GÖTEBORGS UNIVERSITET

y måste bero av x

– gymnasieelevers förståelse av det matematiska begreppet funktion

Mikael Borke

Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	Magisteruppsats i ämnesdidaktik
Nivå:	Avancerad nivå
Termin/år	VT2014
Handledare:	Thomas Lingefjärd
Examinator	Christian Bennet
Rapport nr:	VT14-IDPP-01-PDA461

Abstract

Essay:	15 ECTS credits
Program and/or course:	PDA361/PDA362/PDA461/PDA462
Level:	Advanced level
Semester/year:	Vt2014
Supervisor:	Thomas Lingefjärd
Examiner:	Christian Bennet
Report No.:	VT14-IDPP-01-PDA461
Key words:	function, concept definition, concept image, operational conception, structural conception, upper secondary school

---

Objective: The aim of the study is to describe pupils' understanding of the mathematical concept of function. How do pupils define the concept of function? What images of the concept of function evoke when they solve tasks, which involve identifying and constructing functions?

Theory: A student's thinking about a mathematical concept depends on more than just the formal definition of the concept; therefore Tall and Vinner introduce the term concept image to describe the role cognitive structures play when students learn about concepts. The cognitive structure includes all mental images, associated properties and processes that an individual associates with a given concept. According to Sfard, an individual's understanding of mathematical concepts may have different character: an operational conception, where a concept is conceived as a process and a structural conception, where the given concept is conceived as an object, that is, as a whole.

Method: 16 pupils at the Science Program at two different upper secondary schools in Sweden answered a questionnaire on the mathematical concept of function. In addition, five of the 16 pupils in the survey group were interviewed on their understanding of the concept of function. Tall and Vinner's theory of concept definition and concept image and Sfards theory of operational and structural understanding of concepts, were used to analyse the data.

Results: Four categories of the pupils' definitions of the concept of function were identified; Correspondence, Dependence Relation, Rule and the Graphical Representation. Every second pupil in the survey group mistakenly believes that the equation $y = 4$ does not represent a function, with the justification that the value of y is independent of the value of the independent variable. A majority of the pupils in the survey group do not specify the condition that a function has to assign a unique value to every number in its domain. One consequence of this is that many pupils falsely believe that the equation of a circle represents a function, even though it does not meet the condition of a unique functional value. Some pupils in the survey group evoked a concept image of function involving one or several of the following aspects: The graph of a function has to be connected. Piecewise defined functions are rejected. A function must be represented by a single formula. Each of these images is a potential conflict factor, which is at variance with the formal definition of the concept of function.

Förord

Först och främst vill jag tacka de elever, som har gjort det möjligt för mig att genomföra denna studie, genom att besvara min enkät eller delta i intervju. Jag vill också tacka min handledare Thomas Lingefjärd för att han har guidat mig genom uppsatsskrivandet samt för alla värdefulla synpunkter på mina texter och blixtsnabba svar på mina frågor via e-post. Dessutom vill jag tacka Johanna Pejlare, min före detta kollega på Högskolan i Borås, för att hon har gett mig inspiration att studera matematikdidaktik och att skriva denna uppsats. Slutligen vill jag tacka min mor, Anita Borke, som har korrekturläst min uppsats.

Innehållsförteckning

Inledning

Hösten 2011 infördes gymnasiereformen Gy 2011 i svensk gymnasieskola. Att elever ges möjlighet att utveckla sin förståelse av matematiska begrepp har en framträdande plats i styrdokumenten för Gy 2011 (Skolverket 2013). Jag har i min roll som gymnasielärare i matematik intresserat mig för de svårigheter som vissa gymnasieelever uppvisar i samband med förståelse av centrala begrepp och samband mellan begrepp. Begreppet funktion är centralt i gymnasieskolans matematikundervisning, vilket bekräftas av ett stort antal moment, som berör begreppet funktion i ämnesplanen för matematik. Funktioner kan användas, som matematiska modeller, för att studera kvantitativa samband mellan storheter, som varierar, till exempel tillväxt av bakterier i en kultur över tid.

Enligt min erfarenhet, som gymnasielärare i matematik, kan vissa elevers svårigheter med begreppen gränsvärde och derivata förklaras med de svårigheter som dessa elever har med begreppet funktion. Derivatan av en funktion definieras som gränsvärdet av en differenskvot. Till exempel blir det naturligtvis svårt att bestämma derivatan av en funktion med hjälp av en differenskvot om man inte kan tolka symbolen $f(x)$ som funktionsvärdet av funktionen f i punkten x. En god förståelse av begreppet funktion ger förutsättningar att förstå de närliggande begreppen gränsvärde och derivata av en funktion.

Gymnasielever kan uttrycka att begreppet funktion, som introduceras på gymnasiet i kursen matematik 1c, är abstrakt och svårt att förstå. Jag minns ett samtal med en elev som fick mig att få upp ögonen för de svårigheter vissa elever kan ha med begreppet funktion. Jag hade haft en genomgång om polynomfunktioner av grad två för en grupp gymnasieelever som studerade kursen matematik 2c. Vi övade på att rita grafer till andragradsfunktioner, när en av mina elever riktar sig mot mig och utbrister med frustration i rösten: *Jag ser en ekvation och en graf, men var är funktionen som du talar om?* Jag svarade att funktionen är sambandet mellan variablerna samt att den kan åskådliggöras med en ekvation eller med en graf. Ekvationen är då en algebraisk representation och grafen en geometrisk representation av funktionen.

Mot bakgrund av ovanstående, genomförde jag under hösten 2013 föreliggande studie om elevers förståelse av begreppet funktion. Min studie avgränsas till elever på gymnasieskolans Naturvetenskapsprogram, eftersom det är den mest matematikintensiva utbildningen i svensk gymnasieskola som följer den gymnasiereform som infördes 2011.

Med funktion menas i föreliggande studie en reellvärd funktion av en reell variabel, det vill säga en funktions definitions- och värdemängd är delmängder av de reella talen. Reella tal kan representeras av punkter på en linje, en så kallad tallinje. Enligt fullständighetsaxiomet svarar mot varje punkt på tallinjen ett reellt tal. Delar av den matematiska terminologi som används i samband med begreppet funktion i föreliggande uppsats beskrivs i en bilaga[1].

[1] Se bilaga 1 Matematisk terminologi i samband med begreppet funktion

Ämnesplanen för gymnasieskolans matematik

Skolverket betonar, i ämnesplanen för gymnasieskolans matematik, att undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar sin förståelse av matematikens begrepp och metoder. Skolverket lyfter fram begreppsförmåga som en av de sju förmågor som beskrivs i ämnesplanen:

> Att beskriva innebörden av ett begrepp och samband mellan begrepp innefattar att kunna redogöra för definitioner, egenskaper och relationer hos begrepp och samband mellan begrepp. Ett begrepps innebörd, syfte och mening ges framförallt genom *hur* begreppen används i olika sammanhang inom matematiken eller i tillämpningssituationer (Skolverket, 2013).

För att man ska kunna kommunicera om ett begrepp behöver det representeras med olika uttrycksformer. Begreppsförmåga innebär att veta hur olika uttrycksformer kan användas för olika syften. Dessutom betonar Skolverket förmågan att hantera procedurer, lösa matematiska problem samt att utforma, använda och utvärdera matematiska modeller. Vidare betonas förmågan att följa, föra och bedöma matematiska resonemang samt förmågan att kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling. Slutligen betonas matematikens betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang (Skolverket, 2013).

På Naturvetenskapsprogrammets inriktning Naturvetenskap är kurserna matematik 1c, 2c, 3c och 4 obligatoriska. Kurserna ger 100 gymnasiepoäng vardera. Skolverket anger de moment, som ska behandlas i undervisningen för respektive kurs i centralt innehåll i ämnesplanen. I följande avsnitt listar jag de delar av det centrala innehållet, som har anknytning till begreppet funktion:

Kursen matematik 1c

- Metoder för beräkningar inom vardagslivet och karaktärsämnena med reella tal skrivna på olika former, inklusive potenser med reella exponenter samt strategier för användning av digitala verktyg.
- Generalisering av aritmetikens räknelagar till att hantera algebraiska uttryck.
- Algebraiska och grafiska metoder för att lösa linjära ekvationer och olikheter samt potensekvationer.
- Begreppen funktion, definitions- och värdemängd samt egenskaper hos linjära funktioner samt potens- och exponentialfunktioner.
- Representationer av funktioner i form av ord, funktionsuttryck, tabeller och grafer.
- Skillnader mellan begreppen ekvation, olikhet, algebraiskt uttryck och funktion.

Kursen matematik 2c

- Egenskaper hos andragradsfunktioner.
- Konstruktion av grafer till funktioner samt bestämning av funktionsvärde och nollställe, med och utan digitala verktyg.

Kursen matematik 3c

- Begreppet absolutbelopp.
- Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar för hantering av dessa begrepp.

- Egenskaper hos cirkelns ekvation […].
- Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
- Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
- Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
- Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.

Kursen matematik 4

- Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
- Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
- Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Syfte

Studiens syfte är att studera elevers förståelse av det matematiska begreppet funktion.

Problemställningar

1. Hur definierar elever begreppet funktion?
2. Vilka bilder av begreppet funktion visar elever när de löser uppgifter, som handlar om att identifiera och konstruera funktioner?

Teoriram

En tillbakablick på funktionsbegreppets historiska utveckling

Sfard hävdar att det finns en parallell mellan de svårigheter som en individ möter när hen ska lära sig nya matematiska begrepp och de svårigheter som har utmanat generationer av matematiker i det förflutna, när de försökte formulera en definition av det aktuella matematiska begreppet (Sfard, 1995, s. 15-16). Därför kan det finnas skäl att göra en tillbakablick på funktionsbegreppets historiska utveckling under de senaste 300 åren.

Kleiner beskriver funktionsbegreppets historiska utveckling som ett växelspel mellan tre mentala bilder av begreppet: Den geometriska bilden, där en funktion uttrycks med en kurva, den algebraiska bilden, där en funktion representeras med en formel samt den logiska definitionen av begreppet funktion, som ett samband mellan variabler. Av fundamental betydelse för uppkomsten av funktionsbegreppet nämner Kleiner följande: Utvidgningen av talsystemet till att omfatta reella tal; Uppkomsten av den symboliska algebran; Naturvetares studier av kroppar i rörelse, till exempel Keplers beräkningar av planetbanorna och Galileis studier av fallande kroppar; sammansmältningen av algebra och geometri. Funktioner användes som matematiska modeller för olika tillämpade problem, till exempel problemet med att bestämma den funktion, som beskriver formen av en vibrerande elastisk sträng.

Kleiner sammanfattar några av de olika definitioner av begreppet funktion, som matematiker har använt under de senaste 300 åren. Den schweiziske matematikern Euler (1707-1783) definierade begreppet funktion som ett ”analytiskt uttryck” år 1748:

> En funktion av en variabel storhet är ett analytiskt uttryck som, på något sätt, är sammansatt av denna variabla storhet och tal eller konstanta storheter
>
> (Kleiner, 1989, s. 3, min översättning).

Euler menade att ett ”analytiskt uttryck” får innehålla de fyra räkneoperationerna; addition, subtraktion, multiplikation samt division, rötter, exponenter, logaritmer, trigonometriska funktioner, derivator och integraler.

Enligt Sfard föreslog Euler en annan definition av begreppet funktion år 1755:

> En storhet ska kallas en funktion bara om den beror av en annan storhet på ett sådant sätt att om den senare storheten förändras så ska också den förra förändras (Sfard, 1991, s. 15).

Den tyske matematikern Dirichlet (1805-1859) ville definiera begreppet funktion som ett godtyckligt samband mellan variabler, som inte nödvändigtvis måste etableras med ett analytiskt uttryck eller en kurva. Han formulerade följande definition av begreppet funktion år 1829:

> y är en funktion av en variabel x, definierad på intervallet $a < x < b$, om det till varje värde på variabeln x i detta intervall motsvarar ett bestämt värde på variabeln y. Det är oväsentligt på vilket sätt denna motsvarighet etableras.
>
> (Kleiner, 1989, s. 10, min översättning)

Dirichlet definition förutsätter att funktionens definitionsmängd är en delmängd av de reella talen.

Den moderna definitionen av funktion formuleras med hjälp av mängdteori; en funktion är ett samband mellan två mängder, som till varje element i den första mängden ordnar ett entydigt bestämt element i den andra mängden. Bourbaki[2] formulerade en mängdteoretisk definition av ett generellt funktionsbegrepp som gäller för två godtyckliga mängder E och F, som inte nödvändigtvis är delmängder av de reella talen.

> Låt E och F vara två mängder, som kan vara lika eller olika. En relation mellan ett variabelt element *x* i E och ett variabelt element *y* i F kallas ett funktionssamband i *y* om det för alla *x* i E finns ett unikt *y* i F som är i den givna relationen med *x*. Vi ger namnet funktion till den operation som på detta sätt associerar med varje element *x* i E det element *y* i F som är i den givna relationen med *x*; *y* kallas värdet av funktionen i elementet *x* och funktionen sägs vara bestämd av det givna funktionssambandet. Två ekvivalenta funktionssamband bestämmer samma funktion. (Kleiner, 1989, s. 299, min översättning)

Begreppsdefinition och begreppsbild

Tall och Vinner introducerar termen begreppsbild för ett givet matematiskt begrepp för att beskriva den roll, som den lärandes kognitiva strukturer spelar för lärande om matematiska begrepp. En individs begreppsbild består av den samlade kognitiva struktur i individens medvetande som associeras med ett begrepp. Strukturen omfattar alla mentala bilder, associerade egenskaper och processer som en individ associerar med ett begrepp.

Definitionen av ett begrepp är de termer som används för att specificera begreppet. En individ kan konstruera en personlig definition av begreppet, som kan avvika från den formella definition, som accepteras i den matematiska gemenskapen i stort. Den personlig definition är en del av individens begreppsbild.

En individs frammanade begreppsbild är den del av begreppsbilden som är aktiverad vid ett tillfälle. Vid olika tidpunkter kan olika delbilder frammanas, som verkar komma i konflikt med varandra. Om olika delar av begreppsbilden frammanas *samtidigt* kan det uppstå en konflikt i individens kognitiva struktur. Tall och Vinner kallar den del av begreppsbilden, som kan komma i konflikt med en annan del av begreppsbilden, för en potentiell konfliktfaktor. En allvarlig typ av potentiell konfliktfaktor är när en del av begreppsbilden är i motsatsställning till den formella definitionen av begreppet. En sådan konfliktfaktor kan hindra lärandet av en formell teori.

Tall och Vinner exemplifierar sin teori med begreppet funktion och gränsvärdesbegreppet. De formulerar följande definition av funktion, som liknar Bourbakis definition från år 1939:

> En funktion är en relation mellan två mängder A och B, där varje element i A är relaterad till precis ett element i B (Tall & Vinner, 1981, s. 153, min översättning).

Individer som har studerat funktioner kanske inte kommer ihåg definitionen av begreppet. Individens begreppsbild kan innehålla andra aspekter av begreppet än definitionen, till exempel att en funktion måste kunna representeras med en regel, en formel, en graf eller med en värdetabell. En funktion kan också uppfattas som en process, som avbildar ett element i

[2] Bourbaki är en kollektiv pseudonym för en grupp matematiker som var verksamma i Frankrike. Bourbakis definition formulerades år 1939.

mängden A till ett element i mängden B. Ingen eller alla ovan nämnda aspekter kan finnas i individens begreppsbild. En lärare kan ge den formella definitionen av begreppet funktion och arbeta med det allmänna funktionsbegreppet en kortare tidsperiod för att sedan ägna en längre tid åt att enbart ge exempel på funktioner som är givna med formler. I ett sådant fall kan eleven utveckla en begränsad begreppsbild. Eleven kan arbeta med denna begränsade begreppsbild, som kan vara tillräcklig i ett begränsat sammanhang. När eleven i framtiden möter funktioner, som är definierade utanför detta begränsade sammanhang, kan det visa sig att begreppsbilden är otillräcklig (Tall & Vinner, 1981, s. 151-154).

Tall diskuterar empirisk forskning om universitets- och collegestudenters lärande om bland annat begreppet funktion i samband med den reform, som på engelska kallas ”New Math”, som var ny på 1960-talet, men som senare övergavs[3]. Tall beskriver att kursplaneförfattare, i samband med reformen, gjorde ett modigt försök att bygga begreppet funktion på en formell definition, som formulerades med hjälp av mängdteori. Tall menar att studenter har mycket svårt att ta till sig en sådan formell mängdteoretisk definition. Även om man ger studenter en sådan formell definition, så kommer studenters erfarenhet av exempel på funktioner, som är givna med en formel, att få många studenter att utveckla en begreppsbild, där en funktion måste vara given med en formel. Ett problem med reformen ”New Math”, menar Tall, är att studenters tänkande om matematiska begrepp beror av mer än bara de termer som används i begreppets definition. Studenters begreppsbild påverkas också av de matematiska erfarenheter som studenter gör innan de möter begreppets formella definition. I samband med det första mötet med en begreppsdefinition är det nästan oundvikligt att studenter bara möter ett begränsat antal exempel på det aktuella begreppet, som påverkar deras begreppsbilder på ett sätt som kan komma att orsaka framtida kognitiva konflikter (Tall, 1992e, s. 499).

Schwarz och Hershkowitz beskriver ett tillvägagångssätt för att förklara de mekanismer som styr lärande av begrepp. När elever försöker förstå ett givet begrepp finns några specifika exempel, som är mer centrala än andra. Dessa specifika exempel, som kallas prototyper, används för att bedöma om andra exempel ska ingå i den kategori, som definieras av det aktuella begreppet.

