GÖTEBORGS UNIVERSITET

”Vi slänger in lite kluringar ibland!”
– Om hur problemlösning används i matematikundervisning.

Mimmie Görrel, Johanna Ståhl och Simon Larsson

LAU395

Handledare: Bengt Andersson

Examinator: Thomas Lingefjärd

Rapportnummer: HT13-2611-74

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Abstract

Examensarbete inom Lärarprogrammet LP01

Titel: ”Vi slänger in lite kluringar ibland!” – Om hur problemlösning används i matematikundervisning.

Författare: Mimmie Görrel, Johanna Ståhl och Simon Larsson

Termin och år: Höstterminen 2013

Kursansvarig institution: Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap

Handledare: Bengt Andersson

Examinator: Thomas Lingefjärd

Rapportnummer: HT13-2611-74

Nyckelord: Problemlösning, Matematiklyftet, Matematikundervisning, Problemlösningsuppgifter

Sammanfattning

Syftet med vårt examensarbete var att se vad verksamma lärare anser att problemlösning är och hur de använder sig utav det i sin matematikundervisning. Vi har genomfört kvalitativa intervjuer med både gymnasielärare och högstadielärare och observerat en lektion för att kunna besvara våra frågeställningar. Vi ville även försöka utreda definitionen av problemlösning. Detta har vi gjort genom att läsa litteratur och berör ämnet.

Det visade sig att definitionen av problemlösning tillslut inte var så lätt att besvara då olika forskare har presenterat olika modeller av vad ett problem och vad lösningen av ett problem är. Detta kunde vi även se i våra intervjuer där åsikterna om vad en problemlösningsuppgift var gick isär hos lärarna. Högstadielärarna som har intervjuats har denna termin deltagit i *Matematiklyftet* och använde sig i större utsträckning av problemlösning i sin undervisning än vad gymnasielärarna gjorde. Vi har jämfört kursplaner tillbaka till 70-talet och speciellt tittat på hur väl de olika kursplanerna belyser just problemlösning. Med tanke på hur de nya styrdokumenten ser ut (Lgr11 och Gy11) så bör även gymnasielärarna se över sin undervisning så de inte missar problemlösning i sin undervisning.

Arbetet har gett oss inblick i hur viktigt det är att använda sig av problemlösning i matematikundervisningen. Det är dock svårt att göra bra problemlösningsuppgifter som utmanar eleverna på en lagom nivå och vi kan se att en god kommunikation mellan lärare leder till mer genomtänkta val av uppgifter. Den japanska metoden att använda sig utav problemlösning har vi också studerat närmare och detta sätt att arbeta blir alltmer etablerat och dyker inte minst upp som en del i *Matematiklyftet.* Lektionen som vi observerade innehöll undervisning *genom* problemlösning som är en självklar del i den japaninfluerade undervisningen, istället för en lektion *om* problemlösning.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

FIGUR- OCH TABELLFÖRTECKNING

1 INLEDNING

Problemlösning har alltid varit mer eller mindre aktuellt när frågor som berör matematik eller matematisk förmåga har diskuterats. Under vår utbildning har vi ofta stött på begreppet som vid första anblick kan te sig som ett relativt enkelt begrepp att definiera. De allra flesta människor har förmodligen någon form av uppfattning av vad det innebär och kan redogöra för begreppet med viss säkerhet. Ofta är det inte själva förmågan problemlösning som är centralt i beskrivningarna, utan snarare uppgifterna där problemlösning måste appliceras. Detta gör att det blir svårare att försöka definiera vad problemlösning är, då ett matematiskt problem kan vara både lämpat, eller inte lämpat beroende på vilken kunskapsnivå eleven ligger på.

Enligt Skolverkets matematikkursplan (Skolverket, 2011 a, b) för både grundskola och gymnasium ska problemlösning ha en central roll i undervisningen vilket belyser vikten av att vi som blivande matematiklärare verkligen förstår vad begreppet innebär och hur vi eventuellt kan använda oss av det på ett mer varierat eller effektivt sätt. Vi har under vår lärarutbildning stött på flera synsätt av problemlösning där även vi fått en något otydlig bild av fenomenet. Under vår verksamhetsförlagda utbildning observerade vi lärare som enbart ansåg att textbaserade uppgifter var problemlösning medan andra lärare använde sig av det mer aktivt i undervisningen.

Vi har även under vår verksamhetsförlagda utbildning deltagit i *Matematiklyftet* som är en nationell satsning från Skolverket som hämtat inspiration från den japanska matematikundervisningen, vilken bedriver sina lektioner helt efter en problemlösningsbaserad metod. Vår nyfikenhet väcktes av hur mycket vi såg att matematiklektionerna förändrades då lärarna arbetade efter modellen och en rad frågor väcktes huruvida det var något som passade alla skolor, hur mycket extra tid det krävdes av lärarna och hur elevens inlärningsupplevelse var. Vid första anblick verkade det vara något omständigt med mycket extra arbete för de inblandade lärarna och ett arbetssätt som togs emot med en viss motvillighet av eleverna. Trots detta verkade det som att metoden var mycket effektiv i vissa avseende; speciellt i form av matematisk diskussion och problemlösning. Den japanska problemlösningsbaserade undervisningen tycks stämma väl överens med vad Skolverket hade i åtanke när de bestämde innehållet i läroplanerna, varför en närmare studie i vad den mer konkret innebär är relevant.

Genom att undersöka vad andra forskare teoriserat och observerat angående problemlösning, samt genom egna intervjuer och observationer under matematikundervisning i svenska skolor ska vi försöka få en klarare bild för hur lärare tänker och hanterar problemlösning.

2 SYFTE OCH PROBLEMFORMULERING

Syftet med vårt examensarbete är att undersöka hur problemlösning används i matematikundervisningen i dagens skola.

Våra frågeställningar är:

- Vad anser verksamma lärare att problemlösning är?
- Hur används problemlösning i undervisningen?

3 TEORETISK ANKNYTNING

För att vi skulle kunna svara på våra frågeställningar så valde vi att samla in fakta med hjälp utav litteratur och Internet. Detta för att få mer kunskap och se vad tidigare forskning säger om vårt valda område. Vi har även behövt läsa och tolka tidigare forskning för att själva kunna göra ett ställningstagande om vad som är relevant information och inte. Vi har varit aktiva och kritiska i vår läsning under hela processen där den stora utmaningen har varit att samla in data som är relevant både för läsaren och för vår frågeställning.

Vår teoretiska del inleds med att visa på hur problemlösning kan definieras, för att sedan se till vilken roll problemlösning har i styrdokument, samt hur problemlösning tillämpas i undervisningen på olika sätt.

3.1 Hur kan problemlösning definieras?

Många lärare anser sig arbetamed problemlösning i sin undervisning och ger elever uppgifter med problemlösningskaraktär på lektionerna, men vet de egentligen vad problemlösning innebär? Finns det en entydig definition av begreppet? Eller är kanske textbaserade uppgifter där matematiken sätts in i ett sammanhang ekvivalent med en problemlösningsuppgift?

Det verkar vid första anblick lätt att definiera vad ett problem är, och vad ordet har för konkret betydelse. Enligt *Nationalencyklopedin* så definieras ett problem som den ”svårighet som det krävs ansträngning för att komma tillrätta med: uppgift som kräver tankearbete och analytisk förmåga (speciellt i vetenskapliga sammanhang), vanligen om större, komplicerad uppgift, men även något allmännare om mer avgränsad uppgift.”(NE, 2013). Med denna förklaring på vad ett problem är så kan det tyckas att innerbörden av vad som definierar en lösning av ett problem, eller problemlösning vara klar, det vill säga något som också borde gå att skriva i sten, men vid närmare betraktning så är vi långt ifrån en överenskommelse gällande dess definition.

Blickas det långt tillbaka i historien så visas det att människan har arbetat med problemlösning väldigt länge på olika sätt, även om problemlösning inte definierades som en speciell term. I *Matematikens historia* så visas det att redan kilskriftstavlorna från äldre babylonisk tid innehåller mycket matematiska problem och problemlösningar. Ett exempel är den lösning som leder till formeln för hur en andragradsekvation löses. Uppgifterna skrivna på tavlorna är av teoretisk karaktär med tillämpade problem, vilket visar att målet med exemplen avser att lära ut en teknik, och kan alltså ha använts i något slags utlärningssyfte (Johansson, 2004, s 25). Det framgår dock inte om babylonierna själva ansåg sig arbeta med just problemlösning, eller om de ens hade någon slags definition på den typen av uppgifter.

Att alla matematiska definitioner inte står skrivna i sten är ett faktum, där vissa begrepp måste tolkas i den kontext de befinner sig i och påverkas av den aktuella miljön och situationen. Det är först när motsägelser och invändningar dyker upp som envidgning av synen på begreppet krävs, eller en omformulering av betydelsen så att det passar till olika situationer och sammanhang. Om inte detta går att göra, så bör rimligtvis ett annat ordval vidtas. Om ett begrepp som just problemlösning avgränsas och ges en strikt definition så kan det vara svårt att få användning av dess innebörd och svårt att kunna använda begreppet i en vid bemärkelse i till exempel skolan. Ordet problem är inte begränsat till matematiken utan förekommer även på liknande sätt i andra vetenskaper. Matematiken har en jämförelsevis lång historia och ges då ett visst privilegium att använda ordet. Problem används även som ord i vardagen, som innebär att en lösning vill nås, givet att ett problem existerar, utan att det egentligen handlar om en speciell lösningsmetod. När problemet sedan är löst så *försvinner* det (Björkqvist, 2013, april).

Eva Riesbeck menar att begreppet problemlösning i sig är vagt och kan ha olika innebörd. ”Problemlösning är ett allmänt begrepp, som man använder sig av i vardagen och inom den vetenskapliga världen och intresset för elevers problemlösning inom skolan har varit stort under årens lopp”(Riesbeck, 2000, s 15). Om olika uppgifter väljs som går att applicera en metod på, eller endast uppgifter som berör det som läraren just har haft genomgång om, så bidrar det inte till elevens uppfinningsrikedom, logiska tänkande eller fantasi. Vid första åtanke så uppstår problem att lösa en uppgift när problemlösaren stöter på motgångar i sitt tankemönster, har svårt att förstå vad som efterfrågas, eller står allmänt frågande inför hur uppgiften bör angripas (Riesbeck, 2000).

De försöken som har gjorts länge och de teorier som finns om att lyckas identifiera problemlösning som en entydig och avgränsad identitet verkar vara i princip en omöjlig uppgift. ”The question, what is problem solving, can not have an unanimous answer; it depends too much on personal interests and philosophy” (Downs & Downs, 2005, s.385).

Vidare menas att inte enbart problemlösningsuppgifter där olika strategier används för att finna det som eftersöks innehåller problemlösning, utan ifrågasätter även om inte ett matematiskt bevis som är genomarbetat och korrekt, också kan innebära problemlösning hos eleven som beviset presenterats för. Om du aldrig tidigare har sett beviset, så behöver du någonstans skapa förståelse för vad som framgår. I ett färdigt bevis är själva problemet redan löst, men den tankebanan som presenteras för dig som ny läsare av beviset ska du bearbeta för dig själv för att kunna begripa det som framgår. Om du då inte förstår alla de steg som förs i beviset, så kommer du att stöta på problem i din förståelse. Detta kräver att du själv måste börja arbeta och tänka efter vad som händer, samt fundera ut hur du ska lösa det som är ogreppbart för dig, alltså själva problemet i din förståelse. Problemlösning menar de, inte är någonting som vi explicit stöter på i vissa sammanhang, utan dyker upp så fort du själv måste förändra din tankebana och modellera med de redskap du besitter. Problemlösning eller ej beror på dina förutsättningar och förkunskaper, vilket innebär att samma uppgift för två elever inte nödvändigtvis behöver innebära problemlösning för båda två. Ena eleven kan välja att lösa uppgiften med hjälp av en viss rutin som är inövad att applicera på uppgifter med liknande karaktär, medans den andre eleven kanske lägger mycket mer tanke bakom sina steg och funderar på varför stegen görs då denne inte har samma förkunskaper (Downs & Downs, 2005, s.385).

En annan upplevelse av problemlösning är att du i ett matematiskt sammanhang *har* ett problem, som gör att du motiveras att hitta en lösning och samtidig får en upplevelse då du inte har klart för sig hur du ska finna den. Riesbeck (2000) poängterar att om bara det ena villkoret av de två är uppfyllda så kan det inte klassas som problemlösning i strikt mening.

Om en elev möter uppgifter som vid första anblick inte upplevs som ett problem, så kan de ändå vara värdefulla och gynna elevens rutinfärdigheter och utveckling. Inte heller är det självklart att de uppgifter som är konstruerade som problem ger förväntade effekter på lärandet (Björkqvist, 2013, april).

Christer Bergsten anser att problemlösning i någon form tycks finnas inneboende mer eller mindre i varje matematisk aktivitet, kanske till och med så djupt rotad att man kan våga påstå att matematik *är* problemlösning? (Bergsten, 2006) Ole Björkqvist är inne på samma spår och ställer sig frågan "Är det möjligt att problemlösning är så central för undervisningen i matematik att man kan beskriva den som matematikens kärna?" (Björkqvist, 2001, s. 116) Detta ligger också nära en tolkning av matematisk problemlösning som *matematisk modellering* (Bergsten, 2006).

3.2 Problemlösning omskriven i styrdokumenten

I Skolverkets *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola Gy 2011* (Skolverket, 2011b) beskrivs det hur ett allmänt mål med gymnasieskolan ska vara att skolan ska "stimulera elevernas kreativitet, nyfikenhet och självförtroende samt vilja att pröva och omsätta nya idéer i handling och att lösa problem."(Skolverket, 2011b, s. 7). Även om den inte direkt anknyter till matematisk problemlösning är det dock ett mål som lätt kan appliceras på matematikundervisningen och bör finnas i lärares åtanke.

Problemlösning nämns även specifikt som övergripande mål för flera av de existerande gymnasieprogrammen, där till exempel det naturvetenskapliga programmet formulerar det som att eleverna genom utbildningen ska "utveckla ett naturvetenskapligt förhållningssätt. Det innefattar förmåga till kritiskt tänkande, logiska resonemang, problemlösning och systematiska iakttagelser."(Skolverket, 2011b, s. 47). Liknande formuleringar kan hittas även på de mer yrkesinriktade programmen som barn och fritidsprogrammet, fordon och transportprogrammet och industritekniska programmet.

Vidare kan man läsa under matematikundervisningens syfte att "Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel."(Skolverket, 2011b, s. 90). De ser alltså problemlösning som både en förmåga att ha i bagaget och som ett arbetssätt eleverna ska tillämpa för att träna sig i just problemlösning. Detta stärks även genom formuleringen om att eleverna ska ges tillfälle att "Formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat."(Skolverket, 2011b, s. 90).

Nytt för läroplanen för gymnasiet och *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet Lgr 11* (Skolverket, 2011a) jämfört med tidigare läroplaner är att det centrala innehållet inkluderades i läroplanen istället för att presenteras på separat plats. Under centralt innehåll för gymnasiekurserna kan det utläsas vilken roll problemlösning ska ha i undervisningen. Problemlösning är alltså något som måste vara med i undervisningen och redan under *Matematik 1a* kan det läsas "Hur matematiken kan användas som verktyg i behandlingen av omfångsrika problemsituationer i karaktärsämnena."(Skolverket, 2011b, s. 93). Fler punkter kan även utläsas angående problemlösning där de berör det i relation till vardagliga situationer och i ett historiskt perspektiv (Skolverket, 2011b, s. 93).

