GÖTEBORGS UNIVERSITET

Vad hindrar förståelseutveckling av funktionsbegreppet?

En modell att användas vid formativ bedömning

Simon Grönberg & Andreas Johansson

LAU395
Handledare: Åse Hansson
Examinator: Angelika Kullberg
Rapportnummer: HT12-2611-151

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Abstract

Examensarbete inom Lärarprogrammet LP01

Titel: Vad hindrar förståelseutveckling av funktionsbegreppet? -En modell att användas vid formativ bedömning

Författare: Simon Grönberg och Andreas Johansson

Termin och år: HT 2012

Kursansvarig institution: Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap

Handledare: Åse Hansson

Examinator: Angelika Kullberg

Rapportnummer: HT12-2611-151

Nyckelord: formativ bedömning, funktionsbegreppet, förståelsenivåer, hinder, missuppfattningar, svårigheter.

Syftet med detta arbete är att utveckla en modell att användas vid formativ bedömning för den lärandes utveckling av funktionsbegreppet. Huvudfrågan i arbetet är ”Hur kan en modell som beskriver hur specifika hinder för förståelse av funktionsbegreppet är relaterade till specifika förståelsenivåer för funktionsbegreppet se ut?” Huvudfrågan gav upphov till hypotesen ”varje hinder blockerar någon specifik förståelsenivå av funktionsbegreppet”, vilken formar modellens uppbyggnad. Två omfattande sammanställningar gjordes utifrån tidigare forskning. Den ena med avseende på olika nivåindelningar av förståelse för funktionsbegreppet och den andra med avseende på olika hinder för förståelseutveckling av funktionsbegreppet. En indelning av förståelsenivåer för funktionsbegreppet valdes efter jämförelse av dessa. De hinder som sammanställts relaterades till specifika förståelsenivåer av funktionsbegreppet vilka de bedömdes blockera. Detta gjordes utifrån den tidigare erfarenhet av funktionsbegreppet vi hade samt den forskning om förståelsenivåer för funktionsbegreppet som vi utgått ifrån. Ett test av modellen utformades och genomfördes i syfte att exemplifiera en lärares arbete med modellen samt för att ge information om svagheter i modellen. Förutsatt att hypotesen stämmer utgör modellen ett användbart, effektivt och kraftfullt verktyg som läraren kan använda vid formativ bedömning. Detta sker genom att utvinna nyttig information som ger läraren underlag för hur denne kan hjälpa den lärande att utveckla sin förståelse för funktionsbegreppet.

Innehållsförteckning

1 Inledning....4
2 Syfte och frågeställningar....5
3 Teoretisk anknytning....5
3.1 Formativ bedömning....5
3.1.1 Vad är formativ bedömning....5
3.1.2 Formativ bedömning, hinder och matematisk förståelsesutveckling....6
3.2 Funktionsbegreppet....7
3.2.1 Definition och historia....7
3.2.2 Förkunskapskrav....8
3.2.3 Aspekter av funktionsbegreppet....10
3.2.4 Nivåer av förståelse....10
3.2.4.1 Operationellt och strukturellt....10
3.2.4.2 Sfards tre stadier....11
3.2.4.3 APOS-teorins fyra nivåer....12
3.2.4.4 TRM-läroplanens fem nivåer....13
3.2.4.5 DeMarois och Talls fem nivåer....14
3.2.4.6 Jämförelse av teorier för nivåindelning....15
3.2.5 Missförståelser och svårigheter....16
3.3 Att utvinna information....19
4 Metod....21
4.1 Val av teoretiskt avstamp för FH-modellen....21
4.2 FH-modellen....21
4.2.1 Motivation till utformningsmetod av FH-modellen....21
4.2.2 FH-modellens utformning....21
4.2.3 Nivåer....23
4.2.4 Aspekter....24
4.2.5 Kategorisering av hinder....25
4.3 Test av modell....31
4.3.1 Etiska ställningstaganden....34
4.3.2 Validitet och reliabilitet....35
5 Resultat 35
6 Analys....38
7 Diskussion....39
7.1 Slutsatser....39
7.2 Diskussion kring empirisk studie....39
7.3 Konsekvenser för undervisning....40
7.4 Förslag till vidare forskning....41
Litteraturförteckning....42

1 Inledning

Under vår utbildningstid och framför allt under tiden som matematikstuderande upptäckte vi genom reflektion och i diskussion hur viktig begreppsbildningen är för att lärandet och i synnerhet lärandet inom matematik skall bli meningsfullt. Denna insikt kontrasterades av den praktik vi såg hos flera av våra handledare under de omgångar vi var ute på VFU. Där var algoritmer och övandet av dessa i ständigt fokus och de meningsskapande aktiviteterna som bidrar till elevernas förståelse uteblev allt som oftast. Fokus låg på att testa vad eleven kunde utföra i form av algoritmiska beräkningar och manipulerande med symboler, men att testa förståelse glömdes bort. Vi har dessutom under alltför många av våra VFU-vistelser sett bedömningar göras enbart för att läraren skall kunna sätta betyg på eleverna och därmed utgjorde bedömningstillfällena ingen naturlig del i elevernas lärandeprocess. Denna typ av bedömning går på många sätt emot det mer formativa fokus som varit normerande under senare delen av vår lärarutbildning.

Med detta som grund fick vi en idé om att integrera formativ bedömning med utvecklingen av elevernas begreppsbild och därmed deras förståelse. Då en undersökning av alla matematiska begrepp hade varit alltför omfattande i den här studien har vi begränsat vår undersökning till att endast omfatta funktionsbegreppet. I vårt examensarbete har vi utvecklat en modell som lärare kan använda som ett steg i arbetet med formativ bedömning på så sätt att modellen utvinner information om vad som är nästa steg att jobba med för att den lärande skall ta sig mot en mer utvecklad begreppsförståelse inom funktionsbegreppet.

Ganska snabbt insåg vi att lärarens kännedom om elevers missförståelse av matematiska begrepp är en nödvändig länk mellan undervisningens utformning och kunskapsmålet. Vi började därför söka i tidigare forskning efter just vanliga missförståelser gällande variabelbegreppet och funktionsbegreppet. På engelska benämns missförståelse med ordet ”misconception” som ofta översätts med ”missuppfattning” eller ”missförstånd”. Vi anser dock att ingen av dessa svenska översättningar har en tillräckligt tydlig och komplex innebörd. De tenderar att ge en känsla av att det enbart är något som brister i kommunikationen och inte i konstruktionen av förståelse. Med termen ”misconception” finns en dualistisk innebörd som både syftar på det aktiva konstruerandet av förståelsen (conceive) och den färdiga förståelsen (conception). Termen ”misconception” fokuserar på den felaktiga delen av förståelsen. Vi menar att förståelsen kan ha inslag av felaktiga delar, men att andra delar kan vara mer utvecklade och i större överensstämmelse med den matematiska definitionen av ett begrepp. Vi tycker att förståelse är komplext och innefattar olika kvalitativa nivåer snarare än ”rätt eller fel”. Vi väljer därför att definiera en egen term som vi kallar ”missförståelse”, vilken vi anser bättre återspeglar innebörden i termen ”misconception” än de tidigare nämnda översättningarna. Utöver missförståelser så undersöker vi också olika svårigheter elever kan ha, och med svårighet syftar vi huvudsakligen på svårigheter att förstå. Distinktionen mellan en svårighet och en missförståelse blir således att en svårighet beskriver när den lärande inte ännu har konstruerat en förståelse, medan en missförståelse innebär att den lärande har konstruerat en felaktig eller begränsande förståelse genom att exempelvis tillskriva ett begrepp egenskaper det inte har. På grund av att svårigheter och missförståelse ofta nämns tillsammans i denna uppsats finns även behovet av en term som betecknar båda dessa, och för detta ändamål väljer vi termen ”hinder”. Anledningen till att vi har valt just termen hinder ligger i dess allmänna innebörd. Ett hinder blockerar något, och i vårt fall blockerar hindret fortsatt förståelseutveckling. Detta är också en beskrivning som väl stämmer in på hur vi ser på svårigheter och missförståelser i denna uppsats.

Vid utformningen av vår modell krävdes dessutom någon form av nivåindelning av förståelse för funktionsbegreppet. Detta behövs för att kunna avgöra vilka hinder som är av högst prioritet att övervinna för att den lärandes förståelse ska kunna utvecklas. I litteraturgenomgången har vi därför presenterat studier som belyser olika sätt att kvantifiera och dessa diskuterar vi senare i metodavsnittet i samband med att vi väljer ut ett sätt som passar för vår modell.

Vår tes är att det går att placera in varje individs enskilda hinder på en specifik förståelsenivå. Detta ger förutsättningen för att arbeta fram en modell som utifrån den lärandes färdigheter kan visa vilken förståelsenivå av funktionsbegreppet denne ligger på samt tillhandahålla information om de hinder som blockerar den lärande från att utvecklas till nästa nivå. Denna modell väljer vi att kalla FH-modellen, modell för förståelsehinder.

Under sökningen av litteratur blev det uppenbart att förståelsen faktiskt kunde variera med vilken representation av funktionsbegreppet som behandlades. Detta innebar att vi även behövde en mer nyanserad bild av hur man kan förstå ett begrepp vilket har gjort att FH-modellen dessutom innehåller flertalet aspekter inom vilka man kan nå olika förståelsenivåer, på vilka det finns hinder som blockerar den lärande från att nå de olika nivåerna.

2 Syfte och frågeställningar

Syfte:
Detta arbete syftar till att utveckla en modell för att inom funktionsbegreppet beskriva vilken förståelsenivå som ett specifikt hinder blockerar den lärande från att utveckla. Modellens syfte är att kunna användas vid formativ bedömning.

Frågeställningar:
- Hur har nivåindelning av förståelse för funktionsbegreppet gjorts i tidigare forskning?
- Vilka hinder för förståelse av funktionsbegreppet är belagda i tidigare forskning?
- Hur kan en modell som beskriver hur specifika hinder för förståelse av funktionsbegreppet är relaterade till specifika förståelsenivåer för funktionsbegreppet se ut?

3 Teoretisk anknytning

3.1 Formativ bedömning

3.1.1 Vad är formativ bedömning

I framför allt senare delen av vår lärarutbildning har formativ bedömning varit flitigt diskuterat. Det finns flera olika definitioner av formativ bedömning (jfr Wiliam, 2011:37-45) och i detta avsnitt kommer några av dessa nämnas för att ge en övergripande bild av begreppet. Följande definition har tidigare givits av Paul Black och Dylan Wiliam.

> ”as encompassing all those activities undertaken by teachers, and/or by their students, which provide information to be used as feedback to modify the teaching and learning activities in which they are engaged”
>
> (Black & Wiliam 1998, i Wiliam 2011:37)

Liksom ovanstående definition har många andra definitioner karaktär av en process som sker löpande längs med undervisning och lärande. Man kan även se formativ bedömning som ett verktyg vilket Stuart Kahl (2005, i Wiliam, 2011:38) visar i sin definition där han beskriver formativ bedömning som “a tool that teachers use to measure student grasp of specific topics and skills they are teaching. It's a 'mid-stream' tool to identify specific student misconceptions and mistakes while the material is being taught”. Wiliam menar dock att denna syn är inkompatibel med vad formativ bedömning verkligen är. Det är ingen sak, det är en process. Vidare menar han att det är vanligt att termen formativ bedömning ger denna och andra typer av förvirring då ordet ”formativ” här inte syftar på bedömningen i sig utan snarare på hur informationen som erhålls från bedömningen, avstämningen eller utvärderingen skall användas. Den skall ge feedback till lärare och elever som vidare får forma fortsatt progress utifrån denna. “Formativ” är alltså inte en egenskap hos själva bedömningen utan mer den funktion som informationen från bedömningen får (Wiliam 2011:38-43). Detta infattas på ett begripligt och exakt sätt i Wiliams senaste definition av formativ bedömning som återges nedan.

> “An assessment functions formatively to the extent that evidence about student achievement is elicited, interpreted, and used by teachers, learners , or their peers to make decisions about the next steps in instruction that are likely to be better, or better founded, than the decisions they would have made in the absence of that evidence.”
> (Wiliam 2011:43).

Informationen som utvinns från bedömningen skall alltså ge underlag för att fatta välgrundade beslut om fortsatt progress. Detta implicerar att bedömningstillfället måste utformas så att det ger den information som krävs för att fatta beslutet. Därmed måste man redan innan man konstruerar en modell för bedömning veta vilket övervägande man har att göra med och vilken information som krävs för att fatta beslutet. (Wiliam 2011:45)

Fem nyckelmoment gällande formativ bedömning togs fram av Leahy, Lyon, Thompson & Wiliam (2005) och återges i (Wiliam 2011:46). Dessa är följande:

1. Klargöra, dela och förstå lärandets intentioner och vad som krävs för att lyckas
2. Upprätta effektiva klassrumssamtal, aktiviteter och uppgifter som framkallar indicier på var den lärande befinner sig kunskapsmässigt
3. Föra lärandet framåt genom att tillhandahålla feedback
4. Uppmuntra de lärande att fungera som instruerande resurser för varandra
5. Aktivera de lärande att äga sitt eget lärande.

För mer utförlig beskrivning av innebörden i dessa fem nycklar hänvisas till Wiliam (2011:46)

I detta arbete tar vi fasta på att formativ bedömning kräver att bedömningstillfällen utformas så att de utvinner sådan information som krävs för att fatta beslut om fortsatt progress, och FH-modellen utformas i just detta syfte. Detta innebär att en lärare kan använda FH-modellen som en del av nyckelmoment två (se ovan). Detta gör att vi landar i en syn på formativ bedömning som innebär att bedömning är formativ om informationen som utvinns från denna används till att forma fortsatt undervisning i syfte att hjälpa den lärande att utvecklas

3.1.2 Formativ bedömning, hinder och matematisk förståelsesutveckling

Som ovan nämnts menar Wiliam (2011:38) att Kahls definition av formativ bedömning som ett verktyg (objekt) att bedöma elevers missförståelser och misstag med, inte är förenlig med formativ bedömning om utgångspunkten är att formativ bedömning är att betrakta som en process och inte ett objekt. Intressant är dock hur Kahl i sin definition belyser missförståelsers vikt i det formativa arbetet. Wiliam (2011:104) anslår också vikten av att som lärare i sin undervisning hellre förutsätta att eleverna inte förstår något de faktiskt förstår än att förutsätta att de förstår något de egentligen inte förstår. Detta innebär att det torde vara bättre att utgå från att en indikation av ett hinder faktiskt korrekt avslöjar en elevs hinder än att så inte är fallet.

Elevers svårigheter och missförståelser synliggörs enligt Li och Li (2008:4), i form av misstag när de löser uppgifter. Vissa misstag beror på att elever inte är tillräckligt fokuserade eller har ett för belastat arbetsminne medan andra misstag kan visa på att eleven äger, för uppgiftstypen, ”felaktiga procedurer” (”buggy algorithms”). Författarna menar dock att en del misstag dessutom kan ha sitt ursprung i en missförståelse inom området. Ett sätt att betrakta eller definiera missförståelser är enligt författarna att de bottnar i elevernas personliga begreppsbilder. Denna begreppsbild kan omfatta egenskaper som begreppet ontologiskt sett inte har. Ett exempel på detta skulle kunna vara att en del elever betraktar alla ekvationer som funktioner (Chang 2002).

Betydelsen av ta reda på hur elevers begreppsbild avviker från definitionen av begreppet uttrycks av Brown och Burton (1978:155-156):

> ”one of the greatest talents of teachers is their ability to synthesize an accurate 'picture' or model, of a student's misconceptions from the meager evidence inherent in his errors.”
>
> (Brown & Burton 1978, i Li & Li 2008:6)

Citatet antyder hur viktigt det är när läraren skall ta beslut rörande fortsatt undervisning att denne har kännedom om huruvida eleven missförstår begreppet eller ej. Wiliam tillhandahåller strategier för att utvinna sådan information från elevers lösningar. En sådan strategi är flervalsuppgifter, konstruerade på ett sådant sätt att det är högst osannolikt att eleven svarar rätt utan att denne förstått (Wiliam, 2011:93-104). När denna strategin används är det viktigt att man utifrån elevernas svar kan avgöra, dels om eleven faktiskt har förstått, dels vilken missförståelse som ligger bakom oförmågan att lösa uppgiften. Detta kan göras genom att låta de felaktiga alternativen representera välkända ”naiva” sätt att förstå begreppet (Wiliam 2011:102).

3.2 Funktionsbegreppet

3.2.1 Definition och historia

Vad är en funktion? - Svaret på denna fråga är oftast beroende av vem som ställer den och när den ställs. När funktionsbegreppet börjar bearbetas i grundskolan är det vanligt att man inte ens använder informella definitioner av begreppet, och än mindre formella. Huvudsakligen använder man sig av en representation av en funktion tillsammans med exempel för att ge eleven en känsla av vad en funktion är. Ett av de första sätten som funktionsbegreppet beskrivs på är som en så kallad ”funktionsmaskin”. Det är en maskin med ett dolt innanmäte i vilken ett tal kan föras in och som resultat då ger ett nytt tal vars värde beror på talet som förts in. Fokus i tillhörande övningar handlar för det mesta antingen om att avslöja vad maskinen gör med talet, eller att utifrån en viss maskins algoritm räkna ut vilka tal den kommer producera ifall vissa tal matas in.

Under gymnasietiden börjar man använda lite mer tydliga definitioner. En sådan definition kan lyda ”En regel som till varje tillåtet x-värde ger exakt ett y-värde kallas funktion. Vi säger då att y är en funktion av x.” (Häggström 2005:83). Även här kan den tidigare nämnda funktionsmaskinen återkomma som illustration. I undervisningen både i högstadiet och på gymnasiet läggs mycket fokus på funktioner som process, det vill säga att från ett visst värde på indatan så får man fram ett visst värde i utdatan. Även inom analyskurserna på universitetsnivå kan man återfinna denna syn på funktioner, men bara när man använder funktioner som operationer. Vanligtvis ser man på den här utbildningsnivån funktioner mer strukturellt, det vill säga att istället för att en funktion är en metod för att omvandla A till B så kan man säga att en funktion är en beskrivning på hur A och B är relaterade. Strikt definierat kan det formuleras såhär.

> ”Om varje element i en mängd A entydigt tillordnas ett element i en mängd B säger man att man har en funktion från A till B. Om funktionen betecknas f , betecknas det element i B som är tillordnat x i A, med f (x). [. . .] f (a) kallas funktionsvärdet för x = a. A kallas definitionsmängd och kan betecknas Df . Mängden av funktionsvärden f (x) kallas värdemängd och kan betecknas Vf .”
>
> (Skolöverstyrelsen 1979, i Häggström 2005:84)

Detta är en av många liknande definitioner av funktionsbegreppet som används av matematiker. Men definitionen har varken varit så explicit formulerad eller så strukturell hela tiden sedan funktionsbegreppet dök upp i historien.

