en etnografisk fallundersökning med etnometodologisk ansats. Tre datainsamlingsmetoder användes: lärarintervjuer vilka baseras på lärarens observationer, elevintervjuer samt mina egna observationer vilka innefattar fältanteckningar och inspelade elevsamtal. Dessa tre perspektiv har möjliggjort triangulering vilket förhöjer resultatets tillförlitlighet. Insamlad data kategoriserades utifrån huvudfrågorna. Utifrån dessa kategoriserades de tre datainsamlingsmetoderna vilka sedan analyserades utifrån ett antal underkategorier som baseras på de observationspunkter samt intervjufrågor som använts för att operationalisera huvudfrågorna.

Resultatet visar att elevernas engagemang är stort vid arbetet med rika matematiska problem. Även elever som tidigare visat sig oengagerade och negativt inställda till matematikundervisningen visar stort engagemang. Engagemanget grundar sig i den glädje och tillfredställelse eleverna upplever då de aktivt är med och bygger upp sin kunskap vilket ger en ökad förståelse för matematiken; samtidigt som de lyckas lösa ett problem som de först upplevde som svårt. Resultatet visar även att eleverna har förmåga att föra matematiska resonemang vid arbetet med rika matematiska problem men att de initialt behöver undervisas i olika problemlösningsstrategier samt representationsformer. Detta för att de till fullo skall kunna utveckla sina förmågor att föra matematiska resonemang kring sina matematiska idéer och dra generella slutsatser.

Undervisningsmetoden är relevant för läraryrket då den bidrar till att stimulera elevers förståelse och intresse för matematiken samt skapar förutsättningar för läraren att nå alla elever utifrån deras nivå. Detta gynnar framförallt elever som känner sig omotiverade till matematiken och upplever den som svår.

Innehållsförteckning

1 INLEDNING

I vår vardag stöter vi ständigt på problem som vi försöker lösa. I många fall finns det förutbestämda regler och strategier som man kan ta hjälp av för att lösa ett problem. Vid andra tillfällen kan vi känna att dessa regler och strategier inte är tillämpliga och vi måste utveckla nya. I båda dessa situationer sätts vår problemlösningsförmåga på prov. Att utveckla en god problemlösningsförmåga tar lång tid och kräver många övningstillfällen, redan från tidig ålder. I Lgr 11 beskrivs skolans ansvar för detta: ”Skolan ska ansvara för att varje elev efter genomgången grundskola kan lösa problem och omsätta idéer i handling på ett kreativt sätt” (Skolverket, 2011, s. 13). En stor del av denna problemlösningsförmåga handlar om matematisk problemlösning och därför är det viktigt att lärare redan i de tidigare åldrarna börjar introducera problemlösning i matematikundervisningen.

En individ måste kunna kontrollera den ökade användningen av matematik i samhället för att kunna ta del av demokratiska processer (Emanuelsson, Wallby, Johansson, & Ryding, 1996). Denna kontroll kan erhållas genom att individen lär sig anpassa sina matematiska kunskaper och begrepp till olika vardagliga matematiska problemsituationer. Emanuelsson et al. (1996) beskriver hur man genom att lösa problem utvecklar tankesätt, planerings- och analysförmåga, självförtroende och kreativitet. Vidare beskriver de att: ”Ett av de viktigaste målen för all matematikundervisning är att utveckla elevernas lust och förmåga att lösa problem” (1996, s. 69). Läraren måste således finna vägar i sin undervisning som kan stimulera elevernas engagemang och förmågor inom matematiken samtidigt som deras problemlösningsförmåga utvecklas.

Jag har alltför många gånger, vid de tillfällen jag varit ute på praktik eller vikarierat på olika skolor, stött på elever som har en mycket negativ inställning till skolämnet matematik. Det som framför allt är oroande är att flera av dessa elever går i årkurs 1 och 2. Jag har givetvis undrat hur de har hunnit få denna attityd till matematik bara efter något eller några år i skolan. Flera av eleverna har för mig beskrivit hur de upplever att matematiken är svår att förstå men även att de upplever arbetet i matteboken som tråkigt.

1.1 Bakgrund

Under min lärarutbildning fick jag tillfälle att genomföra ett mindre utvecklingsprojekt inom matematikundervisningen i en årskurs 2 på en skola i Göteborg. Syftet med projektet var att utveckla elevernas lust och förmåga att lösa matematiska problem samt att utveckla deras förmåga att använda olika matematiska representationsformer. Bakgrunden till projektet var att läraren försökte fokusera mer på problemlösande aktiviteter och mindre på arbetet i matteboken. Flera elever hade dock svårigheter att lösa de matematiska problemen. De hade även svårt att uttrycka och samtala om hur de resonerat kring problemen. Jag provade ett nytt arbetssätt i undervisningen; problemlösning med hjälp av fyrfältsblad där eleverna arbetar i par. Fyrfältsbladet består av fyra fält i vilka eleverna skall redovisa hur de löst ett problem utifrån olika matematiska representationsformer till exempel bild, siffror, ord och tabell (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997). Syftet med pararbetet var att utveckla elevernas förmåga att samtala och resonera kring sina tankar och lösningar.

Under detta projekt, vilket varade under fem veckor, såg jag en tydlig progression i elevernas förmåga att uttrycka sig med hjälp av de olika representationsformerna. Det märktes även en viss progression i deras förmåga att lösa matematiska problem, förmodligen grundat på deras ökade förmåga att använda sig av de olika representationsformerna. Men det som utvecklades mest var elevernas lust till matematikundervisningen och till att lösa matematiska problem; de upptäckte helt enkelt hur roligt det var när de lyckades. I detta sammanhang vill jag särskilt lyfta fram en elev som var mycket negativt inställd till matematikundervisningen och då framförallt arbetet i matteboken. Denna flicka fick sällan gjort något under matematiklektionerna. Läraren uttryckte vid flera tillfällen sin oro över hennes negativa inställning och vilka konsekvenser det kan få för hennes lärande. Under projektets gång visade det sig att denna flicka blev mycket engagerad i uppgifterna. Hon berättade hur hon genom att få rita en bild av problemet kunde förstå vad problemet handlade om. Därefter var det inte svårt för henne att översätta bilden till siffror och ord, ”tankarna finns redan i huvudet” som hon uttryckte det. Hon fick möjlighet att lyckas utifrån hennes kunskapsnivå och därifrån bygga vidare och skapa sin egen kunskap. Hon fick även uppleva tillfredsställelsen av att klara av att lösa ett problem. Detta ledde till att hon ville arbeta mer med detta; hon blev helt enkelt motiverad. Denna elev fick mig att inse hur viktigt det är att eleverna får arbeta med problemlösning med hjälp av varierade representationsformer inom matematiken, redan i de tidigare åldrarna. De måste ges förutsättningar att kunna tolka och sortera information med ett visuellt hjälpmedel såsom bilder för att närma sig det okända; det vill säga utgå från det konkreta för att närma sig det abstrakta. Får de dessa förutsättningar ges de möjligheter att lyckas med matematiken vilket skapar självförtroende och motivation.

Med dessa insikter ställde jag mig frågan varför jag så sällan ser en matematikundervisning på lågstadiet som baseras på problemlösande aktiviteter. Visserligen finns det en begränsning i mängden klasser vars matematikundervisning jag observerat men det finns forskning som visar detta. Enligt Engström (1998) är det vanligaste sättet att undervisa elever i dessa åldrar att först lära ut begrepp och räkne-procedurer för att sedan gå vidare med enklare problemlösande aktiviteter. Det finns dock ingen forskning som stödjer att detta traditionella undervisningssätt är till en fördel för elevernas inlärning (Lester & Cai, 2010). I Sverige verkar fokus på problemlösning inte bli aktuellt förrän eleverna kommer upp i mellanstadiet och då undervisas det ofta som ett eget ämne inom matematikundervisningen. Borde det inte vara mer fördelaktigt för eleverna att integrera lärandet och förståelsen av matematikens begrepp och räkne-procedurer med problemlösning? Denna fråga ledde mig in på området som jag valt att studera i denna studie; att undersöka möjligheten att undervisa i matematik genom problemlösning på lågstadiet.

Att undervisa i matematik genom problemlösning innebär att läraren använder problemlösning som en drivkraft för att stimulera elevers engagemang samtidigt som de upptäcker nya matematiska begrepp, procedurer, strategier (Taflin, 2007). Det handlar om att engagera eleverna och få dem att ”dra ut” nya matematiska kunskaper och färdigheter i arbetet med ett problem. Att implementera en ny undervisningsmetod tar dock lång tid och är därför inte möjligt att genomföra i sin helhet inom denna studie. Min avsikt har därför varit att genomföra en fallstudie vilken baseras på tre undervisningstillfällen där jag, i rollen som lärare, använder mig av undervisningsmetoden. Detta för att undersöka vilka möjligheterna är att stimulera elevernas engagemang samt att undersöka vilken förståelse eleverna kan utveckla genom att studera vilka matematiska resonemang eleverna kan föra, utifrån arbetet med rika matematiska problem vilka bland annat syftar till att introducera till matematiska resonemang, under avsnitt 2.2.5 ges en mer ingående beskrivning av dessa. Genom att besvara studiens frågor vill jag belysa möjligheterna att implementera undervisningsmetoden i en årskurs på lågstadiet.

1.2 Syfte och frågeställningar

Syftet med denna fallstudie är att undersöka möjligheterna för elever i årskurs 2 att lära sig matematik genom problemlösning. Fokusen i studien har riktats mot elevernas engagemang samt förståelse av matematiken, vid arbetet med rika matematiska problem vilkas avsikt bland annat är att initiera till matematiska resonemang. Studien baseras på följande huvudfrågeställningar:

Vilket engagemang visar eleverna under matematiklektionerna vid arbetet med de rika matematiska problemen?

Vilken förmåga har eleverna att föra matematiska resonemang vid arbetet med de rika matematiska problemen?

2 TEORETISK ANKNYTNING

Inom denna studie har jag valt att utgå från det konstruktivistiska perspektivet på lärande och då med en betoning på den socialkonstruktivistiska inriktningen. Jag kommer därför att redogöra för de huvudsakliga dragen inom detta perspektiv. Tidigare forskning kring matematikundervisning genom problemlösning har studerats och sammanställts för att skapa en teoretisk bakgrund till studien. Detta för att läsaren skall få en överblick hur tidigare forskning ser på undervisningsmetoden och rika matematiska problem. I samband med detta har jag tagit del av en studie vilken Eva Taflin genomfört: *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande*. Taflins studie avser visserligen elever på högstadiet men jag kommer ändå visa på några intressanta resultat från denna studie. I detta sammanhang är det även relevant redogöra för vad läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr 11, innehåller som är kopplat till undervisningsmetoden.

2.1 Konstruktivismen som grund för undervisningsmetoden

Enligt ett konstruktivistiskt perspektiv är kunskap människoskapad vilket innebär att kunskap inte existerar i egenskap av sig själv utan att det är något som människan skapar i sin strävan att försöka förstå och förklara omvärlden (Imsen, 2006).

2.1.1 Individen konstruerar sin egen kunskap genom en aktiv process

Kilpatrick (citerad i Häggblom, 2000) definierar konstruktivismen med hjälp av två hypoteser:

1. Den lärande bygger aktivt upp sin kunskap; den motas inte passivt från omgivningen.
2. Att lära är en adaptiv process, genom vilken den lärande organiserar sin erfarenhetsbaserade bild av omvärlden; vetande härrör inte från en självständig värld utanför den lärande. (Häggblom, 2000, s. 24)

Då en elev aktivt bygger sin kunskap utgår den från de tidigare erfarenheterna denne har. Utifrån de erfarenheter eleven har styrs sedan kunskapsbyggandet så att det passar in i dennes upplevelse av omvärlden dvs. en slags anpassningsprocess. På detta sätt blir varje elevs kunskapsbyggande unikt. Häggblom (2000) beskriver hur dessa handlingsmönster bildar inre representationer som tas fram vid tänkande, vilka Piaget kallar kognitiva scheman. Piaget (citerad i Imsen, 2006) beskriver hur adaptiva processen (anpassningsprocessen) utgörs av två delprocesser; assimilation och ackommodation.

Assimilation sker när en individ ställs inför en för en ny eller okänd situation eller företeelse där den för att försöka förstå det nya eller okända använder sig av tidigare erfarenheter. Piaget (citerad i Imsen, 2006) beskriver detta som att nya intryck anpassas till de scheman man redan har.

Ackommodation innebär att individen utvecklar eller ändrar sin förståelse av en situation eller företeelse. Piaget (citerad i Imsen, 2006) beskriver detta som att de gamla schemana är otillräckliga och justeras eller byts ut så att de kan ge en mer hållbar tolkning av en situation eller företeelsen, nya erfarenheter anpassas till befintliga scheman.

Piaget (citerad i Imsen, 2006) menar att assimilation och ackommodation förlöper bredvid varandra och att det är ackommodationen som leder till att ny kunskap utvecklas. Han beskriver vidare att lärande är resultatet av den växelverkan som sker mellan individen och omgivningen.

2.1.2 Lärande sker i ett samspel mellan individen och yttervärlden

En individ lär i ett samspel med yttervärlden, socialt, materiellt och symboliskt. Genom aktiviteter som stimulerar detta samspel kan ett lärande utvecklas eftersom detta ger upphov till att de yttre aktiviteterna, samspelet med yttervärlden, leder till att de inre aktiviteterna, den individuella kunskapen utvecklas.

Imsen (2006) beskriver hur Dewey var bland de första som ägnade fokus åt individens aktiva medverkan i lärandeprocessen. Han står bakom begreppet ”Learning by doing” vilket innebär att individen gör en sak, det vill säga handlar, och sedan ser vad handlingen leder till. Detta leder i sin tur till en erfarenhet. Lärandet sker när man förstår kopplingen mellan resultatet och handlingen. Deweys tankar stödjer ett laborativt arbetssätt i undervisningen.

Piaget (citerad i Häggblom, 2000) menar att barnet genom att handla och utforska kan lära sig om den yttre världen vilket medför att det på det inre mentala planet blir kvar kognitiva scheman. De är dock så att Piagets forskning till större delen hänvisar till samspelet mellan individen och det materiella dvs. en slags laborativ undervisning som baseras på föremål och olika material.

Bruner (citerad i Imsen, 2006) menar i likhet med Piaget att individers nya erfarenheter anpassas till befintliga scheman så att de passar in. Till skillnad från Piaget fäster dock Bruner stor betydelse vid språkets betydelse för lärandet. Bruner utvecklade teorin om representationsnivåerna vilken har en betoning på utvecklingsaspekter (Imsen, 2006). Teorin beskriver hur vi vid den intellektuella utvecklingen använder tre olika representationssystem: det enaktiva, det ikoniska, och det symboliska:

- Det enaktiva kan beskrivas som det konkreta där individen använder sig av handlingar och hantering av saker för att skapa erfarenheter.
- Det ikoniska kan beskrivas som de visuella föreställningar som bildas utifrån den konkreta handlingen. Dessa visuella föreställningar, bilder, skapar grunden till den symboliska representationen.
- Den symboliska representationen tas i bruk i form av ord och språk. Språket möjliggör hantering av relationer och samband vilket leder till att individen kan gå utöver det som är möjligt med handlingar och bilder. (Imsen, 2006, s. 338)

Utifrån teorin om representationer skapas en förståelse av hur väsentligt det är för de yngre eleverna att utgå ifrån det enaktiva dvs. det konkreta och verklighetsanknutna för att skapa de inre bilder som ger förståelse för symboliska formuleringar. Bruner (citerad i Imsen, 2006) menar att läraren inom matematiken skall stimulera med konkret material för att få igång den enaktiva aktiviteten. Det är i denna fas som eleven bildar de inre förställningar om matematiska relationer som såsmåningom leder till kunskap om matematiska symboler.

Den del av konstruktivismen som benämns socialkonstruktivism väger även in hur individer skaffar sig erfarenheter tillsammans med andra individer. Dessa idéer grundar sig i Vygotskys teorier kring det sociala samspelet mellan individer (Hedrén, 2000). Genom att eleven får samspela och samtala med andra elever får den möjlighet att sätta ord på sina tankar och resonemang vilket i sin tur leder till en utveckling av elevens förståelse. Duffy & Savery (1996) beskriver hur den sociala omgivningen är avgörande för vår individuella kunskapsutveckling. De hänvisar till von Glaserfelds tankar om hur andra individers erfarenheter och föreställningar utgör den främsta källan till att utmana våra egna erfarenheter och föreställningar. Denna utmaning kan likställas med det Piaget beskriver som obalans vilket driver individen i lärandeprocessen.

2.1.3 Den kognitiva konflikten är drivkraften i lärandeprocessen

Piaget (citerad i Imsen, 2006) beskriver hur jämviktsprincipen, när strävan efter inre jämvikt driver individen till ackommodation och ny kunskap, är själva drivkraften i lärandeprocessen. Det uppstår helt enkelt en slags obalans mellan de gamla erfarenheterna och de nya erfarenheter individen gör. Individen vill räta upp obalansen för att nå jämvikt. Detta erhålls genom ackommodationen. Imsen (2006) anser att detta är en central aspekt för inre motivation vilket leder individens lärande framåt. Enligt Piaget (citerad i Imsen, 2006) finns det hos människan ett begär att försöka förstå eller komma underfund med något vilket i sin tur leder till lärande. Duffy & Savery (1996) menar att den lärande sätter målen för lärandet själv utifrån de frågetecken som uppkommer i en lärandesituation.

2.1.4 Eleven blir ägare till sin egen konstruerade kunskap

Imsen (2006) beskriver metoden learning by discovery vilken Bruner utvecklade. Metoden innebär att eleven på egen hand skall upptäcka ett ämnes kärna som den därefter bygger vidare på genom närmare undersökningar. På detta vis äger eleven inlärningsprocessen vilket leder till att lärandet förankras i elevens eget tänkande. Eleven kan på detta sätt bli ägare till sin egen konstruerade kunskap. Bruners (citerad i Imsen, 2006) grundläggande idé var att undervisningen skall utformas enligt denna metod redan för de yngre eleverna. Detta låg bakom hans tanke om spiralprincipen vilken innebär att samma ämneskärna eller område inom undervisningen kan upprepas i undervisningen i mer avancerad form i takt med elevernas utveckling.

2.1.5 Konstruktivistiskt perspektiv i undervisningen

Imsen beskriver konstruktivistiska arbetsformer som: ”/…/ progressivt orienterade undervisningsmetoder där eleven arbetar problemorienterat, undersökande och delvis självständigt” (2006, s. 396). Hon beskriver vidare hur undervisningen baseras på en induktiv metod där eleverna kan arbeta enskilt eller i grupp där de aktivt arbetar utifrån konkreta situationer. Genom att identifiera problem och försöka lösa dem på egen hand skall de, med visst stöd av läraren, dra ut det gemensamma och generalisera. På detta sätt synliggörs och befästs lärandeobjektet utifrån elevernas egna erfarenheter.

2.2 Matematikundervisning genom problemlösning

I Sverige har det bedrivits forskning inom detta område tidigare men denna har dock främst varit inriktat mot högre årskurser, från mellanstadiet och uppåt. I andra länder som till exempel USA har forskning pågått inom området i flera decennier. Denna forskning har i sin tur påverkat landets kursplaner inom matematik vilka har fått allt större fokus på matematikundervisning genom problemlösning (Hodgson, 1995).

För att förtydliga vad matematikundervisning genom problemlösning innebär skall jag börja med att redovisa de olika sätt vi kan se på undervisningen kring problemlösning. Taflin redogör för tre olika synsätt på problemlösning inom skolans matematikundervisning (Schoenfeld, citerad i Taflin, 2007):

- ***Matematikundervisning för problemlösning***
  Eleverna undervisas för att lära sig matematik som de kan ha användning av för att kunna lösa problem. I undervisningen läggs även fokus på att utveckla elevens förmåga att överföra sina matematiska kunskaper mellan olika kontexter.