Även i Lgr 11 finns liknande formuleringar angående problemlösning där det finns med både som mål för den generella undervisningen och under centralt innehåll (Skolverket, 2011a, s. 63). I samtliga kurser mellan årskurs 1-9 finns något krav på problemlösning med. Det står även att det i matematikundervisningen i årskurs 1-3 ska finnas ett moment av "Strategier för matematisk problemlösning i enkla situationer." (Skolverket, 2011a, s. 64).

Vid en närmare studie av de gamla kursplanerna kan det läsas hur problemlösningens roll i undervisningen förändrats där det är tydligt hur det i nuvarande kursplaner har en mer framträdande roll. I *Läroplan för de frivilliga skolformerna Lpf 94* beskrivs det hur eleverna i skolan ska få “utveckla sin förmåga att ta initiativ och ansvar och att arbeta och lösa problem både självständigt och tillsammans med andra.” (Skolverket, 1994b, s. 5). Det finns även med som mål att sträva mot där det beskrivs hur eleverna ska kunna “formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkes- och vardagsliv,”(Skolverket, 1994b, s. 10). Problemlösning nämns mer sällan och när det nämns är det presenterat som en förmåga för att lösa mer vardagliga problem som till exempel i citatet ovan. Problemlösning är alltså något som tränas för att bli bättre på problemlösning, inte något som specifikt ska användas som metod för att lära sig nytt stoff som det beskrivs i de nya läroplanerna (Gy 2011 och Lgr 11).

Då det centrala innehållet fram till 2011 var en separat del kan det läsas från kursplanen i *matematik A* att utbildningen även syftar till att “eleverna skall uppleva glädjen i att utveckla sin matematiska kreativitet och förmåga att lösa problem samt få erfara något av matematikens skönhet och logik.”(Skolverket, 1994c). I mål kan det vidare läsas hur eleven ska “vara så förtrogen med grundläggande geometriska satser och resonemang att hon eller han förstår och kan använda begreppen och tankegångarna vid problemlösning”(Skolverket, 1994c) samt hur eleven ska kunna använda tekniska hjälpmedel vid problemlösning. (Skolverket, 1994c). Här kan en tydlig skillnad från Gy 2011 utläsas där det blir tydligt hur problemlösning ges mer plats i undervisningen.

I *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet Lpo 94* nämns inte problemlösning i sig, utan är möjligtvis begränsad till att utbildningen ska ge eleverna förutsättning för att “ utveckla sin förmåga att arbeta självständigt och lösa problem.” (Skolverket, 1994a, s. 6).

En blick längre tillbaka i tiden avslöjar vilken roll problemlösning hade i Lgr 80 och Lgy 70 där det är tydligt att problemlösning även där hade en mindre roll än i nuvarande läroplaner. Skolöverstyrelsens *Läroplan för gymnasieskolan, allmän del 1 Lgr 70* (1975) har inget i mål och riktlinjer som direkt berör matematisk problemlösning. Ett liknande upplägg kan ses i *Mål och riktlinjer för grundskolan Lgr 80,* där problemlösning inte nämns direkt utan snarare blir en konsekvens av hur de formulerar att eleven ska utveckla en förmåga att lösa problem som hen ställs inför i verkliga livet.

3.3 Strategier för problemlösning

Blickar vi tillbaka ett antal årtionden så finner vi en känd matematiker inom området, ungraren George Polya (1887-1985). År 1945 publicerade han ett av sina mest kända verk *How to solve it* (1945) där han lägger stor vikt vid att beskriva tankegångar, strategier och tillvägagångssätt för att lösa problem. Han menar att vi hela tiden ändrar vårt sätt att se på problemet från olika synvinklar. Vår vetskap om problemet ändras desto längre vi arbetar med det och desto fler framsteg vi gör i rätt riktning. Framsteg görs då problemlösaren ser ett ljus, alltså en framgång i riktningen mot den tänkta lösningen, vilket innebär att hen har avancerat och tagit ett steg längre i sin lösningsprocess. Polya vänder sig i *How to solve it* direkt till den som är studerande, vilket få författare gör, och tankarna vänder sig även till läraren, vilket är svårt att hitta i moderna skrifter. Hans bok innehåller guidning till läraren om hur de genom bland annat modern heuristik (läran om metoder att finna nya vetenskapliga resultat, ofta allmänna metoder eller regler för framgångsrik problemlösning) kan gå tillväga. Polya anser att det kan guida eleverna till en bättre förståelse och ge ett större engagemang (Polya, 1945, 129-133).

Han identifierar fyra grundidéer för tillvägagångssättet att lösa problem på ett strategiskt sätt. För det första så måste problemet förstås, få en överblick av vad som efterfrågas och se till den fakta som givits: Vad har jag och vad behöver jag? I det andra steget ska de små detaljerna bearbetas och funderas på: Hur delarna hänger ihop och vad måste tillföras för att kunna börja arbetamed problemet? Här kartläggs hur problemet ska angripas, vilken metod som ska användas, och på vilket strategiskt sätt arbetet ska gå tillväga. I det tredje steget genomförs planen, för att i fjärde och sista steget kunna se tillbaka på insatsen, diskutera och analysera lösningen. Genom att blicka tillbaka fås en karta över tankebanan, och tydligt ses då vad som skulle kunna förbättras om en annan väg hade valts. I matematiska sammanhang kan alltid tal testas för att se om de håller som en lösning, men då gäller det även att den som prövar vet vad ett rimligt svar skulle kunna vara. Detta kan vara ett problem då inte alla reflekterar sina resultat i förhållande till hur verkligheten faktiskt ser ut (Polya, 1945, s.5-9).

Om det i en lösning i en matematisk problemlösningsuppgift framkommit ens mamma är yngre än sig själv och beräkningar gjorts som ansetts behövliga, så skulle problemet tekniskt sett kunna anses vara löst, eftersom ett resultat fåtts fram. Blickas det istället se till rimligheten att en mamma skulle vara yngre än sitt barn så är resultatet och lösningen helt ohållbar, vilket innebär att problemet om mammans ålder egentligen *inte* är löst. Detta framgår först om vi har något slags facit att jämföra med. Polyas tankar och idéer lever fortfarande kvar trots att det var längesedan han var verksam och hans namn inte längre förknippas med de mest moderna.

Den moderna heuristiken håller sig till vissa riktlinjer, men det finns ett flertal så kallade tekniker med ännu smalare ingång som innebär att du använder dig av flera förutbestämda steg. En teknik kan framkomma om du ser till den kontext som problemet befinner sig i, där svårigheten ligger i att finna den teknik som är bäst anpassad till problemet i fråga. Du kanske anar att problemet kan lösas på flera olika sätt med flera olika tekniker, och det gäller för problemlösaren att veta vilken metod som passar problemet bäst. Vissa tekniker baseras på fundamentala idéer som vacklar mellan flera olika teorier, och det finns en förutfattad mening att eleverna plockar med sig de tekniker de stöter på i matematiska sammanhang på vägen, och därför kan identifiera i vilka sammanhang de kan appliceras. Du kan alltså i problemlösningsmodeller använda sig utav problemlösningstekniker som är mer specifika för det problem du ställs inför (Downs & Downs, 2005, s.394).

En grupp forskare anser att förmågan att lösa problem endast kan förbättras genom att lösa många och varierade problem. Andra forskare har i sin tur visat att under vissa förutsättningar går det att lära sig allmänna metoder för att lösa problem och på så sätt förbättras förmågan att lösa problem. En tredje grupp forskare har i sina undersökningar inte kunnat se några påtagbara resultat av speciella problemlösningskurser. Det visar tydligt att det finns en oenighet inom området vilket delvis beror på att det saknas övergripande undersökningar där de olika delundersökningarna sätts in i ett större sammanhang. Det saknas även en teoretisk ram kring problemlösningsprocessen (Nilsson, 1993, s.13).

3.4 Förutsättningar för god problemlösningsförmåga

För att kunna lösa problem med så goda förutsättningar som möjligt så måste de psykologiska faktorer som gynnar problemlösningsförmågan finns där just då. Det kan vara psykologiska faktorer som koncentration, motivation, självuppfattning, uthållighet och självdisciplin. Brister i koncentration utgör ofta ett hinder för personen då denne vid okoncentration inte har tillgång till hela sitt kunskapsregister och inte kan vara djuptänkande. Både ett konvergent tänkande och ett divergent tänkande kan vara olika former utav koncentration, där det konvergenta tänkandet är mer inriktad på en förutbestämd korrekt lösning till problemet, medans det divergenta tänkandet har fler olika riktningar åt skilda håll där mycket prövning ingår. Motivation att vilja lösa problemet och attityden till uppgiften avgör också förutsättningarna det vill säga om uppgiften upplevs som meningsfull eller ej. För att vidare kunna angripa problemet bör problemlösaren ha en hel del självförtroende, och äntra uppgiften med en tro på sig själv och sin egen förmåga till att kunna lösa problemet. Sin uppfattning att kunna lita till sig själv utgör ytterligare en förutsättning. Att vara envis och ha disciplin att inte ge upp är en viktig motor för att göra framsteg i sitt tänkande. Detta kan innebära att planera och avsätta tid samt vara väl förberedd och målmedveten (Nilsson, 1993, s.13-20). Polya poängterar dock att om eleven inte har greppet om sin egen förståelse så är det inte endast dennes fel. Problemuppgiften som ges måste vara väl utvald i förhållande till elevens kunskaper. Det ska var en intressant uppgift för eleven och olika arbetsformer bör användas (Polya, 1945, s.6).

Jesper Boesen, som är forskare vid Göteborgs universitet, säger att för att kunna lösa problem som rör sig utanför ens vanliga trygghetszon, där alla redskap är bekanta, så krävs rikligt med mod och fantasi.

> When attempting to solve a problem, the use of imitative reasoning often, if not by sheer luck, leads to a dead end. What is needed is the production of something new, a type of reasoning that extends from what can be imitated. It is this superficial strive for solutions to recognize that may explain why so many students have difficulties when solving problems. They are simply not used to, and probably have had very limited opportunities to learn and to construct their own ways of reasoning. (Boesen, 2006, s.4).

Det måste tillkomma nya tankar och idéer för att kunna lösa ett problem. Det krävs att våga tänka utanför sina ramar, våga använda sig av tillvägagångssätt som inte tidigare använts och konstruera egna sätt att resonera kring problemen. Elever måste använda den matematiken de besitter i ett mycket vidare perspektiv, där de kan applicera inövade delar på nya situationer, vilket inte övas alltför ofta.

3.5 Uppgifter för problemlösning

När det talas om problemlösning förutsätter det att en närmare studie på de problem som presenteras görs, då dessa är själva förutsättningen för att problemlösning ska kunna utföras på ett meningsfullt vis. Det som skiljer ett problem i matematiken från en övning eller rutinuppgift brukar anges som att den eller de som ger sig an att lösa uppgiften inte från början har eller ser en redan färdig metod att använda.

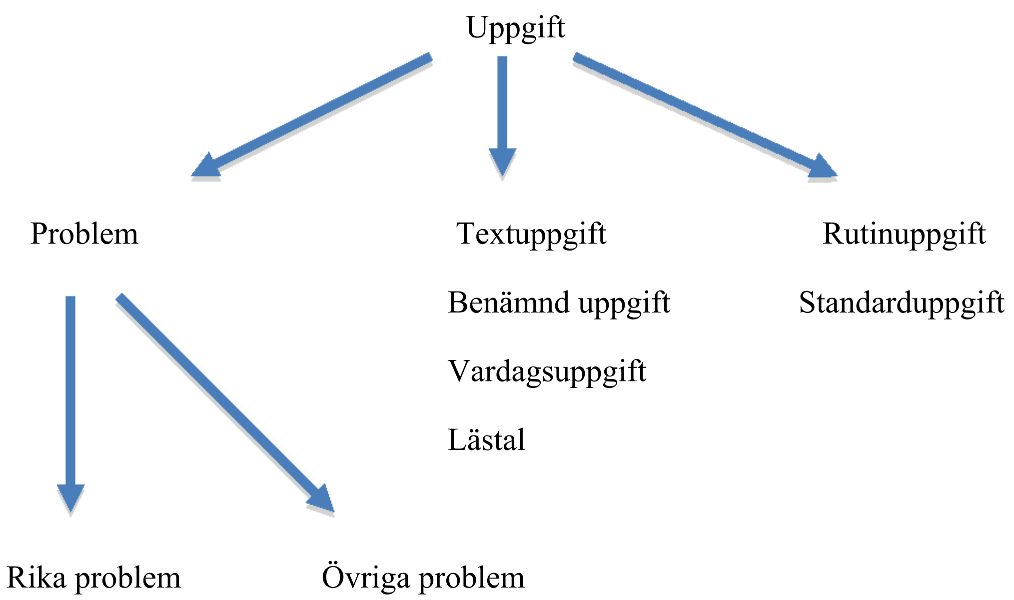
I boken *Rika matematiska problem* finns en exempeluppgift, det så kallade glassproblemet, där uppgiften går ut på att ta reda på hur många sätt en glasstrut kan byggas om glassen ska innehålla två kulor då det finns fyra smaker att välja mellan (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005,s.119). Om en femteklass ges den här uppgiften så kräver det mycket eftertanke och arbete av de berörda eleverna. De har förmodligen ingen förutfattad mening om hur uppgiften bör angripas, eller med vilken metod uppgiften kan lösas. Här är flera olika lösningsmöjligheter möjliga med t.ex. tabeller, teckningar, diagram eller annan prövning. Det blir en problemlösningsuppgift då eleven står inför någonting nytt och främmande, där ingen direkt modell kan appliceras för att nå en lösning. Ger du samma uppgift till elever på universitetet, så vet de redan innan de sätter igång att räkna, att uppgiften handlar om kombinatorik där en lösning snabbt kan nås om metoden är bekant. Här är kontexten annorlunda; eleverna har både förkunskaper inom området, och vet förmodligen redan innan de angriper uppgiften att endast en räkneoperation behöver genomföras. Uppgiften som ansågs vara en problemlösningsuppgift för eleverna i femteklass kan i det nya sammanhanget inte anses som det.

Björkqvist (2001) anser att det inte är ett problem om personen som vill lösa uppgiften känner till metoden sedan tidigare. Även enligt Eva Jablonka (2013, april), som författat en modul till skolverkets *Matematiklyftet*, så blir en uppgift till ett problem om lösningsmetoden inte omedelbart är synlig för personen som möter den. Alltså är personen inte direkt medveten om vilken metod som skulle kunna användas för att lösa problemet, det vill säga den metod som garanterat genererar en lösning. Det behövs dessutom kunskaper sedan tidigare som till exempel begrepp, procedurer och metoder, för att kunna angripa uppgiften. Men de måste kunna användas på nya sätt eller appliceras i obekanta situationer.

Vid närmare granskning av *Matematik Origo 5* som används som läromedel på många gymnasier kan vi se att samma definition används för vad en problemlösningsuppgift är. Här introduceras speciella problemlösningsuppgifter där författarna skriver att “en sak som skiljer en problemlösningsuppgift från en rutinuppgift är att lösningsmetoden för ett problem inte är given på förhand. Det gör att du får räkna med att det kommer ta tid att lösa de här uppgifterna och att du måste vara beredd på att ompröva lösningsmetoden under arbetets gång” (Szabo, Larson, Viklund, Dufåker, Marklund, 2013, s. 146).

