GÖTEBORGS UNIVERSITET

Det funktionella funktionsbegreppet

- Ett projektarbete om funktionsbegreppet; dess historia, definitioner och didaktik

Jens Nerhall
Johan Nermansson
Joel Sääf

Kurs: MMGL99
Handledare: Ulf Persson
Examinator: Laura Fainsilber
Termin: VT 2014

Abstrakt

Titel: Det funktionella funktionsbegreppet
Författare: Jens Nerhall, Johan Nermansson & Joel Sääf
Termin och år: Vårterminen 2014
Handledare: Ulf Persson
Examinator: Laura Fainsilber
Nyckelord: Funktioner, funktionsbegreppet, gymnasieskolan, matematik, matematikdidaktik, representationer, registerbyten, konceptuell och procedurell kunskap

En het debatt både i media såväl som i den offentliga sektorn har på senare år varit svenska elevers sjunkande matematikkunskaper. Världsomfattande undersökningar från PISA och TIMSS har legat till grund för en uttalad oro över vad som händer med svenska elever och skolan i sig. Ett av de mest fundamentala begreppen inom matematiken är *Funktionsbegreppet*, vilket introduceras i skolan redan i sjunde klass. Samtidigt är det också ett komplext begrepp med en omfattande historisk bakgrund. Således kommer detta projektarbete dels ägnas åt en litteraturstudie av funktionsbegreppet, men också åt en matematikdidaktisk undersökning där gymnasieelevers förståelse för och kring funktionsbegreppet studeras.

Syftet med projektarbetet är delvis att skärpa våra egna ämneskunskaper kring funktionsbegreppet och därmed förebereda oss inför vår framtida roll som gymnasielärare i matematik. Vidare är tanken att nyttja dessa nyvunna kunskaper i den didaktiska studien, vars syfte är att undersöka hur eleverna uppfattar funktionsbegreppet och problematisera konceptuell och procedurell kunskap inom funktionsbegreppet.

Med grund i Raymond Duvals tidigare arbete har vi gjort en undersökning för att bygga vidare på tidigare kunskap om matematiska representationer av funktioner och som denne kallar byten av representationer inom samma eller inom olika register; *treatments* och *conversions*. Anledningen till detta är just vikten av att kunna byta mellan olika ”synsätt” eller representationer inom matematiken för att nå förståelse. Duval skriver *“conversion is basically the deciding factor for learning”.* Vidare tar vi avstamp i Rittle-Johnson och Alibalis forskning om just vad som skiljer konceptuell och procedurell kunskap, vilket vi också försöker utröna genom gruppintervjuer med gymnasieelever. Slutligen analyserar vi resultaten och för tankarna framåt om hur undervisningen i skolan faktiskt borde se ut.

Undersökningen visar att elever till stor del har en felaktig bild av funktionsbegreppet, vilket är en trolig följd av kursplanernas innehåll och vanligt förekommande läromedel utformade efter dessa. Vidare visar studien att eleverna bristande förståelse för funktioner verkar hämma deras mer procedurella kunskaper.

Innehållsförteckning

Inledning 5
Syfte och frågeställningar 6
DEL I: Funktioner 7
  Historisk bakgrund 7
  Funktioner - Definitioner 10
    Injektiva och surjektiva funktioner 12
    Sammansatta funktioner 13
    Funktioner som grafer 13
    Invers funktion 14
    Derivatan av en funktion 15
  Funktioner i gymnasieskolan 17
    Funktioner i läroplanen 17
    Funktioner i läromedlen 18
    Avslutande kommentar till funktioner i gymnasieskolan 19
DEL II: Undersökningen 21
  Metod 21
  Tidigare forskning och teori 23
    Representationer och matematisk förståelse 23
    Konceptuell och procedurell kunskap 27
  Resultat och analys 29
    Enkät 29
    Gruppintervjuer 34
  Diskussion och slutsatser 43
    Byten av funktionens representationer 43
    Elevernas förståelse för funktionsbegreppet 44
    Skolan, funktioner och den konceptuella kunskapen 47
    Sammanfattade slutsatser 49
Avslutande reflektion 50
Referenslista 53
Bilaga 1. Enkätundersökning - Funktioner 55
Bilaga 2. Intervjuguiden 57
Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju 58
Bilaga 4. Definitionsblad till elever under diskussionen 60

Figurförteckning

Figur 1. Illustration av definitions- och målmängd ... 10
Figur 2. Funktionslådan ... 11
Figur 3. Illustration av injektiva, surjektiva och bijektiva funktioner ... 13
Figur 4. Sammansatt funktion ... 13
Figur 5. Graf till funktionen $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}, \quad f: (-\infty, 1] \cup [5, \infty) \to \mathbb{R}$ ... 14
Figur 6. Illustration av invers funktion 1 ... 15
Figur 7. Illustration av invers funktion 2 ... 15
Figur 8. Grafisk illustration av derivata ... 16
Figur 9. Graf till funktionen $f(x) = x^2 - 4, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ... 23
Figur 10. Klassifikationstabell över representationer och register ... 25
Figur 11. Parallellogram till rektangel ... 26
Figur 12. Igenkännande uppgift ... 26
Figur 13. Histogram över fördelningen av antal rätta svar i enkäten. ... 29
Figur 14. Tabeller över svarsfördelningen i procent. ... 29
Figur 15. Fråga 1 från enkätundersökningen (conversion-uppg.) ... 30
Figur 16. Fråga 2 från enkätundersökningen (treatment-uppg.) ... 30
Figur 17. Fråga 3 från enkätundersökningen (treatment-uppg.) ... 31
Figur 18. Fråga 4 från enkätundersökningen (treatment-uppg.) ... 31
Figur 19. Fråga 5 från enkätundersökningen (conversion-uppg.) ... 31
Figur 20. Fråga 6 från enkätundersökningen (treatment-uppg.) ... 31
Figur 21. Fråga 7 från enkätundersökningen (conversion-uppg.) ... 32
Figur 22. Fråga 8 från enkätundersökningen (conversion-uppg.) ... 32
Figur 23. Fråga 9 från enkätundersökningen (conversion-uppg.) ... 33
Figur 24. Diskussionsuppgift 2 från intervju. ... 36
Figur 25. Diskussionsuppgift 3 från intervju. ... 37
Figur 26. Diskussionsuppgift 4 från intervju. ... 37
Figur 27. Diskussionsuppgift 5 från intervju. ... 39
Figur 28. Diskussionsuppgift 6 från intervju. ... 41

Inledning

Trenden talar sitt tydliga språk, svenska elevers kunskaper i matematik minskar. Matematikkunskaperna hos femtonåringar i den svenska skolan blir sämre och sämre. Detta visar resultaten från PISA 2012 där Sverige är det land bland OECD-länderna som har den sämsta trenden mellan åren 2003 och 2012.[1] När det gäller avancerad matematik på gymnasiet visar en rapport från TIMSS Advanced 2008 att svenska elever presterar låga resultat i jämförelse med andra länder.[2] Vidare fortsätter trenden åt samma håll, TIMSS 2011 tyder på att elevernas kunskaper sjunker ytterligare och detta gäller både de lägst presterande och de högst presterande eleverna.[3]

Med ovanstående i åtanke känner vi att det är viktigt som blivande lärare i matematik att ta tillfället i akt och få ut så mycket som möjligt av detta examensarbete. Vi ämnar därför att dels försöka vässa våra egna ämneskunskaper genom en litteraturstudie samtidigt som vi vill göra en egen, mer pedagogiskt inriktad undersökning, där vi tittar på didaktiken inom matematiken. Ämnet som vi valt är ett väldigt brett och djupt begrepp inom matematiken som även utgör en central och viktig del i gymnasiematematiken, nämligen funktionsbegreppet.

Arbetet kommer således att anta en tvådelad struktur där vi i den första delen gör en ren litteraturstudie av funktionsbegreppet, ur både ett historiskt och modernt perspektiv. Vi kommer avsluta den första delen med en redogörelse över skolans ämnesplaner samt uppbyggnaden av läromedel som används i den svenska gymnasieskolan. I den andra delen kommer vår egen undersökning vara central. Vi kommer där presentera det insamlade materialet, jämföra tidigare forskning med den egna undersökningen, för att sedan dra slutsatser och formulera problem för framtida forskning. Avslutningsvis kommer vi även presentera våra egna reflektioner kring projektarbetet, funktionsbegreppet och de didaktiska ställningstaganden som vi tagit till oss under arbetets gång.

[1] Skolverket. *PISA 2012. 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap.* Stockholm: Skolverket. (2013)
[2] Skolverket. *TIMSS Advanced 2008. Huvudrapport. Rapport nr 336.* Stockholm: Skolverket. (2009)
[3] Skolverket. *TIMSS 2011.* Stockholm: Skolverket. (2012)

Syfte och frågeställningar

Syftet med projektarbetet, i sin helhet, är att undersöka och fördjupa våra kunskaper inom funktionsbegreppet. Detta kommer dels att innebära en presentation och en fördjupning av det matematiska begreppet och dels en studie där vi kopplar funktionsbegreppet till skolan och undersöker didaktiska aspekter av funktionsbegreppet. Mer specifikt är syftet med den didaktiska studien att undersöka hur eleverna uppfattar funktionsbegreppet och problematisera konceptuell och procedurell kunskap inom funktionsbegreppet. Den didaktiska undersökningen kommer att genomföras utifrån följande frågeställningar:

- Vad har elever för förståelse för funktionsbegreppet?
- Hur hanterar eleverna byten av funktionens olika representationsformer i samma respektive olika register?[4]
- Med avseende på funktionsbegreppet, hur är förhållandet mellan elevernas procedurella och konceptuella kunskap?
- Hur ser elever på procedurell kontra konceptuell kunskap, och med detta i åtanke, vad är deras åsikt om undervisningen?

[4] När de exempelvis hanterar en algebraisk procedur (samma register) respektive när de till exempel tolkar en graf till en formel (byte av register). Se mer ingående förklaring under rubriken *Representationsformer och matematisk förståelse* s. 23

DEL I: Funktioner

I Del I kommer funktionsbegreppet presenteras. Tanken är att först presentera uppkomsten och förändringen av funktionsbegreppet ur ett historiskt perspektiv, för att sedan behandla den moderna definitionen av funktionsbegreppet. Avslutningsvis kommer också en kortfattad läromedel- och kursplansstudie för att ge en inblick i hur funktionsbegreppet presenteras i dagens gymnasieskola. Syftet med Del I är dels att ge läsaren en bra inblick i funktionsbegreppet, och ett uppfriskande av gamla kunskaper, och dels för att förbereda läsaren inför Del II - den didaktiska undersökningen.

Historisk bakgrund

Som en bakgrund till kommande arbete om funktionsbegreppet kommer här en redogörelse för funktionsbegreppets historiska utveckling. Svårigheterna, som det innebär att någorlunda kortfattat presentera en redogörelse av processen bakom det matematiska begreppet, består av nödvändigheten att sålla bland; information, intressanta matematiker och den mängd av närliggande matematisk utveckling som ligger bakom framstegen inom funktionsbegreppet.

Det första närmandet till ett funktionsbegrepp kan härledas till sumererna, ett kulturområde som fanns mellan 3500-2000 f.v.t. i det nuvarande Irak. Tabeller med kvadratrötter och iakttagelser av himlakroppar, i samband med tid, har hittats nedskrivna, inristade med kilskrift på lertavlor. Föga förvånande har man även i den grekiska kulturen hittat liknande tabeller med beroende storheter. Här beskrivs även metoder för att beräkna det man skulle kunna kalla för ett "funktionsvärde" utifrån en oberoende variabel. Framförallt finns efterlämningar av matematikern Ptolemaios (100-talet). Historisk forskning kring Ptolemaios beskrivningar, av dessa beroende storheter, tyder dels på att det fanns en förståelse som tydligt liknar det moderna funktionsbegreppet och dels att denna kunskap varken var ny eller enbart förstådd av Ptolemaios.[5] Processen, genom vilket funktionsbegreppet definieras, är inte oproblematisk och även fast man tidigt hade en förståelse av grunderna bakom funktionsbegreppet dröjde det länge innan man enades om en någorlunda entydig definition.

För att förstå funktionsbegreppets utveckling behöver man också förstå den förändring som sker inom algebran och användandet av bokstäver och matematiskt symbolspråk. Tidigare har algebra och symboler nästan uteslutande använts till att beräkna ekvationer, där symbolerna enbart syftade till att beteckna okända tal, men i Europa under 1500-talet sker en förändring, då man även börjar formulera generella svar i form av en formel. Matematiska symboler började, med andra ord, även användas som variabler, ett viktigt steg i utvecklingen av funktionsbegreppet.[6]

Det är så sent som på 1600-talet då matematiker som Galileo Galilei och Johannes Kepler, genom problem som pendelrörelser, fallrörelser och planetrörelser, börjar närma sig formule-

[5] Häggström, Johan (2005), *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53* (2) s. 82-92, Begreppet funktion i historisk belysning. s. 85
[6] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 85

ringen av ett tidigt funktionsbegrepp.[7] Galileo uttryckte sig i sina undersökningar om t.ex. fallande kroppar på ett sätt som tydligt beskriver en funktion: "The spaces described by a body falling from rest with a uniformly accelerated motion are to each other as the squares of the time intervals employed in traversing these distances".[8] Senare skriver Galileo även dessa på symbolisk form ($s = kt^2$).[9] Under den här tiden börjar funktioner alltså uttryckas i grafer, formler och tal.[10]

Under 1600-talet börjar det även formuleras ett funktionsbegrepp. T.ex. skrev den skotska matematikern James Gregory definitionen att en funktion är en mängd som genom en algebraisk procedur, eller andra operationer, ger en annan mängd, en definition som visserligen snabbt glömdes bort.[11] I slutet av 1600-talet och i början av 1700, var framstående matematiker som Isaac Newton, John Bernoulli och G.W. Leibniz verksamma, alla med stor påverkan på utformandet av det moderna funktionsbegreppet. Leibniz beskrev funktioner som mängden given av de olika punkterna på en kurva, en kurva som var given av en ekvation. Han använde begrepp som konstanter och variabler. Bernoulli, som var en av de första att tydligt formulera en definition av funktionsbegreppet, anammade Leibniz uttryck "funktion av x" för att beskriva mängder som är beroende av olika variabler: ”[a function is] a quantity composed in any manner of a variable and any constants”[12] (Bernoullis definition från 1718). För en generell funktion började Bernoulli använda X eller ξ, som han senare ändrade till ϕx.[13]

Euler, som senare utvecklade funktionsbegreppet, definierade också han, inledningsvis, att funktionerna var tvungna att kunna skrivas med hjälp av en analytisk formel, av variabler och konstanter. Senare, rättare sagt år 1755, ändrade Euler sin definition till: ”a quantity should be called a function only if it depends on another quantity in such a way that if the latter is changed, the former undergoes change itself”, vilket bortser kravet på att en funktion ska kunna skrivas med en formel.[14] Euler introducerade även funktionsbeteckningen $f(x)$, vilken vi använder än idag.[15]

Vid mitten av 1700-talet uppstod oenighet, mellan Euler, d'Alemberts och Bernoulli, i frågan om huruvida en funktion var tvungen att enbart beskrivas med *ett* uttryck eller *en* formel, istället för t.ex. olika funktioner i olika intervall av en kurva. För att illustrera problemet, så är funktionen nedan ett exempel på hur man kan skriva det med *en* formel:

$$y = \begin{cases} x, om\ x < 0 \\ x^2, om\ x \geq 0 \end{cases}$$

[7] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 85, Kline, Morris (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, Oxford University press, s. 338
[8] Kline, M, *Mathematical thought from ancient to modern times* s. 338
[9] Kline, M, *Mathematical thought from ancient to modern times,* s. 338
[10] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 86
[11] Kline, M, *Mathematical thought from ancient to modern times*, s.339
[12] Boyer, Carl Benjamin, *A history of mathematics*, 2. ed., Wiley, New York, 1989, s.462
[13] Kline, M, *Mathematical thought from ancient to modern times*, s.340
[14] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 87
[15] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 87

Grälet mellan de samtida matematikerna uppstod i samband med ett problem angående vibrerande strängar och den funktion som skulle beskriva detta. Två lösningar, eller funktioner, presenterades. Bernoulli som hade en lösning skriven som en enda formel (som i exemplet ovan) och d'Alemberts lösning som innehöll flera olika funktioner. Stor oenighet rådde och även andra matematiker deltog senare i diskussionerna.[16] Genom diskussionen kring vibrerande strängar problematiserades även när funktioner skulle anses som kontinuerliga eller diskontinuerliga. Euler, som i lösningen av funktionen till de vibrerande strängarna höll med d'Alembert, att lösningen skulle bestå av olika funktioner på kurvans olika intervall, menade också att en kurva bestående av flera "sammanvävda" funktioner skulle anses diskontinuerlig. Som exempel kan vi återigen se den presenterade funktionen ovan, som Euler skulle ansett vara uppbyggd av två "sammanvävda" funktioner och kallat funktionens kurva för diskontinuerlig (men som man med modern terminologi hade definierat som en kontinuerlig funktion med en diskontinuerlig derivata).[17] Upplösningen av kontroversen fick vänta ända till den franske matematikern Fourier visade, med hjälp av summan av trigonometriska funktioner, att en funktion kunde bestå av olika formler på olika intervall av funktionen.[18] Han poängterade även att han hade avgjort dispyten mellan matematikerna - till fördel för Daniel Bernoulli.[19]

Dagens definition av funktionsbegreppet kan möjligen härledas till den tyske matematikern P.G.L. Dirichlet, som år 1837 definierade en funktion som:

> *If a variable y is so related to a variable x that whatever a numerical value is assigned to x there is a rule according to which a unique value of y is determined, then y is said to be a function of the independent variable x.*[20]

Den tydliga kopplingen som funktioner länge hade till fysiken, dels genom att de framstående matematikerna också var fysiker och dels genom de problem som funktionsbegreppet växte fram ur (t.ex. fallrörelser och vibrerande strängar), börjar mer och mer försvinna genom att funktionsbegreppets definition blev mer och mer abstrakt. Universitetslektorn J. Häggström beskriver det som att funktionsbegreppet "matematiserades" under 1800-talet. Något som gör begreppet svårare att förstå, samtidigt som det öppnar för "att betrakta en funktion som ett objekt i sig på vilken man kan operera".[21] Som exempel, betrakta funktionen;

$$y = \begin{cases} 0, om\ x \text{ är } irrationell \\ 1, om\ x \text{ är } rationell \end{cases}$$

Den s.k. Dirichlets funktion som inte är kontinuerlig i någon punkt, en funktion som 1700-tals matematikern aldrig skulle stöta på i jakten på att förklara beroendesamband mellan fysiska

[16] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 87
[17] Kline, M, *Mathematical thought from ancient to modern times*, s. 506
[18] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 87
[19] Kline, M, *Mathematical thought from ancient to modern times*, s.677
[20] Sierpinska, A. (1992). *On understanding the notion of function*. In Harel & Dubinski (1992), s. 46
[21] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 89-90

och geometriska storheter.[22] Det är detta mer abstrakta, och matematiserade begrepp som följande framställning kommer att behandla, nämligen det moderna funktionsbegreppet.

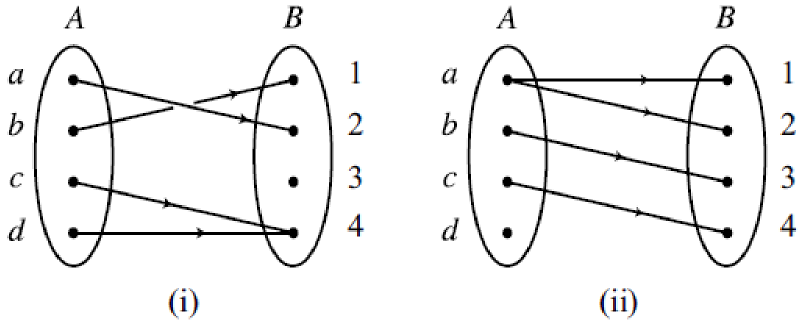
Funktioner - Definitioner

Förståelse för vår tidigare syn på vad funktioner är och hur de verkar, är viktig för att på ett djupare plan kunna handskas med begreppet idag. Men kanske ändå viktigare är att sätta sig in i den moderna begreppsbilden och medföljande definitioner.

> *Let A and B be sets. A function (also called a map) f from A to B, denoted $f: A \to B$, is a subset $F \subseteq A \times B$ such that for each $a \in A$, there is one and only one pair in F of the form $(a; b)$. The set A is called the domain of f and the set B is called the codomain of f.*[23]

> *"En funktion från en mängd M till en mängd N är en regel som till varje objekt i M på ett entydigt sätt ordnar ett objekt i N. Verkan av en funktion F på ett objekt A i M betecknas F(A) och kallas värdet av F i A eller bilden av A under F. Det är ett objekt i mängden N. - Mängden av alla objekt i M på vilka funktionen F tillåts verka kallas definitionsmängden för F och skrivs D_F. Mängden av alla förekommande funktionsvärden i N kallas värdemängden och betecknas V_F."*[24]

Definitionerna säger egentligen samma sak men terminologin och teckenanvändning skiljer sig åt. Ett tydligt exempel är att i den övre definitionen av Bloch[25] används orden *domain* (domän) och *codomain* (kodomän), som även betyder definitionsmängd och målmängd, vilket vi också återfinner i den nedre definitionen.[26] I den nedre av definitionerna behandlas även begreppet värdemängd. Den första funktionen i figur 1, nedan, illustrerar skillnaden mellan begreppen målmängd och värdemängd. Notera hur värdemängden är de värden som "träffas" (1, 2 och 4) och därmed utgör värdemängden endast en delmängd i målmängden som innefattar samtliga värden i B, 1, 2, 3 och 4.



