GÖTEBORGS UNIVERSITET

Yngre elevers användande av fingertal

Karin Kvarnero

LAU390

Handledare: Angelika Kullberg

Examinator: Thomas Lingefjärd

Rapportnummer: HT13-2611-187

Abstract

Examensarbete inom Lärarprogrammet LP01

Titel: Yngre elevers användande av fingertal

Författare: Karin Kvarnero

Termin och år: HT 2013

Kursansvarig institution: Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap

Handledare: Angelika Kullberg

Examinator: Thomas Lingefjärd

Rapportnummer: 187

Nyckelord: fingertal, del-del-helhet, talförståelse, variationsteorin, learning study,

Syftet med denna studie är att med variationsteorin som teoretisk grund undersöka undervisningen i två elevgrupper i årskurs 1 där fingertalen, beskrivna av Dagmar Neuman, introducerades. Studien belyser (i) vilka mönster av variation som presenterades i undervisningen samt, (ii) hur eleverna i de respektive grupperna eventuellt förbättrade sig. Vidare fokuseras (iii) huruvida undervisningen verkade gynna de kunskapsmässigt svaga eller starka eleverna.

Studien är en kvalitativ experimentell studie inspirerad av arbetssättet i en learning study. Eleverna delades upp i två grupper, och utifrån studiens lärandeobjekt, att förstå och kunna använda sig av fingertal, planerades två lektioner för grupp A. Utifrån lektionsanalys och resultat i för- och eftertest reviderades lektionsplaneringen inför undervisningen med grupp B.

Då eleverna redan i förtestet uppvisade goda resultat kunde endast en mindre förbättring av medelvärden i båda grupperna påvisas. Grupp A förbättrade sitt medelvärde något mer. Detta kan förklaras av att de två elever som förbättrade sitt resultat markant båda tillhörde denna grupp. Dessa två elever tillhörde de elever som fått lägst poäng i förtestet, men efter undervisningen förbättrade de sitt resultat avsevärt.

I grupp A förbättrade eleverna främst sin förmåga att direkt forma fingertalet 8. Färdighetsträning för denna förmåga iscensattes i undervisningen för såväl grupp A som B, men i grupp B löste samtliga elever denna uppgift redan i förtestet. Grupp B visar däremot en något större förbättring rörande problemlösningsuppgifter. En förklaring till detta kan ha varit att flera kritiska aspekter varierades samtidigt i en problemlösningsuppgift som endast förekom i undervisningen med grupp B.

Studien är relevant för blivande och yrkesverksamma lärare då undervisningen av fingertal verkar vara ett arbetssätt som gynnar de kunskapsmässigt svagare eleverna.

Förord

Redan under min första termin på lärarprogrammet blev jag inspirerad av variationsteorin. Kanske är det min naturvetenskapliga bakgrund som gör att jag tilltalas av det systematiska sättet att bryta ner undervisningsinnehållet i distinkta delar. Strävan efter att göra något så komplext som lärande greppbart gör variationsteorin användbar som teoretisk grund i ett arbete som detta. Det har varit väldigt roligt och givande att arbeta med barnen som med liv och lust gått in för detta arbete. Tack för att ni ville ställa upp och låta mig fundera kring alla de intressanta och intelligenta svar ni gav på mina frågor. Ett stort tack även till er klassföreståndare som uppmuntrat mig och underlättat mitt arbete.

Jag vill tacka min handledare, Angelika Kullberg, som inspirerat mig och bidragit med många värdefulla infallsvinklar. Det var även mycket uppmuntrande att Ference Marton hörde av sig för att diskutera uppsatsen.

Ett stort tack till min familj som engagerat sig i mitt projekt. Min fyraåring har fått räkna mycket på fingrarna denna period!

Innehållsförteckning

Figur- och tabellförteckning

1 Inledning

Vart tredje år sedan 2000 genomför OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) en internationell mätning, PISA (Programme for International Student Assessment), över 15 åringars kunskaper i läsning, naturvetenskap och matematik (Skolverket, 2013). Den senaste undersökningen, PISA 2012, visar att Sverige är det land där resultaten sjunkit mest sedan 2000, och att de svenska eleverna numera ligger under genomsnittet i samtliga tre undersökningsområden. Inom området matematik är försämringen ungefär lika stor hos högpresterande som lågpresterande elever. I PISA 2012 presterade 25 av 34 OECD-länder signifikant bättre än Sverige i kunskapsområdet matematik, däribland Norge, Finland och Danmark. De asiatiska länderna Japan, Sydkorea, Singapore, Shanghai-Kina och Hongkong-Kina dominerar stort i toppen i samtliga områden. Att de svenska elevernas resultat sjunkit kontinuerligt manar till eftertanke, menar Skolverket. Ett sätt att vända trenden skulle kunna vara att ta lärdom av de länder som varit mer framgångsrika.

I länder som Kina och Japan är det naturligt att lärare i kollegialt samarbete studerar och utvärderar sin egen undervisning (Kullberg, 2010). I Japan kallas arbetssättet för lesson study. Med utgångspunkt i lesson study och variationsteorin har forskare från Göteborgs Universitet och universitet i Hong Kong utvecklat learning study, en modell för att systematiskt studera och utveckla undervisningen. I denna uppsats är studieupplägget inspirerat av arbetsgången i en sådan learning study och variationsteorin utgör den teoretiska grunden.

Forskaren Dagmar Neuman (1993) pekar på att omkring 15 % av eleverna som börjar första klass saknar en grundläggande ”känsla för tal”. Denna procentsats överensstämmer med den andel elever som utvecklar matematiksvårigheter. Neuman frågar sig om det kan vara så att skolan inte lyckas hjälpa dem som inte redan på egen hand lyckats närma sig en förståelse för tal. Hennes följdfråga blir hur de barn som redan innan skolstarten utvecklat en grundläggande talförståelse lyckats med detta. Neumans utgångspunkt är att genom att närma sig barnets eget sätt att bilda sig en taluppfattning så kan viktiga nycklar, för att förstå de problem som barn med matematiksvårigheter har, upptäckas.

Flera naturfolk har utvecklat system för att låta punkter på kroppen representera antal (Neuman, 1993). Kroppen används som räknesystem, exempelvis kan antal upp till 30 representeras genom att peka på punkter från ena fingret längs med kroppen till andra armens armbåge. Små barn föredrar ofta att visa antal med hjälp av sina fingrar, snarare än med räkneord. Dantzig menar att förmågan att räkna är knuten till våra 10 fingrar, att det är med hjälp av fingrarna som vår räknefärdighet historiskt sett utvecklats (Dantzig i Neuman, 1993, s. 37). Genom att använda fingrarna kan den kardinala och ordinala aspekten, det vill säga hur tal kan uttrycka såväl antal såsom ordningsföljd, knytas samman. Även det tidigaste romerska siffersystemet bär spår av hur fingrarna fått representera ordning och antal (Neuman, 1993). Symbolen I representerar då ett finger, V avbildar en hand med fyra fingrar tillsammans och tummen särskiljd medan X representerar två korsade händer.

I denna studie utnyttjas den naturliga grupperingen hos fingrarna som en utgångspunkt för att lära barn att se tal och relationen mellan delar och helhet.

2 Teoretisk grund

2.1 Variationsteorin

Variationsteorin är en lärandeteori som vuxit fram ur en fenomenografisk ansats hos en forskningsgrupp vid Göteborgs Universitet (Marton & Booth, 2000).

Fenomenografi grundar sig på att olika människor uppfattar och förstår vår omvärld på skilda sätt (Marton & Booth, 2000). Olika aspekter fokuseras, medan andra inte uppmärksammas eller tas för givna. Det mönster av aspekter som en individ urskiljer lägger grunden till vilken mening den personen tillskriver fenomenet. Lärande förstås inom ramen för fenomenografin som en förändring i mönstret av aspekter som samtidigt framträder för individen, som ett förändrat sätt att se på det aktuella fenomenet.

Hong Kong baserade professor Mun Ling Lo (2012) förtydligar att variationsteorin inte handlar om en varierad undervisning. Variationen syftar istället på varierandet av egenskaper knutna till de aspekter som förväntas vara avgörande för elever lärande (Lo, 2012).

Varje dag överöses vi av intryck. Vi har inte möjlighet att fokusera på dem alla, och tar därför in skilda intryck högst selektivt. Variationsteorin bygger på vår förmåga att fokusera på det som sticker ut, det som varierar. Lo (2012) lyfter exempel från naturen, hur blommor med klara färger sticker ut ur en grön lövmassa för att uppmärksammas av insekter. Ett annat exempel är hur ett föremål i rörelse uppmärksammas mot en stillastående bakgrund. Genom att systematiskt variera vissa aspekter, medans andra hålls konstanta kan man hjälpa människor att rikta sin uppmärksamhet mot önskade aspekter.

Runesson menar att för att förstå vad någonting är måste man förstå vad det *inte* är (Runesson, 1999). Lo uttrycker det som för att kunna bli medvetna om ett fenomen så krävs det att detta ställs i kontrast mot andra fenomen (Lo, 2012). Hon exemplifierar med hjälp av färger. Om röd vore den enda färgen i vår värld hade vi inte haft någon möjlighet att uppleva fenomenet färger. Det vore helt enkelt självklart att allt vore rött, rödheten vore ingenting vi noterade. Nu har vi även andra färger i vår värld, och för att lära ett litet barn namnen på dem kan vi peka ut en röd boll och en grön boll. Men för att barnet ska kunna särskilja färgaspekten från bollen underlättar det om vi även pekar ut en röd stol och en röd knapp. Först då kan barnet dra slutsatser kring hur rött knyts till begreppet färg.

Inom variationsteorin betonas vikten av att variationen kan upplevas samtidigt. Lo tar som exempel leken ”finn fem fel” där man ska finna fem olikheter hos två förövrigt identiska bilder (Lo, 2012). Det skulle vara betydligt mycket svårare att peka ut olikheterna om man endast fick se en bild i taget och inte hade möjligheten att direkt jämföra dessa. Lärande möjliggörs genom urskiljning, där separerade fenomen ställs emot varandra, snarare än upprepning av många liknande exempel.

Vikten av samtidig urskiljning exemplifieras av Runesson (1999) då hon beskriver hur ett barn skapar sig förståelse av tal. Samtidigt som barnet är medvetet om talet som en position i en räkneramsa måste hon kunna uppfatta talet som en mängd av en viss storlek. För att kunna urskilja talet behöver barnet dessutom kunna ställa det i kontrast mot andra tal; för att talet fem ska få en mening krävs att barnet känner till andra tal, exempelvis fyra och sex.

2.1.1 Lärandeobjektet och dess kritiska aspekter

Inom variationsteorin betonas innehållet i undervisningen. Förhållandet mellan undervisning och lärande står i centrum i variationsteoretiska studier (Wernberg, 2009). Ett specifikt lärandeobjekt fungerar som utgångspunkt (Lo, 2012). Lärandeobjektet innebär såväl det direkta innehållet i undervisningen liksom de förmågor som det specifika lärandet indirekt kan bidra till att utveckla på lång sikt.

Lärandeobjekt skiljer sig från generella kunskapsmål genom att mål ofta är stora och övergripande, medan lärandeobjekt är väl avgränsade och dessutom anpassade utifrån en specifik elevgrupp (Wernberg, 2009). Lärandeobjektet är dessutom dynamiskt i förhållande till elevgruppen och kan förändras under arbetets gång.

Lärandeobjektet kan ses utifrån olika perspektiv (Wernberg, 2009). Lärarens perspektiv är det *intentionella lärandeobjektet*, det läraren planerat och avser att eleverna ska lära sig. Det är dock inte självklart att lärandeobjektet behandlats på ett sådant sätt så att det som läraren avsåg att lära ut var möjligt att urskilja för eleverna. Forskarens perspektiv är därför det *iscensatta lärandeobjektet*, det vill säga det lärandeobjekt som potentiellt varit möjligt att uppfatta under lektionen, utifrån vilka mönster av variation som erbjudits. Skilda elever tar till sig samma undervisning på olika sätt. Lärandeobjektet som det uppfattas av eleven benämns *det erfarna lärandeobjektet*.

Varje fenomen kan ses från olika synvinklar. Skilda erfarenheter innebär att olika människor lägger märke till olika ting och urskiljer olika aspekter (Kullberg, 2010). Vilka aspekter som kan tänkas vara kritiska för att erfara ett lärandeobjekt är en central fråga inom variationsteorin.

> För varje lärandets objekt finns det aspekter av innehållet i undervisningen som är avgörande, kritiska för elevernas lärande. För att förstå/uppfatta något på ett visst sätt måste vissa aspekter bli urskilda. Dessa aspekter är kritiska för lärandet (Kullberg, 2004, s.4).

Genom att upptäcka nya aspekter förändras individens sätt att se på ett fenomen. Enligt variationsteorin definieras lärande som ett nytt sätt att se på någonting (Lo, 2012).

Magnusson och Maunula menar att sökandet efter kritiska aspekter kan fungera som ett verktyg för att upptäcka vad man som lärare tar för givet (Magnusson & Maunula, 2011a). Genom att vara lyhörd gentemot sina elever kan även lärarens förståelse för lärandeobjektet fördjupas (Lo, 2012).

2.1.2 Mönster av variation

Magnusson och Maunula (2011a) lyfter fram två huvudsakliga sätt för att skapa mönster av variation; *separation* och *fusion*. Principerna illustreras med hjälp av lärandeobjektet en tänd lampa som exempel. *Separation* innebär att en aspekt av lärandeobjektet skiljs ut och varieras medan övriga aspekter hålls konstanta. I exemplet separeras aspekten tänd. Separation kan åstadkommas med hjälp av kontrast, ett motexempel, i detta fall kan aspekten tänd erfaras genom att ställas i förhållande till en släckt lampa. Vidare kan sammanhanget varieras, i vilket objektet är konstant. Här uppstår en *generalisering* som i vårt exempel kan åstadkommas genom att egenskapen tänd varieras med olika ljusstyrkor. I nästa steg kan aspekten lampa *separeras* och *kontrasteras* mot andra lysande föremål, exempelvis ett tänt stearinljus. Fenomenet lampa kan *generaliseras* genom att visa på olika lampor, exempelvis elektriska lampor och oljelampor. Slutligen kan flera kritiska aspekter varieras samtidigt, vilket benämns *fusion* med variationsteoretiska termer. I exemplet varieras olika lampor och olika ljusstyrkor för att möjliggöra urskiljandet av olika aspekter samtidigt.

Magnusson och Maunula (2011b) menar att det tyvärr är allt för vanligt att läraren låter flera aspekter variera samtidigt i fusion på ett allt för tidigt stadium i undervisningen. Det är då inte möjligt för eleverna att urskilja vad som är vad, och innehållet i undervisningen kan komma att upplevas som rörigt.

2.2 Learning Study

I länder såsom Kina och Japan är det vanligt förekommande att lärare studerar och försöker utveckla sin undervisning i samarbetar med kollegor. (Kullberg, 2010) I Japan kallas detta samarbete för lesson study.

Inspirerad av lesson study utvecklade Ference Marton i början av 2000-talet tillsammans med kollegor i Hong Kong ett arbetssätt kallat learning study (Kullberg, 2010). En viktig skillnad mellan lesson study och learning study är att den senare är knuten till en lärandeteori, vanligtvis variationsteorin. Målet med learning study är att främja elevernas lärande, men även att undersöka vilka förutsättningar som krävs för lärande, det vill säga vilka de kritiska aspekterna för ett visst lärandeobjekt är. Genom att systematiskt studera förhållandet mellan lärande och undervisning kan learning study även vara ett verktyg för utvecklandet av lärares professionalitet.

Learning study kan alltså ses som ett verktyg för att applicera variationsteorin i klassrummet (Lo, 2012). En grupp med lärare, vilka vanligtvis är verksamma i samma ämne och på samma nivå samarbetar med en forskare för att utforma lektioner kring ett lärandeobjekt.