- ***Matematikundervisning om problemlösning***
  Eleverna undervisas i olika strategier och modeller för att lösa problem; med andra ord lära sig lösa problem med hjälp av olika metoder. I undervisningen läggs stort fokus på att utveckla elevens förmåga att välja lämpliga strategier för att lösa ett problem.

- ***Matematikundervisning genom problemlösning***
  Eleverna introduceras till ett matematiskt område genom att de får lösa ett problem. Eleverna upptäcker det matematiska området som en respons på lösningen av problemet. I undervisningen läggs stort fokus på att ta fram väl valda problem där eleverna kan utgå ifrån sin egen verklighet för att sedan närma sig det mer abstrakta inom ett matematiskt område.

Som vi förstår av ovanstående finns det flera olika motiv till att använda problemlösning inom skolans matematikundervisning. Taflin (2007) argumenterar inte särskilt för något av de olika undervisningssätten men poängterar dock att problemlösning ska vara det centrala i all matematikundervisning med hänvisning till den då gällande kursplanen i Lpo 94. Jag kommer återkomma till kopplingen mellan matematikundervisning genom problemlösning och kursplanen i matematik under avsnittet Lgr 11.

Diana V. Lambdin anser att lärarens mål i undervisningen skall vara att få eleverna att förstå matematiken:

> A teacher's goal must be to help students understand mathematics; yet understanding is not something that one can teach directly. No matter how kindly, clearly, patiently, or slowly teachers explain, they cannot *make* students understand. Understanding takes place in the students' minds as they connect new information with previously developed ideas, and teaching through problem solving is a powerful way to promote this kind of thinking. (Lambdin, 2003, s. 11)

Hon beskriver hur elevernas förståelse utvecklas utifrån deras tidigare utvecklade kunskaper och att undervisning genom problemlösning kan främja denna utveckling. Lambdin redogör för sex viktiga orsaker till att eleverna skall utveckla förståelse inom matematiken (2003, ss. 7-11):

Understanding is Motivating; att förstå något är väldigt tillfredsställande och motiverande medan det inte finns något som är så frustrerande som att inte förstå. Dessa känslor kan vara avgörande för en elevs fortsatta framgång vid matematikinlärningen.

Understanding Promotes More Understanding; när man ställs inför ett matematiskt problem börjar man med att använda de räknemetoder man använt förut. Om dessa metoder inte har förståtts i sin helhet tidigare finns det därmed möjlighet att fördjupa förståelsen ytterligare.

Understanding Helps Memory; att ha en fundamental förståelse för ett begrepp och hur det används är lättare att memorera än matematiska idéer och fakta som inte är kopplade till något sammanhang eller till någon förståelse.

Understanding Enhances Transfer; ett av skolans viktiga uppdrag är att förbereda eleverna för livet efter skolan. För detta krävs att eleverna skall kunna överföra skolans kunskap till världen utanför klassrummet. För att kunna överföra sina kunskaper till nya situationer krävs att man har en djupare förståelse av det inlärda.

Understanding Influences Attitudes and Beliefs; när eleverna får möjligheter att förstå matematikens struktur och logik känner de självförtroende och blir positivt inställda till att ta sig an nya utmanande problem.

Understanding Promotes the Development of Autonomous Learners; genom att arbeta med problemlösning kontinuerligt i undervisningen lär sig eleverna att se på matematik som en utmaning där de genom att ta kontroll över sitt eget lärande och utveckla förståelse kan få uppleva att de utfört en prestation på egen hand.

Man skulle kunna uttrycka det som att matematikundervisning genom problemlösning skall bygga broar mellan elevens vardagsuppfattningar av matematik och de mer formella matematiska kunskaper som eleven förväntas förvärva i skolans matematikundervisning. Detta brobygge är en process som utvecklar elevernas förståelse, engagemang, lust och förmågor inom matematiken (Hagland et al., 2009).

2.2.1 Lärandeprocess i sex nivåer

Gudrun Malmer (2002) anser att den bidragande orsaken till elevers tidiga utslagning i matematik är att de inte får tillräckligt med tid och stöd för att lära in och befästa de grundläggande matematiska begreppen. Hennes många år av erfarenhet, både inom skolan och inom forskningen, har resulterat i en sammanställning av de sex inlärningsnivåer i elevernas läroprocess vilka hon anser nödvändiga att utgå i från för att nå en framgångsrik matematikundervisning för alla elever**: erfarenheter, konkretisering, representations-former, abstrakt symbolspråk, tillämpning och kommunikation**. Malmer kopplar dessa olika nivåer till en problemlösningsbaserad matematikundervisning. Jag har valt att beskriva de sex nivåerna utifrån flera olika forskares perspektiv på matematikundervisning genom problemlösning för att ge en mer heltäckande bild.

Erfarenheter

Malmer anser att: ”undervisningen måste ta sin utgångspunkt i elevernas verklighet och anpassas efter deras varierande förutsättningar” (2002, s. 31). Som lärare måste man alltså lyssna till elevernas erfarenheter och vilka associationer de gör. Med erfarenheter avses de olika situationer som eleverna har upplevt i det vardagliga livet. Dessa erfarenheter ligger till grund för elevens fortsatta möjligheter att närma sig det abstrakta inom matematiken. Denna abstrakta nivå är starkt kopplad till den konkreta nivå där eleverna bildar nya erfarenheter med hjälp av laborativt material eller verklighetsanknutna situationer.

Konkretisering

Malmer (2002) menar att konkretisering innebär att låta eleverna få undersöka och upptäcka utifrån deras lust och nyfikenhet. För att en elev skall kunna förstå det abstrakta inom matematiken måste eleven ta utgångspunkt i från det konkreta. Häggbom (2000) menar att konkretisering kan handla om att arbeta laborativt där eleven får arbeta med olika slags laborativt material. Det kan även handla om att koppla en uppgift eller ett problem till en, för eleven, verklighetsanknuten händelse eller situation. Häggbom beskriver vidare hur konkretionen blir ett slags hjälpmedel för eleven att få erfarenhet av de tankeprocesser som bör föregå mekanisk räkning. Eleven genomgår alltså en utvecklingsprocess från det konkreta för att närma sig det abstrakta. Jag skall nedan beskriva vad de två sätten att konkretisera innebär.

Laborativt material

Laborativt material kan vara vardagliga föremål som finns i klassrummet, skolgården och ute i naturen till exempel klossar, kulor, pärlor och stenar. I klassrummet kan även finnas laborativt material som är framtaget med avsikt att användas i undervisningen till exempel mynt, geobräde, multibas, spel och dataprogram.

Löwing (2004) beskriver vikten av att konkretisera undervisningen med hjälp av laborativt material men menar samtidigt att det är viktigt att som lärare vara medveten om att materialet i sig bara är en artefakt som inte kan konkretisera något för eleven. Det krävs att läraren kan presentera och vidarebefordra till eleven hur materialet kan utnyttjas för att det skall få en mening för elevens förståelse.

Verklighetsanknuten händelse eller situation

Eriksson (1996) beskriver hur barn, för att bilda begrepp och begreppsrelationer, behöver konfronteras med verkligheten som underlag. Det kan handla om att eleverna får en uppgift av läraren som innefattar ett problem vilket utgår från en situation i elevernas vardag till exempel när de går till affären och handlar. Läraren har ett tydligt lektionsmål, till exempel att introducera ett matematiskt begrepp, men låter eleverna laborera fritt kring lösningen av problemet. Björkqvist beskriver hur en viktig aspekt kring detta är ”huruvida problemet upplevs som lösarens ’eget’ eller ’tillhör en annan’.” (2001, s. 118). Vidare beskriver han hur denna aspekt anses spela en avgörande roll för en elevs motivation och förmåga att sätta uppgiften i samband med egna erfarenheter. Det är således viktigt att läraren använder sig av uppgifter som eleverna kan koppla till sin egen verklighet men även att läraren kan förmedla uppgifterna till eleverna så att de upplever och tar till sig dem som sina egna. Detta leder i sin tur att eleverna kan bli upphovsmän till sin egen konstruerade kunskap vilket är en av de viktigaste hörnstenarna i undervisningsmetoden.

Det är dock viktigt att göra en noga avvägning vid val av problem. Hagland et al. (2009) menar att ett problem som ingår i en situation eller händelse vilken eleven inte förstår kan i sig utgöra ett hinder för eleven att lösa problemet. Vidare beskriver Hagland et al. att en situation som är allt för bekant för eleven kan leda till att fokus sätts på situationen istället och att det matematiska sambandet hamnar i skymundan.

Representationsformer

Malmer (2002) beskriver hur elever hjälps av att få omstrukturera sina tankar i en representationsform som de själva valt. De får möjlighet att synliggöra sina tankar vilket kan handla om att rita en bild, tabell, mönster etc. Det kan även handla om att berätta om vad de gjort. På så sätt får de möjlighet att pröva sina tankegångar inför andra. Pimm (citerad i Taflin, 2007) menar att användandet av olika representationsformer handlar om att på nytt presentera något för någon. Björkqvist (citerad i Taflin, 2007) beskriver representationsformer som ett sätt att representera begrepp. Taflin redovisar fyra olika typer av representationsformer (2007, s. 68):

- Konkret representation där eleven avbildar ett verkligt eller tänkt material.
- Logisk/språklig representation där eleven använder sitt språk.

- Aritmetik/algebra/analys där eleven använder matematiska symboler.
- Grafisk/geometrisk representation där eleven visar i bild hur en uppgift är löst med hjälp av t.ex. tabell, diagram eller kordinatsystem.

Hagland et al. benämner ovanstående representationsformerna som uttrycksformer vilka skall fungera som ”redskap och stimulans för tankearbete och kommunikation” (2009, s. 33). När eleverna arbetar med ett problem kan de med hjälp av de olika representationsformerna beskriva de begrepp och strategier de använt.

Abstrakt symbolspråk

Det abstrakta symbolspråket innefattar matematiska uttryck, begrepp, formler, ekvationer etcetera. Malmer (2002) beskriver hur många lärare, på grund av tidsbrist, startar ifrån denna nivå. Hon beskriver vidare hur eleverna då saknar nödvändiga erfarenheter vilket leder till att de inte har förutsättningar att förstå det abstrakta symbolspråket. Malmer menar i likhet med Lambdin att: ”/…/ en sak blir inte mera begriplig för att vi upprepar en förklaring, inte ens om den sker med ’större bokstäver’!” (Malmer, 2002, s. 37). Malmer anser att orsaken till att så många elever klarar av att hålla sig flytande inom matematikundervisningen är beroende av deras memoreringsförmåga. Om en undervisning baseras på elevers memoreringsförmåga kommer eleverna stöta på svårigheter då de får svårare uppgifter och minnet inte räcker till. Därför behöver undervinigen syfta till att bygga upp elevernas förståelse från grunden utifrån de tre första nivåerna innan eleverna ger sig på nivån som innefattar det abstrakta symbolspråket.

Tillämpning

Malmer (2002) beskriver hur produkten i lärandeprocessen är kunskap. Hon beskriver vidare: ”Saknas förståelse kan man inte tala om verklig kunskap och då kan den heller inte tillämpas i nya och delvis förändrade moment” (2002, s. 40). Undervisningen skall bygga på att utveckla elevernas förståelse för matematiken. Detta är en förutsättning när matematiken skall tillämpas i andra sammanhang som till exempel vardagslivet, högre studier eller arbetslivet. Hagland et al. (2009) beskriver denna nivå med hjälp av en mur som de kallar ”KLAG-o-muren” vilken baseras på de fyra representationsformer jag redogjort för ovan. Hagland et al. beskriver vidare att på ena sidan av denna mur finns omvärlden, den konkreta, där enheterna finns till exempel kr, m/s, dl eller mm. På andra sidan muren finns matematikens värld, den abstrakta, där de matematiska uttrycken finns till exempel begrepp, formler eller ekvationer. Eleven måste ta sig över ”muren” för att kunna koppla ihop den värld de lever i med den matematiska värld deras tankar figurerar i, åt båda håll (Hagland et al., 2009).

De länder som ser problemlösning som matematikundervisningens kärna anser att eleverna lär sig för framtiden då de förväntas kunna lösa problem inom flera områden genom att tillämpa kunskaperna från skolans undervisning, detta benämns som transfer (Björkqvist, 2001). Malmer (2002) anser att kopplingen mellan laborativt arbete, logiskt tänkande och transfer till det abstrakta är en viktig tillgång i undervisningen för att utveckla elevernas matematiska förståelse.

Kommunikation

Genom att eleverna får arbeta i par eller grupper ges de möjlighet att samtal om matematik och sätta ord på sina tankar. Malmer (2002) menar att matematiken ger möjlighet att utveckla förmågor som reflektion, argumentation och att kritiskt granska. Lester (1996) beskriver hur det socio-kulturella sammanhanget påverkar individens möjligheter inom matematiken. Elever samspelar med varandra när det i grupp skall lösa ett problem. Genom att värdera varandras resonemang och strategier kan de tillsammans reflektera kring problemet och utveckla varandras kunskaper. Hagland et al. (2009) menar att det sker en förhandling kring insikter och kunskap eleverna emellan. Eleverna samspelar även med läraren och lärarens attityder till matematikämnet och de problemlösande aktiviteterna är avgörande för hur framgångsrik undervisningen skall bli.

2.2.2 Lektionsplanering

För att få ett lyckat utfall av undervisningen bör man som lärare upprätta en lektionsplanering vilken skall vara lätt att följa och som skall innefatta de olika moment som läraren avser att genomföra under lektionen kopplat till en syftesförklaring. Taflin (2007) beskriver en problemlösningsprocess som Lester har upprättat vilken skulle kunna likställas med en lektionsplanering. Denna problemlösningsprocess är indelad i tre faser: problemet presenteras, försöka att lösa problemet och diskussion kring lösningen av problemet. Lester har sammanfattar dessa faser i en tabell i vilken han även beskriver lärarens samt elevens roll i processen (Lester, citerad i Taflin, 2007 s. 172):

Tabell 1. Problemlösningsprocessens faser

Fas	Planerat innehåll	Lärarens roll	Elevens roll
Problemet presenteras	Eleven upptäcker och tillägnar sig problemet	Presenterar problemet för klassen Besvarar frågor Organiserar så att eleverna kan arbeta med problemet	Läser eller lyssnar på problemet och förstår villkoren Ställer klargörande frågor Antecknar relevant information
Lösning av problemet Försök och ansträngning	Eleven upptäcker och använder sig av en plan för att lösa problemet	Uppmanar eleverna att dela idéer med varandra Ställer frågor för att uppmärksamma eleverna på relevant information Ger ledtrådar för att hjälpa eleverna att lyckas (som en sista utväg)	Arbetar själv eller med kamrater för att lösa problemet
Problem och lösning Diskussion	Eleven får nya insikter via problemet och bra förhållande till problemlösning	Tillåter eleverna (3-5) att demonstrera sina lösningar Påtalar nödvändigheten av att kontrollera arbetet Hjälper till att visa på alla tänkbara generaliseringar	Inbjuds till att diskutera sina lösningar Lyssnar på och diskuterar andras lösningar Försöker att göra generaliseringar Försöker att analysera vad som fungerar och varför

2.2.3 Elevens och lärarens roll i undervisningen

I ovanstående tabell ges en tydlig bild av vilka roller elever samt läraren förväntas inta i matematikundervisning genom problemlösning. Decennier av forskning utifrån det konstruktivistiska perspektivet har gjort oss uppmärksamma på hur eleverna själva måste överbrygga klyftan mellan deras egna erfarenheter i vardagen och skolans kunskaper (Wistedt, 2001). Eleven kan dock inte lämnas helt på egen hand i detta konstruktionsarbete. Läraren har här en viktig funktion att fylla.

Att undervisa i matematik genom problemlösning är en utmaning för lärare som själva har lärt sig matematik på det mer traditionella sätt där färdighetsträning premieras (Sakshaug & Wohlhuter, 2010). De måste helt enkelt ändra sina grundläggande uppfattningar om vad matematik handlar om och utveckla sin förståelse för hur elever lär sig. Läraren spelar en viktig roll för elevernas inställning till matematiken och matematikundervisningen. Hagland et al. (2009) beskriver hur lärarens roll bör vara att bland annat skapa en miljö för lärande där hon förmedlar ett engagemang för matematikämnet samtidigt som hon är bärare av det matematiska språket. Vidare beskriver de hur läraren skall ge vägledning och stöd utifrån elevernas tankar och uppmuntra enskilda elevers tankar och idéer så att de kan lyftas fram i gemensamma diskussioner. Lärarens uppgift är även att välja, utveckla och revidera problem som kan utveckla elevernas förstelse för matematiska begrepp, procedurer samt utveckla deras förmåga att resonera, kommunicera och lösa problem (Lester & Cai, 2010).

2.2.4 Elevernas engagemang

Jag har tidigare beskrivit hur matematikundervisning genom problemlösning innebär att läraren använder problemlösning som en drivkraft för att stimulera elevernas engagemang. Intressant i detta sammanhang är då att redogöra för de faktorer som anses avgöra en elevs engagemang. Kong, Wong, & Lam (2003) beskriver i deras studie utvecklandet av ett instrument för att identifiera elevers engagemang inom matematikundervisningen. Deras resultat visar på tre konstruerande faktorer: kognitivt, beteendemässigt och känslomässigt engagemang. De beskriver vidare hur det kognitiva engagemanget baseras på elevernas inlärnings-, tänkande- och problemlösningsstrategier; det beteendemässiga engagemanget baseras på elevernas intresse, flit och hur mycket tid de ägnar åt skolarbetet; och det känslomässiga engagemanget baseras på elevens intresse, uppnåendemål och känslor inför undervisningen. Dessa tre konstruerande faktorer står i nära relation till varandra och utgör på så vis grunden till elevernas engagemang vid undervisningen.

Kong et al. (2003) anser att konstruerandet av det kognitiva engagemanget står i nära relation till inlärningsmetoden; de menar att vid djupgående inlärningsstrategier aktiveras det kognitiva engagemanget medan det vid ytliga inlärningsstrategier leder till ett mindre kognitivt engagemang. Av detta kan vi förstå att vid användandet av en undervisningsmetod där eleverna har möjlighet att erhålla en djupare förståelse av matematiken finns det goda förutsättningar att elevernas engagemang också utvecklas.

Nationalencyklopedin beskriver bl.a. ordet engagemang enligt följande: inriktning av krafter och intresse (Nationalencyklopedin, 2012). Detta kan överfört till en undervisningssituation kunna tolkas som att eleverna upplever undervisningen meningsfull och intressant vilket stimulerar deras vilja att lära.

2.2.5 Rika matematiska problem

Vilka problem är det då som kan utveckla elevers förståelse för matematiken? Lester & Cai (2010) använder begreppet *worthwhile problems* för att beskriva de problem som har potential att utveckla elevers matematiska förmågor. De beskriver vidare hur ett *worthwhile problem* skall upplevas som en utmaning för eleverna och att det skall uppmuntra till hårt arbete för att nå en lösning samtidigt som eleverna undersöker matematiska idéer som motsvarar målen inom kursplanen. Taflin har genom att studera problem som forskare använt i sina studier definierat vad som menas med rika problem. Hon beskriver vilka kriterier som skall uppfyllas för att ett problem skall benämnas som rikt problem (Taflin, 2007, s. 11):

1. Problemet ska introducera till viktiga matematiska idéer.
2. Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
3. Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
4. Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika matematiska idéer och representationer.
5. Problemet ska kunna initiera till matematiska resonemang utifrån elevernas skilda lösningar, ett resonemang som visar på olika matematiska idéer.
6. Problemet ska kunna fungera som brobyggare.
7. Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

Hagland, et al. (2009) genomförde ett forskningsprojekt som de kallar för Rika problem i matematikundervisningen (RIMA). Syftet med projektet var att undersöka hur lärare arbetar med problemlösning och vad elever kan lära sig genom att syssla med problemlösning samt hur eleverna själva uppfattade detta arbete. Utifrån denna studie har de sammanställt flera rika matematiska problem där de beskriver vilka matematiska begrepp, metoder och uttrycksformer som kan utvecklas då eleverna arbetar med respektive problem (Hagland, Hedrén, & Taflin, Rika matematiska problem, 2009). Det är tre av dessa problem som använts i denna studie.

