GÖTEBORGS UNIVERSITET

Elevers svårigheter med att lösa andragradsekvationer

Zainab Jaffar & Niklas Ögren

LAU395

Handledare: Thomas Lingefjärd

Examinator: Angelika Kullberg

Rapportnummer: HT12-2611-131

Abstract

Examensarbete inom Lärarprogrammet LP01

Titel: Elevers svårigheter med att lösa andragradsekvationer

Författare: Zainab Jaffar & Niklas Ögren

Termin och år: HT 12

Kursansvarig institution: För LAU395: Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap

Handledare: Thomas Lingefjärd

Examinator: Angelika Kullberg

Rapportnummer: HT-2611-131

Nyckelord: Andragradsekvation, matematikundervisning, grafritande räknare, instrumentering och instrumentalisation

Sammanfattning

Vårt examensarbete handlar om olika svårigheter elever möter när de ska lösa andragradsekvationer med och utan digitala hjälpmedel. Syftet med examensarbetet är att lyfta upp de svårigheter som uppkommer när elever löser andragradsekvationer och studera vad dessa kan bero på och vilka kunskaper eleverna saknar. Metoden vi har använt oss av i examensarbetet är kvalitativ undersökningsmetod, det vill säga observation och samtalsintervju med fem elever som går teknik- eller naturprogrammet och en samtalsintervju med elevernas lärare på en gymnasieskola utanför Göteborgs kommun. Vi observerar eleverna utföra andragradsuppgifter med och utan digitala hjälpmedel och analyserar deras framgångar och svårigheter och integrerar elevernas resultat med lärarens syn på elevers svårigheter med andragradsekvationer.

Resultaten visar att elevers grundläggande aritmetiska förståelse är den viktigaste delen för att klara problemlösning av andragradsekvationer då ett digitalt hjälpmedel inte kan hjälpa en elev som saknar denna förståelse. Den andra svårigheten resultatet visar är att elever ofta begränsar sig till att bara använda en av alla metoder de lärt sig och saknar en flexibilitet och kreativitet att välja bland dem och att de fastnar i gamla mönster. Dessa konsekvenser visar att eleverna måste bli bättre på den fundamentala matematiken och öka sin talförståelse innan läraren låter eleven gå vidare till nästa nivå, och att läraren motiverar eleverna att inte fastna i gamla mönster utan fortsätter med ett kreativt tänkande.

Innehållsförteckning

1. INLEDNING, ÄMNE OCH BAKGRUND ... 1

1.1 INLEDNING ... 1
1.2 ÄMNE OCH BAKGRUND ... 1

2. SYFTE OCH PROBLEMFORMULERING ... 1

3. TIDIGARE FORSKNING ... 2

3.1 ELEVERS MATEMATISKA INTRESSE OCH KUNSKAP ... 2
3.2 DIGITALA HJÄLPMEDEL ... 3
3.2.1 Teorier om digitala hjälpmedel i undervisningen ... 3
3.2.2 Svårigheter med digitala hjälpmedel i undervisningen ... 4
3.2.3 Lärarens förhållande till digitala hjälpmedel ... 4
3.3 ALGEBRAISKT FÖRHÅLLNINGSSÄTT ... 5
3.3.1 Att förenkla uttryck och att lösa ekvationer ... 5
3.3.2 Variabler ... 6
3.3.3 Huvudräkning, bråkform och decimalform ... 6
3.3.4 Teckenfel ... 7

4. METOD ... 9

4.1 URVAL ... 9
4.2 UNDERSÖKNINGSMETOD ... 9
4.3 BESKRIVNING AV OBSERVATIONER OCH INTERVJUER ... 10
4.4 VALIDITET OCH RELIABILITET ... 11

5. ETIK ... 13

6. RESULTAT OCH ANALYS ... 14

6.1 RESULTAT AV ELEVINTERVJUN ... 14
6.2 RESULTAT AV LÄRARINTERVJUN ... 14
6.3 RESULTAT AV ELEVERNAS UPPGIFTER ... 15
6.4 ANALYS AV ELEVERNAS RESULTAT ... 17
6.4.1 Första uppgiften ... 17
6.4.2 Första uppgiften med hjälp av Ti-83 ... 17
6.4.3 Andra uppgiften ... 18
6.4.4 Andra uppgiften med hjälp av Ti-83 ... 18
6.4.5 Tredje uppgiften ... 19
6.4.6 Tredje uppgiften med hjälp av Ti-83 ... 19
6.4.7 Fjärde uppgiften ... 20
6.4.8 Fjärde uppgiften med hjälp av Ti-83 ... 20
6.4.9 Femte uppgiften ... 21
6.4.10 Femte uppgiften med hjälp av Ti-83 ... 21
6.4.11 Sjätte uppgiften ... 22
6.4.12 Sjätte uppgiften med hjälp av Ti-83 ... 22

7. DISKUSSION OCH SLUTSATS ... 23

7.1 DISKUSSION ... 23
7.1.1 Utan digitalt hjälpmedel ... 23
7.1.2 Med digitalt hjälpmedel ... 24
7.1.3 Förbättringar ... 26
7.2. SLUTSATS ... 27

REFERENSER ... 28

BÖCKER OCH ARTIKLAR ... 28
INTERNETREFERENSER ... 29

BILAGOR ... 30

BILAGA 1 ... 30
Elevuppgifter ... 30
BILAGA 2 ... 31
Elevintervjun ... 31
BILAGA 3 ... 33
Lärarintervju ... 33

1. Inledning, ämne och bakgrund

1.1 Inledning

Matematiken betraktas som ett viktigt skolämne och det är många elever som har svårt för den. I en avhandling menar Naalslund att många elever upplever algebran som ett meningslöst hanterande med symboler och att eleverna oftare gissar sig fram till ett svar än att generellt kunna räkna med symboler. Naalslund menar att algebran är ett viktigt verktyg för att undersöka, analysera och representera matematiska idéer och därmed är en viktig del av matematiken i skolan (Naalslund, 2012).

Andragradsekvationer är ett moment som introduceras i matematik 2 i gymnasiet. I läroplanen för matematik 2 står det vad eleverna ska kunna om andragradsekvationer efter avslutad kurs. I läroplanen står det följande om målen: ”*Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll: Algebraiska och grafiska metoder för att lösa exponential-, andragrads- och rotekvationer samt linjära ekvationssystem med två och tre obekanta tal.”* Vidare ska eleven få en förståelse för ”*Konstruktion av grafer till funktioner samt bestämning av funktionsvärde och nollställe, med och utan digitala verktyg.”* (Lgr11 2011, s.119). För att eleverna ska nå de uppsatta målen krävs det att de måste ha förståelse om andragradsekvationer och att de har förmåga och förståelse att lösa olika typer av dem. För betyg E i Matematik 2c ska uppnås krävs det att eleven kan ”*med viss säkerhet använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena i bekanta situationer. I arbetet hanterar eleven några enkla procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär med viss säkerhet, både utan och med digitala verktyg.”* (Lgr11 2011, s. 119f).

1.2 Ämne och bakgrund

Vi har valt att skriva vårt examensarbete inom matematikundervisning för att vi anser att det är intressant att undersöka hur elevers lärande påverkas av digitala hjälpmedel. Vi vill mer precist undersöka vilka svårigheter som elever möter när de ska lösa andragradsekvationer, med och utan digitala hjälpmedel. Utifrån våra erfarenheter från VFU-perioderna så löser eleverna dessa uppgifter med olika metoder beroende på om de använder digitala hjälpmedel eller inte. De olika metoderna betyder att eleverna möter olika svårigheter och vi vill studera vad dessa kan bero på. Eleverna behöver även olika kunskaper för användning av de olika metoderna och vi vill studera vilken typ av kunskap eleverna saknar.

2. Syfte och problemformulering

Vårt syfte med detta examensarbete är att undersöka:

- Vilka svårigheter möter elever när de ska lösa andragradsekvationer med och utan digitala hjälpmedel?
- Vad beror dessa svårigheter i huvudsak på?
- Vilken kunskap saknar de elever som har svårigheter med att lösa andragradsekvationerna?

3. Tidigare forskning

3.1 Elevers matematiska intresse och kunskap

Unenge, Sandahl och Wyndhamn anser i boken *Lära matematik* från 1994 att vissa elever saknade tillräckliga kunskaper inom matematik efter grundskolan och att intresset för ämnet då sjönk för varje årskurs. De trodde att anledning till det berodde på att delar av matematiken inte kändes attraktiva eller relevanta då kursinnehållet inte hade ändrats nämnvärt under det senaste århundradet. Den lösning de ville se var att få matematiken mer relevant till elevens vardag för att kunna öka deras intresse för matematik. För att få den bättre utgångspunkten för inlärning ville de ändra undervisningen till vad de kallar vardagsmatematik, etnomatematik (som kan kopplas till olika kulturer eller yrken) och situationsmatematik istället för den formella akademiska matematiken (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 49f). Den andra faktorn de ansåg viktig för inlärningen var atmosfären i klassrummet. Eleverna måste veta varför de läser ämnet och vilja vara delaktiga i sin läroprocess för att det ska kunna uppstå en bra atmosfär (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 78ff).

Den formella akademiska matematiken som vanligtvis används, används inte utanför skolmiljön där ofta andra metoder är vanligare. Exempelvis om du i vardagen löser ett problem så behöver ingen annan förstå hur du gör det eller förstå eventuella anteckningar. Du eller de behöver nödvändigtvis inte heller följa samma metoder (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 55f). Sådana färdighetskunskaper kan vara svårare att mäta då en lärare inte kan se allt vad en elev kan. Det är nog därför läraren vill ha en mer formell, akademisk matematik för att då visas elevens faktakunskap mycket tydligare och blir därmed lättare att kontrollera (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 63). Ett problemhanteringsexempel de tog upp var att eleverna skulle avrunda 3,45 m till hela meter. Matematiskt är 3 m rätt svar på en sådan uppgift men i en vardagssituation där ett inköp av taklister som endast säljs i hela meter så är det istället 4 m som är det relevanta svaret. De menade att ”Vad händer om…” är en viktig fråga för både elevers reflekterande och läraren som måste förstå hur eleven tänker och angriper problemen. *”När man studerar elevernas sätt att angripa olika situationer kan man också konstatera att en elevs matematiksvårigheter inte säkert är 'matematiska', det kan vara de pedagogiska arrangemangen som eleven inte förstår eller genomskådar.”* (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 83).

Enligt Unenge, Sandahl och Wyndhamn delar Skovsmose in matematisk kunskap i tre delar:

A-matematisk kunskap	att välja en strategi
B-teknisk kunskap	att utföra en beräkning
C-reflekterande kunskap	att reflektera över beräkningsresultatet, kontrollera rimligheten i svaret

I fas A gäller det att hitta på vilken strategi som ska användas och där är det lätt att ta till en av de många algoritmer som elever fått lära sig till varje problemtyp, för att lösa och beräkna uppgifter med. Många matematikdidaktiska forskare menade att algoritmiseringen är en fara för matematikundervisningen då eleverna fastnar i att bara göra, utan att kunna förklara och förstå uppgiften eller vad de egentligen gjort (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 88). Digitala hjälpmedel kan underlätta i fas B för att utföra beräkningarna och då är det alltså fas A och C som är viktiga att ha förståelse i och som räknas som matematisk kunskap (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 66). Unenge menar att saknas förståelse i fas C, till exempel om en elev inte alls kommer fram till ett rimligt svar när denne handskas med tal, så talar de om elever som har svårigheter eller också så kallade ”matematiska analfabeter” (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 74).

3.2 Digitala hjälpmedel

3.2.1 Teorier om digitala hjälpmedel i undervisningen

Drijvers och Gravemeijer beskriver i en artikel att intresset och optimismen för användning av digitala hjälpmedel i klassrummen till en början var hög. Då fanns tron till att hjälpmedlet skulle ge eleverna bättre möjligheter till att utforska mer inom matematiken. Forskningen visade däremot på annat då flera svårigheter med att lära sig matematik uppkom vid användandet av digitala hjälpmedel.

Artikeln tar upp två olika studier från 2000 och 2001 där de menar att digitala hjälpmedel kan resultera i begreppsmässiga svårigheter och att integrationen av datoralgebra i matematikundervisningen var mer komplicerad än förväntat. Tanken var att användningen av digitala hjälpmedel och den konceptuella förståelsen skulle samverka och utvecklas samtidigt för att lärandet inom matematik skulle fungera. De kopplar även till Vygotskys centrala fråga som handlar om att verktyg ska medla mellan mänsklig verksamhet och den miljö de befinner sig i. Det gäller inte bara digitala hjälpmedel utan även de olika språk som används för att människor ska kommunicera med varandra, till exempel det matematiska språket (Drijvers & Gravemeijer 2004, s. 165).

Drijvers och Gravemeijer har även gjort studier inom det område vi är intresserade av där de visade att många elevers kunskap om algebraiska metoder är begränsade. Vissa elever kunde till exempel inte kvadratkomplettera för att lösa en ekvation, och många elever hade inte någon vana sedan tidigare att använda avancerade miniräknare. I en studie med en elev visade Drijvers och Gravemeijer på ett exempel där nollställena skulle lösas ut i en andragradsekvation som hade en obestämd koefficient med hjälp av en symbolhanterande räknare. Eleven ville egentligen att det *skulle* finnas en numerisk lösning till uppgiften för att ens godkänna den som möjlig att lösa i sin egen tankevärld. Svårigheterna var att eleven inte kunde se en generell lösning på problemet med den obekanta koefficienten och att eleven hade svårt att veta vilken obestämd variabel eleven skulle förhålla sig till då det fanns två sådana. Räknaren fungerade så att eleven behövde instruera räknaren vilken variabel som var oberoende så att räknaren skulle kunna förhålla sig till den. Räknaren skulle egentligen ha kunnat hjälpa eleven med att komma ihåg vad variablerna var till för om bara eleven skulle ha förstått hur räknaren tänkte. Men svårigheten för eleven var att eleven saknade vana att använda räknaren och då inte visste hur ekvationen skulle skrivas in med de två obekanta variablerna. Om bara papper och penna använts istället så menar Drijvers och Gravemeijer att tanken på att lösa ekvationen och själva lösningsförfarandet sker samtidigt, och därmed döljer det underförstådda valet om vilken variabel som ska användas i förhållande till ekvationen. Sammanfattningsvis menade de att datorns miljö verkade för att främja en medvetenhet om elementen i uppgiftslösandet som redan är underförstådda när samma sak räknas med papper och penna eller i huvudet (Drijvers & Gravemeijer 2004, s. 171ff).