Eva Taflin har arbetat med just problemlösningsundervisning inom matematik i skolan. Hon söker svar på vad den ska gynna, vad syftet med undervisningen är samt hur vi kan använda oss av problem på olika sätt. Det finns flera olika argument till varför problemlösning finns i skolan. Delvis ska eleverna lära sig processen i problemlösningen då de stöter på okända problem. Det utmanar elevernas tankemönster och ger samband mellan matematik och verklighet. Det kan även genom matematikens problemlösningsuppgifter gynna elevernas matematiska resonemang, och även den logiska förmågan att allmänt lösa uppgifter i andra ämnen. Problemlösning är också en bra ingång för dialog och samarbete mellan eleverna vilket utvecklar matematiklärandet (Taflin, 2007, s.21). En förutsättning för att eleverna ska utvecklas är att de får arbeta med problemlösning under hela sin skolgång och att det inte bara blir enstaka inlägg i undervisningen, och att uppgifterna gärna får ta tid att lösa oavsett om arbetet sker individuellt eller tillsammans. Matematik lär dig att tänka. Om även läraren visar sig engagerad och positivt inställd till problemlösning så lär sig eleverna mer (Taflin, 2007, s.42f). ”Problemlösning kan vara till för att tillämpa på livet utanför skolan, för att eleverna ska lära sig för livet.” (Taflin, 2007, s.46).

Att välja ut problemlösningsuppgifter som gynnar eleverna och besitter ett stort innehåll kan vara svårt. För att kunna få en överblick av vilken typ utav uppgifter som finns så kan följande uppdelning göras (Taflin, 2007,s.30).



Figur 1. Bilden visar en uppdelning för att kunna kategorisera olika uppgifter (Taflin, 2007, s.30)

I bilden nämns som en ytterligare förgrening av problem: de rika problemen. Följande punkter bör uppfyllas för att enligt Eva få kalla ett matematiskt problem för rikt:

1. Problemet ska introducera viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.
2. Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
3. Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
4. Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och repre-sentationer.
5. Problemet ska kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.
6. Problemet ska kunna fungera som brobyggare.
7. Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem. (Taflin, 2007, s. 22)

Det finns enligt Taflin mycket lika utgångspunkter för valen av problem mellan många författare. Uppgifterna fungerar som brobyggare, till exempel knyta samman matematiska områden, förena vardagen med matematiken och visa hur en och samma uppgift kan lösas på många olika sätt som i slutändan ger samma resultat. De rika problemen kan även leda till rik undervisning om uppgiften breddas och ges i ett större sammanhang. Detta kan öppna olika problemställningar som kan formuleras på olika sätt genom bilder eller händelser, de är så kallade “open-ended”. Ett syfte med de matematiska problemen kan vara att lära ut matematiska strategier, då uppgiften väljes och i större utsträckning styrs av läraren i den riktning som hon/han vill gå (Taflin, 2007, s. 53-54).

3.6 Tillämpning av problemlösning i matematikundervisningen

Forskning har visat att elever har svårt att applicera den inlärda matematiken i nya forum på ett nytt kreativt sätt. De är duktiga på att lösa problem om det rör sig inom ett visst område, men stöter på problem när kontexten eller matematikområdet ändras. Detta gör det svårt för eleverna att få nytta av de kunskaper de har, om de inte kan sätta in kunskapen i nya sammanhang och applicera på olika problemuppgifter. En matematiklärare måste våga lägga till ”den stora bilden” i undervisningen, då det uppmanas att vara kritisk och våga ifrågasätta uträkningar istället för att bara utföra de beräkningar som efterfrågas i uppgiften. Detta menar Jablonka att ”det så kallade ”traditionella” sättet att undervisa matematik har visat sig vara ineffektivt när det handlar om elevernas förståelse. Det har, enligt kritikerna, varit för stort fokus på givna fakta, procedurer och metoder, ofta förklarade med en stegförsteg instruktion för att kunna lösa olika typer av uppgifter.”(Jablonka, 2013, april). Elevers egen tankeverksamhet måste prioriteras för att få en undersökande och meningsfullt lärande.

3.7 Matematikundervisning idag

Skolinspektionens kvalitetsgranskning i gymnasieskolans matematikundervisning, som gjordes strax i anslutning av granskningen av matematik på grundskolan under läsåret 2008/09, visar exempel på både god och framgångsrik undervisning som hålls i 55 svenska skolor (det antal som inspekterades).

Många Lärare visar sig ha hög tro på sina elever och visar tilltro till elevernas förmåga, vilket bidrar till att stärka elevernas självförtroende i ämnet. Det framgår också att många är skickliga på att anpassa undervisningen utifrån elevernas enskilda behov. På en skola lät lärarna eleverna lösa mycket problem, först individuellt och sedan i diskussioner med kamraterna. Senare äger en livlig diskussion rum i klassrummet under lärarens ledning. “Denna lektion visar en undervisning som låter eleverna träna olika förmågor som exempelvis problemlösning, argumentation, kommunikation och förmåga att värdera olika matematiska metoder.” (Skolinspektionen, 2010).

Ett annat exempel på den goda undervisningen som förekom på en skola hade lärarna ett väl utvecklat samarbete sig emellan där de samlar och delar med sig av material i form av matematiska problem. De samlar bra uppgifter i lådor som finns i nära anslutning till klassrummen. “Nästan samtliga uppgifter är utformade så att eleverna måste arbeta handgripligt med materialet för att lösa problemet och samtidigt ger de en illustration till olika matematiska begrepp eller problemställningar.” (Skolinspektionen 2010).

Trots flertalet positiva iakttagelser belyser dock inspektionen även kritiskt delar i undervisningen där en förbättring bör ske. De huvudsakliga iakttagelserna som presenteras i rapporten är:

- Flera elever får inte den undervisning de är berättigade till. Alla delar i bland annat *kurs A* behandlades inte, vilket inte ger eleverna möjlighet att visa sin kunskap i förhållande till kursmålen, vilket är det som ska bedömas. Eleverna ges inte alltid förutsättningar att utveckla olika förmågor som till exempel problemlösning och att uttrycka sig muntligt.

- Undervisningen lyckas inte heller inrikta sig på den studieinriktning som eleverna valt, dvs. arbetamed de existerande programmålen.

- Under lektionerna dominerar enskilt arbete. Inspektionen visar tydligt att samtal om matematiska fenomen får för litet utrymme i förhållande till enskilt mekaniskt räknande i matematikboken.

> Om lärare, till exempel i tron att man underlättar för lågpresterande elever, fokuserar hantering av procedurer och mekanisk räkning och avstår från undervisning som tränar problemlösning, att se samband och utveckling av matematisk kreativitet, förenklar man möjligen för eleverna på kort sikt. Men läraren gör dem troligen en björntjänst: Det ger eleverna sämre möjligheter att utveckla centrala förmågor. (Skolinspektionen, 2010).

Dessa punkter bör alltså alla lärare arbetaaktivt med för att föra undervisningen framåt. Om vi fokuserar på den sistnämnda punkten som verkar existera på många skolor runt om i Sverige, så finns lösningar på problemet. Att arbetamed problemlösning i matematiken kan ske på många olika sätt, men en metod visar sig effektiv när det kommer till att lämna läroboken och få gemensamma diskussioner i grupper och i helklass. Metoden som arbetar aktivt med detta är den Japanska problemlösningsmetoden.

3.8 Japansk problemlösningsmetod – vad innebär det?

Den japanska problemlösningsmetoden har gradvis blivit en allt större inspiration för den västerländska matematikundervisningen och är snarare ett sätt att konsekvent tillämpa problemlösning i matematikundervisningen än en metod för att lösa specifika problem (även om detta är en viktig komponent i undervisningen). Det är en metod som starkt fokuserar på och uppmuntrar matematisk diskussion och individuell problemlösningsförmåga och därför har vi valt att studera den noggrannare.

Tomoko Helmertz (2007) beskriver i sitt examensarbete *Problemlösning – En jämförelse mellan svensk och japansk undervisning* hur ett utmärkande drag för en japansk lektion är att den skiftar mellan helklassdiskussioner och enskilt arbete så många gånger som åtta per lektion(Helmertz, 2007, s.6). Hiebert, et al (2003) beskriver även att det under en typisk matematiklektion i Japan endast behandlas ett fåtal problem där eleverna i snitt spenderar 64 % av lektionstiden på i genomsnitt tre problem. Vidare beskrivs det hur 60 % av lektionens genomgångar behandlar helt nytt stoff vilket kan jämföras med Nederländerna som liknar oss i Sverige mest där endast 32 % av lektionstiden behandlar nytt stoff. (Hiebert et. al., 2003, s. 121).

Segment	Längd (min)	Beskrivning
1	2	Hälsning Kontroll av närvaro
2	5 ~ 8	Presentation av dagens uppgifter A (med eventuellt syfte på dem) Läraren går igenom lösningsmetoder
3	7 ~ 10	Övning på liknande uppgifter (elevernas enskilda arbete) Läraren går runt, kontrollerar och hjälper eleverna Läraren ber några elever att skriva lösningarna på tavlan
4	3	Kontroll av elevlösningar på tavlan Läraren kommenterar och visar vad som är viktigt med lösningarna
5	3 ~10	Presentation av dagens uppgifter B (med eller utan genomgång)
6	7 ~ 12	Övning på andra uppgifter (elevernas enskilda arbete) Läraren går runt, kontrollerar och hjälper eleverna Läraren ber några elever att skriva lösningarna på tavlan
7	3	Kontroll av elevlösningarna på tavlan Läraren kommenterar
8	0 ~8	En omgång till 6 (elevers övning) och 7 (kontroll på tavlan)
8/9	3	Utvärdering av dagens lektion Hälsning
total	50	

Tabell 1 (tagen från Tomoko Helmertz, 2007, s. 21)

Tabell 1 ovan är tagen från Helmertz (2007) och ger en tydlig översikt för hur en typisk japansk lektion kan se ut. Japanska elever måste självklart även lära sig de vanliga metoderna för att lösa matematiska uppgifter som t.ex. kvadratrötter, men även här används ovannämnda upplägg trots att det handlar mer om ett mekaniskt räknande. Det är lätt att få en bild av att japanska lärare presenterar ett problem och sedan låter eleverna lösa det på valfritt vis, helt utan hjälp eller vägledning, men Helmertz (2007) beskriver hur läraren eller lärarna först presenterar uppgiften för att sedan gå igenom ett antal sätt att lösa det p (Helmertz, 2007, s, 20). Detta följs sedan av flera uppgifter som behandlar samma område där eleven får tid att träna på den lösningsmetod som känns bäst vilket sker både enskilt och tillsammans med kamraterna.

Det sista steget som handlar om att elever ska redovisa sina lösningar framme på tavlan där eleven tränar sitt matematiska språk. Här hålls även en diskussion om vilken metod som är mest lämplig och allmänna tankar kring området. Helmertz skriver att redovisningen av lösningarna ofta gjordes av eleverna själva. "De fick skriva dem på tavlan och samtidigt redovisa dem muntligt. Oftast var deras muntliga redovisningar ordentliga och korrekta matematiskt." (Helmertz, 2007).

Men vad grundar sig den japanska modellen egentligen på, hur beskrivs den i teorin och vad är det som krävs av pedagogerna som utför den? Masami Isoda (2010) beskriver i sin artikel *Lesson Study: Problem Solving Approaches in Mathematics Education as a Japanese Experience* den japanska problemlösningsmetoden i fyra översiktliga steg, där det första steget handlar om att presentera problemet som ska behandlas under lektionen. Detta följs av individuellt arbete där eleverna får tid till att själva klura på det givna problemet för att sedan efter en kort stund gå vidare till nästa steg som innefattar jämförelse och diskussion. Här vänder sig eleven till klasskamraterna och diskuterar hur de tänkt sig lösa uppgiften. Det sista steget är en sammanfattning som hålls tillsammans med läraren samt en tillämpningsdel där de tillsammans diskuterar de olika lösningsmetoderna och deras olika värde i olika situationer (Isoda, 2010, s. 23).

Av dessa steg som Isoda tar upp är kanske framförallt första steget värt att studera mer djupgående, då mycket tanke ligger bakom problemen som presenteras. I början av lektionen när läraren presenterar ett nytt problem är problemet i sig väldigt viktigt att det har studerats innan och diskuterats kring tillsammans med sina kollegor. Den bakomliggande processen kallar Isoda (2010) för *Lesson Study*, eller lektionsstudie vilket är en aktiv process som ständigt pågår. Det är en processdel som innefattar förberedelser inför lektionen vilket görs i lärargrupper. Det handlar även om att göra observationer under lektionen, alltså vara vaken som pedagog och lyssna på elevers diskussioner och reflektioner för att ta med sig dessa till sin lärargrupp och eventuellt förbättra nästkommande lektioner.(Isoda, 2010, s. 17).

Men själva problemet, eller problemen som planeras att presenteras under lektionen måste vara öppna uppgifter, eller vara så kallade *rika problem* som Taflin beskrev ovan, vilka ger eleverna förutsättning för att komma fram till rätt lösning med hjälp av olika lösningsmetoder. I boken *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* beskriver Ole Björkqvist hur denna typ av problem till stor del härstammar från just Japan och att det finns en stor potential i problem som är utformade på det öppna vis som erbjuder flera lösningsgångar (Björkqvist, 2001, s. 119).

Den teoretiska bakgrunden för den japanska modellen beskrivs i artikeln *The method of problem solving based on the Japanese and Polya's models* av Maria D. Aravena och Caamaño E. Carlos. (2008). Det matematiska arbetssättet i Japan beskrivs i artikeln där de redogör hur undervisningen delas in enligt följande övergripande punkter vilka stämmer väl in på hur Isoda (2010) beskrev en typisk lektion:

1. Lärande genom problemlösningsmetoden
2. Lärande genom diskussion
3. Lärande genom metoden för problemupptäckter.(Aravena D. Maria & Caamaño E. Carlos, 2008, s. 3).

Det kan vidare läsas i artikeln av Aravena och Caamaño (2008), hur den japanska problemlösningsmetoden är baserad på Polyas fyra steg för tillvägagångssätt att lösa en problemuppgift som presenterades tidigare. Dewey och Wallas har en liknande utformning, vilket illustreras i tabellen nedan.

Polyas 4 steg	**Deweys 5 steg**	**Wallas 4 steg**
1. Förstå problemet	1. Uppleva en svårighet	1. Förberedelse
2. Forma en plan	2. Definiera svårigheten	2. Inkubering
3. Utförande av planen	3. Generera en lösning	3. Illumination
4. Översikt och återblick	4. Ge en lösning baserat på tänkande	4. Verifikation
	5. Verifiera lösningen	

Tabell 2. Problemlösningsmodeller som japansk problemlösning baseras på. (Aravena D. Maria, Caamaño E. Carlos, 2008, s. 4).

Tabell 2 klargör tydligt den grund som den japanska metoden vilar på genom steg 1-4 för Polya och Wallas, resp. 1-5 av Dewey där upplevelsen för problemlösaren är i fokus. Det finns både skillnader och likheter om en jämförelse görs över vad de andra två teoretikerna i förhållande till Polya tagit upp för steg, men i stora drag är de relativt lika varandra då samtliga berör samma typ av upplevelse från problemlösarens sida.

Då tabellen enbart utgör en teoretisk grund och inte exakta tillämpningar saknas information om till exempel diskussionsdelen. Diskussioner agerar som ett medium genom vilket önskat resultat nås. Då mycket av den japanska modellens grundtanke handlar om kommunikation mellan elever och lärare är dessa steg viktiga att studera. Isoda (2010) beskriver hur inspiration hämtats från historiska tider där klassrumsdialogen liknas vid den typ av dialog som Platon och Konfucius ofta hade med sina elever (Isoda, 2010, s. 21). Helmertz (2007) beskriver även att "många var mycket duktiga på att redovisa sina lösningar på ett matematiskt språk, både skriftligt och muntligt. Det är naturligtvis tack vare övning under lektionerna genom åren." (Helmertz, 2007, s. 44).