En learning study startar med att gruppen kommer överens om ett ämne och ett lärandeobjekt (Kullberg, 2010). Elevernas förkunskaper inom detta område testas och lärarna planerar gemensamt en lektion utifrån de kritiska aspekter de väntar sig vara avgörande för att förstå lärandeobjektet. En lektion hålls av en av de medverkande lärarna. Elevernas lärande utvärderas i eftertester och/eller intervjuer och lektionen videofilmas och analyseras. Nästkommande lektion i cykeln justeras utifrån analysen. För varje lektion i cykeln strävar lärarna efter att med allt större precision ringa in de kritiska aspekterna, och hur dessa kan framträda genom mönster av variation, för att skapar förutsättningarna för att eleverna ska lära.

En slutsats som Lo drar utifrån 29 genomförda learning studies i Hong Kong, ledda av Lo, Marton och Pong är att det främst är de elever med sämst resultat i förtesten som verkar gynnas av upplägget (Lo, 2012). Skillnaden mellan de med högst respektive lägst resultat minskade i eftertesterna jämfört med förtesterna.

2.3 Tidigare forskning

2.3.1 Utveckling av talförståelse

Gelman och Galistel (1978 i Löwing, 2008, s. 44f) har utvecklat en modell med fem principer för hur barns taluppfattning utvecklas. De tre första principerna antas vara genetiskt nedärvda och kan med rätt stimulans utvecklas mycket tidigt. Den första principen kallas *abstraktionsprincipen*, vilken specificerar möjligheten att bestämma antalet objekt i en avgränsad mängd. *Ett-till-ett-principen* är den andra principen, vilken innebär att man genom parbildning kan avgöra om två mängder innehåller samma antal föremål. Den tredje principen kallas för *principen om godtycklig ordning* och innebär att man får samma resultat i vilken ordning man än räknar objekten. Princip nummer fyra och fem skiljer sig från de tre första då de kräver träning och utvecklas i en social kontext. Nummer fyra*, principen om talens stabila ordning*, innebär en parbildning mellan föremål och räkneord för antalsbestämning. För detta krävs kunskap om talens namn såväl som ordningsföljd i räkneordssekvensen. Den femte principen benämns *antalsprincipen*, vilken innebär att det sist nämnda räkneordet anger antalet föremål i uppräkningen av en mängd.

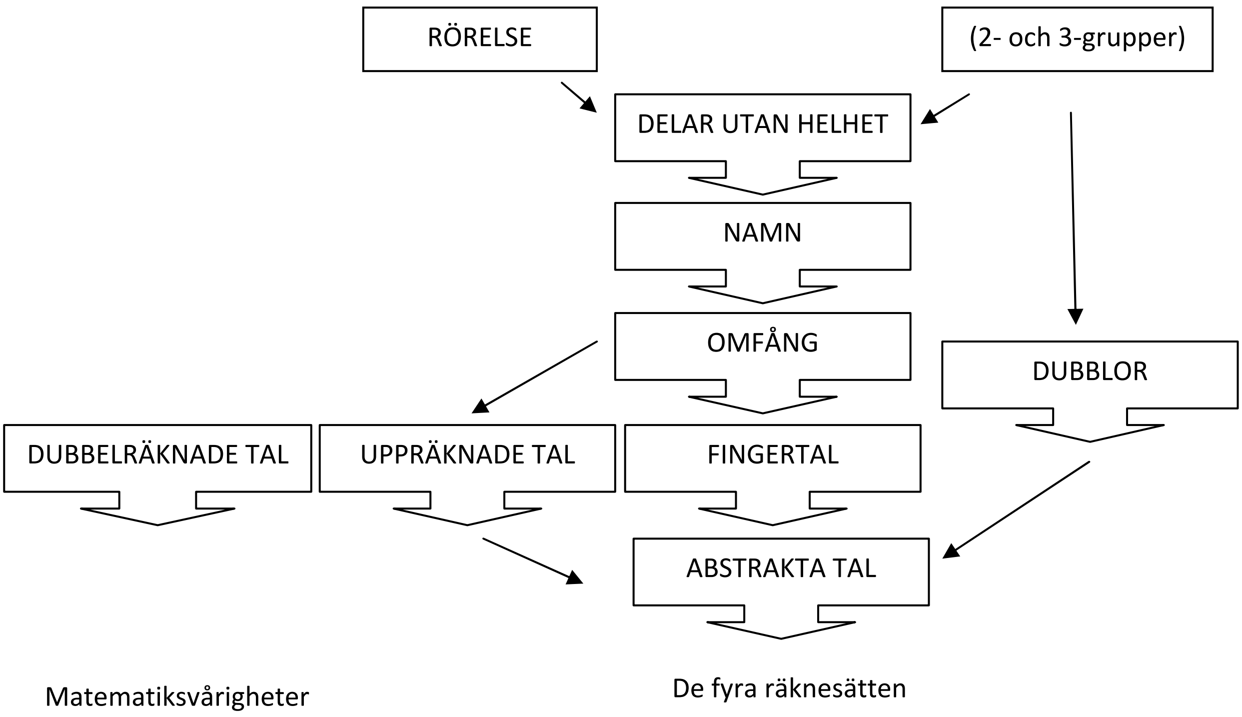
Även Karen C. Fuson (1992) beskriver barns utveckling av talförståelse, vilken hon delar in i fem nivåer. Hennes första nivå, *”string”*(”ramsa”, min översättning) kännetecknas av att barnet kan rabbla räkneramsan, men orden som rabblas är inte åtskiljda, utan barnet räknar entvåtrefyrafem… I nästa nivå *”unbreakable list”* (”odelbar ordföljd”, min översättning) är räkneorden åtskilda och varje räkneord kan paras ihop med ett objekt. Inom denna nivå upptäcker barnet talets kardinala aspekt, det sist uppräknade ordet talar om antalet för alla de uppräknade objekten. I den tredje nivån *”breakable chain”* (”delbar sekvens”, min översättning) behöver barnet inte räkna alla objekt i båda termerna, utan kan utgå från den ena addenden och räkna upp den andra. Den fjärde nivån benämner Fuson *”numerable chain”* (”numerisk sekvens”, min översättning) där en metod för att hålla ordning på den andra uppräknade addenden utvecklats, för att barnet ska veta när hela den andra addenden är uppräknad. Barnet kan exempelvis sätta upp ett finger för varje räknat steg eller räkna med en parallell räkneordssekvens. Den femte nivån kallas för *”bidirectional chain/ truly numerical counting”* (”dubbelriktad sekvens/ rent numeriskt räknande”, min översättning). När denna nivå nåtts kan barnet dela upp de ingående addenderna i ytterligare delar för att på ett flexibelt sätt hantera dessa. Detta då barnet är förtrogen med alla de delar som ett tal kan delas upp i. För att lösa uppgiften 7+5 kan barnet då dela upp 5 i delarna 3+2 och beräkna 7+3+2=10+2=12. Nivån innebär även att barnet kan använda sig av kända talkombinationer för att lösa okända. Exempelvis kan barnet använda sig av kunskapen att 6+6=12 för att förstå att 6+7=6+6+1=13.

2.3.1.1 Utveckling av talförståelse enligt Dagmar Neuman

Forskaren Dagmar Neuman arbetade under många år som specialpedagog inom ämnet matematik. En av hennes erfarenheter från arbetet med barn med matematiksvårigheter är vikten av en djup förståelse av talen 1-10 och relationerna dessa tal emellan (Neuman, 1987). Dessa tal lägger grunden för vårt aritmetiska system och är en förutsättning för att kunna lära sig de fyra räknesätten. Att vara förtrogen med talen 1-10 är enligt Neuman att kunna se såväl talets helhet som dess inneboende delar. Talet 7 kan exempelvis delas upp i 1+6, 2+5 och 3+4. Genom att dela upp samtliga tal mellan 1 och 10 på alla de sätt som är möjliga framträder 25 kombinationer. Ett barn som kan se dessa kombinationer kan lösa räkneuppgifter genom att ”se” eller ”strukturera” talen snarare än att räkna. Detta gäller även utanför talområdet 1-10. Exempelvis kan uppgiften 13-7 enkelt lösas om man kan se delarna 7 och 3 i 10. När delen 7 dragits bort kan delarna 3 och 3 adderas.

Neuman uppmärksammade att några barn, omkring en elev per klass, redan vid skolstart hade utvecklat en förtrogenhet med talen 1-10 och dess del-del-helhetsrelation (Neuman, 1987). Andra elever hade inte tagit till sig detta begrepp i gymnasiet. Genom att utreda barns taluppfattning vid skolstarten strävar Neuman efter att med en fenomenografisk ansats finna barns egna sätt att närma sig matematiken.

Neuman utgår från en fenomenografisk ansats och beskriver och kategoriserar elevers taluppfattning i sju övergripande kategorier (Neuman, 1993). Dessa sju kategorier illustreras i figur 1.



Figur 1: Barns talutveckling, förenkling av Dagmar Neumans (1993, s. 67) illustration.

Neumans (1993) första kategori, uppfattning av tal som *rörelse* är en tidig uppfattning där räkneramsan knyts till den rörelse barn har förstått att man utför när man räknar. Uppfattning har dock ingen kvantitativ innebörd, då räkneorden är knutna till den rörelse som utförs när man räknar snarare än de föremål som räknas.

Nästa steg benämner Neuman (1993) *"delar utan helhet"*. Neumans tolkning är att barnens taluppfattning i denna fas influerats av situationer där man ska dela rättvist. Barn kan då fördela i lika delar genom att lägga ut ett föremål i taget. De räknar dock inte helheten, varken före eller efter uppdelningen.

"Namn" är Neumans (1993) nästkommande steg i utvecklandet av en talförståelse. Här fokuserar barnet på den ordinala aspekten hos tal, barnet namnger vart och ett av de räknade föremålen. Barnet kan vara medvetet om att helheter kan delas upp och "mäter" föremålen med en tänkt talrad. I ett exempel där 9 föremål ska delas i två delar skulle barnet kunna uttrycka att det finns 9 föremål i ena delen och 6 i den andra. Det finns en logik i detta svar då barnet förstått att det sista talet i en talrad benämner föregående tal. Dessa inre gränsnamn framkommer i svaret då barnet benämner talen 1-6 i den tänkta talraden som 6, medans talen 7-9 behåller sina ursprungliga "namn" och benämns som grupp 9.

Nästa kategori, *"omfång"*, beskriver den kardinala aspekten av tal (Neuman, 1993,). Barnet har förstått att räkneorden beskriver en mängd, vilken kan vara "ganska lite", "mittemellan" eller "ganska mycket". Ett barn med denna taluppfattning skulle protestera mot påståendet att man kan ha 7 godisar kvar om man tappat 8 av 10. En så stor del kan ju inte vara kvar när man tappat så mycket, tycks barnet resonera. Däremot har barnet inga verktyg för att exakt bestämma hur många den kvarvarande delen i exemplet består av. Efter kategorin "omfång" följer kategorin *"fingertal"*. Denna behandlas separat i nästkommande avsnitt.

En taluppfattning som kan löpa parallellt med de beskrivna stegen ovan är kategorin *"dubblor"* (Neuman, 1993). Redan mycket små barn kan uppfatta och urskilja grupper av 2, av 3 och eventuellt av 4 föremål. Fenomenet benämns subitizing. Denna förmåga kan utvecklas genom att barnen lär sig att organisera talraden i grupper om två eller tre enheter. Dessa enheter kan sedan användas som en sorts mental "måttstock". Utan att räkna kan barnet "se" på sin tänkta talrad att två 3-grupper ger 6. Denna kunskap kan barnet utgå ifrån vid lösningen av andra uppgifter, såsom att 5+4=9 eftersom det blir ett mer än "dubblan" 4+4=8.

De konkreta föreställningarna av tal, såsom fingertal och dubblor hjälper oss att upptäcka strukturen i hur tal är relaterade till varandra (Neuman, 1993). Så småningom är dessa strukturer så väl förankrade i vårt medvetna att behovet av konkretiseringar inte lägre behövs. Vi bara "vet" att delarna 7 och 2 ryms i 9 och att 9-7 följaktligen blir 2. Barnet erfar talens ordinala såväl som kardinala aspekter samtidigt. Neuman benämner denna kategori av taluppfattning som *"abstrakta tal"*.

Gemensamt för ovanstående kategorier är en strävan hos barnet att "se" lösningen på matematiska problem. Kategorin *"uppräknade tal"* skiljer sig från de övriga genom att barnen här lägger fokus på att räkna varje enskilt föremål (Neuman, 1993). Så småningom kan räknandet effektiviseras, exempelvis genom att barnen inser att de kan räkna framåt ifrån den största termen i addition. Neuman ser dock en risk i att överdriven räkning resulterar i problem att nå en abstrakt taluppfattning. Barn som lägger fokus på själva räkningen har svårt att samtidigt erfara talens ordinala och kardinala aspekt. Detta kan var en väg som leder mot den kategori som Neuman benämner *”dubbelräknade tal”*. Att dubbelräkna innebär att barnen parallellt med räkneramsan håller ordning på hur många steg de räknat genom att använda två räkneordssekvenser på samma gång. Exempelvis kan uppgiften 7+5 lösas genom att utifrån termen 7 räkna 8 (1), 9 (2), 10 (3), 11 (4) 12 (5). Här representerar talen inom parantes den parallella räkneramsan som barnet använder för att veta när de 5 enheterna är räknade. Ett alternativt sätt att dubbelräkna kan vara att använda sig av fingrarna för att veta när man räknar färdigt. Enligt Neuman är dubbelräkning en alltför mekaniserad metod som i många fall riskerar att leda till matematiksvårigheter. En gemensam nämnare som Neuman observerat hos barn med matematiksvårigheter är deras tendens att räkna allt för mycket, med stort fokus på själva metoden. Neuman har inte observerat något barn som utvecklat metoden dubbelräknade tal på egen hand innan skolstarten.

2.3.2 Fingertal

Yngre barn tar ofta till fingrarna för att berätta hur gamla de är (Neuman, 1993). Kanske läggs redan här en grund för de fingertal som många barn tycks använda sig av i sin utveckling av taluppfattning. Enligt Neuman utvecklas fingertalen genom att barn namnger vart och ett av fingrarna enligt en ordinal princip. Till att börja med behöver barnet räkna alla fingrarna för att ta reda på vilket tal i räkneramsan som motsvarar ett visst finger, men så småningom lär sig barnet att känna igen fingertalet utan att behöva räkna efter. Fingertalen kan hjälpa barnet att knyta ihop talets ordinala aspekt med dess kardinala, då hon eller han förstår att det namngivna fingret även beskriver antalet av de uppräknade.

Flera sinnen involvera i barnets upplevelse av fingertalen (Neuman, 1993). Barnet kan se fingertalet, höra dess namn i räkneramsan, men även ”känna dess antal i sin kropp”. ”Då man lärt sig känna igen fingertalen kan man förmodligen ganska snabbet börja förställa sig dem eller ”känna dem i sina händer” (Neuman, 1993, s. 116). Genom att ta ett steg från det konkreta materialet, fingrarna, till att visualisera desamma tas ett steg i riktning mot en abstrakt talförståelse.

En stor fördel med att räkna med fingertal är enligt Neuman dess naturliga gruppering (Neuman, 1993). Då barnen är säkra på hur många fingrar de har på varje hand för sig och tillsammans kan de med hjälp av subitizing, det vill säga vår naturliga förmåga att direkt se grupper om 2 eller 3, urskilja fingertalen 1-10. Neuman talar om ”den odelade handen”. Fingertalen uppfattas då som ”5 plus något”. På så vis kan exempelvis fingertalet 8 urskiljas som ”en hel hand” plus 3. Eftersom 3 är tillräckligt litet för att direkt uppfattas behöver inte barnet räkna efter när det lärt sig att känna igen 8 som handen plus 3.