Slutsatsen Drijvers och Gravemeijer kom fram till är att de svårigheter som uppkom av att lösa algebra med digitala hjälpmedel oftast har att göra med att eleverna hade en begränsad algebraisk insikt från början. Däremot kunde de digitala hjälpmedlen gynna eleverna i och med att de kunde utveckla en bättre mental bild av lösningsprocessen. Och alla de hinder eleverna stöter på under instrumentaliseringsprocessen erbjuder även möjligheter till ett lärande om de jämförs och reflekteras i relation till den metod som används utan hjälpmedlet (Drijvers & Gravemeijer 2004, s. 191f).

3.2.2 Svårigheter med digitala hjälpmedel i undervisningen

Författarna Drijvers och Trouche menar i sin artikel att ett verktyg kan vara helt meningslösa för en användare om användaren inte vet hur verktyget kan hjälpa till eller hur det fungerar. Det är bara när en användare kommer på vilken hjälp verktyget kan bidra med till verksamheten och till vilket specifikt ändamål det kan vara nyttigt som det får kallas ett medierande verktyg. *” a calculator or a computer, it is not automatically a mediating instrument.”* (Drijvers & Trouche 2008, s. 6)

Artikeln skiljer också på begreppen instrumentering och instrumentalisation där de menar att verktyget formar användarens tänkande respektive att användaren formar om verktyget och använder det till något annat än det är tänkt till. Ett exempel de tar upp om instrumentering handlar om grafritande räknare och om att ställa in dess graffönster. Där krävs det att eleven ska kunna hitta rätt menyer, veta innebörden i alla de inställningar som måste ställas in och på vilket sätt inställningarna ska skrivas in. Innan eleverna ens ska kan göra de lämpliga inställningarna måste de ha en grundläggande förståelse för vad de är intresserade av att studera med räknaren eftersom hela grafen aldrig kan visas samtidigt. Och det är där många lärare menar att den verkliga svårigheten ligger i att rita grafer med grafritande räknare. Ett exempel de tar upp om instrumentalisation är att elever kan programmera in spel i räknaren och därmed använda verktyget på ett annat sätt än läraren avsett (Drijvers & Trouche 2008, s. 7f).

Drijvers och Trouche har också upptäckt i sin studie att en svårighet som lärare möter är att det är svårt att veta vilken kunskap eleverna besitter, då kunskapen bara kan utläsas beroende på hur väl eleven muntligt eller skriftligt kan visa hur verktyget använts. Det blir alldeles för enkelt att eleven bara redovisar hjälpmedlets svar och inte dess användning. De digitala hjälpmedlen kommer även instrumenteras på olika sätt av eleverna och därmed kommer de inte använda samma lösningssystem för varje typ av uppgifter och då blir det ännu svårare för läraren att följa elevernas tillvägagångssätt (Drijvers & Trouche 2008, s. 11).

3.2.3 Lärarens förhållande till digitala hjälpmedel

I rapporten *Matematikundervisning i 1990-talets gymnasieskola* tog Dahland upp hur lärarna då förhöll sig till digitala hjälpmedel. Han menade att grundförutsättningar för en systematisk användning av digitala hjälpmedel var att läraren tekniskt och metodiskt skulle behärska det valda programmet eller hjälpmedlet och att läraren skulle ha tillgång till rätt utrustning i sitt klassrum, vilket inte alltid var fallet. Lärarna ansåg att om de själva hade bristande kunskap där så förhindrade det effektivt dem att göra ett bra jobb mot eleverna. Och all den administration som krävdes för att få tekniken tillgänglig för samtliga elever var ofta för svår att organisera att lärarna då hellre undvek att använda det digitala stödet. Många lärare beskrevs som att de var fast i traditioner som de tidigare alltid haft framgång med och att de då behövde ges synnerligen goda skäl till att ändra sin arbetsform för att istället anpassa den mot digitalstödd undervisning. Lärarna ansåg annars att viktig tid tas från det som de tyckte ska prioriteras högre, så som manuellt arbete. Andra svårigheter lärare såg med digitalt stöd var att eleverna arbetade med sämre eftertanke och att de slutade att formulera sig på ett korrekt sätt. Då blev det mycket svårare som lärare att få den överblick över elevernas tankebanor som var nödvändig för att kunna ge eleverna rätt stöd och hjälp (Dahland 1998, s. 6ff).

Dahland gjorde även en studie 1995 om hur elektroniska hjälpmedel, speciellt den grafritande räknaren, användes av lärarna i skolor i Västsverige. De resultat de kom fram till var att ju bättre tekniken behärskades och desto bättre matematikkunskaper man hade, desto kraftfullare verktyg är den grafiska miniräknaren. En dubbel kompetens krävdes av både lärarna och eleverna och att det då bidrar till en optimal användning som även medger kontakt med nya ämnesområden och metoder (Dahland 1998, s. 22). Dahland tog också upp att användningen av miniräknaren kunde övergå till ett missbruk om den användes där det var onödigt, olämpligt eller där den kunde ha gett missvisande resultat (Dahland 1998, s. 24).

3.3 Algebraiskt förhållningssätt

3.3.1 Att förenkla uttryck och att lösa ekvationer

Många elever har inte tillräckliga förkunskaper inom matematik efter grundskolan att det på gymnasiet leder till att flera elever blandar ihop vad som är förenkling av algebraiska uttryck och vad som är ekvationslösning. Många av de svårigheter som elever har med såväl algebra som aritmetik bottnar i problem med förmåga att skilja mellan de begreppen. Eleverna måste se till att lära in en strukturell förståelse av betydelser och beteckningar för att kunna lyckas med algebraiska operationer (Persson 2005, s. 14f).

Persson visar också på att många elever har svårt att se att det är skillnad på en ekvation och på ett uttryck. Skillnaden består i att ett uttryck saknar likhetstecken och alltså inte går att räkna ut så som man gör med ekvationer som har ett likhetstecken. Eleverna tolkar ändå uttrycket som en ekvation genom att felaktigt förutsätta att uttrycket är lika med noll så att de kan räkna ut ett *x*- värde algebraiskt eller grafiskt. Det kan ställa till stora bekymmer och missuppfattningar för eleven. Perssons studier visar att problem med aritmetiken ligger till grund för sådana svårigheter då kunskaperna i hur man behandlar algebraiska uttryck eller löser ekvationer ofta har lärts in helt mekaniskt. Det kan räcka med att ändra mönstret i en ekvation, till exempel att ändra lite på dess utseende från det normala, som eleverna är vana vid, så sjunker lösningsfrekvensen tydligt. Eller genom att tillföra en extra ”*förståelseingrediens*” i en uppgift, så blir den ofattbar för många elever (Persson 2005, s. 22).

För att kunna förstå och lösa ekvationer är det nödvändigt att eleven vet och förstår vad likhetstecknet står för, det vill säga att högra och vänstra ledet i ekvationen har lika stora värden. I grundskolan är det vanligt att eleverna lär sig att likhetstecknet betyder ”*blir*” då de bara använder det till att beräkna lättare additioner eller motsvarande för att få fram det högra ledet = ”*svaret*”. *”Denna begränsade uppfattning av likhetstecknets innebörd leder till svårigheter att tolka ekvationer.”* (Bergsten m.fl. 1997, s. 51f).

För att kunna lösa eller förstå problem är det viktigt att kunna arbeta med olika uttrycksformer (*grafiska, numeriska* och *symboliska*). Det kan handa om att översätta från språklig form, en textuppgift som ska lösas, till ett matematiskt symbolspråk där resultatet av översättningen kan bli ett algebraiskt uttryck eller en ekvation. Den som kan använda olika sätt att beskriva samma problem har en mer funktionell begreppskunskap och därmed en rikare begreppsbild (Bergsten m.fl. 1997). Bergsten skriver att förmågan att kunna göra översättningar mellan olika uttrycksformer starkt bidrar till en ökad förståelse i matematik och i problemlösningsförmågor. En översättning från en uttrycksform till en annan kan göra att problemet tolkas på ett annat sätt, vilket betraktas som en svårighet, och den elev som inte är flexibel och inte kan välja mellan olika uttrycksformer kommer därmed att få det svårare att lösa sammansatta matematiska problem (Bergsten m.fl. 1997).

Persson diskuterar också användningen av digitala hjälpmedel inom samma område och tar där upp att *”Räknare och datorer klarar alla de omskrivningar, som ingår i traditionella skolkurser i algebra. Däremot klarar de inte av att översätta från ett problem till ett algebraiskt uttryck.”* (Persson 2005, s. 65). Han menar att då digitala hjälpmedel används så finns alltid risken att elever får det svårt med att förstå olika betydelser och olika sätt att skriva på inom matematiken (2005, s. 20). Studien visade samtidigt att räknaren hjälpte andra elever att få en rikare begreppsuppfattning på grund av att den är så flexibel och att vissa elever tyckte att de förstod matematiken bättre när de fick använda räknaren. Så länge den manuella färdigheten också tränas för att inte förståelsen ska bli lidande eftersom det alltid finns en fara att lita på räknaren för mycket (Persson 2005, s. 55).

3.3.2 Variabler

Många elever har svårt att förstå sig på bokstavssymboler då de inte har förstått hur de fungerar eller vad de betyder utan att de istället använder sin egen tolkning utifrån deras tidigare erfarenheter och kunskaper som ibland kan referera till något helt annat. De kan se en bokstav som allt ifrån helt meningslös till något som kan bytas ut genom att testa sig fram med flera olika numeriska tal innan de förstår att bokstaven kan stå för något generellt. ”*Bokstaven ses som ett objekt som saknar mening, eller dess värde fås som bokstavens plats i alfabetet*” (Bergsten m.fl. 1997, s. 19). Persson (2005) menar att det beror på brister i de aritmetiska färdigheterna där uppfattning av bokstavssymboler, variabelbegreppet och samband mellan variabler ingår (Persson 2005, s. 42f).

Att förstå innebörden av bokstavssymboler betraktas som ett viktigt moment i inlärningsprocessen. Olteanu (2003) skriver att elevers svårigheter inte ligger i att räkna med bokstavssymboler utan i att de inte uppfattar vad de har beräknat för något. Perssons studier menar att elever förvånansvärt ofta utvecklat egna felaktiga betydelser och regler för algebraisk räkning och att elevernas resonerande ofta baseras på hopblandade begrepp. Eleven utvecklar ett eget strukturellt system som inte har några begreppsmässiga kopplingar till vad som lärts tidigare (Persson 2005, s.24).

3.3.3 Huvudräkning, bråkform och decimalform

Enligt läroplanen för grundskolan i matematik och under rubriken centralt innehåll för årskurs 7-9 står det att eleverna ska ha grundläggande kunskaper om taluppfattning och tals användning. *”Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik. Metodernas användning i olika situationer”* (Läroplanen Lgr11, s. 66).

Löwing och Kilborn (2003, s. 11) hävdar i sin bok *Huvudräkning* att många elever som börjar gymnasiet har svårt för huvudräkning och överslagsräkning eftersom miniräknaren har dominerat i skolans undervisning vilket har lett till att de metoderna har fått ta ett steg tillbaka. Många lärare anser att huvudräkning och överslagsräkning har blivit allt viktigare eftersom det kan hjälpa eleverna att uppskatta om ett svar kan vara rätt eller om det alls är rimligt (Löwing & Kilborn 2003, s. 11). Dessutom syns det tydligt i skolan att eleverna nästan måste använda sig av miniräknare till allt de vill beräkna istället för att försöka använda huvudräkning eller överslagsräkning.

Persson (2005) nämner att många elever saknar den grundläggande faktakunskapen om vad de olika delarna i ett bråktal står för. Eleverna har brister med den rena taluppfattningen där de har svårigheter med att till exempel se att talen $\sqrt{2}$ och 1,414 inte är exakt samma tal medan att 0,5 och $\frac{1}{2}$ är det (Persson 2005, s. 44f). Eleverna väljer också att göra om bråktal till decimaltal med räknaren för att de tycker att det då blir lättare att utföra beräkningar. Då får eleverna istället svårare att räkna med bråktal då tillgång till räknaren saknas och klarar då inte att, till exempel att räkna kvadratroten ur ett tal som i decimaltalsform är svårt men i bråktalsform är lätt (Löwing & Kilborn 2003).

I artikeln från 2004 *Det är dags att göra upp räkningen* tog Häggström upp att för tio år innan dess kunde en matematiklärare på universitetet förvänta sig att majoriteten av de nyintagna studenterna kunde behärska enkel bråkräkning, vilket inte längre var fallet när artikeln skrevs. Vidare skrev han att många elever redan tidigt i grundskolan tappar intresse och engagemang för matematiken och redan då blir den fortsatta undervisningen i ämnet en underdragen och lång plåga. Detta menade han att det kan bero på att många matematiklärare har alvarliga kunskapsluckor i sitt ämne som sedan överförs på eleverna. Hur ska eleverna kunna bringas förståelse om inte läraren har den? Lärarutbildningen måste ge lärarna en mycket djupare matematisk förståelse (Häggström, 2004).

En annan anledning till svårigheter inom matematiken ansåg Häggström bero på att matematiken hela tiden bygger vidare på fundamentala kunskaper som innebär att om en elev får problem på någon nivå så kommer den även att få problem på nästa. Sådana elever måste snabbt identifieras och ska ges nödvändig hjälp innan de tvingas vidare till de högre nivåerna. När det gäller algebran så måste heltalen kunna hanteras först och sedan måste eleverna ha fått en god taluppfattning på alla nivåer därefter för att algebran inte ska framstå som omöjlig (Häggström, 2004).