4 METOD

I detta avsnitt presenterar vi vilka metoder som vi har använt i vårt examensarbete för att kunna besvara vår frågeställning.

4.1 Val av metod

För att få in så mycket relevant data som möjligt för vår frågeställning så valde vi att använda oss av intervju som metod som Halvorsen förespråkar(1992, s. 79). Vi valde att använda oss av intervjuer för att få en kvalitativ insamling av data istället för en kvantitativ (Bryman, 2008, s. 412). Eftersom det fanns ett begränsat antal lärare ansåg vi att vi får ut mer användbart material av att ha en intervju mot att ha en enkätundersökning. Vi ville vara öppna för vad lärarna hade att berätta och vi skulle, enligt Holme och Krohn Solvagn (1997, s. 80), kunna vara mer flexibla genom att göra en kvalitativ undersökning. Vi har även tillfrågat de intervjuade på högstadiet om vi fick observera en lektion där de ansåg att de använde sig av problemlösning. Detta hoppades vi skulle ge oss en egen uppfattning av vad de ansåg att problemlösning var och hur de tillämpade det i praktiken. Vi tog därför kontakt med den aktuella högstadieskolan under en tidig fas av vårt arbete där vi presenterade oss och syftet med vårt arbete. Vi kontaktade även gymnasieskolan i staden för att även där få genomföra intervjuer med yrkesverksamma lärare. Vi ville med intervjuerna med de anställda lärarna på båda skolorna ta reda på vad de tycker är positivt respektive negativt med undervisning genom problemlösning. Ytterligare frågor om deras syn på problemlösning i undervisning samt problemlösningens roll i matematikundervisningen ställdes. Tanken med observationen var att se vad de gjorde rent praktiskt, vilket kan skilja sig från vad de faktiskt har sagt vid intervjun (Halvorsen, 1992, s. 83).

Nedan kommer en mer utförlig beskrivning om hur vi gått tillväga vid våra intervjuer och vår observation.

4.2.1 Val av intervjumetod

Vi valde att göra en kvalitativ intervju där vi var intresserade av den intervjuades ståndpunkt och lät denne vara med och styra samtalet. Detta gjorde intervjuerna flexibla (Bryman, 2008, s. 413) och såg därför inte identisk ut för alla intervjuade. Därför valde vi, med detta i åtanke, att inte tillverka ett frågeformulär, eftersom målet inte var att slaviskt följa en struktur. Istället ville vi att en dialog delvis skulle föras mellan personen som intervjuar och den som blir intervjuad och valde därför att göra en så kallad intervjuguide som berör ämnet. På så sätt kunde vi hålla en semistrukturerad intervju som innebar att vi besatt en lista över de ämnen som vi önskade beröra, vilket medförde att intervjupersonen hade stor frihet att utforma sina egna svar (Bryman, 2008, s. 415). Frågorna som formulerats samt de frågeställningar vi valt ut behöver enligt Bryman (2008, s.415) inte komma i en speciell ordning utan där finns en stor frihet i att ställa frågor som inte finns i intervjuguiden så länge det anknyter till något som den intervjuade ha sagt. Frågorna i en semistrukturerad intervju är enligt Bryman (2008, s. 206) även mer allmänt formulerade och svaren är enligt Denscombe (2000, s. 135) öppna där betoningen ligger på den intervjuade som får utveckla sina egna synpunkter.

4.2.2 Utformning av intervjuguide

Intervjuguiden finns sin bilaga 1.

När intervjuguide till en semistrukturerad intervju ska skrivas är det, enligt Bryman (2008, s. 419), bra att skiva en lista över vilka frågeställningar som ska täckas eller beröras. Det är viktigt att den är uppbyggd så information kan fås om hur den intervjuade upplever sin värld. Eftersom tanken med våra intervjuer var att ta reda på hur lärarna tolkar och definierar problemlösning samt hur de anser att undervisning genom problemlösning fungerar, så tyckte vi att detta var en bra intervjumetod.

När intervjuguiden ska skrivas är det viktigt att ha klart för sig vad som ska fås ut av intervjun. Det är viktigt att frågorna inte blir för specifika så det hindrar alternativa synsätt eller idéer. En bra fråga att ställa sig är ”Vad måste jag veta för att kunna besvara mina olika frågställningar?”(Bryman, 2008, s. 419)

Viktiga saker att tänka på vid utformningen av intervjuguiden som vi har tagit hänsyn till:

- Skapa ett viss mått av ordning, men var beredd på att ändra ordningen under intervjun.
- Formulera frågor som underlättar svar på våra frågeställningar.
- Ställ inte ledande frågor.
- Notera bakgrundsfakta som ålder, kön, namn, antal år som lärare och hur långa de arbetat på skolan. (Bryman, 2008, s.419f)

De frågor som vi har använt oss av är inledande frågor, uppföljningsfrågor, sonderingsfrågor, direkta frågor och tolkande frågor (Bryman, 2008, s. 422f). För att intervjun inte ska ha karaktären av ett läxförhör har vi undvikit att ställa “varför-frågor” (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson, Wängnerud, 2007, s. 298).

Vi startade vår intervjuguide med inledande frågor som ”Hur länge har du arbetat som lärare?” för att få en bakgrund av den aktuella läraren och ”Kan du berätta för mig hur en vanlig matematiklektion ser ut?” för att få en riklig beskrivning på hur de undervisar på den aktuella skolan (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 150). Därefter kommer uppföljningsfrågorna som kan se väldigt olika ut beroende på vad intervjupersonen har svarat på i tidigare frågor. Det kan enligt Kvale & Brinkmann (2009, s. 150f) bara bestå av en nick eller ett “mm” för att få den intervjuade att fortsätta berätta, eller så behövs det mer frågor som kan ge intervjupersonen möjlighet att berätta mer. De sonderande frågornavar av typen “Kan du säga något mer om det?” eller “Har du fler exempel på det?” för att få mer specifika och utförliga svar på vår frågeställning (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 151). Vi använde även de direkta frågorna för att få lite tips och exempel från lärarna som till exempel “Kan du ge ett exempel på en problemlösningsuppgift?” (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 151). Avslutningsvis kom de tolkande frågorna som består av frågor som “Du menar så här…” för att kontrollera att vi hade förstått vad den intervjuade hade att säga, så vi inte misstolkar något (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 152).

4.2.3 Genomförande av intervjuerna

Enligt Bryman (2008, s. 420) är det bra att bekanta sig med miljön där de intervjuade arbetar. Därför har vi tagit oss tiden att besöka skolorna för att bekanta oss med deras arbetsmiljö innan intervjuerna skett då vi även passade på att boka ett möte för intervju. Vi valde att spela in intervjuerna för att kunna få den intervjuades svar ordagrant (Denscombe, 2000, s. 130).

Ingen lärare nekade oss till detta. Lärarna har intervjuats en och en av en för att de inte skulle påverka varandra i sina svar.

Vi har även tagit del av Brymans (2008) ”tips för en framgångsrik intervjuare”(Bryman, 2008, s. 240), för att vi skulle vara så förberedda som möjligt. Han tar upp följande punkter som är bra att tänka på:

- Var insatt och vet i detalj vad du ska fokusera på.
- Var strukturerad genom att beskriva syftet med intervjun och fråga om intervjupersonen har frågor.
- Var tydlig och ställ enkla, korta begripliga frågor.
- Visa hänsyn genom att låta den intervjuade få tala till punkt och ge dem tid att tänka.
- Var öppen och flexibel.
- Var styrande eftersom att det är du som vet vad du vill få ut av intervjun.
- Var balanserad och prata inte för mycket eller för lite.

4.2.4 Urval

Eftersom den japanskinfluerade metoden att undervisa matematik inte är så vanlig trots sin utbredning så valde vi att använda oss av ett bekvämlighetsurval (Bryman, 2008, s. 433) och valde en högstadieskola som vi kände till använder sig utav denna metod. Eftersom skolan inte har så många lärare så har vi använt oss av så kallat strategiskt urval (Halvorsen, 1992, s. 103) och tillfrågat alla lärare om de ville medverka i en intervju. Genom valfriheten hos lärarna att delta i intervjuer håller vi enligt Denscombe (2000, s. 130) en god forskningsetik.

Valet av gymnasieskola gjordes även detta av ett bekvämlighetsurval (Bryman, 2008, s. 433). Vi valde det gymnasiet som fanns i samma stad för att kunna vara flexibla med intervjutider på bägge skolorna. Även detta beror på att det är kort om tid och vi ville hinna genomföra så många intervjuer som möjligt. Även här är det relativt få matematiklärare, så alla lärare tillfrågades att ställa upp för en intervju.

Vi fick totalt fem lärare från högstadiet och fyra lärare från gymnasiet att medverka i en intervju.

4.2.5 Analys

Kvalitativa undersökningar är relaterade till ett sammanhang och det subjektivistiska har en framträdande placering och gör att det inte finns någon bestämd modell eller metod som beskriver hur insamlade datan ska bearbetas. Intervjuaren kan inte referera till allmänt vedertagna regler som vid bearbetning av statistisk data (Lantz, 2007, s. 97).

Kvalitativa undersökningar genererar snabbt mycket datamaterial att analysera (Bryman, 2008, s. 510) och eftersom vi spelade in intervjuerna så var vi tvungna att börja med att skriva ut dem innan vi kunde analysera materialet (Halvorsen, 1992, s. 131). Vi sammanfattade intervjuerna för att få fram särdragen hos varje enskild intervjuperson och sedan försökte vi hitta vilka särdrag och återkommande mönster som dök upp hos högstadielärarna respektive gymnasielärarna (Esaiasson, 2007, s. 305f). För att hitta återkommande mönster och särdrag menar Denscombe (2000, s. 248) att det är viktigt att ta tid på sig och upprepar analysen flera gånger. Därför har vi lagt ner mycket tid på analysen för att kunna urskilja deras åsikter. För att vi inte skulle dra förhastade slutsatser var det viktigt enligt Kvale & Brinkmann (2009, s. 257) att vara öppna och försöka se alla nyanser som kom upp i de intervjuer vi gjorde. Detta krävde mycket tid och arbete.

4.3.1 Val av observationsmetod

Vi har valt att göra en strukturerad observation, även ibland kallad systematisk observation, som innebär att vi har fasta regler för observationen och registrering av beteenden. En viss bestämd tidsrymd observeras och utgår från ett observationsschema (Bryman, 2008, s. 265). Genom att ha ett observationsschema vid observationen menar Denscombe (2000, s. 168) att det finns större möjlighet att minimera de variationer som kan uppstå vid en observation så att det inte hade spelat någon roll vem som genomfört observationen. Enligt Halvorsen (1992, s. 84) ska observatören vid strukturerade observationer ha valt ut i förväg vilka aktiviteter som ska observeras. Med detta i åtanke har vi valt att observera en lektion där läraren själv anser sig använda sig av problemlösning i sin undervisning.

Fördelar med en strukturerad observation är att en direkt datainsamling fås på vad människor gör och det är med ett observationsschema lättare att vara objektiv. Nackdelar med denna metod är att det bara observeras *vad* som händer och inte *varför,* vilket innefattar risken att situationen förenklas för mycket (Denscombe, 2000, s. 173f).

4.3.2 Utformning av observationsschema

Observationsschema finns som bilaga 2.

Tanken vid en observation är att alla som skulle genomfört samma observation ska vara uppmärksamma på samma aktiviteter, registrera data systematiskt och producera data som överensstämmer med verkligheten. För att göra detta möjligt så måste, enligt Denscombe (2000, s. 168), en lista göras över punkter som fungerar som en typ av checklista. Det är viktigt att ha klart för sig vad som ska observeras, annars anser Bryman (2008, s. 269) att det finns risk att observatören inte riktigt vet vad som ska fokuseras på. Mätningar av något som saknar relevans till vår frågeställning menar Denscombe (2000, s. 169) inte främjar vår undersökning utan punkterna på observationsschemat måste väljas ut med största noggrannhet. Tanken med ett sådant är att systemet för registreringen av observationen ska vara enkel och tydlig och är därför viktigt att det inte finns för många punkter. Ett problem som Bryman (2008, s. 269) belyser med observationsschema är att det ibland kräver ett visst mått av tolkning från observatören, vilket minskar objektiviteten hos observatören.

Enligt Denscombe (2000, s. 170) är det viktigt att flera punkter i ett observationsschema är uppfyllda. Det är viktigt att beteendena som vi vill mäta är öppna beteenden som kräver ett minimum av tolkning. Det är viktigt att vi bara observerar det som är relevant till vår frågeställning och att punkterna i vårt observationsschema täcker alla tänkbara möjligheter. Punkterna måste vara exakta och får inte överlappa varandra för att det ska vara enkelt att registrera resultatet under observationen.

Vårt observationsschema är koncentrerat på att ge oss svar på den andra delen av vår frågeställning om hur problemlösning används i undervisningen.

4.3.3 Genomförande av observation

Vid observationen har vi registrerat när någonting har hänt som Bryman (2008, s. 269) förespråkar. Vi fyller alltså inte i vårt observationsschema med bestämda tidsintervaller utan kommer observera och kontinuerligt registrera under hela lektionen. Enligt Denscombe (2000, s. 169) kan vi sedan beräkna hur ofta en händelse sker. För att ha en god forskningsetik har vi valt att berätta även för eleverna varför vi observerar deras lektion och kommer därför ha en så kallad öppen observation (Holme & Krohn Solvagn, 1997, s. 111).

För att störa miljön i klassrummet så lite som möjligt är det enligt Denscombe (2000, s. 173) bra att välja en diskret placering, men som ändå ger en överblick över hela klassrummet. Interaktion bör undvikas för att bara observera vad som händer "utan" observatörens agerande i klassrummet.

Under observationen höll vi oss i bakgrunden och noterade vad som hände enligt observationsschemat och när det hände. Detta för att se hur en lektion såg ut och hur den var distribuerad.

4.3.4 Urval

Vi har valt att fråga lärarna på högstadieskolan eftersom de är med i *Matematiklyftet* och använder sig av problemlösning i större omfattning än lärarna på gymnasiet. Som tidigare nämnts så har vi viss tidsbrist innan jullovet och därför träffade vi alla lärarna som har intervjuats på högstadiet tillsammans och frågade om det fanns någon möjlighet att få observera någon av deras lektioner där de använde sig av problemlösning. Detta gjorde att de själva fick välja vilken lärare som skulle observeras och vilken lektion. En av de intervjuade högstadielärarna gav oss tillåtelse att observera en lektion i sjunde klass där de arbetade med problemlösning i samband med gemometrikapitlet. Detta gjorde att det inte blev något slumpmässigt urval av vare sig lärare eller lektion, utan istället ett så kallat fokuserat urval där en viss individ observeras under en viss tidsrymd (Bryman, 2008, s. 272).

4.3.5 Analys

Att analysera vår observation blir relativt enkel då vi använt ett observationsschema. Tanken var även att se om verkligheten såg ut som de svar vi fått från våra intervjuer på högstadiet och därför kommer analysen även fokusera på att se om det stämmer överens. Den kommer även lägga grunden för att kunna besvara vår frågeställning om hur problemlösning används i matematikundervisningen.

Vi har gjort ett schema över hur lektionen fördelades mellan lärarledd aktivitet och eget individuellt arbete. Detta för att synliggöra hur mycket tid eleverna fick till att arbeta med de olika problemen.

4.4 Etik

Vi har utgått från *Vetenskapsrådets forskningsetiska principer* (2002, s. 6) som baseras på fyra grundläggande krav: informationskrav, samtyckeskrav, konfidentialitetskrav och nyttjandekrav.