Det tidigaste spåret av funktionsbegreppet återfinns redan i den sumeriska kulturen där tabeller upprättades för att kartlägga olika samband. Vidare har man hittat spår i antikens Grekland som visar på att man har använt sig av beskrivningar för att räkna ut vissa värden utifrån vissa indata. Grafen dök under 1300-talet upp för första gången och användes då för att beskriva sambandet mellan hastighet och tid. Först under 1500-talet utvecklades variabelbegreppet till att kunna användas för att beteckna grupper av tal, och därigenom blev det möjligt att formulera generella lösningar till problem istället för att enbart räkna ut lösningen i specifika fall eller beskriva en algoritm för att räkna ut lösningen. Ungefär 100 år senare har ett koordinatsystem etablerats och grafen kopplas samman med algebra då ekvationer börjar användas för att representera kurvor. Man har nu kommit så långt att de tre idag vanliga representationerna av en funktion, det vill säga formel, graf och tabell, har etablerats. Vidare har även metoder för omvandlingar mellan dem utformats. Först på 1800-talen går det att återfinna en definition som börjar likna de moderna definitionerna av funktionsbegreppet.

> "if a variable y is so related to a variable x that whatever a numerical value is assigned to x there is a rule according to which a unique value of y is determined, then y is said to be a function of the independent variable x".
>
> (Sierpinska 1992, i Häggström 2005:89)

Trots att denna definition till stor del liknar de moderna så finns det ännu vissa aspekter som skiljer sig. En av dessa aspekter är att funktionen bara omfattar numeriska värden. En annan är att ingen tydlig distinktion görs mellan funktionen och den beroende variabeln. Först 1939 formuleras en definition av Nikolas Bourbaki som helt kan kallas en modern definition av funktionsbegreppet.

> Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if, for all $x \in E$ there exists a unique $y \in F$ which is in the given relation with x.
>
> We give the name of function to the operation which in this way associates with every element $x \in E$ the element $y \in F$ which is in the given relation with x; y is said to be the value of the function at the element x, and the function is said to be determined by the given functional relation. Two equivalent functional relations determine the same function.
>
> (Kleiner 1989:18)

3.2.2 Förkunskapskrav

Precis som med andra begrepp och områden inom matematiken så bygger förståelsen av funktionsbegreppet på en hel hord av förkunskapskrav. Många av dem är dock så grundläggande att de normalt inte nämns. Tre kategorier med förkunskaper som är viktiga för algebraförståelsen är enligt Persson (2005:42-43) *aritmetiska färdigheter*, *matematisk abstraktionsnivå* och *logiskt tänkande*. Av dessa skulle a*ritmetiska färdigheter* gå att förklara som generella och så grundläggande att dåliga kunskaper redan bör ha uppmärksammats i andra sammanhang. De förkunskapskrav som är värda att titta närmare på är snarare sådana som kan orsaka svårigheter i förståelsen av begreppet men som inte alltid avslöjar sig som ansvariga. Anledningen till att dessa är speciellt viktiga är att trots att eleven får begreppet förklarat för sig så kan eleven fastna i utvecklingen av sin förståelse av ett begrepp om ett av förkunskapskraven är missförstått. Persson (2005:48) konstaterar gällande detta att ”Om eleven har en allvarlig missuppfattning, kan ett fortsatt övande av färdigheten vara meningslös eller till och med skadlig. Man befäster då snarare de felaktiga föreställningarna”. Det begrepp som mest troligt kan orsaka problem av denna typ är variabelbegreppet, som är en viktig faktor i hur man förstår funktioner. Detta styrks av Warrens (1998:661) konstaterande att ”Critical to the algebraic domain is the variable construct” och även av Bergsten (1997:106) då han konstaterar att "Variabelbegreppet, som är en grund för funktionsbegreppet [...] kräver omsorgsfull behandling i undervisningen". Ett intressant exempel är en av de missförståelser Warren (1998:662) presenterar rörande variabler och vad den skulle kunna orsaka ifall den inte är upptäckt och avhjälpt innan funktionsbegreppet börjar bearbetas. Denna missförståelse går ut på att bokstaven som variabeln betecknas med tolkas ha värdet av bokstavens plats i alfabetet, det vill säga att en variabel som betecknas med x alltid innehar värdet 23 (eller 24 ifall man räknar med ”w”). Om eleven då får funktionen $f(x) = 3x + 2$ så skulle den tolkas som konstant, det vill säga $f(x) = (3*23 +2) = 71$. Om en elev med denna missförståelse stöter på uppgiften att beräkna nollpunkten för funktionen $f(x) = 2x -4$ så skulle uppgiften utgöra en paradox, den skulle tolkas som $42 = 0$. Utöver detta är det inte bara missförståelse av förkunskapsbegrepp som begränsar förståelsen, även en enbart operationell förståelse kan i stor utsträckning orsaka begränsningar. Vid en närmare studie av elevers tolkningar av variabelbegreppet är Küchemans (1981) forskning central. Hans studie visar på 6 kategorier av variabelsyn av olika kvalitet som återfinns hos barn.

- *Letter evaluated*
  - Bokstaven ges ett värde från mängden av möjliga värden. I många fall innebär det att olika värden på variabeln provas tills ett som "fungerar" hittas.
- *Letter not used*
  - Bokstaven undviks, vilket fungerar på uppgifter som till exempel "Om a + b = 43, då a + b + 2 = ..." då helt enkelt operationen "+2" utförs på summan i den första utsagan.
- *Letter used as an object*
  - Bokstaven ses som ett okjekt. "2a + 5b + a" kan då ses som 2 äpplen, 5 bananer och ett äpple till, det vill säga 3 äpplen och 5 bananer totalt.
- *Letter used as a specific unknown*
  - Bokstaven tolkas som en specifikt men okänt tal som går att operera med. Bokstaven tolkas alltså bara kunna ha ett värde, men vilket värde detta är återstår att upptäcka.
- *Letter used as a generalised number*
  - Bokstaven anses kunna anta olika värden, men den symboliserar bara ett specifikt värde åt gången.
- *Letter used as a variable*
  - Bokstaven tolkas som representant för en grupp av tal.Variabeln är alltså en symbol för alla värden i mängden som definierar den.

Precis som med den tidigare nämnda missförståelsen är det rimligt att anta att oavsett vilken kategori en elevs variabelsyn passar in under så kommer detta ge konsekvenser för synen på funktionsbegreppet när detta börjar bearbetas. Till exempel kan konsekvensen av att ha en variabeluppfattning av Küchemans fjärde kategori bli att funktionsbegreppet alltid tolkas operationellt, det vill säga att funktionen med beteckningen $f(x) = 3x + 2$ är till för att avslöja värdet på x, vilket då rimligtvis utvinns från nollstället, det vill säga när $3x + 2 = 0$. Först när variabelförståelsen passar in under den sista kategorin kan man tala om en strukturell uppfattning, vilket enligt Sfard (1991) är viktigt för att kunna bygga vidare på förståelsen och använda begreppet i uppbyggnaden av andra begrepp. Sfard (1991:30-31) nämner vidare att ”According to the model, reification of a given process occurs simultaneously with the interiorization of higher-level processes.”. Enligt Sfards modell är fasen ”*reification*” en kort del i begreppsbildningsprocessen då begreppet objektifieras, det vill säga när en strukturell syn uppstår. Fasen ”*interiorization*” är när den lärande bekantar sig med processerna som senare ger upphov till ett begrepp. Detta är mycket intressant för relationen mellan variabelbegreppet och funktionsbegreppet, för om en elev har en tillräckligt avancerad uppfattning av variabelbegreppet innebär det att denne har möjlighet att ”kliva över tröskeln” till en strukturell uppfattning om variabeln i samma stund som denne börjar arbeta med till exempel den grafiska representationen av funktionsbegreppet. Sfards nivåer förklaras mer utförligt under kapitlet nivåer av förståelse.

3.2.3 Aspekter av funktionsbegreppet

Funktionsbegreppet kan studeras ur många olika perspektiv. Några av de dessa perspektiv tas i de fyra vanligaste och mest klassiska representationsformerna som nämns av Janvier (1984, i Bergsten 1997:107). Dessa är tabell, graf, formel och situation/verbal beskrivning. Utöver dessa presenterar DeMarois och Tall (2007:3-4) ytterligare följande tre, skriftlig definition, muntlig definition samt beteckning. Dessutom gör de en distinktion mellan Janviers situation och verbal beskrivning. Vilket gör att DeMarois och Tall totalt presenterar åtta aspekter av funktionsbegreppet.

3.2.4 Nivåer av förståelse

3.2.4.1 Operationellt och strukturellt

Matematik kan beskrivas som ett språk med siffror, bokstäver och andra symboler som förklarar hur man räknar ut olika saker, det vill säga att matematiken handlar om algoritmer och processer. En funktion är enligt denna uppfattning alltså inte mer än en beskrivning för hur du från ett visst värde i ett fall kan räkna ut vad ett annat värde är i samma fall. Detta är vad Sfard (1991:3) kallar en operationell förståelse. Hur som helst är detta ett oerhört förenklat sätt att se på matematiken och det återger knappast alla aspekter av matematiken. Matematiska begrepp, framför allt de lite mer avancerade, tenderar att vara ytterst abstrakta. Detta orsakar att det inte är lätt att förstå ett matematisk begrepp när det börjar bearbetas i syfte att läras. Generellt tillämpas då representationer, vilket alltså är ett samlingsnamn för illustrationer, bilder, liknelser, förenklingar och andra sätt att visa vissa aspekter av det abstrakta begreppet. I fallet med funktionsbegreppet är de mest vanligt förekommande representationerna tabeller, formler och grafer, men man kan även använda till exempel en reell situation för att förklara en funktion. Anledningen till behovet av representationer är enligt Sfard (1991:2) att vi inte kan använda våra sinnen för att uppfatta matematik. Genom dessa olika representationer som används visar man på olika egenskaper gällande matematiska begrepp, och även ifall representationerna ofta handlar om att man ska göra någon form av operation skapar de tillsammans en abstrakt bild av det begreppet de används för att beskriva. Denna begreppsbild tenderar ju mer nyanserad den blir att mer och mer visa begreppet som ett objekt med olika egenskaper istället för att visa det som en eller flera olika metoder. Denna typ av förståelse kallas strukturell och tenderar att likna en definition snarare än en metod.

Anna Sfard argumenterar för vikten av att uppnå en mer strukturell uppfattning av varje begrepp inom matematiken och detta gäller inte enbart funktionsbegreppet. Det stora argumentet hon lyfter fram är att det är nödvändigt för att konstruera mer komplexa begrepp som baseras på ett eller flera tidigare begrepp. Om inte begrepp objektifieras blir det omöjligt eller i alla fall mycket svårt att kunna se hur allt hänger ihop. Sfard (1991:27) konstaterar ”we can use our system of abstract objects just like a person looking for information uses a catalogue; or anybody trying to get to a certain street consults a map before actually going there”. Detta är en tydlig parallell till problemlösning. Om en individ inte har en strukturell ”karta” över sina matematiska begrepp och algoritmer är det omöjligt eller i alla fall mycket svårt för denne att förstå hur ett problem, där det krävs att flera algoritmer och metoder används, ska lösas. Detta går att exemplifiera med en liknelse: om en person kan hitta vägen från punkt A till punkt B när denne väl befinner sig på punkt A och börjar gå, innebär detta inte att personen varken före eller efter kan konstatera att denne kan vägen mellan punkterna. Om denne person också har en liknande förmåga gällande vägen från punkt B till punkt C innebär detta inte att personen nödvändigtvis kan ta sig från punkt A till punkt C. För att detta ska gå krävs det att vägen mellan punkt A och punkt B har objektifierats, och likaså vägen mellan punkt B och punkt C. Först när detta har skett kan de två sträckorna ses som delsträckor och punkten B användas som knutpunkt. På liknande sätt krävs det att vägen mellan punkt A till punkt C objektifieras för att den ska kunna användas som delsträcka i en längre sträcka. Om inte denna objektsyn finns på sträckan mellan B och C kommer det inte framstå som ett steg i rätt riktning att hitta vägen till B, utan personen kommer istället försöka gå raka vägen från punkt A till punkt C, vilket kan vara för svårt för att uppnå.

Avsikten med detta stycke var att förtydliga vad som menas med operationell respektive strukturell förståelse och att förklara varför det är så viktigt att förståelsen av ett begrepp inte stannar vid att kunna utföra algoritmen som begreppet beskriver. De kommande styckena fokuserar mer på att klarlägga och nivåindela förståelseutvecklingen från första kontakten med de algoritmer ett begrepp innehåller till att en strukturell förståelse har uppnåtts. De delarna utgår ifrån flera olika varianter av nivåindelningar av begreppsförståelse.

3.2.4.2 Sfards tre stadier

I den historiska utvecklingen av olika matematikbegrepp kan man enligt Sfard (1991:13-14) tydligt se tre faser som visar på tre olika stadier i förståelse. Dessa sträcker sig från den första kontakten med en ny metod som tillämpas på kända objekt till att en strukturell uppfattning är upprättad. Dessa stadier återfinns dessutom enligt Sfard (1991:18) i varje individs förståelseutveckling och hon kallar dem ”interiorization, condensation and reification”.

> ”At the stage of interiorization a learner gets acquainted with the processes which will eventually give rise to a new concept”
>
> (Sfard 1991:18)

Det första stadiet tar alltså vid när den lärande för första gången laborerar med en ny metod eller operation. Detta sker då med objekt av lägre komplexitet som redan är tydligt strukturellt etablerade. Allteftersom blir den lärande mer bekväm med de processer som används. Vad gäller funktionsbegreppet inträffar detta när den lärande förstår vad en variabel är och denne också börjar lära sig använda en formel för att utifrån en specifik variabel räkna ut värden på en annan specifik variabel, det vill säga att med hjälp av ett bestämt värde på den oberoende variabeln räkna ut värdet på den beroende variabeln.

> ”The phase of condensation is a period of "squeezing" lengthy sequences of operations into more manageable units”
>
> (Sfard 1991:19)

Under detta stadium börjar den lärande kunna referera till en större process utan att behöva förklara varje litet steg för sig. Det sker genom att diverse olika algoritmer samlas ihop under ett övergripande sammanhang, en begreppsbild börjar framträda som beskriver hur de olika algoritmerna och operationerna hänger ihop. Den lärande har också börjat utveckla en förmåga att växla och översätta mellan olika representationer av begreppet. Under detta stadium för funktionsbegreppet börjar den lärande att kunna se lite mer av helheten istället för att titta på ett specifikt värde på den beroende variabeln åt gången. Den lärande börjar också till exempel utveckla förmågan att rita en graf utifrån en tabell och även skapa en formel utifrån dessa.

> “The stage of reification is the point where an interiorization of higher-level concepts (those which originate in processes performed on the object in question) begins.”

(Sfard 1991:20)

Det tredje stadiet sammanfaller till viss del med det första stadiet i den lärandes utveckling av ett nytt begrepp som helt eller delvis baseras på det föregående begreppet. Anledningen till att det tredje stadiet är uttalat som ett eget stadium är att så mycket händer med synen på begreppet. Tidsmässigt så befinner sig inte en individ i detta stadie speciellt länge, utan det är mer som en tröskel som klivs över. Det skulle passa väldigt bra att förklara med talesättet att ”polletten trillar ner”. Innan har den lärande länge varit i det tidigare stadiet då denne har en diffus begreppsbild där alla metoders och egenskapers relation till varandra förvisso är klara, men begreppet ännu inte är helt objektifierat och kan därför inte användas som objekt i andra uträkningar. Efter att det tredje stadiet är genomgånget har den lärande en fullständigt strukturell syn på begreppet. Detta kan ske utan att man i den meningen har en fullständig insikt i begreppets alla egenskaper. För funktionsbegreppet kan detta skede kännetecknas av till exempel att den lärande inser att ett eller flera element i definitionsmängden av en funktion kan utgöras av en funktion. Det vill säga att en funktion är ett objekt som man kan genomföra andra operationer på eller med.

Sfard har valt att presentera utvecklingsstegen som stadier en elev befinner sig inom under utvecklingen. Dessa kan för att underlätta jämförelse med vissa av de andra nivåindelningarna av begreppsförståelse omvandlas till fyra nivåer en elev har uppnått. Den första nivån är där den lärande börjar, den andra nivån uppnås när stadiet ”interiorization” är genomgånget, den tredje nivån när stadiet ”condensation” är avklarat och den fjärde nivån när stadiet ”reification” är passerat.

3.2.4.3 APOS-teorins fyra nivåer

APOS-teorin grundar sig på Jean Piagets tankar kring hur tillägnelsen av matematiska begrepp går till. Det innebär att det för varje matematiskt begrepp finns gynnsamma tankestrukturer att upprätta som gör att nya aspekter av begreppet lätt kan relateras, assilmileras till den befintliga strukturen (schemat). Elever med redan gynsamma scheman kan enligt Dubinsky och Moses (2011) lätt tillgodogöra sig ett begrepp, även på mer avancerade nivåer, medan om man har ett felkonstruerat eller missgynnsamt schema så kan det var svårt eller till och med omöjligt att tillägna sig begreppet utan att bygga en ny tankestruktur. Med detta i åtanke syftar APOS-teorin till att försöka besvara frågan om vilka mentala strukturer som behövs för att tillgodogöra sig ett visst matematiskt begrepp och vad man som lärare kan göra för att hjälpa eleven att erövra dessa. Enligt APOS-teorin är de mentala strukturerna ”Actions”, ”Processes”, ”Objects” och ”Schemas” och de mentala mekanismerna för att bygga dessa kallas för ”interiorization” och ”encapsulation” (Dubinsky 2011:401-402). De olika mentala strukturerna definieras som:

Action: en transformation av ett fysiskt eller mentalt föremål som måste göras explicit (exempelvis med penna och papper), ett steg i taget. När man gjort transformationen många gånger kan den bli ”interiorized”, dvs en del av våra mentala strukturer. När transformationen kan göras i huvudet har den övergått i ”Process”.

Process: en transformation av samma föremål som för ”Action” men transformationen sker helt i huvudet vilket innebär att man kan föreställa sig att transformationen sker. Givet att den lärande förstår en process så kan denne börja föreställa sig att köra den baklänges och blir då ägare till ytterligare en process och sedan kan man tänka sig att den lärande gör processen två gånger i följd varför denne måste använda resultatet från den första processen i den andra processen. När man mentalt har undersökt processen, eller i detta fall processerna, som man upptäckt genom att använda funktionen på flera olika sätt kan den lärande snart se dem som en helhet och vi säger då att pocessen/processerna är ”encapsulated” (Tall et al, 2000:232). De/den blir ett objekt.