Figur 1. Illustration av definitions- och målmängd[27]

Som vi ser i definitionen; "... till varje objekt i M på ett entydigt sätt ordnar ett objekt i N" måste varje x i definitonsmängden ge något exakt värde $f(x)$ i målmängden. Detta illustreras

[22] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 89
[23] Bloch, Ethan D., *Proofs and fundamentals: a first course in abstract mathematics,* 2nd ed., Springer, New York, 2011 s.131
[24] Persson, Arne & Böiers, Lars-Christer, *Analys i en variabel*, 2. uppl., Studentlitteratur, Lund, 2001, s. 37
[25] Bloch, Ethan D - Professor i matematik vid Bard College
[26] Även svenska definitioner använder begreppen domän och kodomän, se t.ex. Vretblad, Anders & Ekstig, Kerstin, *Algebra och geometri*, 2., [omarb. och utök.] uppl., Gleerup, Malmö, 2006, s. 83
[27] Hämtad från Bloch, E, *Proofs and Fundamentals*, s. 132

i figur 1 där (i) är en funktion men inte (ii) eftersom d i defintionsmängden inte avbildas på något värde i målmängden, B i (ii). Dessutom avbildas a på två värden i målmängden och ordnar därmed inte *ett* entydigt värde i målmängden.

Det essentiella i funktionsbegreppet är att en funktion måste bestå av tre komponenter för att få klassificeras som en funktion. Dessa är definitionsmängd, målmängd samt någon form av regel som beskriver ett samband mellan definitionsmängden och målmängden.[28] Regeln behöver inte vara i form av en matematisk formel, vilket kommer klargöras längre fram. Något som är viktigt att förtydliga är att utan definierade definitions- och målmängder är det alltså inte en funktion, såvida inte kontexten gör mängderna självklara. Vi belyser detta med ett exempel:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$$

För att ovanstående ska räknas som en funktion måste vi definiera definitions- och målmängd.

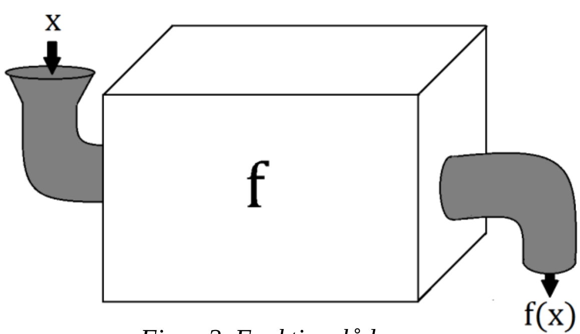
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}, \qquad f: (-\infty, 1] \cup [5, \infty) \to \mathbb{R}$$

Till exempel kan vi definiera funktionen enligt ovan om vi vill att målmängden skall vara ℝ. Definitionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hade inte fungerat på ovanstående funktion eftersom alla reella tal x mellan 1 och 5 ger ett negativt rotuttryck och därmed komplexa värden som hamnar utanför den definierade målmängden, vilket illustreras grafiskt i figur 5, som hittas några sidor framåt.

Märkbart blir således att två funktioner med samma regel, t.ex. samma matematiska formel, inte kan räknas som samma funktion om definitions- och målmängd skiljer sig åt.[29] I exemplet nedan kan vi alltså inte betrakta funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ som samma funktion även om de är tillsynes lika.

$$f(x) = x^2 \;\; f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; g(x) = x^2 \;\; g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Ett vanligt sätt att illustrera en funktion är med hjälp av en låda, där själva lådan är funktionen. Vi matar in ett värde x i funktionslådan och ut kommer resultatet $f(x)$. Lådan följer en given regel och därmed är resultatet, $f(x)$, direkt beroende av det som stoppas in, x. Låt funktionen i detta fall vara $f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Om vi exempelvis stoppar in talet 4 i vår låda, kommer lådan ge oss svaret 16.



Figur 2. Funktionslådan

[28] Bloch, E, *Proofs and Fundamentals*, s.131
[29] Bloch, E, *Proofs and Fundamentals*, s.136

Ett exempel på en funktion som inte hanterar siffror är en funktion som ger en persons biologiska mamma, där definitionsmängden är alla personer och målmängden är alla personers mammor. Skulle vi stoppa in prinsessan Estelle i vår funktion så skulle den ge oss kronprinsessan Victoria.[30] Detta kan definieras som en funktion eftersom vi har en regel där vi kopplar alla personer till sin biologiska mamma och vi har både en definitionsmängd och en målmängd. Noterbart är att målmängden inte nödvändigtvis måste utgöras av alla mammor utan kan precis lika gärna utgöras av alla personer på jorden. Detta illustreras tydligt i figur 1, funktion (i), där alla personer måste ha en biologisk mamma men alla personer på jorden behöver inte vara en mamma. 3:an i målmängden kan alltså vara antingen en man eller en kvinna som inte fött barn. Eftersom inte alla värden i målmängden måste finnas representerade kan vi välja målmängden till alla personer istället för alla mammor. Vi kan alltså definiera funktionen $m\colon \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ där P är alla personer på jorden.

För att problematisera detta kan vi försöka ta en funktion som kopplar varje person till personens syster. Vi inser att alla personer inte har en syster och därmed måste vi mer noggrant definiera definitionsmängden till alla personer som har *en* syster. Viktigt att notera att personen i definitionsmängden ytterligare måste definieras, eftersom en person med flera systrar hade genererat flera värden i målmängden, vilket är felaktigt. Gör vi inte om den tidigare definitionen, utan har kvar definitionsmängden som alla personer, får vi inte en funktion eftersom alla värden i definitionsmängden inte är definierade.[31] Jämför med figur 1, funktion (ii).

Injektiva och surjektiva funktioner

> *The function f is injective (also called one-to-one or monic) if x $x \neq y$ implies $f\ (x) \neq f\ (y)$ for all $x, y \in A$; equivalently, if $f\,(x) = f\ (y)$ implies x = y for all x, y 2 $\in A$.*[32]

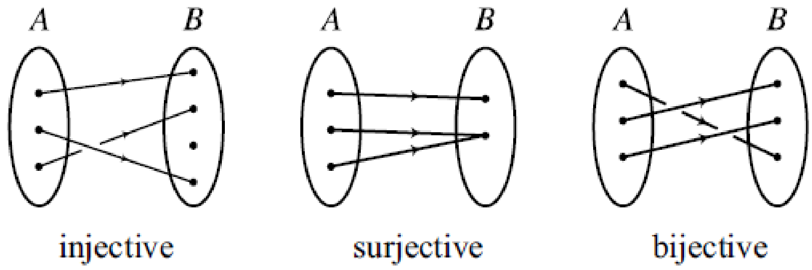
En *injektiv* funktion är en funktion där alla värden i definitionsmängden ger ett unikt värde i målmängden, d.v.s. två värden i definitionsmängden kan inte ge samma värde i målmängden. Exempelvis är vår tidigare nämnda "barn → mamma-funktion", $m\colon \mathrm{P} \to \mathrm{P}$, inte injektiv eftersom flera personer kan ha samma mamma.

> *The function f is surjective (also called onto or epic) if for every $b \in B$, there exists some $a \in A$ such that $f\ (a) = b$; equivalently, if $f\ (A) = B$.*[33]

En *surjektiv* funktion är en funktion där alla värden i målmängden finns representerade. Om vi återigen ser till vårt barn → mamma exempel får vi en surjektiv funktion om vi definierar målmängden som alla mammor. Hade vi däremot definierat funktionens målmängd till alla personer hade funktionen inte varit surjektiv. Vi inser här hur betydande definitionen av definitions- och målmängd är och att två funktioner definitivt inte kan betraktas som samma funktion om definitions- och målmängd skiljer sig hos funktionerna.

[30] Illustreras i Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju (Uppgift 5)
[31] Bloch, E, *Proofs and Fundamentals*, s.136
[32] Bloch, E, *Proofs and Fundamentals*, s.155
[33] Bloch, E, *Proofs and Fundamentals*, s.155

Funktioner som är både injektiva och surjektiva kallas *bijektiva*. För att vår barn → mamma -funktion skall klassas som bijektiv måste vi definiera definitionsmängden som alla personer som inte har något syskon och målmängden som deras mammor.



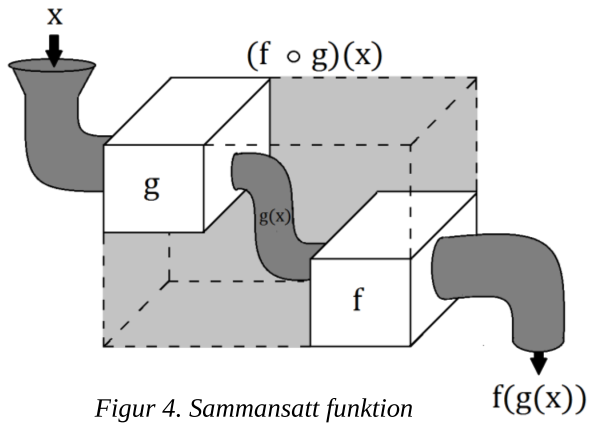
Figur 3. Illustration av injektiva, surjektiva och bijektiva funktioner[34]

Sammansatta funktioner

Inom matematiken är det ofta väldigt användbart att kombinera två eller flera funktioner till en sammansatt funktion. Låt oss exempelvis leka med tanken att vi vill ha en funktion som ger oss en persons mormor. Istället för att göra en ny funktion kan vi använda vår mamma-funktion, $m\colon \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ två gånger, vilket ger den sammansatta funktionen: $m(m(x)) : \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ eller $m \circ m : \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ (utläses ≫ m *boll* m ≪).[35]

> *Let A, B and C be sets, and let* $: A \to B$ *and* $f : B \to C$ *be functions. The composition of g and f is the function* $f \circ g : A \to C$ *defined by* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *for all* $x \in A$.[36]

Vi ser i definitionen av en sammansatt funktion ovan att den första funktionens målmängd måste motsvara den andra funktionens definitionsmängd för att de ska kunna sammansättas till en ny funktion. Viktigt att tänka på är också att proceduren här inte följer vårt vanliga sätt att tänka när vi läser från vänster till höger. Här gör vi istället operationen till höger först vilket illustreras i figur 4. I vårt fall i figuren benämns $g(x)$ som den inre funktionen och $f(x)$ som den yttre.



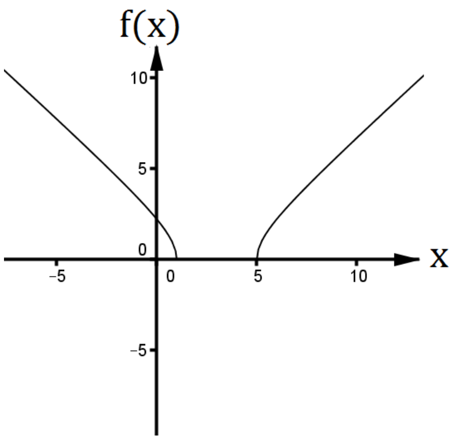
Figur 4. Sammansatt funktion

Funktioner som grafer

Ofta åskådliggörs funktioner som behandlar reella tal med hjälp av grafer i rätvinkliga koordinatsystem. Y-axeln brukar då motsvara funktionens värde, $f(x)$. Vi återvänder nu till ett av våra inledande exempel, nämligen funktionen: $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5},\ : (-\infty, 1] \cup [5, \infty) \to$

[34] Hämtad från Bloch, E, *Proofs and Fundamentals*, s. 155
[35] Vretblad, A & Ekstig, K, *Algebra och geometri*, 2006, s. 87
[36] Bloch, E, *Proofs and Fundamentals*, s 146

$\mathbb{R}$, och åskådliggör denna med hjälp av en graf.[37] Tack vare grafen blir det nu extra tydligt hur viktigt definitionen av definitions- och målmängd blir. Vi ser hur kurvan "försvinner" i intervallet $1 < x < 5$, vilket inträffar just för att definitionsvärden mellan 1 och 5 ger värden utanför vår definierade målmängd, $\mathbb{R}$.



Figur 5. Graf till funktionen $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}}$, $\boldsymbol{f}: (-\infty, \mathbf{1}] \cup [\mathbf{5}, \infty) \to \mathbb{R}$

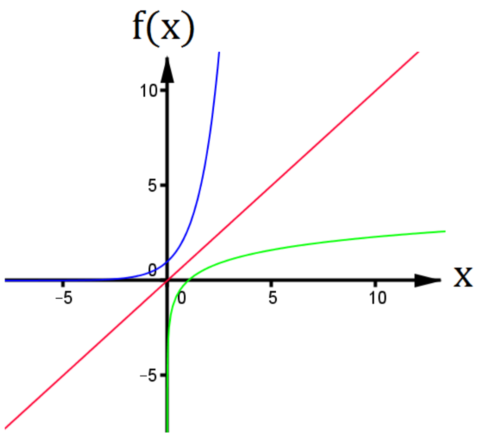
Invers funktion

Låt f vara en funktion med definitionsmängd D_f och värdemängd V_f. Inversen till f betecknas f^{-1} och har definitionsmängd V_f och värdemängd D_f. Definitionsmängd och värdemängd inverteras och byter alltså plats när man går från funktion till dess invers. Vidare har en funktions invers följande egenskaper:

$$D_{f^{-1}} = V_f$$
$$V_{f^{-1}} = D_f$$
$$s = f(t) \leftrightarrow t = f^{-1}(s)$$
$$f^{-1}\big(f(t)\big) = t, \ \ t \in D_f$$
$$f^{-1}\big(f(s)\big) = s, \ \ s \in V_f$$ [38]

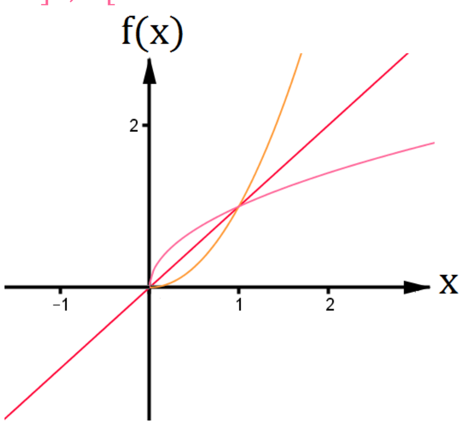
Grafer är även väldigt användbara när man vill åskådliggöra en invers till en funktion. Inversen till en funktion går nämligen att finna i en spegelbild, man säger att funktionen f och dess invers, f^{-1} är spegelsymmetriska med avseende på linjen $g(x) = x, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.[39] I figur 6 illustreras hur funktionen $f(x) = e^x, f: \mathbb{R} \to]0, \infty[$ speglas i $g(x) = x, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och bildar dess invers $f^{-1}(x) = \ln x \ , f^{-1}:]0, \infty[\to \mathbb{R}$.

[37] Se figur 5
[38] Persson, A & Böiers, L, *Analys i en variabel*, 2. 2001, s 88
[39] Persson, A. & Böiers, L., *Analys i en variabel*, 2. 2001, s 90



Figur 6. Illustration av invers funktion 1

För att en funktion skall vara inverterbar måste den vara injektiv.[40] Detta faller sig naturligt eftersom om så inte vore fallet skulle en invers $f^{-1}(x)$ vara tvunget att ge två olika värden för samma instoppade värde. Funktionen $f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är inte injektiv eftersom två x-värden kan ge samma y-värde och därmed är funktionen inte heller inverterbar. Men om vi justerar definitionsmängden till $f(x) = x^2, f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ är den injektiv och har därmed också en invers, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$.[41]



Figur 7. Illustration av invers funktion 2

Derivatan av en funktion

Inom matematiken uppkommer ofta frågeställningar om hur snabbt någonting förändras. För att kunna svara på denna typ av frågor behöver vi ett matematiskt verktyg som mäter just denna förändringshastighet. Vi väljer att klargöra detta med ett exempel: Låt $f(x)$ beteckna höjden hos ett föremål som kastas rakt uppåt. Vi mäter höjden i meter och tiden i sekunder. Om vi vet precis hur $f(x)$ ser ut borde det också vara möjligt att svara på frågan hur snabbt, uttryckt i meter per sekund, föremålet faller/stiger vid en viss punkt x_0. Det bör alltså finnas ett uttryck bildat med hjälp av $f(x)$ som mäter höjdförändringen per sekund i en given punkt x_0 under föremålets bana. För att kunna hitta detta uttryck börjar vi med att konstatera att från punkten x_0 till en närbelägen punkt $x_0 + h$ har höjden ändrats med: $f(x_0 + h) - f(x_0)$ meter. Vi kan då dra slutsatsen att höjdskillnaden i intervallet x_0 till $x_0 + h$ i genomsnitt är:

[40] Persson, A. & Böiers, L., *Analys i en variabel*, 2. 2001, s. 88
[41] Se figur 7

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Detta uttryck innebär i sig inget precist svar på frågan om förändringshastigheten i punkten x_0. Men ju mindre intervallet blir mellan punkterna (d.v.s. desto mindre värde på h) ju närmare det verkliga värdet kommer vi. Vi kan skriva detta som ett gränsvärde:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Om detta gränsvärde existerar har vi nu ett uttryck för att besvara vår tidigare fråga om förändringshastigheten i punkten x_0. Det är nu lätt att se hur viktig vårt ovanstående uttryck är, då de kan beskriva förändringshastigheten i alla liknande frågeställningar. Med hjälp av några tillägg bildar detta uttryck derivatans definition:

Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av punkten x_0. Om gränsvärdet:

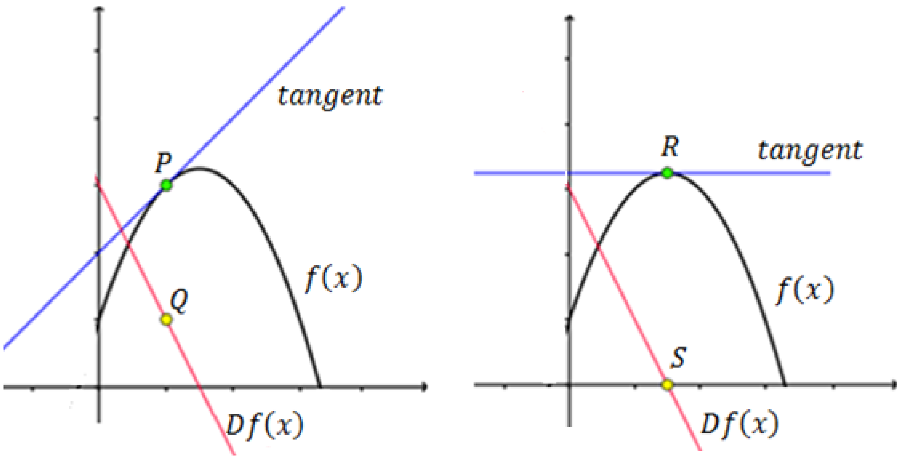
$$lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existerar så säges f vara deriverbar i punkten x_0. Gränsvärdet kallas derivatan av f i x_0 och betecknas:

$$f'(x_0),\quad \frac{df}{dx}(x_0)\quad eller\quad Df(x_0)$$

Om en funktion f är deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd säger vi kortfattat att f är deriverbar. Funktionen $x\to f'(x), x\in D_f$ kallas derivatan av f. För denna finns bland annat beteckningarna f', $\frac{df}{dx}$, Df.

I samband med diskussionen av en funktionskurva $y=f(x)$ används också y' och $\frac{dy}{dx}$.[42]



Figur 8. Grafisk illustration av derivata

I figur 8 illustreras ett par av derivatans användningsområde med hjälp av ett konkret exempel. Funktionen $f(x)=-x^2+3x+1$ beskriver ett kastat föremåls höjd över marken på pla-

[42] Persson, A. & Böiers, L., *Analys i en variabel*, 2. 2001, s. 187-188

neten Nermurion[43] efter x sekunder. Låt oss säga att vi är intresserade av föremålets hastighet efter en sekund, det vill säga vid punkten P. Ett alternativ är att ta reda på kurvans lutning vid exakt den punkten med hjälp av tangents lutning, eller k-värde. Men samtidigt kan vi också använda oss av derivatan, $Df(x) = -2x + 3$, som efter en sekund ger oss värdet 1 på y-axeln.[44] Det vill säga efter en sekund är föremålets hastighet 1 m/s uppåt.

Ett annat användningsområde för derivatan är när en andragradsfunktions max- och/eller minimivärde skall avgöras. Säg att vi är intresserade av att veta föremålets maximala höjd i kastet. Detta görs enkelt med hjälp av derivatan eftersom att vid den tidpunkt när föremålet når högst höjd är hastigheten exakt 0. Derivatan är 0 när x är 1,5 och därmed är det också efter 1,5 sekund som maximal höjd, 3,25 meter, uppnås.[45] Notera hur en derivata av derivatan, $Df(x) = -2x + 3$, ger hastighetens förändringshastighet, det vill säga acceleration. I detta exempel blir accelerationen en konstant, $-2\ m/s^2$, eller 2 m/s^2 i riktning mot marken.