Informationskravet uppfyllde vi genom att informera lärarna om syftet med vårt examensarbete och deras villkor för deltagande när de tillfrågades att deltaga. De informeras om att deras deltagande är frivilligt och att de när som helst kan avbryta sin medverkan (Vetenskapsrådet, 2002, s. 7). Vi har varit noggranna med hur vi har hanterat våra intervjudokument och inspelningar för att uppfylla konfidentialitetskravet. Alla uppgifter om skola och enskild person är avidentifieras (Vetenskapsrådet, 2002, s. 12) och all data som vi samlat in kommer bara att användas till det här examensarbetet (Vetenskapsrådet, 2002, s. 14).

4.4 Metoddiskussion

Kontroll av reliabiliteten och validiteten vid en kvalitativ intervju är alltid enligt Kvale & Brinkmann (2009, s. 200f) svår att fastställa, men nedan har vi gjort ett försök till detta examensarbete.

Vi hade inga tidigare relationer till dessa lärare och ansåg därför att intervjuerna borde få samma resultat om de gjordes om av någon annan. Att det är flera lärare från varje skola som intervjuades gjorde att analysen av intervjuerna borde visa tydliga mönster som inte borde bli annorlunda beroende av vem som hade analyserat dem. Vi hade som mål att undvika ledande frågor för att behålla reliabiliteten då det annars kunde påverka de intervjuade och inte då skulle ge samma svar om någon annan skulle göra samma intervju vid ett annat tillfälle (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 263). Med detta anser vi att reliabiliteten för våra intervjuer är goda. Däremot så är reliabiliteten låg på vår observation då "tillvägagångsättet vid observationer ute på fältet sällan är standardiserat" (Halvorsen, 1992, s. 85).

När vi analyserade intervjuerna var det viktigt att inte vinkla resultatet efter våra egna åsikter. För att kontrollera validiteten återkom vi därför till intervjupersonerna efter analysen för att säkerställa att det vi tolkat ur intervjuerna stämde med verkligheten (Denscombe, 2000, s. 249). Validiteten är god då vi intervjuat flera verksamma lärare som kunde ge sin syn på problemlösning. Dock hade det varit bättre om det hade funnits möjlighet att intervjua ännu fler lärare på flera skolor, med det fanns inte tillräckligt med tid för detta. Intervju som metod känns relevant då vi får mer direkta svar från lärare som är ute i verksamheten. Att vi även fick möjlighet till att observera en lektion som gjorde att vi kunde jämföra verkligheten med de svar vi fick i våra intervjuer gjorde att validiteten höjdes mer. Dock är det bra att belysa att det alltid är svårt att vara 100 % objektiv vid en observation utan att lägga in moraliska eller andra värderingar. Dessutom kan enligt Halvorsen (1992, s. 84) elevernas och lärarens beteende förändras om de vet att de blir observerade.

Då vi endast besökt ett högstadium och ett gymnasium och därför hade ett begränsat urval är det svårare att generalisera vårt resultat, vilket i och för sig inte var vårt syfte med undersökningen. Hade vi gjort en större enkätundersökning i flera skolor hade vi kunnat få ett mer generaliserat resultat, men vi ville göra en kvalitativ undersökning för att få mer konkreta svar på våra frågor.

5 RESULTATREDOVISNING

I detta avsnitt kommer vi att redovisa vår analys av de intervjuer och den observation vi gjort på de båda skolorna. Under varje huvudrubrik kommer högstadieslärarnas och gymnasielärarnas åsikter presenteras under varsin underrubrik för att enklare kunna se vad de olika lärarna har för åsikter. De nio lärarna som har intervjuats har avidentifierats för att behålla konfidentialitetskravet som vi lovade vid intervjuerna och vi kommer därför bara att benämna lärarna som högstadielärare x och gymnasielärare x, där x står för olika tal för de nio lärare som ställde upp för en intervju.

5.1 Vad är en problemlösningsuppgift?

5.1.1 Högstadielärarna

De intervjuade lärarna på högstadiet menar att en problemlösningsuppgift kan anses vara just en problemlösningsuppgift vid vissa tillfällen och vid andra inte. En av högstadielärarna sa att ”Presenterar man ett nytt område så är det en problemlösningsuppgift för eleverna att räkna ut volymen på en kon när de inte kan det, men sedan när de kan det så är det ingen problemlösningsuppgift längre. Fast sedan finns det å andra sidan uppgifter som alltid är problemlösningsuppgifter” (högstadielärare 1). Ett exempel som en högstadielärare tog fram som exempel var månadens problem på *NCM* (Nationellt centrum för matematik) som han hade använt vid undervisningen i geometri veckan innan. Uppgiften var följande:

> Rebecka har ritat en punkt på ett papper. Sedan drar hon med sin linjal fyra linjer genom punkten och tvärs över hela papperet. Dessa linjer delar upp pappret i bitar. Hur många bitar blir det? (NCM, 2013)

Figur 2.

Enligt högstadielärarna kan en textuppgift vara en problemlösningsuppgift för en elev, medan det för en annan elev bara en ren rutinuppgift. De anser att det är individuellt från elev till elev beroende på deras förkunskaper. För vissa elever kan det vara svårt att veta hur de ska gå tillväga när de stöter på och tolkar en textuppgift. De kan ha svårt att se vad de ska använda och vad de ska räkna ut. Därför kan en uppgift som består av text alltid vara en problemlösningsuppgift för vissa elever som har svårt att tolka en textuppgift. Vissa elever har över lag svårigheter med det svenska språket vilket försvårar uppgiften ytterligare. Det är då viktigt att hjälpa eleven hitta strategier för hur de kan gå tillväga, både vid angripandet av uppgiften men även vid själva lösningsmomentet. De behöver sedan träna på problemlösningsstrategier för att kunna utvecklas till bra problemlösare.

En lärare gav även exempel där hen som introduktion på rymdgeometriska figurer gav eleverna i uppgift att ge sig ut för att fotografera och mäta de rymdgeometriska figurer de kunde hitta ute i skolan och skolgården. De skulle sedan ladda upp dessa bilder i klassens facebookgrupp och försöka räkna ut volymen på de figurer som kom fram för att kunna diskutera det vid nästa lektion. Eleverna hade inte fått någon genomgång om hur olika volymer beräknas, utan skulle tillsammans med sina klasskompisar försöka lista ut hur de skulle kunna komma fram till den verkliga volymen. "Eftersom eleverna sedan tidigare inte visste hur de skulle räkna ut volymen så blev detta som en problemlösningsuppgift för dem just då" (högstadielärare 2).

5.1.2 Gymnasielärarna

Alla gymnasielärare är överens om att problemlösning i praktiken innebär en textuppgift där det inte uppenbarar sig direkt för eleverna hur de ska göra. Det kan vara en så kallad "kluring" som behöver bearbetas innan de kan komma fram till en lösning, eller rena textuppgifter som behandlar det område de just gått igenom. I slutet av varje kapitel i skolans matematikböcker förekommer det textuppgifter som hör till kapitlet. Till exempel så avslutar *Matematik 5000 2b* varje kapitel med ett avsnitt med rubriken "Tillämpningar och problemlösning" som egentligen bara består av textuppgifter där eleverna får använda de metoderna de har lärt sig i kapitlet (Alfredsson, 2012, s. 4). Nedan visas ett exempel som är taget ur *Matematik 5000 2b* under "Tillämpningar och problemlösning" för kapitel 2 som handlar om algebra och icke linjära modeller.

> En loppa hoppar rakt upp från en säng. Hoppet kan beskrivas med följande förenklade matematiska modell:
> $\mathrm{h} = 4\mathrm{x} - 5\mathrm{x}^2$
> h är höjden i meter över sängen och x är tiden i sekunder efter upphoppet.
> a) Beräkna h då x=0,2 och förklara vad du har beräknat.
> b) Lös ekvationen $4\mathrm{x} - 5\mathrm{x}^2 = 0$ och tolka resultatet.
> c) Vilket värde har x då loppan är som högst över sängen?
> d) Hur högt hoppar loppan? (Alfredsson et al. 2012, s. 124)

Den här uppgiften visade en av gymnasielärarna upp för oss och ansåg att det var en problemlösningsuppgift. För det första brukar eleverna ha svårt att se vad de olika variablerna representerar i uttrycket. Vissa kan lätt förstå att de bara ska sätta in x=0,2 i a-uppgiften, men har sedan svårt att förstå vad de egentligen har räknat ut. Läraren anser att eleverna ofta har svårt att tolka vad de räknar på uppgifter som ser ut som denna. De kan ha lärt sig metoden *hur* de ska göra, men förstår inte *vad* eller *varför* de har räknat ut det.

En annan gymnasielärare sa "Vi slänger in lite kluringar ibland" (gymnasielärare 2) och visade exempel på en problemlösningsuppgift hen använde som avbrott från den vanliga undervisningen. Det bestod av sex kort med olika instruktioner. Ett exempel är:

> Kort 1: "Det sjätte talet är det tredje talet gånger fyra och också det första talet gånger åtta."
> Kort 2: "Det tredje talet är det andra talet plus ett, och det fjärde talet är det tredjetalet plus ett."
> Kort 3: "Det femte talet är det tredje talet plus det fjärde talet."
> Kort 4: "Om du lägger ihop de sex förstatalen i följden får du tjugo."

Kort 5: “Det tredje talet i kubik blir det sjätte talet i följden.”
Kort 6: “Det första talet och det andra talet är lika! Vilket är det sjunde talet?”

Eleverna får arbeta i grupp om sex personer och får ett kort var. De ska sedan lösa uppgiften tillsammans. I detta fall så är uppgiften att hitta det sjunde talet och eleverna behöver hjälpas åt att lägga ihop alla instruktioner på sina kort. Detta anser hen är en problemlösningsuppgift då de måste samarbeta och lägga ihop instruktionerna innan de kan börja lösa uppgiften. Det finns heller ingen självklar metod hur uppgiften ska lösas utan det krävs funderingar om strategi innan den kan lösas.

5.2 Undervisning genom problemlösning

5.2.1 Högstadielärarna

Högstadielärarna har under pågående termin deltagit i det nyligen uppstartade *Matematiklyftet*, och har börjat arbeta mer med problemlösning nu än vad de gjort tidigare. Detta har medfört att mer omfattande problemlösningsuppgifter behandlats under lektionerna. Oftast låter de eleverna till en början fundera enskilt, för att sedan arbeta två och två eller tre och tre där de jämför sina resultat och tankegångar. Ibland tillåts eleverna att arbeta tillsammans redan från början, men lärarna anser att det kan ha en negativ effekt för vissa elever. Till exempel kan en elev direkt se lösningen på problemet och berättar då för den andra eleven hur de ska göra utan att denne hinner tänka efter först. Det är viktigt att de först får fundera enskilt när det finns tid för det. Lektionerna avslutas sedan med att de presenterar sina lösningar för resten av klassen. Alla elever eller grupper får då komma till tals och berätta sin lösning och de lyfter upp olika lösningar. Den här undervisningsformen förekom även innan de anslöt sig till *Matematiklyftet*, men då mer sporadiskt.

Samtliga lärare på högstadiet ville att problemlösning skulle vara en integrerad del i undervisningen. De använde sig av problemlösningsuppgifter, kopplade till aktuellt arbetsområde, med syfte att ge eleven bättre förståelse för fenomenet och samtidigt variera arbetssättet i klassrummet. På så sätt frångicks delvis katederundervisningen som var högst dominerande. En lärare menade att det ”ibland används för att eleverna själva ska hitta nya strategier” (högstadielärare 3), som med fördel kan användas vid uppstart av nytt arbetsområde. En uppgift kan göras som är kopplad till arbetsområdet som är en problemlösningsuppgift. Tanken är då att eleverna ska lära sig någonting istället för att läraren ska stå och undervisa *om* innehållet. Lärarna ansåg det viktigt för eleverna att få använda sig av och träna på problemlösning, även om de utvalda uppgifterna inte var kopplade till det matematikområde de behandlade just då. ”Jag har minst en problemlösningsuppgift varje lektion, för man alltid behöver öva på det. Ibland har vi problemlösningstävlingar för hela skolan” (högstadielärare 4). Att vara duktig i problemlösning handlar inte bara om att kunna lösa matematiska problem, utan även om att kunna lösa problem i vardagen.

5.2.2 Gymnasielärarna

På gymnasiet stötte eleverna främst på problemlösning i slutet av varje kapitel i sin matematikbok. Där finns det textuppgifter som är kopplade till det innehåll och de moment som tagits upp i kapitlet och de får öva sig på att tillämpa metoden på olika problem. Eleverna är då tvungna att lista ut vilka tal som ska användas var samt vad som faktiskt ska räknas ut. De måste även välja rätt strategi och verktyg för att kunna lösa uppgiften. ”Sen försöker jag ha lite kluringar och roligare övningar som avbrott ibland, men det är sällan kopplat till det vi håller på med just då” (gymnasielärare 2). Detta utan att ha något egentligt syfte med uppgiften utan mest för att få ett avbrott i den vardagliga undervisningen. Någon gång ibland används ett problem som inledning till ett nytt moment, ”men oftast är det svårt att vara kreativ och man hamnar i gamla vanor” (gymnasielärare 3).

Att använda sig av en större problemlösningsuppgift som eleverna får arbeta med under en lektion ansåg ingen av gymnasielärarna att det fanns tid till. De tror säkert att det kan vara bra för förståelsen hos eleverna, men det är alldeles för många moment att arbeta igenom i gymnasiets matematikkurser och tiden är knapp. För att hinna med allt som står i det centrala innehållet måste de hålla ett högt tempo och avverka mycket stoff varje lektion för att hinna med allt. “I dagsläget så krävs det att eleverna räknar en del hemma för att hinna med och det är främst där det brister.” (gymnasielärare 4). En möjlighet som en av gymnasielärarna kunde se var om de hade matematik en hel dag varje vecka så att de fick mer tid. Då kunde de starta första lektionen med en större problemlösningsuppgift där klassen kunde diskutera för att sedan öva på momentet senare på dagen. Detta är dock inget som skulle fungera varken resursmässigt eller tidsmässigt på gymnasiet.

En lärare anser att eleverna först måste ha lärt sig momenten för att kunna lösa problemlösningsuppgifter. ”Först när de kan metoderna kan de se hur de kan använda dessa i det verkliga livet” (gymnasielärare 4). De sa även att det kan vara svårt för eleverna att själva komma på verktygen som derivata, integral och så vidare i de högre matematikkurserna. Detta skulle kunna leda till att de större uppgifterna tar lång tid att genomföra samtidigt som eleverna ändå inte kan komma på lösningen själva utan en genomgång av läraren.

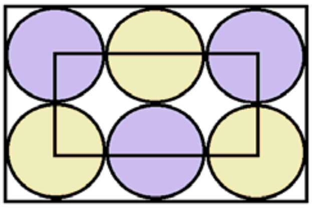
5.3 Hur används problemlösning i undervisningen?

För att se hur undervisningen med problemlösning går till i praktiken har vi observerat en lektion på den aktuella högstadieskolan. En av de intervjuade lärarna erbjöd oss komma och observera en matematiklektion i en sjunde klass och vid den aktuella lektionen var det sjutton elever och två lärare närvarande, varav den ena läraren var specialpedagog. De arbetade med geometri och dagens lektion skulle bestå av två problemlösningsuppgifter. Den första uppgiften eleverna fick var hämtad från *NCM* och löd:

> Från en rektangel med sidorna 15 cm och 9 cm skär Silvio bort fyra små kvadrater, en i varje hörn av rektangeln. Varje liten kvadrat har omkretsen 8 cm. Vilken omkrets har den nya figuren? (NCM, 2012).