Object: en nivå av begreppsförståelsen som innebär att man kan använda begreppet som mentalt föremål att transformera i antingen explicita eller implicita processer. När det gäller matematisk problemlösning kan det dock krävas att man kapslar upp objektet till en process ibland så att man ibland kan se det som en process och ibland som ett ”Object”. Ett område inom matematiken, exempelvis algebra, innefattar naturligtvis många, processer och ”Object” vilka tillsammans bygger upp ett ”Schema” (Dubinsky, 2011:403).

Schema: en mental struktur av relationer mellan objekt och tillhörande processer. Ett ”Schema” kan även det inkapslas och användas som ett objekt i en ”högre ordnings schema”. När detta sker säger man att schemat har blivit ”thematized” till ett ”Object” (Asiala et al, 2004:12).

3.2.4.4 TRM-läroplanens fem nivåer

Under slutet av 80-talet utformade Baruch Schwarz, Tommy Dreyfus och Maxim Bruckheimer en undervisningplan för hur datorer skulle integreras i undervisningen rörande funktionsbegreppet. Denna plan betonade även att funktionsbegreppet bör presenteras genom att de tre vanliga representationerna av en funktion används (Schwarz et al 1989:3).

Trots att fokus i deras undervisningsplan inte är helt relevant i detta sammanhang innehåller deras artikel en mycket intressant nivåindelning rörande förståelse av funktionsbegreppet. Det är dock viktigt att poängtera att denna nivåindelning inte är upprättad för att bedöma elever, utan för att ge förslag på i vilken ordning de olika områdena inom funktionsbegreppet ska bearbetas för att främja förståelseutveckling.

1. *Intuitive understanding of the concept of function.*
   - Under denna nivå betonas tabell och pil-representationerna. Även vad maximi- och minimivärden samt ökning och minskning är diskuteras. Verklighetsbaserade situationer observeras och beskrivs med funktionsbegreppet för att göra det meningsfullt för eleverna.
2. *Graphical representation of a function.*
   - Fokus ligger på hur en graf ska läsas av och upprättas. Metoder för omvandlingar mellan grafisk representation, tabell och verkliga situationer bearbetas. Svagheter hos den grafiska representationsformen diskuteras.
3. *Algebraic representation of a function.*
   - Bearbetning av hur funktioner betecknas i algebraisk form sker. Distinktion mellan diskreta och kontinuerliga funktioner tas upp. Även algebraiska metoder för att beräkna $f(x)$ när x är givet lärs.
4. *Transfer between all three representations.*
   - Omvandlingar mellan alla tre representationer fokuseras. Tydligare kategorisering av olika typer av funktioner sker och mer avancerade typer av funktioner börjar bearbetas.
5. *Problem solving encouraging transfer between algebraic, tabular and graphical representation.*
   - Funktionsbegreppet börjar användas för att lösa verklighetsbaserade problem, bland annat gällande maximi- och minimivärden.

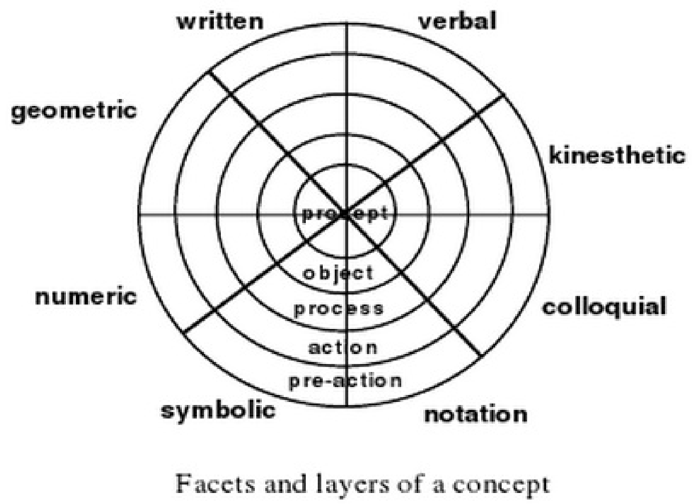
(Schwarz et al, 1989: 3)

Även om dessa 5 steg syftar på undervisningsmoment snarare än på förståelsekvalitet visar de på en tydlig hierarkisk ordning där en senare nivå inte går att bearbeta förrän den tidigare är avklarad och förstådd. Detta i sin tur medför också att modellen går att använda som en slags skala för kunskapsnivån. Det bör dock uppmärksammas att dessa nivåer till skillnad från flera av de andra nivåindelningar, beskrivs väldigt operationellt. I många av de andra fallen utgörs förståelsekvalitetsskalan av nivåer från en mycket operationell syn till en mer strukturell. Samtidigt visar jämförelser med de andra nivåindelningarna att för att en individ ska uppnå vissa förmågor, däribland problemlösning, krävs en mer strukturell uppfattning av begreppet. Detta skulle placera den högsta kategorin enligt denna skala på en tydligt strukturell nivå.

3.2.4.5 DeMarois och Talls fem nivåer

Den lärandes förståelse av funktionsbegreppet utgörs inte bara av begreppet i sig. Förståelsen av ett begrepp består snarare av alla sätt att tänka, prata och skriva om det, samt alla uttryck som begreppet kan anta. Därför upprättar DeMarois och Tall (1996:2) åtta aspekter som de anser täcker in begreppsbilden som utgör elevernas förståelse av begreppet. Dessa åtta aspekter är skriftlig, muntlig, kinestetisk, vardaglig, beteckning, symbolisk, numerisk och geometrisk. Vissa av dessa kategorier har underkategorier eftersom det exempelvis finns flera geometriska uttryck för funktioner. Två av dem är funktionsgrafen och en bild som visar parningen mellan element i värdemängden och funktionsmängden (DeMarois & Tall, 1996:3).

Förutom denna uppdelning i aspekter så gör DeMarois & Tall (1996:3) en nyansering av förståelsenivån genom att utifrån tidigare forskning av Dubinsky och Harel (1992), Breidenbach et al (1992) och Sfard (1992). Nivåerna som ges är pre-action, action, process, object och procept. Nivåerna ”action”, ”process” och ”object” myntas av Dubinsky och Harel (1992). På samma sätt diskuterar Sfard (1992) dessa nivåer fast med egna benämningar vilket tidigare beskrivits. Begreppet ”procept*”* beskrevs först av Gray och Tall (1994:6) och det innefattar förmågan att röra sig mellan process- och objektssyn beroende på problemsituationen (DeMarois & Tall, 1996:3). ”Procept”-begreppet omfattar såväl själva processen som produkten av denna process och samma symbol används för båda dessa (Gray och Tall, 1994:6). ”A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object” (Gray & Tall, 1994:6). Funktionsbegreppet är ett sådant ”procept” då alla olika typer av funktioner som finns också utgör mindre komplexa ”procepts”. Ett enkelt exempel på ett ”procept” är uttrycket 3x+2 som en lärande på action- eller processnivå tenderar att enbart se som en process som inte kan utföras om inte x är givet, trots att uttrycket också kan ses som en enhet som går att manipulera med (Tall et al, 2000:226). Därmed förstås att om den lärande når en sådan förståelse att symbolen för begreppet triggar såväl begreppets ”process” som ”object” har den lärande uppnått en ”procept-nivå”av förståelse eftersom denne då lätt kan skifta mellan dessa beroende på problemsituation (DeMarois & Tall, 1996:3).



Figur 1 – Illustration över hur förståelse av olika aspekter gemensamt utgör begreppsförståelsen av funktionsbegreppet som helhet. Förståelsen inom varje aspekt sträcker sig från preaction i den yttre zonen till procept i den innersta zonen (DeMarois & Tall, 1996:3).

I artikeln beskrivs också hur författarna genom uppgifter och sedan intervju kring uppgifterna utvinner bedömningsmaterial för att kunna bedöma elevernas nivå av förståelse inom de olika aspekterna. I bedömningsmallen utgår man från att startnivån är pre-action. Vad som framgick av bedömningen var hur elever kan ha nått till olika förståelsenivåer inom olika aspekter (jfr DeMarois & Tall, 1996:7), vilket är värdefull information för lärare.

3.2.4.6 Jämförelse av teorier för nivåindelning

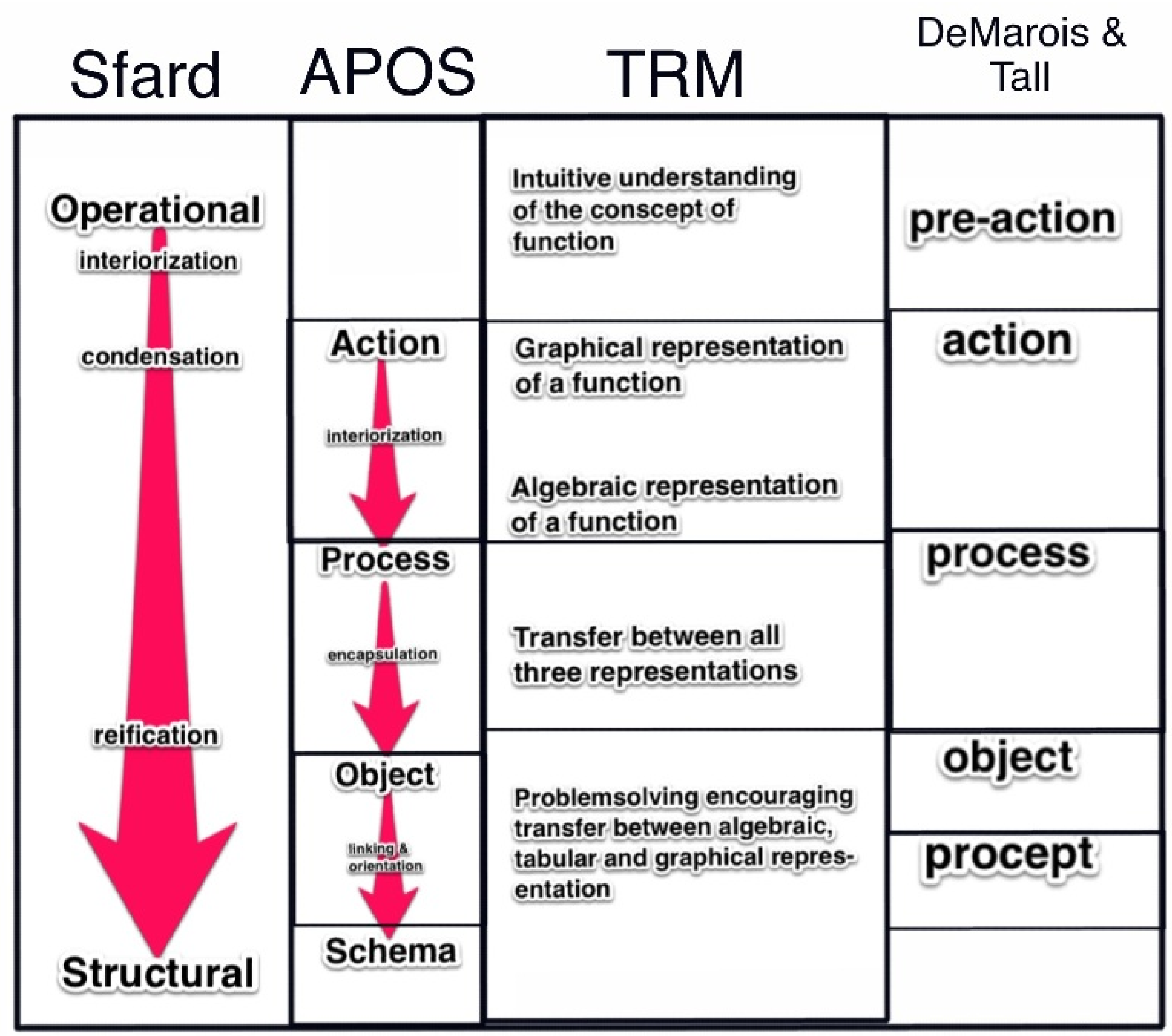
För att avgöra vilken nivåindelning som är lämplig när man vill avgöra nivån på elevernas förståelse av funktionsbegreppet, gjorde vi en jämförelse mellan olika sätt att göra denna indelning. Ovan har vi nämnt nivåindelningar av bland annat Dubinsky, Sfard och Tall samt den kronologiska ordningen från TRMs kursplan som utformats av flera vida citerade forskare varav två av dem är Dreyfus och Schwarz. Eftersom TRMs kursplan är väldigt konkret och mer anger vad som skall göras innehåller den inte uttalade nivåer men vi har valt att försöka passa in dess aktiviteter i vår nivåjämförelse eftersom vi anser att det ger både lärare och den lärande insyn i vilka aktiviteter som kan vara nyttiga att ägna sig åt för att nå en djupare förståelse.

Sfard exemplifierar den lärandes utveckling av matematiska begrepp med funktions-begreppet och beskriver hur den lärande för varje matematiskt begrepp de skall tillägna sig går igenom faserna ”interiorization” och ”condensation” för att slutligen nå sitt klimax i ”reification”. I APOS-teorin som främst utvecklats av Dubinsky och Cottrill (Tall et al, 2000:225) beskrivs funktionsbegreppets utvecklingsprocess hos den lärande på ungefär samma sätt som i Sfards teori. Skillnaden är egentligen att APOS erbjuder stadierna som ligger mellan Sfards faser. Dessutom erbjuder teorin aktiviteter som den lärande behöver ägna sig åt för att ta sig från en nivå till nästa. DeMarois & Tall (1996) utgår blandat ifrån APOS teorin och Sfards teori när de utformar sin modell, men introducerar en nivå innan APOS-teorins ”Action”-nivå. Den kallas ”pre-action” och på denna nivå befinner sig den lärande innan denne varit i kontakt med begreppet. Motsvarande nivå hos Sfard skulle då vara början på ”interorization”-fasen och TRMs ”Intuitive understanding of function” faller också in under denna nivå. I APOS-teorin är som nämnts ovan startnivån ”Action” och termen med samma betydelse används även av DeMarois & Tall (1996) där den utgör nivå två. ”Action” innebär att eleven endast kan utföra enkla manipulationer med konkreta objekt och för att nå djupare förståelse så sker ”interiorization” hos den lärande. ”Interiorization” används här på ett mer konkret sätt än Sfard använder termen på. För henne innebär ”interiorization” att bekanta sig med nya metoder och vad som inom APOS-teorin kallas ”Actions”, medan det i APOS-teorin innebär en övergång från konkreta manipulationer till mentala manipulationer av samma objekt. TRMs aktiviteter under rubrikerna ”Graphical representation of a function” och ”Algebraic representation of function” kan placeras in under denna nivå.

När den lärande klarar av de mentala manipulationerna är denne på ”Process-nivå” inom APOS-teorin. Samma nivå återfinns hos DeMarois & Tall och i TRM motsvaras nivån av aktiviteter i form av ”Transfer between all three representations”. För den lärande påbörjas här det som inom APOS-teorin kallas ”encapsulation of process” vilket motsvarar senare delen i Sfards ”condensation-fas”. Denna fas i Sfards teori påbörjas på motsvarande ”Action-nivå” inom APOS-teorin. Vad som är intressant är att valet av ord att beskriva lärandeprocessen i de båda teorierna speglar två olika metaforer att förstå den utifrån. Båda orden ”condensation” och ”encapsulation” antyder en sorts påverkan på begreppet vilket gör att process-förståelsen koncentreras till ett mer och mer lätthanterligt objekt.

”Object-nivån” är nästa nivå i APOS-teorin och även hos DeMarois & Tall. Denna nivå av förståelsen nås när ”encapsulation of process” är klar och Sfard beskriver denna övergång med termen ”reification”. I jämförelse med APOS som har angivna steg i processen så kan Sfards teori snarare beskrivas som en ”skala” från operationellt till strukturellt där man på alla förståelsenivåer har en viss andel operationell förståelse och en viss andel strukturell förståelse. Ju djupare förståelse av ett begrepp man har desto mer strukturell förståelse har man. Strukturen sträcker sig även utanför begreppet på så sätt att den länkar ihop begreppet med närliggande och underliggande begrepp inom matematiken.

I APOS-teorin används termen ”Schema” för att beskriva liknande organiserade strukturer av begrepp och processer. DeMarois & Talls ”procept-teori” sträcker sig inte utanför begreppet på det sättet. Istället definierar de ”procept” som den högsta nivån av förståelse för sådana begrepp vars process- och begreppsförståelse triggas av samma symbol. Till dessa hör bland många andra matematiska begrepp förstås funktionsbegreppet. ”Procept”-nivån” karaktäriseras av att den lärande nu kan vandra mellan att använda begreppet som process eller som objekt beroende på vilket problem som skall lösas därför passar TRMs aktivitet ”Problem solving encouraging transfer between algebraic, tabular and graphic representation of function”. ”Procept” egenskapen för enskilda begrepp diskuteras även av både Dubinsky och Sfard i deras teorier som en viktig egenskap som visar på en än djupare begreppsförståelse än enbart ”Object”. DeMarois & Tall är dock först med att ge denna förståelsenivå av ett begrepp en benämning.



Figur 2 – Illustration över jämförelse av de fyra olika förståelsenivåindelningar av funktionsbegreppet som denna uppsats omfattar. De olika indelningarnas nivåers omfång visas av hur långt de sträcker sig, och hur utvecklad förståelsen är visas av hur långt ner i bilden de börjar.

3.2.5 Missförståelser och svårigheter

Svårigheter och missförståelser är som tidigare nämnts två olika typer av hinder inom vårt område. Svårigheter tenderar mer till att syfta på att en individ inte har lärt sig hur en viss metod går till eller vilka egenskaper ett visst samband har. Missförståelser handlar istället om att en individ har förstått något på ett felaktigt sätt, det vill säga tillskrivit ett begrepp egenskaper det ontologiskt besitter. Detta till trots tror sig den lärande faktiskt ha en korrekt förståelse. Svårigheter kommer ofta till uttryck i att en elev inte tar sig hela vägen till ett svar i en given uppgift. Missförståelser förhindrar oftast inte att en elev når ett svar, men däremot kan det orsaka att svaret blir felaktigt.

Kartläggningen av vanliga missförståelser och svårigheter nedan utgår enbart från vad tidigare forskning kunnat erbjuda. Ett stort problem med detta är att de flesta rapporter som behandlar olika sorters hinder ofta lägger fokus på de absolut vanligaste och resilienta hindren, det vill säga de som kräver mest koncentrerat arbete för att åtgärda. Därav nämns i de flesta artiklar endast några exempel på hinder snarare än kartläggningar av hela spannet. Detta medför att det endast är ett fåtal artiklar ifrån vilka denna sammansättning utgår, och det innebär också en risk för att det finns många hinder som forskningen avslöjat men som inte uppmärksammas här.

I en studie av taiwanesiska elever uppmärksammade Yu-Hsien Chang (2002) flera möjliga svårigheter. De svårigheter som redovisades var följande.