Funktioner i gymnasieskolan

Nedan följer en kort redogörelse för hur de olika kursplanerna behandlar funktionsbegreppet och hur det presenteras i vanligt förekommande läromedel i den svenska gymnasieskolan.

Funktioner i läroplanen

Funktionsbegreppet introduceras för första gången i slutet av grundskolan, årskurs 7-9. Elever skall då ha förståelse för räta linjens ekvation och hur funktioner används för att undersöka förändring, förändringstakt och andra samband. I gymnasieskolan behandlas funktioner undantagslöst i alla kurser från matematik 1a till matematik 4. I kurs 1a-1c behandlas linjära ekvationer, olikheter och potensekvationer. Från och med 1b ställs krav på förståelse av funktionsbegreppet samt definitions- och värdemängder. Vidare introducerar 1b-kursen representationer av funktioner i flera former, t.ex. i form av ord, gestaltning, funktionsuttryck, tabeller och grafer.[46]

I kurs 2 ställs högre krav på elevernas förståelse av egenskaper hos funktioner, det räcker inte längre med linjära ekvationer, olikheter och potensekvationer utan eleverna skall även kunna beskriva egenskaper hos andragradsekvationer och exponentialekvationer. Kurs 2b introducerar även konstruktion av grafer vilket eleverna nu skall behärska, med och utan digitala verktyg.[47]

I kurs 3b och 3c introduceras begreppet derivata och vikten av funktioner blir djupare än tidigare och fokus läggs på förståelse mellan grafer, dess funktioner och derivata. Orientering mellan kontinuerliga och diskreta funktioner behandlas också. "Egenskaper hos trigonomet-

[43] För att ge en tydligare grafisk illustration valdes en fiktiv planet med en annan gravitation än Jordens.
[44] Se figur 8 - Punkt Q
[45] Se figur 8 - Jämför punkt R och S.
[46] Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*, (Gy 2011) Stockholm, 2011
[47] Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*, (Gy 2011)

riska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion" behandlas i kurs 4, beräkningar av ovanstående funktioner med hjälp av derivata och integraler genomsyrar kursens arbete. Matematik 5 behandlar uttryckligen inte funktioner, även om grafteoretiska problem och differentialekvationer bl.a. behandlas.[48]

Funktioner i läromedlen

Häggström problematiserar framställandet av funktionsbegreppet i läromedel för grundskolan såväl som gymnasieskolan. Han påpekar att definitionerna varierar kraftig från ett läromedel till ett annat med förklaringen att författarna anpassar sig till målgruppen.[49] För att skaffa oss en mer aktuell bild av nyare läromedel, utformade efter den nya läroplanen Gy 2011, gjorde vi ett eget nedslag i vanligt förekommande läromedel. Vi har främst fokuserat på två serier, *Origo* och *Matematik 5000*, mer exakt de böcker i serierna som är anpassade för gymnasieprogrammen: ES, EK, SA och HU, eftersom dessa utgör målgruppen i vår undersökning.[50]

Matematik 5000

> *Om sambandet mellan två variabler x och y är sådant att varje x-värde, enligt någon regel, ger* ett *bestämt y-värde, kan vi säga att y är en funktion.*[51]

Efter definitionen av en funktion i *Matematik 5000 1b* följer ett konkret exempel där arean av en kvadrat skrivs som en funktion av sidan. Exemplet illustreras och beskrivs på fyra olika sätt: tabell, graf, ord och formel. Som avslutning definieras även begreppen definitions- och värdemängd.[52] Även de två efterföljande böckerna i serien *Matematik 5000, 2b* och *3b,* tar upp och repeterar definitionerna från första boken och förtydligar likt *Matematik 5000 1b* med hjälp av exempel.[53]

Origo

Serien Origo, som används av våra undersökningsdeltagare, skiljer sig från Matematik 5000-serien gällande behandlingen av funktionsbegreppet.[54] Skillnaden blir tydlig i hur funktionsbegreppet presenteras, och framställs genom serien, men också i sättet att definiera begreppet. *Origo 1b* definierar en funktion som:

> *[...]ett samband eller ett beroende mellan två variabler. Man säger att y är en funktion av x, om det till varje värde på x endast finns ett bestämt värde på y.*[55]

[48] Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*, (Gy 2011)
[49] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift, 53,* s. 82-84
[50] Se DEL II, rubriken Metod. Förkortning för Estetiska, Ekonomiska, Samhällsvetenskapliga och Humanistiska programmet.
[51] Alfredsson, Lena, *Matematik 5000. Kurs 1b grön, Lärobok,* 1. utg., Natur & kultur, Stockholm, 2011, s. 316
[52] Alfredsson, L, *Matematik 5000. Kurs 1b grön, Lärobok*, 2011, s. 316
[53] Alfredsson, Lena, *Matematik 5000. Kurs 2b grön, Lärobok,* 1. utg., Natur & kultur, Stockholm, 2011, s. 22-23, Alfredsson, Lena, *Matematik 5000. Kurs 3b grön, Lärobok*, 1. utg., Natur & kultur, Stockholm, 2011, s. 38
[54] Se DEL II, rubriken Metod, där urvalsgruppen presenteras.
[55] Szabo, Attila, *Matematik Origo. 1b*, 2. uppl., Bonnier utbildning, Stockholm, 2011, s. 178

Vi ser hur Origo använder orden *samband* och *beroende* medan Matematik 5000 använder ordet *regel.* Även andra termer har använts i läromedel för att beskriva en funktion, exempelvis: *avbildning*, *relation* och *entydig tillordning*.[56]

I övrigt skiljer sig även upplägget mellan serierna Origo och Matematik 5000 då den senare kontinuerligt repeterar funktionsbegreppets definition genom seriens tre första böcker. I Origo-seriens andra bok, *Origo 2b*, tas inte någon allmän definition av funktionsbegreppet upp över huvud taget. Däremot redogörs tydligt mer specifika egenskaper hos en andragradsfunktion så som nollställen, symmetrilinje, max- och minvärde.[57] Trenden fortsätter även i den tredje boken i serien där allmänna egenskaper hos en funktion lämnas utanför och istället går boken direkt in på definitioner och egenskaper hos begreppet derivata.[58]

Matematik 3000

För att få ett vidare perspektiv gjordes även ett nedslag på läromedel utformade enligt Lpf 94, och mer exakt *Matematik 3000*, en serie läromedel författarna själva är bekanta med. Motsvarande serie för Matematik 3000, den anpassad för programmen ES och SA, följde ytterligare ett nytt upplägg och hade, olikt de två andra studerade serierna, ett tydligt inslag av progression när det gällde funktioner. Den första boken, *Matematik 3000 kurs A* skriver: "Vi säger att 'y är en funktion av x'. En funktion kan beskrivas på olika sätt, t.ex. med en värdetabell, med en graf eller med en formel."[59] Deras bok för kurs B har en mer tydlig definition och beskriver en funktion som "En regel som till varje x-värde ger exakt ett y-värde kallas en funktion. Vi säger då att y är en funktion av x".[60] Därifrån tas ett stort steg till den tredje boken, *Matematik 3000 kurs C,* där begreppen funktion, definitionsmängd och värdemängd tydligt definieras.[61] I den sistnämnda finns även en kort historisk redogörelse av funktionsbegreppet där matematikerna Euler, Cantor och Dirichlet och deras arbete med funktioner presenteras. Här poängteras även egenskaper hos en funktion som eleverna inte stött på i läromedlen tidigare som exempelvis att "elementen i de olika mängderna inte behöver vara tal".[62]

Avslutande kommentar till funktioner i gymnasieskolan

Det kan tyckas märkligt att läromedel inte har mer noggranna och korrekta definitioner av en funktion men om vi studerar läroplaner och kursplaner för den svenska gymnasieskolan ter det sig ganska naturligt. Att begreppet målmängd, som utgör en av tre beståndsdelar för att något över huvud taget kan klassas som en funktion, inte ens nämns i ovan berörda läromedel är en följd av att begreppet inte heller återfinns i kursplanerna. Att sedan begreppet funktion är ständigt återkommande i de olika kursplanerna och huruvida det bör innefatta en korrekt

[56] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift,* s. 84
[57] Szabo, Attila, *Matematik Origo. 2b,* 2. uppl., Sanoma Utbildning, Stockholm, 2012, s. 58
[58] Szabo, Attila, *Matematik Origo. 3b,* 2., [rev. och omarb.] uppl., Sanoma utbildning, Stockholm, 2013, s. 102
[59] Björk, Lars-Eric (red.), *Matematik 3000: matematik tretusen. Kurs A,* 1. uppl., Natur och kultur, Stockholm, 2000, s. 282
[60] Björk, Lars-Eric (red.), *Matematik 3000: matematik tretusen. Kurs B,* 1. uppl., Natur och kultur, Stockholm, 2000, s. 30
[61] Björk, Lars-Eric, Brolin, Hans & Ekstig, Kerstin (red.), *Matematik 3000: matematik tretusen. Kurs C,* [Lärobok], 1. uppl., Natur och kultur, Stockholm, 2000, s. 33
[62] Björk, L, Brolin, H & Ekstig, K, *Matematik 3000: matematik tretusen. Kurs C,* 2000, s. 55

definition kan diskuteras. Avsaknaden av en korrekt definition leder lätt till en felaktig bild av begreppet, speciellt när en uppgift uppmanar elever att "Ange definitionsmängd till funktionen $y = \sqrt{x}$", utan att varken nämna mål- eller värdemängd.[63] Enligt facit är korrekt svar $x \geq 0$ vilket delvis är sant, förutsatt att läroboken utgår från att målmängd och/eller värdemängd utgörs av de reella talen, ℝ. Även fast läroboken gör den förutsättningen kvarstår problematiken kring definitionsmängden. Definitionsmängden till regeln $y = \sqrt{x}$ går att definiera på oändligt många sätt, bara inom ℝ, vilket resulterar i oändligt många möjliga funktioner.

Eftersom läromedlen utformade utifrån Lpf 94 verkar lägga större vikt vid funktioners egenskaper och kring själva funktionsbegreppet än de läromedel utformade efter Gy 2011, kan vi anta att så även är fallet med läroplanerna. Men när vi studerar det centrala innehållet i Lpf 94 ser vi att de två kurserna Matematik A och Matematik B inte innehåller särskilt stort fokus på ovanstående. A-kursen säger att eleverna ska ”kunna tolka och hantera algebraiska uttryck, formler och funktioner.”[64] Men inte mycket mer, detta går att jämföra med Gy 2011 som i kurs 1b uttryckligen ställer krav på eleverna att förstå själva funktionsbegreppet med definitionsmängd och värdemängd.[65] I Matematik B läggs tyngre fokus på förståelse för funktioner, mer uttryckligen att: ”kunna förklara vad som kännetecknar en funktion samt kunna ställa upp, tolka och använda några icke-linjära funktioner som modeller för verkliga förlopp”, vilket är ungefär vad som efterfrågas i kurs 2b.[66] Matematik C behandlar en djupare förståelse av funktioner och introducerar begreppet derivata, där fokus ligger på arbete med derivatans definitioner och förståelse för dessa.[67] Jämfört med kurs 3b i Gy 2011 är det väldigt likt, möjligen beskrivs mer uttryckligen några element tydligare i Lpf 94, men skillnaden är liten. När man studerar det övergripande syftet mellan kursplanerna är Gy 2011:s kärna om funktioner att eleverna skall kunna ”använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen”. Lpf 94 trycker å andra sidan på att eleverna skall utveckla sin förmåga att hantera matematiska begrepp och reflektera över sitt eget användande av dessa begrepp. I våra ögon är skillnaden mellan dessa läroplaner i fråga om funktioner inte vidare stor, även om de nya kursplanerna kanske lägger något större vikt vid den djupare förståelsen av själva begreppen.

Således, är det lätt att ställa sig frågan hur denna stora skillnad i definitionen av funktionsbegreppet, har uppkommit mellan läromedlen? Frågan är däremot desto svårare att svara på. Kanske är det som Häggström menar; att en stor historisk splittring av definitionerna, helt enkelt leder författarna till att använda olika utgångspunkter.[68] Häggström skriver även att författarna givetvis riktar sig till målgruppen vilket vi, när vi jämför läromedlen, inte tydligt kan se i det här fallet. Dessa skillnader mellan läromedlem kanske snarare har sitt ursprung i individuella föreställningar och preferenser snarare än rationella val?

[63] Szabo, A. *Matematik Origo. 1b*, 2011, s. 183
[64] Skolverket, Läroplan för de frivilliga skolformerna (Lpf 94). Stockholm: Utbildningsdepartementet. 2008
[65] Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*, (Gy 2011)
[66] Skolverket, Läroplan för de frivilliga skolformerna (Lpf 94). Stockholm: Utbildningsdepartementet. 2008; Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*, (Gy 2011)
[67] Skolverket, Läroplan för de frivilliga skolformerna (Lpf 94). Stockholm: Utbildningsdepartementet. 2008
[68] Häggström, J. *Nordisk Matematisk Tidsskrift,* s. 82-85

DEL II: Undersökningen

I Del II presenteras den didaktiska undersökningen. Syftet är att undersöka hur eleverna uppfattar funktionsbegreppet och problematisera konceptuell och procedurell kunskap inom funktionsbegreppet. Detta kommer presenteras i form av *metod*, *tidigare forskning och teori*, en *resultatdel* och slutligen *diskussion och slutsatser*. Utöver undersökningens syfte är även förhoppningen att genom elevernas resonemang, resultatet och diskussionen, ytterligare fördjupa presentationen av funktionsbegreppet.

Metod

För att få en statistisk grund gällande en eventuell korrelation mellan elevernas förmåga att lösa funktionernas representationsbyten, så kallade *treatments* och *conversions*-uppgifter, valdes en kvantitativ enkätundersökning.[69] Korrelationen mellan elevers förmåga att lösa *treatments* och *conversions*-uppgifter undersöks med syfte att ta reda på om det ena leder till det andra, för att sedan koppla detta till procedurell och konceptuell förståelse. Uppgifterna i enkäten strukturerade vi samtidigt på ett sådant sätt att elevernas svar skulle ge oss information om vanliga misstag i elevernas procedur och förståelse. Vår enkätundersökning har vi valt att kombinera med en kvalitativ metod via semi-strukturerade gruppintervjuer. Valet grundas i att vi ville åt elevernas perspektiv, eller som det uttrycks i *Metodpraktikan*: ”veta hur människor själva uppfattar sin värld”.[70] Detta gör intervjuer till en given del i studien eftersom vi ämnar komma åt det eleverna själva "tycker och tänker" om funktioner och undervisningen kring detta begrepp. Således utgörs den kvalitativa metoden av en respondentundersökning.[71]

Urval och deltagare

Då arbetet grundar sig i begreppsförståelsen av funktioner föreföll det sig naturligt att göra studien på gymnasieelever. Mer specifikt riktar sig studien mot Matematik 2 då denna kurs läses på de studieförberedande programmen SA, EK, NA och TE.[72] Av rent praktiska skäl, för studiens genomförande, lämpade sig två EK-klasser som läser Matematik 2b som undersökningsobjekt. Anledningen till urvalet var att av de skolor och lärare vi var i kontakt med kände ingen lärare att de hade möjlighet att ta av sin undervisningstid. Totalt genomförde 27 elever enkätundersökningen och utav dessa deltog tolv i intervjuer i grupper om tre. De intervjuade eleverna var sex tjejer och sex killar. Samtliga elever deltog frivilligt på tid som inte var schemalagd.

Vi utgår ifrån att eleverna har gått igenom stora delar av det centrala innehållet för kurs 2b, eftersom eleverna var i slutskedet av kursen. Detta innebär att de nyligen kommit i kontakt med linjära funktioner och andragradsfunktioner, både som graf, formler och ekvationslösning utifrån dessa. Kursen innehåller också att eleverna ska ha en förståelse för egenskaper

[69] Se Figur 9, där begreppen conversions och treatments presenteras.
[70] Esaiasson, Peter, Gilljam, Mikael, Oscarsson, Henrik & Wängnerud, Lena (red.), *Metodpraktikan: konsten att studera samhälle, individ och marknad*, 4., [rev.] uppl., Norstedts juridik, Stockholm, 2012, s. 228
[71] Esaiasson et al, *Metodpraktikan: konsten att studera samhälle, individ och marknad*, 4, 2012, s. 228
[72] Förkortning för Samhällsvetenskapliga, Ekonomiska, Naturvetenskapliga och Tekniska programmet.

hos andragradsfunktioner och konstruktionen graf till funktion. Detta stämmer även överrens med elevernas egen uppfattning om vad de läst om funktioner.

Avgränsningar

På grund av den ringa omfattningen gör vår studie inga anspråk på att skapa en generaliserande bild av förståelsen hos Sveriges gymnasieelever, utan är endast fokuserad på att ge en hänvisning om svårigheter och förståelse hos de elever som innefattas av urvalet. Förhoppningen är att utifrån resultaten ändå kunna bidra till en diskussion och en möjlighet att problematisera de didaktiska aspekterna kring funktionsbegreppet. Den egna studiens relevans består alltså bl.a. av möjligheten till en inblick i funktionsbegreppet, utifrån en grupp elevers ögon.

Vi har inledningsvis valt att lägga stor vikt i Duvals teorier i tidigare forskning vilket vi försökt ha som grund för undersökningen. Enkäten baseras till stor del på Duvals forskning om skillnader mellan treatments och conversions. Men då resultaten på denna del av undersökningen varken stärkte eller avvisade de teorier vi hade i anspråk att forska vidare kring, har vi aktivt valt en mindre återkoppling i diskussionen till denna del av tidigare forskning än vad vi tänkt från början. Sägas bör dock att Duvals teorier om representationer fortfarande är fundamentalt för funktionsbegreppet, de får bara inte så stor plats i diskussionen som de till synes kanske borde ha. Relevansen att fortfarande ha med dessa delar i undersökningen är dels att sättet som funktionsbegreppet problematiseras, genom Duvals forskning, bidrar till en väldigt intressant aspekt av arbetet och dels att resultatet av enkäten fortfarande kan användas i diskussionen kring elevernas förståelse och procedurhantering.

Genomförande

Under intervjuerna utgick vi från vår intervjuguide.[73] Vid skapandet av intervjuguiden och våra frågor utgick vi från de grundtankar som tas upp i *Metodpraktikan* med ett koncept med uppvärmningsfrågor, några huvudfrågor, så kallade tematiska frågor och tillhörande uppföljningsfrågor.[74] Vi genomförde även en testintervju för att ytterligare kunna förbättra intervjuguiden, detta genom att undersöka hur frågorna uppfattades av en respondent och vilka följdfrågor som förefaller sig naturliga.

Under genomförandet avvek vi visserligen från intervjuguiden i det faktum att vi inte kände behovet av några uppvärmningsfrågor då vi precis genomfört enkäten och presenterat arbetet för eleverna. Därmed gjordes bedömningen att de var bekanta med oss och "varma i kläderna". Intervjuerna genomfördes i grupprum eleverna brukar arbeta i för att de skulle känna sig bekväma i situationen. Efter att eleverna tillfrågats, och samtyckt, spelade vi in intervjuerna, som sedan transkriberades. Samma intervjuledare höll i samtliga intervjuer som alla tog runt 30 minuter var. En bit in i intervjuerna delades ett papper ut till eleverna med en definition av

[73] Se Bilaga 2. Intervjuguiden
[74] Esaiasson et al, *Metodpraktikan: konsten att studera samhälle, individ och marknad*, 4, 2012, s. 264-265

en funktion.[75] Definitionen delades ut efter att elevernas förförståelse för funktionsbegreppet lokaliserats med syftet att ge stöd till eleverna under diskussionsuppgifterna.[76]

Tidigare forskning och teori

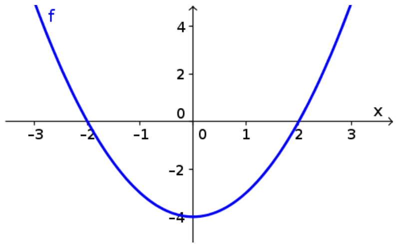
I det kommande avsnittet presenteras tidigare forskning som anses relevant för hur elever förstår och lär sig matematik. Tanken är att presentera ett teoretiskt ramverk, som kan vara till stöd för den egna studiens diskussion och slutsatser. Kortfattat så kommer det att presenteras två olika aspekter av det matematiska lärandet, dels en studie där byten mellan matematiska representationsformer presenteras och dels en studie där det undersöks och problematiseras kring begreppen konceptuell och procedurell förståelse, samt hur dessa påverkar varandra. Studierna, som vid första anblick är olika, har även många beröringspunkter och även en gemensam kärna, nämligen matematisk förståelse och hur detta påverkar elevernas lärande.