3.3.4 Teckenfel

Persson (2005) påpekar att det inte är ovanligt att elever råkar ut för missuppfattningar av räkneregler eller begrepp. Det kan orsaka upprepande fel i lösandet av en viss typ av uppgifter och detta blir speciellt tydligt när algebran används eftersom små fel som teckenfel får stora konsekvenser för resultatet (Persson 2005, s.67f). Att göra *”fel på enklare förenklingsalgebra beror i de flesta fall på dålig förståelse av negativa tal – minustecknets olika roller”* (Persson 2005, s. 47). Elevers brister i aritmetiska färdigheter kan leda till missuppfattning av hur negativa tal hanteras och försvårar de algebriska förenklingarna (Persson 2005, s. 48). Persson påpekar också att det är läraren som måste synliggöra felet för eleven i tid och ändra om elevens syn på begreppet så att eleven inte skadas av att göra samma misstag om och om igen (Persson 2005, s. 68). *”När missuppfattningen klarats upp fungerar förenklingarna bra. Detta påverkar både elevens självförtroende och motivation positivt. Inlärningen sker språngvis och när ett hinder har övervunnits, gör eleven väsentliga framsteg”* (Persson 2005, s. 48).

Olteanu (2003) skriver att många elever har en begränsad förståelse av negativa tal och minustecknets betydelse. Hennes undersökning visar att negativa tal är svåra att acceptera på grund av att eleverna redan har en grundläggande uppfattning för begrepp som ligger mellan bokstavsräkning och aritmetik och som inte är tillräckligt utvecklad (Olteanu 2003, s. 14f). Hon skriver också att det är lärarens uppgift att förklarar minustecknets betydelse och att få eleverna medvetna om att det kan stå för både subtraktion, beteckning för ett negativt tal och beteckning för ett motsatt tal (Olteanu 2003, s. 15).

4. Metod

I denna del kommer vi att redovisa hur vi har utfört vårt examensarbete utifrån vårt syfte och vår frågeställning. Vi läser själva till gymnasielärare och har därmed inriktat oss på gymnasiematematik och begränsat vår undersökning till att gälla elevers svårigheter med andragradsekvationer. Metoden för examensarbetet har varit observation och samtalsintervjuer med fem elever som går natur- eller teknikprogrammet på en gymnasieskola utanför Göteborgs kommun. Eleverna har fått lösa specifika matematikuppgifter med och utan en grafritande räknare. Eleverna fick lösa uppgifterna först med papper och penna, sedan även med hjälp av den grafritande räknaren medan vi hela tiden observerade hur eleverna utförde uppgifterna. Till sist avslutade vi med att intervjua eleverna om vad de tyckte var svårt och hur deras tankegångar gick under utförandet, samt ställde frågor om vilka metoder de vanligtvis brukar använda när de löser ekvationer av andra graden. De olika metoder som eleverna använde för att lösa uppgifterna utvärderade och analyserade vi mot tidigare forskning. Vi intervjuade även deras lärare för att komplettera och stödja de svar vi fick från eleverna och undersöka vilka svårigheter läraren såg när det gällde lösning av andragradsekvationer.

4.1 Urval

Vi bestämde oss för att utföra vår studie på en gymnasieskola utanför Göteborgs kommun. De elever vi bestämde oss att utföra undersökningen med går i ett blandat natur- och teknikprogram på sitt andra år. Eleverna valdes för att de är de enda på skolan som studerat andragradsekvationer och att de för tillfället läste kursen matematik 3c. Vi utgick från en skola där en av oss har haft VFU (verksamhetsförlagd utbildning). Vi tog kontakt med skolan och fick ett godkännande av en av matematiklärarna att utföra undersökningen med dennes elever. Vi berättade för läraren om vårt syfte med examensarbetet och fick hjälp med att samla ihop elever till undersökningen. Läraren gjorde en intresseanmälan i sina klasser och valde själv ut fem frivilliga elever. På grund av tidsbegränsningen för arbetet valde vi att utföra undersökningen med endast de fem eleverna och deras lärare. Studentuppsatser omfattar ofta mindre än tio undersökningspersoner för att ekonomi och tid sätter gränser (Ryen 2004, s. 86). Att bara observera några få elever räcker för att klargöra hur metoder och instrument kan användas och för att förstå deras komplexitet samt att förstå vilka svårigheter som kan uppstå (Drijvers 2008, s. 14).

De elever som ställde upp på undersökningen är relativt entusiastiska för ämnet matematik precis som de flesta andra i deras klasser då de går ett mer studieförberedande program. Av eleverna som deltog i undersökningen var två pojkar och tre flickor även om vi inte tagit någon hänsyn till genus då eleverna blev utvalda. ”*För att säkra en viss heterogenitet måste man se till att det blir en spridning i de variabler man redan har valt”* (Ryen 2004, s. 78).

4.2 Undersökningsmetod

Till vår undersökning har vi valt en kvalitativ undersökningsmetod med observation och samtalsintervjuer för att på bästa sätt få fram de resultat vi är intresserade av i vårt arbete. Det avgörande för metodvalet beskrivs med att ”*syftet med kvalitativa studier är att man ska få en bättre förståelse av vissa faktorer”* (Holm & Solvang 1997, s. 94). Observationer och samtalsintervjuer betraktas som den lämpligaste metoden för vår studie för att få fram den förståelse och få det bästa perspektivet på de svar vi söker utifrån vår frågeställning. Syftet med observationsmetoden är att genom att *fråga*, *se*, *och höra* få tag i det som egentligen sker (Holm & Solvang 1997, s. 110). Dessutom är syftet med intervjumetoden att få förståelse och beskrivning om undersökningsämnet *”En intervju vars syfte är att erhålla beskrivningar av den intervjuades livsvärld i syfte att tolka det beskrivna fenomenets mening”*(Kvale 1997, s. 13).

Syftet med vår undersökning var att förstå och beskriva de svårigheter som eleverna möter när de löser andragradsekvationer med eller utan digitala hjälpmedel. En kvalitativ metod är användbar när man vill få en bra beskrivning och förståelse om intima uppfattningar. Därför valde vi att göra observationer och samtalsintervjuer för vår studie för att få den djupare insikten. Den andra fördelen är att man kan studera vad folk gör och vad de säger när observationen förenas med samtalsintervjuer (Esaiasson m.fl. 2007, s. 344).

När man väljer samtalsintervju som metod har man en möjlighet att ändra ordningsföljd på frågeställningarna under tiden för intervjun om det är nödvändigt. Då kan intervjusamtalet även flyta på mer naturligt. Därför har vi använt en halvstrukturerad intervjuform till denna undersökning. En halvstrukturerat samtalsintervju betyder varken en öppen samtalsintervju eller en bestämt strukturerad formulerad fråga vilket gör att det finns en möjlighet att ändra frågornas form och ordningsföljd i efterhand (Kvale 1997, s. 117ff).

Vi använde oss av en öppen observation som betyder att deltagarna visste om att vi skulle vara observatörer och hur vi skulle utföra vår undersökning och även att deltagarna accepterat tillvägagångssättet (Holm & Solvang 1997, s. 111).

4.3 Beskrivning av observationer och intervjuer

Dessa uppgifter fick eleverna lösa:

1. $2x^2 – 8x = 0$
2. $5x^2 – 15x + 10 = 0$
3. $3x^2 – 12 = 0$
4. För vilket värde på a har ekvationen $x^2 - 20x + a = 0$ en dubbelrot?
5. Produkten av två på varandra följande heltal är 306, vilka är talen?
6. En hästägare ska bygga en rektangelformad hage för sina hästar. Den ena långsidan av hagen kommer att bestå av en stenmur så där behövs inget stängsel. Hur ska hästägaren bygga sin hage så att den får maximal area om han har 300 meter stängsel att använda?

Dessa uppgifter valdes på grund av att de tillsammans på ett bra sätt återspeglar många av de delar som andragradsekvationslösning består av. En beräkningsuppgift för varje metod eleverna fått lära sig för att lösa en andragradsekvation. En uppgift med en obekant för att sätta elevernas förståelse på prov. Två problemlösningsuppgifter av olika svårighetsgrad som ska visa hur kreativa eleverna är att ta reda på hur och med vilken metod de bäst ska lösa uppgifterna. De uppgifterna tillsammans hoppas vi ska kunna sätta eleverna på prov och visa vilka svårigheter de möter och vilken kunskap de saknar när de löser uppgifterna.

Det hjälpmedel eleverna fick använda för att lösa uppgifterna med var en grafritande räknare av typ Ti-83. Den har eleverna, bekräftat av läraren, fått utbildning på under hela gymnasietiden och eleverna har speciellt fått lära sig hur andragradsekvationer kan lösas och hanteras genom studier av grafer, tabeller och genom att använda olika funktioner i Ti-83 för att hitta skärningspunkter, till exempel nollställen.

Vi observerade på vilka sätt eleverna genomförde lösningarna av uppgifterna med papper och penna och sedan med hjälp av Ti-83. Dessutom kompletterade vi observationen med en intervju där eleverna fick diskutera och presentera sina resonemang som de förde under genomförandet och vi uppmanade eleverna att själva påpeka på vilka svårigheter de möttes av när de löste uppgifterna. *"I så kallade naturalistiska undersökningar kombineras observationer vanligen med ett eller flera andra tillvägagångssätt som intervjuer, fotografering och videoinspelning"* (Esaiasson m.fl. 2007, s. 344).

Observationen gick till så att eleverna satt runt ett bord medan vi stod bakom dem och förde anteckningar över hur det gick för dem och över vilka metoder eleverna använde sig av. Eleverna fick instruktionen att de hade 45 minuter på sig att i eget tempo lösa uppgifterna och att de skulle säga till när de var klara med första momentet så att vi kunde ge dem tillgång till Ti-83 så de kunde lösa samma uppgifter igen med hjälp av den. Andra instruktionen de fick var att de skulle anteckna så mycket som möjligt om hur de resonerade och beskriva alla steg de vidtog till varje uppgift och förklarade det med att vi ville kunna följa deras räknemetoder så bra som möjligt. Vi hade planerat att inte säga något under genomförandet men bröt mot det två gånger. En gång då ett par elever hade svårt med en begreppsförståelse i en av uppgifterna, vi noterade detta och gav en förklaring så att eleverna skulle kunna prestera ett resultat på uppgiften. Andra gången då två elever började få ont om tid att hinna klart och därmed bad vi dem att hoppa över en uppgift för att vi ansåg att resultatet skulle bli bättre om eleverna satsade på de viktigare sista uppgifterna istället. När eleverna var klara med uppgifterna samlade vi in deras anteckningar och påbörjade intervjun med dem.

Intervjun skedde med hela gruppen runt bordet där en av oss ställde frågor medan den andra antecknade samtidigt som vi spelade in intervjun. Vi hade en frågemall på frågor vi ville ställa och kompletterade frågorna med anteckningar från elevernas genomförande, se bilaga 2. Frågorna ställdes öppet till eleverna där de som ville fick svara och vara med i diskussionen. Frågorna utformade vi med tanke att kunna få fram ytterligare svårigheter eleverna kände att de möttes av och för att få eleverna att själva beskriva vilka metoder de brukar använda. Till sist kontrollera elevernas begreppskunskap inom andragradsekvationer.

Intervjun med elevernas lärare skedde under ett senare tillfälle så att vi kunde använda elevernas resultat till att formulera de frågor vi ville ställa till läraren. När vi intervjuade läraren började vi med att presentera vad examensarbetet handlade om innan våra tematiska frågor följde, se bilaga 3. Under tiden använde vi tolkningsfrågor som vad- och hur menar du? De frågor vi ställde var öppna och korta där läraren kunde få utveckla sitt svar. "*Ett enkelt kännetecken på en bra samtalsintervju är korta intervjufrågor och långa intervjusvar*" (Esaiasson m.fl. 2007, s. 298). En av oss styrde intervjun och ställde frågorna medan den andra antecknade samtidigt som intervjun spelades in. Tanken med intervjufrågorna till läraren var att läraren skulle få beskriva vilken förståelse eleverna har, hur eleverna lärt sig alla metoder, vilka svårigheter läraren såg att eleverna hade och hur läraren anpassar sin undervisning till dem. Detta både med och utan digitala hjälpmedel och även vad läraren ansåg som för- och nackdelar med metoderna.

4.4 Validitet och Reliabilitet

Validitet innebär att den mätning som har utförts, granskas och kontrolleras i hur den överensstämmer med det som forskaren ville mäta från början. I vår undersökning anser vi att vi har studerat frågeställningen i vårt syfte (Patel & Davidson 2003). Vi anser att de frågor som eleverna har fått besvara är relevanta till vår frågeställning och att de kan mäta, hos både de kunniga och svaga, om eleverna har några svårigheter och delvis vilka sorters svårigheter de möter. Utifrån elevernas svar kan vi se om eleverna har svårigheter och beskriva vilka problem de möter när de löser andragradsekvationer. Att visa att svårigheter finns är enkelt, att visa på vad svårigheterna beror på är svårare. Vi kan se många olika sorters svårigheter men för att se och beskriva alla behövs mer utvecklade frågor till eleverna.

Reliabilitet i en kvalitativ forskningsansats bestäms av hur mätningarna genomförs, vilket instrument som används och hur noggrann man är vid bearbetningen av informationen medan validitet är beroende av vad man mäter och om detta är utklarat i frågeställningar (Holm & Solvang 1997 s. 163). För att få hög reliabilitet försökte vi att använda oss av två olika mätinstrument, det vill säga observation och intervju. Vi försökte vara så noggranna och uppmärksamma som möjligt under hela undersökningsprocessen. Dessutom har vi kontrollerat att inga felaktiga inmatningar genomförts och vi har utarbetat instruktioner för dessa faser i undersökningen (Holm & Solvang 1997 s. 165). Det var ändå svårt att bedöma om reliabilitet var hög eftersom det alltid finns risk till missförstånd, men vi skulle ändå vilja tro att reliabiliteten var relativt bra.

5. Etik

När vi gjorde intervjun med respondenterna utgick vi ifrån de etiska principer som Vetenskapsrådet satt upp för att inte skada en grupp personer eller en enskild individ. Allt för att följa de etiska reglar som krävs för att genomföra en undersökning. Enligt forskningsetiska principer i humanistisk och samhällsvetenskaplig forskning krävs det att forskaren ska ta hänsyn till vissa krav vid insamlandet av information och forskning. De fyra huvudkraven är samtyckeskravet, informationskravet, nyttjandekravet och konfidentialitetskravet (Vetenskapsrådet 1990, s. 6).