- *Svårighet att skilja mellan beroende och oberoende variabel*
- *Svårighet att bearbeta sammansatta funktioner*
- *Svårighet att översätta graf till formel*
- *Svårighet att översätta verklig situation till formel*
- *Svårighet att översätta från en tabell till formel*
- *Svårighet att översätta från vardaglig återgivning till formel*
  - Här syftas det på en muntlig återgivning med vardagligt språk, till exempel att den beroende variabeln alltid har dubbelt så stort värde som den oberoende**.**
- *Svårighet att översätta från formel till vardaglig återgivning*
- *Svårighet att tillämpa funktionsbegreppet på icke-numeriska samband*
  - Elever med denna svårighet kan till exempel inte förstå att sambandet mellan två linjer kan beskrivas som en funktion från linje A till linje B. (matematisk betecknat B = f(A))
- *Svårighet att se en funktions egenskaper utifrån graf*
  - Detta innefattar bland annat svårighet att avgöra maximi- och minimivärden, definitionsmängd och värdemängd samt nollpunkter och värden i speciella punkter.
- *Svårighet att koppla verklighetsbaserade problem till funktioner*

I publikationen *Functions and Graphs – A research Based Unit of Study for High School Teachers* av Rhode Island Department of Education (2007:40) presenteras följande svårigheter inom funktionsbegreppet.

- *Punktvis förståelse framför global förståelse*
  - innebär att eleven har svårt att förstå en funktions helhet utan ser istället bara värdet på *f(x)* för specifika värden på x.
- *Höjd-sluttning förvirring*
  - Eleven förväxlar en grafs punktvärde med dess sluttning och har svårt att förstå att grafens sluttning representerar förändringshastigheten.
- *Förvirring runt skalor*
  - Eleven förstår inte axlarnas skalors betydelse. Detta kan till exempel orsaka att en elev inte ändrar grafens position ifall denne ändrar skalan. Ett annat vanligt fel är att eleven ser varje markering på axeln som en enhet, trots att skala är tydligt angiven. (Rhode Island Department of Education, 2007:40)

I presentationen av TRM-läroplanen, som tidigare nämnts under nivåer av förståelse, presenterar inledningsvis Schwarz et al (1989:249) följande svårigheter.

- *Svårighet att hitta f(x) då x är givet*
- *Svårighet att hitta x då f(x) är givet*

- *Svårighet att översätta mellan numerisk, grafisk och algebraisk representationsform*
    - I detta innefattas översättning från tabell till graf, tabell till formel, graf till tabell, graf till formel samt formel till tabell och formel till graf.
- *Svårighet att utföra operationer med funktioner*
    - Detta kan till exempel innebära att beräkna $g(x) + h(x)$ då $g(x)$ och $h(x)$ är givna.
- *Svårighet att hantera sammansatta funktioner*
    - Detta kan innebära att förenkla $f(g(x))$ då $g(x)$ är givet.

I en artikel av Şükrü Cansız, Betül Küçük & Tevfik İşleyen (Cansız et al 2011) redovisas resultaten av en studie i Turkiet. I denna rapport presenteras också några svårigheter som förekommer inom funktionsbegreppet.

- (VFB) *Verbal funktionsblindhet*
    - innebär att man misslyckas att känna igen en funktion när den återgivs i tal.
- (AFB) *Algebraisk funktionsblindhet*
    - innebär oförmåga att avgöra om ett algebraiskt uttryck är en funktion eller ej.

Vidare redovisade Chang (2002) även följande missförståelser som förekommer inom funktionsbegreppet.

- *Definitionsmängd och värdemängd är inte relevant under problemlösning*
- *En funktion måste vara linjär*
- *Diskreta funktioner är inte funktioner*
- *En konstant funktion är inte en funktion*
    - Eleven anser att till exempel $f(x) = 3$ inte är en funktion.
- *En funktion måste betecknas med specifika tecken*
    - Denna missförståelse innebär att eleven tror att en funktion måste använda sig av bokstäverna x och y, och vidare även att en funktion måste betecknas med bokstaven f, det vill säga till exempel $f(x)$ och inte $c(g)$.
- *Alla ekvationer är funktioner*
- *Varje tänkbar figur är en graf av någon funktion*
    - Elever med denna missförståelse tolkar till exempel en cirkel som en graf av en viss funktion.
- *En funktion måste ha en formel*

Janvier (1998:81-82) lyfter också ett fåtal missförståelser som kan förekomma.

- *Linjär attraktion*
    - innebär att elever tenderar att göra räta linjer när, elever skall skissa grafer, anpassar en kurva genom flera punkter eller fullgör en kurvskiss genom extrapolering och interpolering.
- *Visuellt intuitiv missuppfattning*
    - innebär tolkning av en graf på grund av att den liknar något verkligt fenomen men i själva verket beskriver relationen mellan två storheter.
- *Graf som graf*
    - innebär att eleven tror att alla grafiska representationer även är grafiska representationer för funktioner. Ett exempel på detta är att ett diagram från en statistikundersökning alltid tolkas som att den representerar en funktion.

Slutligen nämner även Schwarz et al (1989: 249) några missförståelser utöver de svårigheter som tidigare är hämtade från deras artikel.

- *Linjäritet är det enda funktionella sambandet*
- *Alla funktioner är diskreta*
  - Elever tolkar alla funktioner som bestående av punkter.
- *Förståelse beror av representation*
  - Olika representationer tolkas som separata fenomen utan egentlig relation. Eleven förstår inte att de olika representationerna är till för att förtydliga olika aspekter inom funktionsbegreppet. Detta medför även att översättning mellan olika representationer blir både svår att genomföra och konstlad.

Bland dessa svårigheter och missförståelser finns det många som är benämnda snarlikt och troligen syftar på samma faktiska missförståelser. Dessa kommer i en senare del av uppsatsen, då svårigheterna och missförståelserna kategoriseras, att grupperas ihop under en gemensam rubrik.

3.3 Att utvinna information

Som tidigare nämnts har vi under vår VFU allt för ofta fått erfara att när bedömning av den lärandes begreppskunskap äger rum, sker det ofta utifrån ett summativt perspektiv. Detta innebär att det är de förmågor den lärande förväntas besitta vid bedömningstillfället som testas, utan att egentligen utvinna information om varför den lärande visat avsaknad av förmåga i de fall denne misslyckats. Denna typ av bedömning syftar inte till att utveckla den lärande utan till att testa av om denne uppfyller kraven vid avslutat moment. I följande stycke exemplifieras ett sådant bedömningsverktyg inom bland annat funktionsbegreppet.

The calculus concept readiness (CCR) instrument

CCR är ett instrument framtaget för att bedöma hur väl förberedda studenter är inför deras första analyskurs på högskolenivå. Det är uppbyggt av 25 st flervalsfrågor där varje alternativ står för en vanlig uppfattning som studenter brukar ha. Det finns fem svarsalternativ till varje fråga. Frågorna och dess utformning är baserade på tidigare forskning (jfr Carlson et al 2010:2-3) samt en förfiningsprocess där man har testat frågorna och sållat bort vad som behövdes tills frågorna och alternativen fungerade och representerade de vanligaste uppfattningarna.

Som komplement till frågorna finns en taxonomi i vilken man kategoriserar in elevernas svarsalternativ och på så sätt bedömer elevernas förutsättningar inför calculuskursen. I artikeln visas också statistik på hur totalt 631 nya calculusstudenter löst de olika uppgifterna (Carlson et al 2010).

Varje flervalsfråga har även försetts med en beskrivning av vilka kvaliteter och förmågor man behöver för att lösa uppgiften. Att detta görs i förväg är viktigt för att lätt kunna bedöma varje elevs nivå. Förfiningsprocessen var helt klar efter att man dels konstaterat att frågorna tolkas på ett konsistent sätt, dels när de faktiskt bedömde det som de syftade att bedöma och slutligen när de felaktiga alternativen var så trovärdiga som möjligt eller uttryckt på ett annat sätt, representerade de vanligaste missuppfattningarna gällande fenomenet (Carlson et al 2010:4).

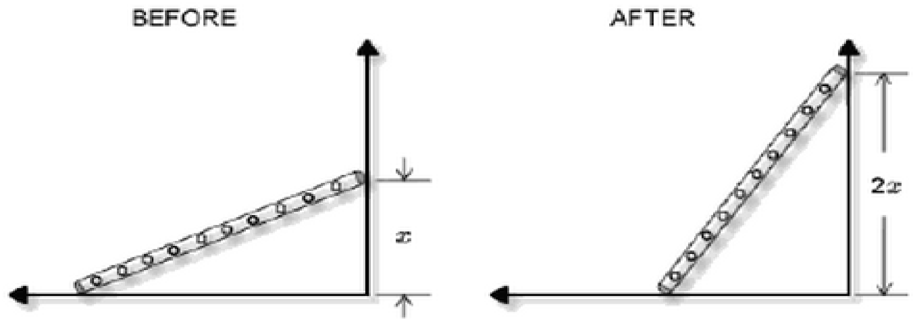
Carlson et al. visar i och med sitt validitetstest att det finns stor korrelation mellan studenternas testresultat och senare deras slutbetyg och även resultaten på andra test. De menar därför att deras bedömningsinstrument var utformat på ett funktionellt sätt (Carlson et al 2010:13). De pekar dessutom ut två användningsområden för instrumentet, dels storskaligt för att bedöma hur bra tidigare utbildning varit eller på individnivå för att bedöma om en elev är redo att börja analyskursen (Carlson et al 2010:16).

Instrumentet innehåller en definition på olika kvaliteter som eleven skall ha uppnått efter avslutad gymnasiegång. Dessa kvaliteter är sorterade inom olika kategorier såsom förståelse och resonemang. Nedan är ett exempel på hur en uppgift utformats med tillhörande bedömningsanvisning utifrån dessa förmågor. De har konstruerat uppgiften på ett sådant sätt att de vet vilka förmågor som minst måste användas för att lösa uppgiften (resonemang (R3) och förståelse (U3)). Detta ger dem möjlighet att avgöra elevernas kvaliteter endast utifrån det svar eleverna valt på flervalsuppgiften.

> ”They then need to imagine how the distance of the base of the ladder from the wall changes as the top of the ladder increases to twice its original distance from the floor (R3). As they imagine how these measurements change together (engage in covariational reasoning), they also need to think about how the ratio of the changes in these two quantities (slope) (U3) changes as the distance of the ladder from the wall decreases (R3).”
>
> (Carlson et al 2010:8)

Detta resonemang ligger till grund för att avgöra vilka förmågor som krävs för att lösa uppgiften nedan.

> ”A ladder that is leaning against a wall is adjusted so that the distance of the top of the ladder from the floor is twice as high as it was before it was adjusted.”



Figur 3 – Illustration tillhörande uppgiftsexempel i CCR. (Carlson et al, 2010:8).

> ”The slope of the adjusted ladder is:” a) ”Less than twice what it was”, b) ”Exactly twice what it was”, c) ”More than twice what it was”, d) ”The same as what it was before”, e) ”There is not enough information to determine if any of a through d is correct” (Carlson et al, 2010:8).

Som tidigare nämnts syftar detta instrument till att utreda huruvida den lärande är redo att påbörja den första analyskursen på högskolenivå. Med andra ord testar instrumentet huruvida den lärande har uppnått syftade kvaliteter inom matematik efter avslutad gymnasiegång. Däremot ligger det generella fokuset i denna uppsats på tidigare moment inom funktionsbegreppet. Det vill säga moment på gymnasial nivå. CCR-instrumentet kommer användas som normerande exempel för att utforma uppgifter som utvinner information från den lärandes svar. Även om CCR-instrumentet är fokuserat mestadels på förmågor ser vi frågornas utformning som tydligt användbar även för att kartlägga elevers hinder. Detta på samma sätt som Carlson et al (2010) låtit vanliga uppfattningar eller missuppfattningar utgöra de felaktiga alternativen i de flervalsuppgifter CCR-instrumentet innehåller.

4 Metod

Detta examensarbete syftar till att utifrån tidigare forskning skapa en modell att använda vid formativ bedömning. Detta ger arbetet en tydlig teoretisk övervikt som Stukát (2005:24) motiverar att ett examensarbete kan ha i utlåtandet som lyder ”I en värld där informationsmängden ökar så starkt som den gör, kan det behövas några som stannar upp, sammanfattar och organiserar”. Därför beskriver vår metod huvudsakligen hur vi utifrån den teoretiska bakgrunden utformat FH-modellen. Detta innebär att den lilla empiriska studie vi gör baseras på FH-modellen för att exemplifiera och utveckla denna.

4.1 Val av teoretiskt avstamp för FH-modellen

Vi påbörjade vårt examensarbete genom att söka bland den litteratur vi genom vår utbildning erfarit vara relevant på området. Vi tog därmed utgångspunkt i Sfard (1991) och i Bergsten (1997). Vi expanderade sökningen ytterligare genom att söka på de referenser som återgavs i dessa. Primärkällor har eftersökts i varje enskilt fall men i enstaka fall har detta inte lyckats. Ett sådant exempel är Janvier (1984) som vi dessvärre tvingats referera till genom Bergsten (1997). Sökningen efter relevant litteratur skedde mestadels på biblioteket och på internet och då framförallt vi utbildningsbibliotekets databas. Förutom referenserna ovan användes sökord som: ”concept of function”, ”function+misconception”, ”understanding+concept+function”, ”understanding+algebra” och liknande. När nya källor hittades jämförde vi ofta deras referenser med varandra och tidigare referenser vilket ofta visade att artiklarna hade gemensama utgångspunkter i ett fåtal forskares tidigare studier. Vi beslöt att även vi skulle ta avstamp i dessa. Utöver dessa har vi också försökt finna den modernaste forskningen inom området för att vidga perspektivet i vår jämförelse.

4.2 FH-modellen

4.2.1 Motivation till utformningsmetod av FH-modellen

Modellutformningen gjordes genom att först jämföra de olika nivåer av förståelse för funktionsbegreppet som erhållits genom litteratursökningen varpå lämplig indelning av förståelsenivåer valdes. Vi valde därefter aspektindelning av funktionsbegreppet utifrån den tidigare forskning vi studerat och hade då som kriterium att välja den som var mest nyanserad. Nästa steg var en sammanställning och jämförelse av de hinder som hittats under litteratursökningen. De hinder som var likartade men var från olika forskning grupperades under gemensamma benämningar. Efter detta kategoriserades hindren utifrån vilken förståelsenivå de blockerar och vilken aspekt de visar sig inom. Denna kategorisering gjordes utifrån vår förståelse och erfarenhet av förståelsenivåer, hinder och funktionsbegreppets olika aspekter.

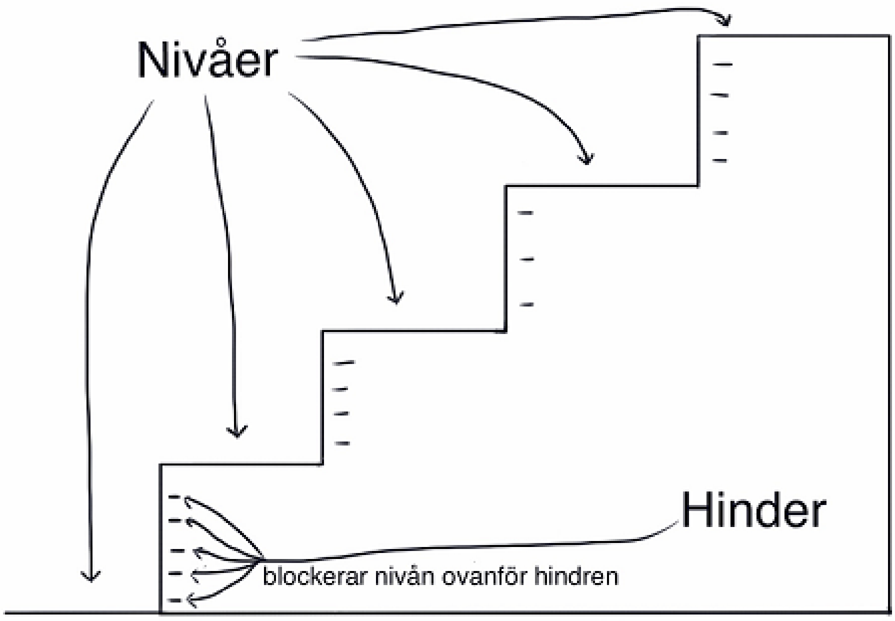
FH-modellen är utformad utifrån hypotesen ”varje hinder blockerar någon specifik förståelsenivå för funktionsbegreppet” som går att härleda ifrån vår ursprungliga frågeställning på sida 2. Det som skulle kunna falsifiera hypotesen är om en statistisk undersökning skulle visa att det inte finns någon korrelation mellan den lärandes förståelsenivå och dennes hinder. Därutöver utgör varje kategorisering av ett specifikt hinder på en förståelsenivå en egen hypotes. Varje sådan hypotes skulle kunna falsifieras dels genom att huvudhypotesen ovan förkastas och dels genom en statistisk undersökning som visar att den lärande kan nå denna förståelsenivå trots att denne uppvisar ett hinder som kategoriserats på densamma.

4.2.2 FH-modellens utformning

I FH-modellen använder vi nivåer av begreppsförståelse där varje nivå har särskilda karaktärsdrag vilket gör att läraren utifrån den lärandes prestationer får möjlighet att avgöra vilken kvalitativ nivå den lärandes förståelse av begreppet ligger på. Ett exempel på hur detta kan göras är att utvinna information om elevernas kvaliteter såsom framgångsrikt visas med ”CCR instrument”. Detta i samverkan med en nivåindelning av begreppsförståelse kan ge läraren en god uppfattning om den lärandes förståelsenivå. ”CCR-instrument” omfattar flervalsuppgifter som kan tillhandahålla information om elevernas hinder då de felaktiga alternativen innehåller framforskat vanliga missförståelser. Instrumentet används dock inte i syftet att utreda om elevernas förståelse blockeras av hinder utan enbart för att avgöra om eleverna är redo inför den första analyskursen på universitetsnivå. Per- Eskil Persson fastslår dock vikten av att i tid arbeta med hinder för förståelse i citatet nedan. Persson använder här termen missuppfattning på samma sätt som vi använder termen missförståelse.

> ”Om eleven har en allvarlig missuppfattning, kan ett fortsatt övande av färdigheten vara meningslös eller till och med skadlig. Man befäster då snarare de felaktiga föreställningarna.”
>
> Persson (2005:48)

Det är alltså avgörande att i tid hjälpa elever med olika hinder och detta motiverar ytterligare att FH-modellen behövs då den binder samman hinder med förståelsenivåer på ett sådant sätt att varje enskilt hinder blockerar den lärande från att nå en viss nivå av förståelse. Detta skall tolkas som att även om en viss svårighet eller missförståelse kan visa sig tidigare så utgör den inget problem för att den lärande skall kunna nå nästa förståelsenivå. Däremot hindras den lärande att uppnå den nivå under vilken hindret är kategoriserat.