Forskarna argumenterar för att linjära funktioner och andragradsfunktioner används som prototypexempel för begreppet funktion, genom att andra exempel på funktioner bedöms med hänvisning till dessa prototypexempel, i stället för till den formella definitionen av begreppet funktion. Det är dock viktigt att notera att på grund av de svårigheter det innebär att rita funktionsgrafer utan lämpliga hjälpmedel, har linjära funktioner och andragradsfunktioner vanligtvis varit de enda funktioner som undervisats systematiskt i skolan. Det är en öppen fråga huruvida hänvisningen till linjära funktioner är ett resultat av deras centrala roll i undervisningen eller ett resultat av deras inneboende prototypiska egenskaper, till exempel att grafen är en rät linje, som bestäms av två punkter samt att mellanliggande värden kan bestämmas med linjär interpolering. Forskarna använder begreppet ”Prototypicality” i betydelsen den del av begreppsbilden, som visar *vilka* funktioner som används och *hur* dessa funktioner används. Begreppet indikerar huruvida vissa funktioner är de enda, som elever använder i ett visst sammanhang, i den meningen att de inte kan konstruera andra funktioner i detta sammanhang eller om dessa prototypexempel används för att eleverna tycker om att

[3] Under 1960-talet inleddes försök att reformera skolmatematiken i Amerika och i Europa. I Sverige kallas reformen den ”nya matematiken”. Ambitionen i Sverige var att ersätta skolans skolmatematik med vetenskapens (riktiga) matematik. Entusiasmen för den ”nya matematiken” ebbade ut mot slutet av 1970-talet (Lundin, 2008, s. 369-374).

använda dem. Begreppet ”Prototypicality” indikerar dessutom om användningen av prototypexempel gör det möjligt för eleverna att hantera nya exempel. Det bedöms genom de exempel eleverna refererar till, de metoder som de använder, vilka hänför sig till specifika exempel (t.ex. linjär interpolering), samt genom de kopplingar eleverna gör mellan det aktuella problemet och de exempel som åberopas för att lösa problemet. Dessutom innefattas i vilken grad frammanade exempel och motiveringar beror på sammanhanget (Schwarz & Hershkowitz, 1999, s. 367 - 374).

Operationell och strukturell begreppsförståelse

Sfard formulerar en teori för att beskriva karaktären av individers förståelse av matematiska begrepp, till exempel tal och funktion. Enligt Sfard kan en individs förståelse av ett matematiskt begrepp ha olika karaktär; en operationell förståelse, där ett begrepp uppfattas som en process samt en strukturell förståelse, där det givna begreppet uppfattas som ett objekt. Den operationella och den strukturella förståelsen av ett givet begrepp kompletterar varandra och beskrivs som en dubbelnatur. Förmågan att se ett begrepp, både som en process och som ett objekt, är oumbärlig för att få en djup begreppsförståelse. Hon anser att den strukturella förståelsen av ett givet begrepp är mer abstrakt än den operationella och bör därmed betraktas som en mer avancerad fas av begreppsutvecklingen. Därmed kommer den operationella förståelsen av begreppet att utvecklas före den strukturella, när en individ tillägnar sig ett nytt matematiskt begrepp. Till exempel kan begreppet rationellt tal förstås operationellt som resultatet av en division av två heltal, men också strukturellt som ett ordnat par av hela tal. Med ett strukturellt tänkande förstår man talet som ett objekt, som kan representeras med en punkt på en tallinje.

Begreppet funktion kan förstås operationellt som en beräkningsprocess, men också strukturellt som en mängd av ordnade par. Den algebraiska representationen av en funktion kan tolkas operationellt som en beräkningsprocess, men även strukturellt som en statisk relation mellan två storheter. Sfard jämför med tolkningen av symbolen ” = ” i en ekvation. Likhetstecknet kan dels tolkas strukturellt som en statisk identitet mellan ekvationens båda led, dels operationellt som ett kommando för att utföra de beräkningar som finns i ekvationen. Den grafiska representationen av en funktion främjar ett strukturellt tänkande (Sfard, 1991, s. 4-10).

Sfard använder funktionsbegreppets historiska utveckling för att argumentera för att de matematiska begreppen har uppfattats operationellt långt före de strukturella definitionerna och representationerna konstruerades. Hon ser begreppet funktion som resultatet av ett sökande efter en matematisk modell för fysikaliska fenomen, som beskrivs av variabla storheter. Den nyligen uppfunna algebraiska symbolismen användes av bland andra Euler, när han år 1747 definierade begreppet funktion som ett så kallat ”analytiskt uttryck”. Enligt Sfard uttrycker både Eulers definition från år 1747 och den senare definitionen från 1755[4] en operationell förståelse av begreppet funktion. Hon ser funktionsbegreppets utveckling som en lång följd av mestadels misslyckade försök att skapa en strukturell definition av begreppet funktion. Alla misslyckade försök att översätta operationell intuition till en strukturell definition ledde slutligen till Bourbakis strukturella definition, som formulerades med hjälp av mängdteori (Sfard, 1991, s. 14-15).

Enligt Sfard är det en lång och svår process att utveckla en strukturell förståelse av ett begrepp. Hon urskiljer tre faser i processen att tillägna sig ett matematiskt begrepp. De tre

[4] En storhet ska kallas en funktion bara om den beror av en annan storhet på ett sådant sätt att om den senare storheten förändras så ska också den förra förändras.

faserna motsvarar tre grader av struktur. Först finns det en process, som utförs på bekanta objekt. Sedan utvecklas idén om att vända processen till en självständig storhet och slutligen ska den lärande tillägna sig förmågan att se den nya storheten som en helhet, som liknar ett objekt. Sfard kallar den sista fasen ”reification”. De två första faserna kallar hon ”interiorization” respektive ”condensation”. Sfard beskriver de tre faserna med exemplet negativa heltal. Först finns det en process; subtraktion som utförs på mängden av naturliga tal. När man subtraherar ett större tal från ett mindre tal väcks idén om en ny matematisk storhet; negativa heltal. Dessa tal kan adderas och multipliceras med varandra och med de gamla bekanta naturliga talen. En individ har nått ”reification” när hen kan uppfatta negativa heltal som abstrakta och rent imaginära konstruktioner. Individen betraktar nu de negativa heltalen som en delmängd av heltalsringen, det vill säga som en del av en talstruktur, som uppfyller axiomen i den algebraiska struktur som kallas ring.(Sfard, 1991, s. 18-20).

Sfard argumenterar för att det finns paralleller mellan de matematiska begreppens historiska utveckling och en individs begreppsutveckling. Hon använder både ett historiskt och ett psykologiskt perspektiv, när hon argumenterar för sin teori. Hon beskriver algebrans utveckling som återkommande försök att vända beräkningsprocesser till matematiska objekt samt som en ständig kamp för att nå ”reification”. Sfard hävdar att en individ troligtvis kommer att erfara liknande svårigheter i att lära sig algebra, som generationer av matematiker mötte under de perioder som algebra utvecklades (Sfard, 1995, s. 15-17).

Empiriska studier om begreppet funktion

Vinner och Dreyfus undersöker den förståelse som college-studenter[5] och lärare på junior high school uppvisar av begreppet funktion med hjälp av en enkät i en kvantitativ studie. Jag beskriver endast den del av studiens resultat som beskriver college-studenternas förståelse. Den enkät som forskarna använde i sin kvantitativa studie består dels av uppgifter om att identifiera funktioner bland några givna kurvor, dels av konstruktionsuppgifter där studenterna ska ge en definition av en funktion som uppfyller ett givet villkor.

Forskarna undersöker dels vilka definitioner av begreppet funktion som college-studenterna formulerar före en kurs i matematisk analys, dels vilka bilder av begreppet som studenterna använder när de löser uppgifter där man ska identifiera och konstruera funktioner. Forskarna identifierar följande kategorier av studenternas definitioner av begreppet funktion (Vinner & Dreyfus, 1989, s. 359-360).

1. En funktion är ett samband mellan två mängder som till varje element i den första mängden ordnar precis ett element i den andra mängden.
2. En funktion är en beroenderelation mellan två variabler.
3. En funktion är en regel. En regel förväntas ha någon regelbundenhet.
4. En funktion är en operation eller en transformation av variabler.
5. En funktion är en formel, ett algebraiskt uttryck eller en ekvation.
6. En funktion identifieras med en grafisk eller symbolisk representation.

Följande aspekter av begreppet funktion kommer till uttryck i studenternas svar på forskarnas enkät:

- Om en relation ordnar exakt ett värde till varje element i sin definitionsmängd så är det en funktion.
- Om grafen gör ett språng så är relationen diskontinuerlig i en punkt i sin definitions-mängd.

[5] College motsvarar årskurs två och tre på det svenska Naturvetenskapsprogrammet.

- Om definitionsmängden delas i två delområden så gäller olika regler för de olika delområdena. Som en konsekvens av detta kan grafens karaktär förändras i övergången från ett delområde av definitionsmängden till ett annat.
- En relation kan ha en punkt där den allmänna regeln inte gäller.

Några studenter använder en aspekt för att förkasta en given relation som varande en funktion, medan andra studenter använder samma aspekt för att acceptera den (Vinner & Dreyfus, 1989, s. 361).

Två uppgifter i forskarnas enkät är att identifiera grafer till en styckvis definierad och diskontinuerlig funktion respektive till en styckvis definierad och kontinuerlig funktion. Några studenter anser att en funktion måste vara kontinuerlig och några tycker att en styckvis definierad och kontinuerlig funktion inte kan definieras med hjälp av två olika regler på två delområden av sin definitionsmängd, utan den måste kunna definieras med hjälp av en formel som gäller för hela funktionens definitionsmängd.

Cirka hälften av studenterna svarar ja på frågan om det finns en funktion vars värden är lika med varandra. Cirka hälften av de som svarade ja, motiverar sitt svar med ett korrekt exempel på en konstant funktion. Några studenter som svarar ja på frågan, ger ett exempel på en sådan funktion med en formel som innehåller *x*:

$$y = {}^{x}/_{x}\text{, eller } y = x^0.$$

Enligt forskarna uttrycker en sådan student en operationell förståelse av begreppet funktion; man måste utföra en operation med x för att erhålla motsvarande *y*-värde (Vinner & Dreyfus, 1989, s. 362-364).

Viirman, Attorps och Tossavainen analyserar vilken karaktär som högskolestudenters begreppsbilder om begreppet funktion har. Dessutom undersöker forskarna hur dessa begreppsbilder är relaterade till begreppets historiska utveckling. Studien resulterade i följande kategorisering av studenternas definitioner av begreppet funktion, som till viss del är inspirerad av den kategorisering som görs i Vinner och Dreyfus (1989, s. 359-360).

1. En funktion är ett samband, eller en beroenderelation, mellan två mängder som till varje element i den första mängden ordnar exakt ett element i den andra mängden.
2. En funktion är en ”maskin” eller en eller flera operationer, som transformerar variabler till nya variabler.
3. En funktion är en regel, en formel eller ett algebraiskt uttryck.
4. En funktion identifieras med en av sina representationer; en kurva, ett tal eller en graf.
5. Ett meningslöst svar (Viirman et al., 2010, s. 11-12).

Kategori 1 har en strukturell karaktär, medan kategori 2 och 3 har en operationell karaktär i Sfards betydelse. Kategori 4 och 5 representerar inte en matematisk definition. De tre första kategorierna följer funktionsbegreppets historiska utveckling i omvänd kronologisk ordning: Eulers tidigare definition från år 1748 passar i kategori 3, medan Eulers senare definition från år 1755 passar i kategori 2. Bourbakis definition från år 1939 passar i kategori 1. Dirichlets definition borde hänföras till kategori 3, men den är också relaterad till kategori 1, på grund av villkoret ”… som till varje element i den första mängden ordnar exakt ett element i den andra mängden.” i definitionen av kategori 1.

Totalt beaktades 34 studenters definitioner av funktionsbegreppet i studien. Endast tre studenters definitioner klassificerades i kategori 1. De studenterna formulerade en strukturell definition av funktionsbegreppet. 19 studenter klassificerades i någon av de operationella kategorierna 2 eller 3. Tolv studenter misslyckades med att ge en användbar definition av begreppet funktion. Studenterna tillfrågades också om några givna uttryck representerar y som en funktion av x. En tredjedel av studenterna anser att ekvationen $y = 3$ representerar en funktion, medan cirka två tredjedelar av studenterna anser att ekvationen $f(x) = 3$ gör det. Två tredjedelar av studenterna trodde att cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 4$ representerar en funktion. Cirka 90 % av studenterna i undersökningsgruppen accepterade följande styckvis definierade funktion:

$$y = \begin{cases} -3 \text{ om } x < 0 \\ e^x \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

En uppgift i studien var att avgöra om det finns en funktion som uppfyller båda villkoren:

- Om *x* är ett heltal så ska funktionen ha ett värde som *inte* är ett heltal.
- Om *x inte* är ett heltal så ska funktionen ha ett heltalsvärde.

Hypotesen om att en sådan funktion existerar förkastades av flera studenter med motiveringen att en funktion måste definieras med en formel, som gäller för hela funktionens definitionsmängd, trots att de hade accepterat andra styckvis definierade funktioner i andra uppgifter (Viirman et al., 2010, s. 12-16).

Hansson undersöker matematiklärarstudenters syn på begreppet funktion. Han låter lärarstudenter rita begreppskartor över de nätverk av associationer, som studenterna urskilde utifrån tre givna matematiska samband: $y = x + 5$, $y = \pi x^2$, $xy = 2$. De tre sambanden kan associeras med olika matematiska begrepp som studenter möter i sin skolgång. Hanssons syfte är att undersöka hur lärarstudenternas syn på begreppet funktion kommer till uttryck i de begreppskartor som de utformade (Hansson, 2006, s. 19).

Flertalet av lärarstudenterna ser inte att ekvationen $y = x + 5$ utifrån funktionsbegreppet kan uppfattas som att den innehåller två variabler och att ekvationen därmed representerar en funktion. Studenterna visar inte en utvecklad syn på begreppet funktion som ett objekt med flera egenskaper, till exempel jämn, kontinuerlig eller deriverbar. Studenternas begreppsbild är inte en rik kognitiv struktur i samband med $y = x + 5$. Lärarstudenternas begreppskartor är rikt förgrenade, men de visar inte alltid meningsfulla relationer mellan olika begrepp. Vissa studenters begreppskartor innehåller triviala delar, som inte är relaterade till matematik, på bekostnad av matematiska begrepp och relationer mellan begreppen. Vissa delar uttrycker enbart algoritmisk kunskap och den matematiska terminologin användes ibland felaktigt. Begreppet funktion uttrycks ofta med en operationell karaktär som en beroenderelation mellan variabler, där några studenter anger entydighetsvillkoret för en funktion; att ett värde på variabeln *x* ger ett entydigt bestämt funktionsvärde. Ingen av studenterna anger begreppen definitionsmängd eller värdemängd som delar av begreppet funktion. Det finns en tendens att studenternas kognitiva strukturer är uppdelade i olika områden, med få kopplingar mellan områdena, vilket förhindrar studenterna från att skapa rika kognitiva strukturer för begreppet funktion (Hansson, 2006, s. 30-33).

Hansson menar att lärarstudenter bör ges möjlighet att resonera om funktioner i vardagliga sammanhang genom att ställa frågan om en relation uttrycker *y* som en funktion av *x*, till exempel ”En bil x har färgkoden y.” eller ”En pojke x har y som far.” Syftet med detta är att ge studenterna möjlighet att utveckla sin begreppsbild om funktioner, så att bilden även inbegriper funktioner, vars definitionsmängd är något annat än tal och som inte kan representeras av formler. Hansson beskriver en försöksundervisning, där studenter gavs möjlighet att resonera om funktioner i vardagliga sammanhang. De studenter som deltog i försöksundervisningen resonerade om funktioner i olika sammanhang och med fler representationer än den grupp som inte deltog. De studenter som inte deltog i försöksundervisningen associerade funktioner med reellvärda funktioner i en reell variabel och uppfattade en funktion som en formel, ett algebraiskt uttryck eller en ekvation.

Lärarstudenterna motiverar funktionsbegreppets betydelse i matematik med att funktioner kan tillämpas i olika sammanhang, speciellt inom naturvetenskap (Hansson, 2006, s. 34-36).

Läroböcker om begreppet funktion

I detta avsnitt beskriver jag hur de läroböcker, som eleverna i undersökningsgruppen använde, behandlar begreppet funktion samt närliggande begrepp.

Matematik 1c

Eleverna som deltog i min studie använde en lärobok skriven av Alfredsson, Bråting, Erixon och Heikne (2011a), när de läste Naturvetenskapsprogrammets första matematikkurs, matematik 1c. I läroboken formuleras följande definitioner av begreppen variabel respektive funktion:

> Om en bokstav i ett uttryck kan anta olika värden kallas den en variabel
>
> (Alfredsson et al., 2011a, s. 10).
>
> Om sambandet mellan två variabler x och y är sådant att varje x-värde, enligt någon regel, ger ett bestämt y-värde så kan vi säga att y är en funktion av x. En funktions tillåtna x-värden kallas funktionens definitionsmängd. De värden på y, som de tillåtna x-värdena ger, kallas funktionens värdemängd. (Alfredsson et al., 2011a, s. 288)

När jag i föreliggande uppsats hänvisar till den formella definitionen av begreppet funktion så menar jag lärobokens definition, om inget annat anges i texten. I läroboken för kursen matematik 1c beskrivs fyra olika representationer av begreppet funktion. Med hjälp av ett exempel representeras en funktion med ord, med en formel, med en värdetabell och med en graf. Läroboken har olika övningsuppgifter, där funktioner representeras med de ovan nämnda uttrycksformerna, men inga exempel på vare sig diskontinuerliga funktioner eller styckvis definierade funktioner. Det finns endast en övningsuppgift i läroboken, där konstanta funktioner ingår. Däremot ingår några uppgifter, som problematiserar kravet på entydigt funktionsvärde; *att varje x-värde ger ett bestämt y-värde* (Alfredsson et al., 2011a, s. 288-301).

Matematik 2c

I kursen matematik 2c studeras andragradsfunktioner, exponentialfunktioner och deras inverser; logaritmerna. Målet är att konstruera grafer samt att bestämma största respektive minsta värde till andragradsfunktioner, som har eller saknar reella nollställen. Andragradsfunktioner och exponentialfunktioner används som modeller för olika tillämpningar, till exempel för att beskriva en kastparabel eller för att studera förändring av antal individer i en population.