Representationer och matematisk förståelse

"Representation and visualization are at the core of understanding in mathematics” skriver R. Duval, professor i matematik, och han är långt ifrån ensam i sitt ställningstagande.[77] Forskare som Pape & Tchoshano, Goldin & Shteingold delar hans uppfattning.[78] Men även organisationer som NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) uttrycker vikten av representationsformer:

> *Representations are necessary to students' understanding of mathematical concepts and relationships. Representations allow students to communicate mathematical approaches, arguments, and understanding to themselves and to others. They allow students to recognize connections among related concepts and apply mathematics to realistic problems.*[79]

Men vad är då en representation och vad är olika representationsformer? Vi ser exempelvis funktionen $f(x) = x^2 - 4, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som vårt objekt, denna har en algebraisk representation som är just $f(x) = x^2 - 4, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, men också en grafisk representation i form av grafen i figur 9:



Figur 9. Graf till funktionen $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4, f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

[75] Se Bilaga 4. Definitionsblad till elever under diskussionen
[76] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju
[77] Duval, Raymond. *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*, 1999, s. 3
[78] Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory Into Practice*, (2001), *40*(2), 118-127., Goldin, G. & Shteingold, (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM
[79] National Council of Teachers of Mathematics. http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26862

Med detta exempel ser vi alltså att många objekt kan ha flera olika former av representationer, t.ex. kunde även ovanstående exempel representerats med en tabell. Värt att notera är att den skriftliga notationen av funktionens regel, i vårt fall funktionen $f(x) = x^2 - 4, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en representation av själva funktionen, inte det objekt vi undersöker. Funktionen i sig är objektet och inte någon av dess representationsformer. Men att ge en definition på vad en representation är för något är svårare. Duval skriver att ”Representation refers to large range of meaning activities: steady and holistic beliefs about something, various ways to evoke and to denote objects, how information is coded”, vilket är ett ganska generellt och vagt uttalande.[80] Huvudsakligen är en representation en beskrivning eller tolkning av ett objekt och det är den ingången vi har i följande avsnitt.

För att ur ett didaktiskt perspektiv kunna göra en kartläggande studie mellan konceptuell och procedurell kunskap inom funktionsbegreppet krävs det både att vi skapar oss en bild av vad representationsformer är och hur de verkar, men också att vi klargör distinktioner av flera begrepp. Som Duval skriver har forskning på de didaktiska aspekterna av matematisk förståelse hos elever lett till ett väldigt differentierat fält gällande definitioner kring matematisk förståelse.[81] Enligt Duval så finner alla dessa distinktioner uttryck i olika former av kognitiva variabler.[82] I följande avsnitt skall vi försöka lägga en grund för en kognitiv förståelse av matematiska representationer samt vissa viktiga distinktioner hos dessa.

Duval gör uppdelningen mellan två sorters kognitiva representationer. De som medvetet produceras i ett semiotiskt system, t.ex. meningar, grafer, diagram, ritningar osv. Gentemot den sorts representationer som omedvetet framkommer för oss som drömmar, visuella minnen, men också ”bilder” skapade av fysiska objekt så som kameror, speglar m.m.[83] Detta ger oss en tydlig distinktion vilket vi väljer att benämna som semiotiska och omedvetna representationer.

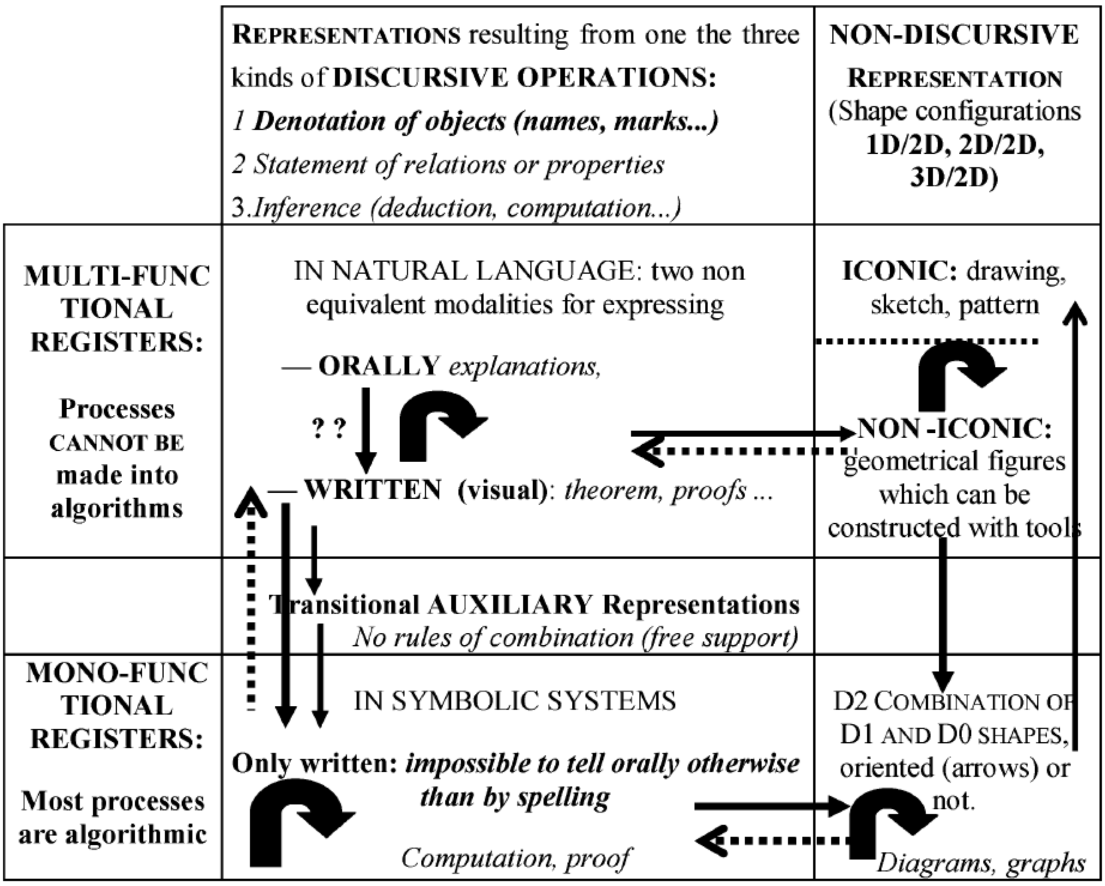
I de flesta andra fält finns det möjlighet att få förståelse för begrepp utan skapade representationer.[84] I matematiken är det närmast omöjligt i de flesta fall, man kan ha en intuitiv förståelse för vad tyngdkraften är och hur den verkar, men en intuitiv förståelse för vad derivata är och hur det behandlas kräver representationer i form av grafer och representationer i form av matematiska definitioner. Således är det vitalt med semiotiska representationer och som Duval skriver finns det ingen annan möjlighet att vinna förståelse för matematiska koncept annat än genom skapandet av semiotiska representationer.[85] Duval väljer också att kategorisera dessa representationer i så kallade register, vi kommer nedan bara att studera dessa register hos de utifrån ovan definierade semiotiska representationsformerna.

Duval gör skillnad på vad han benämner som mono- och multifunktionella register. Inom ett monofunktionellt semiotiskt system sker de flesta processer genom algoritmer och representa-

[80] Duval, R. *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking.* 1999, s. 3
[81] Duval, R. *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking,* 1999, s. 1
[82] Duval, R. *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking,* 1999, s. 1
[83] Duval, R. *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking,* 1999, s. 2
[84] Duval, R. *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking,* 1999, s. 3
[85] Duval, R. *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking,* 1999, s. 1

tionerna är således beräkningar, grafer och diagram. Inom ett multifunktionellt system gäller motsatsen, processerna sker aldrig genom algoritmer.[86] Ett exempel på detta är elementär geometri, där saknas algoritmer för att ”räkna” fram geometriska lagar och regler, utan förståelsen kommer på annan sätt. Vidare räknas språkliga framställningar till multifunktionella då de på samma sätt inte går att standardisera i sin framställning.

Vidare kategoriserar Duval både mono- och multifunktionella register som antingen diskursiva eller icke-diskursiva. Duval skapar här en tydlig distinktion mellan diskursiva och icke-diskursiva operationer. Diskursiva operationer täcker in alla språkliga framställningar, både muntliga förklaringar och nedskrivna teorem men också matematiska bevis i ett symboliskt system. De icke-diskursiva kännetecknas av skisser, mönster, grafer, diagram och geometriska figurer som kan skapas med verktyg, alltså operationer som inte uttrycks språkligt utan endast visuellt.[87] Duval menar att förmågan att växla mellan olika representationsformer, både inom samma och olika register, är ett måste för att nå förståelse vid inlärning av ett matematiskt begrepp.[88]

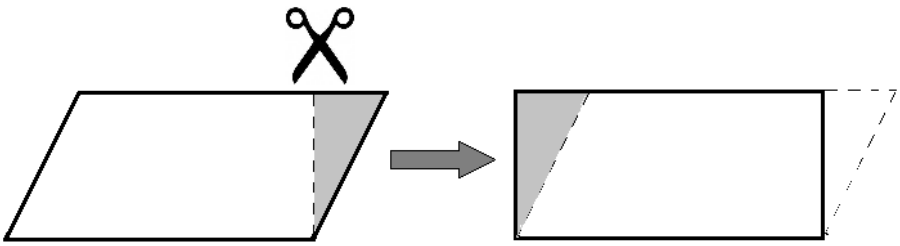


Figur 10. Klassifikationstabell över representationer och register[89]

[86] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 109
[87] Duval, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*. 2006, *61*(1-2), 103-131, s. 108
[88] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 125
[89] Hämtad från Duval, R. A, *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 210. *Treatments* illustreras av krökta pilar och *conversions* av raka pilar

Växlingar inom och mellan register

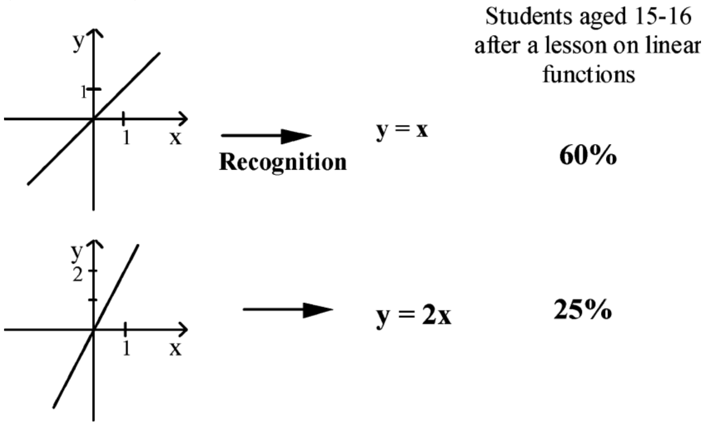
Duval menar att det finns två olika sorters växlingar som kan göras inom semiotiska representationer: *treatments* och *conversions*.[90] Treatments är växlingar mellan representationsformer inom samma register. Det kan exempelvis vara skiftningar mellan decimalform och bråk; $0{,}4 + 0{,}2 = 2/5 + 1/5$. Men det kan också vara grafiska förändringar i samma register, till exempel att förändra en parallellogram till en rektangel.[91]



Figur 11. Parallellogram till rektangel

Conversions är växlingar mellan representationer som innebär byte av register men att samtidigt bibehålla objektet som behandlas. Till exempel att gå från en funktion uttryckt i algebra till grafen som representerar funktionen eller att gå från vanligt språk till att skriva ner vad som sägs med bokstäver.[92] Utifrån detta är conversions mer komplexa då de skiftar register, detta leder till flera svårigheter då ett byte av register först kräver en identifikation av det representerade objektet i båda register och dessa representationsformer har väldigt ofta inget gemensamt.[93]

Duval hänvisar till forskning han själv gjort från 1988 som visar följande resultat på nedanstående uppgifter som behandlar igenkännande.[94] Eleverna har fått uppgiften att skriva ner formeln för funktionen som visas i grafen, frågorna är flervalsfrågor med svarsalternativ som exempelvis: $y = x,\ y = -x,\ y = x + 1$.



Figur 12. Igenkännande uppgift[95]

[90] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 211
[91] Se figur 10
[92] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 112
[93] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 112
[94] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 113
[95] Hämtad från Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 113

Duval säger att om eleverna fått samma uppgifter fast med ett omvänt registerbyte, d.v.s. uppgiften att konstruera en graf till funktionen $y = x$ och $y = 2x$, hade resultatet varit över 90%.[96] I skolan är uppgifterna väldigt sällan baserade på igenkännande utan bygger oftare på proceduren att, som i exemplen med grafer, placera ut punkter i ett koordinatsystem och dra linjer däremellan.[97] Duval menar vidare att denna lokala förståelse är underkastad den högre förståelsen som krävs för att behandla objektet som kvalitativa visuella variabler. Duval skriver att: “If treatment is the more important from a mathematical point of view, conversion is basically the deciding factor for learning.”[98] Därmed lägger han verkligen tyngd på vikten av undervisning som ger elever förmåga att utföra just conversions.

Konceptuell och procedurell kunskap

En central fråga i matematikdidaktik är hur sambandet mellan procedurhantering och förståelse samspelar, vilken som ger bäst resultat för eleverna och därigenom hur matematiklärare på bästa sätt bör lägga upp sin undervisning.

I artikeln *Conceptual and procedural knowledge of mathematics - does one lead to the other?*, skriven av B. Rittle-Johnson och M.W. Alibali, presenteras en studie inom ämnet, där fokus ligger på hur dessa olika kunskaper påverkar varandra. I studien definieras konceptuell kunskap som: "explicit or implicit understanding of the principles that govern a domain and of the interrelations between pieces of knowledge in a domain", medan den procedurella kunskapen syftar till en handlingssekvens vid lösning av ett problem.[99] Fastän dessa två sorter av kunskap definieras olika, anses de också som sammanhängande, svårskilda, och att utvecklingen av de båda kunskaperna inte sker skilt från varandra.[100]

Studiens resultat visar på att det finns ett tvåriktat samband mellan konceptuell och procedurell kunskap. Detta genom att eleverna som fick konceptuella instruktioner också utvecklade sin procedurhantering och på samma sätt såg man en utveckling av den konceptuella förståelsen hos eleverna som fick procedurella instruktioner. I studien förklaras sambandet med ordet iterativt, som betyder studsande eller upprepning, och syftar t.ex. till att en vunnen konceptuell kunskap kan leda till utvecklad procedurell kunskap, som sen i sin tur ytterligare ökar på den konceptuella förståelsen. Därför kan utvecklingen av den konceptuella och procedurella kunskapen, under vissa omständigheter, beskrivas som att den utvecklas jämsides av varandra, istället för individuellt.[101]

I studien presenteras två förklaringar till att den konceptuella kunskapen förbättrar elevernas procedurhantering, dels att en större konceptuell kunskap leder till att eleverna själva kan identifiera när deras procedur är felaktig och dels genom att brister i den konceptuella kun-

[96] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 113
[97] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 113
[98] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 103
[99] Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. *Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?*. Journal of educational psychology, (1999), *91*(1), 175, s. 176
[100] Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. *Conceptual and procedural knowledge of mathematics*, 1999, s. 176
[101] Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. *Conceptual and procedural knowledge of mathematics*, 1999, s. 185

skapen kan begränsa elevernas möjlighet till en korrekt procedurhantering. Något som i så fall innebär att en ökad konceptuell förståelse till viss del kan hindra elever från ett inkorrekt tillvägagångssätt i procedurhanteringen. Både dessa "förklaringar", till sambandet att konceptuell kunskap leder till ökad procedurell kunskap, ligger i elevernas möjlighet att koda, och förstå det matematiska problemet, vilket är viktigt för att kunna hantera matematik.[102]

På frågan om hur den procedurella kunskapen utvecklar den konceptuella, presenteras också två möjligheter. Den första möjligheten är att den procedurella kunskapen begränsar förståelsen av ett koncept, i den meningen att man genom en korrekt procedur kan dra slutsatser och utesluta felaktig konceptuell förståelse. Den procedurella kunskapen blir alltså ett stöd till att hitta och förstå det matematiska konceptet. Det andra möjliga sättet, för den procedurella kunskapen att påverka den konceptuella förståelsen, är att eleverna tillslut blir såpass säkra vid procedurhanteringen att deras hela matematiska kapacitet inte är upptagen, vilket kan leda till tankar kring varför proceduren fungerar, något som i sin tur kan öka den konceptuella förståelsen. På liknande sätt kan det inom ett nytt matematiskt område för eleverna väckas tankar om det bakomliggande konceptet när två tillsynes liknande problem löses med två olika procedurer.[103]

I studien kommer Rittle-Johnson och Alibali också fram till slutsatsen att samspelet mellan konceptuell och procedurell kunskap inte är symmetrisk, i den meningen att de elever som utvecklade den konceptuella kunskapen fick större påverkan på den procedurella kunskapen, än tvärtom. Alltså, eleverna som utvecklade den procedurella kunskapen fick förstås också en viss konceptuell förståelse, även om detta visade sig vara mer begränsat. Problem som eleverna stötte på, som fått de procedurella instruktionerna, visade sig vara svårigheter att använda sig av den lärda proceduren om uppgifterna skilde sig från de presenterade uppgifterna (även om lösningsmetoden i princip var densamma). Svårigheterna bestod av att anpassa den procedurella kunskapen till det nya problemet. Den konceptuella kunskapen ledde däremot ofta även till en korrekt procedurhantering, explicit beskrivs det i resultatet att eleverna som fått de konceptuella instruktionerna i lika hög grad som de elever som undervisats i proceduren, utförde en korrekt lösning till problemen. Det var framförallt i de uppgifterna som krävde att eleverna gjorde små förändringar i proceduren som eleverna med de konceptuella instruktionerna fick ett bättre resultat. Genom detta dras slutsatsen i artikeln att även om de båda kunskaperna ibland utvecklas gemensamt har den konceptuella kunskapen större inverkan på den procedurella kunskapen.[104]

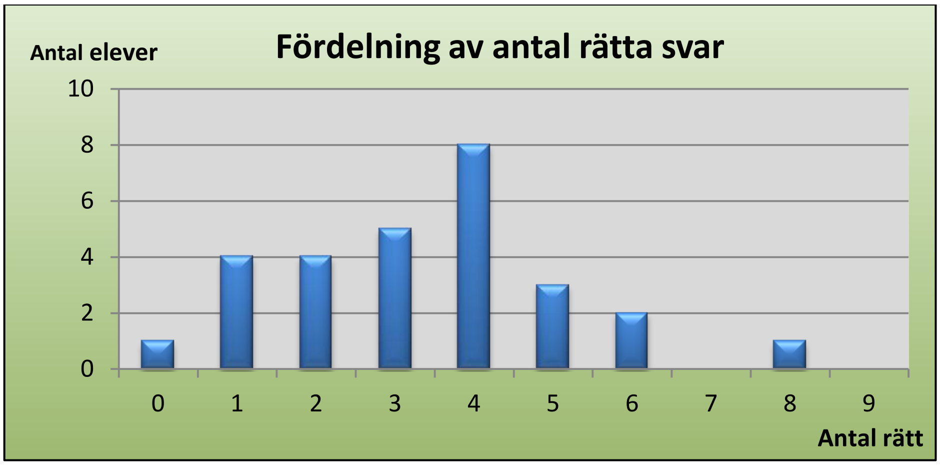
[102] Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. *Conceptual and procedural knowledge of mathematics.* 1999, s. 186
[103] Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. *Conceptual and procedural knowledge of mathematics.* 1999, s. 187
[104] Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. *Conceptual and procedural knowledge of mathematics.* 1999, s. 185-186

Resultat och analys

Här presenteras och kommenteras resultaten från undersökningen huvudsakligen åtskilda, det vill säga svaren från enkäten under en rubrik (Enkät) och resultaten från intervjuerna under en annan (Gruppintervjuer). Resultaten kommer sedan diskuteras mer genomgående under rubriken *Diskussion och slutsatser*.

Enkät

I genomgången av enkätuppgifterna kommer det i figurförteckningen beskrivas vilka uppgifter som har klassats som *treatments* och *conversions*-uppgifter. I slutet av resultatredovisningen från enkäten presenteras även lösningsfrekvensen på *treatments* och *conversions*-uppgifterna mer specifikt.



Figur 13. Histogram över fördelningen av antal rätta svar i enkäten.

Fråga 1	
a	43%
b	32%
d	**25%**
c	0%
blankt	0%

Fråga 2	
d	**43%**
c	32%
a	14%
b	7%
blankt	4%

Fråga 3	
c	**50%**
d	21%
b	18%
a	11%
blankt	0%

Fråga 4	
d	**43%**
c	32%
a	11%
b	11%
blankt	4%

Fråga 5	
d	39%
a	**32%**
b	18%
c	7%
blankt	4%

Fråga 6	
b	25%
a	**21%**
d	21%
c	18%
blankt	14%[105]

Fråga 7	
b	**61%**
a	18%
c	11%
d	11%
blankt	0%

Fråga 8	
c	39%
b	**25%**
d	21%
a	14%
blankt	0%

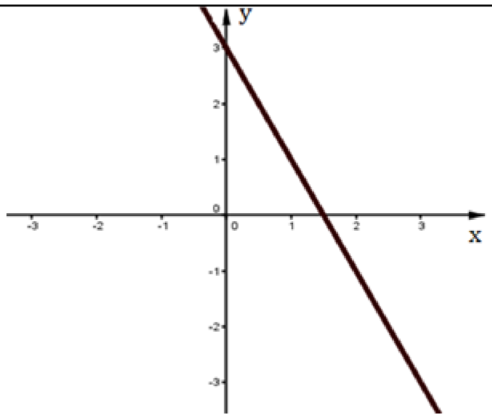
Fråga 9	
c	43%
b	**36%**
a	14%
d	7%
blankt	0%

Figur 14. Tabeller över svarsfördelningen i procent.[106]

[105] Att så många som 14 % inte valde något svarsalternativ kan ha sin förklaring i att en svart linje från kopiatorn delvis skymde svarsalternativen.
[106] Rätt svarsalternativ är i fet stil med grön bakgrund.