Figur 4 – Illustrerar hur modellen placerar hinder i förhållande till nivåer. Trappan som helhet utgör hela begreppet och varje trappsteg utgör en förståelsenivå av begreppet. Hindren är markerade som korta streck och utgör en blockering för den nivå som representeras av det trappsteg hindret är placerat på. Notera att den första nivån är preaction och utgörs av den platta ytan innan det första trappsteget.

Vidare nyanseras FH-modellen genom införandet av aspekter. Aspekterna visar olika egenskaper hos begreppet och kan representeras på olika sätt. Detta innebär att de hinder som ligger på en viss förståelsenivå också ligger inom en viss aspekt av begreppet.

Användning av FH-modellen kräver att följande tre nyckelmoment genomförs och dessa förklaras ytteligare efterkommande text.

1. *Undersökning av den lärandes övergripande förståelsenivå*
2. *Kartläggning av den lärandes svårigheter och missförståelser*
3. *Avgöra vilka hinder som blockerar nästa förståelsenivå.*

Det första momentet har läraren oftast en del förkunskaper om, i den meningen att läraren till viss del känner till den lärandes nivå av förståelse. Denna kan fördelaktigt undersökas ytterligare till exempel genom samtal med den lärande, observation av den lärandes räkneövande och problemlösande eller genom någon form av test. När läraren samlat tillräckligt med information för att kategorisera den lärandes övergripande förståelse under en viss nivå kan nyckelmoment 1 anses avslutat. När läraren gör en övergripande bedömning frånser denne att den lärande kan visa olika förståelsenivåer inom olika aspekter av funktionsbegreppet och gör istället en bedömning utifrån sitt samlade intryck.

För att kartlägga elevernas svårigheter eller missförståelser görs lämpligtvis ett diagnosiskt test. Utformningen av detta kan göras på liknande sätt som "CCR-instrument". Flervalsuppgifter där alternativen utgörs av inget, ett eller flera rätta svar och där de felaktiga svarsalternativen motsvarar kända forskningsbelagda hinder inom funktionsbegreppet ger möjlighet att med logik utreda elevernas hinder. Utöver genom felaktiga svarsalternativ kan även den lärandes hinder avslöjas genom att denne inte identifierar alla rätta svarsalternativ. Om vissa alternativ kan visa på mer än ett hinder är det lämpligt att ha ytterligare alternativ som tydliggör vilket utav dessa hinder som orsakar valet. För ytterligare förklaring se motivationen till utformningen av fråga 3 i exemplifierande test (se figur 5, s. 32). Det är viktigt att testa av samtliga aspekter inom funktionsbegreppet för att utvinna helhetstäckande information om elevens hinder. Det kan hända att ett undervisningsmoment behandlar enbart en eller ett par aspekter av funktionsbegreppet och då är det rimligt att detta test behandlar endast dessa aspekter. Om testet utformas enbart för en individ kan det baseras enbart på hinder från förståelsenivån ovanför den nivå som individen har bedömts ligga på.

Moment tre innebär att läraren söker de specifika hinder som blockerar den lärande från att nå nästa förståelsenivå. I detta skedet används det faktum att hindrena är kategoriserade på specifika förståelsenivåer för de aspekter som testats. De hinder som blockerar nästa förståelsenivå är de som ligger på förståelsenivån över den som den lärande tidigare bedömts befinna sig på. För att underlätta detta moment har vi utvecklat en matris (se tabell 1, s. 30) som placerar hinder på specifika förståelsenivåer och inom specifika aspekter.

4.2.3 Nivåer

Nivåkategoriseringen av DeMarois & Tall sträcker sig hela vägen från ”pre-action” till ”procept” och täcker därmed in den delen av APOS-teorin som rör ett specifikt begrepp, dvs exklusive ”Schema”-nivån. Dessutom anger DeMarois & Tall en extra nivå i form av ”procept” och till skillnad från Sfard har ”procept”-teorin konkreta förståelse-nivåer vilket gör att den lämpar sig väl att bygga en bedömningsmodell runt. Vi har därför valt att utgå ifrån DeMarois & Tall när vi utformat FH-modellen. Nivåerna vi kommer att använda i FH-modellen är alltså: pre-action, action, process, object och procept.

Pre-action innebär att den lärande endast har intuitiv förståelse för funktionsbegreppet. Detta innebär att den lärande inte kan utföra den algoritm som hittar elementet i värdemängden som motsvarar ett specifikt element i definitionsmängden.

Action innebär att den lärande kan utföra enstegsalgoritmer som till största delen utförs externt. Exempelvis utförs dessa beräkningar med penna och papper och den lärande behöver ofta en formel för att kunna tolka något som en funktion (Asiala et al 1997:7).

Process innebär att den lärande kan se en funktions helhet och därmed kan denne översätta mellan representationsformer. Den lärande kan även länka ihop flera algoritmer och kan dessutom göra detta mentalt utan att faktiskt behöva utföra dem. Den lärande uppmärksammar vad algoritmer gör vilket innebär att denne kan vända algoritmen och därmed konstruera den inversa funktionen

(Asiala et al 1997:7).

Object innebär att den lärande klarar av att utföra algoritmer eller processer med funktioner som objekt. Ett exempel på detta är att räkna ut summan av två funktioner. Den lärande har också förmåga att diskutera egenskaper hos dessa algoritmer och processer som sker på andra funktioner vilket innebär att den lärande kan se att elementen i definitionsmängden och värdemängden inte behöver utgöras av tal utan även kan utgöras av funktioner eller andra objekt.

Procept innebär att den lärande beroende på problemlösningssituation använder funktionsbegreppet antingen som process eller objekt och utnyttjar därmed begreppets alla egenskaper. Den lärandes begreppsbild omfattar alltså flera olika förståelsenivåer av funktionsbegreppet och orsakar att hela begreppet "triggas" när någon av dessa kan användas. Ett exempel är då funktionerna $f(x)=2x$ och $g(x)=x+2$ är givna och $f(g(x))=5$ skall beräknas. Då måste först funktionen $g(x)$ behadlas som ett objekt då det substitueras mot x i funktionen $f(x)$. Därefter måste den lärande förenkla det erhållna uttrycket vilket innebär att denne nu måste övergå till en syn på funktionen som process.

4.2.4 Aspekter

När det gäller vilka aspekter man kan dela in begreppsbilden i har vi därmed funnit DeMarois & Talls kategorisering gynnsam. De har återgivit åtta aspekter som listas nedan.

- *Numerisk representationsform*
  Denna aspekt tydliggörs när funktionsbegreppet representeras i form av en tabell eller lista. Aspekten visar tydligt att en funktion kan beskrivas som specifika ordnade par. Vid kontinuerliga funktioner återger den därför inte fullständigt funktionssambandet utan exemplifierar snarare detta.
- *Algebraisk representationsform*
  Denna aspekt presenterar en funktion som en formel och betonar mer processen som transformerar element i definitionsmängden till element i värdemängden. Aspekten beskriver kontinuerliga funktioner väl men den kan inte lika väl beskriva diskreta eller icke-numeriska funktioner. Däremot kan stegvisa funktioner beskrivas tämligen väl.
- *Grafisk representationsform*
  Den här aspekten illustrerar en funktion som punkter, linjer eller kurvor i ett koordinatsystem. Denna aspekt har styrkor i att den tydligt illustrerar helheten och därmed det generella sambandet mellan elementen i definitionsmängden och elementen i värdemängden för en given funktion. En svaghet är att det är svårt att göra en exakt avläsning.
- *Vardaglig representationsform*
  Denna aspekt innebär att ett funktionssamband beskrivs med vardagsspråk i tal eller i skrift. Ett exempel på detta ges av Tall (1997:7) som nämner funktionsmaskinen.
- *Kinestetisk representationsform*
  Då funktionsbegreppet representeras av ett verkligt samband eller ett realistiskt beskrivet samband omfattar det denna aspekt av funktionsbegreppet. Många problemlösningsuppgifter utgår från denna representationsform varpå den lärande skall översätta ett funktionssamband till en annan representationsform.
- *Skriftlig definition*
  Denna aspekt syftar på hur funktionsbegreppet beskrivs i skrift.
- *Muntlig definition*
  Denna aspekt syftar på hur funktionsbegreppet beskrivs i tal.
- *Beteckning*
  Med beteckning syftar man på hur en funktions beteckning utformas i tal, skrift och formel.

Tall (1997:3-4) och Janvier (1987, i Bergsten 1997:107)

4.2.5 Kategorisering av hinder

Då vi genomsökt tidigare forskning har diverse vanligt förekommande svårigheter och missförståelser framkommit. I detta avsnitt skall dessa kategoriseras. Dessa hinder kan tillhöra specifika funktionssorter och representationer men kan även vara mer övergripande och omfatta större delar av elevernas begreppsbild. Kategoriseringen som sker här nedan innehåller tre viktiga delar. Den första av dessa är att likartade hinder grupperas tillsammans under en gemensam benämning. Den andra delen är att var och en av dessa hinder placeras under en förståelsenivå, det vill säga under den nivå som de utgör ett hinder för att eleven ska kunna uppnå. Den tredje och sista delen är att hindren även kommer att placeras under en eller flera aspekter av funktionsbegreppet, det vill säga under till exempel vilken representation de kommer visa sig och utgöra ett problem för förståelseutvecklingen (se figur 4, s. 22).

Eftersom det i tidigare forskning ytterst sällan har nämnts något om på vilken förståelsenivå hindren är kritiska så baseras vår kategorisering huvudsakligen på vår egen förståelse av funktionsbegreppet, hindren och nivåerna i den förståelseskala vi utgår ifrån. I de fall där vi i någon av våra källor kan hitta en nivåklassificering av ett hinder kommer givetvis den nivåklassificeringen att tas i beaktning och redovisas. Med varje hinder kommer även en motivation för varför det hindret hör hemma just där vi placerar det, och dessutom kommer en förkortning att skapas för att en översikt ska kunna gå att få genom en matris (se tabell 1, s. 30).

S-SBO – Svårighet att skilja mellan beroende och oberoende variabel
Denna svårighet som presenteras av Chang (2002) handlar om att en elev i någon representation av funktionsbegreppet inte kan urskilja vilken storhet som är den beroende och vilken som är den oberoende. I praktiken kan detta innebära att en elev till exempel inte kan förstå att en graf som representerar en funktion inte kan löpa genom två olika punkter med samma x-koordinat. Eftersom denna svårighet inte förhindrar att enstegsoperationer, som till exempel att läsa av *f(x)* för ett givet x eller x för ett givet *f(x)* utgör den inte något hinder för actionnivå. Däremot när ett samband ska tolkas och beskrivas med en funktion måste en distinktion mellan beroende och oberoende storhet kunna göras. Detta innebär *S-SBO* är ett hinder för nivån process och visar sig inom de fem aspekter som utgörs av representationer av funktionsbegreppet.

S-BSF – Svårighet att bearbeta sammansatta funktioner
S-BSF är precis som ovanstående svårighet hämtad från Chang (2002) och handlar om att en elev är oförmögen att förstå och räkna med sammansatta funktioner. Ett exempel på detta är att förenkla *f(g(x))* då *f(x)* och *g(x)* är givna. Om en elev klarar av detta visar det dels på att eleven kan se en funktion som ett objekt, men även att eleven kan växla mellan objektssyn och processyn. Detta innebär att *S-BSF* är ett hinder för proceptnivån och att *S-BSF* förekommer inom de fem representationerna.

S-ÖKA, S-ÖGA, S-ÖAG, S-ÖNA, S-ÖAN, S-ÖVA, S-ÖAV, S-ÖGN, S-ÖNG – Svårighet att översätta mellan olika representationformer
Denna kategori av svårigheter går ut på att den lärande inte fullständigt behärskar metoder för att översätta från en representation till en annan. Dessa svårigheter redogörs enskilt för av Chang (2002) men nämns även av Schwarz et al (1989:249) fast då som en och samma svårighet. Översättningar mellan representationsformer tillhör den fjärde nivån enligt den nivåindelning Schwarz et al (1989:3) gör, vilket enligt vår jämförelse av de olika nivåindelningar innebär att dessa svårigheter utgör ett hinder för processnivån enligt Talls nivåindelning. Varje specifik svårighet i denna grupp motsvarar översättningen från en representation till en annan. Till exempel står förkortningen S-ÖGA för ”Svårighet att Översätta från Grafisk till Algebraisk representationsform” och S-ÖAG innebär då alltså översättning mellan samma två representationsformer men i motsatt riktning. Dessa svårigheter visar sig inom de representationsformer som översättningen gäller, men

tydligast inom den representationsform som översättningen går mot. Detta kan motiveras av att det till exempel är lättare att läsa av en graf än att skissa en ny graf själv då det innebär färre moment och en inte lika utförlig förståelse av den grafiska representationen. Denna motivering stämmer också med den förklaring Chang (2002) föreslår för orsaken att vissa elever har svårt att översätta från en kinestetisk representation till algebraisk form, vilket alltså är att de är svaga i den algebraiska representationsformen.

S-FEG – Svårighet att se en funktions egenskaper utifrån en graf
Denna svårighet presenterades av Chang (2002) men innefattar även den svårighet som ovan benämns som ”Höjd-sluttning förvirring” och presenterades av Rhode Island Department of Education (2007:40). Den går ut på att den lärande inte kan urskilja till exempel minimi- och maximivärden, förändringshastighet och nollpunkter utifrån en graf. Att en funktions egenskaper fokuseras snarare än en funktions algoritm visar på att den ses som ett objekt snarare än en process. Detta innebär att denna svårighet utgör ett hinder för att komma upp på objektsnivå och den visar sig givetvis inom den grafiska representationen.

S-TIN – Svårighet att tillämpa funktionsbegreppet på icke-numeriska samband
Med denna svårighet åsyftas att den lärande inte kan se att funktionsbegreppet kan beskriva relationen mellan icke-numeriska element i mängder lika väl som numeriska. Ett exempel på detta ges av Chang (2002) och går ut på att elever inte kan se att funktionsbegreppet kan beskriva relationen mellan två linjer i ett koordinatsystem. På samma sätt kan den lärande inte att en funktion kan beskriva sambandet mellan två funktioner. Vad en specifik funktion kan tillämpas på beror på vissa av funktionens egenskaper, det vill säga vad det är för typ av funktion. I fallet ovan med relationen mellan linjer måste den lärande vara uppmärksam på att elementen i definitionsmängden kan innehålla linjer istället för numeriska värden, och likaså att värdemängden kan göra detsamma. Denna typ av tänkande krävs för att den lärande ska kunna se en funktion som objekt och inte bara som process. Detta innebär att denna svårighet utgör ett hinder för att uppnå objektsnivå. I ovanstående exempel visar sig svårigheten rimligen inom den grafiska representationen, men i andra sammanhang bör den även kunna visa sig inom den numeriska, vardagliga och kinestetiska representationen.

S-PFG – Punktvis förståelse framför global förståelse
Denna svårighet innebär att den lärande bara kan se en funktion som punkter, det vill säga att för varje prövat x hittas ett $f(x)$ och är hämtad från Rhode Island Department of Education (2007:40). Den lärande är oförmögen att se att det finns intressanta egenskaper hos en funktion förutom operationen som gör omvandlingen från x till $f(x)$ eller vice versa. Egenskaper som maximi och minimi eller förändringshastighet uppmärksammas inte. Däremot har inte eleven nödvändigtvis några svårigheter med översättningar mellan representationer. Därmed utgör denna svårighet ett hinder för att objektsnivå ska kunna uppnås för att enbart processen och inte egenskaperna uppmärksammas. Den visar sig huvudsakligen inom den grafiska och den algebraiska representationen.

S-FRS – Förvirring runt skalor
Denna svårighet redovisades också av Rhode Island Department of Education (2007:40) och syftar på en oförmåga att tolka betydelsen av axlarnas skalor. I praktiken kan det orsaka att den lärande inte uppmärksammar att x- och y-axlarna i ett koordinatsystem är olika graderade eller att eleven automatiskt tolkar varje streck på axeln som en enhet. Denna svårighet utgör ett hinder för actionnivån och visar sig inom den grafiska representationen.

S-HBO – Svårighet att bestämma beroende variabel när oberoende variabel är given

En av de mest grundläggande operationerna inom funktionsbegreppet är att hitta värdet på *f(x)* utifrån ett givet x. Schwarz et al (1989:249) rapporterar dock att det är vanligt förekommande att elever har svårt med just detta. Denna svårighet bör kunna visa sig inom alla representationer och utgör alltså ett hinder för att den lärande ska ta sig upp på actionnivå.

S-HOB – Svårighet att bestämma oberoende variabel när beroende variabel är given
Precis som S-HBO är denna svårighet av Schwarz et al (1989:249) rapporterad som vanligt förekommande och även om operationen är lite komplexare utgör denna också ett hinder på actionnivå och kan visa sig inom samtliga representationer.

S-VFB – Verbal funktionsblindhet
Denna svårighet syftar enligt Cansız, Küçük & İşleyen (2011) på att den lärande inte kan koppla ett verbalt uttryck till funktionsbegreppet. Detta innebär att en elev med denna svårighet inte kan förstå att en relation mellan två storheter som återges i vardagligt språk kan beskrivas med en funktion. Svårigheten visar sig inom den vardagliga representationen och utgör ett hinder för actionnivå.

S-AFB – Algebraisk funktionsblindhet
Denna svårighet som Cansız et al (2011) nämner är som S-VFB men gäller istället för algebraiska uttryck. Detta innebär alltså att en elev med denna svårighet saknar förmågan att identifiera ifall ett matematiskt uttryck kan beskrivas som en funktion. S-AFB utgör också ett hinder för actionnivå men visar sig till skillnad från S-VFB inom den algebraiska representationen.

M-DIR – Definitionsmängd och värdemängd är inte relevant under problemlösning
Denna missförståelse är uppmärksammad av Chang (2002) och syftar på att den lärande inte uppmärksammar att de storheter som funktionen relaterar till varandra inte kan anta alla värden vid kinestetiskt problemlösning. Ett exempel på detta är att eleven ska skissa en graf som beskriver relationen mellan gången tid sedan start och hur högt vattnet står i en bägare som fylls på med 0,5 dl vatten varje sekund. Bägaren är vid start tom och dess storlek och form är given. En elev med missförståelsen M-DIR skulle här rita en graf som sträcker sig från koordinatsystemets gräns och sedan fortsätter genom det intervall då bägarens vattennivå faktiskt stiger och som sedan fortsätter att stiga även efter den punkt då vattnet inte längre ryms i bägaren. Missförståelsen M-DIR hör hemma inom den kinestetiska representationen och utgör ett hinder för att funktionsbegreppet ska ses som ett objekt. Detta för att inte funktionens egenskaper, i detta fall definitionsmängd och värdemängd, uppmärksammas.