När vi gjorde observationerna och intervjuerna har vi tagit hänsyn till dessa råd. Respondenterna har informerats om syftet med deras deltagande i undersökningen ”*Forskaren skall informera uppgiftslämnare och undersökningsdeltagare om deras uppgift i projektet och vilka villkor som gäller för deras deltagande. De skall därvid upplysas om att deltagandet är frivilligt och om att de har rätt att avbryta sin medverkan. Informationen skall omfatta alla de inslag i den aktuella undersökningen som rimligen kan tänkas påverka deras villighet att delta*” (Vetenskapsrådet 1990, s. 7).

Intervjupersonerna gav sitt samtycke och med tanke på att de är minderåriga har vi gått vägen via deras respektive lärare som också gav sitt medgivande. Vi har inte frågat om föräldrarnas medgivande då det enligt vetenskapsrådet är acceptabelt att få samtyckte från en lärare istället för målsman så länge frågorna inte är känsliga eller privata (Vetenskapsrådet 1990, s. 9). Vi uppskattade att våra frågor om matematikuppgifterna och dess svårigheter inte var av etiskt känslig karaktär. ”*I vissa fall, då undersökningen inte innefattar frågor av privat eller etiskt känslig natur, kan samtycke inhämtas via företrädare för uppgiftslämnare och undersökningsdeltagare (t.ex. skolledning, lärare, arbetsgivare, fackförening eller motsvarande) och eventuellt berörd tredje part. En förutsättning är då också att undersökningen i förekommande fall sker inom ramen för ordinarie arbetsuppgifter och på vanlig arbetstid.*” (Vetenskapsrådet 1990, s. 9).

Vi har också fått spela in intervjuerna då intervjupersonerna gav sitt samtycke till detta. För att inte uppvisa och identifiera enskilda namn har vi anonymiserat alla intervjupersonerna i undersökningen. Enligt vetenskapsrådet är det viktigt att skydda respondenterna i undersökningar mot identifiering så att de inte ska kunna avslöjas på något vis (Vetenskapsrådet 1990, s. 12).

6. Resultat och analys

De metoder vi benämner att eleverna använt sig av är, nollproduktsmetoden, faktorisering, kvadratkomplettering, *pq*-formeln och den ”*enkla metoden*” som inte har något namn men det är en metod för att lösa de enklaste andragradsekvationerna av typ $ax^2 = b$. Alla metoder har läraren undervisat om och lärt ut till sina elever och det är läraren som beskrivit vilka metoder som föredras till att lösa de olika typerna av uppgifter. Det är även läraren som har beskrivit vilken tillgång eleverna har till Ti-83 och hur de brukar använda den på matematiklektionerna.

6.1 Resultat av elevintervjun

Huvudresultaten från elevintervjun sammanfattas med att eleverna tillsammans hade en relativt god begreppsförståelse. De kunde förklara de flesta av begreppen och var osäkra på andra så som till exempel kvadratkomplettering. De kunde förklara vilka metoder de brukade använda för att lösa andragradsekvationer och två elever erkände att de endast använder *pq*-formeln och glömt bort övriga metoder, men de visste att de existerade. Användes Ti-83 till att lösa uppgifter så svarade de att de använde både graf och tabell för att hitta nollställen och att de brukade använda den till att utföra alla typer av beräkningar.

6.2 Resultat av lärarintervjun

Resultatet av intervjun med läraren sammanfattas med att läraren beskrev att Ti-83 användes hela tiden i undervisningen för att den är ett sådant bra hjälpmedel till grafer och ekvationslösning. Läraren själv började elevernas utbildning på Ti-83 då de flesta elever inte använt en avancerad räknare tidigare och fortsätter utbildningen på den under hela gymnasietiden. Lärarens tanke med Ti-83 var dock bara att använda hjälpmedlet för att genomföra svåra beräkningar eller till att illustrera grafer, inte till att räkna grundläggande matematik med den.

Läraren menar att det finns flera svårigheter när det gäller en miniräknares användning. Speciellt när det gäller exempelvis prioriteringsregler. Svårigheter ska undvikas genom att elever helst ska ha uppnått en grundläggande förståelse vad gäller huvudräkning för att använda en räknare. Annars använder man miniräknaren för tidigt och då kanske man missar en viss förståelse i den grundläggande aritmetiken. Läraren sammanfattar användningen på ett bra sätt; räknaren är till för att underlätta för de elever som kan, inte för att vara ett stöd för den som inte kan. Miniräknaren kan vara en genväg till enkla beräkningar och en nackdel då man själv slutar tänka. Läraren vill att eleverna ska kunna visualisera en ekvation utan hjälp av en räknare.

Läraren undervisar till en början eleverna i algebra innan ekvationen knyts till en kurva och nollställen osv. Läraren börjar alltid med enkla exempel, lägger till termer och konstanter tills den fullständiga andragradsekvationen introducerats. Läraren trycker mycket på att eleverna ska kunna visualisera för att skapa sig en förståelse, inte bara lära sig metoder utantill. Exempelvis är *pq*-formeln alldeles för abstrakt utan en bakomliggande förståelse. De fel läraren ser eleverna göra med de olika metoderna är oftast att eleverna går för fort fram, de hinner inte tänka till, vad ska lösas? Kreativiteten hos eleverna försvinner. Mindre fel är teckenfel i både formler och förflyttningar i ekvationen. Läraren menade att det blir mindre fel om du kan visualisera svaret och metoden istället.

Om eleverna inte fick använda miniräknare så menade läraren att vissa elever känner sig otrygga i sina beräkningar och att deras självförtroende inte var så starkt när det gällde huvudräkning då vanan att använda en räknare var för stor. De har vaggats in i en falsk trygghet men det är något de måste träna på för att det till exempel alltid finns en miniräknarfri del på nationella provet.

6.3 Resultat av elevernas uppgifter

Första uppgiften eleverna skulle lösa såg ut så här: $2x^2 – 8x = 0$. En sådan uppgift har eleverna i första hand fått lära sig att lösa med nollproduktsmetoden och faktorisering men andra metoder kan även användas. Tre elever valde att försöka lösa uppgiften med faktorisering varav en klarade det, en elev förkortar bort ett *x* helt och missar därigenom lösningen och den tredje eleven misslyckades helt med faktorisering och fick inte fram någon lösning. De övriga två eleverna använde *pq*-formeln som metod varav den ena eleven löste uppgiften och den andra eleven gjorde korrekt fram till dess att kvadratroten skulle dras, där misslyckades eleven med att beräkna kvadratrotens värde i huvudet och fick inte fram de två lösningarna.

Första uppgiften med hjälp av Ti-83: Där löste alla fem elever uppgiften. Alla elever använde Ti-83 för att lösa uppgiften. Fyra av eleverna tog fram lösningarna genom att studera grafen och den femte eleven genom att avläsa värdena i Ti-83s tabellfunktion.

Andra uppgiften såg ut så här: $5x^2 – 15x + 10 = 0$. Den typen av uppgift har eleverna fått lära sig att lösa med kvadratkomplettering men främst med *pq*-formeln. Fyra elever kunde utföra förenklingen och använda *pq*-formeln och en av dem lyckades lösa uppgiften medan de andra tre eleverna använde rätt metod men misslyckades med att beräkna kvadratroten ur för att få fram lösningarna. Femte eleven lyckades med förenklingen men inte med uppställningen av *pq*-formeln. Men den eleven kunde ändå efter förenklingen få fram en av lösningarna genom att testa sig fram.

Andra uppgiften med hjälp av Ti-83: Endast en av de fem eleverna löste uppgiften på samma sätt som de löste första uppgiften, genom att bara skriva in ekvationen i Ti-83 och studera grafen. En elev använde en annan metod genom Ti-83s funktion att hitta skärningspunkter i grafen och fick fram en lösning och missade den andra. Tre elever använde *pq*-formeln för hand och använde sedan bara Ti-83 till att räkna ut kvadratroten. Två av dem löste uppgiften medan den tredje eleven misslyckades med en huvudräkning och fick ett negativt tal under kvadratrottecknet och fick därmed inte fram några lösningar.

Tredje uppgiften såg ut så här: $3x^2 – 12 = 0$. En sådan uppgift är en variant av den enklaste formen av andragradsekvationer. Det som gör den lite svårare är en konstant framför x^2 -termen som kräver att ekvationen först ska förenklas. Andra metoder kan också användas för att få fram lösningarna på uppgiften. Två elever löste uppgiften med metoden att först förenkla och sedan beräkna kvadratroten ur och fick fram båda lösningarna. En elev löste uppgiften genom att använda *pq*-formeln. Fjärde eleven använde första metoden men fick bara fram en av lösningarna. Femte eleven misslyckades, eleven försökte att faktorisera ekvationen som inte är en möjlig metod för att lösa denna uppgift.

Tredje uppgiften med hjälp av Ti-83: Den elev som gjorde fel med att använda Ti-83 funktion för att hitta skärningspunkter gjorde samma misstag igen och fick alltså bara fram en av lösningarna. Två elever försökte att lösa uppgiften utan att använda Ti-83 men misslyckades. Ena eleven tog kvadratroten ur och ger dubbelrot som svar vilket är felaktigt men ena roten stämmer. Den andra eleven försökte felaktigt att faktorisera ekvationen på samma sätt som tidigare fast ekvationen inte behöver faktoriseras för att lösas. De sista två eleverna hoppade över denna uppgift på grund av tidsbrist.

Fjärde uppgiften såg ut så här: ”För vilket värde på *a* har ekvationen x^2 - 20x + a = 0 en dubbelrot?” En svårare uppgift där eleven måste veta vad begreppet dubbelrot betyder, alltså eleven bör veta att det bara ska finnas ett nollställe. Eleverna är vana att lösa denna typ av uppgifter med *pq*-formeln men de måste också veta; för att det ska bli en dubbelrot så måste allt under rottecknet bli 0, och även att de måste anpassa konstanten *a* så att det kravet uppfylls. Det var bara en elev som nästan klarade uppgiften och bara misslyckades genom att felaktigt sätta konstanten utanför rottecknet och därmed fick svaret a = 10 istället för det rätta a = 100. Två elever visste inte vad begreppet dubbelrot betydde. De sista två eleverna fastnade på att det var en obestämd konstant i ekvationen och kunde därmed inte lösa uppgiften.

Fjärde uppgiften med hjälp av Ti-83: Två av eleverna hittade på ett värde på *a* och skrev in ekvationen i Ti-83 och testade med att byta värden på *a* för att se när grafen skulle uppfylla kravet med att bara ha en skärningspunkt. En av eleverna löser uppgiften medan den andra eleven har fel fönsterinställningarna och därigenom ser eleven inte grafen och kan då inte anpassa konstanten för att lösa uppgiften. De två elever som inte visste vad dubbelrot var fick det förklarat av oss. En av dem tillsammans med de två elever som inte kunde hantera ekvationen på grund av den obestämda konstanten kom inte längre med uppgiften.

Femte uppgiften såg ut så här: ”Produkten på två på varandra följande heltal är 306, vilka är talen?” Inte en lätt uppgift utan hjälpmedel och den kräver förståelse för vilka tal som kan vara rimliga för att ens börja försöka lösa den. En elev försökte att gissa sig fram med olika större men orimliga tal och kom därmed inte fram till rätt lösning. En elev ställde upp en andragradsekvation för att lösa uppgiften men klarade inte av att räka ut den höga kvadratroten i huvudet och misslyckas att lösa uppgiften. De övriga tre eleverna ställde upp ekvationen $x \cdot y$ = 306 och kom sedan inte vidare med uppgiften.

Femte uppgiften med hjälp av Ti-83: Med Ti-83 löste alla fem eleverna uppgiften. En elev använde metoden att beräkna kvadratroten ur 306 med Ti-83 som gav ett svar som hamnar mellan de två tal som måste vara lösningarna och klarar uppgiften. Övriga elever testade sig fram till rätt svar med gissningsmetoder med hjälp av Ti-83. Observationen visade att elevernas gissningar snabbt närmade sig rätt svar.

Sjätte uppgiften såg ut så här: ”En hästägare ska bygga en rektangelformad hage för sina hästar. Den ena långsidan av hagen kommer att bestå av en stenmur så där behövs inget stängsel. Hur ska hästägaren bygga sin hage så att den får maximal area om han har 300 meter stängsel att använda?” En problemlösningsuppgift som är av svårare typ och kräver förståelse där eleven måste kunna hitta på en egen lösningsmetod. Eleverna har löst liknande uppgifter när de väl höll på med andragradsekvationer och i pågående kurs som handlar om derivata. Ingen elev har ställde upp en korrekt metod för problemlösningen. Tre elever gissade sig på något sätt fram till rätt svar utan att redovisa sina tankegångar. En elev ställde upp en egen ekvation med två variabler som saknade relation till varandra men med hjälp av lite gissningar fick eleven på något sätt ändå fram rätt svar till slut. Den femte eleven kom ingenstans med uppgiften.

Sjätte uppgiften med hjälp av Ti-83: Eleverna gjorde på ungefär samma sätt som utan hjälp av Ti-83 och saknade fortfarande problemlösninsmetod och använde endast Ti-83 till att testa fler världen för att kontrollera om sina lösningar kunde stämma. De visade inte hur de kom fram till att deras lösning var korrekt. Den femte eleven kom ingenstans med uppgiften.

6.4 Analys av elevernas resultat

6.4.1 Första uppgiften

De två eleverna klarade att lösa uppgiften utan några problem varav ena eleven använde faktorisering som lösningsmetod och den andra använde *pq*-formeln. Faktorisering är den metod som föredras för att lösa en sådan uppgift.

Den tredje eleven använde också *pq*-formeln men fastnade där kvadratroten skulle räknas ut, eleven visade inte alls att besitta den kunskap som krävs för att räkna med kvadratrötter utan hjälpmedel, även om denna uppgift har en av de enklaste kvadratrötterna att räkna på. Den eleven skulle ha klarat den uträkningen i uppgiften om hjälpmedlet varit tillgängligt. Eleverna har fått övning i att lösa ut kvadratrötter med små tal, åtminstone alla tal som finns med i multiplikationstabellen, för att klara av uppgiften utan hjälpmedlet. De båda eleverna som använde *pq*-formeln borde även ha kunnat använda faktoriseringsmetoden men erkände att de glömt bort alla andra metoder än *pq*-formeln då de lärt sig att den fungerar till allt. Läraren ansåg att när eleverna väl lärt sig att använda *pq*-formeln så är allt så nytt för dem att deras kreativitet påverkas negativt, att de inte använder sin kreativitet för att lösa de lättare uppgifterna med deras respektive metod utan hellre använder *pq*-formeln.