Matematik 3c

Det finns en orientering kring begreppet kontinuerlig funktion i den lärobok, som mina elever använde i kursen matematik 3c. Begreppet kontinuerlig funktion definieras på följande sätt i läroboken:

> Anta att en funktion är definierad i ett intervall. Om grafen är sammanhängande och inte har några "hopp" är funktionen kontinuerlig i intervallet (Sjunnesson, Holmström, & Smedhamre, 2012, s. 168).

I den lärobok, som eleverna på den andra skolan använde, när de läste kursen matematik 3c, formuleras följande definition av begreppet kontinuerlig funktion:

> De funktioner vars graf kan "ritas utan att lyfta pennan" kallas för kontinuerliga. Med matematikens språk kan vi säga att en funktion är kontinuerlig i en punkt x om $|f(x+h) - f(x)|$ kan göras godtyckligt litet genom att välja ett tillräckligt litet h. Om detta gäller för alla x i definitionsmängden är funktionen kontinuerlig. (Alfredsson, Bråting, Erixon, & Heikne, 2011b, s. 40)

Matematik 4

I den lärobok, som mina elever använde när de läste kursen matematik 4, införs begreppet sammansatt funktion av två givna funktioner, som benämns inre respektive yttre funktion. Begreppet sammansatt funktion införs för att man vill kunna derivera en sammansatt funktion med hjälp av kedjeregeln. Läroboken inför begreppet invers funktion, som exempel ges logaritmfunktionen med basen tio, som är invers funktion till exponentialfunktionen med basen tio. Absolutbeloppet definieras som en styckvis definierad funktion. Författarna visar en metod för att skissa grafer till rationella funktioner. Dessutom ingår flera övningsuppgifter på att skissa grafer till polynomfunktioner av gradtal upp till och med fem i läroboken (Gennow, Gustafsson, & Silborn, 2013).

Högskola

Naturvetenskapsprogrammet är ett högskoleförberedande gymnasieprogram. Därför kommer jag att som jämförelse till gymnasieskolans begreppsdefinitioner, betrakta den definition av begreppet funktion som ges i Rodhe och Sigstams lärobok, som används på inledande matematikkurser på vissa universitet och högskolor. Rodhe och Sigstam formulerar sin egen version av Dirichlets definition av begreppet funktion:

> En variabel *y* är en funktion av en variabel *x*, om till varje värde som *x* får anta, är ordnat endast ett av de värden som *y* får anta (Rodhe & Sigstam, 2002, s. 88).

Metod

Instrument

Jag valde att undersöka elevers förståelse av begreppet funktion med hjälp av en enkät med matematikuppgifter kring begreppet. Dessutom intervjuade jag fem elever med utgångspunkt från deras svar på enkäten. Min förhoppning var att intervjuerna skulle ge mig fördjupad kunskap om elevernas förståelse av begreppet funktion. Jag kan identifiera följande fördelar med att använda en enkät: Alla respondenter får samma formulering av frågorna. Respondenterna kan inte diskutera uppgifterna med varandra om alla genomför enkäten samtidigt. Därmed undviks att respondenterna påverkar varandra, när de besvarar frågorna.

Enkät

Med avsikt att samla in data konstruerade jag en enkät[6] med matematikuppgifter, som handlar dels om att identifiera funktioner bland några givna formler respektive kurvor, dels om att konstruera funktioner med några givna egenskaper. Uppgifterna utformades med avsikt att undersöka elevers förståelse av begreppet funktion. Jag avslutar enkäten med att eleverna ombeds att ge sin definition av begreppet funktion. Uppgifterna 1, 2 och 5 i min enkät har jag konstruerat själv. Idéerna till uppgifterna 3 och 4 har jag hämtat från Tall (1992e). Uppgifterna 6 och 7 har utvecklats av Vinner & Dreyfus (1989, s. 359) och översatts till svenska. Uppgifterna används också av Viirman et al. (2010).

Intervju

En halvstrukturerad livsvärldsintervju är en teknik för att förstå ett ämne ur respondenternas eget perspektiv. Det är en specifik intervjuteknik, som har ett syfte. Intervjun är varken ett öppet samtal eller en sluten enkät, utan en professionell intervju med syfte att förstå respondenternas livsvärld, som är världen såsom den upplevs oberoende av och före förklaringar. Den utgår från en intervjuguide, som kan innehålla förslag till intervjufrågor (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 43-44). Jag använde halvstrukturerad intervju som en teknik för att förstå elevernas föreställningar om det matematiska begreppet funktion, ur elevernas perspektiv. Jag utarbetade en intervjuguide[7] som förberedelse för att genomföra mina intervjuer.

Urval

Jag valde att genomföra min studie på gymnasieskolans Naturvetenskapsprogram, inriktning Naturvetenskap, eftersom det är den mest matematikintensiva utbildningen i svensk gymnasieskola som följer Gy 2011. På Naturvetenskaps-programmet, inriktning Naturvetenskap, är kurserna matematik 1c, 2c, 3c och 4 obligatoriska (Skolverket, 2011, s. 252).

Elever i svensk skola möter begreppen variabel och linjär funktion redan i grundskolans årskurs 7-9. Elever som studerar gymnasieskolans Naturvetenskapsprogram möter begreppet funktion i kursen matematik 1c. I kursen studeras reellvärda funktioner av en reell variabel, speciellt behandlas linjära och exponentiella funktioner. Eleverna fördjupar sina kunskaper om funktioner i de efterföljande matematikkurserna, genom att de möter nya klasser av funktioner som beskrivs med olika representationer. De tillämpar sina kunskaper om funktioner genom att arbeta med modelleringsproblem, där funktioner används som

[6] Se Bilaga 2 Enkät

[7] Se Bilaga 3 Intervjuguide

matematiska modeller inom bland annat ämnena fysik, kemi, ekonomi och populationsbiologi (Skolverket, 2013).

Jag valde att genomföra studien med hjälp av en så kallad ”tillgänglig grupp” av elever, dels på den gymnasieskola, där jag arbetar som matematiklärare, dels på ytterligare en gymnasieskola. Jag gjorde alltså inte ett slumpmässigt urval. De två gymnasieskolorna ligger i två olika kommuner på ett inbördes avstånd av cirka 60 km. Det är troligt att eleverna på den ena skolan inte har kontakt med någon elev på den andra skolan. Eleverna i urvalet på min skola gick andra eller tredje året på Naturvetenskapsprogramet. Jag var deras matematiklärare vid undersökningstillfället. De sju eleverna i årskurs två hade vid undersökningstillfället slutfört kurserna matematik 1c och 2c. Jag hade vid undersökningstillfället aldrig visat något exempel på en styckvis definierad funktion och aldrig talat om begreppet kontinuerlig funktion med mina elever i årskurs två. De sex eleverna i årskurs tre hade vid undersökningstillfället slutfört kurserna matematik 1c, 2c, 3c och 4. Jag hade visat några exempel på styckvis definierade funktioner och behandlat momentet kontinuerliga funktioner för mina elever i årskurs tre när de läste kursen matematik 3c under hösten 2012.

Jag fick kontakt med en matematiklärare på den andra skolan via en före detta kollega. De elva eleverna på den andra skolan, som deltog i min studie genom att besvara enkäten, gick vid undersökningstillfället andra året på Naturvetenskapsprogrammets inriktning Naturvetenskap. De hade vid undersökningstillfället slutfört kurserna matematik 1c och 2c och påbörjat matematil 3c. Matematikläraren på den andra skolan hade nämnt begreppet kontinuerlig funktion och visat ett exempel på en styckvis definierad funktion, som var diskontinuerlig, för sina elever *före* undersökningstillfället.

Genomförande

Jag genomförde studien under höstterminen 2013 med hjälp av elever på två olika gymnasieskolor, som ligger i två olika kommuner i västra Sverige. Elevgrupperna besvarade enkäten på sin egen skola och vid olika tidpunkter. De fick använda 30 minuter för att besvara enkäten och inga hjälpmedel var tillåtna, utöver skrivmaterial och linjal.

Sex elever på min skola, varav tre i årskurs 2 och tre i årskurs tre, samt elva elever på den andra skolan besvarade enkäten. Jag intervjuade fem av mina egna elever. En elev på min skola, som besvarade min enkät ville inte bli intervjuad. Jag intervjuade dem var för sig, efter att de hade besvarat enkäten. De enskilda intervjuerna genomfördes i ett av grupprummen på den skola där jag arbetar. Under intervjun, som pågick mellan 20 och 30 minuter, fick eleverna använda sin enkät, skrivmaterial och linjal som hjälpmedel. Jag spelade in intervjuerna med en diktafon.

Pilotstudie

Jag genomförde en pilotstudie med en av mina egna elever som läser tredje året på Naturvetenskapsprogrammet. Eleven besvarade samtliga frågor i den ursprungliga enkäten. På grundval av den information, som elevens svar gav, diskuterade jag uppgifterna i enkäten med min handledare. Vi beslutade att byta ut en beräkningsuppgift och ersätta den med uppgift 2, som testar förståelse av begreppet definitionsmängd till en funktion. Den tredje uppgiften i enkäten modifierades något. Den reviderade enkäten, som användes i studien finns som bilaga. Jag genomförde inte någon intervju i min pilotstudie.

Forskningsetik

Enligt Kvale och Brinkmann bör de som deltar i en forskningsstudie informeras om syftet med studien. En forskare bör även informera deltagarna om hur forskningsstudiens konfidentialitet ska säkerställas (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 87-88).

I samband med att enkäten delades ut till eleverna informerade jag om att syftet med studien är att studera elevers förståelse av matematiska begrepp. Tillsammans med enkäten följde det första missivbrevet[8], där jag ber de deltagande eleverna om deras samtycke till att få använda deras enkäter i forskningssyfte. Jag delade ut det andra missivbrevet[9] till de elever, som var villiga att delta i den intervju, som jag ser som en uppföljning på enkäten. I båda missivbreven informeras om att jag kommer att följa vetenskapsrådets forskningsetiska principer med dess krav på information, samtycke, konfidentialitet och nyttjande.

För att säkerställa forskningsstudiens konfidentialitet kommer jag inte att avslöja uppgifter som kan identifiera de deltagande eleverna. Till potentiellt identifierbara uppgifter räknar jag förnamn, efternamn och klassbeteckning. Eftersom det är en ojämn fördelning av pojkar och flickor i undersökningsgruppen kommer jag att skriva ”hen” istället för han eller hon i min resultatredovisning.

Validitet och reliabilitet

Validitet i en studie är beroende av forskarens hantverksskicklighet genom att hon kontrollerar, ifrågasätter och teoretiskt tolkar sina resultat. Reliabilitet i en studie är en fråga om resultat kan reproduceras av andra forskare (Kvale & Brinkmann, 2009, s. 263-266). Frågan om validitet i min studie handlar om mina instrument mäter gymnasieelevers förståelse av begreppet funktion. Jag och min handledare har tillsammans arbetat fram den enkät, som jag använde i min studie. Vi har bedömt att uppgifterna i enkäten mäter gymnasieelevers förståelse av begreppet funktion. Med hjälp av en pilotstudie har jag undersökt om enkätuppgifternas formulering kan missuppfattas. Jag har under min studietid tränat på att intervjua gymnasieelever och jag har spelat in alla intervjuerna med en diktafon.

Analys

Endast de enkäter, där minst fyra uppgifter besvarats, analyserades i min studie. Jag analyserade elevernas begreppsbilder av funktion, speciellt analyserades relationen mellan elevens personliga definition av begreppet funktion och övriga delar av elevens begreppsbild. En enkät, där endast två av uppgifterna besvarats, beaktades inte i min studie. Det återstod då 16 enkäter för analys.

Vissa elever förväxlar termerna andragradsfunktion och andragradsekvation. Om det är uppenbart att en elev talar om en funktion, men säger eller skriver andragradsekvation, så har jag i min analys tolkat termen andragradsekvation som andragradsfunktion. I min analys har jag tolkat de geometriska termerna kurva och linje i sin vardagliga betydelse, som att en kurva är krökt och en linje är rak (rät).

[8] Se Bilaga 4 Första missivbrevet

[9] Se Bilaga 5 Andra missivbrevet

Resultat

De 16 elever som besvarade min enkät är kodade med en bokstav i det svenska alfabetet, från A till F respektive från K till T. De sex elever som är kodade från A till F är mina egna elever. De tio eleverna på den andra skolan är kodade med bokstäverna K till T. Jag har dessutom intervjuat fem elever, A, B, C, D och F. Elev E ville inte bli intervjuad.

Respondenternas definitioner av begreppet funktion

I detta avsnitt presenteras de fyra kategorier av elevernas personliga definitioner av begreppet funktion, som jag har identifierat i min analys av enkätsvaren. Varje kategori åtföljs av ett eller två exempel från de definitioner som eleverna formulerade i enkäten. I fyra av de 16 enkäter som analyserades anger eleverna inte någon definition av begreppet funktion.

1. *Samband*: En funktion är ett samband mellan två variabler, med eller utan entydighetsvillkoret: ”För varje *x*-värde så ska *y*-värdet vara entydigt bestämt”. Fem elever anger villkoret att *y*-värdet ska vara entydigt bestämt, medan två elever inte anger entydighetsvillkoret.

   ”En funktion är ett samband mellan värdet på *y* och *x*. Den hjälper dig att bestämma *y* när du vet *x* och tvärtom.” (K)

   ”ett samband mellan *x* och *y* där det finns högst ett *y*-värde per *x*-värde.” (N)

2. *Beroenderelation*: En funktion uttrycker ett beroende mellan två variabler. Det finns tre elever i kategorin.

   ”När det finns ett *y*-värde för varje *x*-värde. *y*-värdet är beroende av *x*-värdet.” (L)

3. *Regel*: En funktion är en regel. Det finns en elev i kategorin.

   ”En regel som visar hur *x* förhåller sig till *y*.” (M)

4. *Graf*: En funktion identifieras med sin grafiska representation. Det finns tre elever i kategorin.

   ”En graf där det till varje *x*-värde finns ett *y*-värde…” (O)

Delar av en begreppsbild om funktion

I detta avsnitt beskrivs de delar av begreppsbilden, som de deltagande eleverna uppvisar, när de besvarar enkäten. En och samma elev kan uppvisa en eller flera delar av sin begreppsbild om funktion.

y måste vara beroende av *x*

Tio elever av 16 anser att varken ekvationen $y = 4$ eller den grafiska representationen av denna konstanta funktion uttrycker en funktion.

> … eftersom y inte förändras beroende på *x*-värdet. (P)
>
> … har ej varierande *y*-värden och beror därför ej på *x*. (B)
>
> *y* är inte en funktion av *x*. Det finns ingen *x*-term med i uttrycket. Inte säker dock då det fortfarande finns ett *y*-värde för varje *x*-värde. (L)

De tio eleverna uppvisar att *y måste vara beroende av x* som en del av sina begreppsbilder om funktion. Endast tre elever tycker att ekvationen $y = 4$ representerar en funktion, men bara en av dem formulerar en korrekt motivering:

> För varje *x*-värde så blir y alltid 4. (Q)

Fyra elever av 16 tycker att grafen till den konstanta funktionen representerar en funktion, men endast en elev formulerar en korrekt motivering:

> För varje *x* finns ett y. (Q)

En elev tycker att man kan skriva om ekvationen $y = 4$ så att den representerar en funktion:

> Finns inget *x*-värde, är ingen funktion. Däremot om vi lägger till ett *x*, så att $y = 4x^0$, så blir det en funktion. (N)

Elevens uttryck är ekvivalent med den ursprungliga ekvationen $y = 4$, men elevens omskrivning visar att hen har krav på minst ett *x* i ekvationen, för att den ska kunna representera en funktion. Delbilden *y måste vara beroende av x* framträder mycket tydligt i elevens begreppsbild om funktion. Elev N uppvisar en operationell förståelse (Sfard, 1991) av begreppet funktion; man måste utföra en operation med variabeln *x* för att erhålla motsvarande y-värde.

Krav på entydigt funktionsvärde

15 av de 16 eleverna i min studie tror att cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 9$ representerar en funktion. En vanligt förekommande motivering är att ekvationen representerar en funktion eftersom y är beroende av x. Några elever bestämmer den positiva lösningen $y = \sqrt{9 - x^2}$ till ekvationen, men glömmer att beakta den negativa lösningen $y = -\sqrt{9 - x^2}$. Elev D är den enda elev i min studie som anger entydighetskravet för en funktion i samband med cirkelns ekvation.

Sju elever av 16 genomskådar att den S-formade kurvan i uppgift 5b inte representerar en funktion och formulerade en korrekt, eller nästan korrekt, motivering:

> … eftersom det för vissa *x* finns mer än ett y. (Q)

> Det finns flera y-värden för varje *x*-värde. (N)

De sju eleverna uppvisar kravet på entydigt funktionsvärde som en del av sina begreppsbilder om funktion. De övriga eleverna saknar detta entydighetskrav i sina begreppsbilder.

Sammanhängande graf

Tre elever av 16 anger som krav på en funktion att dess graf måste vara sammanhängande:

> Grafen blir inte sammanhängande och är därför ingen funktion. (N)

> Grafen beskriver inte y som en funktion av *x* eftersom grafen är delad. (A)

De tre eleverna uppvisar ”sammanhängande graf” som en del av sina begreppsbilder om funktion. Fem andra elever accepterar att en icke sammanhängande graf kan representera en funktion. Tre av dem använder termen ”diskontinuerlig” funktion:

> y är en diskontinuerlig funktion för vissa *x* värden. (P)

De fem eleverna visar att ”icke sammanhängande grafer” är en del av deras begreppsbilder om funktion. Enligt känd matematisk teori gäller följande: Grafen till en kontinuerlig funktion, som är definierad på ett reellt intervall är sammanhängande.

Styckvis definierad funktion

Tio elever av 16 uppvisar ”styckvis definierad funktion” som en del av sina begreppsbilder genom att acceptera den styckvis definierade grafen i uppgift 5c eller något av de styckvis definierade uttrycken i uppgift 3c eller 3d som varande funktioner. Elev F definierar dessutom en styckvis definierad funktion som uppfyller båda villkoren i uppgift 6 i min enkät. En elev som saknar ”styckvis definierad funktion” i sin begreppsbild, argumenterar för att grafen i uppgift 5c inte representerar en funktion:

> Grafen beskriver inte en funktion eftersom grafen både innehåller räta linjens ekvation och en andragradsekvation. (A)

En funktion måste representeras med en formel

Några elever gör ihärdiga försök att bestämma *en* formel som gäller för hela funktionens definitionsmängd och som uppfyller båda villkoren i uppgift 6 i min enkät:

- Om x är ett heltal så ska funktionen ha ett värde som *inte* är ett heltal.
- Om x *inte* är ett heltal så ska funktionen ha ett heltalsvärde.