M-FL – En funktion måste vara linjär
I denna missförståelse ingår både missförståelsen ”En funktion måste vara linjär” som Chang (2002) presenterade, men även den missförståelse som tidigare benämnts med ”linjär attraktion” och som är hämtad från Janvier (1998:81-82), samt den missförståelse som rubriceras med ”linjäritet är det enda funktionella sambandet”, vilken kommer från Schwarz et al (1989: 249). Denna missförståelse kan visa sig inom samtliga aspekter av funktionsbegreppet och utgör ett hinder för processnivån. Anledningen till detta är att när en avläsning, plottning eller beräkning görs, till exempel av *f(x)* för ett givet x, är det inte nödvändigt att ta hänsyn till hur funktionen är i sin helhet. Däremot när flera punkter bearbetas tillsammans, till exempel när förändringshastigheten ska undersökas, är det viktigt att förstå att den kan vara olika i olika intervall, och detta är något som görs på processnivå då funktionens helhet blir mer fokuserad.

M-DFI – Diskreta funktioner är inte funktioner
Denna missförståelse är också nämnd av Chang (2002) och syftar på att den lärande anser att en funktion måste vara kontinuerlig, åtminstone i vissa intervall. Missförståelsen visar sig

huvudsakligen inom den grafiska representationen och kan vara ett resultat av att den lärande är van vid att skissa en graf utifrån de punkter som ges i en tabell. Följden av detta är att den lärande tolkar en diskret funktion som en kontinuerlig funktion som är representerad i punkter och därmed måste uttryckas i en linje, kurva eller interpolerade punkter när den översätts till grafisk representation. Fria punkter i ett koordinatsystem kan då inte tolkas som en representation av en funktion. Denna missförståelse utgör ett hinder för den lärande att nå objektsnivån eftersom denna nivå kräver att den lärande måste ha en god uppfattning om olika funktioners möjliga egenskaper

M-KFI – Konstanta funktioner är inte funktioner
Att inte kunna se att en funktion utan förändringskoefficient eller där förändringskoefficienten är noll är en funktion är ytterligare en missförståelse som Chang (2002) redogör för. Till exempel funktionen *f(x)*=3 tolkas därmed inte som en funktion. Denna missförståelse visar sig huvudsakligen inom den numeriska, den algebraiska och den vardagliga representationen. Anledningen till att den antagligen inte visar sig lika tydligt inom den grafiska är att den lärande inte kommer att reflektera över att grafen inte har någon lutning, och anledningen till att den inte visar sig inom den kinestetiska representationen är att det kan tyckas tämligen meningslöst att använda funktionsbegreppet på något som inte varierar. Precis som M-DFI utgör denna missförståelse ett hinder för den lärande att uppnå objektnivå eftersom den lärande inte kan acceptera att förändringskoefficienten även kan ha värdet noll.

M-FXY – En funktion måste betecknas med specifika tecken
Chang (2002) förklarar denna missförståelse som att den lärande bara anser att en beteckning kan representera en funktion ifall den använder de vanliga symbolerna. Detta innebär att den lärande anser att ”*f(x)*= 3x +1” eller ”y = 2x” är beteckningar på funktioner. En funktion skulle däremot lika gärna kunna betecknas ”*g(*z*)*=3z+1”, vilket den lärande inte skulle acceptera som en funktion. Denna missförståelse visar sig inom beteckningsaspekten och inom den algebraiska representationen på actionnivå.

M-AEF – Alla ekvationer är funktioner
En lärande med denna missförståelse uppfattar alla ekvationer som funktioner enligt Chang (2002). Detta visar sig dels inom beteckningsaspekten men även inom den algebraiska aspekten och visar på att en elev inte förstår de grundläggande operationerna man kan göra med en funktion, och alltså inte behärskar actionnivån. Detta orsakar alltså att denna missförståelse ligger på actionnivå.

M-AFF – Alla figurer är funktioner
Denna missförståelse motsvarar M-AEF, fast inom den grafiska representationen. Den nämns av Janvier (1998:81-82) och Chang (2002) och innebär att den lärande tolkar varje tänkbar grafisk figur som en representation av en funktion. Detta innebär såväl vanliga geometriska figurer som olika framställningar av diagram inom statistik. Precis som M-AEF hör denna missförståelse hemma på actionnivå eftersom missförståelsen tyder på att eleven inte förstår de grundläggande operationerna man måste kunna göra med en funktion, det vill säga bestämma ett och bara ett *f(x)* för varje givet x.

M-FMF – En funktion måste ha en formel
Den sista missförståelsen som är hämtad från Chang (2002) går ut på att en elev anser att en funktion måste ha en formel för att vara en funktion. Den kan till viss del sammanfalla med M-DFI som inte går att definiera med en formel, men den omfattar även vad som på engelska kallas ”Step function”, stegfunktion. Denna typ av funktion definieras i olika intervall, så den kan vara kontinuerlig, men olika formler eller beskrivningar gäller för olika intervall. Ett exempel på en graf av en sådan funktion är en rät linje som plötsligt i en punkt ändrar riktning och sedan fortsätter i en

annan riktning. Av samma anledning som M-DFI visar denna sig inom samtliga representationer av funktionsbegreppet och utgör ett hinder för objektnivån.

M-VIM – Visuellt intuitiv missförståelse
En vanlig missförståelse inom den grafiska representationen av funktionsbegreppet är att den lärande tolkar en graf som en bild av något (Janvier 1998:81-82). Ett exempel på detta är att en graf som beskriver ett flygplans hastighet över tid från start tolkas som att den visar flygplanets höjd i förhållande till färdad sträcka. Denna missförståelse orsakas alltså av att den intuitiva uppfattningen av grafen tränger undan förståelsen av en graf som representation för en relation mellan två storheter. Eftersom missförståelsen orsakar att den lärande inte korrekt kan läsa av en graf innebär det att den ligger på actionnivå.

M-FBR – Förståelse beror av representation
Schwarz et al (1989: 249) förklarar denna missförståelse som att den lärande ser varje representation av funktionsbegreppet som ett eget fenomen och inte som en aspekt av funktionsbegreppet. Konsekvensen av detta är dels att eleven inte förstår varför översättning mellan representationsformerna har någon mening eller ens förklaring. Det är möjligt att eleven lär sig en metod för att göra översättningen utan att förstå att de olika representationerna syftar till samma fenomen, samma samband. Denna missförståelse utgör en tydlig blockad för att eleven ska nå upp till processnivå, det vill säga när man kan se representationerna som olika perspektiv på funktionsbegreppet. Vidare bör denna missförståelse kunna visa sig i jämförelsen mellan alla olika representationsformerna.

O-NR, O-AR, O-GR, O-VR, O-SD, O-MD, O-B – Okännedom om numerisk-, algebraisk-, grafisk- eller vardaglig representation samt okänndedom om skriftlig- och muntlig definition och beteckning.
Dessa hinder är inte hämtade från tidigare forskning utan är istället definierade av oss själva. De syftar på att den lärande inte har någon som helst kunskap om de olika representationerna av funktionsbegreppet. Anledningen till att vi har formulerat dessa är att vi bland de elever som gav indikationer på bristande grundläggande kunskaper ville identifiera vilka som inte kände till vad representationen innebar, vilket mer eller mindre gör alla indikationer på hinder meningslösa då de helt enkelt inte vet. Att känna till att en specifik representation existerar behöver dock inte innebära att eleven generellt ligger på Pre-actionnivå. Det går att nå en tämligen strukturell förståelse utan att ha kunskap om samtliga representationer.

Tabell 1 – Denna matris ger översikt över hindrens kategorisering inom olika aspekter och för olika nivåer. Vilken kolumn ett hinder är placerat i visar vilken förståelsenivå hindret utgör en blockering för. Vilken rad ett hinder är placerat i visar vilka aspekter hindret kan visa sig inom. Förklaring av förkortningar ges under avsnitt ”4.2.5 Kategorisering av hinder”.

	Pre-action	**Action**	**Process**	**Object**	**Procept**
Numerisk	O-NR	S-HBO S-HOB	S-SBO S-ÖAN S-ÖGN M-FL M-FBR	S-TIN M-KFI M-FMF	S-BSF
Algebraisk	O-AR	S-HBO S-HOB S-AFB M-FXY M-AEF	S-SBO S-ÖGA S-ÖKA S-ÖNA S-ÖVA M-FL M-FBR	S-PFG M-KFI M-FMF	S-BSF
Grafisk	O-GR	S-FRS S-HBO S-HOB M-AFF M-VIM	S-SBO S-ÖAG S-ÖNG M-FL M-FBR	S-FEG S-TIN S-PFG M-DFI M-FMF	S-BSF
Vardaglig	O-VR	S-HBO S-HOB S-VFB	S-SBO S-ÖAV M-FL M-FBR	S-TIN M-KFI M-FMF	S-BSF
Kinestetisk		S-HBO S-HOB	S-SBO M-FL M-FBR	S-TIN M-DIR M-FMF	S-BSF
Skriftlig definition	O-SD		M-FL		
Muntlig definition	O-MD		M-FL		
Beteckning	O-B	M-FXY M-AEF	M-FL		

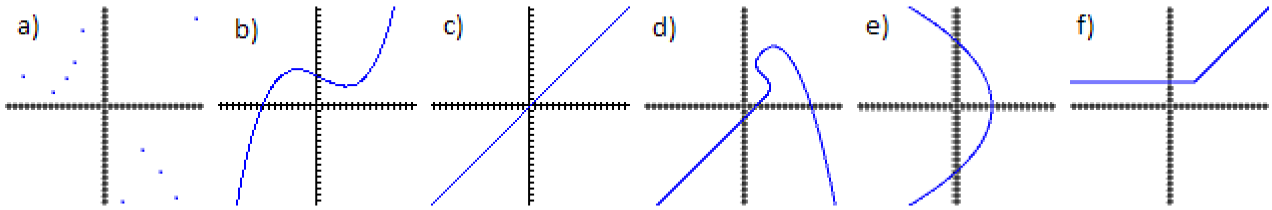
4.3 Test av modell

Modelltestet gjordes genom att utforma ett test bestående av uppgifter som syftade till att utvinna information om den lärandes förståelsenivå och vilka hinder som blockerar den lärande från att utveckla sin förståelse av funktionsbegreppet. Till testet gjordes även en tolkningsguide för att effektivt kunna bedöma elevernas nivå och existerande hinder inom respektive aspekt. Därefter fick 22 stycken elever som gick andra året på ekonomiprogrammet genomföra testet. När diagnosen presenterades för eleverna gav vi dem instruktionen att de skulle gissa ifall de var osäkra. Detta gjorde vi med avsikt att de skulle säga det de trodde då de hade en åsikt men inte var helt säkra och därmed visa mer av sin begreppsbild. Efter detta tolkades deras resultat med hjälp av tolkningsguiden som återges nedan. Modelltestet syftade till att exemplifiera hur arbetet med modellen kan gå till samt att testa den i utvecklande syfte. I exemplifieringen av hur FH-modellen kan användas ingår även att försöka identifiera eventuella svagheter och aspekter att vara uppmärksam på i denna. Detta test går ut på att vi använder FH-modellen för att utforma ett diagnostiskt test för en gymnasieklass, och målet är att identifiera vilka eventuella hinder eleverna har för sin fortsatta förståelseutveckling inom funktionsbegreppet. Om användandet av modellen skulle lyckas krävdes alltså att elever huvudsakligen indikerade hinder som hör till förståelsenivåer över den nivå de själva ligger på. För att testa om så var fallen beräknade vi genomsnittet för hur många gånger varje hinder indikerades per elev som bedömts ligga på varje förståelsenivå och fick därmed möjligheten att jämföra mellan förståelsenivåerna. Ifall användningen skulle lyckats skulle med andra ord det genomsnittliga antalet indikationer för olika hinder skilja sig tydligt beroende på vilken förståelsenivå det gällde. När detta test utformades avsåg fråga 1 och fråga 2 att undersöka den lärandes generella nivå av begreppsförståelse inom funktionsbegreppet, medan uppgifterna 3-7 avsåg att testa specifika hinder. Nedan återges en komprimerad version av diagnosens alla frågor i figur 5.

1. Vad skulle du säga att beteckningen, $g(x)$, innebär? Skriv med ord!

2. Om du kort skulle beskriva vad en funktion är, hur skulle du göra det?

3. Vilka av följande anser du kan representera funktioner?



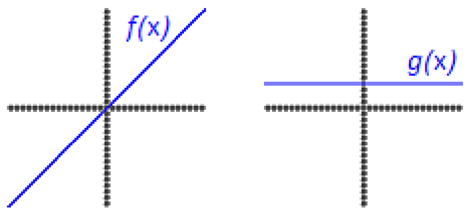
4. Vilken/vilka utav nedanstående skulle kunna representera en funktion?

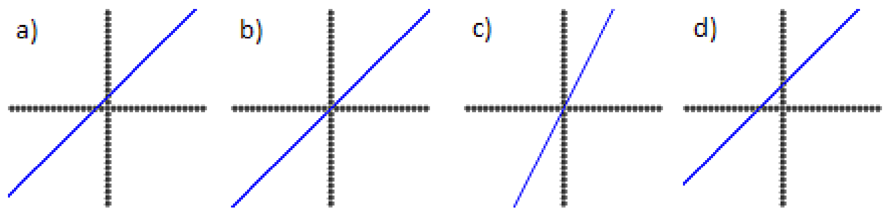
<table>
<tr><td>a) $3=x+15$</td><td>b) $3+x$</td><td>c) $V(t)=V_0+at$</td><td>d) $f(x)=3x+2$</td></tr>
<tr><td>e) $f(x)=\begin{cases} 3 & ,x=1 \\ 2 & ,x=0 \end{cases}$</td><td>f)<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td></tr></table></td><td>g)<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

5. Rita grafen (utan räknare) till den kontinuerliga funktionen som representeras av tabellen:

x	-2,23	-1	0	1,73	2,23
y	6	2	1	4	6

6. Nedan ser du två funktionsgrafer för, $f(x)$ och $g(x)$. Vilken eller vilka utav nedanstående fyra grafer motsvarar $f(x)+g(x)$?





7. Vilka/vilken utav följande beskriver $f(g(x))$, då $f(x)=2x^2+x$ och $g(x)=3x$?

a) $f(g(x))=9$	b) $f(g(x))=3x$
c) $f(g(x))$ existerar inte!	d) $f(g(x))=18x^2+3x$
e) $f(g(x))=2(g(x))^2+g(x)$	f) $f(g(x))=2x^2+x$

Figur 5 – Exemplifierande test som användes i empirisk studie för att utveckla modellen.

Nedan följer en motivation av vad vi hade i åtanke när vi utformade de specifika frågorna i testet som återges i figur 5. Vi kallar nedanstånde för tolkningsguiden för testet eftersom den beskriver hur den lärandes svar på respektive fråga skall tolkas utifrån modellen. För en mer utförlig förklaring av hindren hänvisar vi till avsnitt 4.2.5 (s. 25-30).

Fråga 1 testar elevens förståelse av funktionsbeteckningen och då framförallt om eleven har en mer generaliserad förståelse av beteckningen. Eftersom funktionsbeckningen inte är *f(x)*, innebär det elever kan få svårt att tolka *g(x)* som en funktion. Därför kan missförståelsen, M-FXY, visas genom elevernas svar på denna fråga.

Fråga 2 testar hur elevernas skriftliga definition ser ut men syftar huvudsakligen till att fastställa en elevs generella förståelsenivå. Eleverna kan ange en definition som utesluter de fall då det bara finns ett element i värdemängden, dvs att funktionen är konstant. Om så är fallet visar det på missförståelsen, M-KFI. Beroende på hur utförligt och nyanserat elevens svar på denna fråga är så kan man lägga mer vikt vid vad som är utelämnat. Ett nyanserat svar som inte inrymmer diskreta funktioner kan därför visa på M-DFI.

Fråga 3 går ut på att eleven skall välja de alternativ som grafiskt representerar en funktion. Alternativ (a) är en diskret funktion, (b) är en tredjegradsfunktion och (c) en linjär funktion. Alternativ (d) och (e) är inga funktioner och alternativ (f) är en stegvis definierad funktion. Uteblivna rätta svar motsvarar vissa hinder och valda felaktiga svar motsvarar hinder. Nedan kan man se vilka hinder som motsvaras av vilka val. Om en elev ej identifierar (a) som en funktion visar det på missförståelsen M-DFI, då eleven inte väljer den diskreta funktionen att kunna representera en funktion. Om eleven dessutom väljer alla de övriga alternativen som godtagbara representationer för funktioner indikerar detta missförståelsen M-AFF, då alla övriga alternativ kan anses vara geometriska figurer. Om (b) inte identifieras som funktion indikerar det att en funktions graf inte kan vara böjd och därmed antyds missförståelsen M-FL. Om en elev misslyckas att identifiera (c) som funktion så har denne inte tillgodogjort sig någon bas inom den grafiska representationen av funktioner. Vi benämner detta (O-GR) okännedom om den grafiska representationen. Om (d) anses vara en funktion indikerar det att eleven innehar missförståelsen M-AFF, då denne väljer en kurva som inte representerar en funktion som en sådan. Om (e) anses vara en funktion antyder det att eleven antingen förväxlar den beroende och oberoende variabeln eller att den förväxlar vilken utav axlarna som respektive variabel representeras på. Detta innebär alltså att eleven kan ha svårigheten S-SBO. Det finns dock en missförståelse som också kan få eleven att välja detta alternativ och det är M-AFF. I kombination med om eleven valt alternativ (d) kan detta utredas på så sätt att om eleven väljer (d) och (e) visar det på M-AFF medan om eleven enbart väljer (e) visar det på S-SBO. Om inte (f) identifieras som funktion tyder det på missförståelsen M-FMF, på så sätt att elever som inte identifierar (f) att representera en funktion kan tro att funktioner måste ha <u>en</u> formel och därmed måste de ha linjer och kurvor som inte gör abrupta riktningsändringar i en punkt.