De två elever som misslyckades med att använda faktorisering hade också glömt bort tillvägagångssättet med den metoden. Ena eleven fick fram en av lösningarna och misslyckades med att ta fram den andra lösningen som var noll, trots att en av lösningarna alltid är noll i en sådan uppgift, och det har eleven fått lära sig att vara medveten om men alltså glömt bort. Den andra eleven började med att förenkla uppgiften på rätt sätt men hade sedan helt glömt bort hur faktorisering går till och kom därmed inte vidare med uppgiften. Drijvers och Gravemeijer menar att många elevers kunskap om algebraiska metoder är begränsade och Persson menar att det beror på att elever saknar förståelse för betydelser och beteckningar och därför inte lyckas med de algebraiska operationerna (Drijvers & Gravemeijer 2004, s. 171ff) (Persson 2005, s. 14f).

6.4.2 Första uppgiften med hjälp av Ti-83

Där löste alla fem elever uppgiften utan märkbara problem. Alla elever använde och skrev in ekvationen i Ti-83. Fyra av eleverna tog fram lösningarna genom att studera grafen och visste därmed hur Ti-83 fungerar med att ställa in graffönstret för att få en bra bild av ekvationen så att dess nollställen kan läsas av. Den femte eleven löste uppgiften genom att avläsa värdena i tabellen och visste då hur Ti-83 hanterar och redovisar punkter på grafen i tabellform. Ti-83 har alltså instrumenterats på olika sätt av eleverna då de inte använder samma metod med Ti-83 för att lösa uppgiften (Drijvers & Trouche 2008, s. 11). Eleverna visade därmed att de behärskade en metod att lösa andragradsekvationer på med hjälp av Ti-83.

6.4.3 Andra uppgiften

Fyra elever kunde utföra förenklingen och använde *pq*-formeln rätt men tre av dem hade svårigheter med att beräkna kvadratroten ur för att få fram lösningarna. Det de tre eleverna gjorde felaktigt var att de gjorde om allt under kvadratrotstecknet i *pq*-formeln till ett decimaltal som då blev en operation som var för svår för dem att lösa i huvudet, en svårighet som Löwing och Kilborn (2003) också har lyft upp. Många elever i gymnasiet har svårt med huvudräkning och överslagsräkning eftersom miniräknaren har dominerat i skolundervisningen vilket har lett till att de metoderna har fått ta ett steg tillbaka (Löwing & Kilborn 2003, s. 11). Skulle eleverna ha använt bråkräkning istället så skulle de ha fått fram ett bråktal som går att beräkna kvadratroten ur i huvudet och därmed ha löst uppgiften. Bråkräkning är dock något som eleverna inte använder sig av i större utsträckning då de vanligtvis alltid har tillgång till Ti-83. Det är mindre bra då bråkräkning är en del inom matematiken som är bra att kunna och där Persson visat att många elever saknar den grundläggande faktakunskapen om vad de olika delarna i ett bråktal står för och därför har svårt med bråkräkningen (Persson 2005, s. 44f).

Den femte eleven kunde förenkla ekvationen men hade glömt hur uppställningen av *pq*-formeln går till. Eleven kom ändå fram till en av lösningarna genom att testa sig fram efter att ha studerat den förenklade ekvationen. Det var bra gjort och det visade på att eleven ändå hade en god förståelse av andragradsekvationer. Den andra lösningen är svårare att testa sig fram till och då gav eleven upp. Denne eleven skulle säkerligen ha kunnat komma längre med uppgiften om tillgången till ett formelblad eller liknande skulle ha hjälpt elevens minne i hur uppställningen av *pq*-formeln går till.

6.4.4 Andra uppgiften med hjälp av Ti-83

Det var bara en elev som löste uppgiften med Ti-83 på samma sätt som eleverna framgångsrikt löste första uppgiften, trots att alla elever borde ha kunnat använda samma tillvägagångssätt. Alla elever visade i första uppgiften att de åtminstone klarade av att hantera en metod med Ti-83 för att lösa en andragradsekvation. Den elev som använde sig av samma tillvägagångssätt skrev in ekvationen i Ti-83, studerade grafen och fick fram båda lösningarna.

Problemet där var att Ti-83 bara visade en lösning och att eleven skulle ha behövt instruera Ti-83 i att visa den andra lösningen. Eleven fick därmed bara fram en av lösningarna på grund av okunskap att hantera just den funktionen på Ti-83 korrekt. För att använda ett digitalt hjälpmedel måste det finnas en förståelse för att kunna utnyttja och tolka det resultat som det digitala hjälpmedlet presenterar (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 65). Eleven har fått lära sig att en sådan ekvation ska ha två lösningar och borde ha insett att en saknades speciellt då eleven nyligen gjort uppgiften för hand och löst den korrekt, och därmed kritiskt sett över sitt svar och försökt att hitta den andra lösningen.

Tre elever gick tillbaks till att använda *pq*-formeln för hand och använde bara Ti-83 till att lösa kvadratroten ur det decimaltal de hade problem med första gången. Elever väljer att göra om bråktal till decimaltal med räknaren för att de tycker att det blir lättare att utföra beräkningar (Löwing & Kilborn 2003). Det är en bra metod som visar att eleverna kunde utföra lösningsmetoden för hand och att de kunde använda Ti-83 som ett komplement till beräkningen. Ti-83 rätt använd betyder att dess teknik effektivt integrerats med andra arbetsformer (Dahland 1998, s.24). Två av eleverna gjorde rätt medan den tredje eleven gjorde ett tydligt slarvfel i huvudräkningen i *pq*-formelns *p*-värde och fick därmed ett negativt tal under rottecknet som inte Ti-83 kunde lösa och eleven svarade då ”ingen lösning” på uppgiften. Små fel så som teckenfel får stora konsekvenser för resultatet (Persson 2005, s.67f). Den eleven kunde också kritiskt ha granskat sitt svar och kontrollerat sina beräkningar då det inte är vanligt att en uppgift saknar lösning, eller ha använt Ti-83, studerat grafen och insett att två lösningar är ett måste då grafen tydligt skär *x*-axeln.

Varför de fyra sista eleverna inte använde sig av samma framgångsrika metod som de gjorde på första uppgiften framgick inte men det kan ha berott på att läraren alltid velat få eleverna att jobba med papper och penna så långt som möjligt för att bibehålla förståelsen om vad de egentligen räknar på istället för att direkt använda Ti-83 för att få ut ett svar.

6.4.5 Tredje uppgiften

Tre elever använde sig av den ”enkla metoden” de fått lära sig för att lösa en sådan uppgift, de förenklade ekvationen med x^2 –termen på ena sidan likhetstecknet och tog sedan kvadratroten ur andra sidan för att få fram båda lösningarna. Två elever lyckas medan den tredje eleven tog kvadratroten ur och glömde den negativa lösningen till uppgiften. Den eleven har fått lära sig att kvadratroten på ett sådant sätt alltid ska ge både en positiv och en negativ lösning och alltid när en ekvation har ett *q*-värde. Eleven kunde ha insett att det ska vara två lösningar redan efter förenklingen när x^2 –termen stod själv på en sida eftersom det är så de en gång lärt sig om andragradsekvationer, att det finns två kvadratlösningar till varje tal.

En elev försökte lösta uppgiften med *pq*-formeln då den eleven i intervjun säger att denne bara brukar använda sig av den metoden men borde ha kunnat lösa uppgiften med den ”enklare metoden”. Eleven glömde dock den negativa lösningen vilket säger emot att eleven specialiserat sig på att bara använda *pq*-formeln, då ska eleven veta att *pq*-formeln alltid ska ge både ett x_1- och ett x_2-värde som svar om en eller två lösningar existerar.

Den femte eleven använde sig av en felaktig metod för att lösa uppgiften. Eleven försökte faktorisera uppgiften som inte är en möjlig metod att lösa en sådan uppgift. Grunden för sådana svårigheter med algebraiska lösningar av ekvationer är ofta att metoderna har lärts in helt mekaniskt och att elever ofta blandar ihop vilken metod som ska användas till vad (Persson 2005, s. 22ff).

6.4.6 Tredje uppgiften med hjälp av Ti-83

Två elever hoppade över uppgiften på grund av tidsbrist, vi tyckte det var viktigare att eleverna löste sista uppgifterna istället då uppgift tre liknar uppgift ett och två. Vi ansåg att övriga uppgifter skulle vara mer viktiga och relevanta för resultatet.

Den elev som gjorde misstaget med att försöka hitta en skärningspunkt med hjälp av Ti-83 gjorde samma fel igen och fick alltså bara fram en av lösningarna, eleven kunde även här kritiskt ha granskat sitt svar. De svårigheter som uppkommer av att lösa algebra med digitala hjälpmedel har oftast att göra med att eleven har en begränsad algebraisk insikt från början. (Drijvers & Gravemeijer 2004, s. 191f). Skulle eleven kommit ihåg att algebran säger att det kan finnas noll, en eller två lösningar så skulle eleven kunnat ha gjort ett försök att få fram den andra sökta lösningen.

De två övriga eleverna använder inte alls Ti-83 för att lösa uppgiften utan försökte med penna och papper istället. En av dem försökte återigen felaktigt faktorisera för att lösa uppgiften. Den andra eleven använde den ”enkla metoden” men gav felaktigt dubbelrot som svar efter att ha räknat ut kvadratroten. Skulle eleven granskat sitt svar eller kontrollerat grafen med Ti-83 så skulle eleven ha vetat att dubbelrot inte var ett godkänt svar. Det är fortfarande oklart varför alla tre elever inte löste uppgiften med Ti-83 på samma sätt de gjorde på uppgift ett, eller varför de inte använde Ti-83 till att kontrollera om deras svar kunde vara korrekt. Eleverna har brister i fas C, reflekterande kunskap (Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 88), då eleverna inte kontrollerar rimligheten i sina svar.

6.4.7 Fjärde uppgiften

En svår uppgift som bara en elev var nära att klara av. Eleven använde en bra metod genom att använda sig av *pq*-formeln och eleven hade den kunskap om det som krävs för att få fram en dubbelrot, att allt under rottecknet måste bli noll eller att allt till höger om ± ska bli det. Det eleven gjorde felaktigt var att sätta *q*-värdet, konstanten, utanför rottecknet och fick därmed ett felaktigt värde i svaret men i övrigt visade eleven på en bra förståelse hur konstanten skulle anpassas för att lösa uppgiften. Det kan ses som ett slarvfel då eleven gjort rätt med *pq*-formeln tidigare.

De två elever som inte visste vad begreppet dubbelrot betydde, visste att de hade hört begreppet förut men de kunde inte komma ihåg till vad och hur det skulle kunna användas. Här förklarade vi för dem vad dubbelrot betyder, att ekvationen bara har en lösning och alltså skär *x*-axeln precis. Men även efter förklaringen så kunde de eleverna tillsammans med de sista två eleverna inte komma längre med uppgiften då de inte visste hur de skulle hantera *pq*-formeln när en obestämd konstant fanns med i ekvationen och alla gav upp. Svårigheten här är samma som i Drijvers och Gravemeijers studie där en elev inte kunde se en generell lösning på ett problem med ytterligare obekanta konstanter i ekvationen, eleven visste inte vilken variabel eleven skulle förhålla sig till (Drijvers & Gravemeijer 2004, s. 171ff). Bergsten har visat att många elever har svårt att förstå sig på bokstavssymboler, de kan se en bokstav som allt ifrån helt meningslös till något som kan bytas ut genom att testa sig fram med flera olika numeriska tal innan de förstår att bokstaven kan stå för något generellt (Bergsten m.fl. 1997, s. 19). Persson menar att det beror på brister i de aritmetiska färdigheterna. Elever utvecklar förvånansvärt ofta felaktiga betydelser och regler för algebraisk räkning och elevernas resonemang baseras ofta på hopblandade begrepp (Persson 2005, s. 24).

6.4.8 Fjärde uppgiften med hjälp av Ti-83

Två av eleverna hittade på ett värde på *a* och skrev in ekvationen i Ti-83 och testade sig fram genom att byta värde på *a* för att få grafen att precis skära *x*-axeln i en skärningspunkt. En elev klarade av det genom att ändra värdet på konstanten och på fönsterinställningarna i Ti-83 så att grafen hela tiden närmade sig *x*-axeln respektive att grafen hela tiden visualiserades. Den andra eleven hade problem med fönsterinställningarna och såg aldrig grafen oavsett vilka värden på konstanten eleven valde och saknade alltså kunskap om att kunna anpassa inställningar i Ti-83 till de rimliga intervall som ekvationen krävde och gav upp. Eleven saknade nödvändig instrumentering och skulle antagligen ha kunnat lösa uppgiften om Ti-83 automatiskt hade ändrat axlarna och fönsterinställningarna efter ekvationen så som en dator kan göra för att på mest relevant sätt visualisera grafen. Eleven måste veta hur verktyget används för att inte vara meningslöst och då krävs det först att eleven ska ha en grundläggande förståelse för vad som ska studeras i grafen och med den kunskapen kunna använda Ti-83 menyer rätt, veta innebörden i alla de inställningar som måste ställas in och på vilket sätt inställningarna ska skrivas in (Drijvers & Trouche 2008, s. 6ff).

De övriga tre eleverna kunde fortfarande inte förhålla sig till den obekanta konstanten i ekvationen och kunde därmed inte få någon hjälp av Ti-83. Ti-83 skulle egentligen ha kunnat hjälpa eleverna om eleverna bara förstått hur två obekanta variabler skrivs in i Ti-83 och hur Ti-83 hanterar och presenterar en sådan operation (Drijvers & Gravemeijer 2004, s. 171ff).