Figur 13 och 14 ger en överblick av resultaten från enkäten. I figur 13 visar ett histogram hur eleverna presterade medan tabellerna visar svarsfördelningen på respektive fråga. För att läsaren enkelt ska kunna följa kommentarerna till respektive fråga föregås kommentarerna av frågan från enkäten. Enkäten finns i sin helhet som bilaga.[107]

1) Vilken funktion stämmer med grafen?



☐ $y = 3 + 1{,}5x$ ☐ $y = 1{,}5 + 3x$ ☐ $y = 2 - 3x$ ☐ $y = 3 - 2x$

Figur 15. Fråga 1 från enkätundersökningen (conversion-uppg.)

I enkätens första fråga valde 75 % av eleverna alternativ a eller b, vilket tyder på att de tittar på linjens skärningspunkter med koordinataxlarna. Det vore intressant om vi hade vänt på det och skrivit uppgiften på den form de känner igen; $y = kx + m$ istället för $y = m + kx$ för att se om detta ställer till problem. Att döma av svaren är det få som hittar rätt svar genom sin förståelse för k och m-värde. Inte heller strategin att välja ut en punkt och sätta in koordinaterna i funktionen, för att se om det stämmer, lär ha använts.

2) Beräkna nollställena till funktionen: $y = x^2 - 8x + 12$

☐ 0 och 8 ☐ -2 och -6 ☐ -3 och 4 ☐ 2 och 6

Figur 16. Fråga 2 från enkätundersökningen (treatment-uppg.)

Det korrekta alternativet var också det mest valda i fråga 2, men intressant nog svarade ändå 1/3 av eleverna alternativ c, vilket var en majoritet av de med felaktigt svar. Med tanke på storleken på urvalet kan det helt bero på slumpen men det är intressant att överväga den svårighet eleverna annars kan ha. Det felaktiga svaret c kan uppkomma vid ett inkorrekt försök att faktorisera funktionen för att hitta nollställena, vid en faktoruppdelning med $(x + 3)(x - 4)$. Kanske fokuserar eleverna primärt på funktionens grad och q-värdet[108] när de faktoriserar? Det är dock värt att nämna att funktionens grad blir korrekt men q-värdet blir negativt. Således är graden av förståelse sannolikt låg och slumpen spelar troligen roll i resultatet.

[107] Se Bilaga 1. Enkätundersökning - Funktioner
[108] I fallet $x^2 + px + q = 0$

3) Vilken funktion stämmer med tabellen?

x	y
0	4
1	5
2	8
3	13

☐ $y = 2x + 4$ ☐ $y = 2x^2 - x + 4$ ☐ $y = x^2 + 4$ ☐ $y = 4 + x$

Figur 17. Fråga 3 från enkätundersökningen (treatment-uppg.)

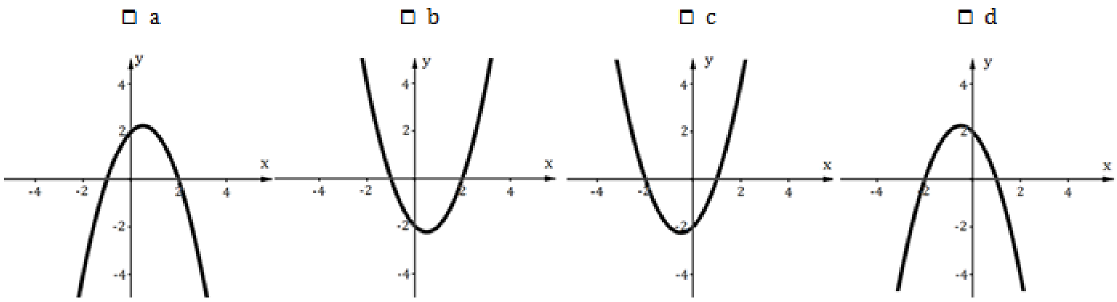
Hälften av eleverna valde rätt alternativ i fråga 3, medan övriga röster fördelades jämt mellan de tre felaktiga alternativen. Detta kan tolkas som att de som inte vet hur de ska komma fram till svaret och helt enkelt gissar. Eventuellt att de testar de två översta sambanden på alternativ d och där märker att det stämmer.

4) Funktionen $y = 3 + bx - 2x^2$ går genom punkten (2, 5). Bestäm värdet på b.

☐ $b = 9$ ☐ $b = \frac{49}{5}$ ☐ $b = -7$ ☐ $b = 5$

Figur 18. Fråga 4 från enkätundersökningen (treatment-uppg.)

5) Vilken grafen stämmer med funktionen: $y = 2 + x - x^2$?



Figur 19. Fråga 5 från enkätundersökningen (conversion-uppg.)

Fler elever klarar fråga 4 än fråga 1 och 5. Strategin att sätta in en punkt, som används i fråga 4, skulle också gå att använda i fråga 1 och 5 där eleverna ska koppla en funktion till rätt graf. Det tyder på att eleverna inte använder den strategin utan istället försöker att se svaret bara genom att titta på grafen och använda sig av de kunskaper de har som t.ex. "plustecken framför x^2 = glad mun". Detta syns tydligt i fördelningen mellan svarsalternativen i uppgiften 5 där en klar majoritet, 71 %, valde antingen alternativ a eller d, de med "ledsen mun".

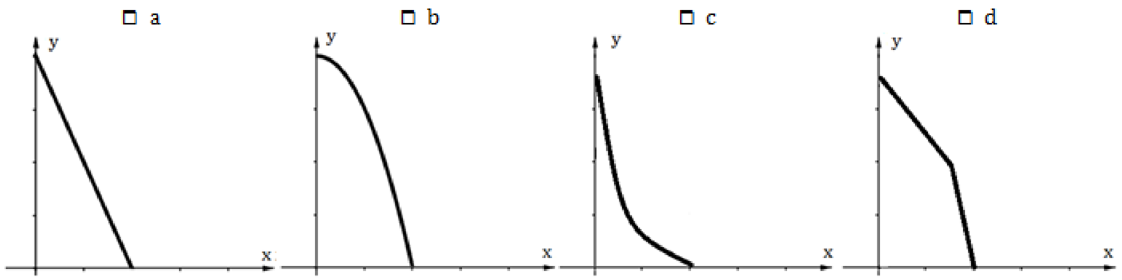
6) Bestäm symmetrilinjen för $y = (x + 3)(x - 9)$

☐ 3 ☐ 6 ☐ -3 ☐ -6

Figur 20. Fråga 6 från enkätundersökningen (treatment-uppg.)

I fråga 6 ses ingen tydlig koppling mellan elevernas förståelse och det rätta svaret, resultaten tyder på att eleverna har en obefintlig eller minimal förståelse för hur man bestämmer en symmetrilinje. Alternativt kan de bestämma en symmetrilinje när de utgår från en andragradsfunktion på formen $Ax^2 + Bx + C = 0$, men saknar förståelsen för att de kan multiplicera ihop parenteserna, alternativt misslyckas att multiplicera ihop dem.

7) Kalle släpper ett ägg från ett fönster 20 m över marken. Äggets höjd y meter över marken efter x sekunder beskrivs av formeln $y = 20 - 5x^2$. Vilken graf nedan beskriver bollens fall?



Figur 21. Fråga 7 från enkätundersökningen (conversion-uppg.)

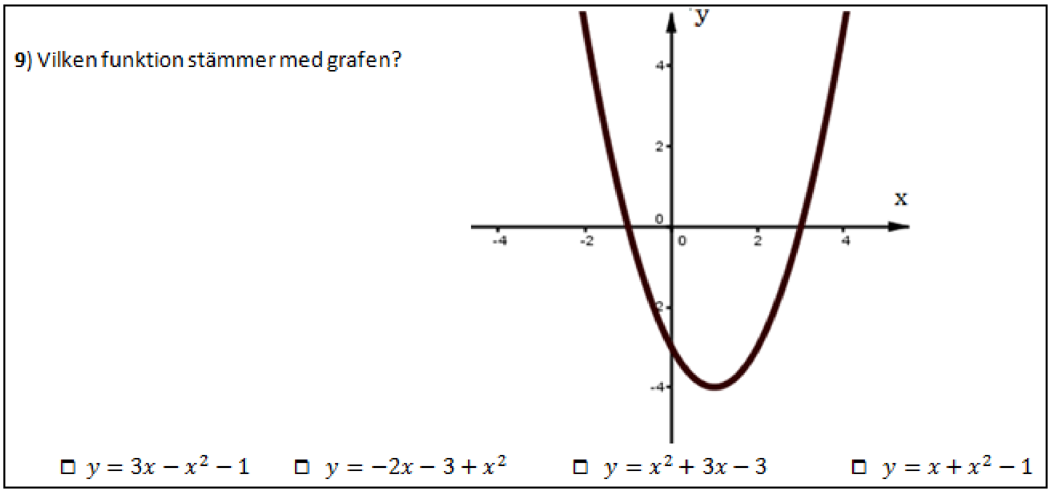
61% av eleverna har ett korrekt svar på fråga 7, vilket är det bästa resultatet i enkäten. Dock förde vi en diskussion om denna fråga i en av klasserna efter enkäten och det framkom att väldigt många hade stora svårigheter att förstå det fysikaliska förlopp som förenklar förståelsen i frågan. Många elever ansåg att det bara var löjligt att något skulle falla snabbare ju längre det föll. Ett missförstånd av gravitationen uppvisades också, en elev uttryckte sig: ”Men gravitationen är ju lika stor hela tiden! Då måste ägget falla lika snabbt hela tiden.” Här visar eleven en ännu inte utvecklad förståelse av acceleration.

8) Summan av två tal är 26. Det ena talet är x. Vilket alternativ nedan är en funktion av talens produkt y?

- ☐ $y = x(x - 26)$
- ☐ $y = (26 - x)x$
- ☐ $y = 26 - x^2$
- ☐ $y = (x - 26)(26 - x)$

Figur 22. Fråga 8 från enkätundersökningen (conversion-uppg.)

Endast 25% av eleverna uppvisade ett korrekt svar på enkätens åttonde uppgift, medan 39% valde alternativ c. Statisktiskt är det svårt att dra någon slutsats men eleverna tycks intuitivt ha närmare till alternativet $y = 26 - x^2$ än det korrekta $y = (26 - x)x$. Uppgiften kan möjligtvis visa på svårigheten som uppstår när eleverna tvingas byta representationer mellan olika register. Detta eftersom svårigheten i uppgiften är att tolka den nedskrivna förklaringen av sambandet och sedan formulera det med en formel.



Figur 23. Fråga 9 från enkätundersökningen (conversion-uppg.)

Alternativ a som har ett negativt x^2-värde valdes av ganska få elever. Närmare 80 % av eleverna valde alternativ b eller c som har C-värdet, -3 gemensamt.[109] Det verkar i resultaten som att utgå ifrån C-värdet är den metod eleverna använt sig av i uppgiften. Dock tyder den jämna fördelningen mellan alternativ b och c på att förståelsen för att beräkna eller förstå symmetrilinjen saknas, på samma sätt som i uppgift 6.

Lösningsfrekvensen på byten av representationer

Lösningsfrekvensen på *treatments* och *conversions*-uppgifterna förehöll sig väldigt lika i resultatet för enkäten; 39,29% för treatments och 35,71% för conversions. Utifrån detta går det att säga att det antingen är svårighetsgraden och elevernas förmåga för att lösa de två sorternas uppgifter väldigt likvärdiga, eller så är elevernas förmåga för det ena eller andra högre, men uppgifternas svårighetsgrad olika. I den här typen av test går det inte att se vilket som förehåller sig riktigt. Dock kan vi undersöka korrelationen med lösningsfrekvensen från elev till elev. Detta gjordes med hjälp av ett X^2-test (chi-två-test) kallat oberoende test.[110] Testet gav värdet 22,52 vilket när det jämförs med en tabell över X^2-fördelningskvantiler[111] är aningen för lågt för att ge utslag med 90% konfidens.[112] Vi testade även korrelation via Excel genom ett korrelationstest med resultatet 0,3958 vilket inte går att dra mycket slutsatser från mer än att vår data verkar vara svagt positivt korrelerad.

Representationsbyte - funktion till graf och graf till funktion

De två uppgifterna som behandlade *conversion* från funktion till graf hade en sammanlagd lösningsfrekvens på 46,43% medan uppgifterna som behandlade conversions från graf till funktion hade 30,36%. Detta är ingen överväldigande skillnad men eleverna tycks i detta fall ha något lättare att gå från funktion till graf än den igenkännande typen av uppgiften av graf till funktion.

---

[109] I fallet $y = Ax^2 + Bx + C$
[110] Britton, Tom & Garmo, Hans, *Sannolikhetslära och statistik för lärare*, Studentlitteratur, Lund, 2002, s. 352
[111] Britton, T. & Garmo, H., *Sannolikhetslära och statistik för lärare*, 2002, s. 394
[112] Vidare utfördes även ett X^2-test i Excel för att få ett exakt värde för signifikansnivån som gav oss 84,3%

Gruppintervjuer

I denna del kommer resultatet av våra intervjuer presenteras. Intervjuerna skedde i grupper med tre elever och en intervjuledare. Intervjuerna tog ca 30 minuter vardera. Intervjuerna bestod kortfattat av tre olika delar; frågor om funktionsbegreppet, uppgifter som berörde elevernas förståelse för funktioner och frågor om hur elever värderar och uppfattar konceptuell respektive procedurell kunskap i skolan.

Vad är en funktion?

Vi inledde gruppintervjuerna med att fråga eleverna om de kunde förklara vad som är en funktion. Inledningsvis beskrevs en rad olika exempel på funktioner, både korrekta och inkorrekta förslag. Många förslag handlade om att en funktion är ett samband, en förändring eller en linje i ett koordinatsystem.

Till exempel uttryckte sig många elever i stil med: "- Det är väl något som beskriver någonting" eller en mer precis förklaring; "- Den beskriver någonting, typ. Det är ingen ekvation för man kan inte lösa ut den, utan man använder den för att lösa ut". En del elever uttryckte det också som en förändring. En elev beskrev funktioner som; "- Man beskriver en utveckling av en händelse, kanske... över tid" och en annan elev beskrev det som; ”- Ja, det skulle jag vilja säga att en funktion är. Till exempel när man har vikt eller kilopris och när något förändras och hur priset ökar i förhållande till vikten." Majoriteten av elever beskrev däremot funktioner som antingen en linje i ett koordinatsystem eller som den räta linjens ekvation, $y = kx + m$. Exempelvis: "- ... en funktion, jag hade sagt nåt slags streck i koordinater" eller "- Man tänker ju på linjer direkt ... Är det inte det här $y = kx + m$, eller ja, det är ju den räta linjen".

På frågan om en ekvation är en funktion rådde det också spridda åsikter bland eleverna. Många elever svarade ett blankt ja, medan andra svarade nej. I ett elevsvar framkom problemet med att skilja de båda åt, eleven förklarade det som att: "- ... de har ett x och ett y värde, och det finns en okänd i en ekvation, det känns som att… Det är väl ett samband i en ekvation, det måste vara ett samband i en funktion!". Endast ett fåtal elever kunde tydligt formulera skillnaden mellan en ekvation och en funktion, en elev förklarade det som: "- En ekvation är en uträkning, du har ju en konstant i den. Det har du inte i en funktion, den är mer generell där du kan ha olika värden, en ekvation har alltid ett värde".

Eleverna uppmuntrades att försöka formulera en definition av begreppet funktion, något som visade sig svårt. Ett talande citat från elevernas försök att uttrycka en definition av funktioner: "- Jag vet inte. Har aldrig fått den frågan att beskriva en funktion. Jag vet ju vad en funktion kan beskriva, men jag vet inte hur jag ska definiera en funktion". I många fall kunde eleverna enas om att det krävdes en regel eller ett samband, med vilket majoriteten syftade på en matematisk formel, något som vi återkommer till i följande avsnitt.

Som tidigare nämndes, i arbetets metoddel, valde vi att under intervjuerna presentera en nedskriven definition av funktionsbegreppet.[113] I samband med genomgången av definitionen framkom att ca hälften av eleverna kände till begrepp som definitions- och värdemängd, och kunde kortfattat förklara vad det var, medan ingen hade hört talas om funktionens målmängd.

Diskussionsuppgifter - Är detta en funktion?

Under gruppintervjun behandlades även sex olika diskussionsuppgifter, utifrån tanken att eleverna skulle diskutera och komma fram till om det var en funktion, hur den i så fall bör definieras och vad de uppfattade som problematiskt med de olika uppgifterna.[114] I kommande avsnitt presenteras de olika uppgifterna och elevernas diskussion kring dem.

Första uppgiften eleverna fick undersöka var $y = \sqrt{x}$.[115] De allra flesta elever tolkade formeln som en möjlig funktion, med motiveringar som: "- Det beror ju på vad *y* och *x* har för värde. *x* är ju alltså att *y* är lika med roten ur *x*. Så *y* är typ tre och *x* är nio så blir det ju samma tal. Men jag vet inte om det blir en funktion för det?". Liknande tankar från andra elever: "- Ja, det tycker jag, det är ju ändå *y* = *x*, fast roten ur *x*." och "- Ja, är det inte det när man sammankopplar *y* och *x*?". Resonemang som kan tolkas som att eleverna har en förståelse för att en funktion kräver en regel som kopplar samman två mängder, t.ex. *x*-värden och *y*-värden. Även om rottecknet, av många, ansågs problematiskt. De som svarade nej på frågan, huruvida $y = \sqrt{x}$ kan anses vara en funktion, uppfattade även de rottecknet som problematiskt. Några elever argumenterade för att det inte var en x^2-kurva och därför ingen funktion, att $y = \sqrt{x}$ blir en rät linje och andra för att det verkar omöjligt att skriva den på formen $y = kx + m$.

Att definiera definitions- och målmängden för $y = \sqrt{x}$ visade sig vara svårt för en majoritet av eleverna. Vissa aspekter som framkom var dels en svårighet för förståelsen av just begreppen definitions- och målmängd och dels brister i den matematiska förståelsen. Brister i den mån att ett negativt tal under roten ger komplexa värden, vilket kommer kräva att $y = \sqrt{x}$ måste definieras för att uppfylla kraven på en funktion. Något som bara ett fåtal elever, ofta med hjälp av intervjuledaren, kunde beskriva och hur det kommer påverka hur funktionen definieras. En elev beskrev problemet med att definiera funktionen kan bero på att: "- Man kanske inte alltid får ut ett jämnt tal". Några elever uttryckte även en förvirring när det gällde att sambandet mellan $y = \sqrt{x}$, t.ex.: "Det är ju inget tal, så jag fattar inte hur man ska få det till en funktion. Det går ju inte att sätta in det någonstans direkt" och "...det finns ju inga siffror, det är svårt att ta roten ur x. Ja, för vad blir ens x?".

När $y = x^2 + 4x + 8$ presenterades svarade däremot samtliga elever att det var en funktion. Ingen uttryckte något behov av definitions- eller värdemängd och inte heller några problem kring att definiera funktionen. Skillnaden på elevernas reaktioner på de olika formlerna kan möjligtvis förklaras genom att eleverna arbetade med andragradsfunktioner och att rottecknet uppfattades som väldigt främmande.

[113] Se Bilaga 4. Definitionsblad till elever under diskussionen
[114] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju
[115] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 1

x	y
2	5
1	-2
4	8
7	5
3	17

Figur 24. Diskussionsuppgift 2 från intervju.

Den andra uppgiften som presenterades var en tabell, med x- och y-värden.[116] Tabellen hade inget uppenbart samband mellan sina x- och y-värden. Även här frågade vi eleverna om de trodde att det var en funktion. Elevernas första reaktion var, i så gott som samtliga svar, positiv till att det var en funktion. Olika förslag gavs däremot till varför det var en funktion. Några elever påpekade att man skulle kunna se det som punkter i ett koordinatsystem; "- Ja, det är väl olika koordinater. Blir det inte en funktion om man skulle rada upp alla koordinaterna i ett koordinatsystem?" och "- Om jag skulle kolla om det är en funktion då skulle jag rita upp alla punkter i ett koordinatsystem och se vad det blir. Då ser man ju om det är en fullständig andragradsfunktion". Medan andra elever argumenterade för att man borde kunna hitta en matematisk formel som beskrev tabellen och att man då kunde fastslå att det var en funktion: "- Ja, det blir ju typ en sån här sen (pekar på $y = x^2 + 4x + 8$ som presenterades tidigare)... Den behöver ha en funktion för att vi ska få ut något av den (med funktion syftade eleven på en matematisk formel)". En elev påpekade att man borde hitta "Sambandet mellan dem".

Eleverna fick sedan frågan om regeln, som sammanbinder våra två mängder i en funktion, verkligen måste vara en matematisk formel. Det tillades också att värdena i tabellen inte kunde formuleras som en matematisk formel, iallafall inte på något enkelt sätt, och att värdena var slumpade. När intervjuledaren återigen ställde frågan, om det då verkligen var en funktion, var det många elever som bytte åsikt. En grupp som tidigare svarade ja, ändrade sig till: "- Det finns ingen sammankoppling mellan x och y. Ja, då är det väl inte en funktion". En annan grupp resonerade tillsammans att:

> Elev: - Kluring.
> Elev: - Är det inte att det alltid ska vara lika-med?
> Elev: - Det borde ju inte gå att sätta ett lika-med-tecken mellan dem iallafall.