Fingertal kan användas för att visualisera den del-del-helhetsrelation som Neuman (1993) tillskriver stor vikt. Även här är principen med ”det odelade femtalet” centralt. Även om en del är för stor för att direkt uppfattad med hjälp av subitizing kan delen genom att placeras först avläsas som ett fingertal, ”5 plus något”. Härur kan barnen erfara hur såväl delar som helhet går att urskilja genom att se på sina grupperade fingrar, varvid uppräkning blir överflödig.

Fuson (1992) kommenterar att Neumans observationer skiljer sig från hur amerikanska barn typiskt sett använder sig av fingrarna. Enligt Fuson använder amerikanska barn vanligtvis en hand för varje addend, istället för att, som Neuman beskriver, låta nästa addend ta vid där den första slutar, och på så vis skapa en möjlighet att läsa av helheten som ett känt fingertal. Fuson menar vidare att amerikanska barn främst använder sig av att räkna på fingrarna som ett sätt att hålla ordning på den andra addenden. Fuson konstaterar att räknandet med fingrar kan skilja sig mellan olika kulturer. Hon nämner hur koreanska barn viker undan och sedan ”återanvänder” fingrarna för att kunna räkna högre tal än 10.

2.4 Styrdokument

I läroplanen, Lgr 11, fastslås att eleverna ska ”ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och deras användbarhet” (Skolverket, 2011, s. 62). En välutvecklad taluppfattning är grundläggande för en aritmetisk förståelse. Fingertalen kan enligt Neuman (1993) utgöra ett viktigt stöd i denna utveckling genom att bidra med en naturligt grupperad konkret modell. I det centrala innehållet för årskurs 1-3 beskrivs hur eleverna ska få kunskaper om de naturliga talen samt hur dessa kan delas upp (Skolverket, 2011). I en senare punkt ringas förståelse för del av helhet samt del av antal in ytterligare. Fingertalen kan vara en god utgångspunkt för att belysa relationen mellan helheten och de ingående delarna då dessa är möjliga att urskilja samtidigt.

Att kunna använda och se sambanden mellan de fyra räknesätten är ett ytterligare centralt innehåll för årskurs 1-3 i Lgr 11 (Skolverket, 2011). Även här är medvetenhet om relationen mellan delar och helhet en viktig aspekt för att upptäcka det nära sambandet mellan addition och subtraktion, vilket kan upptäckas i användandet av fingertal (Neuman, 1993).

3 Problemformulering och syfte

Syftet med studien är att studera undervisning där fingertal introduceras för eleverna enligt två olika lektionsdesigner samt att undersöka eventuella förbättringar hos eleverna.

Studien fokuseras på följande problemformuleringar:

- Vilka mönster av variation skapas under respektive lektion?
- Hur förändras elevernas resultat i eftertestet jämfört med förtestet efter undervisningen i de respektive grupperna?
- Gynnar undervisningen av fingertal de kunskapsmässigt svaga eller starka eleverna?

4 Metod

Jag har genomfört en kvalitativ experimentell studie, inspirerat av arbetssättet i en learning study där barnens lärande under videofilmade lektioner utvärderades genom för- och eftertest. Studiens lärandeobjekt är förståelse och användande av fingertal, beskrivna av Dagmar Neuman (1987). Resultatet har analyserats utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv.

4.1 Urval

Alla elever i en klass i årskurs 1 har tillfrågats om att delta i studien. Skolan och klassen valdes utifrån tillgänglighetsprincipen. Jag hade god kontakt med klassläraren och skolan då jag även haft praktik i den aktuella klassen. Vårdnadshavarna till 18 barn samtyckte till att deras barn fick delta i studien, menpå grund av sjukdom bortföll två barn. Lektioner, för- och eftertest genomfördes därmed av 16 barn. Enligt Esaiasson m.fl. (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson & Wängnerud, 2007) är en slumpmässig randomisering nödvändigt för att undvika systematiska skillnader mellan experimentgrupperna. För att främja en intern validitet har de deltagande eleverna därför delats i två grupper, A och B, genom lottning.

Att för- och eftertest är identiska möjliggör en jämförelse av barnens förmåga att lösa testuppgifterna före och efter genomförda lektioner. Grupp A och B fungerar som kontroller åt varandra, och då de deltar i olika lektioner kan man uttala sig om vilka möjligheter till lärande som erbjöds på de skilda lektionerna.

4.2 Lärandeobjekt och antagna kritiska aspekter.

Enligt Dagmar Neuman (1993) använder många barn naturligt sina fingrar för att konkretisera tals ordinala såväl som kardinala aspekter då de utvecklar sin taluppfattning. Handens naturliga gruppering möjliggör en direkt uppfattning av fingertalen och delar såväl som helhet kan samtidigt visualiseras. Alla barn använder sig dock inte av fingertalen på eget bevåg. Då jag tror att särskilt barn som skulle kunna utveckla matematiksvårigheter i framtiden är behjälpta av att arbeta med fingertalen har jag valt förståelse för och användandet av fingertalen som lärandeobjekt för mina lektionsserier. Genom att visa på effektiva strategier vill jag göra barnen medvetna om hur de utan att räkna kan lösa uppgifter genom att se delar och helhet på sina fingrar.

Inför studien antog jag att följande aspekter skulle kunna vara kritiska för förståelsen och användandet av fingertal:

- Lära sig att se fingertalen utan att behöva räkna efter.
- ”Se” del-del-helhetsrelation i fingertalen simultant.
- Upptäcka att man kan byta plats på delarna (kommutativa lagen).

4.3 Studiens design

För att skapa en bild av elevernas förkunskaper konstruerades ett test som genomfördes före lektionerna i studien. Samma test upprepades efter genomförda studielektioner i syfte att uppfatta förändringar i barnens taluppfattning och problemlösningsförmåga. Testet genomfördes muntligt och individuellt och videofilmades för att underlätta analysen. Testerna har till viss del intervjukaraktär då jag frågade eleverna om hur de resonerat kring uppgifterna. Flera av övningarna jag använt kan återfinnas i Neumans (1987) avhandling. Testet bestod av tre delar; en gissningslek där eleverna fick dela upp talet 9, en del där eleverna ombads visa ett fingertal samt en del bestående av problemlösningsuppgifter. Testet i sin helhet presenteras i bilaga 2.

Alla elever genomförde förtestet. Därefter lottades barnen till två grupper, benämnda A och B. Två lektioner, A1 och A2, genomfördes i grupp A utifrån uppsatt lärandeobjekt och antagna kritiska aspekter. Lektion A2 genomfördes dagen efter A1 och eftertestet genomfördes därpå efterföljande dag. De videofilmade lektionerna och testresultaten analyserades tillsammans med min handledare, Angelika Kullberg. Lektionerna reviderades i syfte att göra de kritiska aspekterna än mer framträdande för elevgrupp B. Lektionerna för denna grupp, B1 och B2, genomfördes efterföljande dagar och eftertestet genomfördes två dagar efter lektion B2.

4.4 Analysprocess

Analysen av lektionerna utgår från det variationsteoretiska perspektivet av lärande. Med utgångspunkt i de aspekter som antas vara kritiska för studiens lärandeobjekt analyseras vilka dimensioner som görs möjliga för eleverna att urskilja genom variation. Variationsmönstret som framställs för de respektive elevgrupperna sammanfattas och jämförs.

I analysen av för- och eftertester använder jag mig av Dagmar Neumans beskrivning av de faser hon kunnat urskilja för barns utvecklande av en talförståelse. Alla elever i studien har deltagit i båda lektionstillfällena för respektive elevgrupp samt genomfört såväl för- som eftertest. Eftersom testen före och efter undervisningen är identiska kan resultaten jämföras för att se om eleverna eventuellt förbättrar sig. På så vis fungerar eleverna som sina egna kontroller.

4.5 Studiens tillförlitlighet

Denna kvalitativa studie har genomförts på ett begränsat antal barn. Enligt Esaiasson bör varje experimentgrupp bestå av minst 30-40 personer för att kunna påvisa statistiskt säkerställda skillnader mellan grupperna (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson & Wängnerud, 2007). Studien gör därför inte anspråk på att resultaten ska ses som generaliserbara. En learning study utgår alltid från en viss grupp elever med vissa förkunskaper. Resultatet är inte direkt översättbart till andra elevgrupper. Ändå kan resultatet från en learning study vara användbart då det belyser potentiella kritiska aspekter. Man bör dock vara medveten om att en aspekt som är kritisk för en enskild elev inte nödvändigtvis är kritisk för en annan elev (Magnusson & Maunula, 2011a).

Det är en komplicerad uppgift att konstruera ett test som mäter elevers kunskap och förmåga inom ett område. Jag har därför utgått från uppgifter som Dagmar Neuman (1987) använder sig av för att undersöka elevers talförståelse i sin avhandling. Då lärandeobjektet i denna studie, att förstå och kunna använda sig av fingertalen, främst kan beskrivas som en metod är det fullt möjligt att svara rätt på alla testfrågor utan att använda fingertal överhuvudtaget. För att öka studiens validitet har jag därför genomfört testerna muntligt och individuellt. Jag hade därmed möjlighet att studera hur varje enskild elev gick till väga när hon eller han löste uppgifterna samt till att fråga om hur eleverna resonerade i sitt räknande.

Studiens reliabilitet stärks av att såväl lektioner som tester videofilmats, vilka därmed varit tillgängliga att studera upprepade gånger under analysens gång. En svaghet i fråga om reliabilitet är att såväl genomförande av lektioner och tester såväl som analys av dessa genomförts av mig, analysen dock i samråd med min handledare Angelika Kullberg.

4.6 Etiska hänsyn

Då eleverna i studien är under 15 år har skriftligt samtycke inhämtats från vårdnadshavare för samtliga barn i enlighet med Vetenskapsrådets (2002) rekommendationer. Vårdnadshavarna informerades om studiens syfte och upplägg samt att såväl lektioner som för- och eftertest kommer att videofilmas. Vårdnadshavarna upplystes om videofilmerna inte kommer att publiceras eller på något annat sätt finnas tillgängliga samt att rapporten kommer att framställas så att enskilda barn inte kan identifieras. I samtycket framhölls att deltagande är frivilligt och att detta när som helst kan avbrytas. Samtycket som vårdnadshavare för samtliga barn undertecknade finns bifogat som bilaga 1.

Inför studien berättade jag för eleverna att jag skulle skriva en uppsats om barns sätt att tänka kring matematik och att jag skulle hålla några lektioner som en del av detta. Jag förklarade att de som ville vara med i studien skulle få genomföra ett litet test före och efter lektionerna som ett sätt att utvärdera dessa. Barnen blev upplysta om att lektioner och tester skulle komma att videofilmas, men att endast jag och min handledare skulle titta på filmerna. Jag berättade för barnen att deltagande i studien var helt frivilligt.

Namnen på barnen som förekommer i rapporten är fingerade.

5 Resultat

Resultatet framställs i två delar där presentation och analys av genomförda lektioner följs av resultaten från för- och eftertest på grupp- respektive individnivå.

5.1 Resultat - lektioner

Resultatdelen som behandlar undervisningen inleds med en sammanfattning av aktiviteter under respektive lektion, se tabell 1. Därefter beskrivs genomförda lektioner och dess innehåll analyseras utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv. Det intentionella lärandeobjektet i studien är förståelse för och förmåga att kunna använda fingertalen. I lektionsanalysen utgår jag ifrån vilket iscensatt lärandeobjekt som varit möjligt för eleverna att erfara, utifrån de mönster av variation som undervisningen erbjudit. Resultatdelen för genomförda lektioner avslutas med en sammanfattning av de dimensioner av variation, utifrån de aspekter av lärandeobjektet, som varit möjliga att erfara vid respektive lektion.

Lektion A1	Lektion B1
• Introduktion av fingertal, 10 streck på tavlan som utgångspunkt. • Säga vilket fingertal läraren visar. • Läraren berättar att fingertalen börjar på ena lillfingret och hålls ihop, utan att hoppa över något finger. • Eleverna visar fingertal och läser av i par om två. • Möjliga sätt att dela fingertalet 8 diskuteras. Ett snöre illustrerar skiljelinjen mellan delarna. • Eleverna får i parvis undersöka möjliga sätt att dela ett givet fingertal med hjälp av snöret. • Med utgångspunkt i fingertalet 5 som en del läggs andra delar till för att bilda en ny helhet.	• Introduktion av fingertal, 10 streck på tavlan som utgångspunkt. • Diskussion kring hur tal kan grupperas. • Säga vilket fingertal läraren visar. • Läraren berättar att fingertalen börjar på ena lillfingret och hålls ihop, utan att hoppa över något finger. • Eleverna formar de fingertal läraren säger. • Eleverna visar fingertal och läser av i par om två. • Möjliga sätt att dela fingertalet 9 diskuteras. Delarna illustreras på ett uppritat fingertal på tavlan. • Eleverna får dela fingertalet 8 genom att färglägga uppritade fingertal i två färger. • Med utgångspunkt i fingertalet 5 som en del beskrivs av hur del och helhet kan ses samtidigt i fingertalen.
Lektion A2	**Lektion B2**
• Eleverna formar de fingertal läraren säger • Lösa uppgiften 8-3 respektive 8-5 med fingertal. Välja fingrar som förenklar så att man direkt kan	• Eleverna får skrivna siffror på fingrarna. • Eleverna formar de fingertal läraren säger. • Lösa uppgiften 8-3 respektive 8-5 med fingertal. Välja fingrar som förenklar så att man direkt kan

se svaret. • Se sambandet mellan 9-2 och 9-7. • Lösa uppgifter på stencil, se bilaga 3.	se svaret. • Lösa uppgifter på stencil, se bilaga 3. • Muntliga problemlösningsuppgifter av typen öppna utsagor samt subtraktion.

Tabell 1: Lektionernas övergripande innehåll och struktur.

5.1.1 Lektion A1

Lektion A1 genomfördes med nio elever i ett mindre grupprum. Eleverna var placerade runt ett stort bord.

För att introducera eleverna till fingertalen och nyttan med dessa ritades 10 streck upp på tavlan. Jag frågade eleverna hur många strecken är. Barnen räknade efter. Sedan höll jag upp mina tio fingrar och frågade hur många de är. De flesta händer åkte ögonblickligen upp i luften. ”Enkelt”, kommenterade någon elev. Eleverna höll med om att det var lättare att veta hur många fingrarna var jämfört med de 10 strecken. Jag berättade för barnen att en fördel med att räkna på fingrarna kan vara att man direkt kan *se* hur många de är, utan att behöva räkna efter.

Jag höll upp fingertal mellan 1 och 10 och barnen fick så snabbt som möjligt säga hur många fingrar det var. Jag berättade att fingertal börjar på ena lillfingret och hålls sedan ihop, utan att något finger hoppas över. Jag visade 8 fingrar genom att vika in de båda tummarna, och konstaterade att det blir 8 fingrar även på detta vis. Jag visade upp och poängterade dock att *fingertalet 8* består av de 8 fingrarna från lillfingret på ena handen till och med långfingret på den andra handen. Därefter fick eleverna hålla upp fingertal för varandra två och två. Eleverna turades om att visa varandra fingertal och att säga hur många fingrar som hölls upp.