Den andra uppgiften löd:

> Bilden innehåller sex lika stora cirklar som precis får plats i en rektangel. En mindre rektangel har sina fyra hörn av cirklarnas mittpunkter. Den mindre rektangeln har omkretsen 60 cm. Vilken omkrets har den större rektangeln?

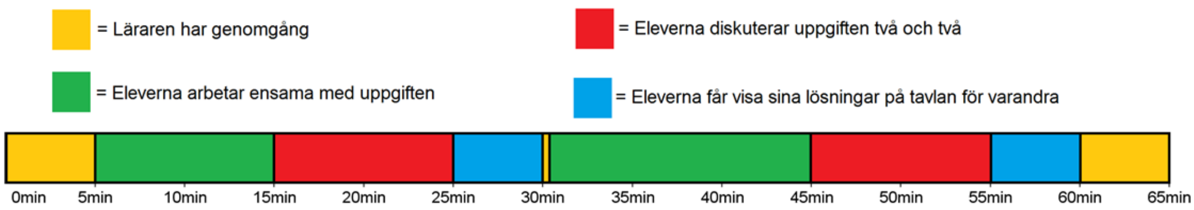


Figur 3.

Det första problemet hade läraren valt ut från *NCM* för att det passade in under området geometri och det andra hade hen hittat på själv. Förra veckan arbetade de med omkretsen av olika geometriska figurer och därför tyckte hen att dessa två uppgifter passade bra. Uppgifterna visades på tavlan med hjälp av projektor.

Läraren startade lektionen med att läsa upp problemet högt för eleverna och ge dem instruktioner att först tänka själva och försöka lösa problemet individuellt. De fick inte prata med varandra utan skulle få diskutera med en klasskompis först när läraren sa till. Båda lärarna cirkulerade i klassrummet. Vissa elever kom inte igång och då gav lärarna dessa elever tips om att rita upp en figur, men mer än så hjälpte de aldrig eleverna. Eleverna fick sitta själva och klura i nästan tio minuter innan de fick börja diskutera två och två. De fick då instruktionerna att förklara sina lösningar för varandra. Har de inte samma svar skulle de diskutera sig fram till en lösning tillsammans. När några elever blev klara före de andra gav hen dessa elever i uppgift att fundera på om de såg något mer och vad de behöver för förkunskaper innan för att kunna lösa problemet. Efter cirka tio minuters diskussion skulle eleverna redovisa sina lösningar. En elev kom fram till tavlan och ritade upp figuren och förklarade hur hen tänkt. Läraren frågade sedan om någon annan hade löst uppgiften på ett annat sätt och denne elev som hade ett annat förslag fick komma fram och visa sin lösning på tavlan. De diskuterade sedan i helklass vad som behövdes för förkunskaper för att kunna lösa problemet och vad det fanns för svårigheter med problemet. Eleverna kom fram till att de behövde känna till vad omkrets, rektangel och kvadrat är. "Man kan lätt tro att omkretsen kan bli mindre när man tar bort fyra hörn, men så visar det sig att det är samma" sa en elev.

När de var klara med det första problemet övergick de till att arbeta med det andra problemet. Instruktionerna för eleverna var de samma. Först skulle alla elever fundera enskilt utan att prata med någon. Detta problem var lite svårare och eleverna fick cirka femton minuter på sig att försöka lösa uppgiften själva. Efter dessa femton minuter fick de ännu en gång diskutera två och två. Flera elever ville ha bekräftelse av läraren att deras lösningar var rätt, men då hänvisade hen bara till att diskutera med sin klasskompis och komma fram till ett gemensamt svar. Läraren gick runt och gav vissa grupper små tips om att tänka på diametern om de helt kört fast, men hen hjälpte dem aldrig att lösa uppgiften. Sedan var det dags att redovisa sina lösningar för resten av klassen. Läraren valde slumpvis ut en elev som fick komma upp till tavlan och visa hur hen löst uppgiften. Denna elev startade sin lösning med att säga att "Man måste först veta vad diameter och radie är för att kunna lösa denna uppgift. Man behöver även veta hur många radier det går på en diameter" och ritade sedan i figuren för att förklara sin lösning för sina klasskompisar. Läraren bad sedan en annan elev som hade löst uppgiften på ett annat sätt att komma upp och visa hur hen tänkte. Läraren frågade sedan om någon annan elev hade löst uppgiften på ytterligare något sätt, men utan respons. Därefter frågade läraren "Varför tror ni att jag valt ut dessa två problem?" och fick svaret av eleverna att det troligtvis berodde på att de hade pratat om omkrets förra veckan. Eleverna lyfte fram de olika begreppen de stött på som radie, diameter, rektangel, cirkel och kvadrat.



Figur 4. Bilden visar fördelningen av tiden mellan elever och lärare under den observerade lektionen.

Figuren visar hur fördelningen av tiden var under lektionen. Det vi kan se är att läraren lät eleverna arbeta mycket själva och hade bara en kort genomgång för att starta upp lektionen. Sedan hade hen en kort introduktion av det andra problemet och avslutade sedan lektionen med en diskussion om varför de har arbetat med just dessa problem. Utöver den tiden fick eleverna arbeta ensamma eller tillsammans med en kompis.

5.4 Högstadielärarnas tankar om *Matematiklyftet*

Vid intervjuerna med högstadielärarna kom vi in på *Matematiklyftet* och hur det har påverkat deras undervisning. Därför kommer nu en sammanfattning av deras tankar om detta arbete.

Högstadielärarna startade *Matematiklyftet* denna termin. De förklarade för eleverna vad det skulle innebära att vara med i *Matematiklyftet* när de startade projektet. Eleverna gnällde mycket i början om att de aldrig hann arbeta i boken utan bara fick göra massor av andra uppgifter. Mest motstånd gav niorna och minst sjuorna "och det tror vi beror på att niorna är mest vana vid att arbeta med boken" (högstadielärare 3). Frågorna om att få räkna i boken har med tiden minskat och eleverna tycks ha insett att de lär sig momenten bra med det problembaserade arbetssättet. De har även märkt att de inte behöver göra lika många uppgifter i boken utan lär sig momenten ändå.

Lärarna har sedan de gick med i *Matematiklyftet* gått ifrån att ha en planering med ett visst beting av uppgifter varje lektion till att eleverna själva fått avgöra hur många uppgifter de behöver göra för att lära sig de olika momenten. Vissa elever förstod momenten så pass bra när de gjorde dessa problemlösningsuppgifter och behövde då inte göra alla uppgifter i boken medans andra elever, trots detta, behövde göra alla rutinuppgifter för att lära sig momentet. ”Det är ju helt ointressant för mig som lärare om eleven har räknat 79 uppgifter eller om den har räknat två. Den ska kunna begreppen och kunna tillämpa dem”(högstadielärare 5). Detta belyser en viktig poäng där det är kvalitet snarare än kvantitet som spelar roll i matematiken. Vidare beskriver läraren hur förändringen medfört att elever själva börjat fundera kring och ta ansvar för sin egen inlärning som ytterligare är en god effekt av detta arbete. En av högstadielärarna sa att ”*Matematiklyftet* har gett oss mer prat och resonemang på lektionerna där man fokuserar mer på innehållet" (högstadielärare 2) vilket de anser är en bra effekt som de tidigare har saknat i undervisningen.

Det som flera av högstadielärarna ansåg var bra med *Matematiklyftet* var att de nu har inplanerat ett möte varje vecka som är prioriterat för att diskutera matematikundervisningen. Innan dess försökte de ha liknande möten, men dessa blev ofta bortprioriterade och därför inte kontinuerliga. Detta är något som lärarna vill ta med sig vidare sedan när de inte längre är delaktiga *Matematiklyftet*. "Det blir mycket eget arbete och man gör sin egen undervisning, men att dela med sig av bra idéer och diskutera vad som är bra och mindre bra tror jag är viktigt för att ha en bra undervisning och utveckla sin undervisning” (högstadielärare 3).

En lärare tycker att arbetssättet som *Matematiklyftet* förespråkar är jättebra, men hen ifrågasätter om det hjälper eller stjälper eleven att kunna utföra sina studier på gymnasiet och högskolan/universitetet sen. Eftersom det är ett mycket högre tempo på gymnasiet, särskilt hos till exempel en naturvetenskaplig linje. Det krävs oftast att eleverna räknar många uppgifter för att kunna lära sig momenten och kanske det är bra om eleverna får träna på det redan i högstadiet. Med denna arbetsmetod kommer vi längre ifrån böckerna och eleverna räknar inte lika många uppgifter längre. “Kommer detta medföra att de får det svårare på gymnasiet?” (högstadielärare 4). Om svaret på den frågan är ja så kanske det inte är ett vinnande koncept, men det är inget vi kan svara på i dagsläget.

Det mest utmärkande i intervjuerna med högstadielärarna var att alla lärare var positivt inställda till *Matematiklyftet*, men om det kommer leda till bättre resultat i framtiden hade de svårt att säga. Förhoppningen med *Matematiklyftet* är att öka matematikkunskaperna hos eleverna och om detta lyckas får framtiden får utvisa.

6 SLUTDISKUSSION

Under tiden vi skrev vårt arbete har en rad frågor och tankar dykt upp längs vägen. Men lärarnas syn på problemlösning kommer att vara fokus för diskussionen. Vårt syfte blir således att utreda hur lärares syn på problemlösning förhåller sig jämfört med vad forskare och teoretiker säger, samt vilka konsekvenser detta kan få för undervisningen. Vi kommer även fokusera på hur problemlösning användes på både högstadiet och gymnasiet och vilka konsekvenser detta kan ha för framtida lärare.

Alla lärare vi har intervjuat har svarat att problemlösning är en uppgift där problemlösaren inte direkt kan se vad svaret ska bli, utan hen måste tänka till först för att kunna lösa uppgiften. Den definitionen som lärarna hade gemensamt innefattar otroligt många uppgifter, även vanliga rutinuppgifter kan var knepiga men behöver nödvändigtvis inte innefatta problemlösning. Riesbeck (2000) uttalar sig skeptisk till en alldeles för bred definition av problemlösning eftersom begreppet i sig är vagt och kan ges olika innebörd beroende på vilket sammanhang det sätts in i. Även kontexten påverkar vad för slags uppgift det är. Hon menar att en upplevelse av problemlösning är att i ett matematiskt sammanhang ha ett problem som motiverar till att hitta en lösning och samtidigt ge en upplevelse då det inte är självklart hur den ska finnas. Hon poängterar att om bara det ena villkoret av de två är uppfyllda så kan det inte klassas som ett problem i strikt mening. Högstadielärarna påpekade att en uppgift kan anses vara en problemlösningsuppgift för en elev men inte för en annan, att det beror på elevernas förkunskaper. Detta återspeglar tankarna om Taflins (2007) glassuppgift där eleven ska finna på hur många sätt det går att bygga en glasstrut med två kulor och fyra smaker. Detta kan vara en problemlösningsuppgift för vissa, helt beroende på i vilken kontext den sätts i. För de elever som uppgiften är främmande blir det en problemlösningsuppgift. Den tanken stödjer även Jablonka (2013) och Björkqvist (2001) som lyfter fram att metoden för att komma fram till rätt svar inte får vara synlig för den elev som löser uppgiften.

Flera av lärarna på gymnasiet ansåg att en textuppgift var en problemuppgift som kräver att eleven först tänker till innan hen kan lösa uppgiften. Dock använder de sig utav textuppgifter som kommer sist i varje kapitel som gör att eleven vet sedan tidigare vilka metoder som kommer krävas på just det kapitlet. Är det då en problemlösningsuppgift? Riesbeck (2000) vänder sig till skolan och de problemlösningsuppgifter som ges och menar att de uppgifter som går att applicera en metod på, eller endast berör det som läraren haft genomgång på, inte bidrar till elevens uppfinningsrikedom, logiska tänkande eller fantasi. Det gör däremot de rika matematiska problemen som Taflin (2007) beskriver, som innehåller flera dimensioner och där vissa krav på uppgiften måste vara uppfyllda för att få kalla det ett rikt problem. Det ska till exempel kunna lösas med flera olika metoder, leda till att undervisningen breddas och ges i ett större sammanhang och leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.
Taflins (2007) rika problem är en tämligen strikt syn på vad problemlösning är och kräver mycket från läraren som ska kunna välja ut bra uppgifter som lever upp till de krav som finns

för ett rikt problem. Med Taflins (2007) definition så kan inte de textuppgifter som presenteras sist i bokens alla kapitel räknas som problemlösningsuppgifter. Eleverna vet att de förväntas göra vissa beräkningar för att ha löst uppgiften på bästa möjliga sätt, och de vet också mycket väl vilka metoder som anses högt rankade av lärarna. Downs & Downs (2005), Boesen (2006), Jablonka (2013), Björkqvist (2001) och Riesbeck (2000) anknyter till idén att en uppgift får räknas som ett problem om problemlösaren stöter på motgångar i sitt tankemönster och inte vet hur eller med viken metod uppgiften ska lösas. Eftersom eleven får så pass mycket gratis skjuts i att lösa uppgiften längst bak i kapitlet endast genom att titta till vilket delkapitel uppgiften presenteras i, ges de en alldeles för stor ledtråd i hur problemet kan lösas.

Problemlösning eller ej beror alltså på förutsättningar och förkunskaper, vilket innebär att samma uppgift inte nödvändigtvis behöver innebära problemlösning för båda två. Downs & Downs (2005) ifrågasätter dock om inte också ett utarbetat matematiskt bevis kan innebära problemlösning för vissa, tankebanan inte direkt ses. För att förstå de resonemang som förs i ett matematiskt bevis måste den egna förståelsen skapas och alla de steg som görs måste greppas. Har personen aldrig tidigare stött på det som presenteras, ja då är det ju enligt kravet att problemlösaren ska ställas inför något nytt, ett problem. Däremot lever ett matematiskt bevis inte upp till kraven för ett rikt matematiskt problem.

Om eleven har arbetat med ett kapitel som handlar om till exempel derivata så kan eleven ganska snabbt förstå att den ska använda de metoder läraren har gått igenom vid tidigare lektioner och bör då inte ses som en problemlösningsuppgift, utan snarare en rutinuppgift. Att de uppgifter som finns sist i varje delkapitel i de skolböcker vi studerat utger sig för att vara problemlösningsuppgifter, är tveksamt. En matematisk uppgift vävs in i en text och blir på så sätt mer *problematisk* att lösa då de måste sortera bort onödig information. Om lärare väljer att använda sig utav dessa uppgifter så måste de ha i åtanke att inte alla elever kommer att uppleva samma motgång eftersom en högpresterande elev inte behöver använda sin fantasi i samma mån som en lågpresterande elev. På samma sätt som ett matematiskt bevis enligt Downs & Downs (2005) kan innebära problemlösning, så kan säkert uppgifterna längst bak i kapitlet innebära problemlösning för vissa, men endast för de elever som inte än så länge greppat det som kapitlet visar. Eftersom skolan ska tillgodose allas behov så bör även uppgifterna göra det.