Även här återfanns kommentarer om att det kanske går att skriva på formen $y = kx + m$.

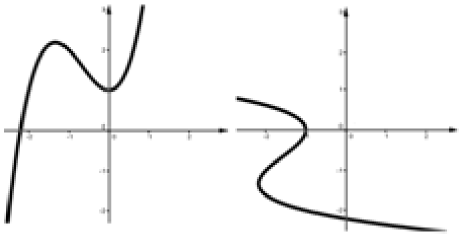
När eleverna informerades om att det faktiskt var en funktion och att det finns ett tydligt samband mellan x- och y-värdena, tillfrågades de om de kunde förklara sambandet. Endast ett fåtal elever svarade att tabellen i sig binder samman våra två mängder. I en av grupperna förklarade eleverna sinsemellan:

> Elev: - Jo, när x är 2 då är y = 5.
> Elev: - Vad är det för regel man hänvisar till då?
> Elev: - Tabellen.

[116] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 2

Samtliga elever kunde däremot identifiera definitions- och målmängden som värdena som hänvisades i tabellen.

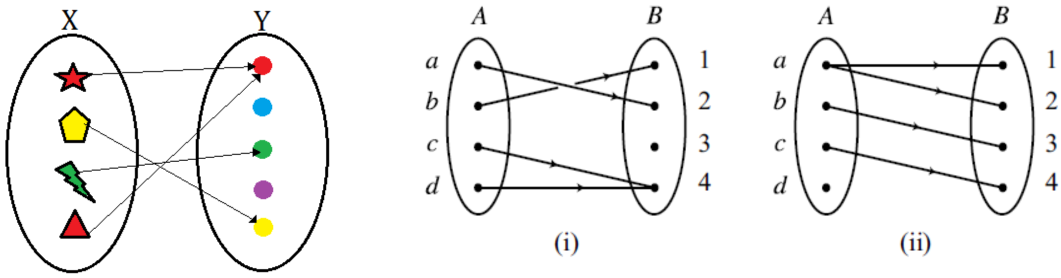
I den tredje uppgiften fick eleverna frågan om graferna kundes tolkas som funktioner och i så fall varför.[117] De uppmuntrades även att jämföra de både graferna för att försöka formulera skillnaderna.



Figur 25. Diskussionsuppgift 3 från intervju.

Även här var reaktionerna från eleverna väldigt skilda, många tolkade båda som funktioner medan andra var säkra att ingen av graferna var en funktion. Generellt sett inledde eleverna med att kommentera formen på graferna, t.ex. "- Kan det vara tredjegradsfunktioner?" eller, i stil med; "- Det har jag aldrig jobbat med". Många kommenterade också den uppenbara likheten mellan graferna, men svarade nästan intuitivt på frågan om det var något särskilt de reagerade på: "- Den andra är ju helt skev", "- Den går ju inte rakt ner", "- På snedden går ju den". Även fast många noterade att den högra, av de båda graferna, såg felaktig ut, så var det endast ett fåtal, närmare bestämt två elever, som själva formulerade att skillnaden var att den ena grafen genererade flera *y*-värden för samma *x*-värde och att den andra, tvärtom, genererade samma *y*-värde för olika *x*-värden. En skillnad man måste anse vara essentiell i funktionsbegreppet.

Efter en liten diskussion, ledd av intervjuledaren, angående definitionen av funktioner kunde alla enas vilken av graferna vi kunde anse vara en funktion (den till vänster). Problemen som eleverna stötte på kan möjligtvis tolkas vara en effekt av att tredjegradsfunktioner var obekant för många och att definitionen av en funktion, att varje x-värde måste generera *exakt ett* y-värde, inte var införstådd.



Figur 26. Diskussionsuppgift 4 från intervju[118].

[117] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 3. Notera att båda graferna utgår från samma x^3- graf men den högra figuren är vriden 90° moturs.
[118] (*i*) och (*ii*) är hämtade från Bloch, E, 2011, s. 132

I den fjärde uppgiften presenterades tre grafiska funktioner (se figur 26).[119] Först diskuterades funktionen till vänster, där färgerna i de olika geometriska figurerna är regeln som sammanbinder mängderna. Att presentera en funktion grafiskt var tillsynes, baserat på elevernas reaktion, något de inte tidigare sett. Reaktionen av många var antingen att det mer kändes som dagis eller geometri, än en fråga om funktioner. Efter den inledande förvåningen började eleverna analysera figuren.

Två av grupperna noterade dels att två av våra *x*-värden genererar samma *y*-värde och dels att alla *y*-värden inte "träffades", vilket ledde till argumenterande inom grupperna, t.ex. i den ena grupperna uttryckte sig eleverna:

> Elev: - Nej, det känns taskigt här att den lila inte har någon kompis.
> Elev: - Här går ju två *x*-värden till samma *y*-värde. Nej, juste, det var ju det den fick.
> Elev: - Det känns som det lika gärna skulle kunna vara en funktion.
> Elev: - En funktion med färger.
> Elev: - De hör ju ihop på något sätt. Vi ser det på färgen.

I en annan grupp sa eleverna:

> Elev: - Nej det tror jag inte. Det blir ju två över, vad gör man med dem då? (eleven pekar på de överblivna y-värdena).
> Elev: - Det blir som två x då, och man kunde ju ha två x-värden till samma y.
> Elev: - Fast det blir ju samma x då.
> Elev: - Jag tror det blir samma som på den, och då funkar det ju (eleven pekade på den korrekta grafen i exemplet ovan).

Det är intressant att notera att eleverna, vars inledande reaktion är att figuren inte är en funktion, resonerar sig fram med hjälp av de tidigare exemplen, för att sedan konstatera; "En funktion med färger".

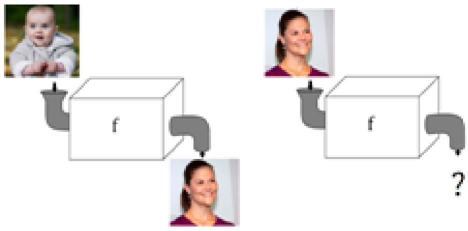
I de två andra grupperna kom sambandet, och att figuren var en funktion, snabbt upp. I en av grupperna formulerade en elev sina tankar med: "- *x*- och *y*-värde och det har vi ju för det kan vara olika saker. *x* och *y* behöver inte bara vara siffror, så det skulle ju kunna vara en funktion". I den sista gruppen använde man också tidigare uppgifter som grund för sitt argumenterande för att färgerna räcker som en regel för att definiera en funktion: "Ja, det är ju som om regeln där skulle vara en tabell".

Uppgiften problematiserade frågan om en funktion verkligen behöver skrivas med en matematisk formel och även om grupperna tillslut enade sig om att det är en funktion, var det många elever som var skeptiska. En elev påpekar att: "- Alltså vi har ju alltid räknat så, men jag tror inte det behövs". Gruppen samtycker och beslutar sig att figuren kan antas vara en funktion. Eleverna uppmuntrades även att försöka formulera funktionen matematiskt, vilket visade sig vara svårt. På uppmaningen svarade en elev att: "- Det blir ju samma färg. Men det

[119] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 4

blir ju inte ”matte-språk”. Det blir mer dagis.", vilket kan sammanfattas som den generella åsikten hos eleverna.

I de följande två exemplen på grafiska funktioner (figur 26, *i* och *ii*) klarade samtliga grupper att förklara vilken som var en funktion och vilken som inte var en funktion. I många fall klarade eleverna också att beskriva varför och vad skillnaden var i de båda figurerna. I en grupp konstaterades det att: "- De är ju väldigt lika", "- Det kan vara en funktion, inte den. Det blir ju för många *y*:n på den, och det gick la inte", resonemang vilket också återfinns hos de andra grupperna. I samtliga grupper kunde även eleverna koppla samman problematiken med att ett *x*-värde genererade fler *y*-värden till den felaktiga grafen, som presenterades tidigare under intervjun.



Figur 27. Diskussionsuppgift 5 från intervju.

Diskussionsuppgift 5 presenterades med frågan om eleverna kunde identifiera vilken regel som gällde och även hur man bör definiera definitions- och målmängden.[120] Det största problemet som eleverna stötte på var det ologiska i att man "stoppade" in ett barn och "fick ut" mamman, istället för tvärtom, vilken kan tolkas vara mer intuitivt. Framförallt var det en grupp som visade på problem med att formulera regeln, just p.g.a. detta. Annars var eleverna snabba på att förstå vad, eller rättare sagt vem, som gömde sig under frågetecknet.[121] Ett illustrerande exempel från en konversation i en av grupperna, där intervjuledaren guidar gruppen genom frågan:

> Intervjuledare: - Hur hade ni beskrivit den här funktionen?
> Elev: - Funktionen av ett barn är lika med mamman.
> Intervjuledare: - Kan det bli något strul med definitions- och målmängden här?
> Elev: - ...Nä, egentligen inte, för du har ju ett *x* och ett *y*.
> Intervjuledare: - Har alla *x* ett tillhörande *y*?
> Elev: - Nej...
> Intervjuledare: - Finns det några barn vi inte kan stoppa i?
> Elev: - Ett barn som inte är hennes?
> Intervjuledare: - Ja, men vad hade vi fått ut då?
> Elev: - En annan mamma.

Eleverna hade svårigheter med att formulera definitions- och målmängd, möjligtvis fortfarande beroende på en viss osäkerhet i begreppen, dessutom kopplat till en ny sorts uppgift. I många grupper fick eleverna hjälp och förklarat för sig att man mycket väl kunde definiera både definitions- och målmängd till "alla personer", eftersom alla personer har en mamma.

[120] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 5
[121] Se figur 16

För att testa eleverna ytterligare ändrades regeln till att man istället "stoppade" in en kvinna och "fick ut" kvinnans barn och frågade återigen hur vi bör definiera definitions- och mål-mängd och vilka problem som kan uppstå.

I den nya frågeställningen visade eleverna både kreativitet och en förståelse. Möjligen till en följd av det tidigare exemplet, "mamma-funktionen", som eleverna gick igenom med mycket vägledning av intervjuledaren. En annan möjlighet är att hjälpen av intervjuledaren inte ökade förståelsen, utan enbart visade eleverna hur de kunde uttrycka sambandet som alla förstod. För i det nya, och möjligtvis mer komplicerade exemplet, förstod mer eller mindre samtliga elever problemen man stötte på när man skulle definiera definitions- och målmängd. Olika lösningar presenterades från olika grupper. Ett exempel från en grupp där en elev uttrycket det som: "- Att vi bara tar mammor... Som bara har ett barn".

Ytterligare exempel på lösningar, från en annan grupp, framkommer i en konversation mellan intervjuledaren och eleverna:

> Intervjuledare: - Om vi hade stoppat in en kvinna då och vill ha ut hennes barn?
> Elev: - Det hade inte funkat.
> Intervjuguide: - Varför inte?
> Elev: - Varje kvinna behöver inte ha ett barn.
> Intervjuledare: - Så hur hade vi behövt definiera kvinnorna?
> Elev: - Varje kvinna som har ett barn (ingen betoning på *ett*).
> Intervjuledare: - Du har helt rätt men finns det något mer kriterium?
> Elev: - De som har fler barn.
> Elev: - Då rubbas det.
> Elev: - Deras första barn då.
> Intervjuledare: - Hur hade vi alltså kunnat definiera funktionen?
> Elev: - Varje mamma som har ett barn och det första barnet.

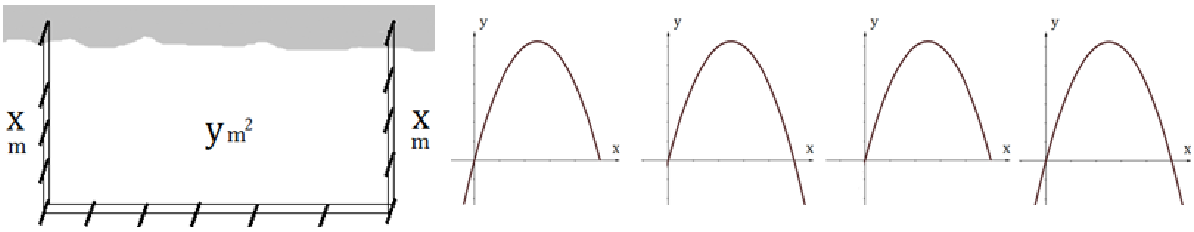
I en tredje grupp kommer man med ett liknande förslag:

> Elev: - Det hade ju kunnat finnas flera barn, eller?
> Elev: - Då får man ju flera, alltså... (pekar mot den grafiska funktionen där ett x-värde gav flera y-värden).
> Elev: - Man kan bara få de barnen som är ensambarn, eller?

Här ser vi en intressant koppling att eleverna uttryckligen förstod sambandet mellan de olika presenterade funktionerna och en förståelse för problematiken när ett x-värde ger flera y-värden.

Intervjun avslutades med en sjätte uppgift som gick ut på att eleverna skulle bestämma vilken graf som beskrev en presenterad funktion.[122] Funktionen utgick från det närmast klassiska exemplet med en bonde som bygger en hage, se figur 27, där hagens area, y, beror på hagens sidor, x. Bonden har 10 m staket till sitt förfogande.

[122] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 6



Figur 28. Diskussionsuppgift 6 från intervju.

Bland eleverna rådde det stor enighet om vilken graf som beskrev funktionen, den tredje från vänster. Ofta svarade eleverna väldigt snabbt vilken det borde vara. Det svåra för eleverna visade sig snarare vara att uttrycka varför det var rätt svar: "- Det är den. På grund av att den bara ligger på x-axeln, den går inte nedanför. Och det beror på att... nej det vet jag inte". Mer konkreta förslag som eleverna gav handlade om att: "- Arean kan ju aldrig bli negativ.", "- men han har ju 10 meter till sitt staket" och "- Den finns inte, det betyder ju att den fortsätter neråt i en osynlig del. Då är det ju ingen hage (eleven syftar till en av de felaktiga alternativen)". En elev försökte även analysera den medföljande matematiska formeln, $y = 10x - 2x^2$, i ett försöka att få svar på frågan: "- Vi har $2x^2$, så har vi tillräckligt höga tal så tar ju den ut den (eleven syftar på $10x$). Då får vi ju ett största värde, ett svar som det kan bli. Då borde det betyda att den fortsätter ner".

Det är ingen av eleverna som använder ord som definitions- eller målmängd, inte heller någon som kopplar resonemanget till vad som krävs för att definiera funktionen. En av grupperna får däremot frågan hur man hade behövt definiera funktionen, vilket ger svaren:

Elev: - Definitionsmängden får ju vara mellan 0 och 5.
Intervjuledare: - Hur vet du det, om du försöker förklara med ord?
Elev: - Han kan ju inte ta bort staket som han inte har och så hade han ju max 10 meter.
Elev: - Han har ju inte mer än 10 meter.

Följden av detta blev en diskussion där det diskuterades vikten av att anpassa funktionen till det aktuella fallet och att definiera den därefter. Så även om många elever inte explicit uttryckte sig med de passande definitionerna, så visade många, i det här fallet, på förståelse för begreppen och hur de används.

Elevernas uppfattning om förståelse kontra procedur

Elevernas svar är kraftigt differentierade i frågan, dock tenderade flera elever att instinktivt påvisa vikten av förståelse; ”Att man förstår”, ”Förståelse tycker jag”, ”Jag tror det är att ha förståelse” och ”Om man vet vad man räknar är det mycket enklare”. I flera grupper verkade dock detta intuitiva svar baseras mer på en inrotad begreppsbild av förståelse som något överordnat och finare, snarare än på reflektion. I majoriteten av grupperna efterföljdes ovanstående ställningstagande av reflektioner och funderingar. I en grupp lät som följer:

Elev: - Nej, det känner inte jag. Lättare att bara memorera formlerna, så bryr jag mig inte om varför det är så, bara man kan använda formlerna.
Elev: - Vissa grejer kan man ju inte förstå heller, men om man inte förstår själva formeln och det kommer samma formel fast helt olika så […]

Flera elever påpekar att; ”det går ju inte förstå allting”, som ett argument till varför procedurer är nödvändiga. Detta kan tolkas som att eleverna påvisar vikten av processer som verktyg för förståelse.

De flesta grupper närmar sig någon slags kompromiss efter sina diskussioner där de anser att ”man behöver båda. Jag hade inte klarat det utan något av det.” Dock väger fortfarande värdet av förståelse tungt och någon påvisar att: ”Det svåra är ju att förstå. De lätta är ju att lära sig proceduren. Alla kan ju lära sig proceduren. Men alla kan inte lära sig att förstå.” Någon annan menar att förståelsen föregås av procedur: ”Det är ju bara att nöta tills det sitter”.

Eleverna har lite olika åsikter även på frågan vad de anser är viktigast för att lyckas på nationella proven. Vissa menar att förståelse är viktigt medan andra anser att det är mest procedurer som skall genomföras. I ett par grupper tycks distinktionen mellan procedur och förståelse vara vag.

Många elever önskar att undervisningen vore mer fokuserad på frågor om förståelse och varför man använder procedurer istället för, som en elev uttrycker det; ”Inte bara; såhär ska man räkna om det kommer ett sånt här tal”. Vidare påvisar eleverna vikten av variation i undervisningen då de anser undervisningen för snarlik från en lektion till en annan. Flera elever klagar på läroböckerna och menar att de är otydliga. Vidare uttrycker en elev att:

> *Facit visar ju bara vad det blir, de säger ju inte riktigt varför det blir så, de har ju inte uträkningen till det. Det hade nog varit bättre om de haft uträkningen eller alltså att de inte redovisat något svar utan metoden hur man går tillväga istället. Det tror jag hade varit bättre.*

Några elever menar att kontinuiteten i matematiken är för dålig i skolan, ”Jag tror det vore bättre om man hade mer matte, lite matte varje dag.”, detta med främsta anledning att det både är svårt men också omotiverande för eleverna att räkna matte i hemmet, så får de inte göra det i skolan hamnar de lätt efter.

På frågan om matematikundervisningens upplägg främjar förståelse svarar en elev:

> *Nej! Det är väldigt mycket, för mycket det här med att bara räkna. För de här svårare uppgifterna till exempel, de handlar ju bara om att man ska bestämma samband och visa och bevisa olika saker och sånt där och det lär man sig inte, det gick inte vi igenom liksom. Alltså, vår lärare är väldigt bra, så han är jätteduktig så sätt men just det här, kommunikationen i matte, den tycker jag vi inte får öva på riktigt tillräckligt mycket om man inte gör det på egen han då.*

Med kommunikationen menar eleven i det här fallet förståelse för samband och diskussion kring hur man tänker och löser mer komplexa uppgifter. Det finns ytterligare elever som påpekar bristen på fokusering på förståelse och bara en elev tycker att det främst är förståelse som fokuseras i undervisningen.

Diskussion och slutsatser

I diskussion och slutsatser kommer studiens resultat sammanfattas och diskuteras. Resultaten kommer även att analyseras kopplat till arbetets tidigare delar, som; funktionens definition, funktioner i gymnasieskolan och tidigare forskning. Förhoppningen är att beröra och besvara den egna studiens frågeställningar samt väcka didaktiska tankar kring hur funktionsbegreppet kan presenteras i gymnasieskolan.

Byten av funktionens representationer

Elevernas förmåga gällande treatments och conversions föreföll sig väldigt lika och kan, som påpekas i resultat, bero på många faktorer. Intressant är dock att jämföra resultaten med tidigare forskning, Duval påpekar att conversions är mer komplexa då de kräver att man känner igen objektet i båda registren, vilket ofta kan vara svårt.[123] Detta uttalande ger en lägre förväntad andel rätta svar vid conversions-uppgifter, vilket vi inte funnit i vår enkät.

Vidare gjorde vi ett försök att analysera korrelationen mellan conversions och treatments. Med grund i Duvals ovanstående ståndpunkt, likväl som vår egen, är normalt conversions mer komplexa uppgifter, eftersom de kräver att man byter register. Dock finns risken med ett sådant här korrelationstest att det till viss del faller i kategorin lätta/svåra uppgifter istället för treatments/conversion. Med andra ord krävs i ett sådant här test en högre grad korrelation än normalt, för att faktiskt påvisa ett tydligt samband, då elever som klarar ”svåra” uppgifter högst sannolikt även har lättare för ”lätta” uppgifter. Således kan vi med 0,40 som korrelationsresultat inte säga någonting om huruvida förståelse för conversions eller treatments är en grundsten för det andra.

Det finns fyra uppgifter i enkäten som väcker högre intresse för diskussion än övriga. Nämligen de uppgifter som är conversions och behandlar växlingar mellan graf till funktion och funktion till graf. Dessa uppgifter är speciella både i det faktum att de är conversions men också för att de internt skiljer sig åt i riktningen av registerbytet. Tidigare forskning av Duval (1988) pekar tydligt på att eleverna har klart svårare för att hantera vad Duval kallar för ”recognition”, att gå från en graf till en funktion eller avläsa punkter. Eleverna i Duvals undersökning klarade till 60% att gå från funktion till graf men endast till 25% det motsatta. Våra resultat ligger i enlighet med Duvals även om resultaten inte alls är lika tydliga. Våra resultat gav 46% från funktion till graf kontra 31% för motsatt byte. Duval presenterar en teori till orsaken:

> *In standard teaching, the tasks offered are never recognition, but simply reading tasks that require only a process of placing points guided by local understanding and not a process of global interpretation guided by understanding of qualitative visual variables.*[124]

[123] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 112
[124] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 113

När vi studerat flera läroböcker kan vi koppla till det Duval säger, en klar majoritet av uppgifter bygger på övergången från funktioner och punkter till grafer. Således är det helt naturligt att eleverna uppvisar en något högre förmåga i detta registerbyte.