Elev K prövar med $f(x) = 0{,}5x + 0{,}25$. Formeln uppfyller det första villkoret, men det andra villkoret uppfylls bara för vissa värden på variabeln x. Elev A undrar om det går att bestämma en formel för den kurva som hen har ritat genom de sex givna punkterna i uppgift 4 i min enkät. De två eleverna visar delar av en begreppsbild, där en funktion måste kunna representeras med en formel som gäller för hela funktionens definitionsmängd. Elev F är den enda elev som ger ett korrekt exempel på en styckvis definierad funktion, som uppfyller båda villkoren i uppgift 6 i enkäten.

Linjära funktioner

Fyra elever av 16 ritar enbart en rät linje genom de två givna punkterna i det övre koordinatsystemet i uppgift 4. För dessa elever frammanas bilden av en rät linje när de ser två punkter i ett koordinatsystem, vilket visar att linjära funktioner dominerar över andra klasser av funktioner i deras begreppsbilder om funktion.

En funktions definitionsmängd

10 elever av 16 svarar ja på frågan om det finns en funktion som *inte* är definierad för $x = 3$ och konstruerar ett korrekt exempel på en sådan rationell funktion, som uppfyller ovanstående villkor. Dessa elever kan använda begreppet definitionsmängd i en specifik situation. De uppvisar definitionsmängd som en del av sina begreppsbilder av funktion.

Fördjupad analys av fem elevers begreppsbilder

I detta avsnitt redovisas en fördjupad analys av fem elevers begreppsbilder om funktion. Jag beskriver en del av respektive elevs begreppsbild så som den visar sig i elevernas svar på enkäten och under intervju. Elevens personliga definition av begreppet funktion är en del av elevens begreppsbild. Jag har intervjuat elev A, B, C, D och F. Elev E ville inte bli intervjuad. Det är jag som är intervjuaren (I) i samtliga dialogcitat nedan.

Elev A

Elev A går andra året på Naturvetenskapsprogrammet och har slutfört kurserna matematik 1c och 2c. Intervjuaren pekar på ekvationen $x^2 + y^2 = 9$ i elevens kopia av enkäten och frågar om ekvationen uttrycker y som en funktion av x. Ja, svarar eleven utan att tveka. Intervjuaren ber eleven att undersöka antalet lösningar till ekvationen $y^2 = 9 - x^2$ för $x = 0$. Hen kommer fram till att ekvationen har två lösningar, men håller fast vid sin uppfattning att ekvationen representerar en funktion, trots att y-värdet inte är entydigt bestämt för $x = 0$.

Intervjuaren pekar på den S-formade kurvan i uppgift 5b i enkäten och frågar om kurvan beskriver y som en funktion av x. Elev A säger, med viss tvekan, att det är en tredjegradsfunktion och accepterar att det blir tre olika funktionsvärden för $x = 0$.

> I: Vad är funktionens värde för $x = 0$?
>
> A: Det är tre olika värden.
>
> I: Kan det vara tre olika värden?
>
> A: Ja.

Min tolkning av ovanstående dialog är att elev A inte visar att kravet på entydigt funktionsvärde ingår i hens begreppsbild för funktion.

Intervjuaren pekar på ekvationen $y = 4$ i uppgift 3b i elevens kopia av enkäten och frågar:

> I: Uttrycker ekvationen $y = 4$ en funktion?
>
> A: Nej. Det är flera olika x-värden som har samma y-värde.
>
> I: Finns det någon regel som säger att olika x-värden inte kan ha samma y-värde?
>
> A: Definitionsmängd och värdemängd, kanske.
>
> I: Vad är definitionsmängden?
>
> A: Vi har inget x-värde. x är allt. [skrattar] Alla tal.
>
> I: Vad är värdemängden?
>
> A: $y = 4$.
>
> I: Är y en variabel?
>
> A: I det här fallet: Nej, y kan inte variera.

Elev A uppfattar begreppet funktion som att *y måste vara beroende av värdet på den oberoende variabeln x*, därför accepterar hen inte den konstanta funktionen. Hen anger korrekt definitions- och värdemängd till den konstanta funktionen, även om hen inte tror att det är en funktion. Hen uppfattar begreppet variabel som en storhet som måste kunna anta olika värden. Variabeln y kan variera inom den konstanta funktionens värdemängd, som endast består av talet fyra. Därför är y trots allt en variabel i detta exempel.

Intervjuaren visar funktionsuttrycket för signumfunktionen för eleven utan att rita grafen och utan att använda termen signumfunktion, eftersom det i så fall skulle vara givet att det är en funktion. Elev A ritar en korrekt graf till signumfunktionen på ett separat papper.

> I: Vilka krav ställer man på en funktion?
>
> A: [10 sekunders tystnad] Det måste finnas en definitionsmängd och en värdemängd och det ska vara en och samma linje. Det här är två olika räta linjer. [Elev A pekar på grafen till signumfunktionen.] Det betyder att det är två olika funktioner.

Intervjuaren visar uppgift 4 där man ska rita en graf genom sex givna punkter och frågar:

> I: Hur många olika grafer kan man rita som går genom *alla* sex punkterna?

A: Det går inte med två parallella räta linjer, för det blir inte en graf, för de sitter inte ihop. Var för sig är det en graf, men tillsammans är de inte en graf.

Om den sönderbrutna och styckvis linjära grafen i uppgift 5d skriver hen att ”Grafen beskriver inte *y* som en funktion av *x* eftersom grafen är delad. Funktionerna har samma k-värde (parallella) men inget annat är gemensamt.”

Ovanstående tre citat visar att grafen till en funktion alltid är sammanhängande i elevens begreppsbild om funktion. ”k-värde”, i det sista citatet ovan, syftar på parametern k i räta linjens ekvation som brukar formuleras $y = kx + m$. Hen skriver ”Funktionerna” i plural, vilket jag tolkar som att hen ser den styckvis linjära grafen som två olika funktioner.

Elev A tycker inte att den styckvis definierade funktionen i uppgift 3c representerar en funktion eftersom ”den består av två olika räta linjer med olika lutning och riktning.” Det är två olika funktioner, enligt elev A. Hen skriver så här om den styckvis definierade funktionen i uppgift 5c som har en sammanhängande graf som består av en krökt kurva och en halv rät linje (en stråle). ”Grafen [i uppgift 5c] beskriver inte *y* som en funktion av *x* eftersom grafen både innehåller räta linjens ekvation och en andragradsekvation”. Styckvis definierade funktioner ingår inte i elevens begreppsbild om funktion.

Hen har missuppfattat uppgift 4, där man ska undersöka, om det går att rita grafen till en funktion som går genom *alla* de sex givna punkterna. Hen får ett nytt försök och ritar då en kurva, som ser ut att vara graf till ett femtegradspolynom, genom alla de sex givna punkterna. Hen är dock missnöjd med sin graf.

I: Vad är du missnöjd med?

A: Jag vet inte. [skrattar] Jag vet inte om det finns en bra funktion till själva kurvan, men det går att rita en graf på det sättet.

Elev A saknar en formel till sin funktion. Hen identifierar en funktion med en formel. Följande tanke finns i elevens begreppsbild: *Om det ska vara en funktion så måste man kunna bestämma en formel för funktionen.*

I: Vad är en funktion?

A: En funktion. [skrattar] Man ska kunna rita en graf, det ska finnas en definitionsmängd och en värdemängd till en funktion.

I elevens begreppsbild finns endast sådana funktioner vars grafer man kan rita på papper. Hen anger definitions- och värdemängd som varande två delar av en funktions definition, vilket är korrekt.

I enkäten formulerar hen sin personliga definition av begreppet funktion: ”I en funktion ska det finnas ett samband mellan ett visst *x*-värde och ett visst *y*-värde.” Elevens personliga definition av funktion liknar Dirichlets definition, men att *y* ska vara entydigt bestämt av funktionen för ett givet värde på *x*, ingår inte i elevens definition. Kravet på entydigt funktionsvärde inbegrips inte heller i elevens begreppsbild. Hen uppvisar några potentiella konfliktfaktorer i sin begreppsbild, där en funktion måste kunna representeras med en formel; man ska kunna rita grafen till funktionen; grafen ska vara sammanhängande samt att *y* måste vara beroende av värdet på den oberoende variabeln *x*.

Elev B

Elev B går tredje året på Naturvetenskapsprogrammet och har slutfört kurserna matematik 1c, 2c, 3c och 4. Intervjuaren pekar på ekvationen $y = 4$ i uppgift 3b i enkäten och frågar om ekvationen uttrycker y som en funktion av *x*.

B: Nej. Det blir ett konstant värde vid fyra, oberoende av vad *x* är, *x* finns inte ens med.

Elev B tycker inte att ekvationen $y = 4$ representerar en funktion eftersom y är oberoende av *x*. Hen tycker inte heller att grafen till $y = 4$ i uppgift 5a representerar en funktion eftersom *y*-värdet är konstant och oberoende av *x*.

Intervjuaren visar funktionsuttrycket för signumfunktionen för eleven utan att rita grafen och utan att använda termen signumfunktion, eftersom det i så fall skulle vara givet att det är en funktion. Intervjuaren pekar på funktionsuttrycket för signumfunktionen och frågar om det uttrycker *y* som en funktion av *x*. Efter 30 sekunders tystnad svarar eleven:

B: Jag skulle säga att *y*-värdet förändras beroende på vad *x* är.

Elevens svar på intervjuarens frågor visar att *y måste vara beroende av värdet på den oberoende variabeln x* finns som en del av elevens begreppsbild om funktion.

Elev B har ritat en styckvis konstant och diskontinuerlig graf genom de två givna punkterna i det övre koordinatsystemet i uppgift 4 i enkäten. Intervjuaren ber eleven att titta på det undre koordinatsystemet i samma uppgift och frågar hur många grafer man kan rita som går genom alla de sex givna punkterna i koordinatsystemet.

B: Jag är inte säker på om man kan göra diskret funktion här.

I: Vad är en diskret funktion?

B: Det blir hopp. Den är inte kontinuerlig som alla andra grafer. Det blir mellanrum mellan värdena.

Elev B säger diskret funktion, men menar diskontinuerlig funktion. I ovanstående dialogcitat uppvisar eleven diskontinuerlig funktion i sin begreppsbild om funktion. Elev B accepterar dessutom den styckvis linjära grafen i uppgift 5d som en funktion, även om hen visar en viss osäkerhet om vad *y*-värdet blir i diskontinuitetspunkten.

Intervjuaren pekar på ekvationen $x^2 + y^2 = 9$ i uppgift 3a i elevens kopia av enkäten och frågar om ekvationen uttrycker *y* som en funktion av *x*. Elev B svarar:

B: Ja, för om man räknar på det så varierar y beroende på x.

I: Vad är y-värdet för $x = 0$?

B: plus och minus tre.

I: Är det ett problem att du fick två y-värden för $x = 0$?

B: [10 sekunders tystnad] Det är ju en andragradsekvation, så då ska man få två värden. När det gäller funktionen så vet jag inte. Jag tror det blir problematiskt, samtidigt så är det en funktion tycker jag.

Intervjuaren pekar på den S-formade kurvan i uppgift 5b i enkäten och frågar om den uttrycker *y* som en funktion av *x*. Elev B svarar:

B: Ja. Det tror jag, för man ser ju att y-värdet varierar.

I: Vad är funktionsvärdet i $x = 0$?

B: Det blir noll, minus fem och minus tio.

I: Är det ett problem att det blir tre olika värden?

B: Jag är inte säker om det gör något för funktionen. Om man tänker på definitionen av en funktion, så kanske det är ett problem, men samtidigt så, det varierar ju ändå. Det beror på x.

Elev B uppvisar en betydande osäkerhet om kravet på entydigt funktionsvärde i samband med cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 9$ samt med den S-formade kurvan i de två dialogcitaten ovan.

Hen tycker att en funktion kan representeras med ord, med en graf eller med en formel. Dock tycker hen att det är svårt att se en funktion framför sig om den representeras med ord, det är lättare om man har en formel för funktionen. Därför försöker hen bestämma en formel för att representera funktionen i uppgift 6 i enkäten.

Hen formulerar följande personliga definition av funktion i enkäten: ”En funktion varierar i värde beroende på variabler och kan beskrivas som en graf. Det är ett värde som är konsekvent för olika värden på variabeln.” Under intervjun framkommer det att elev B menar att y-värdet är entydigt bestämt, när hen säger att en funktion måste ha ”ett värde som är konsekvent för olika värden på variabeln x”. Jag tolkar elevens definition som att en funktion är en beroenderelation, där y-värdet är entydigt bestämt samt att den kan representeras med en graf.

Elev B uppvisar potentiella konfliktfaktorer i sin begreppsbild mellan å ena sidan en betydande osäkerhet om kravet på entydigt funktionsvärde och å andra sidan en del av sin personliga definition av funktion ”att funktionsvärdet måste vara entydigt bestämt”. Hen visar dessutom följande delar av sin begreppsbild: *y måste vara beroende av värdet på den oberoende variabeln x* samt att en funktion kan vara diskontinuerlig.

Elev C

Elev C går andra året på Naturvetenskapsprogrammet och har slutfört kurserna matematik 1c och 2c. Eleven (C) uppmanas av intervjuaren (I) att rita kurvan som har ekvationen $x^2 + y^2 = 9$ i uppgift 3a. Hen ritar en rätvinklig triangel, där längden av kateterna betecknas *x* respektive *y*. Hypotenusans längd är tre längdenheter.

I: Uttrycker ekvationen *y* som en funktion av *x*?

C: Ja.

I: Hur många lösningar har ekvationen $y^2 = 9 - x^2$ för ett givet värde på *x*, till exempel *x*=0?

C: Två. Tre och minus tre.

I: Är det ett problem att man får två *y*-värden?

C: Sidan av en triangel måste vara positiv.

Elev C associerar ekvationen $x^2 + y^2 = 9$ till Pythagoras sats i en rätvinklig triangel och inte till en cirkel. För eleven är både *x* och *y* positiva tal eftersom de är kateter i en rätvinklig triangel. Å andra sidan anser hen att ekvationen har två lösningar, en positiv och en negativ. Om man har bestämt sig för att $x > 0$ och $y > 0$ så är det korrekt att *y* representerar en funktion av *x*.

Hen skriver så här om frågan om den S-formade kurvan i uppgift 5b representerar en funktion av x: ”Nej. [Det är inte en funktion.] x kan inte gå baklänges.” Hen ger en annorlunda beskrivning av en konsekvens av kravet på entydighet hos ett funktionsvärde. Hen förbinder de sex givna punkterna i uppgift 4 i godtycklig ordning och inte från vänster till höger. Eleven motsäger nu kravet på entydighet hos ett funktionsvärde som hen uttryckte såsom att *x* inte kan gå baklänges, i samband med den S-formade kurvan i uppgift 5b.

På frågan om ekvationen $y = 4$ uttrycker en funktion svarar eleven ja:

> I: Uttrycker $y = 4$ en funktion av *x*?
>
> C: Ja. $\mathrm{f}(x) = y$. y är lika med fyra. $\mathrm{f}(x) = 4$.
>
> I: Hur många variabler finns det?
>
> C: Alla *x* som gäller för den funktionen. [Elev C missförstår frågan.]
>
> I: Är *x* en variabel?
>
> C: Ja.
>
> I: Vad är definitionsmängden?
>
> C: Vad som helst. Alla tal.
>
> I: Är *y* en variabel?
>
> C: Nej. *y* är fyra. Det står i uppgiften.

Intervjuaren visar nu funktionsuttrycket för signumfunktionen för eleven.

> I: Om vi tittar på den här funktionen. Är detta en funktion av *x*?
>
> C: Nej. Det är två funktioner.
>
> I: Hur många variabler finns det här? [Intervjuaren pekar på signumfunktionen.]
>
> C: [viskar] Vad betyder variabel?
>
> I: Ja. Vad är en variabel?
>
> C: Det är ett tal. Alla tal.
>
> I: Finns det några variabler här? [Intervjuaren pekar på signumfunktionen.]
>
> C: Ja, nej, ja, förmodligen *x*.
>
> I: Är *y* en variabel? [Intervjuaren pekar på *y* i signumfunktionen.]
>
> C: Nej, för det kan vara två tal, minus ett och ett.

Elev C accepterar den konstanta funktionen, vilket implicerar att sådana funktioner finns i elevens begreppsbild. Eleven är konsekvent i sin felaktiga uppfattning att *x*, men inte *y* är en variabel, vilket avspeglas av att hen missförstår intervjuarens fråga ”Hur många variabler finns det?” Eleven svarar med de tillåtna värdena på *x*: ”Alla *x*”. Eleven inser under intervjun att hen inte förstår begreppet variabel och frågar intervjuaren vad en variabel är. Hen identifierar begreppen variabel och en funktions definitionsmängd, vilket framgår av att hen besvarar båda frågorna ”Vad är en variabel?” respektive ”Vad är definitionsmängden?” med samma fras ”alla tal” samt av att hen anser att *x*, men inte *y* är en variabel. Min tolkning är att elev C förstår begreppet variabel som en storhet som måste kunna variera. I samband med funktioner är *x* den oberoende variabeln och *y* är den beroende variabeln.

På frågan om hur många olika grafer man kan rita som går genom de två givna punkterna i uppgift 4 svarar eleven: ”En, för att det ska vara en linje och det finns två punkter.” Hen tar för givet att man ska rita en rät linje genom de två givna punkterna. Två punkter frammanar en rät linje i elevens begreppsbild, vilket visar att hen använder linjära funktioner som prototypexempel (Schwarz & Hershkowitz, 1999) på funktioner. Min hypotes är att eleven inser att två punkter bestämmer en och endast en rät linje.