En av gymnasielärarna visade uppgiften om loppan (se exempel i resultatredovisningen) från deras matematikbok. Tittas det på det exemplet i jämförelse med hur Taflin (2007) beskriver en problemlösningsuppgift så är detta inte en sådan. Det är snarare en uppgift som tillhör kapitlet *andragradsfunktioner* där eleverna först får tolka lite text innan de börjar räkna. Instruktionerna är tydliga och eleverna bör inte ha några svårigheter att lösa uppgiften om de tidigare tränat på metoderna. Tidigare presenterad forskning (Jablonka 2013) har visat att elever ofta har svårt att applicera den inlärda matematiken i nya forum på ett nytt kreativt sätt. Det visar sig att eleverna är duktiga på att lösa problem om det rör sig inom ett visst område, men stöter på problem när kontexten eller matematikområdet ändras. Uppgiften om den hoppande loppan rör sig i största möjliga utsträckning inom det presenterade området, med verktygen och metoden väl synlig för eleverna. Uppgiften utmanar inte eleverna att tänka utanför ramarna och tvingas inte till ett vidare resonemang. Den visar istället på den traditionella undervisningen som Jablonka (2013) diskuterar och lyfter fram. Hon menar att det traditionella sättet att undervisa i matematik som innebär stort fokus på given fakta, metoder och stegförsteg instruktioner gör det svårt för eleverna att lyckas sätta in kunskapen i nya sammanhang. Det utvecklar då inte elevens förmåga att lösa problem. Även

Skolinspektionens (2010) kvalitetsgranskning såg att lärare fokuserar på mekanisk räkning och hantering av procedurer i stor utsträckning vilket kan leda till att eleverna ges sämre möjlighet att utveckla de centrala förmågorna. Det kan säkert vara ett smidigt sätt för stunden att avstå från undervisning som tränar rik problemlösning då det förenklar för eleverna på kort sikt, men där matematisk kreativitet hamnar i skymundan så kan det försvåra för eleverna i framtiden. Elevers egen tankeverksamhet måste prioriteras för att få en undersökande och meningsfullt lärande. En annan aspekt, som några högstadielärare påpekade, är att en textuppgift i sig kan vara svår att tolka för vissa elever, men detta kan snarare ha med deras läsförståelse att göra än själva matematikproblemet. Om eleven har lässvårigheter eller dyslexi så kan alla uppgifter som består av text vara ett problem för just denna elev, men är ingen problemlösningsuppgift i matematisk bemärkelse.

Om det fokuseras på hur matematikundervisningen i gymnasiet och hur lärarnas förhållningssätt tycks vara gentemot problemlösning kan frågan om det verkligen kommer räcka till för att uppnå de mål som finns i de nya läroplanerna från 2011 ställas. Att ibland lyckas flika in problemlösning i slutet av varje kapitel till eleverna, ofta som ett frivilligt moment kommer med all säkerhet inte hjälpa dem att uppnå de centrala mål som numera står skrivna där. Då lärarna i gymnasiet beskriver hur de använder sig av de problemlösningsuppgifter i slutet av varje kapitel, samt erkänner ett underskott av tid för mer avancerade och omfattande problem kan det ganska snabbt konstateras att mål i läroplanen som beskriver hur matematiken ska kunna användas i omfångsrika problem blir lidande.

En annan aktuell fråga är hur det faktiskt ska gå till att mäta en elevs problemlösningsförmåga på ett rättvist sätt. Är det rimligt att ha krav i läroplanerna på en förmåga som är så svår att bedöma och mäta? Problemlösning är något som inte direkt är kopplat till ett specifikt område, utan något som i många fall kommer appliceras på det andra centrala innehållet i kursen. Detta gör det vidare svårare att bedöma just problemlösningsförmågan, då det ofta krävs god kunskap om det andra centrala innehållet som behandlas i problemuppgiften.

En vidare studie av hur de nya läroplanerna ser ut från 2011 avslöjar att de höjda kraven associerade med problemlösning sätter större krav på både lärare och elever. På läraren i form av att vissa delar eventuellt behöver vara mer styrda, som till exempel hur olika lösningar värderas. Detta är något som är väldigt svårt att göra som elev utan stöd från läraren, eller hur elever behöver utsättas för situationer där metod inte från början är klar, det vill säga där det blir aktuellt att kritiskt granska uppgiften på ett mer matematiskt vis, snarare än en uppvisning i texttolkning och procedurräkning.

För att återgå till lärarnas uttryckta tidsbrist och hur detta gör att problemlösning får åsidosättas i undervisningen ger även en tydlig bild för hur lärare ser på begreppet problemlösning. Då det numera är centralt innehåll och i viss mån lika värderat som det övriga stoffet, verkar det inte ha slagit igenom hos en majoritet av lärarna. Intrycket detta ger är att de lärarna är stoffinriktade och fortfarande har kvar den inställningen som funnits i tidigare läroplaner där problemlösning varit i periferin och inte något centralt.

En återblick till läroplanenen för gymnasiet från 1994 (lpf 94) visar att problemlösning i stort sätt begränsades till att vara något som användes för att testa elevers förmåga att använda satser och resonemang de lärt sig vilket även kan utläsas från de ännu äldre versionerna från 1975. Hur ska dessa lärare förstå hur viktig problemlösning är?

Detta väckte frågan om huruvida eller i hur stor grad lärarnas ålder kan påverka hur de ser på undervisningen. Äldre lärare har gått sin utbildning då andra styrdokument gällde, som var aktuella under deras lärarutbildning och kanske starkt präglar de lärarnas tankar och undervisning. Generellt på de intervjuer vi genomförde så var det yngre lärare vid högstadiet än vid gymnasiet vilket skulle kunna vara en faktor som påverkar deras syn på problemlösning. Skolinspektionen (2010) visar också att flertalet lärare inte är tillräckligt insatta i styrdokumenten vilket vidare stödjer tanken om att äldre lärare följer äldre läroplaner. Det säger sig självt att om lärare inte håller sig väl uppdaterade då det kommer nya läroplaner och inte tar dem till sig på ett gediget sätt så blir de lätt fast i samma gamla spår. Det är tyvärr svårt att dra några direkta slutsatser om lärarens ålder påverkar deras åsikt eftersom vår undersökning inte är omfattande, men det är en observation som är värd att tänka på.

Arbetssättet i *Matematiklyftet* är något som lättare kan identifieras med de läromål som finns nerskrivna i de nya läroplanerna (Skolverket, 2011). Här kan vi alltså observera hur effektivt det kan vara med en statlig nationell satsning som *Matematiklyftet* är och hur det kan verka för att förändra lärarens åsikter och inställning. Kanske handlar gymnasielärarnas förhållningssätt till problemlösning om okunskap kring hur omfattande, effektivt och varierande det kan vara att arbeta mer efter en problemlösningsbaserad undervisning. Utan att ha sett att det finns en utarbetad metod som de arbetar efter i Japan som tydligt fungerar, kan det säkert även finnas en rädsla för att det inte ska fungera och att ens elever blir lidande. Det är även tveksamt om det i nuläget finns tillräckligt med tid och om det är en metod som passar den svenska undervisningen.

Flera lärare kommenterade att *Matematiklyftet* har gett dem en speciell mötestid för att tillsammans diskutera matematikundervisningen som de uttryckte som något värdefullt och som en möjlig lösning för att kunna förbereda bra lektioner. Dock kan det ifrågasättas var denna tid kommer ifrån och om det är något annat som blir lidande på *Matematiklyftets* bekostnad. Det måste tas i beaktning då det arbetas efter en sådan modell att det kommer krävas mer av läraren både när det gäller förberedelse och utvärdering. Som vi nämnde tidigare har de i Japan en ständig fortlöpande process för att förbereda, utvärdera och förbättra sitt arbete (Isoda, 2010). Undervisningsstilen kan göra matematikundervisningen mer intressant, varierande och givande då det blir mer utmaningsbaserat än mekaniskt arbete som många elever upplever om matematikundervisningen idag.

Värt att notera är att om 60 % av en lektion läggs på nytt stoff (Helmertz, 2007) kan det skapa ett större behov av att arbeta med matematikuppgifter utanför skoltid. Gymnasielärarna påpekade att de har mycket stoff som ska hinnas med under en kurs och tiden är knapp. Skulle lärare göra som i Japan, alltså lägga 60 % av lektionen på nytt stoff, så skulle de kanske ha mer tid för just detta, men då krävs det eventuellt att eleverna repeterar utanför skoltid. En del av gymnasielärarnas uttryckte tidsbrist där problemlösning blir lidande kan dock lösas genom att som i Japan introducera nytt stoff *genom* problemlösning. Frågan om huruvida elever kommer att repetera det nya stoffet utanför skoltid kvarstår dock och som en av gymnasielärarna säger, så arbetar eleverna i regel inte med matematiken utanför skolan. Är det kanske här vi måste lägga krut och se till att eleverna förstår att det krävs att de arbetar med matematiken även hemma?

Matematik har inte lika hög status i Sverige som den har i asiatiska länder vilket eventuellt kan skapa ett problem då det kan leda till att flera elever hamnar efter då de inte är vana vid denna typ av arbete. Speciellt aktuellt är diskussionen om undervisningen inte konsekvent använt sig av denna metod då eleverna inte är vana vid den utan måste ställa om sina prioriteringar för att metoden ska bli effektiv eller ens fungera överhuvudtaget. Får vi inte eleverna att arbeta hemma med matematik själva så måste vi se till att utnyttja lektionstiden i möjliga mån för att eleverna ska hinna med alla moment. En annan aspekt som är värd att fundera på är hur mycket lärare kan kräva att eleverna ska hinna arbeta med matematiken hemma. De läser många ämnen samtidigt och det är viktigt att tänka på att eleverna många gånger måste prioritera för att hinna med alla uppgifter som ska göras i skolan. De läser trots allt inte bara matematik, men som lärarna på högstadiet har märkt så behöver eleverna inte göra lika många uppgifter i boken efter att ha arbetat med mer omfattande problem. Skulle detta kunna möjliggöra att eleverna inte behöver arbeta lika mycket hemma?

Den kulturella skillnaden i Japan och Sverige är också avsevärd och måste även tas i beaktning när det diskuteras om utbildning. Svenska elever lever efter helt andra förhållande än de i Japan där kanske framförallt matematiken har en annan status. Är den japanska modellen en metod som passar extra bra för högpresterande elever eller är det något som passar alla? Fungerar det att inte vara helt konsekvent i dess användning och bara ibland använda sig av upplägget? Lärare kan eventuellt löpa risk för att mötas av elever som inte förstår poängen i arbetsmetoden och helt enkelt ”stänger av” och börjar tänka på annat. Detta är svåra frågor att besvara och inget vi i nuläget kan besvara men som är värt att fundera kring.

Den stora skillnaden mellan gymnasiet och högstadiet var de problemlösningsuppgifter som vi har fått uppvisade. Från högstadiet fick vi se, både vid intervjuer och observation, mer omfattande problem som är kopplat till det arbetsområde de befinner sig i just då. Tanken med uppgiften är då att öka elevens förståelse för ett visst begrepp eller en viss metod. Uppgifterna är genomtänkta och har ett tydligt mål och syfte. Om eleven då får reda på vad målet med uppgiften är så kan detta kanske leda till en motivation att faktiskt lösa detta problem på egen hand innan det ska diskuteras med klasskompisen. Nilsson (1993) visar på att motivationen att vilja lösa problemet och attityden till uppgiften måste finnas där för att lyckas, vilket också avgör förutsättningarna. Om en elev inte upplever uppgiften som meningsfull kommer denne heller inte att entra uppgiften på ett ultimat sätt. Att då använda sig av kluringar som avbrott i undervisningen som en av gymnasielärarna beskrev känns inte helt genomtänkt. Läraren gav ett exempel (se ovan i resultatredovisningen) där eleverna fick var sitt kort med instruktioner som de sedan skulle samarbeta kring för att kunna lösa det presenterade problemet. Uppgiften i sig var bra, men om den inte har med det stoff de arbetar med så känns det som att eleverna arbetar med uppgiften utan syfte och mål.

Problemlösningsuppgifter ska utveckla olika förmågor hos eleverna. De ska lära sig att argumentera, pröva metoder och resonera matematik, och om uppgiften inte kan hjälpa eleven framåt i sin utveckling, varför då ägna tid till en sådan uppgift? Det känns som att undervisningen, som är nog tidspressad, inte borde kunna rymmas stoff som saknar idé och mening. Det enda målet som läraren verkade ha med uppgiften var att ge eleverna ett avbrott från den traditionella undervisningen och kan därför kanske anses som slöseri med tid. Kan inte då den tiden användas till att arbeta med större problemlösningsuppgifter som är kopplade till kursens centrala innehåll och förmågor, men som ändå ger ett avbrott från den vanliga undervisningen?

När lärare aktivt använder sig av problemlösningsuppgifter bör de ha ett tydligt mål. Vad vill de att uppgiften ska utveckla hos eleven? Taflins (2007) definition på ett rikt problem, som hon förespråkar att läraren använder, har alla olika nivåer av lösningsmetoder och kan därför ges till många olika elever. Om jag som lärare har som mål att eleven genom problemlösning ska finna en så smidig väg till lösning som möjligt, bör jag då använda ett rikt problem? Om jag som lärare vill styra eleverna till att komma fram till ett visst svar, är då ett rikt problem det bästa problemet att välja? Vart jag vill med uppgiften är A och O för att kunna välja ut ett bra problem. Att introducera nya begrepp/symboler kan göras genom problemlösning, till exempel π som är ett tal som anger förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter. När eleverna har fått den nya nyckeln så kan problemet lösas utan vidare ansträngning, men att de själva först får försöka komma fram till vad för nytt som behövs för att kunna lösa uppgiften kan vara ett bra sätt att få eleverna ännu mer medvetna om vad de faktiskt arbetar med och varför de arbetar med det. Vi anser alltså att inte bara de rika problemen kan vara till nytta, utan även andra problem som inte passar in på definitionen av rikt. Det viktiga är att uppgiften har ett mål och läraren bör veta vad hen vill att eleverna ska ha med sig efter att en lösning nås.

Taflin (2007) förespåkar att eleverna måste få arbetamed problemlösning under hela sin skolgång för att de ska kunna utvecklas. Det ska inte bara bestå av enstaka inslag i undervisningen, och uppgifterna får därför gärna ta tid att lösa oavsett om man arbetar individuellt eller tillsammans och eleverna lär sig tänka matematiskt. Med forskningen som stöd tyder att de uppgifter vi fick se på högstadiet är mer bearbetade och låter eleverna utvecklas. När vi gjorde observationen fick vi se hur högstadielärarna som var delaktiga i *Matematiklyftet* arbetar i praktiken. Vi kunde då se att de gav eleverna större problemlösningsuppgifter som de först fick lösa enskilt. Efter en stund fick de diskutera sin lösning med en klasskompis för att senare presentera sin lösning för resten av klassen. Denna typ av undervisning gav eleverna mycket egen tid till fundering och modellering kring problemet. De fick även prata matematik när de skulle diskutera sina lösningar och var på så sätt tvungna att kunna förklara vad de gjorde. Detta tror vi absolut kan öka deras förmåga i att föra ett matematiskt resonemang samtidigt som de får öva sig i att lösa problem.

Som figur 4 på sidan 26 visar så kan vi se att läraren lät eleverna ta tid på sig att komma fram till en lösning innan de fick diskutera med sin klasskompis. Även diskussionen mellan eleverna fick ta tid och inget påskyndades. Den största delen av den observerade lektionen bestod av eget arbete av eleverna och läraren var väldigt inaktiv och lät istället eleverna vara aktiva och förklara för varandra. Detta för att de skulle träna på sitt matematikska resonemang och förklara sina egna lösningar för varandra. Detta anser vi är en bra metod som gör att eleverna måste fundera på hur de kommit fram till sin lösning och får då tänka över problemet en gång till för att sedan kunna ge en bra förklaring till klasskompisen.