Så vad kan man dra för slutsatser kring ovanstående? Både korrelationen och våra X^2-test tyder på att kopplingen mellan de olika formerna av uppgifter inte är så stor, som vi kanske förväntat oss. Eleverna uppvisar svårigheter i majoriteten av de olika representations- och registerbyten som behandlas i uppgifterna, så möjligen kanske uppgifterna var för svåra för att på ett effektivt sätt kunna undersöka vad vi letade efter. Men mer sannolikt är dessa elevers förståelse för både funktionsbegreppet, och de mer procedurella uppgifterna i boken, lite för låg för att på ett tydligt sätt ska kunna dra slutsatser om hur dessa olika sorters kunskap samverkar mot någon djupare förståelse. Det är visserligen intressant att, om inte annat, poängtera att jämförelsen mellan "recognition"- uppgifter gav ett resultat som stämde överrens med tidigare forskning. Självklart finns det aspekter som spelar in i resultatet, som det låga antalet enkäter som delades ut, vilka uppgifter som var svårare än de andra eller att det i resultatet inte var större skillnad (46% respektive 31%). Ändå ger det kanske en fingervisning; att elever har större svårigheter att gå från graf till funktion.

Elevernas förståelse för funktionsbegreppet

På frågan "vad är en funktion?" svarade eleverna väldigt olika. Det visade sig vara svårt för eleverna att ge en tydlig definition på en funktion, vilket kan bero både på en bristande förståelse för funktionsbegreppet men också, som en elev uttryckte det, att de" ... aldrig fått den frågan att beskriva en funktion. Jag vet ju vad en funktion kan beskriva, men jag vet inte hur jag ska definiera en funktion". Av de många exemplen som framkom, på vad som skulle kunna vara en funktion, visade eleverna på väldigt varierad förståelse för funktionsbegreppet. Generellt sett kan elevernas förståelse för funktionsbegreppet förklaras som att många vet vad en funktion *kan vara* men inte vad en funktion *är*. Anledningen till detta kan vara att deras lärobok i många fall behandlar funktioner som något som genererar olika räkneexempel, men sällan skriver eller problematiserar funktionsbegreppets definition.

Majoriteten av eleverna visste att det måste finnas ett samband, eller en regel, mellan de två mängderna i en funktion. Det som visade sig svårt för eleverna var att definiera hur sambandet kan se ut. I de allra flesta fall uttryckte eleverna under intervjun, åtminstone inledningsvis, att sambandet är en matematisk formel. I många fall beskrev eleverna explicit sambandet som en andragradsfunktion eller, ännu mer förekommande, som den räta linjens ekvation. Även om eleverna i vissa fall beskriver samband, eller en korrekt procedur för att identifiera en matematisk formel, som mycket väl kan vara regeln i en funktion, måste det ändå anses som att de i många fall har svårt att förstå konceptet. Under intervjun blev detta tydligt i samband med flertalet av uppgifterna, men kanske framförallt när eleverna skulle förklara regeln i sambandet $y = \sqrt{x}$ och i uppgiften med tabellen.[125] För att besvara frågan huruvida det var en funktion eller inte, var det många elever som ville lösa problemet med hjälp av att skriva det på formen $y = kx + m$. Detta som svar på funktionens vara eller icke-vara. Även i de grafiska

[125] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 1 och 2

funktionerna kämpade eleverna med enkelheten som band samman mängderna. Där var det inte heller frågan om en matematisk formel, utan enbart en grafisk tillhörighet till antingen mängden x eller y.

I definitionen av en funktion finns även kravet att regeln endast genererar ett y-värde för varje x-värde, något som eleverna i undersökningen hade svårt med. Antagligen hade de inte tidigare stött på någon uppgift som behandlar den här typen en av problematik, en problematik som framförallt uppkommer i frågor som rör förståelsen för funktionsbegreppet. Detta märktes tydligt när eleverna visades graferna under gruppintervjuerna.[126] Många elever kommenterade att den felaktiga grafen var "knepig" eller "konstigt vänd", men ingen kunde sätta fingret på problemet. Ingen kunde heller hänvisa till definitionen av en funktion, för att komma fram till ett svar. Så i majoriteten av elevernas ögon uppfattades den felaktiga grafen som konstig men ändå korrekt. På följande uppgifter uppfattades det även som eleverna hade stora problem med att hålla isär om det var x-värdena som var tvungna att bara generera ett y-värde, eller tvärtom, något som vittnar om att förståelsen för grafer som funktioner, och deras egenskaper, inte heller är självklara för eleverna. Detta, framförallt, med tanke på att eleverna aktivt arbetade med grafer av andra graden, där två x-värden ofrånkomligen kommer att generera samma y-värde, vid stora delar av funktionens intervall.

Sammanfattningsvis kan elevernas förståelse kring regeln i en funktion, möjligtvis, vara tillräcklig för att lösa uppgifter i boken, men otillräcklig för en djupare förståelse för funktionsbegreppet. Återigen, så kan de bakomliggande anledningarna hänvisas till läromedlens upplägg där frågorna generellt sett låter eleverna jobba med funktioner på bestämda former, med samband som antingen beskrivs som en rät linje, andragradsfunktioner och senare i matematikundervisningen även som potens- och exponentialfunktioner.

Eleverna visade en viss förståelse för begreppen definitions- och värdemängd, samtidigt som ingen hade hört talas om målmängd, vilket har en förklaring i både kursplanerna för matematik och i läromedlen. Anledningen till att man inte ens nämner begreppet målmängd i kursplanen är oklart, en möjlighet är att det beror på att man, p.g.a. kursplanens innehåll och sättet som funktioner snarare används för att generera räkneuppgifter, anser målmängd som ett överflödigt begrepp, något som också bidrar till tolkningen att förståelsen för funktioner inte uppmuntras i matematiken på gymnasiet.

Även om eleverna visade en förståelse för begreppen, definitions- och värdemängd, uppvisade inte eleverna förmågan att faktiskt kunna definiera en funktion. Något som blir tydligt i exemplet med $y = \sqrt{x}$, där eleverna stötte på uppenbara svårigheter med att koppla begreppen definitions- och målmängd till problemet. Avsaknaden av en koppling mellan en uppfattning om begreppen och det praktiska användandet av dem tyder på en svag förståelse för funktionsbegreppet. Andra exempel som påvisar detta är att eleverna under intervjuerna sällan talade om hur funktionerna definierades, om det inte påtalades av intervjuledare, utan lade istället allt fokus på att förklara regeln som sammanbinder de två mängderna. Det tydligaste

[126] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 3

exemplet på detta var efter eleverna hade uppmuntrats att diskutera definitions- och målmängd till exemplet $y = \sqrt{x}$, då eleverna fick frågan om de ansåg att $y = x^2 + 4x + 8$ kunde tolkas som en funktion. Då svarade samtliga elever ja, utan tvekan. Ingen uttryckte heller något behov av att definiera, eller ens undersöka, hur funktionen skulle definieras.

Möjligtvis kan exemplet anses trivialt, eftersom $y = x^2 + 4x + 8$ kan definieras som $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vilket kan öppna upp för en diskussion huruvida det verkligen finns ett behov att skriva ut definitions- och målmängd. Samtidigt uppfattades det som att eleverna under gruppintervjuerna per automatik såg förbi eventuella behov av att definiera en funktion, vilket egentligen uppgör en viktig och självklar del i funktionsbegreppet. Återkopplar man till det tidigare avsnittet om *funktioner i läromedlen* beskrivs det uppgifter som handlar om att eleverna ska definiera $y = \sqrt{x}$, utan att varken nämna värdemängd eller målmängd, vilket måste anses direkt avgörande för definitionsmängden. I många fall där funktioner "genererar" räkneuppgifter, nämns inte heller hur funktionen definieras, utan enbart en regel (generellt sett en matematisk formel). Att det genom detta byggs upp en kollektiv missuppfattning hos eleverna, angående funktionsbegreppet, kan knappast framstå som märkligt utan snarare som en självklarhet.

En gemensam faktor, som både kan hänvisas till resultatet i enkäten och gruppdiskussionen, är att eleverna i många fall försöker besvara frågor, som berör en mer konceptuell kunskap, med en procedur. Som exemplet, som presenterades tidigare, då många elever tenderade till att försöka svara på frågan "är detta en funktion?" med hjälp av att hitta den räta linjens ekvation (även om uppgiften i fråga inte var linjär), istället för att argumentera utifrån deras konceptuella kunskaper, som de påvisat att de till viss del besitter. Enligt B. Rittle-Johnsons och M.W. Alibalis artikel *conceptual and procedural knowledge of mathematics - does one lead to the other?* kunde en ökning i den procedurella kunskapen även utveckla den konceptuella förståelsen. Detta dels p.g.a. att eleverna genom den procedurella hanteringen, i takt med en säkrare hantering av proceduren, även började använda den matematiska kapaciteten till att analysera varför proceduren fungerade. Dels att man genom en korrekt och säker procedur, kunde utesluta felaktiga konceptuella påståenden.[127] Under gruppintervjun påvisade snarare eleverna det motsatta, eftersom deras procedurella kunskaper i många fall inte gick att applicera på uppgiften i fråga.

I artikeln presenterades också vinningarna med att först utveckla elevernas konceptuella kunskap, eftersom den annars kunde hämma elevernas procedurhantering, eftersom de inte själva kunde förstå skillnaden mellan de olika exemplen och därigenom inte heller kunde ändra sin procedur.[128] Resonemanget kan mycket väl kopplas till den egna studiens resultat, där eleverna i många fall kunde en procedur men inte kunde applicera den på ett korrekt sätt. Förståelsen för funktioner var ofta inte tillräcklig och deras procedurella kunskap uppfattades som tydligt hämmad av bristerna i den konceptuella förståelsen hos eleverna, framförallt inom funktionsbegreppet men även inom andra matematiska områden, som t.ex. algebra.

[127] Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. *Conceptual and procedural knowledge of mathematics.* 1999, s 187.
[128] Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. *Conceptual and procedural knowledge of mathematics.* 1999, s. 186.

Som en avslutande observation så upplevdes eleverna i undersökningen som väldigt snabba på att få en grundläggande förståelse för funktionsbegreppet. I resultatet från gruppintervjun uppfattas en genomgående progression av den konceptuella kunskapen hos eleverna, med avseende på funktionsbegreppet. Detta märkes tydligt på exempel som de grafiska funktionerna och framförallt på *mamma-funktionen*,[129] där eleverna visade att de på ett behjälpligt sätt kunde definiera de olika funktionerna. Det mest talande exemplet är *mamma-funktionen,* där eleverna tog sig an en uppgift de inte tidigare stött på och visade att de kunde uttrycka sig både kreativt och korrekt.

Skolan, funktioner och den konceptuella kunskapen

Studiens resultat kan sammanfattas som att eleverna i undersökningen har problem med funktionsbegreppet, och även uppgifterna som utgår från funktionsbegreppet, något som kan konstateras utifrån resultatet från både enkäten och gruppintervjuerna.

I enkäterna märktes den bristande förståelsen på uppgifter där eleverna med enkla medel hade kunnat löst uppgifterna om de bara förstod konceptet. På den första uppgiften på enkäten svarade endast 25% av eleverna rätt, där tillfrågades elever om de kunde bestämma vilken formel som passade till den linjära grafen. Det låga resultatet tyder på en oförståelse för graf till formel, även av enkla varianter. Detta eftersom svaret, med förståelse för grafer och formler, nästan måste anses vara trivialt, speciellt med tanke på de presenterade svarsalternativen. Även uppgifterna 5 och 9, i enkäten, stärker denna tolkning. På uppgift 5 och 9 svarade 32% respektive 36% av eleverna rätt, ett resultat som kan tolkas som lågt, eftersom man med en grundläggande förståelse för egenskaperna hos en x^2- graf kan utesluta hälften av alternativen. Det är värt att notera att i uppgift 5 svarade 39% på det andra alternativet som också visade en negativ x^2- graf, ett resultat som möjligtvis tyder på en procedurell kunskap hos eleverna (det klassiska exemplet med glad och ledsen mun som en positiv respektive negativ x^2-graf, är en möjlighet). Även i uppgift 9 ser vi ett liknande resultat. Samtidigt kan vi konstatera att många elever är oförmögna att dra fortsatta slutsatser, även efter deras inledande konstaterande vilka grafer de kan utesluta, vilket vi tolkar som bristande förståelse. Detta eftersom det hade krävts ytterligare procedurer att koppla till elevernas ursprungliga tanke, t.ex. att beräkna grafens nollställe, hitta och tolka symmetrilinjen eller sätta in en punkt och testa sig fram. Resonemanget kan även kopplas till Duvals tankar om att elevernas möjlighet att kunna utföra *conversions*, byten av representationer där man tvingas byta register, är en viktig del både i den matematiska förståelsen men också i det matematiska lärandet.[130]

En intressant observation är att eleverna på uppgift 7, där man skulle välja en graf som beskrev ett textexempel om ett fallande ägg, svarade 61% rätt. Resultatet talar emot resonemanget att eleverna visade på bristande förståelse, samtidigt som det höga resultatet kanske kan förklaras genom kurvans intuitiva form, och absurditeten som de andra kurvorna beskriver, om man någonsin sett ett ägg falla mot marken.

[129] Se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju - Uppgift 4 och 5
[130] Duval, R. *Educational studies in mathematics*. 2006, s. 103

Även i gruppintervjuerna var elevernas förståelse för funktionsbegreppet låg, något som redan har diskuterats. Det främsta argumentet för detta är att bara enstaka elever vid den inledande frågan, om de kunde definiera en funktion, hade ett någorlunda konkret svar. Många svar visade snarare på oförståelse och ett prov på en hämmad procedurell kunskap. Återigen, är det värt att poängtera att eleverna visade på en stor potential att lära sig att förstå begreppet, eftersom många vid gruppintervjuns slut uttryckte sig, som sagt, både kreativt och korrekt.

Det kan diskuteras huruvida elevernas svårigheter med definitionen av en funktion kan bero på upplägget i kursplanen och elevernas läromedel, där funktionsbegreppet snarare används för att generera uppgifter. Sättet som läromedlen presenterar funktionsbegreppet är både otydligt, ytligt och ibland även felaktigt generaliserat. Som tidigare har nämnts i projektarbetet har utrymmet för förståelsen för funktionsbegreppet successivt fått mindre plats i läromedlen, en nämnvärd utveckling som mycket väl kan ligga till grund för elevernas bristande förståelse.

Uppgifterna med funktioner, i de presenterade läromedlen, tenderar att bli ekvationslösning, där funktionen endast bidrar med siffror eller ett sammanhang till uppgiften. Uppgiften kan handla om att beräkna k-värden, nollställen och andra ekvationslösningar. De få exemplen där läromedlen faktiskt problematiserar definitionen av en funktion blir ibland felaktigt generaliserade, p.g.a. bristerna i det presenterade funktionsbegreppet. Med detta syftar vi på otydligheten i presentationen av funktionens tre beståndsdelar: en regel, som kopplar samman våra två värden, en definitionsmängd och en målmängd. Det är även problematiskt att uppgifter och exempel i läromedlen, i regel, inte heller definierar funktionernas definitions- och målmängd, något som antagligen beror på platsbrist, snarare än att definitions- och målmängden är självklara för eleverna. Möjligt är att detta leder till en kontinuerlig vanföreställning om den faktiska definitionen av en funktion och att det istället projiceras en bild där funktionsbegreppet är förvirrande likt t.ex. en ekvation. Genomgående i läromedlen är alltså funktionsbegreppet marginaliserat och därigenom, enligt vår tolkning, otydligt för eleverna under stora delar av matematikundervisningen. I resonemanget är det även viktigt, eller snarare skrämmande, att påminna sig om att detta marginaliserade och otydliga funktionsbegrepp ändå måste anses vara en av de centrala begreppen inom matematikundervisningen på gymnasiet.

Hade ett utökat funktionsbegrepp i skolan, där förståelse för begreppet värderades högre, lett till ett bättre elevresultat, även om man varit tvungen att lägga mindre tid på procedur? Detta är något som den egna studien inte tydligt kan besvara, samtidigt som resultat och teori definitivt ger upphov till en diskussion kring ämnet. Det som framförallt talar för att utöka den konceptuella förståelsen hos eleverna är att det genom resultatet påvisas något som vi tolkar som en hämmad procedurhantering, där eleverna inte har tillräckligt med kunskap för att kunna anpassa proceduren till uppgifterna. Många elever försökte lösa majoriteten av uppgifterna under intervjun genom en felaktig procedur och även resultatet på enkäten vittnar om brister i den konceptuella förståelsen. Många elever uttryckte också under gruppintervjuerna dels en önskan om att matematiken mer skulle inrikta sig mot förståelse och dels en generell uppfattning om att en konceptuell kunskap är viktigare än en procedurell kunskap, vilket även argumenteras för i tidigare forskning och teorier.

Sammanfattade slutsatser

Förhoppningen med studien var att problematisera de didaktiska aspekterna av procedurell och konceptuell kunskap i samband med hur man lär ut funktionsbegreppet. Detta har vi försökt att göra genom att undersöka elevernas kunskap och förståelse, genom enkäten, gruppintervjun och ett teoretiskt ramverk. Vi har även undersökt elevernas läromedel och hur dessa presenterar funktionsbegreppet. Slutsatser som studien har nått är att eleverna inte har en djupare förståelse för funktionsbegreppet, vilket kan bero på hur det presenteras i läroböckerna. Vi har även försökt argumentera för att en ökad konceptuell kunskap hade gagnat eleverna eftersom att deras procedurhantering i många fall verkade hämmas av bristande förståelse. Detta kan hjälpa eleverna att lyckas bättre med matematik som berör funktionsbegreppet.

Under den egna undersökningens gång har det funnits tid att reflektera och diskutera vad som kunde ha gjorts annorlunda. Mycket av både de positiva och negativa aspekterna i arbetet handlar om arbetets metod. Vi valde att genomföra både en enkätundersökning och ett antal gruppintervjuer. Detta har lett oss till möjligheten att undersöka ett brett spektrum inom funktionsbegreppet, vilket vi är nöjda med. Å andra sidan, det vi vinner i vårt större spektrum tappar vi i specificitet. Detta märks framförallt i enkäten där vi undersökt ett litet urval, denna storlek kunde som bäst, med lite tur, ge oss tendenser av svårigheter och liknande hos eleverna. Men i vårt fall gav den ett ganska intetsägande resultat. Denna svaghet beror främst på vårt val att göra arbetet bredare och tidsbristen som följer med arbetet. Då vi genom intervjun har fått fram många intressanta aspekter av elevernas svårigheter hade just detta, elevernas specifika svårigheter i inlärningsprocessen av funktioner, varit ett bra objekt för en kommande enkät och kommande forskning.

En given del i framtida forskning vore att kvantifiera undersökningen. Vidare kan det finnas intresse i att undersöka hur en ökad konceptuell undervisning kring definitioner av funktioner har påverkat elevernas resultat. En annan mycket intressant gren av forskningen vore att undersöka hur lärare ser på och undervisar om funktionsbegreppet och också hur mycket denna undervisning skiljer sig från lärare till lärare.

Avslutande reflektion

Det var det! Projektarbetets båda delar är presenterade och skadan, om någon, är skedd. Den ursprungliga tanken att dela in arbetet i två delar, en matematisk och en didaktisk, har efter bästa förmåga efterföljts. Tanken, som var att presentera funktionsbegreppet så intressant och ingående som möjligt, hoppas vi har mottagits väl. Upplägget av arbetet speglar vår vilja och idé att inte bara presentera funktionsbegreppets matematiska delar, som historia och definitioner, utan även låta eleverna vrida och vända på begreppet. Detta med en förhoppning att ni som läsare, som antagligen också är intresserade av undervisning inom matematik, skulle få ännu en intressant infallsvinkel på funktionsbegreppet.

Den inledande del I var svårformulerad p.g.a. funktionsbegreppets otroliga vidd, för det är onekligen ett centralt begrepp som inom matematiken återkommer för jämnan. Det svåra blev alltså att sålla bland informationen och att försöka avgränsa sig i sitt sökande för intressanta exempel och närliggande matematiska områden. Delar som har valts bort, helt eller delvis, kan t.ex. vara en utökad del om funktioners kontinuitet, mer ingående om derivatan och allmänt mer komplexa exempel och frågeställningar. För den intresserade finns här stora möjligheter till vidare kunskap, något som vi absolut uppmuntrar till att göra fortsatta upptäckter i, för ämnet är onekligen intressant. Avgränsningarna i det presenterade funktionsbegreppet härstammar ifrån vår idé att presentera funktionsbegreppet på ett förståeligt sätt, mer anpassat till en gymnasielärare än en professor. Det här tänket influerade även våra val av exempel, som vi i många fall anser kan vara anpassade till elever i en gymnasieskola, som t.ex. diskussionsunderlag eller uppgifter som utmanar elevernas förståelse.

I del II var den didaktiska undersökningen i centrum. Vi kallar den didaktisk, kanske inte för att den direkt gav oss ett tydligt handlingsschema vid utlärning av funktionsbegreppet, men snarare för att den väcker tankar om hur man kan lägga upp undervisningen, och presenterar elevernas uppfattning, av funktionsbegreppet. Den belyser även svårigheter som eleverna i undersökningen stötte på i de olika uppgifter, något som säkerligen även kan vara intressant för lärare i andra klasser, kurser och skolor.