Elev C svarar på frågorna om de styckvis definierade funktionerna i uppgift 3c och 3d uttrycker *y* som en funktion av *x*: ”Nej. För det är två funktioner.” Min tolkning är att styckvis definierade funktioner inte ingår i elevens begreppsbild om funktion. Eleven har inte mött några sådana funktioner i de kurser som hen har studerat.

På frågan om man får lyfta på pennan, när man ritar en graf genom de sex givna punkterna i uppgift 4 svarar eleven: ”Nej, för då blir det två olika ekvationer. Det blir inte en. ”Eleven svarar på frågan om den diskontinuerliga funktionen i uppgift 5d beskriver *y* som en funktion av *x*: ”Nej. För det är två linjer. De kopplar inte ihop till varandra. Det är två delar. ”Min tolkning av de två citaten ovan är att diskontinuerliga funktioner inte ingår i elevens begreppsbild om funktion. Diskontinuerliga funktioner ingår inte i de kurser som hen har studerat. Sådana funktioner behandlas först i kursen Matematik 3c.

På frågan om den styckvis definierade funktionen i uppgift 5c är en funktion svarar eleven: ”Nej. Den vänstra delen [som ser ut att vara en andragradskurva] är inte en linje. Det blir inte en funktion, kanske två funktioner.” Hen ställer ett krav på en funktion. Man ska kunna bestämma en formel för den, men det går inte i uppgift 5c eftersom ”andragradskurvan är inte en linje så man kan inte få en funktion av den”. Här identifierar eleven en funktion med en formel; grafen representerar en funktion endast om man kan bestämma en formel för den.

Elev C definierar en funktion som ett samband mellan två tal, som brukar kallas *x* och *y*. Att *y* ska vara entydigt bestämt för ett givet värde på *x*, återfinns inte i elevens personliga definition, men kravet på entydigt funktionsvärde ingår i elevens begreppsbild, såsom den kommer till uttryck under intervjun. Elevens personliga definition av funktion är en potentiell konfliktfaktor i begreppsbilden.

Elev D

Elev D går andra året på Naturvetenskapsprogrammet och har slutfört kurserna matematik 1c och 2c. Under intervjun utspelas följande dialog mellan intervjuaren (I) och eleven (D):

> I: Uttrycker ekvationen *y* som en funktion av *x*? [Intervjuaren pekar på ekvationen
>
> $x^2 + y^2 = 9$ i elevens kopia av enkäten.]
>
> D: Det är inte en funktion för ett *x*-värde kan inte ha två olika *y*-värden.

Elev D använder kravet på entydigt funktionsvärde för en funktion, för att motivera att cirkeln inte är graf till en funktion. Motiveringen är korrekt.

Hen förbinder de sex givna punkterna i uppgift 4 till en sammanhängande graf i godtycklig ordning, inte nödvändigtvis från vänster till höger.

> I: Är det en graf till en funktion?
>
> D: Nej.
>
> I: Varför är det inte en funktion?

D: För att ett x-värde kan få två olika lösningar. Kolla här! [Hen visar två punkter på sin kurva med samma x-värde men olika y-värden.]

Elev D använder återigen kravet på entydigt funktionsvärde för att förkasta sin egenhändigt ritade kurva.

Eleven skriver om ekvationen $y = 4$ i uppgift 3b: ”Ekvationen $y = 4$ är en funktion, $y = 4$ medför $y = 2x$ om $x = 2$ så $y = 2 \cdot 2 = 4$.” Eleven ger rätt svar, men med fel motivering om varför $y = 4$ är en funktion. De två funktionerna är lika, endast när $x = 2$. Resonemanget bygger på den felaktiga uppfattningen att en funktion måste vara beroende av x, till exempel representeras med en ekvation som innehåller x.

I följande dialog som utspelas om grafen till $y = 4$ i uppgift 5a framkommer det att eleven inte accepterar en rät linje som graf till en funktion. Hen anser att grafen till en funktion måste vara böjd.

I: Är grafen [$y = 4$] en funktion?

D: Nej. Det är ett koordinatsystem. Vi har en graf. Vi har ingen kurva.

I: Har vi en linje?

D: Ja. Det är konstant hastighet. Om vi talar om hastighet.

I: Varför är hastigheten inte en funktion av tiden?

D: […] Den skapar inte en kurva.

I: Måste en kurva vara böjd?

D. Ja, så tänker jag.

I elevens begreppsbild är horisontella linjer separerade från begreppet funktion. Följande är matematiskt korrekt: En funktion kan representeras med en graf. Varje icke-vertikal rät linje är graf till en funktion.

Elev D har försökt rita en andragradskurva genom de två givna punkterna i det övre koordinatsystemet i uppgift 4, men har misslyckats med att få sin kurva genom båda punkterna. Den går bara genom en av punkterna.

I: Kan man rita en rät linje när man ska rita en graf till en funktion? [När man ritar en graf genom de två givna punkterna i uppgift 4.]

D: Nej.

I: Varför kan man inte rita en rät linje? [Genom de två givna punkterna i uppgift 4.]

D: Då pratar man om koordinatsystem och då är $y = kx + m$.

I: Är $y = kx + m$ en funktion?

D: Nej. En funktion är y lika med f i parentes x.

I skolans matematikkurser brukar den algebraiska representationen av en linjär funktion skrivas på formen $y = kx + m$. För elev D är ett koordinatsystem ett system med en rät linje inritad. Hen gör en distinktion mellan räta linjer och funktioner. Elev D uppvisar en begreppsbild, där räta linjer är separerade från begreppet funktion.

I enkäten formulerar hen sin personliga definition av funktion; ”Varje x-värde motsvarar ett y-värde. Ett y-värde kan ha två olika x. Visar till exempel minskning eller ökning av fart eller temperatur." Elevens andra villkor, "Ett *y*-värde kan ha två olika *x*", kan uttryckas som att en funktion inte behöver vara injektiv. Det är korrekt att det finns funktioner som inte är injektiva, till exempel andragradsfunktioner.

Elev D uppvisar följande delar av sin begreppsbild om funktion: *y måste vara beroende av värdet på den oberoende variabeln x*. Funktionsvärdet måste vara entydigt bestämt. Räta linjer är separerade från begreppet funktion. Hen uppvisar potentiella konfliktfaktorer mellan å ena sidan sin definition av funktion; "varje *x*-värde motsvarar ett *y*-värde" och å andra sidan att en rät linje inte representerar en funktion.

Elev F

Elev F går tredje året på Naturvetenskapsprogrammet och har slutfört kurserna matematik 1c, 2c, 3c och 4. Elev F genomför följande steg när hen löser ut *y* ur ekvationen $x^2 + y^2 = 9$ i uppgift 3a.

$y^2 = 9 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$

Elev F är medveten om att ekvationen har två lösningar, men väljer ändå bara den positiva roten till ekvationen med motiveringen att: "Det kändes naturligt att räkna med positiva *y*-värden." Hen skriver om den positiva roten att: "y kan uttryckas som en funktion av *x* eftersom det visar ett samband mellan variablerna. Funktionsvärdet är beroende av värdet på *x*." När eleven har bestämt sig för att endast beakta den positiva roten till ekvationen, så är det korrekt att ekvationen representerar en funktion.

Hen skriver om den S-formade kurvan i uppgift 5b: "Grafen beskriver inte *y* som en funktion av *x* då ett *x*-värde kan ge 3 *y*-värden. För $x = 0$ finns 3 olika funktionsvärden. För en funktion kan det bara finnas ett funktionsvärde för varje *x*-värde." Hen formulerar en korrekt motivering för att den S-formade kurvan inte representerar en funktion. Elevens resonemang bygger på kravet på entydighet hos ett funktionsvärde.

Om graferna i uppgift 5c och 5d skriver hen att: "Graferna beskriver *y* som en funktion av *x* eftersom båda graferna visar ett samband mellan *x* och *y*, på så sätt att ett *x*-värde ger <u>ett</u> *y*-värde." Ordet "ett" är understruket i elevens enkät, vilket jag tolkar som "ett och endast ett" *y*-värde. Med stöd av citaten ovan, är min tolkning att kravet på entydigt funktionsvärde ingår i elevens begreppsbild om funktion.

Om ekvationen $y = 4$ i uppgift 3b skriver hen: "Ekvationen [$y = 4$] uttrycker inte en funktion, eftersom att det för en funktion krävs två eller flera variabler. Ekvationen beskriver endast en likhet mellan *y* och talet fyra. *y* är bestämd och inte en variabel. Variabeln *x* finns inte ens med i ekvationen [$y = 4$]."

Under intervjun utspelas följande dialog mellan intervjuaren (I) och eleven (F) om ekvationen $y = 4$.

> I: Hur många variabler finns det i ekvationen? [$y = 4$]
>
> F: En, nej, ingen, kanske, *y* är bestämd.
>
> I: Är *y* en variabel?
>
> F: Nej. Den kan inte variera. Det är bara en likhet.

Om den horisontella linjen $y = 4$ i uppgift 5a skriver hen: "Grafen visar inget samband mellan variablerna *x* och *y* eftersom funktionsvärdet inte är beroende av värdet på *x*, som en funktion är." Hen tycker alltså att varken den algebraiska eller den grafiska representationen av den konstanta funktionen uttrycker ett funktionssamband. Elevens resonemang baseras på den felaktiga uppfattningen att *y* måste vara beroende av variabeln x. Hen har förstått begreppet variabel, som en storhet som måste kunna anta olika värden.

Citaten ovan indikerar att konstanta funktioner inte ingår i elevens begreppsbild. Att derivera uttrycket $y = 4$, samtidigt som det *inte* betraktas som en funktion blir mycket problematiskt, vilket tydligt illustreras i följande dialog:

> I: Kan man derivera $y = 4$? [Intervjuaren pekar på den horisontella linje vars ekvation är $y = 4$ i uppgift 5a.]
>
> F: Hm. Nja. Det kanske bara blir noll. Det kanske inte går överhuvudtaget.
>
> I: Varför går det inte? Vad betyder derivata geometriskt?
>
> F: Jag tittar på lutningen i punkter. Om lutningen i alla punkter är noll så borde väl derivatan också bli noll.
>
> I: Är y' [derivatan av *y*] en funktion?
>
> F: [30 sekunders tystnad] Den berättar ju bara att lutningen i en punkt är noll. Den är inte beroende av vilken punkt eller vilket *x*-värde det är. Den visar bara på att en derivata är noll.
>
> I: Är y' inte en funktion?
>
> F: Nej, jag är osäker. [Tystnad].

Hen betraktar alltså inte heller derivatan av *y* som en funktion, eftersom den är oberoende av variabeln *x*. Hen får alltså svårigheter med att derivera en viktig klass av funktioner, de konstanta funktionerna. Jag argumenterar för att det är nödvändigt att ha en strukturell förståelse av begreppet funktion för att kunna förstå begreppet *derivata av en funktion*. Om man bara har en operationell förståelse av funktion så kommer derivata av en funktion att uppfattas som en process, som appliceras på en annan process. Med en strukturell förståelse av begreppet funktion kan derivata av en funktion förstås som att derivationsoperatorn appliceras på ett funktionsobjekt och ger ett nytt funktionsobjekt, derivatan av funktionen.

Om uttrycken i uppgifterna 3c och 3d skriver hen:

> Funktionerna [$y = \begin{cases} 0 \text{ om } x < 0 \\ x \text{ om } x \geq 0 \end{cases}$ och $y = \begin{cases} 3 \text{ om } x < 0 \\ x^2 \text{ om } x \geq 0 \end{cases}$] uttrycker *y* som en funktion av *x* eftersom värdet på *y* är beroende av värdet på *x*.

Uppgift 6 i enkäten lyder så här: ”Finns det en funktion som uppfyller följande två villkor? Om *x* är ett heltal så ska funktionen ha ett värde som inte är ett heltal. Om *x* inte är ett heltal så ska funktionen ha ett heltalsvärde.” Hen svarar:

> Ja, exempelvis $y = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ om } x \text{ är heltal} \\ 0 \text{ om } x \text{ inte är ett heltal} \end{cases}$ eftersom den liknar $y = \begin{cases} 0 \text{ om } x < 0 \\ x \text{ om } x \geq 0 \end{cases}$

Hen anger ett korrekt exempel på en styckvis definierad funktion som uppfyller båda villkoren i uppgift 6. Hen har mött sådana funktioner i kurserna matematik 3c och 4, till exempel absolutbeloppet som funktion av *x*. På basis av de hens svar är min tolkning att styckvis definierade funktioner ingår i hens begreppsbild om funktion. Även det svar som hen anger i uppgifterna 5c och 5d stöder denna slutsats: ”Graferna beskriver *y* som en funktion av *x* eftersom båda graferna visar ett samband mellan *x* och *y*, på så sätt att ett *x*-värde ger ett *y*-värde.”

I enkäten anger hen sin personliga definition av funktion: ”En funktion är ett samband mellan två variabler, där *x* är den oberoende variabeln och *y* är den beroende. En funktion har bara ett *y*-värde för varje värde på *x*.” Elevens personliga definition av funktion liknar Dirichlets definition. Att värdet på *y* ska vara entydigt bestämt av funktionen för ett givet värde på *x* framgår tydligt i elevens definition. Styckvis definierade funktioner, men inte konstanta funktioner ingår i elevens begreppsbild. Att hen inte accepterar konstanta funktioner är en potentiell konfliktfaktor i begreppsbilden.

Diskussion

Metoddiskussion

Hösten 2012 genomförde jag en pilotstudie, där jag använde begreppskartor för att undersöka vilka begreppsassociationer gymnasieelever får, när de löser ett givet modelleringsproblem enskilt. Eleverna fick först i uppgift att lösa det givna modelleringsproblemet och sedan uppmanade jag dem att rita en begreppskarta, som innehåller alla begrepp, som de associerar med det givna problemet. Jag fick dock inte ut så mycket information om elevernas begreppsbilder ur deras begreppskartor, som jag hade förväntat mig. Jag hade med ett exempel på en begreppskarta om några datorrelaterade begrepp i min pilotstudie. Jag valde att inte ge eleverna en begreppskarta med *matematiska* begrepp, eftersom det skulle kunnat påverka vilka begrepp de tog med i sin begreppskarta. Eleverna som deltog i den pilotstudien hösten 2012 hade, mig veterligen, ingen tidigare erfarenhet av att utforma begreppskartor om matematiska begrepp. Däremot har gymnasieelever lång erfarenhet av att besvara matematikprov. Inför höstterminen 2013 bestämde jag mig för att utforma en enkät med en struktur, som liknar ett matematikprov. Hösten 2013 genomförde jag en ny pilotstudie med denna provliknande enkät med avsikt att undersöka elevers förståelse av ett specifikt begrepp, nämligen funktionsbegreppet. En reviderad version av enkäten återfinns som bilaga till föreliggande uppsats.

Eftersom en enkät inte säger allt om en elevs begreppsbild kompletterade jag den information, som enkäten gav, med att intervjua fem av de elever som hade besvarat enkäten. Jag valde att intervjua elever på den skola där jag arbetar som matematiklärare. Jag intervjuade bara elever som hade mig som matematiklärare, eftersom jag utgick ifrån att de troligen har förtroende för mig och därmed vågar dela med sig av sina tolkningar och funderingar om begreppet funktion. Några av de fem elever, som blev intervjuade, uppvisade intressanta potentiella konfliktfaktorer mellan olika delar av sina begreppsbilder (Tall & Vinner, 1981). Jag tror inte att närvaron av en diktafon nämnvärt påverkade elevernas svar under intervjuerna, då de inte verkade vara spända eller nervösa inför eller under intervjun. Jag tror inte heller att mina följdfrågor under intervjuerna påverkade elevernas svar, eftersom avsikten med mina följdfrågor endast var att klargöra elevernas argumentation.

Jag anser mig inte ha haft några förutfattade meningar om mina elevers begreppsbilder om funktion. I min analys utgick jag endast från det som mina elever uttrycker när de besvarar enkäten och från vad de uttalar under intervjun. Det finns dock en risk att mitt beslut, att låta mina egna elever delta i studien, har inverkat på studiens resultat. Mina elever befinner sig i en beroendeställning eftersom jag är deras lärare. Någon elev kan ha avstått från att delta i min studie för att hen trott att hen riskerade sänkt matematikbetyg, om hen misslyckades med enkäten. En annan elev kan ha sett en möjlighet att höja sitt betyg genom att delta i min studie. Det kan alltså ha blivit ett skevt urval av elever med olika inställning till betyg, trots att jag har betonat att deras medverkan i min studie inte är ett betygsunderlag. Min avsikt var inte att studera samband mellan attityder till betyg och förståelse av begreppet funktion.

Jag valde att ta med elever som gick andra *eller* tredje året på min skola i urvalet på grund av att det är så få elever på Naturvetenskapsprogrammet på min skola. Det är sju elever i årskurs två och sex elever i årskurs tre på skolan där jag arbetar som matematiklärare. Tre elever från vardera årskursen deltog i den del av studien, som genomfördes på min skola. Eleverna i årskurs två respektive årskurs tre hade vid undersökningstillfället olika förkunskaper i matematik. Eleverna i årskurs tre hade mött fler klasser av funktioner och arbetat med fler problem där funktioner används som matematiska modeller. De hade haft längre tid för att utveckla sin förståelse av begreppet funktion. Eleverna i årskurs två på min skola hade vid undersökningstillfället inte studerat några exempel på diskontinuerliga funktioner. De hade heller inte mött begreppet absolutbelopp eller några andra exempel på styckvis definierade funktioner vid undersökningstillfället. Eleverna på den andra skolan hade sett ett exempel på en styckvis definierad funktion *före* undersökningstillfället.