6.4.9 Femte uppgiften

Uppgiften var inte lätt för eleverna att lösa utan hjälpmedel. Den kräver en hel del förståelse för vilka tal som kan vara rimliga för att ens börja försöka lösa uppgiften och antagligen redan där så vart det för krångligt för eleverna. En elev försökte att gissa sig fram med olika större men orimliga tal och kom därmed inte fram till någon lösning. En elev ställde upp en bra andragradsekvation för att lösa uppgiften men insåg att det blir ett för svårt tal under kvadratrottecknet för att fortsätta utan hjälpmedel. Att ställa upp en sådan visade på en bra problemlösningsmetod som skulle ha fungerat om Ti-83 fått hjälpa till i beräkningen.

De övriga tre eleverna har ställt upp $x \cdot y = 306$ och sedan inte kommit längre. Alla elever skulle nog ha kunnat lösa en sådan uppgift om de bara gjort ett rimligt antagande inom vilket intervall talen skulle kunna ligga. Matematiken bygger hela tiden vidare på fundamentala kunskaper som innebär att om en elev fastnar på en nivå så kommer eleven även att fastna på nästa nivå (Häggström, 2004). Skulle eleverna ha fått studera hur en lärare skulle ha gjort en liknande uppgift och om läraren visat hur ett intervall bäst kan bestämmas så skulle eleverna antagligen ha kommit förbi den nivå de fastnade på. Eleverna skulle ha hittat ett intervall och insett att det bara skulle behövas ett fåtal försök med att ställa upp multiplikationer eller divisioner för att lösa uppgiften.

6.4.10 Femte uppgiften med hjälp av Ti-83

Med hjälp av Ti-83 löser alla fem elever uppgiften. En elev använde det smidigaste sättet som är att beräkna kvadratroten ur 306 som då hamnar mellan de två tal som måste vara lösningarna. Denna metod visade på bäst förståelse då inga intervall eller testande behövdes för att lösa uppgiften. Övriga elever testar sig fram med gissningsmetoder som borde vara bland de snabbare metoderna för att lösa uppgiften med Ti-83 så länge det finns någon rimlighet i gissningarna. Vissa elever förstår matematiken bättre när de får använda en räknare på grund av att räknaren är så flexibel (Persson 2005, s. 55). Ingen elev nämner dock något om att de testar sig fram inom något intervall men observationen av eleverna visade att även om elevernas första gissning var dålig så hamnade eleverna snabbt i rätt intervall ändå. Ingen av eleverna använde dock den problemlösningsmetod, så som att ställa upp en andragradsekvation för att lösa uppgiften, som en av eleverna gjorde försökte utan Ti-83 och fastnade på. Det kan vara en onödigt komplicerad metod men den skulle ha visat på bra problemlösningsförmåga.

6.4.11 Sjätte uppgiften

En problemlösningsuppgift som inte heller var lätt då den krävde en förståelse där eleven måste kunna hitta på en egen lösningsmetod. Ingen elev ställde upp någon korrekt metod för att lösa problemet. Tre elever hade på något sätt gissat sig fram till rätt svar utan att redovisa sina tankegångar. Det verkade som att ingen elev visste hur de skulle kunna lösa en sådan uppgift exakt utan att de mest gick på gamla erfarenheter och testade sig fram. Ett par av eleverna nämnde att de kladdat ner alla sina gissningar och bara redovisat svaret på denna uppgift vilket inte var menat för resultatets skull då vi ville se allt. En elev hade försökt att ställa upp en egen ekvation för att lösa uppgiften men ekvationen hade bara två variabler som inte relaterade till varandra på något sätt men med hjälp av gissningar så svarade eleven ändå rätt till slut. När det handlar om en textuppgift så måste en elev kunna översätta från språklig form till ett matematiskt symbolspråk i form av ett algebraiskt uttryck eller en ekvation. Eleven måste vara flexibel i att välja mellan olika uttrycksformer för att kunna förstå och lösa svårare sammansatta matematiska problem (Bergsten m.fl. 1997). Den femte eleven kom ingenstans med uppgiften.

6.4.12 Sjätte uppgiften med hjälp av Ti-83

Då alla elever saknade problemlösningsmetod och inte kunde ställa upp någon formel för att lösa uppgiften så var inte Ti-83 till någon direkt hjälp utan eleverna gjorde ungefär på samma sätt som utan Ti-83 och bara testade fler olika värden för att kontrollera om det svar de fick stämde med Ti-83. Persson menar att det inte spelar någon roll om elever tar hjälp av Ti-83 till en problemlösningsuppgift om eleverna inte har en grundläggande förståelse att ställa upp en problemlösningsmetod. Ti-83 klarar inte av att översätta ett problem till ett algebraiskt uttryck åt eleverna (Persson 2005, s. 65). Fyra av eleverna saknade rätt problemlösningsmetod för att lösa uppgiften men lyckades ändå få fram rätt svar, men de kunde inte visa hur de kom fram till den rätta lösningen. Att elever inte kan visa hur de löser en uppgift eller visa vilken kunskap de egentligen besitter är en svårighet för läraren. Elevens kunskap kan bara utläsas beroende på hur väl eleven muntligt eller skriftligt kan visa hur verktyget har använts och inte bara redovisa dess svar (Drijvers & Trouche 2008, s. 11). Den femte eleven kom ingenstans med uppgiften.

7. Diskussion och Slutsats

7.1 Diskussion

Vår diskussion bygger på vad vi har kommit fram till i vår undersökning av elevernas resultat och efter våra diskussioner i intervjun med läraren.

7.1.1 Utan digitalt hjälpmedel

De flesta elever visar att de kan lösa andragradsekvationer för hand med papper och penna på något sätt. De flesta elever kan lösa andragradsekvationer med hjälp av *pq*-formeln. Eleverna kunde ställa upp *pq*-formeln och visste hur lösningarna skulle tas fram. Det några elever hade svårighet med var att de inte kunde beräkna kvadratroten ur i huvudet på grund av att de saknade en god uppfattning om grundläggande räknesätt. Eleverna kunde inte räkna med bråkräkning eller hade brister i huvudräkningen. Sådana brister beror ofta på att elever använt miniräknare för tidigt i sin skolgång och att bråkräkning och huvudräkning är metoder som eleverna prioriterat mindre (jfr Löwing & Kilborn 2003, s. 11). Det är viktiga metoder som elever redan från början i sin skolgång borde se till att lära sig, utan att ta hjälp av ett digitalt hjälpmedel. Eleverna behöver kunna sin bråkräkning och huvudräkning för att kunna uppnå en grundläggande talförståelse.

Ytterligare en svårighet vi såg med *pq*-formeln var att en elev gjorde ett teckenfel men det bedömde vi som ett slarvfel då eleven gjort rätt annars med *pq*-formeln. Eleven kom fram till svaret ”ingen lösning” och det svaret borde ha fått eleven att tänka till och kontrollerat sina beräkningar då ett sådant svar inte är vanligt och speciellt när eleven strax innan hade gjort uppgiften och fått fram ett annat svar. Eleven har antagligen litat mer på Ti-83 som gav svaret ”ingen lösning” än sin egen tidigare lösning med papper och penna, som var korrekt, där eleven inte fick ett negativt tal under kvadratrottecknet. Det är farligt att lita för mycket på ett digitalt hjälpmedel och elever borde alltid kontrollera sina svar med ursprungsekvationen, speciellt om de inte är rimliga. När Ti-83 får användas underlättas kontroll av svaret ännu mer, eleverna kan både ersätta *x*-värdena i ekvationen med lösningarna och beräkna den, kontrollera i graf eller i tabell och jämföra med det svar de fått för hand.

Eleverna hade större svårigheter med de andra metoderna som brukar användas för att lösa enklare andragradsekvationer så som till exempel faktorisering och den ”enkla metoden” (där $p = 0$). Flera elever ville helst lösa även de enklare andragradsekvationerna med *pq*-formeln, den kan användas men är en onödigt komplicerad metod. De eleverna kände sig trygga i att använda *pq*-formeln och erkände att de glömt bort de andra metoderna (jfr Persson 2005, s. 22ff). Läraren ville att eleverna bara skulle använda sig av *pq*-formeln när den måste användas, men när eleverna väl fått lära sig *pq*-formeln blir det för mycket nytt att elevernas kreativitet begränsas. Eleverna vet att *pq*-formeln alltid fungerar och använder då inte sin kreativitet för att inse att de smidigare metoderna finns.

Några av de elever som använde faktorisering och den ”enkla metoden” i någon av uppgifterna klarade av att få ut lösningarna medan några andra elever misslyckades på olika sätt med de metoderna. Med faktoreringsmetoden gjorde eleverna fel på tre olika sätt. Första sättet då ett *x*-värde förkortades bort helt och därmed försvann en lösning, andra då faktoriseringen misslyckades helt eller att metoden användes i en uppgift som inte skulle faktoriseras. Med den ”enkla metoden” var det en elev som misslyckades då eleven bara tog fram en av lösningarna. Eleverna har fått lära sig att det alltid ska vara två lösningar i sådana andragradsuppgifter. Det är dock inte lika tydligt att det ska bli två lösningar när de två metoderna används som det är när *pq*-formeln används som tydligt visar att den vill ha ett x_1- och ett x_2-värde, men det är en kunskap som ska finnas med i elevernas grundläggande förståelse. Vi anser att det är viktigt att elever inte glömmer bort eller begränsar sig till en av de flera metoder som finns för att lösa andragradsekvationer och att de bör lära sig att använda dem alla i lämpliga situationer.

I de tre övriga uppgifterna har nästan ingen elev en bra problemlösningsmetod. Eleverna vet inte hur de ska översätta uppgifterna till ett matematiskt symbolspråk som de är vana vid att lösa (jfr Bergsten m.fl. 1997, s. 19). De är vana med den formella och akademiska matematiken där någonting bara ska räknas ut men borde även få träna mer på den så kallade vardagsmatematiken som egentligen är mer relevant att kunna. Ett problem i vardagen ska kunna översättas och beskrivas till ett matematiskt språk för att sedan lösas. Vi tror att anledningen till elevernas brister i att kunna formulera om problem beror mycket på att sådana textuppgifter i boken ofta tillhör de ”svårare” uppgifterna som bara räknas av de elever som hinner med. Övriga uppgifter handlar alldeles för mycket om den formella akademiska matematiken som leder till att elever lär sig för lite om problemlösning (jfr Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 78ff). Problemlösningsuppgifter kan också vara positiva för att de kan anpassas till eleverna och uppgifterna kan göras mer relevanta och attraktiva och därmed påverka elevernas intresse för matematiken som helhet på ett positivt sätt. Att de flesta eleverna ändå lyckades att lösa uppgiften trots att eleverna inte kunde ställa upp en problemlösningsmetod är intressant. Det måste bero på att eleverna kunde koppla problemet till något verkligt eller till tidigare erfarenheter inom vardagsmatematiken och därmed med bra rimliga gissningar tog sig fram till rätt lösning.

7.1.2 Med digitalt hjälpmedel

De flesta elever hade inte använt Ti-83 eller motsvarande innan sin gymnasietid utan fick först i början av första gymnasieterminen den grundläggande kunskapen om Ti-83 av läraren. Efter hand som eleverna kom längre i sin matematikutbildning utbildade läraren dem vidare på Ti-83 där läraren på storbildsskärm gick igenom och visade de viktigaste funktionerna och användningsområdena. Eleverna hade alltså ingen lång vana i att använda Ti-83 men de har fått tillräcklig utbildning för att klara av grunderna i hur Ti-83 används i sin matematikutbildning. Ti-83 är ett väldigt bra hjälpmedel för eleverna speciellt när det gäller grafer och till viss del inom ekvationslösning och att Ti-83 smidigt underlättar alla beräkningar då eleverna kan gå fram och tillbaks för att redigera i dem. Digitala hjälpmedel är flexibla verktyg för eleverna (jfr Persson 2005, s. 55).

Eleverna visade att de kunde lösa ut en andragradsekvation med hjälp av Ti-83 med olika metoder, det är viktigt att kunna använda olika metoder för att anpassa Ti-83 till att lösa olika uppgifter (jfr Drijvers & Trouche 2008, s. 11). Eleverna kunde också använda Ti-83 som ett komplement till sina beräkningar de gjorde för hand och för att testa sig fram till rätt lösningar. Om eleverna inte fick använda Ti-83 som hjälpmedel till att lösa sina uppgifter kan vissa känna sig otrygga. Vissa eleverna har fått in en vana i att använda Ti-83 och har vaggats in i en falsk säkerhet som kan påverka elevernas självförtroende till sin huvudräkning på ett negativt sätt (jfr intervju Lärare). Eleverna måste ändå kunna utföra beräkningar utan Ti-83 för att Ti-83 inte alltid kan hjälpa eleverna då det ska svaras exakt eller när eleverna ska utföra det nationella provets miniräknarfria del (jfr intervju Lärare).

De svårigheter elever mötte när de använde Ti-83 berodde främst på att när de väl fick använda hjälpmedlet så använde eleverna inte Ti-83s fulla potential. Alla elever visade på uppgift ett att de kunde lösa en andragradsekvation med endast Ti-83 till hjälp. Till uppgift två och tre använde ändå inte alla elever de metoderna och Ti-83 för att lösa uppgifterna. Några elever löste istället ekvationerna för hand och använde bara räknaren som ett komplement till att utföra beräkningar, till exempel i att göra om bråktal till decimaltal för att eleverna tyckte det blev lättare (jfr Löwing & Kilborn 2003). Det kan bero på att eleverna inte visste hur ekvationer, som är uttryckta på ett annorlunda sätt än ekvationen i första uppgiften, kunde skrivas in på Ti-83. Alla elever hade redan visat att de kunde lösa en andragradsekvation med Ti-83 då de visat det i första uppgiften och därmed kunnat lösa övriga beräkningsuppgifter på samma sätt men ändå inte gjorde det är oklart. Eleverna kanske inte visste att alla ekvationer i de tre uppgifterna kunde skrivas in på samma sätt i Ti-83 för att lösa dem. Eleverna kanske använde papper och penna istället för Ti-83 för att lösa uppgifterna på grund av att läraren ville att eleverna skulle få en bättre förståelse i grundläggande matematik och därmed instruerat eleverna att inte använda Ti-83 för tidigt eller i onödan utan bara till komplicerade beräkningar, stora tal, stora potenser och sådant som är svårt att räkna i huvudet (jfr intervju Lärare).