Det kan i detta sammanhang vara lämpligt att definiera vad som menas med matematiska idéer och matematiska resonemang. Dessa båda begrepp utgör även grunden vid operationaliseringen av studiens ena huvudfråga vilken berör elevernas förmåga att föra matematiska resonemang.

Matematiska idéer

Taflin (2007) definierar matematiska idéer som de begrepp, procedurer och strategier elever använder sig av för att lösa en matematisk uppgift. Ett begrepp består av en term till exempel yta som kan definieras, 2-dimensionell punktmängd i rummet, och kan beskrivas av en referent, area (Taflin, 2007). Procedurer är det sätt man utför en uppgift till exempel med hjälp av addition eller subtraktion. Strategier kan beskrivas som de metoder som används för att lösa ett problem. Det kan handla om att gissa och prova, rita bilder, leta efter mönster, göra en tabell, skissa på en ekvation (Taflin, 2007).

Matematiska resonemang

Matematiska resonemang innebär att eleverna bearbetar sina matematiska idéer med matematikens olika representationsformer. Detta kan till exempel göras muntligt, med hjälp av bilder och laborativt material eller skriftligt med målet att eleverna skall kunna dra slutsatser om matematiska idéer för att kunna generalisera (Taflin, 2007). Detta kan uttryckas som det tankesätt en elev använder sig av vid arbetet med ett problem och som den använder sig av för att motivera sina idéer i sin strävan att nå en lösning på problemet.

2.3 Styrdokumenten

I detta sammanhang är det relevant att studera vilka kopplingar undervisningsmetoden har till gällande styrdokument. Både tidigare läroplanen, Lpo 94, och nya läroplanen, Lgr 11, hänvisar till problemlösande aktiviteter inom undervisningen.

2.3.1 Lpo 94

Flera forskare kopplar den tidigare läroplanen, Lpo 94, till det konstruktivistiska perspektivet och matematikundervisning genom problemlösning. Malmer (2002) beskriver hur den tidigare kursplanen i matematik ger tydligt uttryck för konstruktivistiska tankegångar där det övergripande målet är att eleverna skall få en grundläggande förståelse för matematiska begrepp. Hon beskriver även hur en problemlösande inriktning inom matematikundervisningen, vilket enligt henne tydligt framgår i styrdokumenten, är av största vikt för att målen skall kunna uppnås. Hagland et al. (2009) beskriver hur grundskolans kursplan för matematik utifrån Lpo 94 framhåller att problemlösning alltid haft en central roll i matematikundervisningen. De beskriver vidare kursplanens betoning på att eleverna bör få arbeta med problemlösning för att känna glädje och tillfredställelse vilket skapar ett intresse för matematiken. Taflin (2007) menar att kursplanen beskriver problemlösning som en viktig del av matematikundervisningen och att undervisningen skall verka för att eleverna skall förstå att problemlösning används i verkligheten.

2.3.2 Lgr 11

Studerar man den nya läroplanen, Lgr 11, finner man samma inriktning mot problemlösande aktiviteter som i den tidigare läroplanen. I läroplanens övergripande mål och riktlinjer beskrivs inriktningen på skolans arbete genom att definiera de kunskaper som alla elever bör ha utvecklat när de lämnar grundskolan, nämligen att:

- kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet,
- kan lösa problem och omsätta idéer i handling på ett kreativt sätt,
- kan lära, utforska och arbeta både självständigt och tillsammans med andra och känna tillit till sin egen förmåga, (Skolverket, 2011, s. 13)

Ovanstående förmågor är viktiga att utveckla för att eleverna skall kunna ta del av och verka inom vårt moderna samhälle där matematiken spelar en allt viktigare roll inom högre studier men även inom arbetslivet. Matematikundervisningen har därför en stor betydelse för elevernas möjligheter i framtiden. Vidare beskrivs i de övergripande målen lärarens roll inom undervisningen vilken har betydelse för elevernas möjligheter att lyckas i sitt lärande:

Läraren ska

- ta hänsyn till varje enskild individs behov, förutsättningar, erfarenheter och tänkande,
- stärka elevernas vilja att lära och elevens tillit till den egna förmågan,
- ge utrymme för elevens förmåga att själv skapa och använda olika uttrycksmedel,
- organisera och genomföra arbetet så att eleven
  - utvecklas efter sina förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla hela sin förmåga,
  - upplever att kunskap är meningsfull och att den egna kunskapsutvecklingen går framåt,
  - successivt får fler och större självständiga uppgifter och ett ökat eget ansvar,

– får möjligheter till ämnesfördjupning, överblick och sammanhang, (Skolverket, 2011, s. 14)

Den nya kursplanen i matematik inleds med följande ord:

> Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet som är nära kopplad till den samhälleliga, sociala och tekniska utvecklingen. Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser. (Skolverket, 2011, s. 62)

En tydlig koppling görs mellan skolans matematiska aktiviteter, vilka till sin natur baseras på kreativitet, reflektion och problemlösning, och behovet i det samhälleliga vardagslivet. I syftesdelen i kursplanen beskrivs vad undervisningen i matematik skall syfta till. Här framgå det tydligt hur en matematikundervisning som är kopplad till elevernas vardag och erfarenhet bör vara huvudfokus för undervisningen. Detta för att skapa intresse för ämnet:

> Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden. Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar intresse för matematik och tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang. Den ska också ge eleverna möjlighet att uppleva estetiska värden i möten med matematiska mönster, former och samband. (Skolverket, 2011, s. 62)

Vidare beskrivs vikten av att utveckla elevernas förmåga att lösa problem med hjälp av matematikens olika uttrycksformer och hur detta kan hjälpa eleverna att transferera mellan matematiska kunskaper och andra kontexter:

> Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska situationer samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer. (Skolverket, 2011, s. 62)

Kursplanen i matematik framhåller även betydelsen av att eleverna får samtala med varandra för att kunna utveckla sin förmåga att resonera och argumentera. På detta sätt kan de även utveckla sin förmåga att använda de olika matematiska uttrycksformerna dvs. de olika representationsformerna:

> Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att argumentera logiskt och föra matematiska resonemang. Eleverna ska genom undervisningen också ges möjlighet att utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang. (Skolverket, 2011, s. 62)

Sammanfattningsvis kan det konstateras att om man som lärare utgår ifrån en matematikundervisning genom problemlösning är möjligheterna stora för eleverna att utveckla sina förmågor enligt de mål som läroplanen förskriver.

2.4 Sammanfattning

Det konstruktivistiska perspektivet utgår ifrån att eleven aktivt medverkar till att konstruera sin kunskap vilket drivs av en kognitiv konflikt då gamla erfarenheter möter nya erfarenheter. Genom att låta yngre elever arbeta med konkret material och problem som är kopplade till deras vardag stimuleras de att använda sina tidigare erfarenheter när de skall möta det nya och abstrakta inom matematiken. Genom att de själva får undersöka ett problem och själva välja de representationsformer de vill använda för att strukturera sina tankar skapas möjligheter till en djupare förståelse av matematiken; vilket i sin tur skapar engagemang och motivation hos eleverna. Denna djupare förståelse skapar också förutsättningar för eleverna att överföra de matematiska kunskaperna till världen utanför klassrummet. Ett konstruktivistiskt perspektiv i undervisningen utgår alltså ifrån att eleverna arbetar undersökande där lärandet förankras i det egna tänkandet. På detta sätt blir de ägare till sin egen konstruerade kunskap. Lärarens roll är att vara vägledande samt ge stöd och uppmuntra enskilda elevers tankar. Läraren har även i uppgift att välja lämpliga problem vilka kan utveckla elevernas matematiska förståelse. I detta sammanhang talar vi om rika matematiska problem vilka skall introducera till begrepp, procedurer och strategier. De skall vara lätta att förstå och upplevas som en utmaning samtidigt som de skall kunna lösas på flera olika sätt och initiera till matematiska resonemang. Dessa matematiska problem skall även fungera som brobyggare både till andra matematiska områden och till elevernas vardag.

Inom den nya kursplanen för matematik inom Lgr 11 finns ett stort stöd för undervisningsmetoden. Där beskrivs bland annat hur undervisningen skall syfta till att utveckla: intresse för matematik, kunskaper om och förmåga att använda matematik i vardagen, kunskaper att formulera och lösa problem, förmåga att använda olika matematiska uttrycksformer samt förmåga att föra matematiska resonemang (Skolverket, 2011). Utifrån dessa direktiv kan vi förstå att eleverna behöver en undervisning som kan skapa en djupare förståelse för matematiken vilket leder till att eleverna har med sig ett matematiskt tänkande till vidare studier och arbetsliv.

Ovanstående teoretiska anknytning ligger till grund för denna studie. Som jag tidigare nämnt skulle det behövas en mer longitudinell studie för att kunna utvärdera undervisningsmetodens långsiktiga effekter i en årskurs på lågstadiet. Eva Taflin har inom det mer omfattande longitudinella forskningsprojektet RIMA, Rika problem i matematikundervisningen, genomfört en liknande studie med högstadieelever. Hon använde sig av problemet stenplattor vilket syftar till att eleverna skall ta reda på det mönster som bygger upp figurer utgjorda av stenplattor. Mönstren kan sedan uttryckas med en regel och slutligen som en formel (Taflin, 2007, s. 122). Syftet med studien var bland annat att ta reda på vilka matematiska idéer lärare och elever använder sig av när de arbetar med ett matematiskt rikt problem. I studien framkom att matematiska idéer kunde upptäckas av eleverna och att de hade förmåga konstruera sin egen kunskap med hjälp av språkets och kamraternas hjälp. Studien visade även att de matematiska resonemang som fördes elever mellan och mellan elever och lärare är en viktig del av kunskapsprocessen men kräver ett visst stöd från läraren för att dessa skall utvecklas. Lärarens kunskaper i matematik och förståelse för elevernas tankar är därför viktiga i dessa sammanhang.

Som jag tidigare beskrivit har jag inom min studie begränsat mig till att studera vilket engagemang eleverna visar vid arbetet med de rika matematiska problemen samt vilken förmåga eleverna har att föra matematiska resonemang när de arbetar med de rika matematiska problemen. Anledningen till att jag valt att studera elevernas engagemang i undervisningen är för att detta har en avgörande betydelse för elevernas förmåga att konstruera sin kunskap i lärandeprocessen. Anledningen till att jag valt att studera elevernas förmåga att resonera vid arbetet med de rika matematiska problemen är att jag anser detta vara en av de mest kritiska förutsättningarna för att kunna genomföra matematikundervisningen genom problemlösning med elever på lågstadiet. Taflins studie med högstadieelever visade att eleverna hade förmågan att föra matematiska resonemang kring de rika matematiska problemen med visst stöd ifrån lärarens sida. Denna studie kan således komplettera tidigare forskning inom området då den avser att studera lågstadieelevers arbete kring rika matematiska problem.

3 METOD

Inom detta avsnitt har jag för avsikt att redogöra för metodval samt hur urval genomförts för att besvara mina frågeställningar och studiens syfte. De intervjuer och observationer som genomförts kommer att beskrivas mer ingående i en sammanfattning av studiens genomförande. De rika matematiska problem som använts i studien samt hur insamlad data har analyserats kommer redogöras för. I detta sammanhang kommer även de etiska principer som studien förhåller sig till att redovisas. Slutligen förs en metoddiskussion kring studiens säkerhet (reliabilitet), giltighet (validitet) och generalitet.

Studiens avsikt är att undersöka möjligheterna att undervisa i matematik genom problemlösning. Det är dock svårt att utvärdera undervisningsmetoden i sin helhet inom denna studie då den är begränsad både i tid och i omfattning. Därför har jag valt att fokusera på två områden i min undersökning vilka jag anser viktiga för om undervisningsmetoden skall fungera i de tidigare åldrarna: hur elevernas engagemang i matematiken påverkas samt vilken förmåga de har att föra matematiska resonemang utifrån de rika matematiska problem de arbetar med.

Studien genomfördes i en årskurs 2 där jag själv, i rollen som lärare, testade undervisningsmetoden.

3.1 Metodval

Jag har valt att använda mig av kvalitativa forskningsmetoder i min studie. Vid kvalitativ forskning ligger fokus på process, innebörd och förståelse (Merriam, 1994). Till en början hade jag för avsikt att genomföra studien av undervisningsmetoden i ett land där det finns en kursplan som föreskriver denna typ av undervisning. Jag konstaterade dock att tiden blev för knapp för att kunna genomföra en sådan studie och bestämde mig för att genomföra studien på en svensk skola. Det slutliga metodvalet resulterade i att utföra en etnografisk fallundersökning med etnometodologisk ansats. Merriam (1994) beskriver en etnografisk fallundersökning som en fallstudie där fokus ligger på en intensiv, holistisk och analytisk beskrivning där det finns inslag av sociokulturella analytiska drag. En fallstudie är en undersökning av en specifik företeelse som till exempel ett program, skeende eller en metodik där detta avgränsade system väljs för att det är viktigt och intressant och för att forskaren vill få en bättre förståelse av företeelsen (Merriam, 1994). Denna fallstudie förväntades således förmedla en fördjupad förståelse för matematikundervisning genom problemlösning inom grundskolans tidigare åldrar.

Den etnometodologiska ansatsen kan beskrivas som att forskaren vill skapa en vetenskaplig förståelse av människors sätt att reda ut och göra vardagen förståelig och hanterbar (Pilhammar Andersson, 1996). I denna studie, vilken har en experimentell karaktär, handlar det om att skapa en förståelse för hur elevernas engagemang i matematiken påverkas vid matematikundervisning genom problemlösning samt vilken förmåga eleverna har att föra matematiska resonemang utifrån de rika matematiska problemen de får arbeta med.

Avsikten med denna fallstudie är att den skall innehålla en kombination av deskriptiv och tolkande information. Samtidigt som jag vill redogöra för den företeelse jag avser att studera kommer jag således att tolka denna deskriptiva information för att kunna belysa och eventuellt stödja de teorier och tidigare forskning inom området som jag tagit del. Datainsamling har skett i form av fältanteckningar och ljudinspelningar i samband med observationer och intervjuer vid tre lektionstillfällen där jag använt undervisningsmetoden. Jag valde vid varje lektion ut en elevgrupp vilken jag observerade. Denna elevgrupps samtal spelades in med min mobiltelefon. Efter varje lektion genomförde jag strukturerade samtalsintervjuer av respondentkaraktär med den elevgrupp jag observerat under lektionen med syftet att komplettera det som inte är observerbart vid en observation t.ex. elevernas känslor och tankar. Detta gjordes för att få en helhetsbild av elevernas handlingar och känslor relaterat till genomförd lektion. Den ordinarie läraren har använts som observatör vid samtliga lektionstillfällen. Hon har observerat övriga gruppers arbete med de rika matematiska problemen och använt sig av samma observationsschema som jag själv har utgått ifrån vid mina observationer. Intervjuer gjordes med läraren inför samt efter varje lektion då intervjufrågorna kopplades till det som läraren observerat under lektionen. Inför intervjuerna hade jag upprättat två intervjuguider, en för elevintervjuerna och en för lärarintervjun. Användandet av dessa tre olika datainsamlingsmetoder har skapat möjlighet till triangulering vilket innebär att jag har kunnat ta in flera olika perspektiv vid undersökandet av forskningsfrågan. I samband med ovanstående datainsamlingsmetoder har jag även genomfört en litteraturstudie.

3.2 Urval

Vid mitt urval av undersökningsgrupp gjorde jag ett ändamålsenligt urval (purposive sample). Goetz & LeCompte (citerade i Merriam, 1994) beskriver detta som ett kriterierelaterat urval där forskaren först beskriver kriterierna för dem som skall inkluderas i en undersökning; för att sedan söka reda på ett urval som passar kriterierna. De avgörande kriterierna inom denna studie var: en elevgrupp som jag var bekant med sedan tidigare; där jag förmodligen snabbt skulle vinna tillträde och förtroende samt en elevgrupp på lågstadiet dvs. åk 1-3. Det första kriteriet var viktigt eftersom jag inte ville behöva lägga ned allt för mycket tid på att skapa en relation med eleverna. Det andra kriteriet var viktigt för studiens syfte; att undersöka möjligheterna för elever i årskurs 2 att lära sig matematik genom problemlösning. Valet föll därför på en elevgrupp som jag arbetat med vid några tillfällen tidigare som vikarie.

Inför varje lektion bad jag läraren sätta ihop lämpliga elevgrupper med en varierande kunskapsnivå inom gruppen. Detta gjordes för att kunna spegla flera olika elevperspektiv utifrån varierande kunskaper i matematik. Därefter bad jag läraren att välja ut en grupp som skulle observeras inför varje lektion med premisserna att det inom gruppen fanns potential att det skulle komma till stånd någon form av matematisk diskussion. Syftet med detta urval var att jag inte ville hamna i den situationen att den grupp jag observerade inte kunde få gång en diskussion.

De efterföljande elevintervjuerna genomfördes med de elever som hade observerats under lektionen.

3.3 Avgränsning

Inom denna studie har jag valt att fokusera på elevernas möjligheter att lära vid undervisning genom problemlösning. Givetvis har läraren en stor betydelse för hur framgångsrikt denna undervisningsmetod är. Jag har dock inte haft möjlighet att observera en lärare som använder undervisningsmetoden i sin ordinarie undervisning och har därför inte haft möjlighet att inom denna studie gå in och analysera lärarens roll vid de utförda lektionerna. Orsaken är att det är jag själv som agerat lärare vid lektionerna då den ordinarie läraren inte har någon erfarenhet av undervisningsmetoden sedan tidigare. Detta medför en svårighet att ge en rättvisande bild och analys av lärarens agerande. Lärarens roll har därför berörts i begränsad utsträckning inom denna studie och redovisas främst i den teoretiska anknytningen.

3.4 Genomförande

Läraren och skolans rektor tillfrågades i god tid innan studiens genomförande. De informerades om studiens syfte och frågeställningar samt hur den var tänkt att genomföras. De var båda positivt inställda till medverkan. Tillståndsförfrågan till elevernas föräldrar skickades hem i god tid inför studien med frågan om deras barn fick lov att medverka vid observationer och intervjuer i samband med studiens genomförande.

Inför lektionernas genomförande sändes observationsschema samt intervjufrågor ut till läraren för påseende. Inför första lektionen genomfördes en intervju med läraren kring hennes undervisningsmetod i matematik och hur hon brukar arbeta med problemlösning. Inför varje enskild lektion genomfördes en intervju kring hur läraren skulle undervisa den aktuella lektionens innehåll utifrån sitt arbetssätt.