Jag delade upp den del av min studie, som genomfördes på min skola i två steg, först besvarade eleverna en enkät och sedan genomfördes intervjuer. Min tanke var att några av de elever, som inte vill bli intervjuade, ändå kunde delta i det första steget genom att besvara enkäten. Några elever från vardera skolan framförde åsikten att enkäten var alltför tidskrävande och att de upplevde att det var svårt att hinna med att besvara alla frågorna. Jag håller med eleverna om att enkäten var omfattande. Jag borde ha tagit bort den första uppgiften, att läsa av nollställen till en given graf i ett koordinatsystem, eftersom den inte gav mycket information om elevernas begreppsbilder om funktion. När jag konstruerade enkäten tänkte jag att det är bra att inleda den med en enklare uppgift, som får eleverna att börja tänka på funktioner, innan jag problematiserar begreppet med svårare uppgifter. Fråga 4b i min enkät lyder: ”Hur många olika grafer kan man rita som går genom punkterna? Motivera ditt svar!” En elev ritade två parallella linjer genom tre av de sex givna punkterna, samt tre parallella linjer genom två av punkterna. Under intervjun framkom det att hen har uppfattat frågan som: Hur många olika grafer kan man rita som går genom *några* av punkterna? Jag kunde undvikit denna missuppfattning genom att formulera frågan som: ”Hur många olika grafer kan man rita som går genom *alla* punkterna?”

Generaliserbarhet

Jag genomförde studien med hjälp av en så kallad ”tillgänglig grupp”, eftersom jag inte hade de tidsmässiga eller ekonomiska resurser som behövs för att undersöka ett större slumpmässigt urval. Mitt resultat som baseras på 16 gymnasieelever på Naturvetenskaps-programmet är inte vetenskapligt generaliserbart till den större populationen elever i Sverige, dels på grund av att urvalet är för litet, dels för att urvalet inte är slumpmässigt. Jag har visat vilka begreppsbilder om funktion, som finns representerade i min undersökningsgrupp. Dock är min mångåriga erfarenhet som gymnasielärare i matematik att många gymnasielever har uppvisat liknande begreppsbilder om funktionsbegreppet, som jag såg i min undersökning.

Resultatdiskussion

I detta avsnitt diskuterar jag mina resultat samt jämför dem med de resultat som Vinner och Dreyfus (1989); Hansson (2006) respektive Viirman et al. (2010) redovisar i sina empiriska studier. Vinner och Dreyfus undersöker collegestudenter i Israel, vars utbildning kan sägas motsvara andra och tredje året på det svenska Naturvetenskapsprogrammet. Hansson respektive Viirman et al. undersöker lärarstudenters förståelse av funktionsbegreppet.

Diskussion av respondenternas definitioner av begreppet funktion

Eleverna i min studie anger sina personliga definitioner av begreppet funktion i enkäten. Min analys av elevernas definitioner resulterar i en kategorisering bestående av fyra kategorier, som jag benämner; Samband, Beroenderelation, Regel samt den Grafiska representationen av funktion. En svårighet med att analysera elevernas definitioner är att de är vagt och informellt formulerade. Elevernas definitioner i form av en kortfattad utsaga säger bara lite om deras förståelse av begreppet funktion.

Min första kategori ”En funktion är ett samband mellan två variabler” kan sägas ha, vad Sfard (1991; 1995) kallar, en operationell karaktär, men även en strukturell karaktär. Ett funktionssamband kan representeras med en ekvation, som enligt Sfard, kan tolkas både operationellt och strukturellt. I sin argumentation för detta jämför Sfard med tolkningen av symbolen ” = ” i samband med ekvationer. Likhetstecknet kan dels tolkas operationellt som ett kommando att utföra de beräkningar som finns i ekvationen, dels strukturellt som en jämvikt mellan ekvationens båda led (Sfard, 19991, s. 6). Den definition som Alfredsson (2011a) formulerar i elevernas lärobok är, bortsett från att en funktion ska representeras enligt en regel, av liknande karaktär som definitionerna i min första kategori. Detta kan vara en förklaring till att den är den enskilt största kategorin.

Eleverna i min andra kategori, Beroenderelation, formulerar definitioner av begreppet funktion, som kan sägas ha vissa likheter med Eulers definition av funktion från år 1755. Det kan dock vara problematiskt att jämföra mina elevers definitioner med Eulers definition, eftersom eleverna respektive Euler arbetar med olika funktionsbegrepp. Eleverna i min studie har det funktionsbegrepp, som deras lärobok definierar: *En funktion är ett samband mellan två variabler* x *och* y*, som är sådant att varje* x*-värde, enligt någon regel, ger ett bestämt* y*-värde* (Alfredsson et al., 2011a, s. 288). Eulers definition är att *en storhet beror av en annan storhet på ett sådant sätt att om den senare storheten förändras så ska också den förra storheten förändras* (Sfard, 1991, s.15). Eleverna preciserar inte vad de menar med att *y-värdet är beroende av x-värdet* i sina definitioner, medan Euler preciserade innebörden av att en storhet beror av en annan storhet; *om den senare storheten förändras så ska också den förra storheten förändras*. Dessutom saknar flertalet elever i min studie villkoret *att det till varje värde på variabeln* x *motsvarar ett entydigt bestämt värde på variabeln* y. Även det närliggande begreppet variabel skiljer sig åt mellan Eulers respektive elevernas begreppsramar. Sfard menar dels att Eulers definition av funktion från år 1755 har en operationell karaktär, dels att en elev måste nå fram till Bourbakis definition av funktion för att sägas ha nått en strukturell förståelse av begreppet (Sfard, 1991, s. 14-15). Därmed kan man säga att elevernas definitioner i den andra kategorin inte har en strukturell karaktär.

Kategori 3 är ”En funktion är en regel”. Det är värt att notera att endast en elev i min studie definierar funktion som en regel, trots att lärobokens definition betonar att en funktion är ett samband mellan två variabler x och y, som är sådant att varje x-värde, *enligt någon regel*, ger ett bestämt y-värde (Alfredsson et al., 2011a, s. 288, min kursivering). Jag har aldrig betonat att en funktion måste representeras med en regel i min undervisning. Enligt Dirichlets definition av funktion från år 1829 är det oväsentligt på vilket sätt ett funktionssamband etableras (Kleiner, 1989). Det är alltså onödigt att formulera kravet på att en funktion måste representeras med en regel såsom Alfredsson et al. (2011a) gör i läroboken.

Definitionerna i kategori 4, en funktion är en graf, är en korrekt definition av funktion om man lägger till villkoret att det till varje värde på x ska finnas ett bestämt värde på y. Man kan formulera en mängdteoretisk definition av begreppet funktion som mängden av ordnade par (x, y), där det inte får finnas två olika ordnade par med samma förstakoordinat. Den mängden av ordnade par är precis funktionens graf.

Min kategorisering av elevernas definitioner av begreppet funktion består alltså av de fyra kategorier som beskrivs ovan. Vinner och Dreyfus (1989) identifierar sex kategorier av sina respondenters definitioner i sin kvantitativa studie. Vinner och Dreyfus kategori Samband liknar Bourbakis definition av funktion som ett samband mellan två mängder. Denna kategori har en strukturell karaktär. Min kategori Samband är ett samband mellan *variabler* och inte mellan *mängder*, vilket är naturligt eftersom mina elever inte har studerat mängdlära på gymnasiet. Eleverna i min studie har studerat begreppen definitions- och värdemängd, som är delar av den formella definitionen av funktionsbegreppet, trots att de inte har studerat någon mängdlära. Det kan leda till problem för vissa elever när de i samband med funktioner ska förstå två mängdbegrepp, utan att först ha studerat mängdlära. Om Skolverket hade valt att lägga in de tre generella begreppen; mängd, delmängd och element i en mängd, i ämnesplanen för kursen matematik 1c, så tror jag att eleverna skulle ha haft bättre förutsättningar att förstå begreppen definitions- och värdemängd och i förlängningen bättre möjligheter att förstå funktionsbegreppet. Att till exempel kunna uttrycka att x är ett element i en funktions definitionsmängd, som är en delmängd av mängden av de reella talen, kan vara ett steg mot en strukturell förståelse av begreppet funktion. Därmed inte sagt att det är lämpligt att använda Bourbakis mängdteoretiska definition av begreppet funktion i kursen matematik 1c, eftersom man då riskerar att återupprepa de misstag som gjordes i samband med den ”nya matematiken” på 1960-talet. Enligt Tall har universitetsstudenter extremt svårt att förstå en mängdteoretiskt formulerad definition av begreppet funktion. Den kognitiva rekonstruktion, som är nödvändig för att förstå den mängdteoretiska definitionen är mer krävande än att förstå det processrelaterade funktionsbegreppet (Tall, 1992e, s. 499).

Förutom de kategorier jag identifierar i min studie har Vinner och Dreyfus identifierat ytterligare två kategorier; Operation respektive Formel. I kategorin Operation definieras funktion som en operation eller transformation. I kategorin Formel definieras funktion med en formel, ett algebraiskt uttryck eller en ekvation, det vill säga med den algebraiska representationen av funktionsbegreppet. Enligt Sfard kan den algebraiska representationen tolkas både operationellt och strukturellt (Sfard, 19991, s. 6). Det är anmärkningsvärt att ingen elev i min studie definierar begreppet funktion som en formel. Min hypotes är att formler associeras till skolämnet fysik och inte till begreppet funktion. Jag tror inte att eleverna betraktar fysikformler som funktioner.

Viirman et al. identifierar fem kategorier av sina studenters definitioner av begreppet funktion, där forskarna har slagit samman kategorierna Samband och Beroenderelation till en kategori, som enligt forskarna har en strukturell karaktär. Jag saknar forskarnas andra kategori: ”En funktion är en ’maskin’ eller en eller flera operationer, som transformerar variabler till nya variabler” i min kategorisering. Den kategorin är troligen främmande för mina elever, eftersom varken jag eller läroboken nämner funktionsmaskiner. Den tredje kategorin är ”En funktion är en regel, en formel eller ett algebraiskt uttryck” (Viirman et al., 2010, s. 11). Forskarna påstår att deras tredje kategori har en operationell karaktär, men enligt Sfard kan den algebraiska representationen av en funktion tolkas både operationellt och strukturellt (Sfard, 19991, s. 6). I den fjärde kategorin identifieras en funktion med den grafiska representationen och i den femte kategorin har studenterna angivet ett meningslöst svar.

Diskussion av delar av begreppsbilder om funktion

I detta avsnitt diskuterar jag de delar av begreppsbilder, som eleverna i min studie uppvisar, i relation till de teorier som formuleras av Sfard (1991) samt Tall och Vinner (1981). Dessutom jämför jag mina elevers begreppsbilder med de resultat som redovisas i studier av Vinner och Dreyfus (1989); Hansson (2006) respektive Viirman et al. (2010).

y måste vara beroende av *x*

Tio av 16 elever i min studie tycker inte att ekvationen $y = 4$ representerar en funktion. Eleverna motiverar sitt ställningstagande med att y-värdet är oberoende av x eller med det ekvivalenta argumentet att det inte finns någon term, som innehåller variabeln x i ekvationen. Dessa tio elever uppvisar en del av en begreppsbild, som Tall och Vinner (1981) kallar en potentiell konfliktfaktor, som är i motsatsställning till den formella definitionen av begreppet funktion, som deras lärobok formulerar: *Om sambandet mellan två variabler x och y är sådant att varje x-värde, enligt någon regel, ger ett bestämt y-värde så kan vi säga att y är en funktion av x* (Alfredsson et al., 2011a, s. 12). Elev L i min studie tycker inte att ekvationen $y = 4$ representerar en funktion, eftersom det inte finns någon term, som innehåller x i ekvationen. En del av hens begreppsbild om funktion är att y *måste vara beroende av värdet på den oberoende variabeln x*. Hen uppvisar potentiella konfliktfaktorer i sin kognitiva struktur; å ena sidan sin begreppsbild och å andra sidan en del av sin personliga definition av funktion; *att det finns ett y-värde för varje x-värde.*

När det gäller frågan om respondenterna accepterar konstanta funktioner så är det en god överensstämmelse mellan mitt resultat och de resultat som redovisas såväl av Vinner och Dreyfus (1989) såsom av Viirman et al. (2010). Cirka hälften av studenterna i Vinner och Dreyfus studie tycker att det finns en funktion vars värden är lika med varandra. Några studenter formulerar exempel på en sådan funktion med en formel, som ytligt sett ser ut att innehålla den oberoende variabeln *x*: $y = {}^{x}/_{x}$ eller $y = x^0$ (Vinner & Dreyfus, 1989, s. 364). Båda funktionerna är förstås oberoende av variabeln *x.* Elev N i min studie tycker inte att ekvationen $y = 4$ representerar en funktion, men att man kan skriva om ekvationen till $y = 4x^0$, så att den representerar en funktion. Delbilden y *måste vara beroende av värdet på den oberoende variabeln x* framträder mycket tydligt i elevens begreppsbild. Elev N visar vad Sfard (1991) kallar en operationell förståelse av begreppet funktion; man måste utföra en operation med variabeln *x*, för att erhålla motsvarande y-värde. Cirka två tredjedelar av studenterna i den studie som redovisas av Viirman et al. anser att ekvationen $y = 3$ inte representerar en funktion (Viirman et al., 2010, s. 15).

Min hypotes är att respondenterna tolkar utsagan y *beror av x* bokstavligen som att y *måste vara beroende av värdet på den oberoende variabeln x* för att beroenderelationen ska representera en funktion. Troligen har deras matematiklärare uttalat frasen y *beror av x* i samband med funktioner, som representeras algebraiskt. Risken med att använda vaga och informella formuleringar, när man definierar ett begrepp, är att vissa elever missuppfattar begreppet. Vissa elever i min studie har en alltför begränsad förståelse av funktion, eftersom de inte accepterar konstanta funktioner.

Jag argumenterar för att vissa elever förkastar den konstanta funktionen $y = 4$, eftersom de har missförstått begreppet variabel. Variabel finns i elevernas begreppsbilder som en storhet, som måste kunna variera. Detta kan vara en konsekvens av följande olyckliga formulering av definitionen av variabel i elevernas lärobok: ”Om en bokstav i en ekvation kan anta olika värden kallas den en variabel” (Alfredsson et al., 2011a, s. 10). Min hypotes är att eleverna i min studie resonerar ungefär så här: y *kan bara anta värdet fyra, men en variabel måste kunna anta flera olika värden. Alltså är* y *inte en variabel. Det finns alltså inga variabler i ekvationen, som därmed inte kan representera en funktion.*

Det är matematiskt korrekt att den beroende variabeln y kan variera inom den konstanta funktionens värdemängd, som endast består av talet fyra. Därmed är y trots allt en variabel. Den oberoende variabeln kan variera inom mängden av reella tal, som är den konstanta funktionens definitionsmängd. Detta bör läraren problematisera i undervisningen, när begreppet variabel introduceras.

Krav på entydigt funktionsvärde

15 av de 16 eleverna i min studie tror att cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 9$ representerar en funktion, trots att den inte uppfyller kravet på entydigt funktionsvärde. Endast cirka två tredjedelar av studenterna i den studie, som redovisas av Viirman et al. (2010) tror detta. En trolig förklaring till skillnaden i resultat är att studenterna har läst fler matematikkurser än mina gymnasieelever. En hypotetisk gymnasieelev kan resonera ungefär så här: Eleven ser att cirkelns ekvation innehåller ett x och ett y och resonerar att *då måste det finnas ett samband eller ett beroende mellan x och y och därmed representerar ekvationen en funktion*. Elev B tycker att cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 9$ representerar en funktion, eftersom ”*y* är beroende

av *x"*. Hen uppvisar potentiella konfliktfaktorer mellan å ena sidan sin begreppsbild, där hen inte beaktar kravet på entydigt funktionsvärde och å andra sidan sin personliga definition av funktion ”att *y*-värdet ska vara entydigt bestämt”.

När elev F löser ut *y* ur cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 9$ väljer hen att endast beakta den positiva roten $y = \sqrt{9 - x^2}$, med motivering att det kändes mer naturligt att ta den positiva roten. Min hypotes om varför hen endast väljer den positiva roten, är att när vi i kursen matematik 4 beräknade cirkelns area med hjälp av en integral, så räknade vi endast med den övre halvan av cirkeln. Det finns dock inget stöd för min hypotes i min empiri.

Sju av 16 elever i min studie genomskådar att den S-formade kurvan i uppgift 5b i min enkät inte representerar en funktion. En förklaring till att fler elever beaktar entydighetskravet i samband med den S-formade kurvan, än i samband med cirkelns ekvation, kan vara att den S-formade kurvan representeras grafiskt, medan cirkeln representeras algebraiskt med en ekvation. Det framkom under intervjuerna att några elever inte ser en cirkel i den algebraiska representationen av cirkeln. Eleverna har troligen fått entydighetsvillkoret förklarat för sig just genom att läraren har ritat olika grafer och prövat hur många gånger en vertikal linje skär den aktuella grafen. Om någon vertikal linje skär grafen i två eller flera punkter så representeras inte en funktion. Det kan vara enklare att förstå entydighetsvillkoret i den visuella grafen än i den algebraiska representationen av cirkeln.

Sammanhängande graf

Några studenter i den studie som redovisas av Vinner och Dreyfus (1989) anser att en funktion måste vara kontinuerlig. Några elever i årskurs 2 i min studie uppvisar en begreppsbild, där grafen till en funktion måste vara sammanhängande. Dessa respondenter uppvisar potentiella konfliktfaktorer, som är i motsatsställning till ett teorem i matematisk analys: Om en *kontinuerlig* funktion är definierad på ett reellt *intervall* så är dess graf sammanhängande. Eleverna i årskurs 2 har i undervisningen, nästan enbart studerat funktioner, vars grafer är sammanhängande. Begreppet kontinuerlig funktion ingår inte i någon av kurserna matematik 1c eller 2c, utan först i matematik 3c (Skolverket, 2013). Tre andra elever i årskurs 2, som går på den andra skolan, använder begreppet diskontinuerlig funktion i enkäten, trots att begreppet inte ingår i de kurser eleverna har studerat; matematik 1c och 2c. Matematikläraren på den andra skolan hade visat eleverna ett exempel på en diskontinuerlig funktion vid ett tillfälle på en lektion. Den lärobok, som användes på den andra skolan, formulerar en formell definition av begreppet kontinuerlig funktion utgående från gränsvärdesbegreppet (Alfredsson et al., 2011b, s. 40). Den lärobok, som jag använde, har en mer intuitiv formulering av kontinuerlig funktion; *Om grafen är sammanhängande och inte har några "hopp" är funktionen kontinuerlig (*Sjunnesson et al., *2012, s. 168).* Jag anser att en lärobok dels ska formulera en formell definition av ett begrepp, dels ge eleverna möjlighet att utveckla en intuitiv förståelse för det aktuella begreppet.