En elev använde en annan funktion i Ti-83 än den som eleven redan visat sig att kunna. Den andra funktionen behärskade eleven inte till fullo och klarade bara av att få ut en av lösningarna. Det berodde antagligen på att det var länge sedan eleven använde just den funktionen till att hitta nollställen och därmed glömt bort hur funktionen fungerar eller hur Ti-83 presenterar svaret (jfr Unenge, Sandahl & Wyndhamn 1994, s. 65).

I problemlösningsuppgifterna hanterades Ti-83 på olika sätt. Eftersom de flesta elever saknade en problemlösningsmetod så använde de bara Ti-83 som ett verktyg för att testa sig fram till rätt lösningar. Det eleverna använde Ti-83 till kunde inte ses som att det gav någon förståelse om själva uppgiften utan bara som en testningsmetod för att slutligen komma fram till rätt lösning. Om Ti-83 används utan att eleven har en grundläggande problemlösningsmetod eller en tanke bakom hur lösningen ska gå till så hjälper Ti-83 inte till i att utveckla elevens förståelse för problemet (jfr Persson 2005, s. 65). Endast ett par av eleverna använde sig av en bakomliggande tanke när de försökte lösa uppgifterna och bara de eleverna visade på en större förståelse i hur uppgifterna kunde lösas. Helt enkelt så är det viktigare att ha en förståelse för vad som ska göras än att ta hjälp av Ti-83 (jfr Drijvers & Gravemeijer 2004, s. 191f). Läraren sammanfattar användningen av ett digitalt hjälpmedel på ett, vad vi också anser, bra sätt. Att det digitala hjälpmedlet ska vara ett verktyg för att underlätta för den som kan, inte vara ett stöd för den som inte kan.

Vi som blivande lärare tycker att om eleverna har en god grundläggande förståelse om matematiken så kommer alla digitala hjälpmedel vara verktyg som underlättar en fortsatt inlärning. Fler och fler digitala verktyg kommer att användas i undervisningen och finnas tillgängliga för eleverna. Eleverna kommer att få lära sig hur de digitala hjälpmedlen fungerar och får själva ta ansvar för att veta vad verktyget kan användas till och hur verktyget kan hjälpa just dem. De digitala verktygen kommer att underlätta alla former av beräkningar och eleverna kan istället fokusera på att lära sig mer grundläggande matematik och olika problemlösningsmetoder. Kan eleverna detta och hur det digitala hjälpmedlet kan vara en tillgång så kommer elevens studier underlättas och elevernas förståelse i matematiken förbättras.

7.1.3 Förbättringar

Vår metod med de uppgifter eleverna fick utföra är bra för att visa att det finns svårigheter med att lösa andragradsekvationer. Metoden kan även delvis beskriva vilken sorts svårigheter eleverna möter. För att göra metoden bättre så behövs det fler välgenomtänkta undersökningsfrågor som kan hitta fler svårigheter och mer specifikt kan visa vilka svårigheter eleverna har. De frågor vi utformade kan ses som en pilotstudie som kan användas till att formulera bättre och fler frågor till en mer utförlig undersökning.

Vår intervju med eleverna skulle även den kunna förbättras genom att utföra den individuellt istället för med hela gruppen. Med gruppintervjun kunde vi få fram vilka svårigheter eleverna mött på men med en intervju med varje enskild elev skulle även gett oss en bättre beskrivning av de svårigheterna, vilket kunde ha varit användbart i analysdelen. Vi skulle även ha kunnat använda oss av en större urvalsgrupp. Fler elever med olika bakgrund, till exempel elever från olika gymnasium, skulle även det kunna visa på fler typer av svårigheter som hade kunnat vara relevanta att undersöka.

7.2. Slutsats

Eleverna kunde lösa uppgifter om andragradsekvationer både med och utan hjälpmedel och även som komplement till varandra. Eleverna begränsade sig dock ofta till att bara använda en metod istället för att utnyttja att de har lärt sig flera. Om de inte klarade av att lösa uppgiften med den metoden gav de hellre upp än att försöka med någon annan metod. Eleverna måste bli mer flexibla och kunna använda sin kreativitet för att lösa olika typer av uppgifter.

Att matematiken bygger på fundamental kunskap där elever bör ha lärt sig allt på en svårighetsnivå för att gå vidare till nästa är det som gör matematiken så svår. Det går att arbeta vidare på en högre nivå även om förgående nivå inte helt behärskas men då kommer en full förståelse inte att uppnås och därmed kommer svårigheter att mötas. Till exempel så syntes en sådan svårighet tydligt när flera elever fastnade på en grundläggande bråkräkning, som ligger på en lägre nivå än uppgiften i helhet, och på grund av det inte kunde gå vidare. Eleverna har någon gång lärt sig det räknesättet men har i stället skapat ett behov att alltid ha tillgång till ett digitalt hjälpmedel som komplement för att utföra en sådan beräkning. Även där stänger eleverna in sig och kan inte utnyttja sin flexibilitet. Eleverna behöver hjälp med att inte fastna på någon svårighetsnivå eller att inte fastna i gamla mönster så att de kan bygga upp en komplett talförståelse.

Ett digitalt hjälpmedel kan hjälpa en elev att utföra beräkningar men inte med att lösa ett problem då den inte kan översätta problemet till ett matematiskt uttryck själv utan det måste eleven kunna göra. Eleven måste alltså själv stå för den bakomliggande förståelsen för att kunna ställa upp en problemlösningsmetod. Den grundläggande aritmetiken är givetvis det all matematik bygger på och förståelsen för den är det viktigaste för att kunna ställa upp och lösa olika problem möter inom matematiken.

De implikationer vi kommer fram till med vårt resultat är att det till en början är viktigt att den undervisande läraren vet vilken kunskapsnivå eleverna ligger på för att kunna motverka de svårigheter elever kan möta på redan innan de ska börja lösa andragradsekvationer. Läraren bör helst se till att eleverna har en grundläggande förståelse inom de tidigare kunskapsnivåerna och i aritmetiken för att inte eleverna ska möta allt för stora svårigheter när de ska lösa andragradsekvationer. När undervisningen av andragradsekvationer väl introduceras kommer förhoppningsvis färre svårigheter att uppstå och istället kan läraren koncentrera sig på att lära eleverna att bli mer flexibla och kreativa som är de viktigaste delarna för att kunna bli bra på problemlösning. Det är problemlösning som är det vikigaste att kunna, för det är problemlösning som kan anpassas till verkliga situationer och som eleverna kan ha nytta av i framtiden. När det gäller digitala hjälpmedel bör läraren fortsätta utbilda elever i vilka fall hjälpmedlet kan bistå och hur eleverna kan använda hjälpmedlet för att komplettera sina matematiska beräkningar.

Referenser

Böcker och artiklar

Bergsten, Christer, (projektledare), Häggström, Johan & Lindberg, Lisbeth (1997), *Algebra för alla*. Nämnaren Tema. Göteborg universitet.

Dahland, Göte (1998), *Matematikundervisning i 1990-talets gymnasieskola. Ett studium av hur en didaktisk tradition har påverkats av informationsteknologins verktyg*. Rapport nr 1998:05. Institutionen för pedagogik. Göteborgs universitet.

Drijvers, Paul & Gravemeijer, Koeno (2004), Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes. In: Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (ss. 163-196). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, Paul & Trouche, Luc (2008), From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics:* Vol. 2. Cases and perspectives (ss. 363-392). Charlotte, NC: Information Age.

Esaiasson, Peter, Gilljam, Mikael, Oscarsson, Henrik & Wängnerud, Lena (2007), *Metodpraktikan - Konsten att studera samhälle, individ och marknad*. Upplaga 3(1). Stockholm: Norstedts juridik.

Holm, Idar Magne, & Solvang, Bernt Krohn (1997), *Forskningsmetodik - Om kvalitativa och kvantitativa metoder*. Andra upplagan. Studentlitteratur. Lund.

Kvale, Steinar (1997), *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Studentlitteratur. Lund.

Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011. (2011) Stockholm: Skolverket

Löwing, Madeleine, & Kilborn, Wiggo (2003), *Huvudräkning - En inkörsport till matematiken*. Studentlitteratur. Lund

Persson, Per-Eskil (2005), *Bokstavliga svårigheter - Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande*. Luleå tekniska universitet. Luleå

Patel, Runa & Davidson, Bo (2003), *Forskningsmetodikensgrunder - Att planera, genomföra och rapportera en undersökning*. Tredje upplagan. Studentlitteratur. Lund

Ryen, Anne (2004), *Kvalitativ intervju - från vetenskapsteori till fältstudier*. Malmö. Liber

Unenge, Jan, Sandahl, Anita & Wyndhamn, Jan (1994), *Lära matematik*. Lund: Studentlitteratur

Internetreferenser

Häggström, Olle (2004), Det är dags att göra upp räkningen. Publicerad i Axess 4/2004. (http://www.math.chalmers.se/~olleh/skolans_sak/Axess_tema.html) [2012-12-05]

Naalslund, Margrethe (2012), *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency.* Skolverket 2012 (www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/omraden/matematik/avhandlingar?l=sv_SE) [2012-12-18]

Olteanu, Constanta (2003), Varför är skolalgebra svårt? Tsunami 2-2003 (http://hkr.diva-portal.org/smash/get/diva2:214221/FULLTEXT0) [2012-12-12]

Vetenskapsrådet (1990) *Regel och riktlinje Forskningsetiska principer -inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.*
(http://codex.vr.se/texts/HSFR.pdf) [2012-11-13]
Stockholm Vetenskapsrådet

Bilagor

Bilaga 1

Elevuppgifter

1. $2x^2 - 8x = 0$

2. $5x^2 - 15x + 10 = 0$

3. $3x^2 - 12 = 0$

4. För vilket värde på a har ekvationen $x^2 - 20x + a = 0$ en dubbelrot?

5. Produkten av två på varandra följande heltal är 306, vilka är talen?

6. En hästägare ska bygga en rektangelformad hage för sina hästar. Den ena långsidan av hagen kommer att bestå av en stenmur så där behövs inget stängsel. Hur ska hästägaren bygga sin hage så att den får maximal area om han har 300 meter stängsel att använda?

Bilaga 2

Elevintervjun

När räknade ni med andragradsekvationer senast?
Derivata gör vi hela tiden men menar du att lösa andragradsekvationer, så måste det varit i våras kanske? Det måste det varit? Eller gjorde vi det inte i början av denna kursen som en repetitionsgrej? Nej det var inte andragradare tror (de övriga). Var inte det i mitten av matte 2 kursen, den stora delen. Jo det var det.

Vad är det ni egentligen löser ut när ni löser en andragradsekvation? Nollpunkterna där y = 0, nej förlåt! Där x = 0 oops.
Om ni tittar på det grafiskt sett då?
Där grafen korsar x-axeln.

Och vilken metod använder ni för att lösa en andragradsekvation för hand?
Pq-formeln (alla först) eller nollproduktmetoden, det beror på hur många konstanter som är med i ekvationen. (En elev, jag kör alltid *pq*-formeln, jag har inte fått grepp om nollproduktmetoden) Alltid, seriöst? Då kan du alltid dividera med x där och så.

Kvadratkomplettering då, har ni använt det någonting?
Ja det har vi. Sublimeringsmetoden, kommer inte ihåg riktigt? Det kommer vi väl ihåg? Det har vi väl gjort? Vi har väl gjort, känner igen det men kommer inte ihåg. Sen håller man ju på med mycket svårare saker och börjar med nya så glömmer man det gamla.

Hur löser ni en andragradsekvation om ni använder en grafritande räknare då?
Nollpunkt. (någon: oftast). Bara skriva in ekvationen i grafräknaren och kolla vart den korsar.
Kollar ni på grafen eller i tabellen?
Tabellen, oftast. Jag kollar grafen. (hälften hälften).
Ni använder inte någon av de funktioner som finns på räknaren för att hitta nollpunkterna?
Jag kommer inte ihåg hur man klickar för att komma fram till det. Det beror på hur stora de är. Kommer inte ihåg hur man kollar det eller vilken knapp det är.

Om ni ska rita en andragradsekvation för hand, hur gör ni då?
Börjar med koordinatsystem och sen får vi kolla och måla upp axlarna för att kolla vilken gradering, hur många steg man vill ha emellan på varje ruta. Sen kollar jag q-värdet blir det väl, koefficienten som inte har nått x i sig. Där korsar den. O sen bara, jag vet inte, försöker få så att x passar hyffsat bra ihop i x-konstanten, så att kolla att det är positivt eller negativt och försöka få ihop det. Det är jättesvårt att måla andragrad för hand tycker jag.
Hur bestämmer man den här negativa eller positiva? Är den negativ så har den ett maxvärde, positivt ett minvärde så då får man måla så eller så här (visar) glad mun eller ledsen mun.

Tar ni reda på nollställen när ni ska rita en andragradsekvation?
Ja nollställen och vertex är ju ganska bra att veta.

Om en andragradsekvation saknar lösning, hur kan den se ut då?
Hur ser grafen ut? Att den korsar inte x-axeln¨.

Hur ser det ut om en andragradsekvation bara har en lösning?

Den tangerar precis vid x-axeln, vänder där. (Den som kallas dubbelrot, var ni med på det?)
Nej jag kommer inte ihåg vad dubbelrot var för något.

Hur visar ni vart en andragradsekvation skär y-axeln då?
Det är väl konstanten som inte har ett x i sig? (visar)

Vi har nu gått igenom några begrepp här, symmetrilinje, har ni använt det någonting?
Ja, värdet mellan nollställena, mitten av allt vad man ska säga, mitten av vertex.
Vad innebär det att det finns en symmetrilinje?
Det innebär att grafen är symetrisk på båda sidorna.

Konjugatregeln, har ni koll på den?
Konjugat och kvadreringsreglerna, (väldigt oklart vad de sa här)

Begreppet funktion då? Vad är en funktion?
X och y o så. Så fort man säger funktion så tänker jag f(x) f av x, vet inte varför eller hur jag ska utveckla mig med det.

Parabel då?
Det har ja ett minne av men har inte en aning om vad innebär! Kommer inte heller ihåg. Läraren sa att vi skulle tänka parabol hela tiden. Ja just det sa hon nånting om, kommer inte ihåg vad det var. Var det inte nånting med en halva. Cirkulation av nånting? Kommer inte ihåg.

Bilaga 3

Lärarintervju

Vad undervisar du i?
Matematik och fysik är mina examensämnen så att säga men sen har jag även programmering.