Det som är viktigt att tänka på är att om en elev upplever ett problem som alldeles för svårt eller alldeles för lätt så kant eleven kan ge upp eller tappa intresse redan innan den startat. Polya (1945) anser att en uppgift bör vara intressant och väl utvald och vara anpassad till elevernas kunskaper. Att som lärare välja ut gemensamma uppgifter som ska passa alla elever kan i princip ses som en omöjlig uppgift (om inte gruppen är väldigt homogen). Därför blir det extra viktigt att hitta uppgifter som går att lösa olika långt där både ett konvergent tänkande och ett divergent tänkande, som Nilsson (1994) beskriver, kan appliceras. För att utforma bra uppgifter tror vi att det är bra att diskutera med sina kollegor och sedan testa på eleverna. Vissa uppgifter blir kanske för lätta och andra blir för svåra. Det är en balansgång där det krävs träning. De två exempel som vi fick se under observationen var av två olika svårighetsgrader. Det andra problemet var svårare än det första och därför lät läraren eleverna få mer tid på sig att lösa den uppgiften. Detta för att alla elever skulle hinna fundera ut sin egen lösning innan de skulle diskutera med klasskompisen. Om en elev körde fast och inte kom vidare i sin lösning så var läraren noga med att inte berätta svaret för eleverna utan försökte leda in den på rätt spår med små tips. Detta anser vi är bra då eleven sedan efteråt kan känna att den klarar av även svårare uppgifter. Hade läraren gett dem mindre tid så hade säkert inte alla elever hunnit komma fram till en egen lösning. De ges heller inte någon falsk insikt om att de klarar av en viss typ av uppgift, som är lätt att få när de har tillgång till facit. Om eleverna svarat fel enligt facit kan de lätt manipulera de beräkningarna de gjort och ledas in i en tro att “just det, så var det” och sedan gå vidare utan att riktigt reflekterat över vad de gjorde fel.

Taflin (2007) anser att matematikens problemlösningsuppgifter gynnar elevernas matematiska resonemang, och även den logiska förmågan att allmänt lösa uppgifter i andra ämnen. Detta var något som en av högstadielärarna tog upp. Hen hade märkt på eleverna att de sedan *Matematiklyftets* start har börjat prata mer matematik och på så sätt utvecklat sitt matematiska språk och resonemang. För att kunna förklara sin lösning för sina klasskompisar måste de använda matematiska begrepp och utvecklar då sitt matematiska språk. Problemlösning är också en bra ingång för dialog och samarbete mellan eleverna vilket utvecklar matematiklärandet. Förmågan att samarbeta och lösa problem genom dialog är något som eleverna sedan kan ha nytta av även i andra ämnen. Det kan även medföra att eleverna blir bra på att samarbeta med andra människor och som Taflin (2007) säger så tränar de upp sin logiska förmåga att lösa problem i största allmänhet. Det är något som de kommer ha nytta av även efter sin skoltid när de ska komma ut i arbetslivet. ”Problemlösning kan vara till för att tillämpa på livet utanför skolan, för att eleverna ska lära sig för livet.” (Taflin, 2007, s.46).

Den högstadieskola som var delaktig i *Matematiklyftet* har ännu inte utvärderats vilket försvårar vår möjlighet att dra konkreta slutsatser av dess värde. Eleverna på högstadiet ifrågasatte arbetssättet i början, men accepterade det sedan mer och mer. När de nu undervisar med denna metod behöver inte eleverna räkna lika många uppgifter i boken för att förstå, men vad resultatet blir för dessa elever i framtiden är svårt att förutspå. Självklart hoppas vi på att *Matematiklyftet* kan ge positiva resultat. En intressant tanke som en av högstadielärarna uttryckte var att om eleverna behöver räkna många uppgifter på gymnasiet för att lära sig de olika momenten, så kanske vi stjälper dem om lärare undervisar med mer problemlösning på högstadiet. Då är de inte vana vid att räkna så många uppgifter, men vår tanke är då om även gymnasiet ändrar sin undervisning och arbetar mer med problemlösning så kanske inte de eleverna heller behöver göra lika många rutinuppgifter i boken?

Att använda sig av problemlösning när nya begrepp ska introduceras tror vi skulle kunna vara en bra ingång för alla lärare att använda sig av, även när nya avsnitt ska påbörjas på gymnasiet. Används tiden till att använda större problemlösningsuppgifter som introduktion så kan detta kanske leda till att eleverna förstår mer vart de olika verktygen kommer ifrån och hur de kan användas på ett bra sätt. Som verksamma lärare behöver vi sedan fundera på hur vi själva ska ställa oss till vad vi anser räknas som en problemlösningsuppgift för att kunna behandla alla mål i styrdokumenten. Kanske borde vi inte sträva efter att kunna definiera det vida begreppet *problemlösning*, utan istället se till det sammanhang där problemlösning dyker upp. Enligt Taflin (2007) är valen av problem viktiga och ska fungera som brobyggare. De ska till exempel knyta samman matematiska områden, förena vardagen med matematiken och visa hur en och samma uppgift kan lösas på många olika sätt som i slutändan ger samma resultat. Vill läraren träna elevernas logiska tänkande, uppfinningsrikedom, fantasi, samarbetsförmåga, eller utveckla elevens matematiska begrepp? Vid en jämförelse med hur vardagliga problem ser ut kan det lätt konstateras att lösningsmetoden inte direkt är given, utan personen som löser det måste på något sätt samla ihop all den kunskap som hen besitter för att sedan konstruera en lösning. På samma sätt bör vi därför använda oss av matematisk problemlösning så att förmågan inte enbart blir en träning för matematisk problemlösning, utan ett sätt att träna på problemlösning så som den används i det vardagliga livet. Genom att arbete med detta i åtanke blir själva stoffet som gås igenom sekundärt, där det viktiga snarare blir att träna upp en förmåga de kan ha nytta av i alla situationer i framtida skola, jobb eller vardag.

För att vi som lärare sedan ska kunna ge våra elever bra problemlösningsuppgifter är det bra att ha en god kommunikation med sina kollegor för att diskutera för och nackdelar med olika uppgifter. Samma problemlösningsuppgift satt i olika kontexter ger olika förutsättningar och därmed också olika resultat. Kanske borde inte all problemlösning kunna direktöversättas i handling till matematisk problemlösning, då detta inte nödvändigtvis behöver överensstämma?

Som nyutexaminerade lärare kommer vi att kastas in precis här, mitt under pågående *Matematiklyft* och där problemlösning har en stor roll i undervisningen. Utvecklingen går framåt och vi ska vara en del av den. Vårt arbete har gett oss en stadig grund vad gäller problemlösningsdefinitionen, hur vi som lärare bör tänka kring lektioner som förs *genom* problemlösning och inte minst hur vi kan välja ut bra problemuppgifter till eleverna. Vårt arbete fungerar som stöd både till lärare som känner sig osäkra inför det som är i centrum i matematikundervisningen just nu och som inte känner att sin egen plattform vad gäller problemlösning är stor nog att stå på.

REFERENSFÖRTECKNING

Alfredsson, L. (2012). *Matematik 5000. Kurs 2b grön, Lärobok.* (1. utg.) Stockholm: Natur & kultur.

Aravena D. Maria, Caamaño E. Carlos. (2008). *The method of problem solving based on the japanese and Polya's models*. Chile: Mathematics Department, Basic Sciences Institute, Catholic University of Talca - TSG-19. Hämtad : http://tsg.icme11.org/document/get/454

Begic, E. & Trkulja, T. (2011). *Problemsolving- What? How and why? En studie om lärares syn på problemlösning i matematik* (Examensarbete 15 hp), Malmö: Lärarutbildningen, Malmö högskola.
Hämtad: http://dspace.mah.se/bitstream/handle/2043/12641/BegicTrkulja.pdf?sequence=2

Bergsten, C. (2006). En kommentar till den matematiska problemlösningens didaktik. In: Lisen Häggblom, Lars Burman & Ann-Sofi Röj-Lindberg (Ed.), Perspektiv på kunskapens och lärandets villkor: (pp. 165-176). Vasa: Åbo Akademi

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning I Grevholm, B (red). *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur

Björkqvist, O. (2013, april). *Matematisk problemlösning i skolan*, 4(4). Tillgänglig: http://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/content/conn/ContentServer/uuid/dDocName:LI64RH5PRO006504?rendition=web)

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. Diss. Umeå: Umeå universitet, 2006. Umeå.

Bryman, A. (2008). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Liber.

Denscombe, M. (2000). *Forskningshandboken- för småsakliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskapen.* Lund: Studentlitteratur.

Downs, J. & Downs, M. (2005). The identity of problem solving . *Journal of Mathematical behavior*, vol. 24, ss 385-401.

Esaiasson, P. Gilljam, M. Oscarsson, H. Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan- konsten att studera samhälle, individ och marknad.* Nordstedts Juridik.

Halvorsen, K. (1992). *Samhällsvetenskaplig metod.* Lund: Studentlitteratur.

Hiebert, J., et al. (2003). Teaching Mathematics in Seven Countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study. Washington, DC.: National Center for Education Statistics (ED).

Holme, I. M. & Krohn Solvagn, B. (1997). *Forskningsmetodik- Om kvalitativa och kvantitativa metoder.* Lund: Studentlitteratur.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation*. (1. uppl.) Stockholm: Liber.

Helmertz, T. (2007). *Problemlösning – En jämförelse mellan svensk och japansk undervisning* (Kandidatsuppsats). Malmö: Lärarutbildningen Natur, miljö, samhälle. Tillgänglig: http://ncm.gu.se/media/luma/GE-2007-Nominerade/Helmertz.pdf

Isoda, M. (2010). Lesson Study: Japanese Problem Solving Approaches in Mathematics Education as a Japanese Experience. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, vol. 8, ss 17–27.

Jablonka, E. (2013, april). *Problemlösning: En kort beskrivning, 2 (2).* Tillgänglig: (http://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/content/conn/ContentServer/uuid/dDocName:LI64RH5PRO006505?rendition=web)

Johanssson, B. G. (2004) *Matematikens historia*. Lund: studentlitteratur

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur.

Lantz, A. (2007). *Intervjumetodik.* Lund: Studentlitteratur.

Nationalencyklopedin [NE]. (2013). *Problem*. Tillgänglig: http://www.ne.se/sok?q=problem

NCM. (2013). Hämtad 2013-11-25, från: http://ncm.gu.se/media/namnaren/manadens/1311/problem_alla.pdf

NCM. (2012). Hämtad 2013-12-04, från: http://ncm.gu.se/media/namnaren/manadens/1210/1210_alla_problem.pdf

Nilsson, H. (1993). *Problemlösning/inlärning- praktisk vägledning till effektiva studier i naturvetenskapliga ämnen*. Malmö: Kritan.

Polya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press.

Riesbeck, E. (2000). *Interaktion och problemlösning: att kommunicera om och med matematik*. Lic.-avh. Linköping: Univ. Linköping.

Skolinspektionen. (2010). *Undervisningen i matematik för gymnasieskolan.* Stockholm. Tillgänglig: http://www.skolinspektionen.se/Documents/Kvalitetsgranskning/matte-gymnasie/kvalgr-magy2-samf.pdf)

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.* Hämtad från: http://www.skolverket.se/om-skolverket/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D2575

Skolverket. (2011b). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011.*
Hämtad från: http://www.skolverket.se/om-skolverket/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D2705

Skolverket. (1994a). *Läroplan för de frivilliga skolformerna Lpf 94.* Hämtad från: http://www.skolverket.se/om-skolverket/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D1071

Skolverket. (1994b). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet Lpo 94.* Hämtad från: http://www.skolverket.se/om-skolverket/visa-enskild-publikation?_xurl_=http%3A%2F%2Fwww5.skolverket.se%2Fwtpub%2Fws%2Fskolbok%2Fwpubext%2Ftrycksak%2FRecord%3Fk%3D1069

Skolverket. (1994c). *Kursplan i matematik.* Hämtad 2013-12-21, från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/kursplaner-fore-2011/subjectKursinfo.htm?subjectCode=MA&courseCode=MA1201&lang=sv#anchor_MA1201

Skolverket. (1980). *Mål och riktlinjer för grundskolan Lgr 80.* Hämtad från *https://gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/30910/1/gupea_2077_30910_1.pdf*

Skolöverstyrelsen. (1975). *Läroplan för gymnasieskolan, Lgy 70. Allmän del 1. Andra översedda upplagan.* Hämtad från: http://www.lararnashistoria.se/sites/default/files/wMarklund_0010.pdf

Szabo, A. Larson, N. Viklund, G. Dufåker, D. Marklund, M. (2013) *Matematik Origo 5*, 2. uppl. Sanoma.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan- för att skapa tillfälle till lärande,* (Doctoral Dissertation, Department of Mathematics and Mathematical Statistics) Umeå University, Print & Media. Tillgänglig: http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:140830/FULLTEXT01

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet. http://www.cm.se/webbshop_vr/pdfer/etikreglerhs.pdf

BILAGA 1

Intervjuguide

Inledande frågor

Dessa frågor ger oss en bakgrund av lärarna och en beskrivning hur de undervisar.

- Hur länge har du arbetat som matematiklärare?
- Hur länge har du arbetat på skolan?
- Vilka skolor har du arbetat på innan? (högstadium, gymnasium?)
- Hur ser en "vanlig" lektion ut när du undervisar i matematik?
- Hur ser en lektion ut där du använder dig av problemlösning?
- Vad anser du är problemlösning?
- *Till högstadiet:* Vad tycker du om Matematiklyftet?

Uppföljningsfrågor

Dessa frågor vill få den intervjuade att berätta mer om problemlösning.

- Hur länge har du arbetat på det här sättet att undervisa?
- När och hur stöter eleverna på problemlösning?
- Hur löser eleverna problem?
- Hur arbetar du med problemlösning under dina matematiklektioner?
- *Till högstadiet:* Har matematiklyftet hjälpt dig till bättre undervisning?

Sonderade frågor

Dessa frågor vill ge oss konkreta exempel på hur de arbetar.

- Kan du ge ett exempel på en problemlösningsuppgift?
- Kan du visa en problemlösningsuppgift som du tycker är bra? Varför är den bra?
- Kan du ge ett exempel på hur du introducerar ett nytt begrepp?
- När ni arbetar med problemlösning, är det enskilt eller i grupp? Hur redovisas dessa?
- *Till högstadiet:* På vilket sätt har du ändrat din undervisning i och med Matematiklyftet?

Tolkande frågor

Dessa frågor ska ställas för att se om vi tolkat intervjupersonens svar rätt.

- Menar du att ni arbetar på det här sättet?
- Gör du såhär när du introducerar ett nytt begrepp?

Det är viktigt att vara uppmärksam under intervjun och möta den intervjuade. Det här är bara en mall med exempelfrågor. Beroende på hur den intervjuade svarar måste frågorna anpassas.

BILAGA 2

Observationsschema

1. Läraren ger eleverna en problemlösningsuppgift
2. Läraren låter eleverna lösa uppgiften själv (en och en)
3. Läraren låter eleverna lösa uppgiften i grupp
4. Läraren låter eleverna diskutera sina lösningar med varandra
5. Läraren ger eleverna “verktyg” eller “metoder” för att lösa uppgiften
6. Läraren ger eleverna tips för att komma vidare
7. Läraren hjälper eleverna att komma på en lösning
8. Läraren låter eleverna visa olika lösningsmetoder
   a) Alla elever får visa sin lösning
   b) En elev från varje grupp visar sin lösning
   c) Några elever får visa sin lösning
   d) En elev får visa sin lösning
9. Läraren låter eleverna visa sina lösningar för varandra på tavlan
10. Läraren visar på tavlan hur uppgiften ska lösas