Därefter visade jag fingertalet 8 och frågade eleverna om något annat fingertal skulle kunna få plats i detta. Jag förtydligade frågan genom att fråga hur man skulle kunna dela upp fingertalet i två delar. En elev föreslog att man kan dela 8 som 4-4. Jag lade händerna på bordet som eleverna satt runt och grupperade mina fingrar 4 och 4. För att markera de olika delarna lade jag ett snöre i gränsen mellan delarna. Jag konstaterade att delarna är 4 och 4 och att helheten är 8. Då eleverna inte förstod ordet helhet förklarade jag det som det hela, det stora eller allting tillsammans. Jag frågade eleverna vilka fler möjligheter det finns att dela helheten 8. Eleverna föreslog 3 och 5 samt 1 och 7. Jag illustrerade svaren genom att placera snöret enligt elevernas delning. Därefter föreslog en elev delarna 3 och 4. Vi provade att lägga snöret enligt detta förslag, men när jag frågade om det går svarade eleverna samstämmigt nej. Eleverna grupperades två och två och varje par tilldelades ett tal mellan 7 och 10. De ombads att med hjälp av sina fingrar och snöret pröva vilka delar de kunde dela upp sitt tal i.

Istället för att utgå från helheten utgick vi i nästa övning från delen. Jag lade upp fingertalet 5 och berättade att vi nu skulle börja med delen. Jag lade till 3 fingrar och frågade hur stor del jag just lade till. Därefter frågade jag eleverna om de kan se hur stor helheten nu är. Jag fortsatte att lägga till olika delar till delen 5 och eleverna fick berätta vilken del som lagts till samt hur stor helheten blev.

Jag upplevde att eleverna under lektion A1 var ganska oroliga, och hade svårt att fokusera på uppgiften.

5.1.1.1 Mönster av variation under lektion A1

Denna lektion introducerade elevgrupp A till fingertalen. Att alla elever direkt visste att de har 10 fingrar, och att detta gick snabbare att konstatera, jämfört med att räkna de 10 strecken på tavlan behöver inte innebära att eleverna såg nyttan med att räkna med fingertal. Jag påpekade vid flera tillfällen att meningen är att eleverna ska se fingertalen, men är inte övertygad om att det är tillräckligt för att eleverna ska förstå fördelarna. Nyttan med övningarna behöver förtydligas.

Eleverna får träna sig att se fingertalen genom att jag visar upp varierade fingertal. Det konkreta materialet, det vill säga fingrarna, är konstant. Därefter får eleverna själva variera fingertalen för varandra. Denna övning ger eleverna möjlighet att lära sig att se fingertalen utan att behöva räkna efter, vilket är en av de kritiska aspekterna för lärandeobjektet. För att poängtera att fingertalen sträcker sig från lillfingret och att inga fingrar hoppas över visar jag ett exempel där detta *inte* efterföljs. Genom att visa 8 fingrar som alla fingrar förutom två invikta tummar skapas en *kontrast*. Med variationsteoretiska termer innebär detta ett motexempel, hur fingertalet 8 inte ser ut.

I övningen där eleverna får dela upp en helhet som hålls konstant är det de ingående delarna som varierar. Därefter fick eleverna resonera kring vilka delar som kan läggas till en konstant del, vilket ger en variation i helheten. Att utgå ifrån fingertalet 5 kan vara fördelaktigt rent motoriskt, och ger en förförståelse för ”den odelade handen”, Neumans sätt att beskriva att den största delen placeras först för att underlätta avläsningen av fingertalen. Båda dessa övningar ger barnen en möjlighet att erfara nästa kritiska aspekt, att upptäcka att de samtidigt kan urskilja delar och helhet med hjälp av sina fingertal.

Den kritiska aspekt som berör delarnas kommutativa aspekt, hur delarna kan byta plats med varandra, är inte framträdande under lektion A1.

5.1.2 Lektion A2

Lektion A2 genomfördes med samma 9 elever som deltog i lektion A1. Lektionen hölls i samma grupprum, men vid detta tillfälle var mindre bord utplacerade så att eleverna satt två och två vid dessa.

Den andra lektionen med grupp A inleddes med att jag berättade för barnen att lektionen skulle handla om hur man kan använda sina fingertal för att lösa matematiska uppgifter. Fingertalen repeterades genom att eleverna fick visa fingertalet som jag sade. Eleverna verkade ha tagit till sig hur fingertalen börjar vid lillfingret och sträcker sig finger för finger över händerna, då alla visade sammanhängande fingertal.

Jag visade eleverna fingertalet 8 och frågade dem hur de skulle göra för att ta bort 3 från fingertalet 8. En flicka fick komma fram och visa hur hon löser uppgiften. Naturligt nog väljer hon att ta bort de 3 fingrar som är på handen med just 3 fingrar. Hon såg omedelbart att delen som blir kvar är 5. Jag frågade eleven hur hon skulle göra om hon ska ta bort 5 från fingertalet 8. Flickan tog nu istället bort handen med 5 fingrar från fingertalet 8 vilket lämnade delen med 3 fingrar på andra handen kvar.

Därefter skrev jag 9-2= på tavlan och uppmanade eleverna att lösa uppgiften med hjälp av fingertal. Jag fortsatt med att skriva 9-7= och frågade eleverna om man kan säga att detta är samma uppgift på något sätt. En elev räckte ivrigt upp handen och sa att det är samma för att 9-2=7 och 9-7=2. Jag förklarar att om man vet att helheten 9 går att dela i 7 och 2 så kan man lösa dessa uppgifter väldigt enkelt.

Eleverna fick därefter lösa uppgifter av typen öppna utsagor samt subtraktionsuppgifter på en stencil, se bilaga 3, med uppmaningen att använda sig av fingertalen. Stencilen hade även en illustration med 10 fingrar märkta med siffrorna 1-10. Då eleverna arbetade med stencilen noterade jag att de två flickorna i gruppen, Lina och Maja, snabbt kunde lösa uppgifterna korrekt, till synes utan ansträngning, även utan att använda sig av fingertalen. De använde fingertalen såsom jag instruerat dem till de första talen, men övergav snart metoden.

En av pojkarna, Mikael, menade att det var lättare att lösa subtraktionsuppgifterna som han brukade göra, utan att använda fingertalen. Han räknade bakåt och höll koll på stegen han backade med hjälp av fingrarna, på det vis som Neuman (1993) benämner dubbelräkning. Trots att jag försökte få honom att pröva att räkna med fingertalen ville han inte detta.

Alla elever i grupp A löste huvudparten av uppgifterna på stencilen korrekt. Några elever gjorde några få misstag. En av pojkarna, Karl, tog lång tid på sig för att lösa uppgifterna. Han arbetade dock konsekvent med fingertalen och såg ut att få flyt i metoden så småningom. Lugnt och metodiskt löste han uppgifterna med endast ett fel.

Eleverna verkade ha lättare att koncentrera sig när de fick arbeta med stencilen individuellt. Jag upplevde att eleverna var mer fokuserade jämfört med lektion A1, men eleverna tycktes fortfarande något oroliga.

5.1.2.1 Mönster av variation under lektion A2

Liksom under lektion A1 får eleverna under lektion A2 träna sig i att visa upp fingertalen så snabbt som möjligt. Denna färdighetsträning kan möjliggöra den kritiska aspekten att se fingertalen utan att behöva räkna efter.

I uppgiften att utifrån en konstant helhet (8) ta bort först en del (3) och därefter den andra delen (5) finns en möjlighet att upptäcka att man kan ta bort valfria fingrar, valt utifrån fingrarnas naturliga gruppering. Eventuellt skulle detta kunna ge en upplevelse av att man kan byta plats på delarna utifrån behov. Denna kommutativa aspekt, som skulle kunna utgöra en kritisk aspekt, är dock inte explicit formulerad. Det finns en inneboende möjlighet för att upptäcka aspekten utifrån uppgiftens utformning, men det förutsätter att eleven på egen hand lägger märke till denna.

Stencilens subtraktionsuppgifter, se bilaga, är grupperade utifrån en konstant helhet, där delen som dras ifrån varieras. För uppgifterna av typen öppna utsagor är det istället den givna delen som hålls konstant medan helheten varieras. Denna gruppering av uppgifterna skapar potential för eleverna att upptäcka den kritiska aspekten att de kan se helheten och delarna simultant.

5.1.3 Ändringar inför lektion B1 och B2

Inför lektionerna med grupp B ville jag förtydliga att det övergripande syftet med övningarna och fingertalen är att kunna *se* tal, snarare än att behöva räkna dem. Jag ville rikta större fokus på gruppering av föremål för att kunna se antal, och för att förstärka den egna insikten ville jag att barnen själva skulle få fundera över hur denna gruppering kan gå till. En ytterligare möjlig kritisk aspekt för att förstå nyttan med fingertalen skulle kunna vara att kunna se antal utifrån gruppering och mönster.

Dessutom upplevde jag att två av de tre ursprungliga kritiska aspekterna behövde förtydligas. Jag ville förstärka möjligheten för eleverna att se helheten och delarna samtidigt. Jag var inte riktigt nöjd med övningen med snöret som avgränsare mellan delarna. Tanken var att snöret skulle bidra till att visualisera delarna, men verkade snarare förvirra eleverna. I en av grupperna diskuterade man huruvida snöret skulle räknas i likhet med fingrarna eller inte. Övningen byttes istället mot att eleverna fick färglägga de möjliga delarna på uppritade händer med två färger.

Att man kan byta plats på de ingående delarna framgick endast på ett indirekt sätt under lektion A2, denna aspekt behövde belysas tydligare.

Den kritiska aspekten att kunna se fingertalen utan att behöva räkna efter tror jag i stor utsträckning bygger på färdighetsträning.

5.1.4 Lektion B1

Lektion B1 genomfördes med 7 elever i ett grupprum. Eleverna är placerade runt två bord.

Före lektionens start har jag i likhet med lektion A1 ritat upp 10 streck på tavlan. Då jag frågade eleverna hur många streck det är fick jag olika svar mellan 7 och 11. Jag konstaterade att det var ganska svårt att se hur många streck det var och frågade eleverna om de kunde komma på något sätt för att göra det enklare. Följande diskussion utspelades:

<u>Excerpt 1</u> **Hur man kan se antal med hjälp av grupperingar**

Lärare: Det är ganska svårt att de hur många de är (strecken) när de står så här. Skulle ni kunna fundera lite om det skulle kunna finnas något annat sätt så att det vore lättare att se hur många det är?

Anna: Jag räknar 1,2,3,4,5,1,2,3,4,5.

Lärare: Okej, 1,2,3,4,5,1,2,3,4,5 (ritar streck grupperade 5 och 5 på tavlan). Tycker ni att det blir lättare att se där?

Emma: Man kan göra 4 streck och sen dra ett över de andra.

Lärare: Så kan man göra, vill du visa på tavlan? (Emma ritar 4 streck och ett 5:e snett över de 4. På uppmaning ritar hon det en gång till för att det ska bli 10 tillsammans).

Lärare: Är det någon som kan komma på något annat sätt så att man direkt kan *se* hur många det är?

Maria: Man kan göra så här (ritar de 10 strecken i betydligt större format på tavlan).

Lärare: Mmm, det blir lättare att se om man ritar dem större så. Ali, vill du visa? (Ali skriver siffran 5 på tavlan)

Lärare: Smart, så kan man ju skriva med.

En elev ritar 10 sträck horisontellt på tavlan, de övriga strecken hade ritats vertikalt.

Lärare: Tycker du att det är lättare att se om de är på det hållet? Ja.

Lärare: Jag har ett förslag, om man gör så här (ritar upp 10 streck i ett mönster som formar två kvadrater plus ”en halv kvadrat”). Kan man direkt se hur många de är?

Ali: Det vet jag!

Lärare: Om man vet att det är 4 stycken i en fyrkant, då kan man snabbt se 4, 4 och så är det 2 där. Och då blir det ju 10 tillsammans.

Stina skriver 5+5 på tavlan.

Lärare: 5+5 kan man skriva, det är också 10.

Anna skriver 6+4 på tavlan.

Lärare: 6+4, det är också 10. Om jag gör så här då, ska vi se om ni direkt kan se hur många det är. Då gör jag lite mindre streck (ritar 10 streck i formen av två mönster såsom 5 grupperas på en tärning). Vad ser det där ut som?

Elev: Regndroppar.

Elev: Ja, tärningar!

Lärare: Ja, man kan ju gruppera strecken så här. Man kan kalla det att man grupperar när man ritar eller skriver i sådana små grupper. När ni spelar med en vanlig tärning, brukar ni räkna prickarna då?

Stina: Nej, man ser att det är 5 då.

Lärare: Ni ser direkt vad det är då. Och det kan man göra för att de är i en sådan grupp liksom, som man känner igen. Redan när ni var bebisar, redan små bebisar kan se en grupp av 2 eller en grupp av 3. Man kan se det, man behöver inte räkna. Och det är det som vi ska träna på här idag, att man kan se, då slipper man att räkna. Jag behöver inte räkna 1,2,3, utan jag bara ser det på en gång. Samma som med tärningen, jag bara ser att där är fem och där är fem. (Jag ritar två händer på tavlan). Hur många har jag ritat här då? Det ser ni, ni räcker upp handen alla på en gång. Hur många är det, Matilda?

Matilda: 10

Lärare: 10 fingrar, det vet ni. Det är väl ingen som räknar efter hur många fingrar ni har. Det vet man på en gång, det bara man ser. Fingrarna är väldigt bra att räkna med eftersom de är grupperade liksom. Det är 5 på den och det vet man från början, och det är 5 på den andra. Om jag håller upp till exempel 3 på den handen och 5 på den handen och håller ihop dem, kan ni se då på en gång hur många de är, utan att räkna efter?

Matilda: 8

Lärare: Ja. Och det här kallas för fingertal. … Eftersom redan bebisar kan se att det här är 3 och det här är 5 så kan man bara ta ihop dem. Och det kan vara väldigt användbart. Då kan man bara titta på sina fingrar. Och så kan man se på en gång vad det är. Vi ska träna på fingertalen här idag.

Eleverna fick därefter säga vilka fingertal jag höll upp. I nästa steg fick eleverna forma de fingertal som jag sade. Eleverna instruerades att börja fingertalet på vänstra lillfingret och låta det gå längs med alla fingrar utan att hoppa över något. Därefter fick eleverna, två och två, turas om att hålla upp fingertal och att se vilket fingertal som hölls upp.

Jag ritade upp två händer som visade fingertalet 9 på tavlan. Utifrån denna bild fick eleverna fundera kring vilka sätt man skulle kunna dela fingertalet 9 på. Jag markerade barnens förslag med ett streck på skissen på tavlan. Eleverna gav förslagen 6 och 3, 5 och 4, samt 7 och 2. Då jag dragit strecket som skiljer delarna 7 och 2 genom den hand som uppvisar 4 fingrar i fingertalet 9 visar jag att man även kunde ha delat efter de två första fingrarna i handen med 5 fingrar. Jag motiverar detta med att om jag har handen med 5 fingrar odelad, så vet jag att jag där har 5 fingrar, och kan därför lättare lägga till de två på andra handen och se delen 7. Nästa förslag från eleverna att dela fingertalet 9 var 1 och 8. Ingen av eleverna tänkte på möjligheten att låta den ena delen vara 0 och den andra delen 9, så jag uppmärksammade dem på detta.

En stencil med 5 par händer visande fingertalet 8 uppritat delades ut till eleverna. Elevernas uppgift var att dela fingertalen på alla möjliga sätt och färglägga de två delarna i två olika färger. Flera av eleverna behövde få förtydligade instruktioner för att förstå uppgiften. 5 av 7 löste uppgiften så som den var tänkt. En elev missade möjligheten med alla 8 fingrarna i ena delen. En elev slutförde inte uppgiften, men färglade 2 av 5 möjliga varianter.

Lektionen avslutas med att jag utgår från en del, fingertalet 5 och lägger till en del, fingertalet 2.

Excerpt 2 **Beskrivning av hur del och helhet kan ses samtidigt i fingertalen.**

Lärare: (håller upp 5 fingrar på ena handen och 2 på den andra) det som är bra med fingertalen är att man kan se de 5, och den andra lilla delen med 2, (för ihop händerna) och man kan se dem tillsammans samtidigt. Det kan vara väldigt användbart då man räknar, och det ska vi träna på mer nästa lektion.

5.1.4.1 Mönster av variation under lektion B1

Under den inledande diskussionen hölls antalet 10 konstant, medan sätten som talet kan grupperas eller införlivas i mönster varierades. Principen att visa på gruppering av föremål i andra sammanhang än grupperingen hos fingrarna, som exemplifieras i excerpt 1 med mönstret på en tärning, kallas med variationsteoretiska termer för *generalisering*. Variationen i denna diskussion bygger i hög utsträckning på de förslag som eleverna bidrog med. Variationen belyser att det kan vara lättare eller svårare att uppfatta ett antal utifrån hur föremålen är grupperade samt hur välbekanta mönstren är. Upplägget ger förhoppningsvis eleverna chansen att själva upptäcka om de anser att fingrarna är ett bra sätt att direkt kunna uppfatta, eller se, antal.

Samtalet kring hur man kan dela upp fingertalet 9 i två delar liknar i mångt och mycket motsvarande övning i lektion A1. Utifrån en konstant helhet söker barnen efter möjliga varianter för att dela fingertalen. Skillnaden var att vid lektionstillfälle B1 så utgick vi ifrån uppritade händer på tavlan, istället för att jag visade på mina egna händer.

I uppgiften att färglägga de möjliga delarna i två färger utifrån fingertalet 8 hålls helheten konstant medan barnen själva får undersöka hur de kan variera delarna. Variationsmönstret då helheten varieras utifrån en konstant del framträder inte lika tydligt i denna lektion som i lektion A1. Lektionen avslutas istället med en beskrivning av hur del och helhet kan urskiljas samtidigt med hjälp av fingertalen, men något variationsmönster för att belysa detta erbjuds inte.

5.1.5 Lektion B2

Lektion B2 genomfördes i ett grupprum med samma elever som deltog i lektion B1

Lektionen inleddes med en kort repetition av föregående lektions innehåll. För att inte behöva räkna sina fingrar erbjöd jag barnen att skriva siffrorna 1-10 på deras fingrar . De flesta menade dock att de inte behövde denna hjälp, endast två barn önskade prova detta. Eleverna fick färdighetsträna fingertalen genom att hålla upp det fingertal jag sade.

Följande konversation utspelade sig i nästkommande övning:

<u>Excerpt 3</u>: **Att välja vilka fingrar som ska dras bort**

Lärare: Vilket fingertal har jag ritat på tavlan nu?

Stina: 8

Lärare: (skriver 8-3= på tavlan) Och vad står det här? 8-3. Om man ska räkna 8-3 med sina fingrar, spelar det någon roll vilka fingrar man tar bort?

Maria:	Ja.
Lärare:	Maria, vilka fingrar skulle du ta bort?
Maria:	De som är tre.
Lärare:	(markerar de 3 på handen som visar 3 fingrarna i fingertalet 8) Varför skulle du göra det?
Maria:	För att då så har jag ju… annars… (kommer fram till tavlan och pekar) tillexempel om jag skulle ta bort de 3 (pekar på fingrar från handen med 5 fingrar), då blir det ju de kvar, de ser ju inte ut som 5 (håller upp de 2 kvarvarande fingrarna på handen som hade 5 fingrar plus de tre från handen med 3 fingrar).
Lärare:	Precis. Hörde ni alla vad Maria sa? Om vi har fingertalet 8 (visar fingertalet 8 med händerna) och tar bort dem (de 3 på handen med 3 fingrar), då är det ganska lätt att se direkt vad det blir va (visar de 5 kvarvarande fingrarna). Men om vi tar bort tillexempel dem (visar fingertalet 8 och viker in pek- lång och ringfinger på handen med 5 fingrar), det är ju också 3 där, då får man nästan räkna efter 1,2,3,4,5 då är det inte så lätt att se det va? … Det kan ofta vara bra att tänka efter, vilka fingrar är smart att ta bort nu.
Lärare:	(skriver 8-5 på tavlan) om jag skriver så här istället nu då. Vilka fingrar tycker ni man ska ta bort om det står så här då, 8-5?
Matilda:	Ta bort (tar bort handen med 5 fingrar)
Lärare:	Ta bort hela den handen? Ja, det verkar väl smart. Om man tar bort den, då är det ju lätt att se de fingrarna. Om jag har 8 och ska ta bort 5, då tar jag ju bort den (visar fingertalet 8 och tar bort handen med 5 fingrar), så har jag 3 kvar (visar de 3 fingrarna som är kvar).

Eleverna får därefter lösa uppgifter på samma stencil (bilaga 3) som användes under lektion A2 med uppmaning om att använda sig av fingertalen samt att försöka se svaren snarare än att räkna efter.

Därefter läste jag upp vardagliga problemlösningsuppgifter för barnen, se bilaga 4. En uppgift där antalet äpplen som två personer hade tillsammans användes som utgångspunkt för att skapa öppna utsagor. Med information om hur många äpplen den ena personen hade uppmanades eleverna att använda sina fingrar för att ta reda på hur många äpplen den andra personen hade. En elev fick komma fram och förevisa hur hon löste uppgiften med sina fingertal. Jag visade även med mina egna händer som exempel på hur man kan se svaret utan att behöva räkna efter. Kontexten med gemensamma äpplen används för flera olika kombinationer av helhet och delar i alla uppgifter av typen öppna utsagor. För subtraktionsuppgifter valdes en kontext där en flicka har ett antal päron, men ger några av dessa till sin syster. Med olika värde på minuend såväl som subtrahend frågade jag efter differensen, det vill säga hur många päron som flickan hade kvar.

5.1.5.1 Mönster av variation under lektion B2

I övningen där jag frågar eleverna vilka fingrar som ska tas bort är uppgiften 8-3 konstant, liksom utgångspunkten fingertalet 8. Det som varierar är vilka fingrar som tas bort som en representation för talet 3. Insikten att man kan ta bort vilka 3 fingrar som helst är avgörande för en förståelse för att delarna kan byta plast, det vill säga den kommutativa lagen. Att man kan tala om en kommutativ aspekt, trots att uppgiften är av subtraktionstyp visar på det nära förhållandet mellan addition och subtraktion. Att man kan välja att ta bort de 3 första såväl som de 3 sista fingrarna i fingertalet beror på 3+5=5+3. Härur uppstår valmöjligheten. Att man i subtraktion inte kan byta plats på minuend och subtrahend blir naturligt då man med fingertalen utgår från helheten.

Övningen med att välja vilka fingrar som tas bort utvidgas genom att delen som ska dras ifrån det konstanta fingertalet varieras. Eleverna får fundera över vilka fingrar de finner lämpligast att ta bort i uppgiften 8-5. Inom variationsteorin kan man här tala om en *generalisering*. Helheten hålls konstant, men genom att variera fingrarna som representerar delen som dras ifrån kan eleverna uppleva hur det kan vara enklare respektive svårare att se svaret beroende på hur fingrarna grupperats. Förhållningssättet att analysera ingående tal för att kunna välja lämpliga fingrar som tas bort kan användas generellt för att förenkla avläsning av de kvarvarande fingrarna. Såväl som att öppna möjligheter för att erfara den kommutativa aspekten hos delarna kan övningen även bidra till erfarandet av att delarna och helheten kan urskiljas samtidigt.

Uppgifterna på stencilen är den samma som användes under lektion A2, se bilaga 3. Subtraktionsuppgifterna är grupperade utifrån en konstant helhet, minuend, där subtrahenden varieras, medan de öppna utsagorna är grupperade utifrån en känd konstant del, där den okända delen och helheten varieras.

I lektionens avslutande övning där muntliga problemlösningsuppgifter (bilaga 4) löses med hjälp av fingertal hålls kontexten konstant, samma personer har olika antal gemensamma och individuella äpplen. Jag formulerar alltså uppgifterna med samma ord, medan antal i såväl helhet som delar varierar. Man skulle kunna se denna uppgift som en *fusion*, vilket inom variationsteorin innebär att alla kritiska aspekter varierar samtidigt. För att på ett effektivt sätt kunna lösa problem med hjälp av fingertalen är det en stor fördel att direkt kunna se fingertalen utan att räkna efter, vilket är den första kritiska aspekten. Denna varieras i och med att helheten, det gemensamma antalet äpplen varieras. Den andra kritiska aspekten innebär att se del-del-helhetsrelationen i fingertalen simultant. Genom att tilldela personerna i uppgiften olika antal äpplen, det vill säga variera de ingående delarna, varieras denna aspekt. Den tredje kritiska aspekten innebär en klar effektivisering för att kunna lösa en problemuppgift. Med insikten att man kan byta plats på delarna kan de ingående talen i uppgiften analyseras och sättet att gruppera fingrarna kan göras så att delarna blir enkla att urskilja utan att behöva räkna efter.

Samma resonemang kan föras kring problemlösningsuppgifterna av subtraktionstyp. Även där var kontexten konstant medan minuend såväl som subtrahend varierades.

5.2 Sammanfattning av variationsmönster

De dimensioner som varierats utifrån aspekter av lärandeobjektet i undervisningen för

	Aktivitet	Aspekt av lärandeobjektet	Dimensioner av variation
Lektion A1	Säga vilket fingertal läraren visar.	Se fingertalen	Fingertalen 1-10

elevgrupp A sammanfattas i tabell 2:

	Eleverna visar fingertal och läser av i par om två.	Se fingertalen	Fingertalen 1-10
	Möjliga sätt att dela fingertalet 8 diskuteras. Ett snöre illustrerar skiljelinjen mellan delarna.	Del-del-helhetsrelationen	Delen
	Eleverna får i parvis undersöka möjliga sätt att dela ett givet fingertal med hjälp av snöret.	Del-del-helhetsrelationen	Delen
	Med utgångspunkt i fingertalet 5 som en del läggs andra delar till för att bilda en ny helhet.	Del-del-helhetsrelationen	Helheten
Lektion A2	Eleverna formar de fingertal som läraren säger.	Se fingertalen	Fingertalen 1-10
	Lösa uppgiften 8-3 respektive 8-5 med fingertal. (Välja fingrar som förenklar så att man direkt kan se svaret.)	Del-del-helhetsrelationen (Byta plats på delarna)	Delen (Vilka fingrar som tas bort)
	Se sambandet mellan 9-2 och 9-7.	Del-del-helhetsrelationen	Delen
	Lösa uppgifter på stencil, se bilaga 3.	Se fingertalen Del-del-helhetsrelationen	Delen Helheten

	Aktivitet	**Aspekt av lärandeobjektet**	**Dimensioner av variation**
Lektion B1	Diskussion kring hur tal kan grupperas.	Se antal utifrån gruppering och mönster	Sätt att gruppera föremål
	Säga vilket fingertal läraren visar.	Se fingertalen	Fingertalen 1-10

Tabell 2: Dimensioner av variation utifrån aspekter av lärandeobjektet, elevgrupp A.

Motsvarande variationsmönster utifrån aspekter av lärandeobjektet för elevgrupp B sammanfattas i tabell 3:

	Eleverna formar de fingertal som läraren säger.	Se fingertalen	Fingertalen 1-10
	Eleverna visar fingertal och läser av i par om två .	Se fingertalen	Fingertalen 1-10
	Möjliga sätt att dela fingertalet 9 diskuteras. Delarna illustreras på ett uppritat fingertal på tavlan.	Del-del-helhetsrelationen	Delen
	Eleverna får dela fingertalet 8 genom att färglägga uppritade fingertal i två färger.	Del-del-helhetsrelationen	Delen
	Med utgångspunkt i fingertalet 5 som en del beskrivs av hur del och helhet kan ses samtidigt i fingertalen.	Del-del-helhetsrelationen	(Helheten)
Lektion B2	Eleverna formar de fingertal som läraren säger.	Se fingertalen	Fingertalen 1-10
	Lösa uppgiften 8-3 respektive 8-5 med fingertal. Välja fingrar som förenklar så att man direkt kan se svaret.	Del-del-helhetsrelationen Byta plats på delarna	Delen Vilka fingrar som tas bort
	Lösa uppgifter på stencil, se bilaga 3.	Se fingertalen Del-del-helhetsrelationen	Delen Helheten
	Muntliga problemlösningsuppgifter av typen öppna utsagor samt subtraktion, se bilaga 4.	Se fingertalen Del-del-helhetsrelationen Byta plats på delarna	Delen Helheten Vilka fingrar som tas bort

Tabell 3: Dimensioner av variation utifrån aspekter av lärandeobjektet, elevgrupp B.

Av tabellerna 2 och 3 framgår att både elevgrupp A och B vid flera tillfällen fått möjlighet att träna sig på att direkt se fingertalen såväl som att själva forma fingertalen, både gemensamt i gruppen samt parvis. Denna förmåga bygger på färdighetsträning snarare än att urskilja ett nytt perspektiv. Även om förmågan att direkt kunna se fingertal troligtvis utvecklas i vanan vid att arbeta med fingertal understryks strävan mot detta mål i undervisningen. Genom att variera såväl uppvisade som elevernas formade fingertal mellan 1-10 har denna förtrogenhet förstärkts.

Studiens lärandeobjekt inbegriper såväl förståelse för som användandet av fingertalen. Endast elevgrupp B får genom generalisering av gruppering och mönster hos andra föremål än fingrarna möjlighet att själva upptäcka fördelen av gruppering. För eleverna i grupp A jämförs 10 streck på tavlan med 10 fingrar, men någon ytterligare variation av dimensionen gruppering erbjuds inte. För att förstå nyttan av fingertalen skulle aspekten att se antal utifrån gruppering och mönster kunna anses kritisk.

Såväl grupp A som grupp B har med hjälp av fingertalen delat en konstant helhet i möjliga delar. Principen för övningarna där eleverna får markera delarna genom att använda ett snöre som skiljelinje eller färglägga delarna i två färger är den samma. Övningen byttes ut för att åskådliggöra delarna på ett tydligare sätt. En annan fördel med de färglagda delarna är att flera möjligheter att dela helheten kan visualiseras samtidigt.

I grupp A hölls en del invariant medan den andra delen och helheten varierades. För grupp A utmynnade denna övning i en kort beskrivning av hur helhet och delar kan visualiseras i fingertalen samtidigt. På grund av tidsbrist skapades ingen variation av denna aspekt för grupp B.

Uppgiften 8-3 respektive 8-5 togs som utgångspunkt för att illustrera hur en del dras ifrån helheten i fingertalet. I grupp A fick en elev visa hur hon för att lösa uppgiften 8-3 drog ifrån de 3 fingrarna på handen med 3 fingrar, följt av hur hon drog ifrån hela handen med 5 fingrar för att lösa uppgiften 8-5. I grupp B varierades även vilka av fingrarna som kan väljas för att dra ifrån de respektive delarna. Genom att visa resultatet då mindre lämpliga fingrar får representera delen får eleverna möjlighet att erfara fördelarna med ett analytiskt förhållningssätt i lösningen av uppgifter. Genom att variera vilka fingrar som representerade den bortdragna delen fick eleverna i grupp B möjlighet att urskilja hur delarna kan byta plats med varandra. Denna aspekt av lärandemålet var endast möjlig att erfara indirekt i undervisningen för grupp A.

Såväl grupp A som grupp B fick erfara hur delen varierade i subtraktionsuppgifterna och helheten i uppgiften av typen öppna utsagor i arbetet med att lösa uppgifterna på stencilen.

Endast grupp B fick lösa muntliga problemlösningsuppgifter där såväl helhet som delar varierades utifrån en konstant kontext. För att lösa uppgifterna utgick eleverna från ett fingertal som med fördel formas utan att varje enskilt finger räknas. Detta då det ställer höga krav på arbetsminnet att räkna fram fingertalet samtidigt som man håller övriga upplysningar från uppgiften i huvudet. Genom att överföra talen i uppgiften till fingrarna kan del-del-helhetsrelationen visualiseras samtidigt i fingertalet. Med en medvetenhet om att delarna i fingertalet kan byta plats kan en analys av komponenterna resultera i att lämpliga fingrar dras ifrån helheten för att åstadkomma en enkel avläsning av kvarvarande del av fingertalet. Denna problemlösningsuppgift innebär med andra ord en fusion av samtliga aspekter som antas vara kritiska för lärandeobjektet i studien.

5.3 Resultat av för- och eftertest på gruppnivå

Resultatdelen som behandlar testerna inleds med en sammanfattning av elevernas individuella totalpoäng samt gruppernas medelvärde i för- och eftertester. Därefter följer en genomgång av elevgruppernas resultat i de tre olika delarna av för- och eftertestet, där resultatet i testerna kopplas till undervisningen i de respektive grupperna. Avslutningsvis presenteras en analys av elevernas resultat på individnivå.

Maximalt antal poäng i för- respektive eftertest var 9 poäng. I tabell 4 presenteras elevernas totalpoäng samt medelvärde för elevgrupp A. Motsvarande data för elevgrupp B presenteras i tabell 5.

GRUPP A	Förtest poäng totalt	Eftertest poäng totalt	Skillnad
Henrik	2	6	4
Lina	9	8	-1
Gustav	4	8	4
Andreas	8	8	0
Maja	7	8	1
Therese	3	3	0
Karl	7	8	1
Mikael	7	7	0
Nils	8	7	-1
Medelvärde grupp A	6,1	7	0,9

Tabell 4: Resultat i för- respektive eftertest samt skillnaden dem emellan för elevgrupp A.

GRUPP B	Förtest poäng totalt	Eftertest poäng totalt	Skillnad
Anna	8	9	1
Emma	8	9	1
Maria	7	6	-1
Ali	6	7	1
Stina	3	3	0
My	5	6	1
Matilda	7	8	1
Medelvärde grupp B	6,3	6,9	0,6

Tabell 5: Resultat i för- respektive eftertest samt skillnaden dem emellan för elevgrupp B.

Det framgår ur tabell 4 och 5 att flera av eleverna uppvisar höga poäng redan vid förtestet. Av totalt 16 elever har 10 elever i förtestet 7 poäng eller mer av 9 möjliga poäng. Att flera elever redan i förtestet ligger nära maxpoängen begränsar givetvis förbättringspotentialen. Ett något svårare test skulle därför ha kunnat påvisa eventuella förbättringar hos dessa elever.

Av de 17 eleverna är det 7 elever som förbättrar sitt resultat med 1 poäng. 3 elever av de 17 får 1 poäng lägre resultat i eftertestet jämfört med förtestet. Det är 4 elever som får lika många poäng i för- som eftertest. Två elever sticker ut genom att ha förbättrat sitt resultat med 4 poäng. Henrik, den elev med svagast resultat, går från 2 poäng till 6 poäng efter undervisningen. Även Gustav befinner sig bland de elever med lägst resultat i förtestet, men efter att ha förbättrat sitt resultat med 4 poäng får han 8 poäng i eftertestet.

Medelvärdet för grupp A (6,1) är något lägre än för grupp B (6,3) i förtestet. I eftertestet är förhållandet det omvända. Grupp A har alltså förbättrat sig i något högre utsträckning, och höjer som grupp sitt medelvärde med 0,9 poäng, jämfört med 0,6 poängs höjning i grupp B. Man hade kunnat förvänta sig att medelvärdet skulle höjts mer för grupp B, då dessa elevers undervisning förhoppningsvis utvecklats och förbättrats efter revideringen av lektionsplanering. Enligt lektionsanalysen har undervisningen för grupp B innehållit variationsmönster som inte presenterades för grupp A. Att det ändå är grupp A som höjts sitt medelvärde mest kan förklaras av att båda de elever som höjt sitt resultat markant från ett svagare resultat i förtestet ingick i denna grupp.

I tabell 6 presenteras inom vilka delar av testerna som förbättringen uppnåtts för respektive grupp.

		Grupp A	Grupp B
Gissningslek dela på 9	Förtest	3,7	3,1
(max poäng 5)	Eftertest	3,9	3,1
	Skillnad	0,2	0
Visa fingertalet 8	Förtest	0,7	1
(max poäng 1)	Eftertest	1	1
	Skillnad	0,3	0
Problemlösningsuppgifter	Förtest	1,8	2,1
(maxpoäng 3)	Eftertest	2,1	2,7
	Skillnad	0,3	0,6

Tabell 6: Fördelning av poäng utifrån testets tre delar för grupp A respektive grupp B (medelvärde per grupp).

Tabell 6 visar att eleverna i grupp A har ett högre medelvärde jämfört med grupp B i gissningsleken där 9 små kuber gömdes i två koppar, och eleverna fick gissa hur kuberna fördelats. Eleverna i grupp A förbättrar sig dessutom något i denna testdel, vilket innebär att gruppens medelvärde (3,9) för denna övning i eftertestet är nästan 1 poäng högre än medelvärdet för grupp B (3,1). Detta deltest är konstruerat som ett sätt att undersöka elevernas förståelse för del-del-helhetsrelationen. Då förmågan att se delar och helhet samtidigt i fingertalen var en av de kritiska aspekterna som varierades på flertal sätt i undervisningen med såväl grupp A som grupp B var det något förvånande att resultatet inte förbättrades mer. En möjlig förklaring till varför ingen större förbättring i deltestet kunnat påvisas skulle kunna vara att ingen uppgift i undervisningen handlade om att gissa okända delar utifrån en känd helhet. Uppgifterna under lektionerna gick snarare ut på att illustrera möjliga uppdelningar, med snöre som skiljelinje respektive genom att färglägga möjliga delar i två färger. Nästan inga av eleverna tog till sina fingrar för att lösa denna uppgift. De verkar inte ha gjort kopplingen mellan hur uppdelningar av fingertalet 9 skulle kunna ha hjälpt dem att gissa på möjliga kombinationer.

Gällande uppgiften då eleverna ombads att lägga fram 8 fingrar utan att räkna dem en och en har alla elever i grupp B lyckats med detta redan i förtestet. Även grupp A har i eftertestet ett hundraprocentigt resultat i denna del, då några elever som hade problem med uppgiften i förtestet löser densamme i eftertestet. Att samtliga elever i eftertestet snabbt kan uppvisa fingertalet 8 tolkar jag som ett resultat av den färdighetsträning som utövats under lektionerna i såväl grupp A som grupp B.

I tabell 6 kan vidare avläsas att grupp B har ett något högre genomsnittligt resultat (2,1) i förtestet jämfört med grupp A (1,8) i delen av testet som bestod av problemlösningsuppgifter. Dessutom förbättrar eleverna i grupp B sitt resultat med i snitt 0,6 poäng, dubbelt så stor förändring jämfört med eleverna i grupp som förbättrade sitt medelvärde med 0,3 poäng. En förklaring till att eleverna i grupp B verkade utveckla sin förmåga att lösa problemlösningsuppgifter i högre utsträckning skulle kunna vara att det endast var under lektion B2 som den kritiska aspekten rörande hur delarna i helheten kan byta plats varierades och därmed var möjlig att erfara. Denna insikt kan vara betydelsefull för att underlätta grupperingen av fingrarna på ett ändamålsenligt sätt. Dessutom var det endast i undervisningen med grupp B som en fusion av alla de uppsatta kritiska aspekterna varierades. Att eleverna fick träna sig på att lösa uppgifter av problemlösningskaraktär där såväl delar som helhet varierades, och där dessutom varierade grupperingar av fingrarna kan förenkla avläsningen av fingertalen, kan förklara den tydligare förbättringen i denna del av testet hos grupp B.

5.4 Resultat av för- och eftertest på individnivå

I denna del presenteras och analyseras resultatet från för- och eftertest för några utvalda elever. Jag har valt att fokusera på de elever som presterade svagast i förtestet, då jag varit intresserad av deras eventuella förbättring efter undervisningen. Ett par av de elever med en relativt utvecklad talförståelse får i denna del av uppsatsen representera de elever som fått högre poäng i såväl för- som eftertest. I resultatet presenteras elever från grupp A såväl som grupp B.

5.4.1 Gustav (grupp A)

Gustav var en av de två elever som förbättrat sig mest från för- till eftertest. Gustav fick 4 poäng på förtestet och 8 poäng på eftertestet.

I **förtestet** räknade Gustav fram 9 små kuber och blundade när jag gömde dem i två koppar. Han började med att gissa att jag delat dem som 8-1, följt av gissningen 1-8. I nästa försök började han med att gissa 6 kuber i den ena. För att ta reda på hur många det då var i den andra tog han fram 6 fingrar. Han lade fram dessa som ett fingertal, utan att räkna varje finger. Sedan lade han till 3 fingrar, ett i taget, tills han nått fingertalet 9. Gustav verkade inte vara osäker på när han skulle sluta att lägga fram fler fingrar, utan verkade direkt se när antalet fingrar var 9. Han hade då räknat fram 3 fingrar och uppgav följaktligen att den andra delen måste vara 3. Gustavs fjärde gissning kom snabbt, 4 i varje kopp. Med detta svar verkade det som om Gustav fått för sig att det totalt är 8 kuber. I nästa svar utgick han ifrån 5 och lade fram ena handens fingrar. När han sedan på samma sätt som tidigare räknade fram ett finger i taget stannade han vid fingertalet 8, då han räknat 3 fingrar. Min tolkning är att Gustav har en god förståelse för hur ett tal kan delas i två delar, men att han i de två sista försöken trodde att det totala antalet är 8 istället för 9. Det verkade även som om Gustav var van vid att räkna med sina fingrar då han tog till dessa spontant och direkt kan lägga fram fingertalen 5 och 6.

I **eftertestet** angav Gustav de möjliga delarna 8-1, 5-4, 4-5 samt 7-2 snabbt och säkert utan att se på fingrarna som han gjort i förtestet. Hans sista gissning, 8-5, var dock ingen möjlig kombination. Här gick det så fort att jag misstänker att Gustav inte riktigt tänkte efter om hans sista svar var rimligt.

Fingertalet 8 är något svårare än fingertalen 5 och 6 och när Gustav i **förtestet** blev ombedd att lägga fram 8 fingrar utan att räkna efter tittade han på sina knutna händer och funderade en liten stund innan han "rullade fram" fingertalet 8. I **eftertestet** visade Gustav upp fingertalet något snabbare.

Uppgiften 3+_=8 löste Gustav i **förtestet** genom att lägga fram 3 fingrar. Han räknade sedan fram ett finger i taget tills han nått 4 fingrar på andra handen. Hans svar blev att han saknade 4 kronor. Antagligen avläste Gustav de 7 fingrarna (3 respektive 4 på varje hand) som 8. I **eftertestet** började Gustav återigen med att lägga fram 3 fingrar. Han räknade ett finger i taget på den andra handen och slutade denna gång vid rätt tidpunkt, då han såg fingertalet 8.

Gustav utgick i **förtestet** från fingertalet 10 då han ska lösa uppgiften 4+_=10. Han nickade med huvudet en gång för varje finger och sade 10. Han insåg direkt orimligheten i sitt eget svar och nickade på nytt medan han tittade på sina fingrar. Denna gång räknade han till 8 och detta blev hans svar. Då jag frågade hur han vet det svarade han att det blir 8 om man tar bort 2. Då jag påminde om att det var 4 barn som redan har en penna räknade Gustav om på nytt på sina fingrar men kom återigen fram till svaret 8. Även i **eftertestet** utgick Gustav ifrån fingertalet 10. Han vek in 4 fingrar och räknade kvarvarande fingrar genom att snudda vid dem med näsan. Han kom denna gång snabbt fram till korrekt svar.

I **förtestet** svarade Gustav direkt 1 på uppgiften 10-7=_. Då jag frågade hur han vet det tog han fram 10 fingrar och räknar med ett finger på de övriga. Hans svar blev då 4. Möjligtvis skulle felet kunna bero på att Gustav glömde att räkna med fingret han pekade på de övriga fingrarna med. I **eftertestet** utgick Gustav återigen ifrån fingertalet 10. Han räknade nu bort 7 fingrar, ett i taget, och såg svaret 3.

Gustav visade att han redan vid förtestet hade förståelse för del-del-helhetsrelationen. Efter undervisningstillfällena verkar han dock ha blivit betydligt säkrare på vilka delar som talet 9 kan delas i och hans svar kom avsevärt snabbare. För att dela helheten 9 behövde Gustav inte längre se på sina fingrar, som han gjort under förtestet. Min tolkning är att Gustav tagit ett steg i riktningen mot en *abstrakt talförståelse*. Gustav visade att han redan innan undervisningen använde sina fingrar för att räkna. Träningen under lektionerna kan dock ha bidragit till att Gustav blivit säkrare på att använda och direkt se fingertalen i problemlösningssituationer. Från att inte ha löst någon uppgift korrekt i förtestet löser han alla tre felfritt med hjälp av sina fingrar i eftertesten.

5.4.2 Henrik (grupp A)

Henrik var den elev som hade lägst poäng på förtestet. Han är även en av de två elever som förbättrats mest mellan testtillfällena. Vi förtestet hade Henrik 2 poäng, vid eftertestet 6 poäng.

Henrik funderade länge när han i **förtestet** skulle gissa möjliga sätt att dela talet 9. Hans gissningar var 8-3, 0-9, 5-4, 3-5 samt 5-2, vilket ger möjliga kombinationer i två fall av fem. Delarna som Henrik uppgav ger en helhet i intervallet 7-11. Detta kan tolkas som att Henrik befinner sig i den fas som Neuman benämner *omfång*. Henrik verkade ha en känsla för att en liten del bör kombineras med en stor del, alternativt kan två delar som är ”mittemellan” kombineras för att bilda den stora helheten 9. Henrik verkar dock inte säker på hur han ska kunna avgöra delarna storlek exakt. Henrik tittade vid några tillfällen på sina fingrar under bordet, och då han gissade delarna 4-5 räknade han fram 4 fingrar på ena handen. Antagligen såg han att dessa 4 tillsammans med de 5 på andra handen blev 9.

I **eftertestet** gissade Henrik på delarna 4-5, 6-2, 9-0, 0-9 och 8-1. Fyra kombinationer blir tillsammans 9 och den femte kombinationen ger 8. Henrik använde sig inte av fingrarna vid något tillfälle då han svarade. Hans svar kom betydligt snabbare i eftertestet jämfört med förtestet.

Då Henrik i **förtestet** ombads att lägga fram 8 fingrar utan att räkna dessa lade han långsamt upp ett finger i taget tills han kommit till det åttonde. I **eftertestet** kunde Henrik omedelbart lägga fram fingertalet 8.

På uppgiften 3+_=8 svarade Henrik i **förtestet** 4. Han räknade på fingrarna under bordet för att komma fram till detta svar. I **eftertestet** konsulterade Henrik snabbt sina fingrar synligt på bordet, men kom fram till samma felaktiga svar som i förtestet.

Henrik rörde tyst på läpparna och räknade på fingrarna under bordet då han i **förtestet** skulle lösa uppgiften 4+_=10. Svaret som han kom fram till var 9. Samma svar, 9, uppgav Henrik även i **eftertestet** då han först lagt fram 4 fingrar och sedan räknat fram ytterligare 5 fingrar, ett i taget. Han ändrade sig dock snabbt och räknade om på fingrarna. Denna gång räknade han de fem som han lagt till de 4 ursprungliga och kom fram till svaret 5. Antagligen trodde Henrik här att helheten skulle bli 9.

I **förtestet** svarade Henrik 4 på uppgiften 10-7=_. I **eftertestet** svarade Henrik 3 på samma uppgift. Han utgick från fingertalet 10, men behövde inte räkna bort de 7 fingrarna ett i taget, utan vek istället undan 3 fingrar för att forma fingertalet 7. Han kunde då se grupperingen av de 3 fingrarna och ge ett korrekt svar.

Henrik hade i förtestet svårt att ange exakta möjliga delar av talet 9, även då han hade förståelse för storleksordningen. I eftertestet hade han preciserat sina svar väsentligt och verkade ha en tydligare uppfattning om del-del-helhetsrelationen. I eftertestet kunde Henrik direkt visa upp fingertalet 8, och behövde inte räkna upp fingrarna ett i taget som i förtestet. Han demonstrerade i sista problemlösningsuppgiften att han förstått principen att direkt se på fingertalen snarare än att räkna efter. Jag tror att undervisningen om fingertal haft en positiv inverkan på Henrik, delvis av anledningen att han i förtestet verkade tro att han inte borde räkna på fingrarna, då han gömde dem under bordet. När han i eftertestet tillät sig själv att ta hjälp av fingrarna fullt ut gick det mycket bättre.

5.4.3 Therese (grupp A)

I **förtestet** gissade Therese att jag delat upp talet 9 i delarna 7-8, 9-5, 3-4, 0-1 samt 2-4. Inför den sista gissningen började Therese med att säga 10, men avbröt sig med ett litet skratt och sade ”nej, vad säger jag”. Therese hade alltså klart för sig att det är 9 små kuber hon hade i kopparna framför sig och hon förstod att det inte plötsligt kunde bli fler. I tre av gissningarna valde Therese två efterkommande tal. Detta skulle kunna bero på att hon säger det tal som hon direkt tänker på, nämligen det nästkommande talet i räkneramsan. Men det skulle också kunna tolkas som att Therese i sin talförståelse befinner sig i den fas som Neuman benämner *namn*. De tal som Therese uppgav skulle i så fall kunna representera talen kring den gräns som delar den ursprungliga helheten. Även i **eftertestet** gissade Therese på efterkommande tal i tre av fallen, nämligen 5-6, 3-4 och 7-6. Därefter gissade hon på 3-3. Då jag frågade vad det skulle vara i den andra koppen om det är 9 i den ena svarade Therese 0. Hon fick alltså lite hjälp för denna poäng. Då jag utanför redovisat resultat frågade Therese hur många som skulle finnas i den andra koppen om det är 1 kub i den ena svarar Therese 9.

I **förtestet** såg Therese en liten stund på sina knutna händer innan hon lade fram fingertalet 8. Även i **eftertestet** funderade hon en liten stund innan hon visade fingertalet 8.

I **förtestet** svarade Therese korrekt på uppgiften 3+_=8. Hon uppgav dock att hon gissat sig till svaret. I **eftertestet** kom Therese fram till samma korrekta svar. Nu uppgav hon dock att hon tänkt på sina fingrar. Hon visade hur hon grupperar sina fingrar som 3 och 5 för att bilda helheten 8.

På uppgiften 4+_=10 svarade Therese 5 i **förtestet**. I **eftertestet** frågade hon om hon får räkna. Då hon räknat fram 4 fingrar kunde hon se att det är 6 fingrar kvar, även då hon först var lite osäker på sitt svar.

För att svara på uppgiften 10-7=_ tog Therese i **förtestet** till sina fingrar. Hon frågade dock återigen först om hon får räkna. Therese utgick ifrån fingertalet 10 och drog ifrån 7 fingrar genom att räkna dessa ett i taget. Hon kunde sedan avläsa det korrekta svaret 3. I **eftertestet** svarade Therese 5 på uppgiften. Hon berättade att hon gissat svaret.

Therese verkar i gissningsleken ha en svag förståelse för del-del-helhetsrelationen. Resultatet här får mig att dra paralleller till relativt tidiga faser i Neumans kategorier av talförståelse. Men Thereses resonemang i problemlösningsuppgifterna tolkar jag som att hon ändå har en mer utvecklad talförståelse. Framförallt i eftertestets uppgift 3+_=8 visar Therese att hon kan räkna med fingertalen och gruppera fingrarna i delar. En förklaring till de orimliga gissningarna i gissningsleken skulle kunna bero på att Therese inte riktigt förstått uppgiften. En förklaring till att Therese inte förbättrat sig efter undervisningen kan vara att hon inte var närvarande hela lektionerna, utan sprang in och ut i klassrummet.

5.4.4 Maja (grupp A)

I gissningsleken gissade Maja möjliga kombinationer i fyra av fem fall i för- såväl som eftertest. Hon förstod hur hon kan dela talet 9 i två delar, men kan troligen inte direkt se alla möjliga sätt att dela och gissade därför på delarna 3-7 i förtestet samt delarna 5-2 i eftertestet.

I **förtestet** besvarade Maja uppgiften 3+_=8 med 6. ”Det blir bara så” förtydligade hon. I **eftertestet** svarade Maja korrekt på denna uppgift. Då förklarade hon att hon tänkte sig händerna framför huvudet.

Uppgiften 4+_=10 löste Maja korrekt i såväl för- som eftertest.”Jag tänker att man räknar med händerna i huvudet”, berättade hon under förtestet. På eftertestet konstaterade hon att hon bara vet att 4+6=10.

På uppgiften 10-7= svarade Maja korrekt i båda testen. Här förklarade Maja att hon under förtestet tänkt med siffror, på mattespråket.

Maja har flera olika strategier för att lösa uppgifterna. Hon använder inte sina fingrar rent fysiskt, men förklarar att hon ser sina händer framför sig. Men hon har även lärt sig vissa tabellkombinationer utantill. Min tolkning är att Maja är på god väg mot en abstrakt talförståelse.

5.4.5 Anna (grupp B)

Anna fick 8 poäng på förtestet och 9 poäng på eftertestet. Hon är en av två som fått högsta möjliga poäng i eftertestet.

Anna gissade endast möjliga kombinationer i såväl för- som eftertest i gissningsleken. Anna var en av få som direkt såg att det var 4 respektive 5 kuber i kopparna då hon vände på dessa. De flesta elever räknade dessa en i taget då de vänt på kopparna.

Uppgiften 3+_=8 löste Anna i **förtestet** genom att utgå från ”dubblan” 4+4 som hon vet blir 8.

Anna använde sig av att fingertalen då hon löste flera uppgifter. Hon rör inte på fingrarna utan ser bara på dem och grupperar dem i tanken. Anna visade att hon har flera metoder att ta till och hon väljer den som är mest lämplig utifrån ingående tal i uppgiften. Annas förmåga att gruppera fingrarna i tanken får mig att tolka hennes taluppfattning som på god väg att nå en abstrakt nivå.

5.4.6 Stina (grupp B)

Stina fick 3 poäng i såväl för- som eftertest.

I **förtestet** gissade Stina att jag gömt de 9 kuberna uppdelade i delar som 5-1, 3-7, 1-4, 9-0 och 4-3. Summorna av dessa kombinationer ligger i intervallet 5-10. Att Stina tänkte sig att talet 9 kan delas i delarna 1 och 4 tyder på att hon inte riktigt utvecklat förståelse för del-del-helhetsrelationen. Efter detta svar frågade jag Stina om hon mindes hur många kuber det var totalt. Stina kunde då uppge att det var 9. Att Stina gissar två relativt små tal som delar av ett betydligt större tal tyder på att Stina ännu inte nått Neumans fas *omfång* fullt ut. Jag kan inte finna några tecken på att Stinas svar syftar på inre gränsnamn, enligt Neumans fas *namn*. I **eftertestet** gissade Stina på delarna av de 9 kuberna i de två kopparna som 4-7, 5-2, 3-4, 5-3 samt 2-5. Ingen av kombinationerna ger summan 9, utan summorna av delarna ligger i intervallet 7-11. Dessa svar är mer i linje med Neumans fas *omfång*. Stina kombinerar ett litet tal med ett större tal till något som skulle kunna motsvara den stora helheten 9.

Då Stina ombads att lägga fram 8 fingrar i **förtestet** lade hon först fram 7 fingrar. Hon såg dock snart att det inte stämde och korrigerade sig själv. I **eftertestet** visade Stina upp fingertalet 8 omedelbart.

I **förtestet** löste Stina uppgiften 3+_=8 korrekt. Då jag frågade henne hur hon tänkt förklarade Stina att hon brukar se saker i luften som hon kan räkna. Även i **eftertestet** gav Stina rätt svar på denna uppgift. Hon kunde dock inte förklara närmare hur hon kom fram till lösningen.

Uppgiften 4+_=10 besvarade Stina med 7 i **förtestet**. Hon berättade hur hon ser siffror och plustecken i huvudet när hon räknar. I **eftertestet** svarade Stina 9 på samma uppgift.

På uppgiften 10-7=_ svarade Stina 4 i **förtestet**. Återigen förklarade hon att hon ser svaret i huvudet. I **eftertestet** svarade Stina korrekt på denna uppgift. Trots upprepade frågor kunde jag inte få Stina att tydligare förklara hur hon tänker när hon löser uppgiften.

6 Diskussion

Inom variationsteorin särskiljs det *intentionella*, det *iscensatta* och det *erfarna* lärandeobjektet (Wernberg, 2009). I planeringen av lektioner har jag i studien utgått från tre aspekter som jag antog var kritiska för elevgruppen för att förstå och kunna använda fingertalen, denna studies *intentionella* lärandeobjekt. Analysen av de genomförda lektionerna visade att de två kritiska aspekter som innebar att eleverna skulle lära sig att direkt se fingertalen samt att se del-del-helhetsrelationen i fingertalen simultant varit möjliga att urskilja genom variation av del, helhet och fingertalen 1-10 i båda elevgrupperna. Den tredje kritiska aspekten, att delarna kan byta plats med varandra, var dock bara möjlig att urskilja genom variation av hur fingrarna grupperades i undervisningen för grupp B. Dessutom tillkom en möjlig kritisk aspekt inför lektionsserie B, då jag tillsammans med eleverna varierade sätt som föremål kan grupperas på för att skapa möjlighet att uppleva hur gruppering och mönster kan användas för att direkt kunna se antal. Det *iscensatta* lärandeobjektet skiljer sig alltså såväl mellan grupp A och B som gentemot det *intentionella* lärandeobjektet.

Olika elever tar dock till sig samma undervisning på olika sätt (Wernberg, 2009). Att ett mönster av variation presenterats på en lektion innebär inte att eleverna nödvändigtvis uppfattat fenomenet enligt lärarens intentioner. Studiens *erfarna* lärandeobjekt kan diskuteras utifrån elevernas resultat i för- och eftertester. Resultaten i studiens tester kan inte påvisa några större skillnader mellan grupperna A och B, trots att det *iscensatta* lärandeobjektet innefattade olika variationsmönster för de båda grupperna. I grupp A förbättrade eleverna främst sin förmåga att direkt forma fingertalet 8. Färdighetsträning för denna förmåga iscensattes i undervisningen för såväl grupp A som B, men i grupp B löste samtliga elever denna uppgift redan i förtestet. Grupp B visar däremot en något större förbättring rörande problemlösningsuppgifter. Här kan den undervisning där de tre ursprungliga kritiska aspekterna varierades i en fusion i en uppgift av problemlösningsslag, vilken endast iscensattes under lektion B2, påverkat resultatet.

En anledning till att resultaten inte förbättrades särskilt mycket för de flesta elever mellan för- och eftertest var att relativt många fick höga poäng redan i förtestet. Neuman (1993) beskriver fingertalen som ett stadium på väg mot en abstrakt talförståelse. Enligt min tolkning hade flera av eleverna redan utvecklat en abstrakt talförståelse. För dessa elever kan undervisningen möjligtvis ha bidragit till att visualisera delar och helheter på ett tydligt sätt, men i praktiken var kanske detta något som dessa elever redan var bekanta med. Exempelvis använde sig Maja och Lina pliktskyldigt av fingertalen då de löste de första uppgifterna på stencilen, se bilaga 3. De förstod hur man kan använda sig av fingertalen, men då de redan verkar utvecklat en abstrakt talförståelse övergick de snart till att lösa uppgifterna i huvudet.

De flesta exempel på genomförda learning studies som jag läst om har ett väl avgränsat ämne eller begrepp som lärandeobjekt. Det kan exempelvis handla om att förstå vad densitet eller negativa tal innebär (Maunula, Magnusson & Echevarría (2011). I denna studie utgör förståelse för och användandet av fingertal lärandeobjektet. Lo beskriver hur lärandeobjektet även innebär de förmågor som det specifika lärandet kan bidra till att utveckla på lång sikt (Lo, 2012). I detta fall är förhoppningen att eleverna genom att använda sig av fingertalen på sikt kan utveckla en god talförståelse och en förståelse för relationen mellan delar och helhet. I praktiken kan man dock se fingertalen som en metod för att urskilja del-del-helhetsrelationen, snarare än ett avgränsat ämne eller begrepp. Att räkna med fingertal kan vara ett sätt att lösa en uppgift, men det finns även andra metoder. Detta innebär vissa problem i uppskattningen av vad eleverna lärt sig. Uppgifterna i för- och eftertest kan lösas med fingertal, men eleverna kan även lösa uppgifterna korrekt med helt andra metoder. Som diskuterats skulle fingertalen kunna innebära ett steg bakåt för elever som redan utvecklat en abstrakt talförståelse och det är föga troligt att dessa elever skulle använda sig av fingertalen för att lösa en uppgift. En konsekvens av att lärandeobjektet har karaktär av metod blir att sambanden mellan undervisning och resultatet i för- och eftertest blir vagare. Elever kan få högsta poäng på testerna utan att beröra metoden som undervisningen behandlade.

Skillnaderna mellan för- och eftertest var alltså i denna studie begränsade. Två elever stack dock ut, Gustav och Henrik, då de förbättrade sitt resultat avsevärt efter undervisningen. Dessa två elever använde sina fingrar även i förtestet, men verkade i eftertestet ha blivit säkrare på hur de kan hantera fingertalen. Henrik demonstrerar dessutom i eftertestet att han inte behöver räkna sina fingrar ett i taget, utan att han direkt kan se delar och helhet på sina fingrar. Jag tolkar därför dessa förbättringar som ett resultat av undervisningen. Gustav och Henrik var två av de svagaste eleverna i förtestet. Att det är just de som står för den största förbättringen är i linje med Los (2012) beskrivning av 29 genomförda learning studies i Hong Kong. Även här återfinns den största förbättringen hos de i förtestet svagare eleverna, och spridningen mellan elevernas resultat har i eftertestet minskat. Jag ser det som en klar styrka hos arbetssättet med learning study om de elever som är i störst behov av vägledning gynnas mest av undervisningen där kritiska aspekter belyses med hjälp av variation.

Om learning study kan vara ett arbetssätt som gynnar de svagare eleverna så tyder resultaten i denna studie på att fingertalen kan vara en metod som gynnar desamma. Enligt Neuman (1993) har många elever redan utvecklat en grundläggande talförståelse på egen hand. Det är framförallt de elever som inte gjort dessa upptäckter spontant som kan ha störst nytta av undervisning med fingertalen.

De tre mesta grundläggande av Neumans (1993) kategorier över talförståelse, *rörelse, delar utan helhet* och *namn*, fanns inte representerade i mitt material. Möjligtvis använde sig Therese av någon slags namngivning av de små kuberna i gissningsleken, men hennes problemlösningsförmåga tydde på en mer utvecklad talförståelse. En förklaring till detta kan givetvis vara att mitt urval är relativt begränsat. I Neumans studie ingick ett större antal barn. Neumans studerade dessutom barnen direkt vid skolstarten, medan eleverna i denna studie gått en halv termin i skolan. Neumans studie ägde rum i slutet av 80-talet. Den pedagogiska verksamheten i förskolan har förändrats mycket sedan dess. Numera finns även för förskolan en läroplan som specificerar mål att sträva efter inom matematik. Man kan tänka sig att barn kommer mer förberedda och med en mer utvecklade talförståelse till skolan idag jämfört med den tidpunkten för Neumans studie.

För att lösa subtraktionsuppgifterna på stencilen, bilaga 3, räknade Mikael, en av pojkarna i grupp A, bakåt. Han rabblade räkneramsan bakåt, samtidigt som han markerade stegen han räknat bakåt genom att veckla upp ett finger. Detta sätt att använda fingrarna som representant för subtrahenden är enligt Fuson (1992) ett naturligt steg i barns utveckling av talförståelse i. Fusons fjärde nivå, *”numerable chain”* (”numerisk sekvens”, min översättning) karaktäriseras av just denna förmåga. Neuman (1993) däremot menar att detta sätt att dubbelräkna är en metod som kan leda till matematiksvårigheter. Hennes poäng är att med allt för stort fokus på själva metoden, att mekaniskt lösa matematikuppgifter, går strävan efter att se en lösning, och rimligheten i denna lätt förlorad. Fuson och Neuman är överens om att dubbelräkning är ett stadium, snarare än ett slutmål. Men då Fuson menar att dubbelräkning är ett naturligt steg på väg mot en abstrakt talförståelse hävdar Neuman att metoden kan vara en återvändsgränd. I min studie har jag endast observerat dubbelräkning hos en elev, Mikael. Mikael fick 7 poäng i såväl för- som eftertest. En anledning till att Mikael inte förbättrade sitt resultat skulle kunna vara hans motstånd till att pröva att räkna med fingertalen. Han tyckte att hans invanda dubbelräknande var smidigare. Dubbelräkning har en naturlig begränsning då strategin blir mycket opraktisk vid räkning med stora tal. Det skulle vara intressant att följa Mikaels talförståelse och se vilka strategier han tar till då talområdet som operationerna rör sig i växer.

För att kunna vända den negativa utvecklingen av de svenska elevernas resultat i OECD:s PISA-mätningar tror jag att lärare behöver samarbeta för att utveckla sin undervisning. Learning study kan vara ett sätt att öka det kollegiala samarbetet och skapa grogrund för en kontinuerlig kompetensutveckling. Genom att tillsammans finna kritiska aspekter och sätt att synliggöra dessa för eleverna inom ett begränsat lärandeobjekt kan förmågan att undervisa på ett sätt som möjliggör att elever kan erfara det som läraren haft som intention att iscensätta utvecklas på ett mer generellt plan. I denna studie har jag inte haft fördelen att planera och utvärdera undervisningen tillsammans med en annan lärarstudent, vilken kunde ha varit fördelaktigt. Jag har dock haft möjlighet att diskutera och utveckla idéer i samråd med klassföreståndaren i klassen där studien genomförts såväl som med min handledare, Angelika Kullberg.

En ytterligare potentiell vinst med learning study som arbetssätt är att uppföljning av undervisningens resultat framhålls. Min erfarenhet från den verksamhetsförlagda delen av lärarutbildningen är att uppföljning av undervisningen är något som ofta verkar prioriteras bort. I en stressig vardag ligger fokus på planering, snarare än utvärdering av elevernas kunskaper. Jag tror att en systematisk utvärdering är grunden för allt utvecklingsarbete, vilket kan belysas av arbetsgången i en learning study.

Att utveckla och förbättra sin undervisning, exempelvis genom kollegialt samarbete såsom i learning studies, är givetvis viktigt för alla yrkesverksamma lärare. I denna studie var de två av de elever som presterat svagast på förtestet som förbättrade sitt resultat mest. Att undervisningen av fingertal verkar vara ett arbetssätt som gynnar de kunskapsmässigt svagare eleverna stärker studiens relevans för blivande och verksamma lärare.

7 Referenser

Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H., Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan: konsten att* studera samhälle, individ och marknad. (3., [rev.] uppl.) Stockholm: Norstedts juridik.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. I D. Grouws (Red.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan

Gelman, R. & Galistel, C. (1978). *The Children's Understanding of Number*. London: Harvard UP i Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare*. (1. Uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned: professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Gothenburg studies in Educational Sciences 293. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lo, M. L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning.* Gothenburg studies in Educational Sciences 323. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Maunula, T. & Magnusson, J. (2011a). Variationsteorin ur ett undervisningsperspektiv. I T. Maunula, J. Magnusson & C. Echevarría (Red.), *Learning study: undervisning gör skillnad*. (sid. 35-50). (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Maunula, T. & Magnusson, J. (2011b). En studie om densitet. I T. Maunula, J. Magnusson & C. Echevarría (Red.), *Learning study: undervisning gör skillnad*. (sid. 35-50). (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Maunula, T. & Magnusson, J. & Echevarría, C. (2011). *Learning study: undervisning gör skillnad*. (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills: a phenomenographic approach*. Gothenburg studies in Educational Sciences 62. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Neuman, D. (1993). *Räknefärdighetens rötter*. (uppl. 1.3) Stockholm: Utbildningsförlaget.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Göteborg studies in Educational Sciences 129. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket. Från http://www.skolverket.se/publikationer?id=2575

Skolverket (2013). *PISA 2012 - 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap.* Stockholm: Skolverket. Från http://www.skolverket.se/publikationer?id=3126

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt. Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Högskolan Kristianstad, Sektionen för lärarutbildningen. Från http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:278517/FULLTEXT01

Samtycke målsman **BILAGA 1**

Anhållan om tillstånd för att ert barn kan delta i en undersökning inom ramen för ett examensarbete vid lärarutbildningen vid Göteborgs universitet

Jag heter Karin Kvarnero och läser den sista terminen på lärarutbildningen vid Göteborgs Universitet. Som de flesta av er säkert vet gör jag min slutpraktik i ert barns klass. Inom ramen för mitt examensarbete planerar jag att utföra en undersökning i klassen med syfte att studera barns taluppfattning. Jag kommer att hålla ett antal lektioner med avsikt att synliggöra relationen mellan tals helhet och delar, baserat på forskaren Dagmar Neumans teorier. Barnen kommer även att få utföra ett förtest och ett eftertest som en utvärdering av lektionerna. Såväl lektioner som för- och eftertest kommer att videofilmas för att underlätta analysarbetet. Filmerna kommer inte att visas upp, publiceras eller på annat sätt finnas tillgängliga. Undersökningen kommer att genomföras under perioden vecka 47-50.

Jag vill med detta brev be er som vårdnadshavare om tillåtelse att ert barn deltar i denna studie. Alla elever kommer att garanteras anonymitet. Inte heller skolan kommer att nämnas vid namn eller på annat sätt kunna vara möjlig att urskilja i undersökningen. I enlighet med de etiska regler som gäller är deltagandet helt frivilligt. Ert barn har rättigheten att intill den dag arbetet är publicerat, när som helst välja att avbryta deltagandet. Materialet behandlas strikt konfidentiellt och kommer inte att finnas tillgängligt för annan forskning eller bearbetning.

Vad vi behöver från er är att ni som elevens vårdnadshavare skriver under detta brev och så snart

som möjligt skickar det med eleven tillbaka till skolan. Sätt således ett kryss i den ruta som gäller för er del:

☐ Som vårdnadshavare **ger jag tillstånd** att mitt barn deltar i undersökningen

☐ Som vårdnadshavare **ger jag inte tillstånd** att mitt barn deltar i undersökningen

Datum ……………………………………………..

…………………………………………………….. ………………………………………….

vårdnadshavares underskrift/er elevens namn

Har ni ytterligare frågor ber jag er kontakta mig på nedanstående adress eller telefonnummer:

Med vänliga hälsningar

……………………………………………………………………………………………...

Karin Kvarnero

Telefon: xxxxx

E-post: xxxxx

Handledare för undersökningen är universitetslektor Angelika Kullberg, Göteborgs Universitet, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession.

Kursansvarig lärare är universitetslektor Daniel Seldén, Göteborgs universitet, Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap, telefon xxxxx.

BILAGA 2

För- och eftertest

- En gissningslek inleddes med att barnen fick räkna fram 9 små träkuber. Därefter ombads barnen att blunda då jag gömde kuberna i två koppar. Barnen fick fem chanser att gissa hur många kuber som fanns under varje kopp. Syftet med övningen var att undersöka om barnen kunde se möjligheterna för hur talet 9 kan delas i två delar (1 poäng per kombination av delar som ger helheten 9, maximalt 5 poäng)

- Därefter ombads eleverna att, utan att räkna efter, lägga fram 8 fingrar. Fingertalet 8 var det fingertal som verkade svårast för eleverna i Neumans (1993) studie att lägga upp. Syftet med uppgiften var att se hur vana eleverna verkade vara att använda fingrarna för att räkna, och dessutom se om de kan använda fingertalen utan att räkna fingrarna ett i taget (uppvisat fingertal ger 1 poäng)

- Testet avslutades med tre uppgifter av typen öppna utsagor och subtraktion. Neuman (1993) menar att dessa uppgifter är särskilt fördelaktiga att lösa med hjälp av fingertal eftersom helheten uppges i uppgiften. Dessutom upplever många elever att subtraktion är svårare än addition (Neuman, 1993). Uppgifterna formulerades som vardagliga och elevnära problemformuleringar (varje korrekt svar ger 1 poäng, maximalt 3 poäng).

    - Om du har 3 kronor och du vill köpa en liten leksak som koster 8 kronor, räcker dina pengar då? (Nej!) Hur många kronor måste du ha till för att dina pengar ska räcka? (3+_=8)

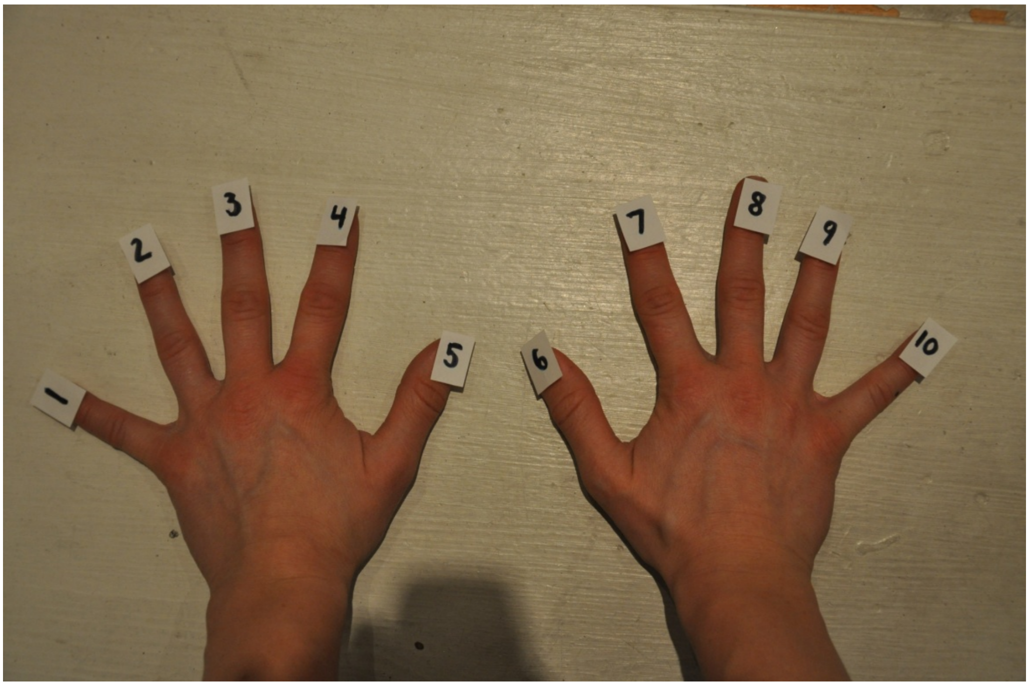
    - Om fröken har 4 pennor men det kommer in 10 barn i klassrummet, hur många pennor till måste hon hämta för att barnen ska få var sin penna? (4+_=10)

    - Om du har 10 godisar men tappar 7, hur många har du då kvar? (10-7=_ Intresserad av att se om de kan räkna bakåt så långt)

Stencil – öppna utsagor och subtraktionsuppgifter **BILAGA 3**

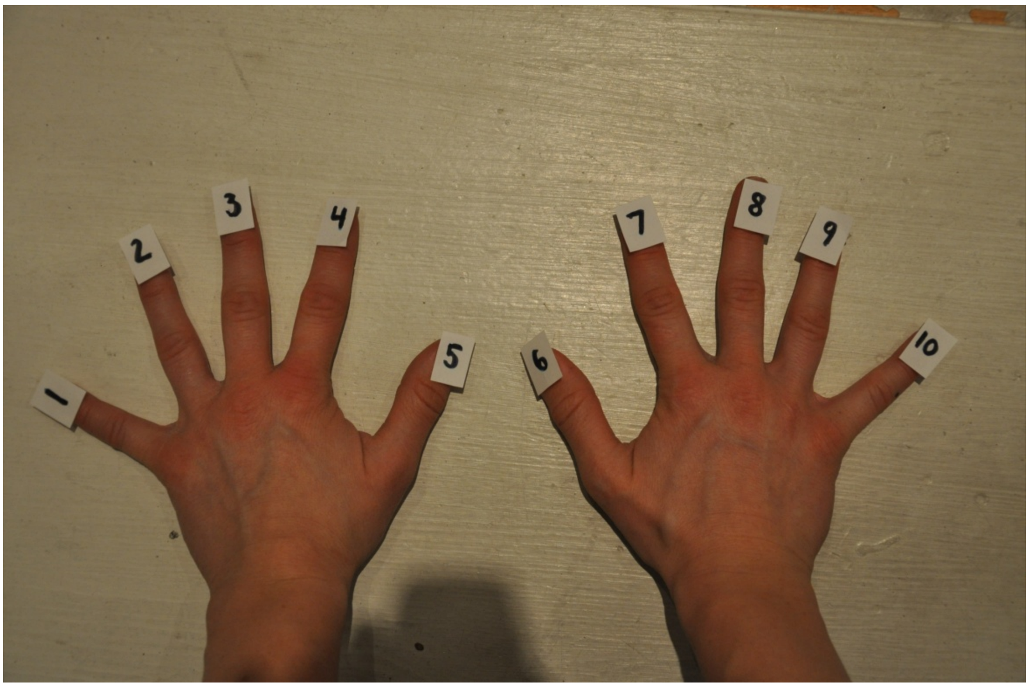
7-2=___	8-1=___	10-8=___
7-5=___	8-5=___	10-4=___
7-4=___	8-6=___	10-3=___

9-4=___	6-3=___	5-4=___
9-7=___	6-1=___	5-2=___
9-2=___	6-4=___	5-0=___



5+___=8	4+___=7	7+___=10
5+___=6	4+___=4	7+___=8
5+___=10	4+___=8	7+___=9

6+___=7	8+___=8	9+___=9
6+___=10	8+___=10	9+___=10
6+___=8	8+___=9	



BILAGA 4

Problemlösningsuppgifter, lektion B2

- Kalle och Stina har tillsammans 8 äpplen. Kalle har 6 äpplen. Hur många äpplen har Stina? (6+_=8)

- Kalle och Stina har tillsammans 10 äpplen. Kalle har 4 äpplen. Hur många äpplen har Stina? (4+_=10)

- Kalle och Stina har tillsammans 7 äpplen. Kalle har 2 äpplen. Hur många äpplen har Stina? (2+_=7)

- Sara har 8 päron. Hon ger 2 päron till sin lillasyster. Hur många päron har Sara kvar? (8-2=_)

- Sara har 5 päron. Hon ger 4 päron till sin lillasyster. Hur många päron har Sara kvar? (5-1=_)

- Sara har 9 päron. Hon ger 4 päron till sin lillasyster. Hur många päron har Sara kvar? (9-4=_)