Hur länge har du arbetat som lärare?
13 år tror jag det är nu.

Hur använder du miniräknaren i din undervisning?
Ja den används hela tiden, i naturvetenskapliga programmet, naturligtvis, men den är ett väldigt bra hjälpmedel för dem. Både med grafer och viss del av ekvationslösning naturligtvis och att man även kan gå fram och tillbaka för att redigera vanliga enkla beräkningar. Det är en väldigt avancerad funktionsräknare. Jag använder den som ett verktyg väldigt ofta men det är inget nytt, det har sett likadant ut den senaste 10 åren om man säger så. Sen har ju geogebra kommit, de har ju datorer idag också och det blir ju en helt annan sak. Även Excel för datainsamling i fysiken att rita kurvor där osv. Men miniräknaren har sett ut som den alltid har gjort. Men just det att man kan justera sina beräkningar och ha den till ekvationslösning, grafritande och datainsamling.

Om vi tänker mer på grafritande räknare då?
I så fall menar jag att jag använde den mycket grarfritande räknare till gamla matte c-kursen och matte d-kursen då just för kurvkonstruktioner och leta lokala mini- och maximipunkter och korsningar med x-axlen och det är klart den är bra att ha där den grafritande räknaren.

Hur får eleverna utbildning på grafritande räknare?
Det får de bra av mig då, om jag gör reklam för mig själv. Jag tycker att det är viktigt att de kunna hantera den, det verktyget. Jag har ett special tillbehör till den Texas räknare som jag har, som jag får upp på projektorn eller en TV-skärm så kan jag instruera och visa hur den fungerar. Vi går genom funktion för funktion, det är viktigt.

Har de haft någon utbildning på räknaren innan de kommer till dig? Har de använt en grafritande räknare innan de började på gymnasiet?
Nej, eleverna får den i första mattekursen på gymnasiet så de kan den inte innan. De har inte en så avancerad räknare på högstadiet, har de inte. Men eventuellt kan någon förälder köpt eller eventuellt något syskon har gett dem en så några enstaka har men oftast är det så att hela klassen får den och vi får gå igenom hur den fungerar. De får den i fösta mattekursen och det grundläggande i hur de hanterar den och sen naturligtvis efterhand, när de ska derivera numerisk så är det klart att det kommer i tredje kursen eller om man ska integrera numeriskt som kommer i tredje-fjärde kursen osv, klart att det är så. Men jag måste ändå gå igenom miniräknaren och dess grundläggande funktioner i första kursen, så att de känner sig säkra i hanteringen.

Ser du att eleverna har några svårigheter med att använda miniräknaren?
Ja, båda ja och nej. Historiskt sätt så har det varit det med prioritering och sådant, grundläggande då. De sämre räknarna som inte haft prioriteringsreglerna inbyggda så att säga har medfört att eleverna får fel på det också. Men mer avancerad räknare har ju också det egentligen, när man ska dividera med produkt t.ex., just de enkla räknesätten kan innebära

problem även för avancerade räknare. För och nackdelar, jag tycker att man ska ha uppnått en viss nivå så att säga när det gäller huvudräkning och förstående av prioriteringsreglerna så att man får använda miniräknaren först när man har förstått det hela. Annars använder man miniräknaren för tidigt och då kanske man missar en viss förståelse i den grundläggande aritmetiken.

Vad anser du är miniräknarens roll i matematikundervisningen, vart passar den in och vart passar den inte in?
Alltså ett verktyg, om man uppnått en viss grundläggande förståelse själv så man enligt mig får använda den. Som t.ex. jag själv använder den, det är verktyg i matematiken för komplicerade beräkningar, naturligtvis stora tal, stora potenser och sådant man inte kan räkna i huvudet naturligtvis. Sen ett verktyg i fysiken och i matematiken, att kunna integrera numeriskt, att kunna derivera numeriskt, att kunna lätt hantera kurvor, även stora datamängder i fysiken t.ex. att kunna approximera en kurva och punkter. Det är ett kraftfullt verktyg utan tvekan. Men mycket av det kan ju datorerna göra idag som de har fått, om man relaterar till fysiken då. Men framför allt verktyg för att underlätta även för den som kan så att säga, för mig är det inte så att miniräknaren ska vara stöd för den som inte kan, ge dem en miniräknare bara för att de ska kunna ta sina additioner och subtraktioner, det är för mig inget alternativ, det tycker jag man ska kunna. Det är nog för jag har naturvetenskapliga programmet och det tekniska programmet och så, många av de andra programmen som har det svårare ser det mer som ett måste med miniräknare för att de ska kunna klara sig. Det är inte min åsikt riktigt.

Tycker du att eleverna lär sig på ett annat sätt när de använder miniräknare? På vilket sätt?
Det beror på när man inför den så att säga. Det beror sig på hur det varit på högstadiet naturligtvis om de fått använda räknaren i ett tidigt skede. Och det är möjligt att det för några har inneburit att de inte lärt sig grundläggande allmänna räknesätten t.ex. bråkräkning för att miniräknaren har varit ett hinder. Visualiseringsförmågan är viktig i matematik, det är ändå här inne (huvudet) som matematiken sker och går man in för tidigt (på räknaren) så är det risk för att man försöker gå förbi det. Men det ska ske mycket tidigare än i ettan på gymnasiet det här naturligtvis. Men sen om man inte får ha miniräknare alls på naturvetenskapliga programmet på det som inte har med grundläggande saker att göra är det klart att när det gäller kurvkonstruktioner och vissa typer av ekvationslösning är det klart att de inte får se sakerna på samma sätt, det är svårt att visualisera. Säg att du ska förstå en kurva som du inte riktigt vet hur den ser ut, så är det klart att du behöver miniräknaren, men frågan är just under inlärningen så vet det tusan om man…, det är en svår fråga alltså. Det går hand i hand med inlärningen och t.ex. nollställen och få se vart nollställen ligger det kan vara bra att få rita sina kurvor och se hur, ändra en konstant här och där och se hur kurvan ändrar sig och snabbt kunna rita om en kurva då lär man sig ju snabbt. Men likväl med datorn och geogebra t.ex, under inlärning kan det vara väldigt bra att kunna göra vissa saker flera gånger, att kunna rita om och rita om. Då ökar inlärningen.

Tycker du att det är lättare att använda geogebra istället för grafritande räknare?
Ja men egentligen inte, en grafritande funktionsräknare är ju bra under inlärningen men dom grundläggande sakerna så kanske, i högstadiet eller i ettan på gymnasiet med aritmetiken och bråkräkningen, då undrar ja om miniräknaren (är bra), man måste ju ändå ha en bild, tre plus fem är ju ändå åtta.

På vilket sätt kan eleverna missbruka miniräknaren?
Ja, det är svårt att säga. På prov så finns det alltid en miniräknarfri del så att det är nog inga problem men visst kan man missbruka den i att det blir en genväg till enkla beräkningar. Det är så onödigt och det gör att man inte försöker och man kan tappa den här huvudräkningen om

man alltid ska använda miniräknaren. De kan slå fem gånger tio, det kan de slå bara för att de är så vana i att använda miniräknaren. Det är bättre att försöka själv då. Till och med det här med andragradsekvationer som vi ska prata om är att man, jag vill att man ska visualisera den också så att säga, och det är ett tydligt exempel på att om man kan programmera eller att man laddar ner ett program som löser andragradsekvationer där man slår in p och q så att säga. Det är ju en stor nackdel, en nackdel då man överanvänder den så att man själv slutar tänka.

Vilka metoder använder du för att visa hur andragradsekvationer löses utan och sedan med miniräknare?
Utan miniräknare det är det allra viktigaste och det här med att så att säga knyta den till kurvan och nollställen det gör man lite efteråt tycker jag för att algebran kommer först, men det går lite hand i hand beror på vilken elev. För en del kanske det inte löser sig så bra när man håller på algebran och de kanske förstår den först när andragradskurvan kommer in. (förutsättningar) Det är svårt att säga men jag börjar med algebran och sedan grafen grovt, oavsett böcker så att säga. Jag introducerar det enkla kvadraten, x kvadraten är 25 och man pratar då om att det finns två lösningar, och det är det första man måste tänka på, första *ahha-upplevelsen* för dem som inte har tänkt på tidigare då att både -5 och 5 i kvadrat faktiskt är 25 = *ahha* två lösningar och då har det ingenting med grafen att göra överhuvudtaget. Det kan hända att de inte hängt med på räta linjen i gamla b-kursen så det här med grafer det sitter inte men algebran kan sitta då. $x*x$ är 25, det finns två lösningar och sedan försöker man gå vidare med den då. Om man algebraiskt lägger till ett x då eller en konstant alltså. $x^2 + 5x$ t.ex. så man kan bryta ut för det har man ju hållit på med, bryter ut och sådana här saker. Men då ska det helst vara lika med noll då, så att man kan förstå att någon av de där ska vara noll osv. Man har ju alltid enkla exempel, men då hittar man ju lösningar också lite enklare. Och sedan kommer den sista konstanten när man inte kommer förbi en formel på något sätt och när den här fullständiga andragradsekvationen uppkommer så får man ju härleda formeln naturligtvis också och börja använda den men oftast så kommer grafen samtidigt där. Men ändå om grafen inte finns med i medvetandet så är det ändå ett bevis där som är ganska svårt och det blir det egentligen en metod först för dem och då vill jag att de ska kunna visualisera den metoden för att kunna se hur man gör och då går vi via vissa reglar kan man säga. Om de inte förstår beviset av andragradsekvationer blir det en jobbig formel i formelsamlingen… rena grekiskan och då är det bättre att kunna visualisera den och den enda regeln är att kunna är att talet framför x^2 ska vara 1, så man får trixa och flytta över så att allt blir lika med noll, enda man behöver tänka på. Sedan visualiserar man då att man halverar talet framför x, byter tecken och sedan ±, och sedan kvadrerar man talet man redan har inuti rottecknet och så tar man minus den sista konstanttermen. Man kan försöka visualisera då visualiseringen är mycket lättare än att bara hålla på och sätta in i massa formler… Sedan knyter man förståelsen till nollställen.

Vad är de vanligaste svårigheterna eleverna har med respektive metoder?
Jag tycker det snarare är så att när en andragradsekvation har blivit svårt, alltså när den blivit fullständig och även när grafen är inblandad med nollställen. Då är det så mycket för dem när det är nytt att de glömmer att vara kreativa på de enkla. Står det $x^2 = 25$ då ska den där *pq*-formeln in, ta det lugnt nu säger man, var kreativ. Räcker det inte att bara beräkna kvadratroten ur här? Och tänka på ± att det är två lösningar. Samma sak för $x^2 + 5x$ är lika med noll och *pq*-formeln ska fram, men ta det lugnt nu. Bryt ut ett x och fundera på någon av de faktorerna kan bli noll och så löser du, var kreativ. Det tycker jag snarare de tappar för det blir lite abstrakt med *pq*-formeln eller med (räknaren) grafens lösning då man bara ritar och zoomar in lösningen. Så att svårigheten ligger i att man mister sin kreativitet och det andra är väl att göra teckenfel både framför rottecknet och teckenfel i rottecknet så man får kvadratroten ur ett negativt tal så man tror att det inte finns en lösning. Teckenfel är luriga. Man gör mer fel om man försöker sätta in i en formel än man har en visualiseringsprocess klar för sig.

Vilka metoder brukar eleverna använda då?
Jag vill att *pq*-formeln endast ska till när man måste ha den. Sen ska man vara kreativ på de andra när man inte har q-termen eller p-termen så det finns enklare sätt att göra själv egentligen med tidigare kunskaper. Är det decimaltal och så här som konstanter så är det klart att man lika gärna kan lösa det grafiskt och zooma ganska noga med två decimaler. Det är några som föredrar det om det ändå ska bli massa decimaltal som ska avrundas hit och dit. Det är en svårighet man säga på förra frågan och även nu då att när det är bråk som konstanter om man ska svara exakt, det är en svårighet. De är så dåliga på bråk, så det är svårt med den där kvadraten i rottecknet och att få den minsta gemensamma nämnaren där i rottecknet. Och sen reglerna för kvadratroten ur en kvot osv. Det är en svårighet.

Det har vi också märkt när vi gjorde vår undersökning med eleverna. Där gjorde de gärna om bråktalen till decimaltal som de senare inte kunde beräkna kvadratroten ur i huvudet

Hur ser du på elevernas förståelse för andragradsekvationer utan miniräknare?
Jag tycker att man är ganska fri från miniräknare när man börjar här i och med att man kör algebra i ingången och grafen kommer senare och man först börjar använda räknaren sen man behöver beräkna kvadratroten ur, kanske för dem (våra elever) ta decimaltal. Så därför så tycker jag inte att förståelsen påverkas så mycket i början av inlärningsprocessen. Och sedan kan den hjälpa till när de grafiska kommer in utan tvekan, när de väl fattat sammanhangen där och det underlättar för dem att få använda miniräknaren även på enklare rotdragningar så de slipper ta lång tid och slipper att fastna på rotdragningar. Men att visualisera metoden tycker jag inte förändras så mycket.

Om eleverna inte får använda miniräknare till vanliga uppgifter eller andragradsekvationer, känner de sig otrygga i sina uträkningar då?
Vissa kommer att känna sig otrygga i och med att de fått in en vana, (i att använda miniräknare) de som inte har ett bra självförtroende av matematiken eller de som inte vågar tro att de är så duktiga på huvudräkning. De invaggas i lite falsk säkerhet när de tänker att de ska slippa att beräkna kvadratroten ur själva osv. Men som sagt det hjälper dem inte alls när det står svara exakt. Då måste de förenkla. En falsk trygghet kanske. Det är klart att de gör det, men det måste de också träna på för det finns alltid en miniräknarfri del på ett nationellt prov osv. Och många har faktiskt inlagda formler/program för att lösa andragradsekvationer (i miniräknaren). När det går så långt att de har det så, det går ofta hand i hand med att de är väldigt duktiga för de gjort programmen själva. Men ibland får någon kompis ladda över det som inte ens kan sin bråkräkning och då är det en nackdel om de bara kan slå in *p* och *q* och få ett svar och då kanske man sitter helt chanslös på nationella provet utan miniräknare.