Vid varje lektion introducerade jag eleverna i arbetet med problemuppgiften och eleverna fick ställa frågor om det var något som var oklart. Jag visade på laborativt material som fanns tillgängligt till respektive uppgift till exempel mynt, klossar eller papper. Jag berättade även vilken grupp jag skulle observera och att deras samtal skulle spelas in samt att dessa elever skulle intervjuas efter lektionen. Därefter fick eleverna sitta själva en stund, ca 5 minuter, och arbeta med problemet. Sedan samlades de i sina grupper och började arbeta tillsammans med problemet. I samband med detta gick jag och satte mig vid den utvalda gruppen som skulle observeras. Jag förde fältanteckningar i det observationsschema jag upprättat. Jag spelade även in elevernas samtal med min mobiltelefon. Samtliga elevsamtal transkriberades. Samtidigt gick den ordinarie läraren runt till de andra grupperna och observerade deras arbete. Hon förde fältanteckningar i observationsschemat. Läraren hade av mig fått uppslag på frågor hon kunde ställa till eleverna för att stödja dem om de körde fast. Dessa frågor använde även jag mig av då jag satt med vid min grupp. Varje lektion avslutades med en gemensam diskussion i helklass där några grupper fick komma fram och redovisa sina lösningar. Varje lektion varade ungefär 45 minuter.

Efter varje lektion genomförde jag intervjuer med de elever som jag observerat under lektionen utifrån intervjuguiden som jag upprättat. Varje intervju tog ca 5-10 minuter. Intervjuerna spelades in med min mobiltelefon och transkriberades.

Efter varje lektion intervjuade jag läraren kring hennes observationer under lektionen utifrån upprättad intervjuguide. Varje intervju tog ca 15 minuter. Dessa intervjuer spelades inte in utan jag antecknade svaren för hand eftersom jag även hade lärarens ifyllda observationsschema som stöd.

3.5 De rika matematiska problem som använts i studien

För att kunna besvara studiens forskningsfrågor har jag vid de genomförda lektionerna använt mig av tre rika matematiska problem. Anledningen till att jag valt dessa problem är att de har av Hagland et al. (2009) analyserats utifrån de sju uppställda kriterier vilka definierar om ett problem kan betraktas som rikt, se sidan 14. Då ett problem definierats som rikt finns de förutsättningar som krävs för att eleverna, då de arbetar med problemet, skall kunna föra matematiska resonemang. Inom dessa kan de komma i kontakt med både nya och gamla matematiska begrepp, procedurer och strategier. Läraren hade för mig berättat att hon börjat introducera multiplikation och ansåg det därför lämpligt att problemen berörde detta område. Två av de valda problemen initierar således till multiplikation, framförallt problemet *Cykelparkeringen* men även problemet *Godisbitarna*.

Ett rikt problem skapar även förutsättningar för eleverna att använda sig av olika representationsformer för att synliggöra sina matematiska resonemang. Ett annat viktigt kriterium är att problemet skall upplevas som en utmaning och kräva en ansträngning. Detta för att eleverna inte skall uppleva problemet som en rutinuppgift (Hagland et al., 2009). Jag kommer nedan beskriva de tre rika problemen samt vilken matematik respektive problem rör.

3.5.1 Godisbitarna

a) 4 godisbitar kostar 2 kronor. Hur många godisbitar får du för 5 kronor?
b) Hitta på ett liknande problem och lös det.

Detta problem berör framförallt proportionalitet och eleverna förmodas komma i kontakt med följande matematiska idéer:

- Begrepp: Dubbelt, hälften, proportionalitet
- Procedurer: Addition, multiplikation, division (hälften)
- Strategier. Rita och måla, laborera med pengar och godisbitar, tabell

3.5.2 Glassarna

Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja på fyra olika smaker. Hon vill ha två glasskulor.

a) På hur många olika sätt kan hon välja sin glass?
b) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Förutsättningar: Varje smak kan väljas högst en gång till varje strut. Kulornas ordning spelar ingen roll dvs. vilken kula som sitter överst resp. underst.

Detta problem berör framförallt kombinatorik - den del av aritmetiken, där man undersöker, på hur många sätt ett givet antal element kan ordnas och sammanställas i grupper. Eleverna förmodas komma i kontakt med följande matematiska idéer:

- Begrepp: lägga till, kombinera.
- Procedurer: Addition, division.
- Strategier. Rita och måla, laborera med ”färgkulor”, rita träddiagram.

3.5.3 Cykelparkeringen

Utanför en förskola brukar det stå tvåhjulingar och trehjulingar. En dag kunde man räkna till 21 hjul.

a) Hur många tvåhjulingar och trehjulingar kunde det stå utanför dagiset den här dagen?
b) Hitta på ett eget liknande problem.

Detta problem handlar framförallt om att fördela ett bestämt antal hjul i ett lämpligt antal grupper i bestämda storlekar. Eleverna förmodas komma i kontakt med följande matematiska idéer:

- Begrepp: Proportionalitet, grupper, mängd, lägga till, kombinera.
- Procedurer: Addition, subtraktion, multiplikation, division
- Strategier. Rita och måla, laborera med konkret material, tabell, diagram

3.6 Analys

Vid analysarbetet av insamlad data har jag använt mig av kategorianalys vilken baserats på de forskningsfrågor denna studie utgår ifrån. Jag har strukturerat upp analysen genom att utgå från de två huvudfrågorna som berör elevernas engagemang samt förmåga att föra matematiska resonemang vid arbetet med de rika matematiska problemen. Utifrån dessa två huvudfrågor har jag sedan kategoriserat de tre datainsamlingsmetoderna: mina observationer vilka inkluderar mina fältanteckningar samt de inspelade elevsamtalen, intervjuer med läraren utifrån hennes observationer samt elevintervjuer. Dessa tre kategorier har därefter analyserats utifrån ett antal underkategorier som baseras på de observationspunkter samt intervjufrågor som använts för att operationalisera huvudfrågorna. Resultatet har sammanställts utifrån de två huvudfrågorna vilka i sin tur har indelats utifrån de områden de berör.

3.7 Etik

Under studiens gång har jag utgått ifrån Vetenskapsrådets forskningsetiska rekommendationer (God forskningssed, 2011). Dessa baseras på fyra grundläggande krav: informationskrav, samtyckeskrav, konfidentialitetskrav och nyttjandekrav vilka skall tas hänsyn till vid forskningens genomförande.

Jag har inför studien således informerat lärare, rektor, elever och vårdnadshavare om studiens syfte, frågeställningar och genomförande. I samband med detta har jag ansökt om tillstånd att genomföra studien hos lärare, rektor, elever och vårdnadshavare vilka har gett mig samtycke till deltagande. Samtycke från elevernas vårdnadshavare anhölls om skriftligt där det informerades om att deltagandet är frivilligt och kan avbrytas närhelst eleven önskar. Jag underrättade även lärare, rektor, elever och vårdnadshavare om att de kommer garanteras anonymitet samt att insamlat materialet kommer behandlas konfidentiellt och endast användas för studiens syfte. Jag har i studien avidentifierat skola, lärare och elever och gett dem fingerade namn.

3.8 Metoddiskussion

De mätinstrument som använts inom denna studie är elevobservationer, elevintervjuer samt lärarintervjuer. Vid de elevobservationerna som har gjorts av mig har fältanteckningar förts samt inspelning av elevsamtal gjorts vilka sedan transkriberats. Läraren har vid de elevobservationer hon gjort fört fältanteckningar. De lärarintervjuer som genomförts har baserats på lärarens elevobservationer. Jag anser att dessa tre mätinstrument har skapat goda förutsättningar att mäta elevernas engagemang samt förmåga att föra matematiska resonemang vid arbetet med problemen. Givetvis kan det finnas faktorer som kan ha påverkat tillförlitligheten. Vid intervjuerna av både elever och lärare kan tillförlitligheten ha påverkats av deras ärlighet men även av deras förståelse och tolkning av både frågor och de situationer som frågorna härrört till. Jag har dock vid dessa intervjuer använt mig av följdfrågor för att klargöra eventuella missförstånd eller feltolkningar. Jag har även varit noga med att genomföra intervjuerna i nära anslutning till de genomförda lektionerna. Detta för att både lärare och elever skall ha lättare att minnas de situationer frågorna berör. Detta har även varit en fördel vid min tolkning av intervjusvaren eftersom jag då haft det observerade från lektionen som underlag. Med hänsyn till ovanstående anser jag att reliabiliteten är god.

Ovanstående tre datainsamlingsmetoder har skapat möjlighet till triangulering vilket innebär att jag har kunnat ta in flera olika perspektiv vid undersökandet av forskningsfrågorna. Vid kvalitativa fallstudier är triangulering användbart för att öka metodens tillförlitlighet (Pilhammar Andersson, 1996). Då jag utöver mina egna tolkningar av de genomförda lektionerna, tagit del av även lärarens och elevernas tolkningar av lektionerna och dess innehåll anser jag att jag erhållit en trovärdig bild av elevernas engagemang samt förmåga att föra matematiska resonemang vid arbetet med problemen. För att förtydliga min analys och tolkning av resultatet har jag även redovisat exempel av elevlösningar, citerat en del elev- och lärarintervjuer samt hänvisat till en del egna fältanteckningar. På detta vis kan läsaren bilda sig en egen uppfattning och förståelse av resultatet. Jag anser därför validiteten som god.

Då denna kvalitativa fallstudie har en begränsad urvalsgrupp är det givetvis svårare att generalisera resultaten, vilket i och för sig inte har varit mitt syfte med denna studie. Ett alternativ hade varit att genomföra en enkätstudie alternativt intervjuer med lärare som använder sig av undervisningsmetoden för att belysa forskningsfrågorna. Jag anser dock en kvalitativ metod som lämpligare i detta sammanhang då den bättre kan synliggöra de komplexa frågor som berör elevers engagemang och förståelse inom matematiken.

En annan faktor som har haft betydelse för studiens resultat är huruvida jag i rollen som lärare har lyckats genomföra lektionen i det avseende som förväntats enligt den lektionsplan som redovisats. Detta har givetvis en påverkan på elevernas resultat vilket i sin tur påverkar studiens resultat. Som nyutbildad lärare och relativt oerfaren utövare av undervisningsmetoden måste detta dock anses som en fördel för resultatets generaliserbarhet. Ett alternativ till att jag själv höll i undervisningen hade varit att jag istället observerade en lärare som använde sig av undervisningsmetoden. Detta har dock varit svårt att finna och således fick jag genomföra undervisningen själv.

Syftet med matematikundervisning genom problemlösning är att läraren leder in eleverna på nya matematiska områden i ett för dem relevant sammanhang. Läraren hade önskemål om att problemen skulle beröra multiplikation vilket två av problemen berörde. Tyvärr fanns det dock begränsade möjligheter för mig att följa upp detta ämnesområde vid de ordinarie matematiklektionerna vilket givetvis skulle vara den naturliga fortsättningen på de genomförda lektionerna.

4 RESULTAT

Resultatet är sammanställt utifrån de två huvudfrågorna inom denna studie vilka rör elevernas engagemang samt förmåga att föra ett matematiskt resonemang vid arbetet med rika matematiska problem. Dessa huvudfrågor har i sin tur genererat underrubriker utifrån de områden som har fokuserats på vid observationer samt intervjuer.

4.1 Elevernas engagemang vid undervisning genom problemlösning

Varje lektion inleddes med en gemensam genomgång av det aktuella problemet. Vid samtliga av dessa genomgångar kunde jag se en förväntan och nyfikenhet hos eleverna inför vad dagens problem skulle handla om, en del frågade mig redan i korridoren när jag kom på morgonen. Jag märkte även en ivrighet hos eleverna att snabbt komma igång och arbeta med problemet:

> De sätter sig nästan direkt och arbetar i sina grupper fastän jag gett dem tid att fundera på egen hand en liten stund. (Fältanteckning lektion 2, Glassarna 2012.04.20)

Eleverna gav inte heller upp, trots att de upplevde uppgifterna svåra till en början. De provade sig fram och lade gärna fram spontana idéer vilka de testade på varandra. Över lag upplevde jag att eleverna uttryckte en glädje och vilja att lösa problemen och en ovilja att ge upp. Detta bekräftas även av lärarens observationer. Hon beskrev elevernas engagemang då eleverna arbetar med problemet *Glassarna* enligt följande:

> Alla elever var engagerade och aktiva under lektionen. De går in för arbetet med uppgiften och glömmer bort allt annat runt omkring. Det är ingen som frågar vad klockan är eller när det är rast. (Intervju lärare efter lektion 2 – Glassarna 20.04.2012)

Läraren berättade för mig vid en av intervjuerna hur hon i vanliga fall brukar ha svårt att få samtliga eleverna att arbeta en hel matematiklektion. Normalt brukar de flesta ha tröttnat efter en halv lektion. När vi diskuterade fördelar med matematikundervisning genom problemlösning beskrev hon bland annat hur hon upptäckt att även de elever som vid de ordinarie matematiklektionerna är oengagerade, var aktiva och engagerade vid arbetet med de olika problemen. Läraren trodde att orsaken till detta var följande:

> Barnen får vara kreativa och upptäcka själv. Det blir inget tragglande med matteboken. (Intervju lärare efter lektion 1- Godisbitar 17.04.2012)

Läraren beskrev vidare att fördelarna med denna undervisningsmetod är möjligheten att fånga upp de elever som har svårt för matematiken. Dessa elever känner ofta en motvilja mot matematiken och matematiklektionerna. Hon menar att de, vid de genomförda lektionerna, inte tänker på att det faktiskt är matematik de håller på med och då blir det inte så dramatiskt för dessa elever. Vid en av intervjuerna beskrev läraren matematikundervisning genom problemlösning enligt följande: ”… motiverande för de omotiverade” (Intervju lärare efter lektion 3- Cykelparkeringen 24.04.2012).

Vid min observation vid lektion 1 där eleverna arbetade med problemet *Godisbitarna* kunde jag se hur eleverna inte bara visade på engagemang och drivenhet att vilja lösa problemet. De uttryckte även en glädje och tillfredsställelse över att ha lyckats lösa problemet:

> Karl: Två godisbitar kan man få för en krona. Nu skall man alltså göra så här.
>
> Lisa: Nu vet jag! Lars kan du ge mig några klossar till. (Lars ger Lisa fler klossar och lägger 5 enkronor och 2 klossar vid varje enkrona).
>
> Karl: Ok, då vet jag! 2, 4, 6, 8, 10. 10 godisbitar blir det! För 5 kronor!
>
> Lars: Ja, nu kom jag på det också!
>
> Karl: Nu blev det väldigt, väldigt bra! Vi löste det! Med plus, minus och dividera.
>
> Lisa: Vänta, jag ritar upp det. (Hon ritar 5 kronor med två klossar vid varje krona.)
>
> (Eleverna skrattar och verkar nöjda med sitt arbete)
>
> (Transkribering av inspelat elevsamtal vid lektion 1- Godisbitarna 17.04.2012)

Vid intervjun med läraren bekräftades den glädje jag sett hos eleverna vid arbetet med problemen. Hon berättade vid samtliga intervjuer efter de genomförda lektionerna att eleverna uttryckt glädje och en förväntansfullhet vid arbetet med problemen. Hon beskrev även hur hon upplevt att flera av grupperna såg fram emot att komma fram till tavlan och visa för de andra eleverna hur de hade löst problemet. En annan intressant aspekt som framkom vid lärarens observationer var att eleverna inte uttryckt någon frustration vid de tillfällen de hade kört fast och inte kom vidare i arbetet med problemet. Istället kämpade de vidare och med lite stöd av läraren hade de så småningom lyckats lösa problemet. Detta noterade även jag vid en av mina observationer. Det var en flicka som hade svårigheter med att hänga med i de andras resonemang vid arbetet med problemet *Glassarna*. Hon påtalade vid flera tillfällen för de andra i gruppen att hon inte förstod. De förklarade villigt om och om igen, på flera olika sätt. Varken flickan, som inte förstod, eller de andra som förklarade uttryckte någon irritation eller frustration vid dessa tillfällen. Hon ansträngde sig istället för att försöka förstå medan de andra ansträngde sig för att synliggöra deras resonemang. Flickan hade en vilja att kunna förstå matematiken i problemet och de andra fick henne så småningom att förstå. Vid den efterföljande elevintervjun beskrev flickan problemet *Glassarna* enligt följande:

> Den var lätt för att man skulle blanda så och då kunde man sätta ihop den och den, och sedan den och den och så (visar på pappret med uppgiften). Men den kan vara svår att förstå så ibland tycker jag. Den var lite svår med. (Intervju elever - Glassarna 20.04.2012)

Eleverna upplevde de genomförda lektionerna som roliga och bra. Flera elever berättade att de tycker det är roligt att arbeta med problemlösning men att det inte är så ofta de får göra det. En elev berättade hur han gärna vill göra något nytt som han inte kan. Detta tolkar jag som att han eftersöker mer utmaningar i matematikundervisningen.

De flesta eleverna upplevde att problemen var svåra till en början men att de sedan blev lättare ju mer de arbetade med dem. Så här beskrev en elev hur hon upplevde problemet *Cykelparkeringen*:

> Jag tyckte den var svår för att jag inte förstod så mycket. När vi kom igång lite så förstod jag. (Intervju elever - Cykelparkeringen 24.04.2012)

En annan elev beskrev hur han upplevde samma problem:

> Den var lite klurig men till slut var den rätt så lätt. (Intervju elever - Cykelparkeringen 24.04.2012)

Ovanstående tyder på att det sker en progression vid arbetet med problemen. I inledningen finns en verklig utmaning för eleverna vilken de lyckas ta sig an och bearbeta för att så småningom nå en lösning. Att eleverna får anstränga sig extra då de stöter på ett svårare problem kan vara en förklaring till den glädje och tillfredställelse de känner då de lyckats lösa problemet. En elev upplevde arbetet med problemet *Godisbitar* så här:

> Den var lite extra klurigt och man fick utrett det till slut. Det var roligt att man kom på matten till slut och på flera andra sätt. (Intervju elever - Godisbitar 17.04.2012)

En annan elev berättade hur hon upplevde problemet Glassarna som väldigt svårt men att hon ändå upplevde uppgiften som väldigt rolig. På frågan varför hon upplevde uppgiften rolig svarade hon:

> För Jonas räknade ut det och därför var det kul. Det var svårt för att jag fattade inte hur man skulle göra först men sedan när Jonas hade gjort vet jag hur man skall göra till någon annan gång. (Intervju elever - Glassarna 20.04.2012)

Ovanstående visar på en annan intressant aspekt som framkom i studien; elevernas glädje över att kunna lösa ett problem tillsammans. För flickan ovan hade det inte så stor betydelse att det inte var hon som lyckades komma fram till lösningen. Det viktiga var att någon i gruppen lyckades och kunde förmedla detta till de andra under arbetets gång så att de andra lärde sig.

Vid samtliga observationer kunde jag över lag se ett stort engagemang hos eleverna när de arbetade med de olika problemen.

4.2 Elevernas förmåga att föra resonemang utifrån de rika matematiska problemen

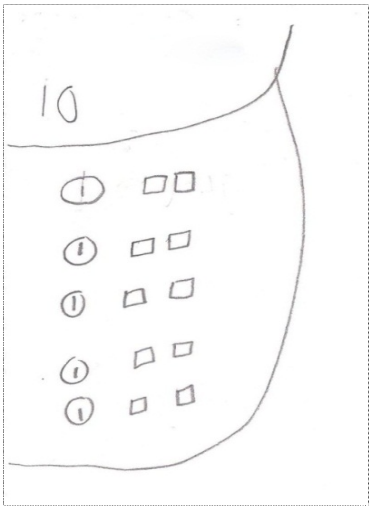
Som jag tidigare beskrivit innefattar det matematiska resonemanget hur eleverna bearbetar sina matematiska idéer med hjälp av matematikens olika representationsformer. De matematiska idéerna innefattar de begrepp, procedurer och strategier vilka eleverna använder sig av vid lösandet av de rika matematiska problemen. Genom observationerna och intervjuerna kunde jag utröna vilka begrepp, procedurer och strategier eleverna använde sig av samt vilka representationsformer de använde sig av för att bearbeta dessa matematiska idéer. Utifrån detta kunde jag bilda mig en uppfattning om elevernas förmåga att hitta mönster och generalisera vid arbetet med problemen. Observationerna kunde även ge svar på i vilken utsträckning eleverna behövde lärarens stöd för att väcka de matematiska resonemangen.