Fråga 4 är en flervalsuppgift där alternativ (c), (d), (e) och (f) är rätt. Att så många alternativ är rätt minskar drastiskt risken att en elev med något hinder klarar av uppgiften utan att avslöja detta. Om eleven misslyckas med att välja någon av dessa syftar det på ett hinder. Vilket är angivet nedan. De felaktiga alternativen är också representanter för olika hinder. Nedan är en redogörelse för vilka hinder varje valt eller icke-valt alternativ motsvarar. Om (a) anses vara funktion visar det på att eleven inte kan göra skillnad på ett algebraiskt funktions respektive ekvationsuttryck. Därmed kan missförståelsen M-AEF visas om eleven väljer detta alternativ. Om (b) anses vara en funktion visar det på ett övergeneraliserat funktionsbegrepp inom den algebraiska representationen, vilket innebär att eleven inte kan skilja ett uttryck från en algebraisk representation av en funktion. Detta innebär att inom ramen för funktionsbegreppet visar eleven på svårigheten S-AFB om detta alternativ väljs. Om inte (c) identifieras som en funktion visar det på missförståelsen M-FXY, eftersom eleven då inte urskiljer en funktion som har andra symboler som representanter än de vanligaste *f, x, y*. Ifall inte (d) identifieras som funktion visar det på (O-AR) okännedom om den algebraiska representationen av funktioner. Om inte (e) identifieras som funktion visar det att eleven kan ha missförståelsen M-FMF, vilket innebär att eleven kan tro att en funktion bara kan ha en formel och därmed ser det för konstigt ut med en sådan stegvis uttryckt funktion. Om inte (f) identifieras som funktion visar det på (O-NR) okännedom om den numeriska representationen av funktioner. Om (g) anses vara en funktion visar det på svårigheten S-SBO, då eleven inte uppfattar att den oberoende variabeln här äger egenskaper som bara en beroende variabel kan ha. Det vill säga att den antar samma värde för två olika värden från den andra mängden.

Fråga 5 går ut på att testa elevernas förmåga att konstruera en graf utifrån en tabell. Eleverna kommer behöva rita ett koordinatsystem för att plotta punkterna och sedan extrapolera en kurva genom dessa. Under tillverkningen av koordinatsystemet kan svårigheten S-FRS, visas om eleven graderar axlarna på ett sådant sätt att det blir omöjligt att lösa uppgiften. Beroende på elevens nivå av förståelse inom respektive representation kommer eleven att lyckas olika bra, detta kan ge information om eleven har missförståelsen M-FBR. När eleven väl plottat ut punkter och skall rita grafen kan det hända att eleven väljer att interpolera istället för att extrapolera kurvan. Detta skulle visa på missförståelsen M-FL. Eleverna kan antingen förväxla x och y värden vid plottningen eller anpassa kurvan på ett sådant sätt att den får två y-värden för något x och i båda fallen kan det visa svårigheten S-SBO. Om eleven klarar plottningen utan problem men faller då denne skall extrapolera kurvan genom punkterna visar detta på svårigheten S-PFG.

Fråga 6 består i att addera två funktioner grafiskt och sedan välja det alternativ man anser representera lösningen. De fyra alternativen består i (a) och (b) där lutningen är korrekt men skärningen i y-axeln inte stämmer. Alternativ (a) är med för att elever på en pre-action nivå kan tänkas välja denna då skärningen i y-axeln ligger mitt emellan de skärningar som graferna i uppgiftsformuleringen har. Eleverna kan dessutom tycka att alla linjer skall gå genom origo, vilket motiverar att (b) utgör ett alternativ. I alternativ (c) är lutningen två gånger större än i övriga. Anledningen är att testa om eleverna blandar ihop egenskaperna för lutning och och y-axelns skärning när de skall lösa uppgiften. Alternativ (d) är rätt. Om eleven inte svarar (d) det vill säga om eleven inte klarar uppgiften visar det på svårigheten, S-FEG. Ifall eleven svarar (a) eller (c) visar det även på svårigheten S-FEG, men mer specifikt kan den bero på att man i den grafiska representationen blandar ihop höjd och sluttning. Om eleven svarar (b) kan det visa på missförståelsen M-KFI, då svaret kan bero på att eleven inte anser *g(x)* vara en funktion eftersom den är konstant eller inte har någon lutning.

I *Fråga 7* skall eleven ta fram funktionen som är sammansatt av de två angivna funktionerna. Eleven behöver behärska notationen väl för att klara uppgiften och dessutom kunna behandla ett funktionsuttryck som ett objekt. Det finns sex alternativ varav alternativ (d) och (e) är rätt. För att kunna avgöra om alternativ (d) är rätt behöver eleverna dessutom göra några algebraiska förenklingar. Anledningen till att vi har två alternativ som är rätt är för att minska sannolikheten för de elever som bara chansar att få rätt. Det är troligt att en elev som lyckas pricka i både (d) och (e) faktiskt ligger på en procept-nivå av förståelse inom betecknings- och algebraiskt uttryck, medan en elev som bara prickar (d) kan tänkas ligga på object-nivå, såvida denne inte chansat. De felaktiga svaren utgörs av (a), (b), (c) och (f). Ifall en elev anger (a) som sitt svar har denne inte en aning om vad uppgiften innebär. Om eleven däremot svarar (b) eller (c) kan det bero på att eleven anser att funktioner bara kan vara linjära och får då svårt med x-kvadrat termen i funktionsuttrycket för *f(x)*. Det visar på missförståelsen M-FL. Ifall en elev svarar (e) som är rätt men inte svarar (d) visar det svårigheten S-BSF, men kan också innebära att denne förstår att använda funktionsbeteckningen på en högre nivå än vad eleven kan behandla algebraiska uttryck. Ifall en elev inte svarar (e) visar det på svårigheten S-TIN, eftersom eleven inte klarar av att substituera x mot ett icke-numeriskt uttryck.

4.3.1 Etiska ställningstaganden

Inom samhällsvetenskaplig forskning finns fyra huvudkrav för att en undersökning skall kunna genomföras på ett etiskt riktigt sätt. Nedan kommer dessa att nämnas varpå våra avväganden utifrån varje enskilt krav redogörs för.

Första kravet är informationskravet och innebär att ”Forskaren skall informera de av forskningen berörda om den aktuella forsknings- uppgiftens syfte” (Vetenskapsrådet 2002:7). Med detta i åtanke informerade vi om vårt syfte på två olika sätt. Vi började med att informera läraren om att vi höll på att utveckla en modell att användas vid formativ bedömning och att vi därför vill låta eleverna göra ett test som behandlar funktionsbegreppet för att testa vår modell. Detta gjordes några dagar i förväg för att läraren skulle kunna informera och förbereda eleverna på att vi skulle komma. Inför testet i klassrummet informerade vi eleverna om detta igen.

Det andra kravet är samtyckeskravet som innebär att ”Deltagare i en undersökning har rätt att själva bestämma över sin medverkan” (Vetenskapsrådet 2002:9). Vi informerade eleverna om att det var frivilligt att delta i undersökningen och göra testet. Läraren ville dock att vårt test skulle utgöra ett undervisningsinslag och vi höll därför i hela lektionen och efter testet hade vi en teorisammanfattande genomgång av det. Då vår undersökning på detta sätt blev en del av undervisningen kan det tänkas att det var svårt för en elev som inte velat delta att neka deltagande. Den aspekt som gjorde att vi ändå tyckte det var ett korrekt genomförande var att alla elever i undersökningsgruppen var myndiga vid tillfället då undersökningen gjordes med elever som går andra året på gymnasiet vilken är en frivillig skolform. Eleverna kunde dessutom välja att inte lämna in sina svar på testet vilket ökade frivilligheten ytterligare.

Det tredje kravet är konfidentialitetskravet vilket innebär att ”Uppgifter om alla i en undersökning ingående personer skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifterna skall förvaras på ett sådant sätt att obehöriga inte kan ta del av dem” (Vetenskapsrådet 2002:12). Vi har i denna studie endast samlat in anonyma data då eleverna inte inte skrev namn på sina testsvar.

Det fjärde kravet nyttjandekravet och innebär att ”Uppgifter insamlade om enskilda personer får endast användas för forsknings- ändamål” (Vetenskapsrådet 2002:14). Denna typ av uppgifter har vi inte samlat in i denna studie.

4.3.2 Validitet och reliabilitet

Testdesignen har troligen vissa begränsningar på grund av vår bristande erfarenhet, men enligt Esaiasson et al (2007:133) finns trots detta ”goda möjligheter att ändå komma fram till relevanta resultat”, så länge vi håller i minnet att studien är teoriutvecklande. När eventuella tydliga brister i användandet av modellen har fått chansen att uppmärksammas skulle ett validitetstest kunna ske i syfte att ge information om huruvida modellens förutsatta hypotes stämmer (Jfr Esaiasson et al, 2007:133-134). Denna hypotes kan som redan nämnts falsifieras om det visar sig att det inte finns någon korrelation mellan den lärandes förståelsenivå och dennes hinder. En sådan undersökning måste dock ske på betydligt mer omfattande skala. Detta innebär alltså att vi mer eller mindre har förutsatt att validiteten för modellens användande är låg och att vi har fokuserat studien på att uppmärksamma vilka faktorer som orsakar detta, i syfte att öka validiteten hos modellen.

Validiteten och reliabiliteten för denna kvalitativa teoriutvecklande studie kan vi bara motiveras utifrån att vi är två som har tolkat resultaten och att våra åsikter rörande slutsatserna har överensstämt. Detta ger enligt Stukát (2005: 129) en högre reliabilitet än ifall endast en av oss hade genomfört det eller att båda genomfört det men varigt oeniga. Samtidigt skulle reliabiliteten ökats ytterligare ifall fler och dessutom oberoende personer skulle tolkat resultaten. Men återigen ska det då poängteras att syftet med denna empiriska studie inte är att belägga vissa bristers påverkningsgrad utan helt enkelt att uppmärksamma tidigare okända brister. Alltså torde det inte utgöra något problem att reliabiliteten inte är högre än vad den är i detta skede.

5 Resultat

Eleverna fick upp till 30 minuter på sig men samtliga var klara efter 10 minuter.

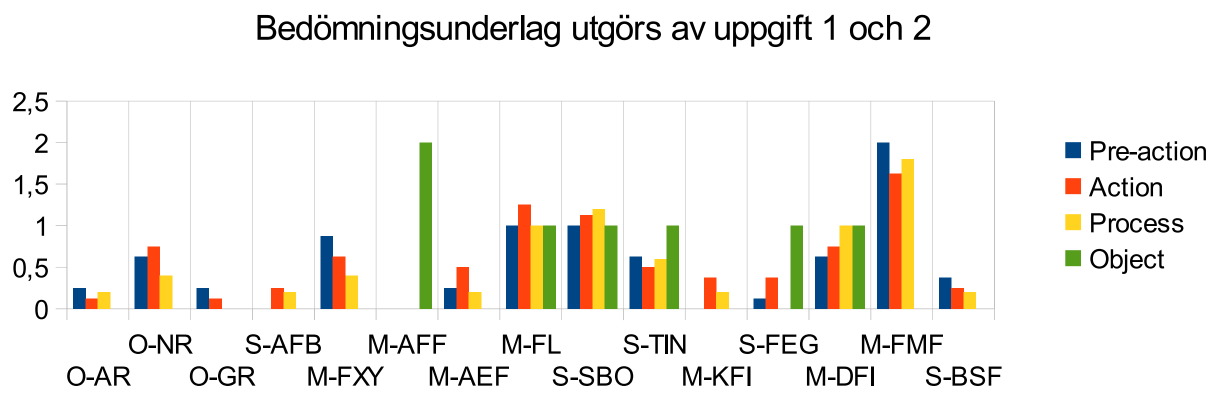
Tyvärr framgår det av tolkningen av elevernas svar att diagnosen inte gav tydliga resultat på alla frågorna. Förhoppningen var att diagnosen dels skulle ge oss en tydlig bild av vilken förståelsenivå varje elev befann sig på, och utöver detta vilka hinder som står i vägen för varje elevs fortsatta utveckling. Dessvärre visade det sig att de svar eleverna gav på de två första uppgifterna, vilka var avsedda att ge insikt i deras förståelsenivå, lämnade en viss osäkerhet om respektive elevs förståelse. Exempelvis angav inte vissa elever något svar alls på de två första frågorna. FH-modellen förutsatte emellertid att det var möjligt att ta sin utgångspunkt i dessa svar då man tolkade efterföljande uppgifter för att avgöra vilka hinder som står i vägen för utvecklingen till nästa nivå.

När diagnosens tolkningsguide skulle användas för att kartlägga de indikerade missförståelserna från uppgift 5 (se figur 5, s. 32) insåg vi att det fanns stora svårigheter med att identifiera missförståelserna. På grund av detta blev indikationerna av olika hinder hos eleverna delvis baserade på vår subjektiva tolkning av deras lösningar på just den uppgiften. Konsekvensen av detta blev då att det dels gick att tolka in väldigt många hinder i deras svar, eller var svårt att identifiera några hinder trots att de gett ett underligt svar. I slutändan tvingades vi konstatera att vi inte kunde använda uppgift 5 till kartläggning av deras hinder på grund av osäkerheten.

Frågorna 3,4, 6 och 7 fungerade dock utmärkt då de gav tydliga indikationer på olika hinder hos olika elever. Det finns dock ett undantag, ibland hände det att elever uppvisade indikationer på ett visst hinder på en uppgift och sedan inte gjorde det på andra uppgifter där samma hinder borde indikerats. Detta orsakar en viss osäkerhet om ifall eleven har hindret eller inte.

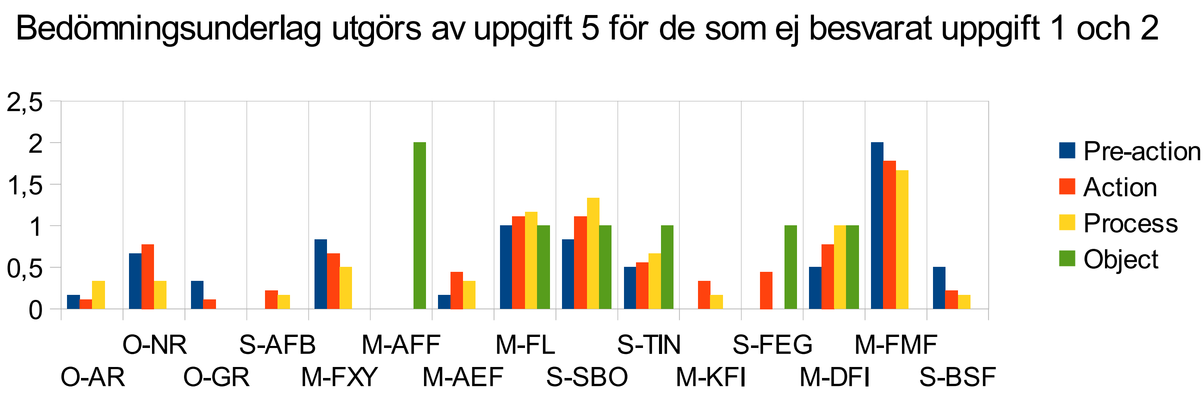
Nästa moment i FH-modellen går ut på att de indikerade hindren korsjämförs med matrisen för att se vilka som ligger på den nivå som är precis ovanför den nivå som eleven bedömts ligga på. Detta moment gick att genomföra och gav oss en lista med hinder för varje elev.

Nedan följer tre diagram som visar hur många gånger indikationer på de testade hindren i genomsnitt uppvisades av elever vars förståelse bedömts ligga på respektive nivå. Varje av dessa tre diagram motsvarar olika bedömningar av elevernas förståelsenivå som gjordes utifrån lite olika bedömningsunderlag. På grund av att olika hinder gavs möjlighet att indikeras olika många gånger i testet kan ingen jämförelse göras mellan olika hinders indikationsfrekvens. Jämförelse kan bara göras av indikationsfrekvensen för varje enskilt hinder mellan olika förståelsenivåer.



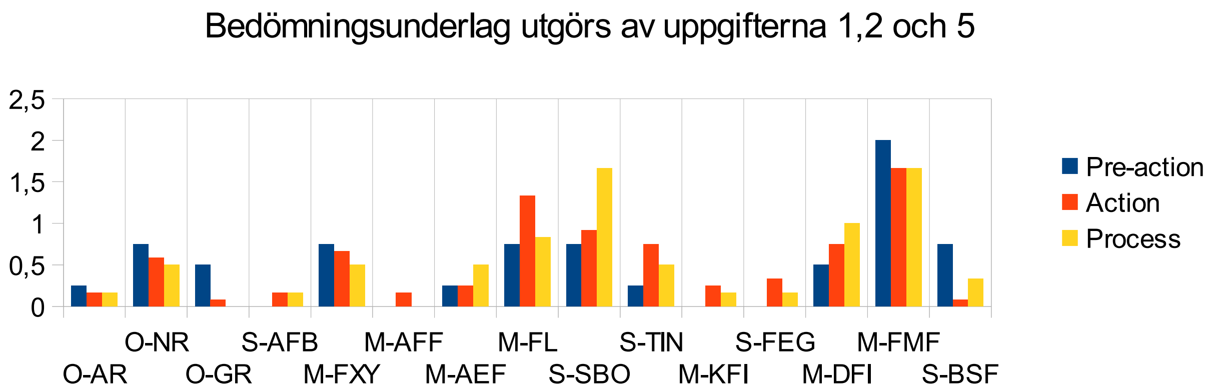
Figur 6 – Diagrammet visar hur många gånger respektive hinder i genomsnitt indikerades per elev som bedömts ligga på respektive förståelsenivå. Hindren är placerade på X-axeln medan Y-axeln visar antal indikationer. För uttydning av hindrenas förkortningar se avsnitt 4.2.5.

Från diagrammet kan man inte se att det finns något samband mellan vilken förståelsenivå en elev befinner sig på och vilka hinder denne indikerar. Den enda skillnaden som går att urskilja är inom objektnivå-grupperingen. Tyvärr är det endast en elev som bedömdes ligga i den grupperingen vilket innebär att det lika väl kan vara ett undantag som regel. På grund av att osäkerhet på nivåbedömningens pålitlighet och avsaknaden av stöd för samband mellan förståelsenivå och indikerade hinder som nämndes ovan gjordes två ytterligare varianter av bedömningar av elevernas förståelsenivå utifrån diagnosen. Den andra baserades på att vi för de elever som inte angett något svar på frågorna 1 och 2 använde oss av vår analys av deras svar på fråga 5 för att bedöma deras nivå och återges i diagrammet nedan



Figur 7 – Diagrammet visar hur många gånger respektive hinder i genomsnitt indikerades per elev som bedömts ligga på respektive förståelsenivå. Hindren är placerade på X-axeln medan Y-axeln visar antal indikationer. För uttydning av hindrens förkortningar se avsnitt 4.2.5.

Återigen framgår inga tydliga tecken på något samband mellan förståelsenivå och vilka hinder som indikerades, med undantag för samma fall som ovan. Den tredje nivåindelningen gick ut på att vi använde oss av fråga 5 i vår bedömning av samtliga elever, men då som en jämbördig faktor med uppgift 1 och 2.



Figur 8 – Diagrammet visar hur många gånger respektive hinder i genomsnitt indikerades per elev som bedömts ligga på respektive förståelsenivå. Hindren är placerade på X-axeln medan Y-axeln visar antal indikationer. För uttydning av hindrenas förkortningar se avsnitt 4.2.5.