Som avslutning vill vi gärna presentera våra sammanfattade tankar om undervisning kring funktionsbegreppet på gymnasieskolan, tankar som har växt fram under arbetet med projektet. Först och främst vill vi ta tillfället i akt att lyfta fram våra egna lärdomar, för vi har verkligen lärt oss mycket om funktionsbegreppet, ur många av begreppets olika aspekter. Genom detta växer även förståelsen fram hur värdefullt det är som matematiklärare att besitta en bred kunskap om de olika matematiska områdena, om inte annat för att möjligöra att eleverna får en intressant, omväxlande och kompetent undervisning.

Genomgående i arbetet har vi skrivit om de brister, som vi upplever finns, i kursplanen och läroböckernas presentation och behandling av funktionsbegreppet. Detta är något som vi definitivt kommer att ha i åtanke när vi undervisar om funktionsbegreppet, helt enkelt för att få funktionsbegreppet konsekvent och begripligt. Med andra ord, för att ge eleverna möjlighet till förståelse av funktionsbegreppet och inte bara se det som en uppgiftsgenerator i en värld av ekvationslösning och algebra.

Under arbetets gång har vi även stött på väldigt trevliga exempeluppgifter, som vi presenterat i de tidigare delarna och, kanske framförallt, i den kommande intervjuguiden som finns som bilaga. Det var även väldigt givande att sitta och diskutera matematik med eleverna, vilket gjordes under gruppintervjuerna. Är gruppdiskussioner ett underskattat, eller outnyttjat, sätt att lära ut matematik till eleverna? Ja, kanske framförallt om man vill skapa en lärandesituation där man uppmuntrar till en matematisk förståelse, istället för procedurhantering (och det eviga räknandet i de olika läromedlen). Självklart beror det på faktorer som individ och klass, men utifrån våra erfarenheter så uppskattades det av både oss och eleverna. Elever som också explicit uttryckte att de hade uppskattat undervisning mer inriktad på förståelse för matematik.

Den sista punkten vi vill presentera, och den som också varit drivande i arbetet, är just huruvida en undervisning mer inriktad på konceptuell förståelse hade gynnat elevernas arbete med funktionsbegreppet. I den didaktiska undersökningen fick vi ett underlag att diskutera elevernas konceptuella och procedurella kunskap för funktionsbegreppet, något vi visserligen inte kunde dra vetenskapligt säkerställda slutsatser utifrån, men inte desto mindre byggdes det under arbetet upp en känsla av att elever har väldigt dålig förståelse för funktioner och att detta borde förbättras för ett bättre resultat i ämnet. Det är också detta som blir vårt sista, och kanske viktigaste, didaktiska ställningstagande, format utifrån våra egna erfarenheter och tankar under arbetets gång. Vi tror, och kommer att planera vår undervisning utifrån, att en djupare förståelse för funktionsbegreppet är värt att aktivt eftersträva i undervisningen.

Med dessa nyvunna kunskaper inom funktionsbegreppet, och dess didaktiska aspekter, har vi tagit oss ett steg närmare *Det funktionella funktionsbegreppet*.

Ett stort tack till...

...de duktiga, snälla och oerhört trevliga elever som frivilligt ställde upp i vår undersökning
...den otroligt hjälpsamma och positivt inställda lärare som hjälpte till med undersökningen
...vår väldigt kunnige handledare

Referenslista

Alfredsson, Lena, *Matematik 5000. Kurs 1b grön, Lärobok*, 1. utg., Natur & kultur, Stockholm, 2011

Alfredsson, Lena, *Matematik 5000. Kurs 2b grön, Lärobok*, 1. utg., Natur & kultur, Stockholm, 2012

Alfredsson, Lena, Matematik 5000. Kurs 3b grön, Lärobok, 1. utg., Natur & kultur, Stockholm, 2013

Björk, Lars-Eric (red.), *Matematik 3000: matematik tretusen. Kurs A*, 1. uppl., Natur och kultur, Stockholm, 2000

Björk, Lars-Eric (red.), *Matematik 3000: matematik tretusen. Kurs B*, 1. uppl., Natur och kultur, Stockholm, 2000

Björk, Lars-Eric, Brolin, Hans & Ekstig, Kerstin (red.), *Matematik 3000: matematik tretusen. Kurs C*, [Lärobok], 1. uppl., Natur och kultur, Stockholm, 2000

Bloch, Ethan D., *Proofs and fundamentals: a first course in abstract mathematics*, 2nd ed., Springer, New York, 2011

Boyer, Carl B., *A history of mathematics*, New ed., Princeton University P., Princeton, N.J., 1985

Britton, Tom & Garmo, Hans, *Sannolikhetslära och statistik för lärare*, Studentlitteratur, Lund, 2002

Duval, Raymond. *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning,* 1999

Duval, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*. 2006, *61*(1-2), 103-131.

Esaiasson, Peter, Gilljam, Mikael, Oscarsson, Henrik & Wängnerud, Lena (red.), *Metodpraktikan: konsten att studera samhälle, individ och marknad*, 4., [rev.] uppl., Norstedts juridik, Stockholm, 2012

Goldin, G. & Shteingold. System of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM, 2001

Häggström, Johan. Begreppet funktion i historisk belysning. *Normat (Nordisk Matematisk Tidsskrift)*, 53:2, (2005): 82-92,

Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford U. P., New York, 1972

National Council of Teachers of Mathemathics.
http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26862 (Hämtad 2014-05-16)

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory Into Practice,* (2001), *40*(2), 118-127.

Persson, Arne & Böiers, Lars-Christer, *Analys i en variabel*, 2. uppl., Studentlitteratur, Lund, 2001

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of educational psychology*, 1999, *91*(1), 175.

Sierpinska, Anna. On understanding the notion of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Ed.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Mathematical Association of America Notes. 1992, volume 25.

Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*, (Gy 2011) Stockholm, 2011

Skolverket, *Läroplan för de frivilliga skolformerna* (Lpf 94). Stockholm: Utbildningsdepartementet. 2008

Skolverket. *PISA 2012. 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap.* Stockholm: Skolverket. 2013

Skolverket. *TIMSS Advanced 2008. Huvudrapport. Rapport nr 336.* Stockholm: Skolverket. 2009

Skolverket. *TIMSS 2011.* Stockholm: Skolverket. 2012

Szabo, Attila, *Matematik Origo. 1b*, 2. uppl., Bonnier utbildning, Stockholm, 2011

Szabo, Attila, *Matematik Origo. 2b*, 2. uppl., Sanoma Utbildning, Stockholm, 2012

Szabo, Attila, *Matematik Origo. 3b*, 2., [rev. och omarb.] uppl., Sanoma utbildning, Stockholm, 2013

Vretblad, Anders & Ekstig, Kerstin, *Algebra och geometri*, 2., [omarb. och utök.] uppl., Gleerup, Malmö, 2006

Referenser från undersökning

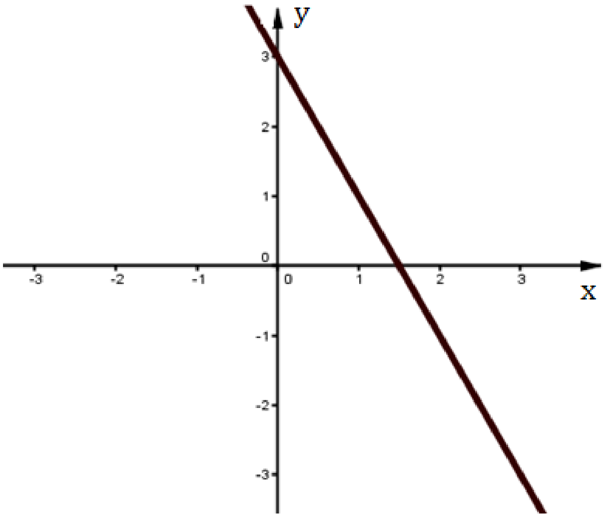
Samtalsintervjuer med gymnasieelever (2014-05-05). Finns transkriberade hos författarna.

Enkäter med gymnasieelever (2014-05-05). Finns sammanställda hos författarna.

Bilaga 1. Enkätundersökning - Funktioner

Namn____. Klass .

1) Vilken funktion stämmer med grafen?



☐ $y = 3 + 1{,}5x$ ☐ $y = 1{,}5 + 3x$ ☐ $y = 2 - 3x$ ☐ $y = 3 - 2x$

2) Beräkna nollställena till funktionen: $y = x^2 - 8x + 12$

☐ 0 och 8 ☐ -2 och -6 ☐ -3 och 4 ☐ 2 och 6

3) Vilken funktion stämmer med tabellen?

x	y
0	4
1	5
2	8
3	13

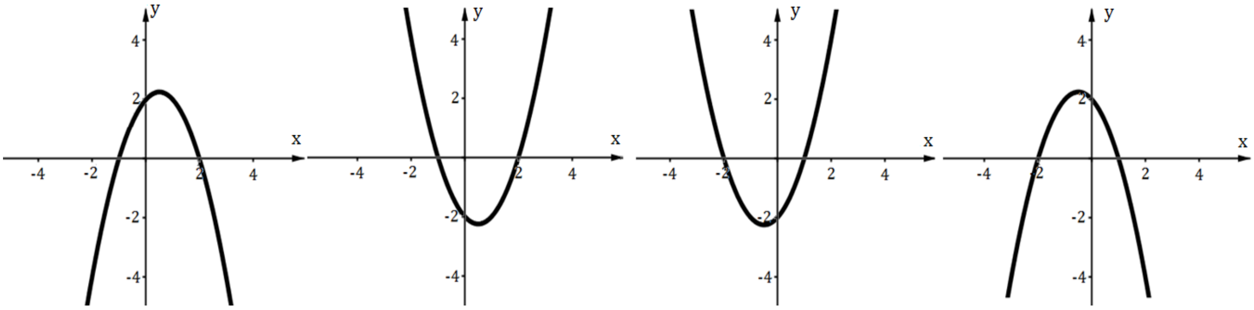
☐ $y = 2x + 4$ ☐ $y = 2x^2 - x + 4$ ☐ $y = x^2 + 4$ ☐ $y = 4 + x$

4) Funktionen $y = 3 + bx - 2x^2$ går genom punkten (2, 5). Bestäm värdet på b.

☐ $b = 9$ ☐ $b = \frac{49}{5}$ ☐ $b = -7$ ☐ $b = 5$

5) Vilken grafen stämmer med funktionen: $y = 2 + x - x^2$?

☐ a ☐ b ☐ c ☐ d

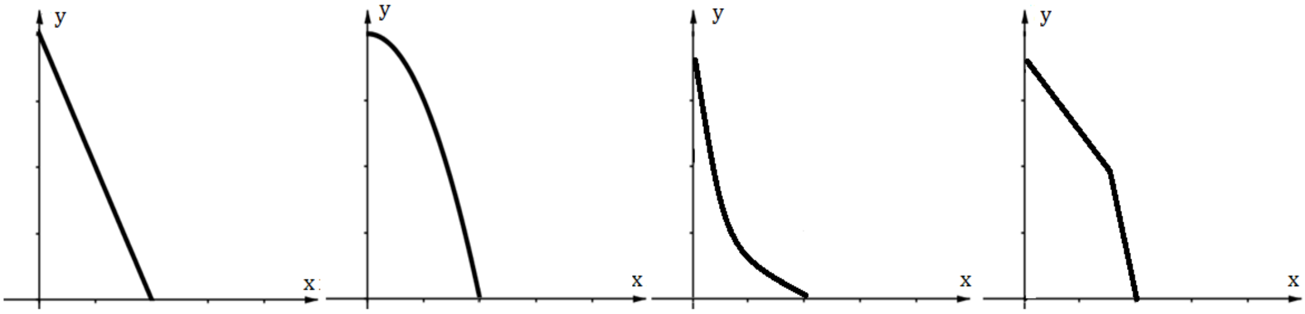


6) Bestäm symmetrilinjen för $y = (x + 3)(x - 9)$

☐ 3 ☐ 6 ☐ -3 ☐ -6

7) Kalle släpper ett ägg från ett fönster 20 m över marken. Äggets höjd y meter över marken efter x sekunder beskrivs av formeln $y = 20 - 5x^2$. Vilken graf nedan beskriver bollens fall?

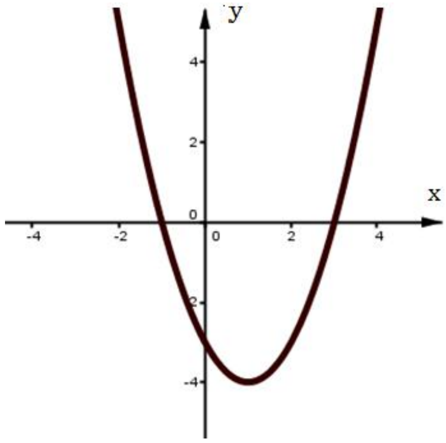
☐ a ☐ b ☐ c ☐ d



8) Summan av två tal är 26. Det ena talet är x. Vilket alternativ nedan är en funktion av talens produkt y?

☐ $y = x(x - 26)$ ☐ $y = (26 - x)x$ ☐ $y = 26 - x^2$ ☐ $y = (x - 26)(26 - x)$

9) Vilken funktion stämmer med grafen?



☐ $y = 3x - x^2 - 1$ ☐ $y = -2x - 3 + x^2$ ☐ $y = x^2 + 3x - 3$ ☐ $y = x + x^2 - 1$

Bilaga 2. Intervjuguiden

Gruppintervjuer med 3-4 elever. Eleverna indelar sig själva i grupperna. 20-40 minuter.

Inledande frågor:

+ Presentation och informering (informera om sekretess, presentera oss och uppgiften).
+ Vad är en funktion?
+ Vad krävs för att det ska vara en funktion?
+ Är en ekvation en funktion? Är en tabell en funktion?
+ *Definitionen*: En funktion kräver en *regel* som sammankopplar två mängder, t.ex. x- och y-värden. Varje x-värde ska ge exakt ett y-värde, men det kan finnas flera olika x-värden som ger samma y-värde. För att det ska vara en funktion måste även "x- och y-värdena" vara definierade, det som kallas *definitionsmängd* och *målmängd*.
+ Hur mycket har ni arbetet med funktionsbegreppet i skolan?
+ Hur har ni jobbat med funktioner (t.ex. inom vilka områden)?

Frågor om koncept/procedur:

+ Vad upplever ni som viktigast för att lyckas i skolan - förståelse eller procedurer? (Undervisning, klara uppgifterna i boken och prov).
+ Hur tycker ni att det borde vara, vad hade ni velat ändra på?

Är det här en funktion? (se Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju)

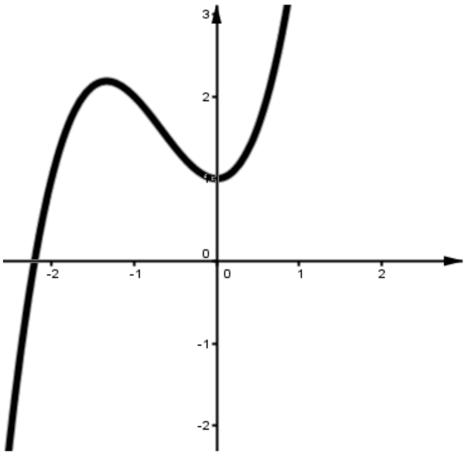
Bilaga 3. Diskussionsuppgifter i intervju

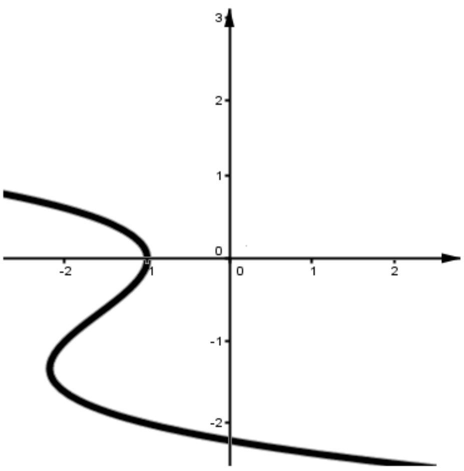
1) $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2 + 4x + 8.$

2)

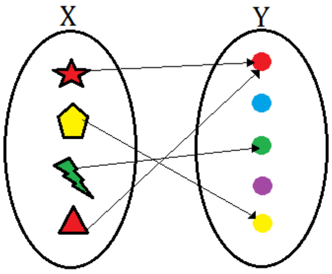
x	y
2	5
1	-2
4	8
7	5
3	17

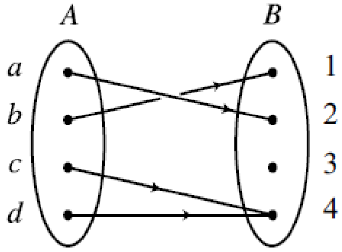
3)



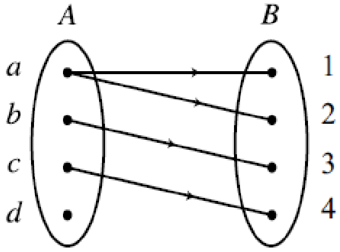


4)



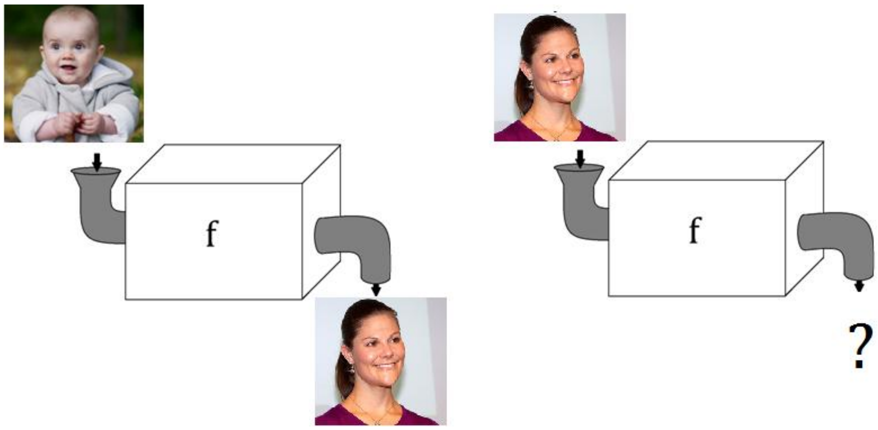


(i)



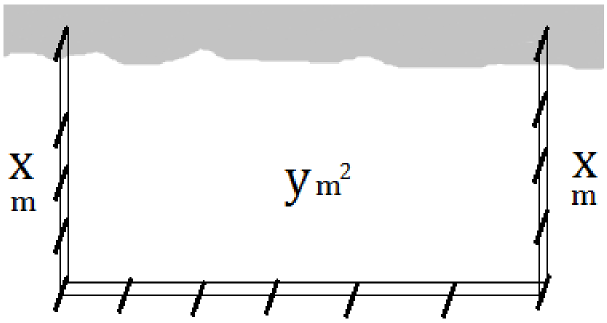
(ii)

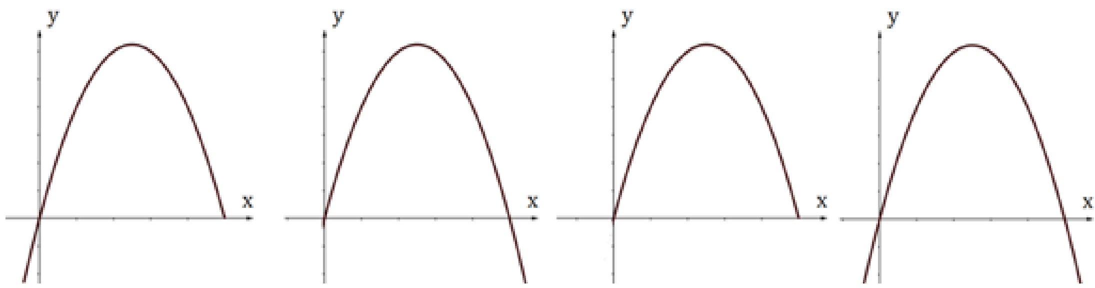
5)



6)

En bonde har 10 meter till sitt staket. Arean *y* av en rektangulär hage beror på bredden *x* enligt funktionen: $y = 10x - 2x^2$. Vilken graf är lämpligast för att beskriva sambandet mellan bredd och area?





Bilaga 4. Definitionsblad till elever under diskussionen

För att något skall klassas som en *funktion* måste följande 3 villkor uppfyllas:

1. En funktion kräver en *regel* som sammankopplar två mängder, t.ex. x- och y-värden.

- Mängderna behöver nödvändigtvis inte utgöras av siffror. Mängderna kan exempelvis bestå av bokstäver eller figurer.
- Regeln behöver inte vara en formel. Den kan till exempel lika gärna beskrivas med ord eller följa en tabell.

2. För att det ska vara en funktion måste även "x-värdena" vara definierade, det som kallas *definitionsmängd*.

- Varje x-värde ska ge exakt ett y-värde, men det kan finnas flera olika x-värden som ger samma y-värde.

3. För att det ska vara en funktion måste även "y-värdena" vara definierade, det som kallas *målmängden*.

- Varje y-värde behöver inte finnas representerat.