4.2.1 Val av representationsformer

Ett intressant fenomen som visades på vid samtliga observationer av lektionerna var att flera av eleverna hoppade över att använda det konkreta material som erbjöds. Läraren beskrev utifrån sina observationer hur några elever använde siffror för att beskriva hur de tänkte och att det endast var ett fåtal elever som gick och hämtade klossar, mynt, färgpennor och papper direkt från början. Av de grupper jag observerade började samtliga med att resonera muntligt utifrån en abstrakt nivå utan att ta hjälp av vare sig laborativt material eller rita en bild. En grupp skrev ner det resonerade med hjälp av matematiska symboler i form av siffror. En annan grupp skrev ner det resonerade i form av ord. Det visade sig dock att ett endast ett fåtal elever klarade av att bearbeta problemen utifrån dessa tillvägagångsätt. Flera grupper kom inte vidare i sina resonemang. Vid problemet *Godisbitarna* fastnade en grupp i sitt muntliga resonemang vilket pågick en lång stund:

> Karl: Jag dubblade 4 och fick åtta och då får man lägga till en till. Det var ju det med en till… Då blir det 8 bitar för 4 kronor.
>
> A-M: Ni skulle ju ta reda på vad det blir för 5 kronor. Hur kan ni ta reda på vad man får för en krona?
>
> Karl: Det var ju det, vi skrev ju aldrig det.
>
> A-M: Kan man tänka på något annat sätt?
>
> Karl: Minus, man kan ju gå neråt. Eller ska man dividera?
>
> A-M: Ska ni prova att använda pengarna?
>
> (Lisa lägger upp 2 kronor och 4 klossar)
>
> Karl: Två godisbitar kan man få för en krona. Nu skall man alltså göra så här.
>
> Lisa: Nu vet jag! Lars kan du ge mig några klossar till. (Lars ger Lisa fler klossar och lägger 5 enkronor och 2 klossar vid varje enkrona).
>
> Karl: Ok, då vet jag! 2, 4, 6, 8, 10. 10 godisbitar blir det! För 5 kronor!
>
> (Transkribering av inspelat elevsamtal vid lektion 1- Godisbitarna 17.04.2012)

I ovanstående situation har eleverna provat flera olika resonemang genom att samtala om dem och skriva ner sina formuleringar i form av siffror. Jag föreslog att de skall prova att använda sig av pengarna. Så fort de lade upp klossarna kunde de se hur många godisbitar de får för en krona varpå de lade upp så att de hade 5 enkronor med två klossar vid varje. Lösningen blev på detta sätt tydlig för dem. Eleverna avbildade det laborativa materialet i form av en bild (figur 1):



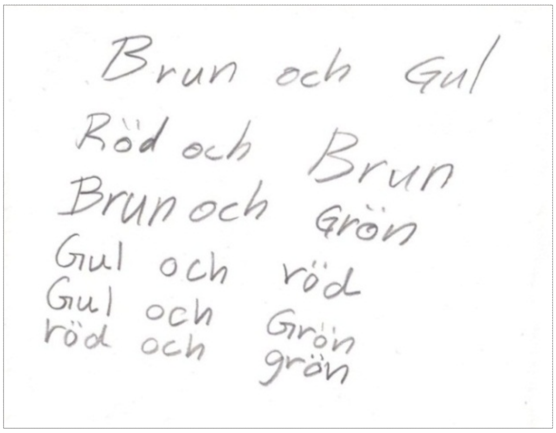
Figur 1

Vid de efterföljande elevintervjuerna beskrev en av eleverna hur det laborativa materialet hjälpte honom vid arbetet med problemet: ”Det blir mycket lättare att förstå då.” (Intervju elever - Godisbitarna 17.04.2012)

Givetvis skiljer det sig åt vilka representationsformer som är lämpliga att använda vid arbetet med de olika problemen. Det skiljer sig även åt vilka representationsformer eleverna väljer att använda vid arbetet med ett och samma problem. Vid min observation av lektion 2 där eleverna arbetade med problemet *Glassarna* kunde jag uppfatta ett dilemma då eleverna i gruppen resonerade kring problemet. Det visade sig att den elev som verkade mest matematiskt kunnig valde en mer abstrakt representationsform då den presenterade sina matematiska idéer för de andra i gruppen. De andra hade svårt att hänga med dennes resonemang samtidigt som den mer kunnige eleven beskrev sina svårigheter att uttrycka sig på andra sätt än med ord och siffror:

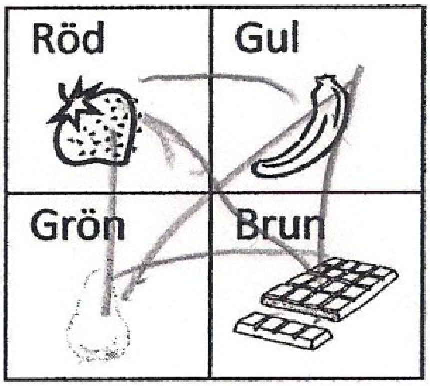
> Jonas: Man kan ju ta de två (pekar på skylten med de olika smakerna). Då är det en, brun och gul tillsammans, det är ju en. Brun och röd, en till. Och brun och grön. Sedan är det gul och grön, gul och röd, och grön och röd. En, två, tre, fyra, fem, sex.
>
> A-M: OK, vad tror ni andra?
>
> Anne: Jag tror inte att det går för att det… man använder ju olika sorter.
>
> A-M: Ni har en idé, men ni är inte säkra på den allihop. Skall ni prova och rita eller skriva det?
>
> Jonas: Jag är inte bra på att rita. Jag är bättre på att säga med ord.
>
> Anne: Jag kan skriva. Beskriv för mig Jonas.
>
> Jonas: Brun och gul. (Anne börjar skriva). Sedan röd och brun. Grön och brun eller brun och grön. Gul och röd.
>
> Anne: Fanny får skriva resten.
>
> Fanny: Ok.
>
> (Transkribering av inspelat elevsamtal vid lektion 2- Glassarna 20.04.2012)

Jonas löste problemet med glassarna ganska omgående. Då han försökte förklara hur han tänkt blev det dock svårt för de andra att hänga med i hans resonemang. Jag försökte uppmuntra dem till att rita upp scenariot eller skriva ned det med ord. Jonas beskrev då att han inte är så bra på att förklara med hjälp av en bild. Det hela resulterade i att Anne skrev ner det Jonas sade på ett papper (figur 2):



Figur 2

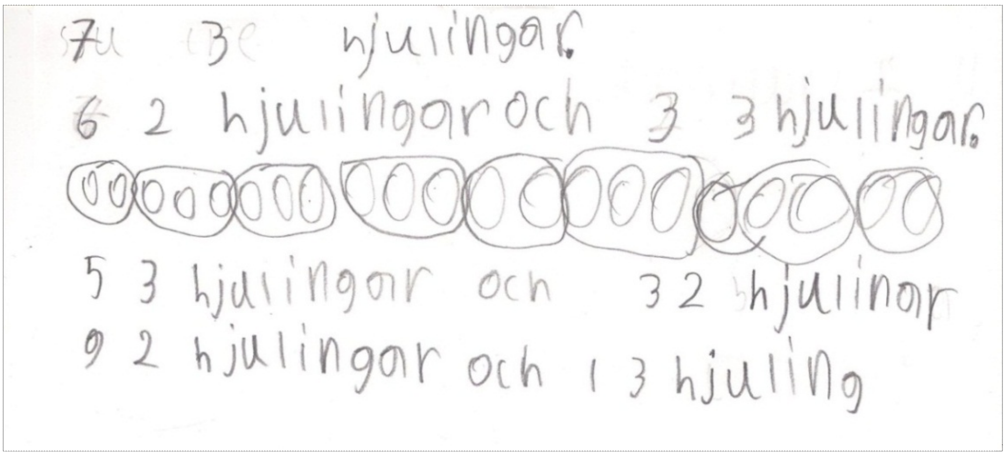
Anne förstod nu hans resonemang bättre men Fanny förstod fortfarande inte hur han menade. Hon uttryckte sitt behov av att rita för att illustrera resonemanget. Jonas kom då på att han kunde beskriva hur han tänkt genom att dra streck mellan smakerna på skylten (figur 3):



Figur 3

Jonas beskrev sitt resonemang samtidigt som han ritade streck mellan de olika smakkombinationerna. Fanny fick nu med hjälp av bilden möjlighet att förstå hur Jonas resonerade. Vid de efterföljande elevintervjuerna beskrev Fanny hur hon upplever att bilderna till viss del hjälper henne att förstå bättre: ” Om man förstår kan man rita bilder så kan man förstå lite mer.” (Intervju elever - Glassarna 20.04.2012)

Även vid arbetet med problemet *Cykelparkeringen* uppstod svårigheter då eleverna i den grupp jag observerade föredrog olika representationsformer för att beskriva sina matematiska resonemang. En av eleverna ville att de skulle arbeta utifrån att rita upp hjul för att tydliggöra problemet. De andra två ansåg dock att de kunde lösa problemet ändå genom att räkna i huvudet och skriva ned på pappret. De klarade av att hitta två av de fyra olika lösningarna till problemet på detta sätt, därefter blev det stopp. Eleven som fördrog att rita en bild föreslog återigen att de skall rita upp hjul. Jag gick då in i samtalet för att stödja elevens idé varpå de valde att försöka rita upp hjul för att illustrera förutsättningarna. Jag ställde även frågor om hur många hjul de kunde rita upp samt beskrev hur de tidigare lösningarna kunde illusteras med hjälp av hjulen; detta för att få igång deras resonemang som verkade ha avstannat. Så småningom lyckades de finna de fyra olika lösningarna (figur 4):



Figur 4

Vid de efterföljande elevintervjuerna beskrev en elev hur det hjälpte henne att rita en bild med hjul för att förstå det matematiska resonemanget när de löste uppgiften. En av de elever som föredrog att räkna i huvudet och sedan skriva ned lösningen beskrev hur det trots allt var lättare att se hur man kunde resonera när man ritade upp hjulen och sedan delade in dem i grupper.

Flera av eleverna uppgav vid intervjuerna att när de brukar lösa liknande uppgifter sitter de oftast och funderar en stund för att försöka komma fram till en lösning. Ingen uppgav att de brukar börja med att rita upp en bild för att synliggöra sina tankar. Samtidigt var det flera elever som upplevde att de blivit hjälpta av att rita upp en bild när de arbetade med de olika problemen vid de aktuella lektionerna. En elev beskrev hur hon ibland brukar använda mynt för att tydliggöra en uppgift i matteboken och resonerat på liknande sätt när hon arbetade med problemet *Godisbitarna*.

Som jag beskrev tidigare var det flera elever som resonerade tillsammans för att komma fram till en lösning. De flesta av dessa elever uppgav vid elevintervjuerna att det hjälper dem mycket att tala med en kamrat vid arbetet med problemen. Så här beskrev några av eleverna det:

> Men Lisa hjälpte det att prata med. Jag sa att hon skulle skriva upp så där på ett papper och då gjorde hon det och så kom jag på lite tal och så. Och då hade jag en tanke och så hade hon en tanke också då. (Intervju elever - Godisbitar 17.04.2012)

> Det hjälper mig jätte mycket, just att man har lite stöd och man kan ju också veta och löser man det tillsammans kan man ju jättemycket. (Intervju elever - Godisbitar 17.04.2012)

> När de hade sagt sina idéer tyckte jag att de lät lite bättre än mina och då förstod jag också bättre. (Intervju elever - Godisbitar 17.04.2012)

> Ja, om man gör det tillsammans med några kompisar kan man lösa det tillsammans ifall det är svårt. (Intervju elever - Glassarna 20.04.2012)

Eleverna provar sina idéer på varandra och utvärderar dem tillsammans. Några andra elever uppgav att de hjälper att tala med en duktigare kamrat eller en vuxen. De kan då få bekräftat att de är på rätt väg i sina resonemang.

Val av representationsform kan även kopplas till hur eleven upplevde problemet. Som jag tidigare beskrivit så upplevde flera elever att problemen var svåra till en början men att ju mer de arbetade med dem desto mer förstod de. Detta att problemen var svåra till en början kan ha sin grund i att de använder sig av, för dem, svåra representationsformer för att synliggöra sina matematiska resonemang.

4.2.2 Begrepp, procedurer och strategier som eleverna använder sig av

De rika matematiska problem som använts i studien syftar till att eleverna ska extrahera olika matematiska idéer såsom begrepp, procedurer och strategier. Jag har inom denna del valt att beskriva resultatet utifrån de olika problemen.

Godisbitarna

Vid min observation kunde jag upptäcka att eleverna använde sig av det matematiska begreppet dubbelt när de resonerade kring problemet. Läraren bekräftade utifrån sin observation att flera elever hade använt sig av detta begrepp samt begreppet hälften. Eleverna berörde även begreppet proportionalitet i detta sammanhang. Den grupp jag observerade var inne på att de skulle dubblera antalet kronor först och sedan dubblera antalet godibitar, en form av proportionellt förfarande. De stötte dock på svårigheter då de hamnade på 4 kronor istället för 5 kronor:

> Karl: Jag dubblade 4 och fick åtta och då får man lägga till en till. Det var ju det med en till… Då blir det 8 bitar för 4 kronor.
>
> (Transkribering av inspelat elevsamtal vid lektion 1- Godisbitarna 17.04.2012)

Läraren beskrev hur en av de grupper hon observerat först halverade de två kronorna för att sedan halvera de fyra godisbitarna. Därefter multiplicerade de enkronorna med fem varpå de kom fram till 5 kronor. De multiplicerade därefter antalet godisbitar med fem; två godisbitar multiplicerat med fem blev tio godisbitar. Dessa elever använde sig av proportionalitet som matematisk idé då de löste problemet. De använde sig av både proceduren division, när de halverade, och proceduren multiplikation när de dubblerade. Andra elever använde sig av addition då de dubblerade. Med lite stöd var det flera elever som kom underfund med hur de kunde använda sig av proportionalitet för att lösa problemet. Vid de efterföljande elevintervjuerna beskrev eleverna hur de använt sig av plus när de dubblerade för att sedan halvera. Dessa elever beskrev även hur de hade lärt sig ett nytt sätt att arbeta med liknande problem. De hade sett hur de andra hade dividerat och multiplicerat i stället för att använda sig av addition. Så här svarade de på frågan om vad de lärt sig för matematik:

> Vad heter det nu? Dividera. Det har jag hört från min pappa. Och att man kunde ta gånger in så där det var nytt för mig med divideratalen. Det kom också in minus och det visste jag inte att man kunde använda på en sådan uppgift. (Intervju elever - Godisbitar 17.04.2012)

> Att man kan göra massa saker samtidigt på ett och samma tal. Flera olika räknesätt. (Intervju elever - Godisbitar 17.04.2012)

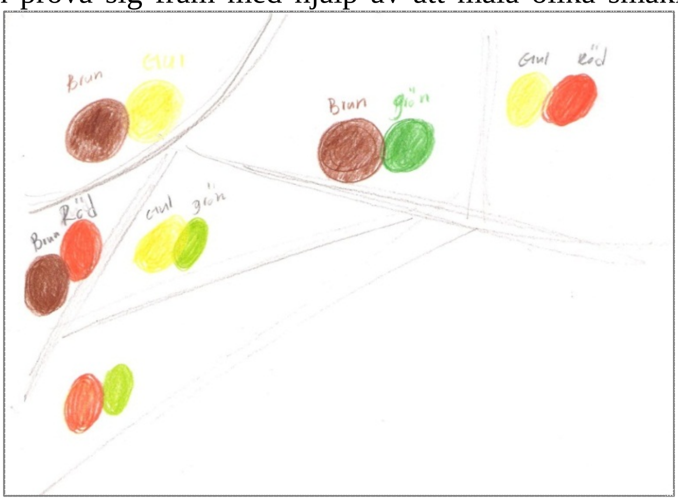
> Det som de andra använde vad det nu hette…dela? (Intervju elever - Godisbitar 17.04.2012)

Genom att arbeta med problemet *Godisbitarna* hade eleverna fått komma i kontakt med både multiplikation och division och sambandet dem emellan.

När det gäller strategier i samband med problemet *Godisbitarna* så började de flesta eleverna med att samtala med varandra om hur de tänker. De gissade och provade sig fram för att se om de kunde komma fram till en lösning. Läraren berättade att det endast var ett fåtal grupper som använde sig av konkret material som pengar och klossar, till att börja med. Den grupp jag observerade försökte komma fram till en lösning genom att gissa och prova sig fram. De beskrev sina idéer muntligt för varandra. Det visade sig dock svårt och jag fick föreslå för dem att de skulle ta hjälp av det laborativa materialet såsom pengar och klossar. Som jag tidigare nämnt uppfattade både jag och läraren att eleverna hoppade över användandet av konkret material och började i stället resonera tillsammans i grupperna kring de matematiska idéer de hade. Läraren beskrev för mig hur hon upplevde att några elever inte visste hur de skulle komma igång. De hade inga klara strategier kring hur de skulle bearbeta problemet. Hon förklarade att orsaken kunde vara att de sällan arbetar med sådana här uppgifter och att hon allt för sällan använder sig av konkret material i undervisningen. Det visade sig dock att då eleverna använde det konkreta materialet fick de en klarare bild av problemets förutsättningar och hur de skulle bearbeta dem.

Glassarna

Vid arbetet med detta problem upplevde både jag och läraren att det var två matematiska begrepp som blev aktuella, kombinera och lägga till. Problemet i sig handlar om kombinatorik där antalet möjliga kombinationer skall beräknas. Flera elever använde sig av begreppet kombination medan en del fick det förklarat för sig under lektionens gång. De procedurer eleverna använde sig av var i princip kombinatorik och addition, vilket användes då de räknade ut antalet kombinationer de utförde. Vid denna uppgift upplevde jag att eleverna hade svårigheter att se matematiken i problemet. Dels för att en del hade svårt att resonera kring problemet men det framkom även vid de efterföljande elevintervjuerna att de hade svårt att förstå vilken matematik de hade arbetat med. Problemet *Glassarna* handlar till stor del om att finna en bra strategi att angripa problemet med. Den strategi eleverna framförallt använde sig av var att gissa och prova sig fram med hjälp av att måla olika smakkombinationer vilken givetvis fungerar (figur 5):



Figur 5

I den elevgrupp jag observerade var det en elev som systematiskt undersökte antalet kombinationer. Han använde sig av skylten med de olika smakerna som finns i uppgiften. Varje smak benämndes med en färg. Han utgick från en smak och kombinerade den med resterande tre. Därefter valde han den andra smaken och insåg att han inte kunde kombinera den med den första smaken igen och då fanns det bara två alternativ kvar. Slutligen tog han den tredje smaken vilken inte kunde kombineras med de två första igen utan den kunde bara kombineras med den fjärde smaken. Han visade sedan för de andra eleverna i gruppen hur han resonerat genom att dra streck mellan de olika smakkombinationerna, se figur 3. Därefter kunde de räkna antalet streck:

> Jonas: Jo. Så jag börjar med brun och kan välja 3 andra. Sedan tar jag gul men då kan jag inte ta brun för jag redan använt gul och brun. Då blir det två kvar som kan vara med gul. Sedan tar jag röd men då har jag redan använt dem (pekar på gul och brun) så då är det bara grön kvar. Då blir det en.
>
> Fanny: Jag förstår nog ändå inte.
>
> Jonas: Kolla här. Man tar de två (pekar), de två (pekar)… räkna strecken igen.
>
> Fanny: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
>
> (Transkribering av inspelat elevsamtal vid lektion 2- Glassarna 20.04.2012)

Läraren berättade hur en av de grupper hon observerat gjorde på ett liknande sätt men att de hade målat fyra olika färger vilka representerade smakerna. De började med en färg och drog streck från den till de andra färgerna som den kombinerades med. Därefter tog de nästa färg och undersökte hur många färger den kunde kombineras med och så vidare.

Cykelparkeringen

Vid elevernas arbete med problemet Cykelparkeringen använde sig eleverna av begreppen jämna och udda tal, tvåskutt, treskutt och gruppera. Läraren beskrev hur flera elever använde sig av begreppen tvåskutt och treskutt vilka de använder sig av när de tränar multiplikationstabellen. Även den grupp jag observerade var inne på detta spår. Det ledde till att de så småningom kunde använda sig av tvåans samt treans multiplikationstabell för att finna lösningar till problemet.

> Arvid: Då blir det 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22. För mycket. 3, 6, 9, 12, 15, 18… vänta vi tar bara trehjulingar då blir det 21!
>
> (Transkribering av inspelat elevsamtal vid lektion 3- Cykelparkeringen 24.04.2012)

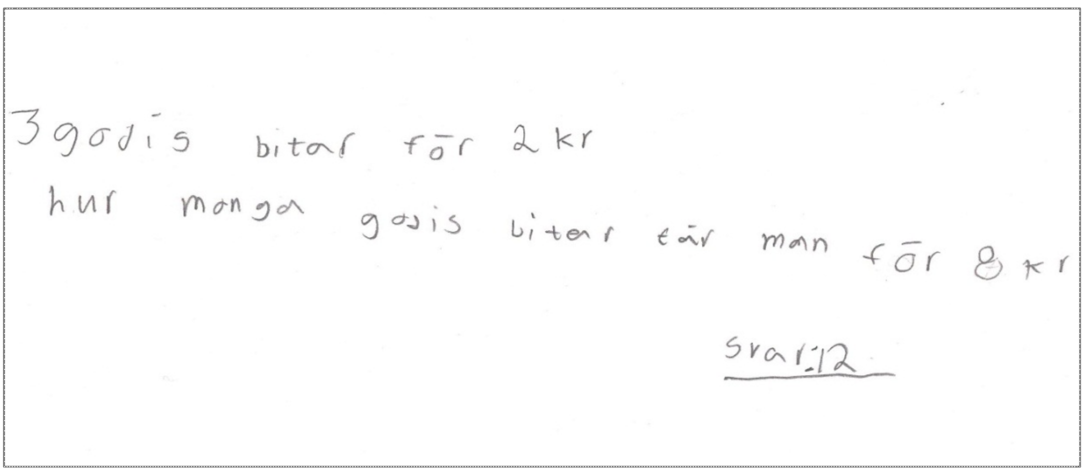
En av eleverna föreslog att de även kan tänka på att om summan de hamnar på är ett jämnt eller udda tal, kan de lägga till antingen två eller tre hjul för att försöka hamna på 21. Vid elevintervjuerna berättade eleverna att de använt både addition och multiplikation vid arbetet med problemet och då de grupperade hjulen i grupper om två och tre hjul kunde de lättare se sambandet mellan dem.

Läraren beskrev hur eleverna i de andra grupperna använde sig av procedurerna addition till en början för att sedan övergå till multiplikation inom tvåans och treans tabell. Läraren beskrev vidare hur de huvudsakliga strategierna eleverna använde sig av var att gissa och prova sig fram. Några grupper gissade genom att lägga ihop så långt det gick med t.ex. trehjulingar och såg sedan om det blev något över och vad de i så fall kunde lägga till. En annan grupp ritade upp figurer som representerade trehjulingar och tvåhjulingar. De kunde då räkna hjul direkt från teckningen och sedan lägga till alternativt ta bort det som behövdes för att summan skulle bli tjugoett. Det var endast en grupp som hämtade 21 klossar vilka de använde till att fördela på flera olika sätt. De ritade sedan av resultatet. Den grupp jag observerade inledde arbetet med att försöka komma överens om vilken strategi de skulle använda för att bearbeta problemet. Trots att de kom överens om att både måla och skriva använde de sig enbart av strategin att skriva ned det muntliga resonemanget. Detta visade sig dock bli för svårt och som jag beskrivit tidigare fick jag gå in och råda dem att försöka rita upp hjul för att tydliggöra deras resonemang.

4.2.3 Elevernas förmåga att hitta mönster och generalisera

Som jag tidigare beskrivit innebär matematiska resonemang att eleverna bearbetar sina matematiska idéer med matematikens olika representationsformer. Målet i samband med dessa resonemang är att eleverna skall hitta mönster och generalisera utifrån sina slutsatser. Vid arbetet med de rika matematiska problemen visade det sig att någon eller några elever vid varje lektion hade förmåga att hitta ett mönster och generalisera.

Vid arbetet med problemet *Godisbitarna* kom den grupp jag observerade slutligen fram till att de måste ta reda på vad en enhet om två godisbitar kostar det vill säga vad de får för en krona. De kunde därefter beräkna hur många enheter de fick för fem enkronor. Att de förstått principen framgår när de skall konstruera ett eget liknande problem (figur 6):



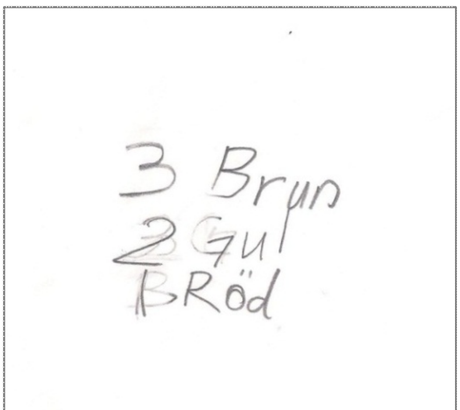
Figur 6

Även en av de grupper läraren observerade hade förmågan att dra samma slutsats. Hon beskrev det enligt följande:

> Ja, en grupp kunde förstå att om de räknade ut vad de fick för en krona kunde de sedan räkna ut vad de fick för 5 kronor. Man såg sedan när de gjorde egna liknande problem att de använde sig av just den kunskapen. (Intervju lärare efter lektion 1 – Godisbitarna 17.04.2012)

Vid elevintervjuerna i samband med problemet *Godisbitarna* uppgav eleverna hur de fått en ökad förståelse för sambandet mellan multiplikation och division och hur detta samband kunde användas vid denna typ av problem.

Vid arbetet med problemet *Glassarna* uppger läraren att det var flera elever som i slutet av lektionen hade kommit underfund med hur de skulle göra. Till en början var det dock många som satt och gissade och provade sig fram. Men så småningom var det några elever som förstod att de systematiskt kunde leta efter en lösning. Den systematiken gick ut på, som jag tidigare beskrivit, att de utgick från en smak och kombinerade den med de tre andra. Därefter utgick de från andra smaken och kombinerade den med de resterande två. Slutligen tog de den tredje smaken och kombinerade den med den fjärde smaken. En av de elever i den grupp jag observerade utgick direkt från denna strategi. När han lyckats få med de andra på resonemanget sammanställde de tillsammans en slutsats enligt följande (figur 7):



Figur 7

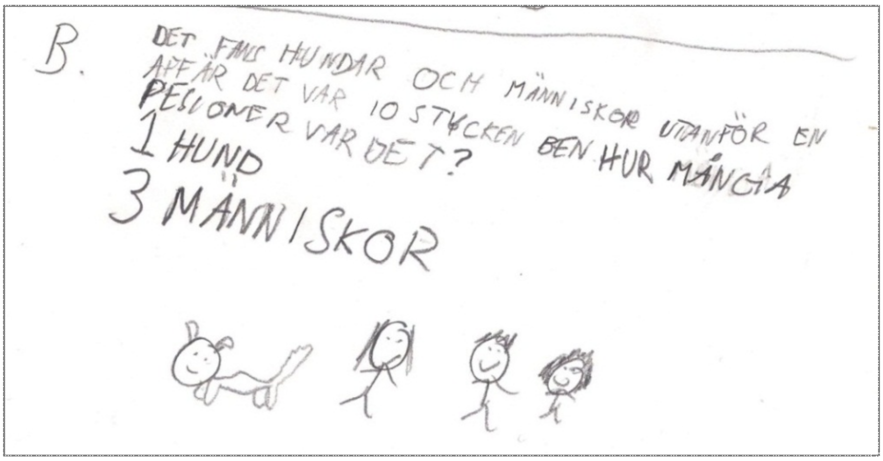
Ovanstående slutsats redovisades av eleverna för de andra i klassen; den första smaken, brun, kan kombineras *tre* gånger, den andra smaken, gul, kan kombineras *två* gånger och den tredje smaken, röd, kan kombineras *en* gång. Samtidigt beskrev de hur man alltid kan tänka på detta sätt när de skall räkna ut liknande problem.

Problemet Cykelparkeringen handlade till stor del om att fördela cykelhjul i grupper om två och tre hjul. Flera av eleverna använde strategin att gissa och prova sig fram till olika lösningar. Under arbetets gång var det dock några elever som förstod att om de arbetade mer systematiskt och utgick från antingen enbart tvåhjulingar eller trehjulingar hamnade de slutligen någonstans i närheten av tjugoen stycken hjul. De kunde då antingen ta bort eller lägga till två respektive tre hjul. I detta sammanhang kom tvåans och treans multiplikationstabell in. Den grupp jag observerade vägde även in om de skulle hamna på ett jämnt eller udda tal vilket avgjorde om de kunde lägga till en två- eller trehjuling. Läraren berättade hur en av de grupper hon observerat arbetade utifrån ett annat mönster:

> En grupp förstod det här med att de kunde gruppera två och två till att börja med. Sedan när de kom upp till 20 tog de bort en två-grupp för att det inte gick lägga till en tre-grupp till 20. De hamnade då på 18 och kunde lägga till en tre-grupp. När de sedan tog bort en två-grupp till och hamnade på 16 förstod de att det inte skulle fungera att lägga till två tre-grupper så de tog bort ytterligare en två-grupp och hamnade på 14. När det inte heller fungerade fortsatte de med att ta bort ytterligare en två-grupp och hamnade på 12. Nu räknade de ut att det fattades 9 hjul och att 3 gånger 3 är 9 alltså 3 stycken trehjulingar. De sa det inte själva men på något sätt förstod de att de tal som är med i tvåans tabell kunde man räkna upp till med 2-hjulingar och de antal hjul som då blev kvar skulle då vara ett tal i treans tabell för då gick det att dela upp resten i trehjulingar. (Intervju lärare efter lektion 3 – Cykelparkeringen 24.04.2012)

Läraren beskriver här hur eleverna har en idé om hur de kan angripa problemet systematiskt genom att utgå från tvåans och treans multiplikationstabell. Eleverna har två variabler de laborerar med, tvåhjulingar och trehjulingar, och de har förstått att det mellan dessa variabler finns ett matematiskt samband som de ännu inte kan definiera i en formel. Dock kan de använda sig av mönstret, vilket är grunden till formeln, för att nå de olika lösningarna.

Vid arbetet med de olika problemen var det flera elever som hittade på egna liknande problem. Genom att studera dessa kunde jag skapa mig en bild av vilken matematik de upptäckt. Ett exempel på detta är ett problem som en grupp hittade på i samband med problemet *Cykelparkeringen* (figur 8):



Figur 8

Då eleverna fick redovisa sina lösningar inför klassen fick de möjlighet att visa för de andra eleverna hur de resonerat. Vid dessa tillfällen kunde både jag och läraren förstå vilka generella slutsatser en del av eleverna lyckats komma fram till, samtidigt som de andra som inte lyckats komma fram till en slutsats fick möjlighet att ta del av dem.

4.2.4 Vilket stöd behöver eleverna av läraren?

Både jag och läraren upplevde att eleverna över lag behövde förhållandevis lite stöd vid arbetet med de olika problemen. Varje lektion inleddes med en gemensam genomgång av problemet där dess förutsättningar beskrevs. Eleverna uppmuntrades till att ställa frågor och jag förvissade mig om att eleverna hade förstått innan de började arbeta på egen hand. Denna gemensamma genomgång kan vara orsaken till att eleverna behövde relativt lite stöd i det fortsatta arbetet med problemet.

De situationer som jag dock upplevde som kritiska var framförallt när eleverna inom samma grupp hade olika resonemang kring hur de skulle lösa ett problem. Jag fick då gå in och ge dem vägledande frågor för att stimulera deras tänkande och uppmuntra till en rimlighetsbedömning kring det resonerade. Vid en del tillfällen blev det diskussioner kring vilken strategi eller representationsform gruppen borde använda sig av. Det var framförallt vid de situationer då någon inte förstod de andras resonemang eller då någon grupp fastnat i ett felaktigt resonemang. Jag gick då in och uppmuntrade dem till att använda en annan representationsform för att försöka tydliggöra problemet eller att angripa problemet med en annan strategi. Ofta handlade det om att få eleverna att använda det laborativa materialet, vilket de sällan valde att använda sig av från början. Läraren upplevde dock att eleverna behövde mest stöd då de skulle hitta på ett eget problem:

> De förstod inte riktigt vad de skulle göra, de är väl inte vana vid den typen av uppgifter. Men när de väl kom igång så var det inga problem. (Intervju lärare efter lektion 1 – Godisbitarna 17.04.2012)

> Flera elever hade svårt att hitta på en egen uppgift när de löst den första uppgiften. (Intervju lärare efter lektion 2 – Glassarna 20.04.2012)

> Jag tycker inte de behövde så mycket stöd med själva uppgiften men däremot behövde de som tidigare stöd med att komma igång med uppgiften där de skulle hitta på ett liknande problem. Vi har nog arbetat alldeles för lite med det tidigare. (Intervju lärare efter lektion 3 – Cykelparkeringen 24.04.2012)

Läraren beskriver hur orsaken till stödbehovet i dessa situationer antagligen grundas i elevernas ovana att arbeta med konstruktionen av egna problem. Det var dock några elever som utan stöd förstod hur de skulle konstruera egna problem. Jag upplevde att fler och fler elever lyckades med detta vartefter de olika lektionerna genomfördes.

Vid varje lektion använde jag och läraren fokusfrågor för att stödja eleverna. Dessa uppmärksammade dem på informationen som fanns i problemet, gav dem ledtrådar samt synliggjorde matematiken i problemet. En elev beskrev vid en av de efterföljande elevintervjuerna hur lärarens stöd är viktigt för att veta om han är på rätt väg då han resonerar kring ett problem:

> Då om jag skall vara helt säker då behöver jag en vuxen eller någon som tittar. (Intervju elever - Glassarna 20.04.2012)

5 DISKUSSION

Inom detta avsnitt diskuteras studiens resultat utifrån syfte och frågeställningar, resultatets relevans för läraryrket samt vidare forskning.

5.1 Resultatdiskussion

5.1.1 Elevernas engagemang vid undervisning genom problemlösning

Vid det tidigare projektet jag genomförde under min verksamhetsförlagda utbildning fick jag en föraning om hur elevernas engagemang kan stimuleras vid problemlösande aktiviteter i matematikundervisningen. Jag upplevde dock ett ännu större engagemang vid denna senare studie. Det som var mest anmärkningsvärt var att även de elever som enligt läraren normalt sett är oengagerade vid de vanliga matematiklektionerna blev engagerade.

Både jag och läraren kunde se en förväntan och glädje hos i stort sett alla elever vid arbetet med problemen. Kong et al. (2003) identifierar glädje och förväntan som några av de faktorer som ligger till grund för konstruerandet av det känslomässiga engagemanget. Trots att flera av eleverna upplevde att problemen var svåra till en början gav de inte upp eller visade på någon frustration då de körde fast och inte kom vidare. De kämpade på och provade nya idéer med visst stöd från mig och läraren. Kong et al. (2003) beskriver hur det beteendemässiga engagemanget kännetecknas av att eleverna gör en extra ansträngning och kämpar på vid arbetet med ett problem trots att de upplever problemen som svåra. Så här beskrev läraren elevernas engagemang efter en av lektionerna: ”De går in för arbetet med uppgiften och glömmer bort allt annat runt omkring. De är ingen som frågar vad klockan är eller när det är rast”. (Intervju lärare efter lektion 2 – Glassarna 20.04.2012) Denna bild av elevgruppen stämmer inte överens med den bild läraren gav mig vid en av intervjuerna. Hon berättade då att dessa elever oftast brukar tröttna efter en halv matematiklektion och att de då brukar få göra något annat. Frågan är då vad som skapar denna skillnad?

Läraren själv beskrev hur hon ansåg det bero på att eleverna får vara kreativa och upptäcka själva, istället för att traggla med matteboken och ett mekaniskt räknande. En stor del av orsaken ligger förmodligen i detta. Deweys idé ”learning by doing” beskriver elevens aktiva medverkan i lärandeprocessen där eleven själv utför handlingar som denne sedan kopplar till resultatet (citerad i Imsen, 2006). Detta och samspelet med andra elever där den får sätta ord på sina idéer och resonemang ökar elevens förståelse för matematiken. Elevens förståelse för matematiken är en av de avgörande faktorerna för elevens fortsatta framgång i matematikundervisningen eftersom då eleven förstår, upplever den tillfredställelse och även motivation (Lambdin, 2003). Detta leder i sin tur till att eleven känner ett självförtroende och en förmåga att lösa ett problem. Lambdin beskriver även hur en ökad förståelse leder till att eleverna får ett annat synsätt på matematiken där de kan ta kontroll över sitt eget lärande vilket i sig är motivationshöjande.

Min uppfattning är att elevernas engagemang utvecklades i samband med att de ställdes inför ett problem som de till en början uppfattade som svårt. Lester & Cai (2010) beskriver hur problemet som eleverna får bör väcka nyfikenhet och intresse samtidigt som det upplevs som en utmaning för eleverna. Denna utmaning bjuder in till spekulationer och en extra ansträngning hos eleverna. Både jag och läraren observerade att flera elever upplevde problemen som svåra i början men trots detta blev de inte frustrerade utan kämpade på. Och då de gavs möjlighet att tillsammans med andra elever prova sina idéer och resonemang sinsemellan fick de en utvidgad förståelse för matematiken i problemet. Denna ökade förståelse ledde oftast till att eleverna lyckades lösa problemet varpå eleverna visade en glädje och tillfredsställelse; vilken förmodligen hade sin grund i den svårighet de först upplevde med problemet och vilken de sedan lyckades bemästra. Kong et al. (2003) identifierar hur faktorerna glädje och tillfredställe konstruerar ett känslomässigt engagemang då eleverna klarar av att lösa en uppgift trots att de upplever matematiken som svår. Denna glädje och tillfredsställelse skapar motivation och självförtroende till matematiken och kan förmodligen förklara den förväntan och ivrighet vi kunde observera i början av lektionerna. Även elevernas drivenhet och ovilja att ge upp då de kört fast skulle kunna förklaras av detta.

Jag har tidigare berättat om projektet kring problemlösande aktiviteter med hjälp av fyrfältsblad och då jag fick uppleva hur en i normala fall omotiverad elev omvändes till att bli en motiverad elev när hon fick arbeta med problemlösning. Det var denna upplevelse som ledde mig in på syftet med denna studie; att undersöka möjligheterna att undervisa elever i årskurs 2 i matematik genom problemlösning. Att jag valde att studera elevernas engagemang var framförallt för att jag anser det vara en avgörande faktor för elevernas lärande. Jag insåg inte då i vilken utsträckning detta har betydelse för lärarens möjligheter att nå alla elever i undervisningen. Vid en av intervjuerna beskrev läraren hur en av fördelarna med undervisningsmetoden är att den skapar möjligheter att fånga upp de elever som har svårt inom matematiken. Hon beskrev hur dessa elever oftast känner en motvilja för matematiklektionerna och matematiken överhuvudtaget. Hon kunde dock vid de observerade lektionerna se hur även dessa elever blev engagerade vid arbetet med de olika problemen. Hon förmodade att orsaken var att eleverna inte tänker på att det faktiskt är matematik de håller på med. Till viss del har hon förmodligen rätt men den huvudsakliga orsaken tror jag handlar om att eleverna får uppleva att de själva får vara med och konstruera sin kunskap, istället för att läraren försöker överföra sina kunskaper direkt till eleverna.

Skillnaden ligger i att när läraren försöker överföra sin kunskap till eleverna baseras lärandet till stor del på elevernas memoreringsförmåga. De elever med sämre memoreringsförmåga stöter dock på problem när matematiken blir mer avancerad för de saknar de elementära byggstenarna och korthuset rasar (Malmer, 2002). Detta kommer även elever med god memoreringsförmåga råka ut för så småningom eftersom matematikkunskaper inte kan byggas på memorering utan de måste byggas på en förståelse. I dessa sammanhang är det många elever som ger upp och tror att det är dem de är fel på, att de inte är matematiska och matematik blir på så sätt det tråkigaste skolämnet. Tyvärr har jag sett denna attityd allt för många gånger, redan i de tidigare årskurserna.

Kong et al. (2003) skiljer mellan ytliga inlärningsstrategier och djupgående inlärningsstrategier. De beskriver vidare hur de ytliga kan identifieras utifrån ovanstående memoreringsförmåga medan de djupgående kan identifieras i bl.a. de situationer då eleverna använder sig av tidigare matematiska kunskaper vilka de försöker få en djupare förståelse av samt då de försöker koppla sina kunskaper till vardagssituationer. Då eleverna får konstruera sin egen kunskap utgår de från för dem kända situationer. Problemen som användes handlade om, för barn, vardagsnära situationer som de lätt kunde sätta sig in i. På detta sätt skapades förutsättningar att eleverna skulle uppleva problemen som sina egna, vilket är en avgörande faktor för elevens motivation (Björkqvist, 2001). Eleverna valde själva de strategier och representationsformer som passande dem vid bearbetningen av problemet. De fick berätta om sina idéer och resonemang för varandra och tillsammans värdera rimligheten i dem. På detta sätt blev de ägare till sina egna lösningar och sin egen kunskap som de sedan kände sig stolta över att redovisa för de andra i klassen. Då eleverna själva får konstruera sin kunskap på detta sätt ges de bättre förutsättningar att få en djupare förståelse av matematiken vilket i sin tur skapar motivation och engagemang; matematiken blir helt enkelt mycket roligare. Lambdin beskriver detta med orden: ”Understanding is motivating” (2003, s. 7)

Lärarens engagemang spelar givetvis även en viktig roll för hur elevernas engagemang utvecklas. När det gäller matematikundervisning genom problemlösning krävs det en extra ansträngning av läraren att hitta lämpliga problem som uppfyller kriterierna för rika problem. Men det krävs även att läraren visar på ett engagemang för matematiken och uppmuntrar elevernas idéer och resonemang så att de känner att de har förmåga och ett självförtroende inom matematiken. Då kan de växa som matematiker. Kursplanen i matematik beskriver bland annat att: ”undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar intresse för matematik och tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang”. (Skolverket, 2011, s. 62)

Frågan är då om inte matematikundervisning genom problemlösning kan vara den väg som kan få med alla elever på matematiktåget? Läraren beskrev hur undervisningsmetoden är: ”/…/motiverande för de omotiverade” (Intervju lärare efter lektion 3- Cykelparkeringen 24.04.2012). Detta är förmodligen ett av de viktigaste konstaterande denna studie lett fram till.

5.1.2 Elevernas förmåga att föra resonemang utifrån de rika matematiska problemen

Val av representationsformer

Elevernas val av representationsformer förvånade mig. De flesta elever valde att inte använda det laborativa materialet som erbjöds. Istället satt de själva och funderade en stund över problemen för att sedan i sina grupper resonera muntligt kring sina idéer. De resonemang de kom fram till skrevs sedan ned, antingen i form av ord eller matematiska symboler. Det visade sig dock att flertalet elever hade svårigheter att arbeta med problemen på en sådan abstrakt nivå som dessa representationsformer innefattar. Följden blev att flera grupper fastnade i sina resonemang och inte lyckades komma fram till en lösning. Det var först när jag gick in och uppmuntrade dem till att använda det laborativa materialet och gav dem ledtrådar om hur det kunde användas som de förstod fördelen med det. Flera elever uttryckte efteråt hur mycket lättare det var att förstå med hjälp av det laborativa materialet och att rita bilder. Varför var det då så få elever som valde att använda dessa konkreta representationsformer?

En orsak är att de helt enkelt inte är vana att arbeta med konkret material och inte förstod hur de skulle använda det i samband med att de löste problemen. Vid den gemensamma genomgången i början av lektionen berättade jag för eleverna om vilket material det fanns att tillgå men jag talade aldrig om hur de skulle använda det. Min förhoppning var att de skulle komma underfund med detta själva vilket flertalet dock inte gjorde. Det är således viktigt att läraren presenterar och vidarebefordrar hur materialet skall användas för att det skall få en mening för elevens förståelse (Löwing, 2004).

När eleverna väl började bearbeta sina matematiska idéer med de konkreta representationsformerna blev det betydligt lättare för dem att förstå det matematiska innehållet. Dessa yngre elever måste uppmuntras till att använda det konkreta materialet för få igång det Bruner (citerad i Imsen, 2006) benämner som den enaktiva aktiviteten där eleverna skapar erfarenheter genom handlingar. Dessa erfarenheter utgör sedan grunden till det Bruner benämner som symboliska representationer; det vill säga det mer abstrakta såsom de ord och matematiska symboler som eleverna till en början valde att använda.

En annan orsak till att eleverna inte väljer att använda sig av det konkreta materialet kan vara att läraren själv brukar välja bort det konkreta materialet i undervisningen. Många lärare startar från en abstrakt nivå i sin undervisning och använder sig inte av något konkret material vilket leder till att eleverna saknar de nödvändiga erfarenheter de behöver för att till fullo förstå det abstrakta symbolspråket (Malmer, 2002). På detta sätt kommer, som jag tidigare nämnt, elevernas kunskaper baseras på deras memoreringsförmåga och inte på deras förståelse. Eleverna agerar alltså såsom läraren gör och väljer bort det konkreta materialet. Det förväntas av dem att de skall kunna resonera utifrån en abstrakt nivå redan i de tidigare åldrarna.

Ovanstående medför förstås ett dilemma vid en undervisning genom problemlösning. Undervisningsmetoden kräver en frihet för eleven att själv välja den representationsform som passar dennes kunskapsnivå. Detta är framför allt viktigt för att eleven skall få möjlighet att synliggöra sina resonemang och prova dem på andra elever. Malmer (2002) beskriver hur många yngre elever är kapabla att lösa relativt svåra problem så länge de inte har kravet på sig att redovisa sina resonemang med det matematiska symbolspråket, vilket hon beskriver som hämmande för en del elever. Denna hämmande faktor skulle kunna vara en förklaring till att så många elever fastnade i sina resonemang då de använde sig av de mer abstrakta representationsformerna.

Ett annat dilemma som visades sig vid de observerade lektionerna var att eleverna utifrån deras olika kunskapsnivåer valde olika representationsformer då de skulle redogöra för sina resonemang. Detta i sig borde inte utgöra något problem. Men det visade sig vid några tillfällen att en del elever hade svårt att växla mellan olika representationsformer. En elev som var mer matematiskt kunnig hade svårt att redogöra för sitt resonemang för de andra i gruppen då han enbart kunde uttrycka sig med hjälp av ord och siffror. De andra eleverna hade svårt att förstå hans resonemang och ville få det presenterat med hjälp av bilder istället, vilket han upplevde som svårt. Utifrån detta kan vi förstå hur viktigt det är att eleverna undervisas i användandet av olika representationsformer.

Kursplanen i matematik beskriver tydligt hur undervisningen skall ge eleverna förutsättningar att utveckla sin förmåga att: ”använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser” (Skolverket, 2011, s. 63). Eleverna måste helt enkelt erhålla de verktyg som behövs för att de skall kunna redogöra för sina matematiska idéer. Detta är en förutsättning för att eleverna skall kunna föra matematiska resonemang vid arbetet med de rika matematiska problemen oavsett vilken kunskapsnivå de befinner sig på. För att få dessa verktyg bör eleverna få lära sig och uppmuntras till att använda olika representationsformer. Ett sätt kan vara att läraren kräver att de använder sig av flera olika representationsformer vid arbetet med problemen som vid arbetet med fyrfältsblad. Nackdelen med fyrfältsblad är att elevens egna val av representationsform faller bort. Det kan få negativa effekter för elevens känsla av att den skapar och äger sin egen kunskap. En del elever kommer förmodligen uppleva det som besvärligt att de tvingas använda sig av representationsformer vilka inte uppfattas som meningsfulla för dem. Fördelen är dock att eleverna lär sig transferera sitt resonemang mellan de olika representationsformerna vilket även kan underlätta för dem att transferera mellan olika matematiska områden och mellan matematiken och vardagssituationer. Hagland et al.,

(2009) beskriver detta med hjälp av den så kallade KLAG-o-muren och hur eleverna med hjälp olika representationsformer lär sig växla mellan det konkreta i omvärlden och det abstrakta i matematikens värld. Detta för att de skall kunna knyta samman den matematik de tänker i med det liv de lever i (Hagland et al., 2009).

Att resonera tillsammans, en språklig uttrycksform, är en av de representationsformer eleverna använde sig flitigt av. Eleverna själva uppgav att det hjälper dem mycket att samtala med en kamrat vid arbetet med de olika problemen. I samband med detta fick de sätta ord på sina tankar, prova sina idéer på varandra och utvärderar dem tillsammans. Von Glaserfeld (citerad i Duffy & Savery, 1995) menar att andra individers erfarenheter och föreställningar är den främsta källan till att pröva våra egna erfarenheter. Detta kan även kopplas till den kognitiva konflikt Piaget (citerad i Imsen, 2006) beskriver där elevens egna erfarenheter möter nya erfarenheter genom att lyssna till andra elevers resonemang. Däri uppstår en obalans som driver eleven till ackommodation och ny kunskap. Vid undervisning genom problemlösning utvecklas elevernas kunskaper i ett samspel dem emellan. Genom att de tillsammans resonerar kring ett problems lösning skapas möjligheter att bygga på tidigare erfarenheter och kunskaper genom en förhandling kring elevernas olika insikter; vilket leder till en fördjupad förståelse (Hagland et al., 2009). De kan på detta sätt tillsammans extrahera nya matematiska kunskaper och färdigheter i arbetet med ett problem.

Av ovanstående kan vi förstå att det krävs en förmåga hos eleverna att använda sig av flera olika representationsformer för att de skall kunna synliggöra sina resonemang. Detta anser jag dock inte som något oöverstigligt problem. Om eleverna kontinuerligt får arbeta med uppgifter som stimulerar ett användande av flera olika representationsformer, vilket de rika matematiska problemen i sig kan bidra till, tror jag att de ganska snart lär sig växla dem emellan. Det är även viktigt att poängtera att detta utgör ett av kunskapskraven för godtagbara kunskaper i slutet av årskurs 3 enligt kursplanen för matematik: ”Eleven kan beskriva och samtala om tillvägagångssätt på ett i huvudsak fungerande sätt och använder då konkret material, bilder, symboler och andra matematiska uttrycksformer med viss anpassning till sammanhanget” (Skolverket, 2011, s. 67).

Begrepp, procedurer och strategier som eleverna använder sig av

För att ta reda på i vilken utsträckning undervisningsmetoden skulle kunna fungera i en årskurs 2 var jag tvungen att utreda vilka begrepp, procedurer och strategier de rika matematiska problemen aktiverade eller extraherade hos eleverna. Detta för att syftet med undervisningsmetoden är att eleverna skall introduceras till matematiska områden samtidigt som de får en fördjupad förståelse av sina tidigare erfarenheter inom matematiken. Jag har tidigare redogjort för de olika problemen som använts i studien där jag även beskrivit vilka matematiska områden de förväntas introducera till. Bakom varje problem finns det alltså ett klart syfte till vilka matematiska områden de skall beröra. Frågan är då om problemen aktiverade eller extraherade några begrepp, procedurer eller strategier hos eleverna?

När det gäller begrepp och procedurer visade sig lite olika resultat. Flera elever använde sig av begrepp de kände till sedan tidigare som till exempel dubbelt och hälften vid arbetet med problemet *Godisbitarna*. Men det som var intressant var att de hade förmåga att sätta in dessa begrepp i ett nytt sammanhang som rörde proportionalitet. De kände inte till begreppet i sig men de använde sig av det vid proceduren då de halverade de båda enheterna för att sedan multiplicera dem med fem. Detta kan kopplas till assimilation, då eleven ställs inför en ny situation och tar hjälp av tidigare erfarenheter för att förstå det nya, och ackommodation då eleven utvecklar sin förståelse av situationen (Imsen, 2006). Några elever berättade hur de genom att arbeta med problemet hade fått en ökad förståelse av division och sambandet mellan division och multiplikation. Detta stämmer överens med en av fördelarna med undervisningsmetoden. Då elever ställs för ett matematiskt problem börjar de använde de procedurer de kan sedan tidigare; om dessa inte har förståtts i sin helhet tidigare kan de fördjupa förståelsen ytterligare (Lambdin, 2003).

Vid arbetet med problemet *Glassarna* var det en del elever som lärde sig begreppet kombinera och vad det innebär; medan en del redan kände till det och kunde använda det som procedur vid lösandet av problemet. Det var dock flera elever som hade svårt att upptäcka matematiken i detta problem. Orsaken kan vara att dessa yngre elever associerar matematik med de fyra räknesätten. Detta är en viktig aspekt att ta hänsyn till när man arbetar med denna undervisningsmetod och de rika matematiska problemen. Läraren måste kunna förutse vad ett problem kommer generera för matematiska idéer samt vilken förmåga eleverna har att utveckla dem utifrån sina tidigare kunskaper.

Problemet *Cykelparkeringen* valdes för att läraren vill få in multiplikation vid arbetet med problemen. Hon berättade att multiplikation höll på att introduceras för eleverna och var därför ett behövligt område att arbeta med. Det som blev intressant i samband med problemet C*ykelparkeringen* var att flera elever började med addition då de lade ihop antalet cykelhjul men övergick sedan till att använda multiplikation inom tvåans och treans tabell. De räknade antalet tvåskutt och treskutt. Jag upplevde att det var när de började rita upp antalet hjul och grupperade dem som de förstod att de kunde använda sig av multiplikation. De räknade antalet grupper med trehjulingar respektive tvåhjulingar och kunde på detta sätt få en koppling mellan addition och multiplikation. Eleverna fick själva upptäcka denna koppling vilket påminner mycket om den metod Bruner utvecklade, Learning by Discovery, vilken innebär att eleverna på egen hand upptäcker ett ämnes kärna vilken de bygger vidare på genom närmare undersökningar (Imsen, 2006). På detta sätt konstruerar eleverna sin egen kunskap vilket är syftet med undervisning genom problemlösning.

Utav ovanstående kan vi förstå att de rika matematiska problemen både aktiverade tidigare kunskaper och extraherade nya kunskaper. Resultatet varierade utifrån de olika problemen men även utifrån elevernas tidigare kunskaper. Den insikt som jag återigen kom i kontakt med är hur väl undervisningsmetoden fungerar när det gäller att anpassa undervisningen till elevernas olika nivåer. En del elever lärde sig nya begrepp och procedurer medan andra fick fördjupad förståelse för tidigare inlärda begrepp och procedurer. Några elever lärde sig använda begrepp och procedurer i nya sammanhang medan andra fick förståelse av sambandet mellan olika procedurer såsom multiplikation och division eller multiplikation och addition. Några elever blev introducerade till tvåans respektive treans multiplikationstabell. Oavsett vilket problem eleverna arbetade med så kunde varje elev få utgå från sin kunskapsnivå och arbeta vidare därifrån. I samarbetet med varandra kunde de tillsammans resonera kring sina olika matematiska idéer och lära sig av varandra för att så småningom komma fram till en lösning på problemet.

Den största svårigheten eleverna visade på var att finna bra strategier att bearbeta problemen utifrån. Flera elever hade svårt att komma igång och när de väl kom igång handlade det oftast om att gissa och prova sig fram. Det var endast ett fåtal elever som undersökte problemen systematiskt utifrån någon klar strategi. Läraren själv trodde att detta beror på att de sällan arbetar med problemlösning och att eleverna därför inte har tillräckliga kunskaper kring vilka strategier de kan använda sig av. Många elever undervisas enbart i den strategi som handlar om att välja procedurer för att sedan kunna utföra beräkningarna (Lester, 1996). Av detta kan vi förstå att eleverna måste undervisas i olika problemlösningsstrategier i samband med att man börjar arbeta med matematikundervisning genom problemlösning. Detta för att de skall kunna få fullt utbyte av undervisningsmetoden. Återigen vill jag koppla till kursplanen i matematik och kunskapskraven för godtagbara kunskaper i slutet av årskurs 3:

> Eleven kan lösa enkla problem i elevnära situationer genom att välja och använda någon strategi med viss anpassning till problemets karaktär. Eleven beskriver tillvägagångssätt och ger enkla omdömen om resultatens rimlighet. (Skolverket, 2011, s. 67)

Som vi kan förstå av ovanstående är det ett kunskapskrav redan i årskurs 3, oavsett undervisningsmetod, att eleverna skall kunna använda olika strategier för att kunna lösa ett matematiskt problem.

Elevernas behov av stöd

En av de huvudsakliga vinsterna med att eleverna undervisas i matematik genom problemlösning är att eleverna lär sig se på matematik som en utmaning. Där de kan ta kontroll över sitt eget lärande och utvecklar en djupare förståelse samtidigt som de får uppleva att de utfört en prestation på egen hand (Lambdin, 2003). Detta skall inte uppfattas som att det inte ställs några krav på läraren eller att hon kan inta en passiv roll i elevernas lärandeprocess. Det är snarare tvärtom; lärarens roll i detta sammanhang är förmodligen mer krävande än vid traditionell matematikundervisning. Hagland et al. (2009) anser att matematikundervisning genom problemlösning fodrar mer gedigna kunskaper inom både didaktik och matematik än annan matematikundervisning. Bakgrunden till detta påstående ligger antagligen i det arbete som krävs i samband med bland annat val av lämpliga problem. Dessa skall anpassas till elevgruppens tidigare erfarenheter så att alla har möjlighet att förstå dem samtidigt som problemen skall skapa möjlighet till introduktion inom olika matematiska områden. Men även lärarens vägledande roll genom problemlösningsprocessen ställer krav. Genom att ställa frågor eller påståenden samt stötta enskilda elevers idéer skall de ledas vidare i lärandeprocessen. Läraren spelar även en viktig roll då det handlar om att synliggöra elevernas olika lösningar och diskutera kring dem då det gäller olikheter, likheter, felaktigheter (Taflin, 2007). Som vi förstår så lämnas inte eleverna själva i sin lärandeprocess men det stöd de erhåller från läraren skall handla om ett mer vägledande stöd än om ett kunskapsöverförande. Vilket stöd behövde då dessa yngre elever vid arbetet med problemen?