Styckvis definierad funktion

Cirka hälften av eleverna i min studie uppvisar styckvis definierade funktioner i sina begreppsbilder. Flera respondenter i den studie som redovisas av Vinner och Dreyfus (1989) tycker inte att en funktion kan definieras med två olika regler på två olika delområden av sin definitionsmängd. Respondenterna tycker att funktionen måste definieras med hjälp av *en* formel som gäller för hela funktionens definitionsmängd. Respondenterna uppvisar en begreppsbild där styckvis definierade funktioner saknas. Cirka 90 % av studenterna i den studie som redovisas av Viirman et al. (2010) accepterar styckvis definierade funktioner.

En förklaring till diskrepansen mellan de olika studierna kan vara att studenterna i den studie som redovisas av Viirman et al. har sett fler exempel på styckvis definierade funktioner. En annan tänkbar förklaring är att Viirman et al. använder symbolen $f(x)$ i sina uppgifter om styckvis definierade funktioner, medan jag använder symbolen y i min formulering av motsvarande uppgifter i min enkät. Vinner och Dreyfus (1989) använder inte någon symbolisk representation i sina uppgifter, utan de formulerar uppgifterna med ord. Min hypotes är att användandet av symbolen $f(x)$ kan leda respondenternas tankar till att en funktion representeras, oberoende av vilket uttryck som återfinns i ekvationens högerled. Min hypotes blir än mer trolig, när jag jämför de olika resultat som redovisas av Viirman et al. Endast en tredjedel av studenterna anser att ekvationen $y = 3$ representerar en funktion, medan cirka två tredjedelar av studenterna anser att ekvationen $f(x) = 3$ gör det. Forskarnas resultat beror alltså av vilken symbolisk representation som användes i uppgifterna i deras enkät.

Skolverket (2013) betonar i ämnesplanen för kursen matematik 3c en orientering kring kontinuerliga funktioner samt i kursen matematik 4 begreppet absolutbelopp som styckvis definierad funktion. I den lärobok som mina elever använde i kursen matematik 3c ges några exempel på styckvis definierade funktioner, som är diskontinuerliga i en eller flera punkter i sin definitionsmängd (Sjunnesson et al., 2012).

En funktion måste representeras med en formel

Flera respondenter i de studier som redovisas av Vinner och Dreyfus respektive Viirman et al. tycker att en funktion måste kunna representeras med en formel, som gäller för hela funktionens definitionsmängd. Jag får ett liknande resultat när några elever i min studie gör ihärdiga försök att bestämma en formel, som gäller för hela funktionens definitionsmängd och som uppfyller båda villkoren i uppgift 6 i min enkät. Dessa elever uppvisar potentiella konfliktfaktorer, som är i motsatsställning gentemot den formella definitionen av begreppet funktion. Detta är naturligt eftersom en majoritet av eleverna i min studie aldrig har sett några exempel på styckvis definierade funktioner i undervisningen. Flera av lärarstudenterna i Hanssons studie identifierar begreppet funktion med den algebraiska representationen av en funktion. De studenter som inte deltog i Hanssons försöksundervisning uppfattade en funktion som en formel, ett algebraiskt uttryck eller en ekvation (Hansson, 2006, s. 30-33).

Linjära funktioner

I skolans matematikkurser brukar den algebraiska representationen av en linjär funktion skrivas på formen $y = kx + m$, vilket kallas räta linjens ekvation. Elev D i min studie uppvisar under intervju en begreppsbild, där räta linjer är helt separerade från begreppet funktion. Hen uppvisar därmed en potentiell konfliktfaktor, som står i motsatsställning till hens personliga definition av funktion: *Varje x-värde motsvarar ett y-värde*. Med avsikt att förstå hur denna potentiella konfliktfaktor har kunnat uppkomma genomför jag en kritisk granskning av hur elevernas lärobok i matematik 1c hanterar linjära funktioner. I läroboken används termen linjär funktion, men symbolen $f(x)$ används aldrig i samband med räta linjens ekvation (Alfredsson et al., 2011a, s. 296-297). Jag anser att läroboksförfattarna skulle betonat att räta linjens ekvation representerar en funktion, genom att inkludera några exempel, där en linjär funktion representeras symboliskt som $f(x) = kx + m$, för några värden på parametrarna *k* och *m*.

Skolverket (2013) betonar i ämnesplanen för matematik skillnader mellan begreppen funktion och ekvation. Vissa elever i min studie förväxlar termerna funktion och ekvation. Detta kan förstås med att symbolen *x* används i två olika betydelser, dels som obekant tal i en ekvation, dels som oberoende variabel i samband med funktionsbegreppet. Flertalet studenter i Hanssons studie ser inte att ekvationen $y = x + 5$, utifrån funktionsbegreppet, kan uppfattas som att den innehåller två variabler och att ekvationen därmed representerar en funktion (Hansson, 2006, s. 30).

Några elever i min studie ritar enbart en rät linje genom två givna punkter i ett koordinatsystem. För dessa elever frammanas bilden av en rät linje, när de ser två punkter i ett koordinatsystem, vilket indikerar att de använder linjära funktioner som prototypexempel för begreppet funktion. Detta är i linje med de resultat, som Schwarz och Hershkowitz (1999) redovisar i sin artikel.

En funktions definitionsmängd

Ingen av studenterna i Hanssons studie och endast en elev i min studie anger definitionsmängd som varande en del av en funktions definition. Elev A formulerar en definition av funktion, där definitionsmängd ingår som en del av definitionen. Hen anger dessutom korrekt definitionsmängd för den konstanta funktionen $y = 4$. Flera elever i min studie konstruerar ett korrekt exempel på en rationell funktion, som inte är definierad för $x = 3$. På en direkt uppmaning kan dessa elever använda begreppet definitionsmängd, men de skulle troligen inte uppfatta begreppet definitionsmängd som en del av en funktions definition.

Hansson drar slutsatser om sina studenters begreppsbilder om funktion utifrån vad de *inte* skriver i sina begreppskartor om definitionsmängd. Hanssons slutsatser aktualiserar frågan om vilka slutsatser man kan dra om det som studenterna utelämnar i sina begreppskartor. Kanske kan man dra slutsatsen att studenterna har såpass dålig förståelse av funktionsbegreppet att de inte associerar det till det relaterade begreppet definitionsmängd.

Slutsats

Min analys av enkätsvaren resulterade i följande fyra kategorier av elevernas definitioner av begreppet funktion; Samband, Beroenderelation, Regel samt den Grafiska representationen. Cirka hälften av eleverna i undersökningsgruppen anser att varken ekvationen $y = 4$ eller den grafiska representationen av denna konstanta funktion uttrycker en funktion. En vanligt förekommande motivering är att *y*-värdet inte är beroende av värdet av variabeln *x*. Eleverna tolkar utsagan y *beror av x* bokstavligen i betydelsen att y *måste vara beroende av x* för att en funktion ska representeras. En majoritet av eleverna i undersökningsgruppen anger *inte* villkoret att en funktion måste ha ett entydigt funktionsvärde, när de formulerar sina definitioner. En konsekvens av detta blir att eleverna tror att cirkelns ekvation representerar en funktion, trots att den *inte* uppfyller kravet på entydigt funktionsvärde.

Några elever i undersökningsgruppen uppvisar en eller flera av följande delar av sina begreppsbilder om funktion: Grafen till en funktion måste vara sammanhängande. Styckvis definierade funktioner accepteras inte. Begreppet funktion identifieras med den algebraiska representationen; en funktion måste kunna representeras med en formel, som gäller för hela funktionens definitionsmängd. Var och en av de nämnda delarna är potentiella konfliktfaktorer, som är i motsatsställning till den formella definitionen av begreppet funktion.

Didaktiska konsekvenser av min studie för undervisning om funktion

Jag anser att matematiklärare måste vara medvetna om de potentiella konfliktfaktorer, som deras elever uppvisar och anpassa undervisningen till sina elevers begreppsbilder. Det kan vara bra för elevers förståelse av begreppet funktion att möta en stor variation av exempel på funktioner, inklusive linjära funktioner, funktioner som är styckvis definierade och diskontinuerliga samt konstanta funktioner. En förklaring till varför eleverna i min studie inte accepterar konstanta funktioner kan vara att de tolkar utsagan y *beror av x* bokstavligen som att y *måste vara beroende av x* för att en funktion ska anses representeras. När matematiklärare använder utsagan y *beror av* x för att beskriva ett givet funktionssamband kan de vid något tillfälle också betona att konstanta funktioner faktiskt *är* funktioner, till exempel genom att betona att variabeln y kan vara oberoende av variabeln x och ändå kan en funktion representeras. När funktionsbegreppet introduceras kan läraren också problematisera begreppet variabel, till exempel genom att säga att variabeln y i ekvationen $y = 4$ kan variera inom den konstanta funktionens värdemängd, som i detta exempel består av ett enda tal.

Elever kan bli mer flexibla i sitt tänkande om funktioner om de får möjlighet att öva översättningar mellan olika representationer av en funktion; algebraisk med en ekvation, geometrisk med en graf, numerisk med en värdetabell eller beskrivning av en situation med ord. Det är också bra för elevens flexibilitet att man i matematikundervisningen använder olika symboler för en funktion, till exempel f eller g och dessutom använder olika symboler för den oberoende variabeln, till exempel x, z eller t. Läraren kan använda symbolen $f(x)$ i samband med räta linjens ekvation samt betona att räta linjens ekvation representerar en funktion, för att undvika en situation, där elevers begreppsbilder om funktion saknar linjära funktioner.

En majoritet av eleverna i min studie beaktar inte entydighetsvillkoret för en funktion: *att det för varje x i definitionsmängden finns ett entydigt bestämt funktionsvärde,* i samband med cirkelns ekvation och den S-formade kurvan i min enkät. Matematiklärare kan problematisera entydighetsvillkoret för en funktion i undervisningen, till exempel med övningsuppgifter liknande de som jag använder i min enkät.

Matematiklärare kan introducera begreppen mängd, delmängd och element i en mängd, i samband med att funktionsbegreppet introduceras. Detta ger eleverna förutsättningar till en bättre förståelse av begreppen definitions- och värdemängd och i förlängningen av begreppet funktion, eftersom dessa båda mängdbegrepp ingår i den formella definitionen av funktionsbegreppet. Det är väsentligt att begreppen definitions- och värdemängd ingår i elevernas begreppsbilder om funktion för att de ska ha möjlighet att nå en djupare förståelse av funktioner. Däremot är det inte lämpligt att introducera funktionsbegreppet med Bourbakis mängdteoretiska definition. Bourbakis definition förutsätter en strukturell förståelse, som eleverna inte kan uppnå innan de har uppnått en operationell förståelse, enligt Sfard (1991). Därför måste eleverna först möta en definition, som kan förstås operationellt, till exempel som *ett samband mellan två variabler,* innan de möter Bourbakis definition.

Jag håller med Hansson om att man i undervisningen bör problematisera begreppet definitionsmängd genom att även studera funktioner vars definitionsmängder inte är tal, till exempel ”bil x har färgkoden y”, där definitionsmängden är ”alla svenskregistrerade bilar i Transportstyrelsens databas” eller ”äktenskapsrelationen” där definitionsmängden är ”mängden av alla män som är gifta med en kvinna”. Den senare relationen är en funktion om man inte tillåter polygami. Om varje man är gift med precis en kvinna och omvänt, varje kvinna är gift med precis en man så blir funktionen injektiv. ”Homoäktenskapsrelationen” är ytterligare ett exempel, som kan ge upphov till diskussioner om begreppet funktion. Ovanstående exempel på funktioner, där definitionsmängden inte är tal visar att det finns funktioner, som inte kan representeras med formler. Uppgift 6 i min enkät är ett exempel på en funktion där definitionsmängden är tal, men funktionen kan ändå inte representeras med en formel, som gäller för hela funktionens definitionsmängd.

Förslag på fortsatt forskning

Det vore intressant att följa en grupp gymnasieelever i en longitudinell studie under ett eller två av de tre gymnasieåren och undersöka om deras förståelse av funktionsbegreppet måhända kan stärkas av att använda exempelvis GeoGebra eller motsvarande digitala hjälpmedel för att visualisera funktioner och ändra funktioners egenskaper.

Ett annat förslag är att genomföra en försöksundervisning, som är inspirerad av den försöksundervisning som Hansson beskriver i sin studie, där man även studerar funktioner vars definitions- och värdemängder inte är tal, till exempel ”bil x har färgkoden y” (Hansson, 2006). Jag kan då undersöka om försöksundervisningen inverkar på elevernas förståelse av begreppet funktion, till exempel med följande metod för att få syn på en del av elevernas begreppsbilder: En elev i undersökningsgruppen får ett antal papperslappar med olika termer, som är kopplade till ekvationen $y = 4x$, till exempel *funktion*, *definitionsmängd, värdemängd, variabel, x, y, tal, konstant, intervall, värde, ekvation, formel, graf, värdetabell, uttryck och koordinatsystem*. Elevens uppgift är att pussla ihop lapparna till en begreppskarta, som utgår från $y = 4x$. Jag har genomfört en pilotundersökning, där det visade sig att gymnasieelever har svårt att utforma begreppskartor. Genom att hjälpa eleverna med på förhand givna matematiska termer får jag fram mer information om deras begreppsbilder och slipper dra slutsatser om begrepp, som eleverna kanske har glömt att skriva in i sin begreppskarta. Dock bör en sådan undersökning kompletteras med djupintervjuer av eleverna.

Mitt tredje förslag på fortsatt forskning är att studera hur elevers förståelse av funktionsbegreppet inverkar på deras förståelse av begreppet derivata av en funktion. I detta sammanhang kan Sfards teori om operationell och strukturell förståelse av begrepp vara användbar. Det är nödvändigt med en strukturell förståelse av funktion, som ett objekt, för att förstå derivata av en funktion. Man betraktar då derivata som en operator, som appliceras på ett funktionsobjekt och ger ett nytt funktionsobjekt, derivatan av funktionen. Jag argumenterar för att det är mycket svårt för en elev att få en djupare förståelse av begreppet derivata så länge det finns potentiella konfliktfaktorer i hens begreppsbild om funktion. Anta att en elev dels tror på att derivatan av en funktion är en ny funktion, dels att eleven inte accepterar konstanta funktioner (vilket är en potentiell konfliktfaktor). Då kommer eleven att uppleva en konflikt när hen samtidigt möter $y = 4x$ och $y = 4$. Å ena sidan måste $y = 4$ representera en funktion, eftersom den är derivatan av funktionen $y = 4x$. Å andra sidan tror eleven inte att $y = 4$ representerar en funktion, eftersom hen inte accepterar några konstanta funktioner. Den konflikt, som nu har manifesterats kan antingen leda till förvirring hos eleven och förhindra en djupare förståelse av begreppet derivata, eller så inser eleven att en konstant funktion faktiskt är en funktion. Därmed har eleven korrigerat sin begreppsbild om funktion; en tidigare konflikt i elevens begreppsbild existerar inte längre och eleven har fått en djupare förståelse av funktionsbegreppet.

Referenser

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011a). *Matematik 5000. Kurs 1c blå, Lärobok. (1. uppl.)*. Stockholm: Natur och Kultur.

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2011b). *Matematik 5000. Kurs 3c blå, Lärobok. (1. uppl.)*. Stockholm: Natur och kultur.

Gennow, S., Gustafsson, I., & Silborn, B. (2013). *Exponent 4*. Malmö: Gleerups.

Hansson, Ö. (2006). *Studying the views of preservice teachers on the concept of function.* (Phd-thesis), Luleå university, Luleå.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300. doi: 10.2307/2686848

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun. (2. uppl.)*. Lund: Studentlitteratur.

Lundin, S. (2008). *Skolans matematik: en kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* (Diss), Uppsala universitet, Uppsala

Rodhe, S., & Sigstam, I. (2002). *Naturlig matematik*. Skebobruk: Kub.

Schwarz, B., & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362-389.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi: 10.1007/bf00302715

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39. doi: http://dx.doi.org/10.1016/0732-3123(95)90022-5

Sjunnesson, J., Holmström, M., & Smedhamre, E. (2012). *Matematik 3c*: Liber.

Skolverket. (2011). *Gymnasieskola 2011*: Fritze.

Skolverket. (2013). http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv. Hämtad 2013-11-08

Tall, D. (1992e). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In Grouws (Ed.), *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning* (pp. 495– 511). New York: Macmillan.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Viirman, O., Attorps, I., & Tossavainen, T. (2010). Different views - some Swedish mathematics students' concept images of the function concept. *Nordic studies in Mathematics education, 15*(4), 5-24.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366. doi: 10.2307/749441

Bilaga 1 Matematisk terminologi i samband med begreppet funktion

Med *tal* menas i föreliggande studie reella tal, om inget annat anges.

En *variabel* är en symbol, som betecknar en storhet som varierar.

En *funktion från A till B* innebär att mängden A är funktionens definitionsmängd och funktionens värdemängd är en delmängd av mängden B.

Den *kartesiska produkten* av två icke-tomma mängder A och B, som betecknas $A \times B$, definieras som mängden av alla ordnade par av ett element i A och ett element i B.

Grafen till en funktion f, från A till B, är mängden av alla ordnade par $(x, f(x))$ där *x* tillhör funktionens definitionsmängd. Grafen är en delmängd av den kartesiska produkten $A \times B$.

Om y är en funktion av *x* så kallas *x* oberoende variabel och y kallas beroende variabel. Man kan, något oegentligt, uttrycka detta som att y *beror av x*, vilket *inte* utesluter att y är oberoende av *x*.

En funktion sägs vara *styckvis definierad* om den representeras av olika uttryck på olika delmängder av sin definitionsmängd.

En funktion vars värden är lika för alla tal i funktionens definitionsmängd kallas en *konstant funktion*.

En funktion kallas *injektiv* om den avbildar två olika tal i definitionsmängden på två olika tal.

Ett *nollställe* är ett tal i funktionens definitionsmängd, där funktionen antar värdet noll.

I skolmatematiken brukar funktioner som kan skrivas på formen $y = kx + m$ kallas för *linjära funktioner*, trots att det inte är matematiskt korrekt. Jag kommer att följa skolkonventionen och använda termen linjär funktion om en funktion vars graf är en rät linje.