Den stora skillnaden i den här fallen jämfört med de två tidigare är att den elev som enbart utifrån uppgift 1 och 2 hade bedömts ligga på objektsnivå nu bedömdes ligga på actionnivå när uppgift 5 togs med som underlag. Precis som innan framgår det dock ändå inget tydligt samband mellan förståelsenivå och indikerade hinder, även om vissa tendenser framträder bland annat för S-SBO, det vill säga ”svårighet att skilja mellan beroende och oberoende storhet” samt M-FL, vilket syftar på missförståelsen ”en funktion måste vara linjär” (se avsnitt 4.2.5 för utförligare förklaring av dessa hinder).

6 Analys

Syftet med användning av modellen är som tidigare nämnts att den ska kunna utvinna information om vilka hinder som är viktigast för en elev att arbeta med för att utveckla sin förståelse till nästa nivå. I detta test av modellen lyckades detta inte, och därmed har vi belägg för att det faktiskt finns tydliga brister i modellen eller användningen av denna. Nedan försöker vi reda ut vad dessa brister kan utgöras av.

Utifrån de diagram som presenterades i resultatet är det svårt att belägga att ett samband finns mellan en elevs bedömda förståelsenivå och de hinder som indikerades för denne. Istället tyckte vi oss se att vissa elever inte uppvisade hinder då de enligt FH-modellen borde gjort det. Detta kan enligt oss tolkas på fyra olika sätt. Det första sättet är att modellens grundhypotes inte stämmer, det vill säga att olika hinder alltså inte utgör en blockering för en specifik förståelsenivå. Det andra sättet är att vår bedömning av elevernas förståelsenivå var felaktig. Det tredje sättet är att de uppgifter som avsågs att undersöka vilka hinder som förekom hos eleverna inte gjorde detta. Den fjärde tolkningen är att en elev kan befinna sig på olika förståelsenivåer inom olika aspekter av funktionsbegreppet. Av dessa tolkningar är det bara en vi kan styrka, och det är att vår bedömning av eleverna var felaktig. Det belägg vi har för detta är att vi vid genomförandet av bedömningen, tyckte att det var mycket svårt utifrån det underlag vi hade till vårt förfogande, även när uppgift 5 användes. Efter vi väl genomfört bedömningen utifrån lite varierande underlag tvivlade vi fortfarande stark på bedömningens trovärdighet. Med andra ord lyckades vi inte fullgöra moment 1 i FH-modellen. De uppgifter som låg till grund för moment 1 behandlade enbart den skriftliga definitionen och beteckningen av funktionsbegreppet, samt även den grafiska representationsformen. Tolkningen att en elev kan befinna sig på olika förståelsenivåer inom olika aspekter av funktionsbegreppet kan vi dessvärre varken belägga eller vederlägga, utan vi kan bara konstatera att vi har uppmärksammat det som möjlig orsak till att arbetet med modellen misslyckades då modellen inte tagit hänsyn till detta. Tolkningen att modellens grundhypotes inte stämmer och tolkningen att uppgifterna som avsåg undersöka elevens hinder inte fungerade tycker vi oss ha underlag, om än mycket tunt, för att avfärda. Detta underlag utgörs av vad som går att urskilja ur det tredje diagrammet där en tendens går att urskilja gällande relationen mellan förståelsenivå och hindren M-FL och S-SBO.

Det tredje diagrammet återges i figur 8 och baserades på bedömningen med fråga 1, 2 och 5 som underlag. Här går det att se att missförståelsen ”en funktion måste vara linjär” (M-FL) indikeras över 50% oftare hos elever på förståelsenivån action än hos elever av både förståelsenivån preaction och process. Denna missförståelse utgör enligt vår matris (se tabell 1) ett hinder för att uppnå processnivå, vilket alltså styrks av att det framför allt är elever på nivån action som indikerar det. Det bör dock samtidigt nämnas att det inte är helt entydigt, då det fortfarande förekommer att detta hinder indikeras för elever av de andra två förståelsenivåerna.

I samma diagram (figur 8) identifierades även att ”Svårighet att skilja mellan beroende och oberoende storhet” (S-SBO) indikerades betydligt oftare av elever som bedömts ligga på förståelsenivån process. Mer exakt förkom indikationer för S-SBO mer än dubbelt så ofta hos elever som bedömts ligga på förståelsenivån process jämfört med elevers som bedömts ligga på förståelsenivån preaction. På samma sätt förkom indikationer nästan dubbelt så ofta hos elever på processnivån jämfört med elever på actionnivån. Detta talar emot den kategorisering FH-modellens matris innefattar där S-SBO anges vara ett hinder för processnivå, och antyder snarare att S-SBO utgör ett hinder för den lärande att uppnå objektnivå.

Vi fann att fråga fem inte hade en sådan diagnostisk karaktär som den först var avsedd att ha. I resultatet återges det att det tog väldigt lång tid att analysera elevernas svar. Denna typ av fråga lämpar sig mer för att utvinna information till moment 1 i FH-modellen. Anledningen till detta är att det är så mycket subjektivt tolkningsjobb från lärarens sida för att utröna de missförståelser som ligger bakom eventuella felsvar. Detta gör att den inplacering av hinder som vi gjort i bedömningsanvisningen för uppgiften är meningslös, då vår tolkning av de olika elevernas lösningar kunde visa på flera andra hinder än de vi på förväg avsett. Däremot kunde vi utifrån elevernas lösningar på uppgiften skaffa oss en bättre uppfattning om elevernas generella förståelsenivå. Det innebär att denna fråga lämpar sig bättre som underlag för moment 1 i FH-modellen och bör därför placeras tidigare i ett nytt test. Även när den femte uppgiften användes som underlag för bedömning av elevernas förståelsenivåer visade det sig fortfarande vara otillräckligt för att en trovärdig bedömning skulle kunna göras. Därför tror vi att det behövs åtminstone fem olika uppgifter inom inom olika representationsformer för att ge en tydligare bild av den lärandes förståelsenivå. Vi motiverar just antalet fem utifrån att tre uppenbarligen inte var tillräckligt men att det samtidigt blev bättre då antalet gick från två till tre. Anledningen till att vi inte vill sätta ett högre antal är att avsikten med diagnosen är att kunna användas mitt i ett undervisningsområde och bör därför inte ta för lång tid.

De diagnostiska frågorna 3, 4, 6 och 7 visade sig ge mycket specifik information om vilka hinder eleverna kan ha. Dessa uppgifter var till skillnad från fråga 5 flervalsuppgifter vilket gjorde att vår tolkningsguide gav tydliga indikationer på specifika hinder. Det som var sämre med frågorna var att man faktiskt kunde gissa på dem vilket ger vårt resultatmaterial en stor osäkerhet. Det nämndes även i resultatet att vi gav eleverna instruktionen att de skulle gissa om de inte visste säkert vilket vi först senare insåg kunde orsaka osäkerhet i våra resultat.

7 Diskussion

7.1 Slutsatser

Vi fann att mycket forskning är gjord kring hur förståelse av funktionsbegreppet kan delas in i kvalitativa nivåer, och att flertalet nivåindelningar för detta är upprättade. De nivåindelningar vi har utgått ifrån och återgett är snarlika och tydligt jämförbara vilket också visats. Vi är dock medvetna om att minst en ytterligare nivåindelning existerar. Vi har dock på grund av svårigheter att få tag i en primärkälla avstått från att beskriva denna.

De svårigheter och missförståelser vi har funnit återgivna i tidigare forskning har i största utsträckning bestått i de vanligaste och allvarligaste hindren för förståelse. Detta innebär att det kan finnas betydligt fler men mindre allvarliga hinder som forskningen har uppmärksammat men utelämnat eller inte uppmärksammat över huvud taget. Speciellt inom vissa aspekter av funktionsbegreppet är hinder för förståelse sällan återgivna i den forskning vi tagit del av.

Vi anser att vi genom vårt arbete faktiskt har lyckats att demonstrera hur specifika hinder kan ordnas under specifika förståelsenivåer. Det ska dock tilläggas att indelningen helt saknar empiriskt stöd, då den enkla empiriska studie vi genomförde delvis syftade till att utveckla modellens användning snarare än att testa varken grundhypotesen eller varje delhypotes. De svaga indikationer som möjligen kan erhållas från denna mycket begränsade studie är dock inte pålitliga. Detta då vi uppmärksammat att underlaget för att bedöma elevernas förståelsenivå var otillräckligt för någon form av trovärdighet. Vi bedömer därför vår empiriska studie otillräcklig för att belägga eller vederlägga vår grundhypotes. Däremot utgör den empiriska studien underlag för hur modellens användning kan förbättras och exemplifierar även för läraren hur modellen är avsedd att användas.

7.2 Diskussion kring empirisk studie

I analysen diskuterades några möjliga orsaker till de fenomen som nämndes i resultatet. Orsakerna som där nämndes låg där inte i FH-modellen själv, utan snarare i användningen av FH-modellen. Detta medför givetvis att ytterligare empiriska undersökningar borde göras i syfte att utveckla FH-modellen. Innan dessa undersökningar genomförs förslår vi att några förändringar sker i metoden. Den första ändringen är att större vikt måste läggas vid utredandet av en elevs förståelsenivå. Under den tidigare undersökningen användes bara två, alternativt tre, uppgifter som bedömningsunderlag för elevens förståelsenivå. Än värre är att dessa uppgifter därmed bara omfattar tre aspekter av funktionsbegreppet vilket skulle kunna ge en skev bild av eleven generella förståelse. Anledningen att både DeMarois och Tall (1996) samt Janvier (1984, i Bergsten et al 1997) belyser de olika aspekterna av funktionsbegreppet är för att det är svårt att förstå utan att betrakta från flera perspektiv. Detta medför att en elev möjligen kan ha olika avancerad förståelse inom olika aspekter, och ifall enbart de aspekter där eleven har en relativt avancerad förståelse testas kan denne bedömas ligga på en högre förståelsenivå än denne borde. Därför anser vi att när en diagnos utformas efter denna modell bör så många som möjligt av aspekterna testas. Diagnosen tog som nämnt endast 10 minuter att genomföra och då FH-modellen förespråkar att en diagnos max ska ta 30 minuters att genomföra finns det alltså utrymme för att utöka denna del i diagnosen.

I analysen diskuteras också uppgifterna som rör moment 2 i FH-modellen. Uppmaningen vi gav om att eleverna skulle gissa när de inte visste vad som var rätt alternativ på en uppgift kan ha orsakat missvisande svar på dessa. Vi var ute efter att efter att en elev inte skulle låta tveksamhet hindra denne från att svara det denne trodde på, men istället kan det ha lett till att elever ger helt slumpartade svar. Vi skulle vilja rekommenderar att man ger instruktioner till de lärande att de skall ange ett svar om de är osäkra men har en åsikt, dock skall de ej lämna svar om de inte har någon aning. Vidare anser vi att det skall finnas ett svarsalternativ på flervalsuppgifter som innebär att ”inget av alternativen stämmer”. Detta för att det skall kunna gå att särskilja mellan en elev som inte har någon aning och en elev som anser att inget av alternativen stämmer. Utöver detta anser vi även här att frågorna tillhörande detta moment också är för få till antalet då inte alltid ett visst hinder ges utrymme att indikeras flera gånger. Anledningen till att detta bör ges möjlighet till är för att öka indikationens trovärdighet. Vilket motiveras av att det i resultatet framgick att elever ibland uppvisade en indikation på ett visst hinder i vissa uppgifter, men i andra uppgifter inte uppvisade indikationer på samma hinder, trots att möjligheten fanns.

7.3 Konsekvenser för undervisning

Rent logiskt passar FH-modellen väldigt bra in som ett verktyg att utvinna kvalitativ information om elevernas förståelsenivå som en del i arbetet med formativ bedömning. FH-modellen sträcker sig dock inte längre än så utan det är upp till varje enskild lärare att använda den information som utvinns från eleverna med hjälp av FH-modellen och förse dessa med feedback som gör att eleverna får chansen att övervinna sina hinder och ta nästa steg i utvecklingen av sin matematiska förståelse. Förutsatt att modellens grundhypotes stämmer så har modellen stor potential att kunna användas i undervisningen. Den diagnos vi genomförde tog endast tio minuter och en sådan diagnos kan utan problem ta de 30 minuterna vi ursprungligen avsåg utan att den stjäl för mycket tid från undervisning och övning. Detta ger alltså möjlighet att genomföra en tämligen utförlig diagnos och få en god uppfattning om vilken nivå en elevs förståelse ligger på och vilka hinder som blockerar dennes utveckling. Enligt vår erfarenhet är det många lärare som är skeptiska till begreppet formativ bedömning huvudsakligen utifrån argumentet att det tar för mycket tid i förhållande till vinsterna. En modell vars användning visar sig vara mycket tidseffektiv och som dessutom ger tydliga anvisningar om vad elever främst behöver arbeta med för att utvecklas kan därför utgöra den brygga som krävs för att få dessa lärare att anamma konceptet med formativ bedömning. FH-Modellen erbjuder även läraren att använda den när denne går mellan elever för att hjälpa dem i deras övande. Då kan läraren med kunskap om hindrena återgivna i modellen snabbt testa av ifall en elevs misstag beror på specifika hinder. Detta sker i så fall givetvis utifrån att läraren har en relativt god uppfattning om elevens förståelsenivå och därför kan avgöra vilka indikerade hinder som är mest brådskande att åtgärda.

För närvarande saknar FH-modellen tillräckligt empiriskt underlag. Den lilla empiri som är gjord inom modellen gjordes i avsikt att uppmärksamma aspekter i modellen och dess användning som kan utvecklas och förbättras. Detta medför givetvis att FH-modellens trovärdighet ännu inte är verifierad. Ifall en lärare i nuläget ska använda FH-modellen i sin undervisning måste detta göras

utifrån att läraren håller med om det resonemang som ligger bakom kategoriseringen av hinder. Det vill säga att läraren kan styrka kategoriseringen med sin egen erfarenhet.
Även ifall modellens grundhypotes skulle falsifieras utgör ändå den sammanställning av svårigheter och missförståelser som modellen innefattar en hjälp för lärare att se och förstå vad som kan ligga bakom fel elever gör i sina uträkningar eller resonemang. Att som lärare analysera en elevs uträkning för att komma fram till hur denne resonerar när det blir fel är en förmåga som många lärare enligt vår erfarenhet är bra på. Problemet består i att en sådan analys tar mycket tid och där kan en sammanställning av kända hinder vara till stor nytta, även om de inte skulle korrelera med elevens förståelsenivå.

7.4 Förslag till vidare forskning

Vår studie bygger på att man faktiskt kan placera missförståelser specifika förståelsenivåer, men på grund av att vi i tidigare forskning inte funnit liknande studier saknar vår kategorisering av hinder empiriskt stöd. Vi har istället använt vår egen förståelse av funktionsbegreppet tillsammans med den forskning om nivåer av förståelse till att placera hindren på respektive nivå. Detta innebär att vår modell ännu saknar empirisk grund. Vi vill därför ge som förslag för vidare forskning att en större empirisk studie görs i syfte att pröva grundhypotesen vi utgår ifrån. Alltså att pröva ifall varje hinder blockerar någon specifik förståelsenivå av funktionsbegreppet.

Vidare skulle vi vilja se en större metastudie som utreder och sammanställer de hinder för förståelse av funktionsbegreppet som forskning har uppmärksammat. Ifall bristande empiriskt underlag för sådana hinder visar sig vill vi även föreslå ytterligare studier för att kartlägga tidigare okända hinder.

Vi skulle även vilja föreslå att vår modell efter ytterligare genomarbetning även prövas i en större empirisk studie med avsikt att belägga eller vederlägga modellen. Ett exempel på detta är att använda vår modell för bedömning i en större urvalsgrupp och sedan utreda ifall det finns någon tydlig korrelation mellan bedömd nivå och indikerade hinder.

FH-modellen exemplifierar hur relationen mellan förståelsenivå och hinder kan se ut utifrån funktionsbegreppet. Denna utformning av en modell borde också vara tillämpbar inom andra matematiska begrepp, däribland variabelbegreppet där vi redan har återgett en befintlig nivåindelning. Det som krävs utöver en nivåindelning av förståelse är även en kartläggning av missförståelser och svårigheter för förståelsen av begreppet.

Litteraturförteckning

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. CBMS Issues in Mathematics Education: *Research in Collegiate Mathematics Education, 6(2)*, 1 – 32.

Bergsten, C., Häggmark, J., & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla. Nämnaren TEMA*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.

Cansız, Ş., Küçük. B., & İşleyen, T. (2011). Identifying the secondary school students' misconceptions about functions. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *15*, 3837-3842.

Carlson, M., Madison, B., & West, R. (2010) *The Calculus concept readiness (CCR) instrument: Assessing student readiness for calculus*. Preprint, arXiv.org.

Chang, Y. H. (2002). Understanding and Learning of Function: Junior High School Students in Taiwan. *Proceedings of 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*. Department of Mathematics, National Taiwan Normal Univeristy.

DeMarois, P., & Tall, D. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*,pp. 297-304,. Valencia, Spain: PME .

Dubinsky, E., & Moses, R. P. (2011). Philosophy, Math Research, Math Ed Research, K–16 Education, and the Civil Rights Movement: A Synthesis. *Notices of the AMS*, *58(3)*, 401-409.

Esaiasson, E. Gilljam, M. Oscarsson, H. & Wängnerud, L. (2005). *Metodpraktikan*. Vällingby: Norstedts Juridik AB.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, *26(2)*, 115-141.

Häggström, J. (2005). Begreppet funktion i historisk belysning. *Normat*, *53(2)*, 82-92. (Göteborg: NCM)

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of mathematical behavior*, *17(1)*, 79-103.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, *20(4)*, 282-300.

Kücheman, D. (1981). Algebra. I K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics*: *11-16*. (pp.102-119). London: Murray

Li, X., & Li, Y. (2008). Research on Students' Misconceptions to Improve Teaching and Learning in School Mathematics and Science. *School Science and Mathematics*, *108(1)*, 4-7.

Rhode Island Department of Education (2007). *Functions and Graphs: A research based unit of* *study for high school teachers.* Providence: Rhode Island Department of Education.

Persson, Per-Eskil (2005), *Bokstavliga svårigheter - Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande*. Luleå: Luleå tekniska universitet

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22(1)*, 1-36.

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Lund: Studentlitteratur AB.

Schwarz, B., Dreyfus, T., & Bruckheimer, M. (1990). *A* model of the function concept three-fold representation. *Computers Educ.*, *14(3)*, 249-262.

Tall, D. O., Thomas, M. O. J., Davis, G. E., Gray, E. M. & Simpson A. P (2000). What is the object of the encapsulation of a process?. *Journal of Mathematical Behavior*, *18(2)*, 1–19.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Warren, E. (1998). Students' understanding of the concept of a variable. Kanes, C., Goos, M & Warren, E. (Eds.) *Teaching Mathematics in New Times*. *Proceedings of the 21st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 661-668). Brisbane: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Wiliam, D. (2011). *Embedded formative assessment*. Bloomington: Solution Tree Press.