Som jag tidigare beskrev så hade de svårigheter vid det inledande arbetet då de skulle välja en strategi för att bearbeta problemet. Både jag och läraren fick gå in och ge vägledning åt flera elever så att de kom igång med arbetet. Likaså gällde elevernas val av representationsformer då de redogjorde för sina resonemang. Flera elever fastnade i sina mer abstrakta resonemang och jag fick leda dem in på användandet av det konkreta materialet och att rita bilder. Det är förstås en fördel om eleverna kan finna strategier på egen hand men läraren måste även guida eleverna mot effektiva strategier vilka tar utgångspunkt från elevernas kunskapsnivå (Cai, 2003).

Några elever hade inom sina grupper svårt att växla mellan olika representationsformer och jag fick då ge vägledning till alternativa sätt att presentera deras resonemang. Stephan & Whitenack (2003) beskriver hur läraren måste skapa normer kring hur eleverna kommunicerar och resonerar kring sina matematiska idéer. Vidare beskriver de hur läraren till en början kan illustrera elevernas resonemang på tavlan vid en gemensam genomgång där eleverna själva får referera till dessa representationsformer då de redogör för sina resonemang. På detta sätt lär de sig att synliggöra sina resonemang med hjälp av flera olika representationsformer.

Läraren beskrev även hur flera av eleverna behövde hennes stöd då de skulle arbeta med att hitta på ett eget problem. De förstod inte hur de skulle gå till väga. Detta förklarade hon med att eleverna helt enkelt inte har någon erfarenhet av detta arbetssätt.

Utifrån elevernas behov av stöd vid de genomförda lektionerna kan vi förstå att det, innan matematikundervisning genom problemlösning börjar praktiseras, måste genomföras någon form av matematikundervisning *om* problemlösning. Jag har tidigare beskrivit hur denna form av undervisning syftar till att lära eleverna olika strategier och metoder för att lösa problem. Vid denna undervisning läggs stort fokus på att utveckla elevernas förmåga att välja lämpliga strategier för att lösa ett problem (Taflin, 2007, s. 40). Detta skulle kunna integreras vid undervisning genom problemlösning. Läraren skulle kunna lägga ett större fokus på strategival vid de gemensamma genomgångarna i början och slutet av lektionerna. Lester (1996) beskriver hur detta kan genomföras i två faser: först betonas strategiernas innebörd och de tekniker som behövs varpå eleven får praktisera strategin genom att lösa problem. Vidare beskriver Lester den andra fasen då eleven får lära sig avgöra när strategin kan användas varpå eleven får problem att bearbeta där den själv skall avgöra vilken strategi som skall användas. Läraren skulle alltså kunna använda sig av flera olika problem där en viss strategi är återkommande vilken då betonas. Så småningom övergår fokus i undervisningen mot att arbeta med problem där en variation av strategier kan användas. Även detta arbetssätt finner stöd i kursplanen i matematik vilken beskriver hur eleverna i matematikundervisningen skall ges förutsättningar att: ”utveckla sin förmåga att formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder” (Skolverket, 2011, s. 63).

Elevernas förmåga att hitta mönster och generalisera

Syftet med matematikundervisning genom problemlösning är bland annat att eleverna introduceras till olika matematiska områden (Taflin, 2007). Målet är att de vid arbetet med problemen på egen hand, med visst stöd av läraren, skall kunna ”dra ut” det gemensamma och generalisera. På detta sätt får eleverna en djupare förståelse för de matematiska områden problemen berör. Utifrån detta kan vi förstå att en viktig faktor i denna studie var att ta reda på huruvida eleverna har förmåga att hitta mönster och generalisera i samband med de matematiska resonemang de för.

Resultatet visade att det vid varje lektion var någon eller några elever som hade förmåga att hitta mönster och generalisera. Detta måste anses som ett positivt resultat med hänsyn till elevernas begränsade erfarenhet av arbete med problemlösning. Att finna mönster och att kunna generalisera är resultatet av de resonemang eleverna har förmåga att föra i samband med bearbetningen av problemen (Taflin, 2007). Vidare beskriver Taflin hur dessa resonemang i sin tur baseras på de begrepp, procedurer och strategier eleverna använder sig av vilka synliggörs med hjälp av de olika representationsformerna. Att finna ett mönster och generalisera utifrån sina resonemang innebär således att eleverna skall ha förmåga att använda sig av olika begrepp, procedurer och strategier samt uttrycka dessa med hjälp av olika representationsformer. Studien visade att eleverna hade förmåga att använda och utveckla tidigare begrepp och procedurer men att flertalet elever saknade förmåga att använda flera olika strategier när de bearbetade problemen. Eleverna hade även liten erfarenhet av att arbeta med konkret material för att synliggöra problemens förutsättningar och sina egna resonemang. Elever som undervisats i en mer traditionell undervisning har ofta en förmåga att kunna redovisa de procedurer de använt sig av men däremot inte hur de resonerat när de valt att använda sig av dessa procedurer (Stephan & Whitenack, 2003). Utifrån resultatet förstår vi att det främst är två områden som måste utvecklas för att öka elevernas förmåga att hitta mönster och generalisera; kunskaper om problemlösningsstrategier och användandet av olika representationsformer. Det krävs att eleverna undervisas i användandet av olika strategier vid problemlösning samt att de uppmuntras att använda sig av konkret material. Görs detta finns det goda möjligheter att fler elever kan dra generella slutsatser utifrån arbetet med problemen. Då det trots allt fanns elever som hade förmåga att hitta mönster och generalisera finns det en god potential att elever i dessa åldrar kan nå målet med undervisningsmetoden. Det skall även tilläggas att flera elever fick en ökad förståelse för de mönster och den matematik som fanns i de olika problemen då de vid de gemensamma genomgångarna kunde ta del av varandras resonemang.

5.2 Resultatets relevans för läraryrket

Regeringen beskrev i budgetpropositionen för 2012 behovet av en förbättrad matematikundervisning:

> Såväl nationella som internationella undersökningar visar att svenska elevers resultat i matematik successivt har försämrats sedan 1990-talet /…/ Granskningen visar att det finns behov av att lärarna erbjuder eleverna en mer omfattande och bättre utvecklad undervisning. (Proposition 2011/12:1, 2011)

Med anledning av detta måste skolan och lärarna rannsaka sin undervisning och försöka finna nya vägar för att utveckla elevernas engagemang och förståelse för matematiken. Eleverna behöver redan i de tidigare åldrarna introduceras till matematiken på ett sådant sätt att de får en grundläggande förståelse för olika begrepp, procedurer och strategier. Matematikundervisning genom problemlösning där eleverna aktivt får konstruera sin egen kunskap skapar förutsättningar för att alla elever kan utveckla denna grundläggande förståelse, även de som har svårigheter med matematiken. Förståelse leder till självförtroende och engagemang inom matematiken, en slags motor som driver lärandeprocessen hos eleverna. Undervisningsmetoden kan därför utgöra ett fullgott bidrag till att öka elevernas grundläggande förståelse inom matematiken samtidigt som den engagerar hela elevgruppen, även de som känner ett motstånd mot matematik.

5.3 Vidare forskning

Studien har visat på positiva resultat vid användandet av matematikundervisning genom problemlösning för yngre elever, vilket uppmuntrar till att fler lärare använder sig av metoden. Inom ramen av denna studie har det dock inte funnits utrymme att fullt ut studera lärarens roll vid användandet av undervisningsmetoden, vilken spelar en betydande roll för dess framgång. Förslag på vidare forskning är således att studera lärarens roll vid användning av undervisningsmetoden. Detta skulle kunna genomföras genom att använda Lesson study eller Learning study.

En annan aspekt som behöver studeras är undervisningsmetodens effekter på lång sikt när det gäller elevernas matematikkunskaper; det vill säga genomförandet av en longitudinell studie.

6 SLUTSATS

Denna fallstudie visar utifrån autentiska undervisningssituationer att elevernas engagemang vid matematikundervisning genom problemlösning är stort. Eleverna uppvisar en glädje och tillfredställelse då de arbetar med problemen. Detta antas bero på att eleverna, aktivt och kreativt, får vara med och konstruera sin kunskap vilket leder till en ökad förståelse samtidigt som de får uppleva lyckan i att bemästra ett problem som de till en början upplever som svårt. Denna glädje och tillfredställelse skapar motivation och självförtroende till matematiken vilket leder till ett ökat engagemang. Detta kan kopplas till tidigare forskning och de faktorer som anses konstruera elevers engagemang i undervisningen. Matematikundervisningen genom problemlösning utvecklar förståelsen av matematiken vilket leder till ett ökat kognitivt engagemang vilket är nära relaterat till elevernas känslomässiga och beteendemässiga engagemang. Undervisningsmetodens stora fördel är således att den kan engagera alla elever, även de elever som vid den ordinarie undervisningen är negativt inställda till matematik eller har svårigheter inom matematiken. Den medverkande läraren i studien uttrycker detta enligt följande: ”Matematikundervisning genom problemlösning är motiverande för de omotiverade” (Intervju lärare efter lektion 3- Cykelparkeringen 24.04.2012).

Studien visar även att eleverna har förmåga att föra matematiska resonemang vid arbetet med de rika matematiska problemen men dock med vissa begränsningar. Dessa grundar sig i elevernas begränsade förmåga att använda sig av olika strategier när de bearbetar problemen men även i deras begränsade förmåga att växla mellan och använda sig av flera olika representationsformer. Eleverna har liten erfarenhet av att arbeta med konkret material för att synliggöra problemens förutsättningar och sina egna resonemang. Eleverna visar dock på förmåga att använda och utveckla begrepp och procedurer. Några elever visade även på förmåga att hitta mönster och generalisera utifrån de bearbetade problemen.

Min slutsats är således att det finns goda möjligheter för elever i årskurs 2 att lära sig matematik genom problemlösning. Elever som är ovana problemlösare behöver dock i viss utsträckning undervisas om problemlösning för att utveckla sina kunskaper kring olika strategier samt användandet av matematikens olika representationsformer. Detta skapar förutsättningar för dem att till fullo kunna bearbeta och utveckla sina matematiska idéer och resonemang och dra generella slutsatser.

LITTERATURFÖRTECKNING

Proposition 2011/12:1. (2011). *Budgetpropositionen för 2012*. Stockholm: Regeringskansliet.

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Göteborg: NCM Nämnaren Göteborgs universitet.

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. i B. Grevholm (Red.), *Matematikdidaktik, ett nordiskt perspektiv* (ss. 115-130). Lund: Studentlitteratur.

Cai, J. (2003). What Research Tells Us about Teaching Mathematics through Problem Solving. i F. K. Lester. (Red.), *Teaching Mathematics through Problem Solving Prekindergarten - Grade 6* (ss. 241-253). Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematic.

Duffy, T. M., & Savery, J. R. (1995). Problem Based Learning An instructional model and its constructivist framework. i B. G. Wilson (Red.), *Constructivist Learning Environments: Case Studies in Instructional Design* (ss. 135-150). Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.

Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B., & Ryding, R. (1996). *Matematik - ett kommunikationsämne.* Göteborg: NCM Nämnaren Göteborgs univeristet.

Engström, A. (1998). *Matematik och reflektion.* Lund: Studentlitteratur.

Eriksson, K. H. (1996). Om barns förmåga att bilda begrepp. i Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B., & Ryding, R. (Red.), *Matematik ett kommunikationsämne* (ss. 54-58). Göteborg: NCM Nämnaren Göteborgs Universitet.

Gustafsson, B., Hermerén, G., & Pettersson, B. (2011). *God forskningssed.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin , E. (2009). *Rika matematiska problem* (1:a uppl.). Stockholm: Liber AB.

Hedrén, R. (2000). *Social Konstruktivism i elementär aritmetik - Kan elever i år 2-5 göra skriftliga beräkningar utan de traditionella uppställningarna? Rapport 2000:1.* Falun: Högskolan Dalarna.

Hodgson, T. R. (1995). Connections as Problem-Solving Tools. i P. A. House, & A. F. Coxford. (Red.), *Connecting Mathematics across the Curriculumn* (ss. 13-21). Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Häggblom, L. (2000). *Räknespår Barns matematiska utveckling från 6 till 15 års ålder.* Åbo: Åbo Akademis förlag.

Imsen, G. (2006). *Elevens värld.* Lund: Studentlitteratur AB.

Kong, Q.-P., Wong , N.-Y., & Lam, C.-C. (2003). Student Engagement in Mathematics: Development of Instruments and Validation of Construct. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 15 No. 1. 4-21.

Lambdin, D. V. (2003). Benefits of Teaching through Problem Solving. i F. K. Lester. (Red.), *Teaching Mathematics through Problem Solving Prekindergarten - Grade 6* (ss. 3-14). Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. i Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B., & Ryding, R. (Red.), *Matematik - ett kommunikationsämne* (ss. 85-91). Göteborg: NCM Nämnaren Göteborgs Universitet.

Lester, F. K., & Cai, J. (den 8 April 2010). *Why is Teaching with Problem Solving Important to Student Learning?* Hämtat från National Council of Teachers of Mathematics: http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=25713 den 08 April 2012

Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning.* Göteborg: Kompendiet.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla.* Lund: Studentlitteratur.

Merriam, S. B. (1994). *Fallstudien som forskningsmetod.* Lund: Studentlitteratur.

Nationalencyklopedin. (den 23 April 2012). *Nationalencyklopedin*. Hämtat från www.ne.se: http://www.ne.se/sok?q=engagemang den 23 April 2012

Pilhammar Andersson, E. (1996). *Etnografi i det vårdpedagogiska fältet - en jakt efter ledtrådar*. Lund: Studentlitteratur.

Sakshaug, L. E., & Wohlhuter, K. A. (December 2010). Journey toward Teaching Mathematics through Problem Solving. *School Science and Mathematics, 110 (8)*, ss. 397-409.

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Hämtat från Skolverket: http://www.skolverket.se/publikationer?id=2575 den 6 Juli 2011

Stephan, M., & Whitenack, J. (2003). Establishing Classroom Social and Sociomathematical Norms for Problem Solving. i F. K. Lester. (Red.), *Teaching Mathematics through Problem Solving Prekindergarten - Grade 6* (ss. 149-162). Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan - för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå: Print & Media.

Wistedt, I. (2001). Rum för samtal. i B. Grevholm (Red.), *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv* (ss. 219-228). Lund: Studentlitteratur.

BILAGOR

Bilaga 1 Tillståndsförfrågan vårdnadshavare

Anhållan om tillstånd för att ert barn kan delta i en undersökning inom ramen för ett examensarbete vid lärarutbildningen vid Göteborgs universitet

Jag är student som utbildar mig till lärare vid Göteborgs Universitet. Jag skall nu skriva den avslutande uppgiften inom lärarutbildningen som är mitt examensarbete och som ger mig min lärarbehörighet. Arbetet motsvarar 10 veckors heltidsstudier och skall vara klart i slutet av maj. Examensarbetets syfte är att undersöka konsekvenserna av att undervisa genom problemlösning kring grundläggande matematiska begrepp i en åk 2.
De viktigaste frågorna jag behöver få svar på är:

- Hur påverkar undervisningssättet elevernas inställning till matematik?
- Vilka matematiska förmågor kan eleverna utveckla vid undervisning genom problemlösning?

För att kunna besvara dessa frågor behöver jag samla in material genom intervjuer och observationer med elever i en klass från årskurs 2.

På er skola kommer undersökningen att genomföras under perioden 17-27 april 2012. Jag vill med detta brev be er som vårdnadshavare om tillåtelse att ert barn deltar i den observation och intervju som ingår i examensarbetet. Alla elever kommer att garanteras anonymitet. Den skola/klass som finns med i undersökningen kommer inte att nämnas vid namn eller på annat sätt kunna vara möjliga att urskilja i undersökningen. I enlighet med de etiska regler som gäller är deltagandet helt frivilligt. Ert barn har rättigheten att intill den dag arbetet är publicerat, när som helst välja att avbryta deltagandet. Materialet behandlas strikt konfidentiellt och kommer inte att finnas tillgängligt för annan forskning eller bearbetning.

Vad vi behöver från er är att ni som elevens vårdnadshavare skriver under detta brev och så snart som möjligt skickar det med eleven tillbaka till skolan så att ansvarig lärare kan samla in svaret vid tillfälle. Sätt således ett kryss i den ruta som gäller för er del:

☐ Som vårdnadshavare **ger jag tillstånd** att mitt barn deltar i undersökningen

☐ Som vårdnadshavare **ger jag inte tillstånd** att mitt barn deltar i undersökningen

Datum ……………………………………………..

…………………………………………………….. ………………………………………….
vårdnadshavares underskrift/er elevens namn

Har ni ytterligare frågor ber vi er kontakta oss på nedanstående adresser eller telefonnummer:

Med vänliga hälsningar

Lärarstudent Anne-Marie Cederqvist 0707-444 589

Handledare för undersökningen är universitetslektor Florenda Gallos Cronberg

Kursansvarig lärare är universitetslektor Daniel Seldén, Göteborgs universitet, Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap, telefon 031 786 47 82.

Bilaga 2 Intervjuguide

Intervjuguide elever (efter genomförd lektion)

- Hur upplevde du dagens matematiklektion? Varför?
- Hur upplevde du uppgiften? Varför?
- Kan du berätta för mig vilken matematik du arbetade med i dagens uppgift?
- Vilken matematik lärde du dig?
- Använder du dig av några tidigare kunskaper dvs. något som du kunde sedan tidigare eller varit med om tidigare för att kunna lösa uppgiften? Vad?
- Hur brukar du göra när du skall lösa sådana här uppgifter? Hjälper det dig att rita en bild eller tala med en kamrat när du skulle lösa uppgiften?
- Finns det något annat du vill berätta om lektionen?

Intervjuguide lärare (före genomförda lektioner)

- Brukar eleverna arbeta med problemlösning? Om ja, på vilket sätt?
- Hur brukar din undervisning i matematik se ut?

Intervjuguide lärare (före varje lektion)

- Hur skulle du undervisa om samma innehåll som vid dagens lektion?

Intervjuguide lärare (efter varje genomförd lektion)

- Elevernas engagemang i uppgiften?
  - Vilket engagemang visade eleverna i uppgiften?
  - Vilka känslor uttryckte eleverna i samband med att de arbetade med uppgiften?

- Vilka matematiska resonemang väckte det rika matematiska problemet eleverna försökte att lösa?
  - Vilka representationsformer använde sig eleverna av?
  - Vilka begrepp, procedurer och strategier använde eleverna sig av för att lösa uppgiften?
  - Hade eleverna förmågan att hitta mönster och generalisera vid arbetet med uppgiften?
  - Vilket stöd behövde eleverna av den undervisande läraren?

- Finns det något annat du vill berätta om lektionen?
- Vilka fördelar/nackdelar upplever du med matematikundervisning genom problemlösning?

Observationsschema (punkter som ska observeras av forskaren och den observerande läraren)

- Elevernas engagemang i uppgiften?
  - Vilket engagemang visar eleverna i uppgiften?
  - Vilka känslor uttrycker eleverna i samband med arbetet med uppgiften?

- Vilka matematiska resonemang väcker de rika matematiska problemen eleverna försöker att lösa?
  - Vilka representationsformer använder sig eleverna av?
  - Vilka begrepp, procedurer och strategier använder eleverna sig av för att lösa en matematisk uppgift?
  - Har eleverna förmågan att hitta mönster och generalisera vid arbetet med uppgiften?
  - Vilket stöd behöver eleverna av läraren?

Bilaga 3 Observationsschema

	Elev:	Elev:	Elev:
Vilket engagemang visar eleverna i uppgiften?			
Vilka känslor uttrycker eleverna vid arbetet med uppgiften?			
Vilka representationsformer använder sig eleverna av?			
Vilka matematiska begrepp använder sig eleverna av?			
Vilka procedurer använder sig eleverna av?			
Vilka strategier använder sig eleverna av?			
Har eleverna förmåga att hitta mönster och generalisera?			
Vilket stöd behöver eleverna av läraren?			