Signumfunktionen S(*x*) definieras som

$$S(x) = \begin{cases} -1 \text{ om } x < 0 \\ 1 \text{ om } x \geq 0 \end{cases}$$

Signumfunktionen är inte kontinuerlig för $x = 0$.

Absolutbeloppet av x definieras som

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ om } x < 0 \\ x \text{ om } x \geq 0 \end{cases}$$

Dirichlets funktion definieras som

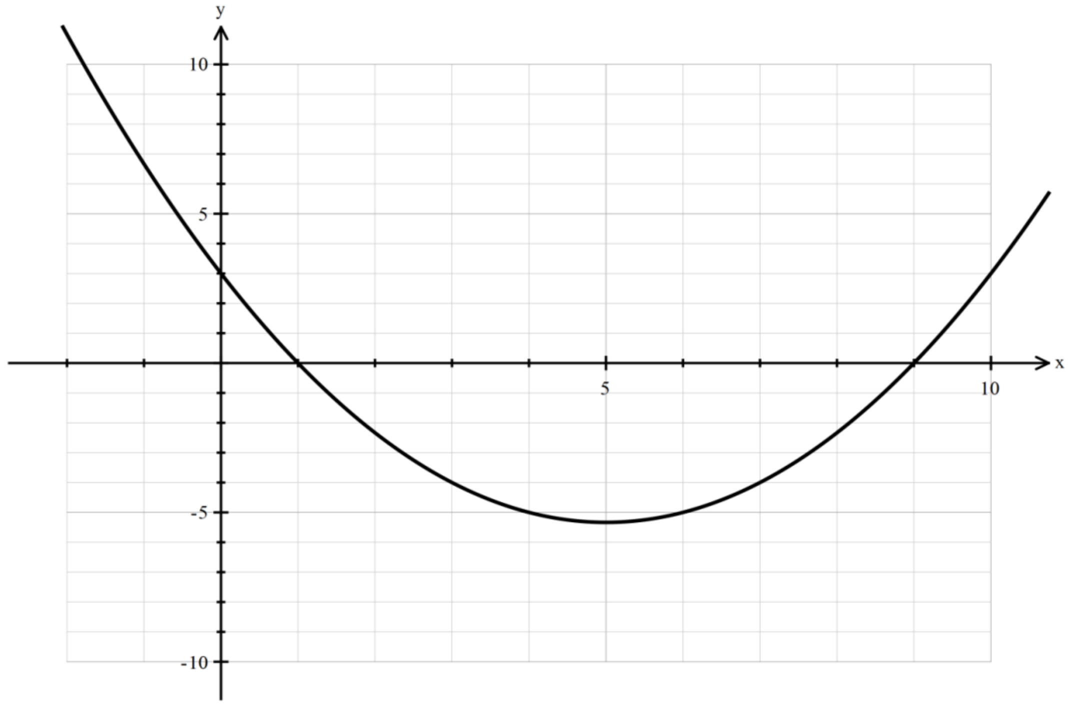
$$D(x) = \begin{cases} \text{c om } x \text{ är rationell} \\ \text{d om } x \text{ är irrationell} \end{cases}$$

Här är c och d två olika reella tal. Dirichlets funktion var det första exemplet på en funktion som inte är given av ett eller flera ”analytiska uttryck”, i Eulers mening. Funktionens graf kan inte ritas och den är diskontinuerlig överallt (Kleiner, 1989, s. 10).

Bilaga 2 Enkät

Lös uppgifterna utan hjälpmedel. Skriv dina lösningar här i detta häfte. Förklara så noga du kan! Skriv din kod här: ____

1) I koordinatsystemet nedan visas grafen till funktionen $y = g(x)$. Bestäm ur grafen de värden på x som uppfyller ekvationen $g(x) = 0$. Beskriv hur du tänker!



2) Finns det någon funktion som *inte* är definierad för $x = 3$? Motivera ditt svar!

3) Vilka av nedanstående ekvationer uttrycker y som en funktion av x? Motivera ditt svar!

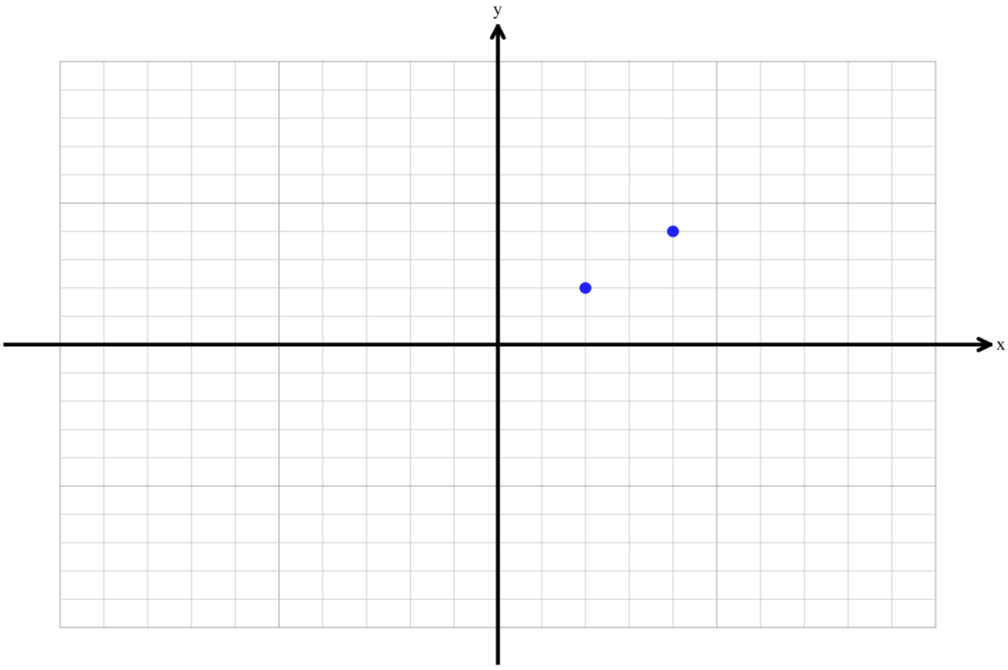
a) $x^2 + y^2 = 9$

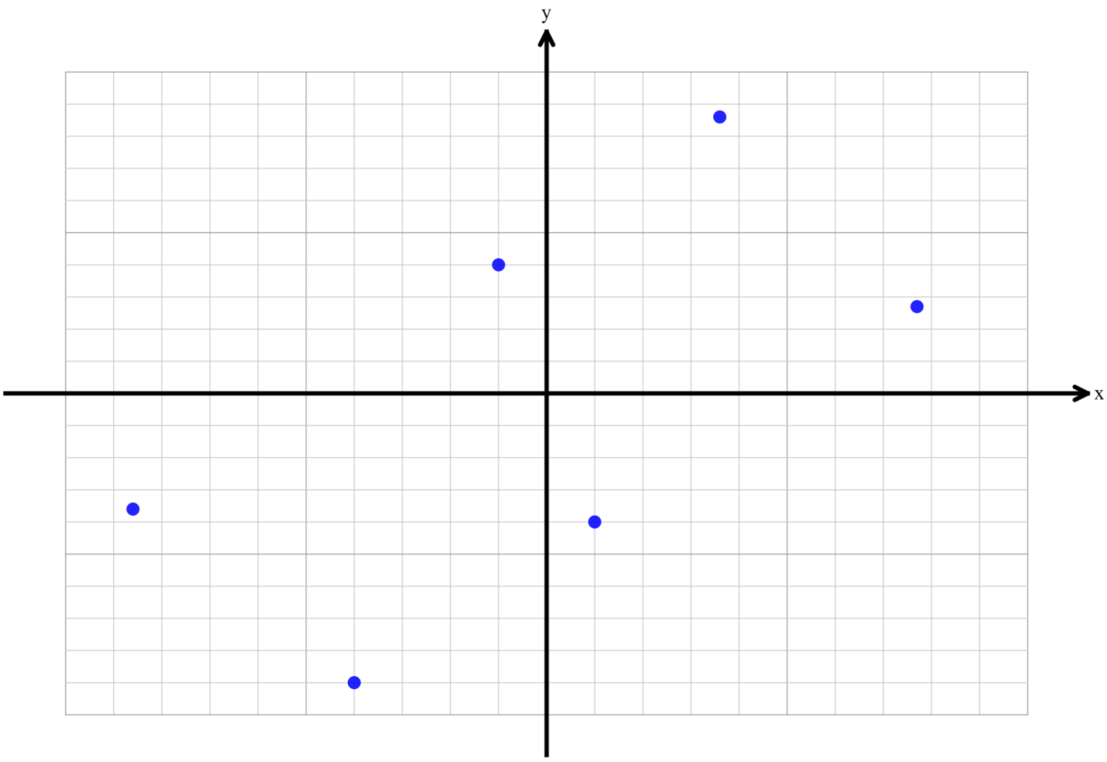
b) $y = 4$

c) $y = \begin{cases} 0 \text{ om } x < 0 \\ x \text{ om } x \geq 0 \end{cases}$

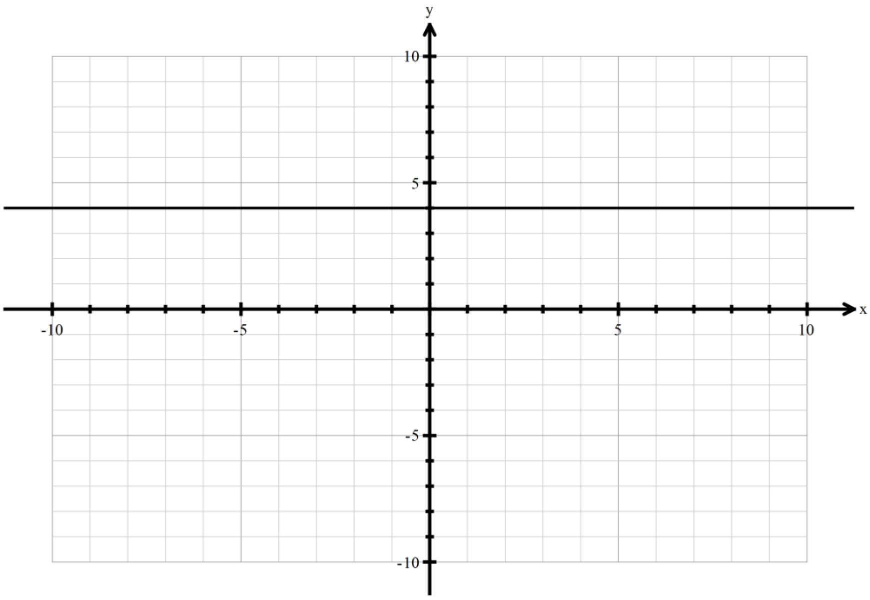
d) $y = \begin{cases} 3 \text{ om } x < 0 \\ x^2 \text{ om } x \geq 0 \end{cases}$

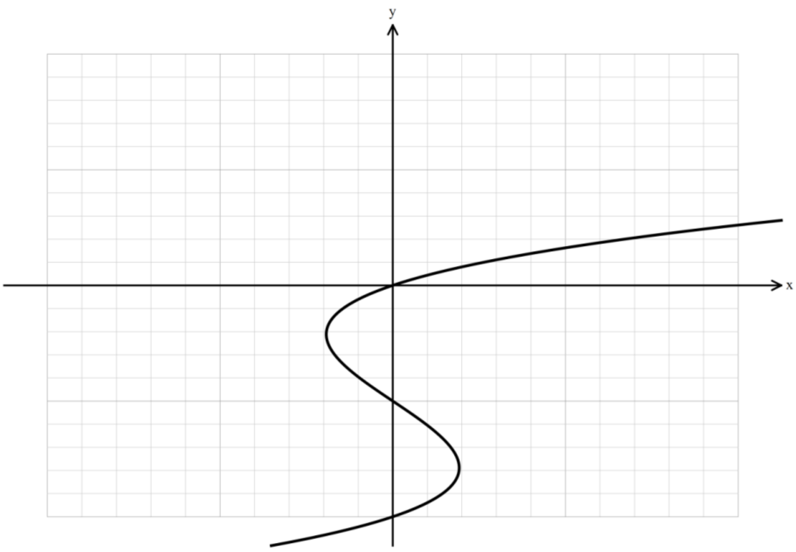
4) a) Är det möjligt att rita grafen till en funktion som går genom punkterna i koordinatsystemen nedan?
b) Hur många olika grafer kan man rita som går genom punkterna? Motivera ditt svar!

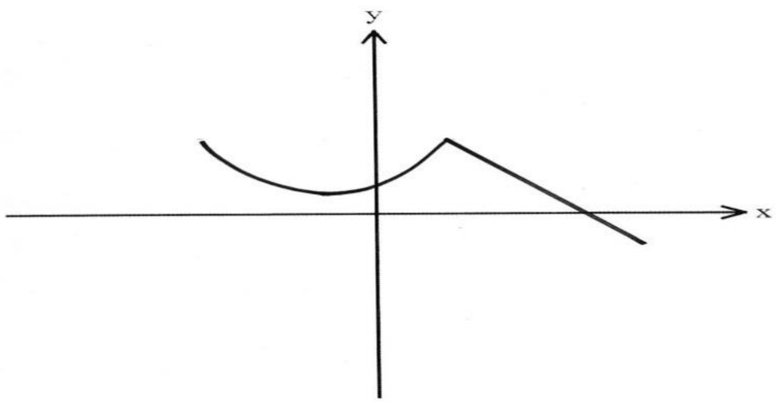


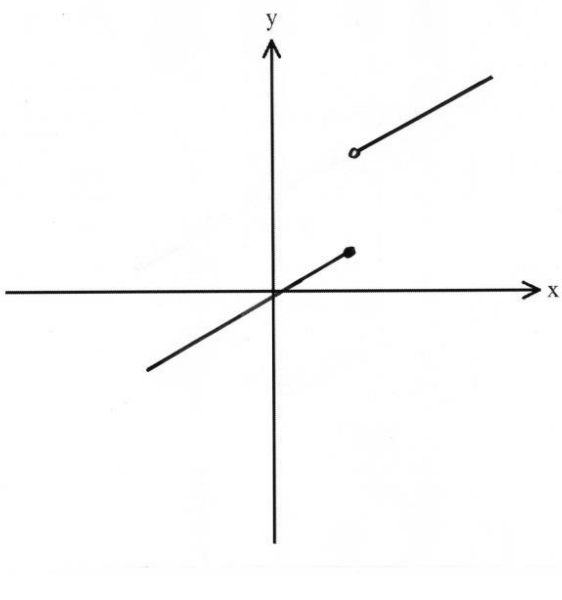


5) Vilka grafer beskriver y som en funktion av x? Motivera ditt svar!






y
x


y
x

6) Finns det en funktion som uppfyller följande två villkor?
Om x är ett heltal så ska funktionen ha ett värde som *inte* är ett heltal.
Om x *inte* är ett heltal så ska funktionen ha ett heltalsvärde.
Motivera ditt svar.

7) Vad är en funktion enligt din uppfattning? Förklara så noga du kan!

Bilaga 3 Intervjuguide

3a) Hur ser kurvan ut? Kan du rita kurvan? Vad kallas den kurva du har ritat?

Hur många lösningar har ekvationen $y^2 = 9 - x^2$, för ett givet fixt värde på x?

Hur många lösningar har ekvationen $y^2 = 9$?

3b) Hur många variabler finns det i ekvationen $y = 4$?

Är y en variabel?

Låt $y = \begin{cases} -1, \text{om } x < 0 \\ 1, \text{om } x \geq 0 \end{cases}$

Är y en funktion av x?

Hur många variabler finns det?

Vad är en variabel?

4a) Kan man rita en annan graf genom de båda givna punkterna?

Hur många grafer kan man rita genom de två punkterna?

4b) Hur många grafer kan man rita genom alla de sex givna punkterna?

Måste man rita grafen utan att lyfta pennan?

5a) Beskriver grafen y som en funktion av x?

Om nej: Varför är det inte en graf till en funktion?

Hur många variabler finns det?

5b) Beskriver grafen y som en funktion av x?

Vad är $f(0)$?

Kan $f(0)$ ha flera olika värden?

Om ja: Är det ett problem?

7. Vad är en funktion?

Bilaga 4 Första missivbrevet

Hej!

Jag tänker skriva en magisteruppsats i matematikdidaktik på Göteborgs universitet. Du kan hjälpa mig att samla in material till min uppsats genom att svara på frågor i en enkät som handlar om matematik.

Jag följer vetenskapsrådets forskningsetiska principer med dess krav på information, samtycke, konfidentialitet och nyttjande. Du kan läsa mer om dessa principer på

http://www.codex.vr.se

Av forskningsetiska skäl måste du ge ditt skriftliga medgivande för att kunna delta i min studie. Genom att delta i studien så ger du mig rätten att använda det material som du producerar, men du kan när som helst avbryta din medverkan i studien.

Mikael Borke
Gymnasielärare i matematik och fysik

- o Ja, jag vill delta i studien
- o Nej jag vill inte delta i studien

Elevens underskrift:

Namnförtydligande:

Datum:

Bilaga 5 Andra missivbrevet

Hej!

Jag tänker skriva en magisteruppsats i matematikdidaktik på Göteborgs universitet. Du kan hjälpa mig att samla in material till min uppsats genom att delta i en intervju. Jag kommer att ställa frågor som utgår från dina svar på min enkät som du nyligen har besvarat. Jag kommer att göra ljudupptagning av intervjun.

Jag följer vetenskapsrådets forskningsetiska principer med dess krav på information, samtycke, konfidentialitet och nyttjande. Du kan läsa mer om dessa principer på

http://www.codex.vr.se

Av forskningsetiska skäl måste du ge ditt skriftliga medgivande för att kunna delta i en intervju. Genom att delta så ger du mig rätten att använda hela eller delar av intervjun i min uppsats, men du kan när som helst avbryta din medverkan i studien.

Mikael Borke
Gymnasielärare i matematik och fysik

- Ja, jag vill delta i intervjun
- Nej jag vill inte delta i intervjun

Elevens underskrift:

Namnförtydligande:

Datum: