GÖTEBORGS UNIVERSITET

Tio fingrar

- en uppsats om talsystemens historia

Anna Fredriksson
Ellen Larsson
Sandra Torstensson

Handledare: Ulf Persson
Examinator: Laura Fainsilber
Kurs: MMGL99
Datum: 2014-05-28

Abstrakt

Titel: Tio fingrar - en uppsats om talsystemens historia

Författare: Anna Fredriksson, Ellen Larsson och Sandra Torstensson

Termin och år: Vårterminen 2014

Kursansvarig institution: Matematiska vetenskaper

Handledare: Ulf Persson

Examinator: Laura Fainsilber

Rapportnummer:

Nyckelord: Talsystem, positionssystem, additiva system, system av hybridtyp, nollan, talbas, hjälpbaser, räknebräde, matematikundervisning.

Det decimala positionssystemet kan idag anses vara lika självklart inom matematikundervisning på högstadie- och gymnasieskolan som att vi människor har tio fingrar. Det är sällan det decimala positionssystemet diskuteras och ifrågasätts. Däremot vet vi att det inte alltid förstås helt och fullt av elever och det behöver lärare vara medvetna om eftersom en förståelse av positionssystemet är väsentlig för att eleverna ska utvecklas vidare inom matematik.

En betydande del av syftesbeskrivningen för matematikämnet i LGR11 behandlar matematikens historia. Syftet med detta arbete är därför att göra en övergripande presentation av de talsystem som utvecklats genom historien och därefter diskutera deras för- och nackdelar utifrån tre inriktningar; olika typer av talsystem, beräkning i olika talsystem samt hur dessa tillämpas idag. Slutligen diskuterar vi vilka didaktiska fördelar kunskap om talsystem, dess uppbyggnad och utveckling har hos lärare och elever.

Arbetet är en litteraturstudie och visar att det genom historien har funnits flertalet taltecken och talsystem som använts i olika kulturer. Vi finner stora skillnader bland dem men även likheter då babylonierna, kineserna, mayafolket och indierna skilt från varandra utvecklade positionssystem. De använde sig av olika taltecken men utvecklade samma system för att uttrycka tal i skrift. Innan positionssystem var utvecklade var talsystemen additiva eller hybrida och dessa tre talsystem jämförs i arbetet. Positionssystemet är det mest fördelaktiga då det är det enda i vilket vi kan utföra avancerade beräkningar, men fortfarande idag används även additiva system, exempelvis när det handlar om pengar, och det hybrida systemet, när vi uttrycker tal muntligt.

Vi inser att det är mycket inom matematiken vi tar för givet som egentligen inte alls är det. Det är en insikt vi tror kommer hjälpa oss framöver i vårt kommande yrkesliv. Med matematikhistoria i ryggen, förståelse för att det finns olika beräkningsmetoder vars fördelar är olika, kunskap om att vi dagligen lever i olika slags talsystem kan vi på ett bättre sätt föra vidare matematiken till kommande elever.

Innehållsförteckning

1. Inledning

I december 2013 höll Skolverket en mycket uppmärksammad presskonferens där de svenska 15-åringarnas resultat i PISA 2012 presenterades. PISA är en undersökning som genomförts vart tredje år sedan år 2000 i flera länder, bland annat flera OECD-länder. Resultatet 2012 var nedslående för Sverige då slutsatsen var att svenska elever försämrats sedan förra undersökningen inom alla områden som PISA mäter, kunskaper inom matematik, naturvetenskap och läsförståelse. Inom matematik var resultatet 2012 det sämsta sedan mätningarna startade och i jämförelse med andra länder har Sverige också haft den snabbast nedåtgående trenden i matematikresultaten (Skolverket, 2013). Denna nyhet uppmärksammades i alla nyhetsflöden och efterdyningarna i krönikor, sociala medier och debattprogram blev stora. Även om många nyheter faller i glömska är detta en nyhet som fortfarande idag, ett halvår senare, finns i medvetandet hos både medier, politiker, tjänstemän och allmänhet.

PISA är en av anledningarna till att matematikundervisningen i svenska skolan återigen har kommit högt upp på agendan hos allmänheten. Dock avsatte regeringen redan innan denna rapport 649 miljoner till fortbildning för matematiklärare, det som kallas Matematiklyftet. Denna satsning från regeringen som Skolverket tillsammans med NCM, Nationellt centrum för matematikundervisning, fått i uppdrag att verkställa gäller fortbildning av matematiklärare på samtliga av skolväsendets nivåer bortsett från förskola och förskoleklass, det vill säga från lågstadiet till vuxenutbildning. Denna markering kan ses som ett sätt för regering och Skolverket att matematikundervisningen i skolan behöver lyftas, aktualiseras och att lärare får möjlighet att utvecklas didaktiskt.

Under vår verksamhetsförlagda utbildning under läsåret som varit fick vi som lärarstudenter möjlighet att delta i Matematiklyftet. En diagnostisk uppgift som under denna period på våra skolor ställdes till högstadieeleverna handlade om vilket tal som är störst 0,1 eller 0,010. Här prövades elevernas förståelse av positionssystemet och det var tyvärr inte alltid självklara svar från eleverna även om denna fråga kan anses vara grundläggande. Därmed fick vi upp ögonen för hur viktigt det är att förstå grunderna i det positionssystem vi använder idag.

Efter att under en längre tid ha läst matematik kan positionssystemet tas så för givet att vi slutar reflektera över dess historia, uppkomst och hur man på annat sätt skulle kunna beteckna tal. Med denna uppsats vill vi ifrågasätta vårt eget sammanhang och ta ett utifrånperspektiv samt fördjupa oss i det avsnitt av läroplanen i matematik som belyser den historiska och kulturella betydelse som matematik haft för mänsklighetens historia. När *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011* (LGR11) beskriver syftet med grundskolans matematikundervisning upptar det historiska perspektivet en betydande del av texten där följande finns att läsa:

> Undervisningen ska ge eleverna förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och metoder i matematiken har utvecklats. Genom undervisningen ska eleverna även ges möjligheter att reflektera över matematikens betydelse, användning och begränsning i

> vardagslivet, i andra skolämnen och under historiska skeenden och därigenom kunna se matematikens sammanhang och relevans. (LGR11, s. 62).

Då den historiska aspekten av matematiken är betydande i LGR11 kan vi tolka detta som att matematikens historia bör få en tydlig plats i undervisningen. Därför är vår förhoppning att denna uppsats kan bli en hjälp att fördjupa kunskap om matematikens historia och då framför allt talsystemen. Vår förhoppning är att den ska vara till nytta för både verksamma och blivande matematiklärare för att få en överblick av matematikhistorien.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med detta arbete är att övergripande presentera de talsystem som olika historiska kulturer utvecklat och använt genom tiderna. Vi vill fördjupa vår kunskap om olika talsystem och jämföra dess styrkor och svagheter samt se hur denna kunskap kan vara till en hjälp i vårt framtida arbete som matematiklärare. Vårt syfte preciseras i följande frågeställningar:

- Vilka olika talsystem och taltecken har varit framträdande i världshistorien och hur har de vuxit fram?
- Vilka styrkor och svagheter har de olika talsystemen utifrån tre inriktningar; olika typer av talsystem, beräkning i olika talsystem samt hur dessa tillämpas idag?
- Vilka didaktiska fördelar har kunskap om talsystem, dess uppbyggnad och utveckling hos lärare och elever?

3. Läshänvisningar

Nedan ger vi läshänvisningar genom att förklara vissa begrepp vilka kan uppfattas tvetydiga för läsaren.

Decimalt system
Ett decimalt system har talet tio som bas. Det behöver nödvändigtvis inte vara ett positionssystem utan kan vara ett talsystem av annan typ.

Kultur
Begreppet kultur syftar i denna uppsats till folkstammar som odlat och brukat ett jordområde, utvecklat någon form av skriftspråk, byggt städer och utvecklat teknologi.

Nollan
Ett tecken som står ”ingenting”, för tom mängd och tom plats i ett positionssystem.

Talbas
Talbasen utgör en grund i positionssystemet. I vårt decimala positionssystem är talbasen tio vilket innebär att det finns tecken för alla tal upp till nio samt för nollan. Talbasen är i positionssystemet det lägsta talet som inte kan representeras av ett ensamt taltecken. Talsystem kan ha olika talbaser, exempelvis det binära positionssystemet som har talbas två där enbart taltecknen 1 och 0 är giltiga.

Taltecken/Siffra
I denna uppsats är dessa två begrepp likställda, vi väljer dock att till största del använda oss av taltecken. Problemet med att använda ordet siffra är att det snabbt kopplar till dagens siffror.

Tom mängd
I uppsatsen står begreppet tom mängd står för ingenting, det är en mängd som inte innehåller några element, exempelvis $10 - 10$ ger den tomma mängden.

Tom plats
Ett tecken i positionssystem som visar att storleksordningen inte ska representeras. Detta kan användas oberoende av talbas. Ett exempel: talet 503 i vårt decimala positionssystem där vi har 3 ental, alltså $3 \times 10^0 = 3$, 0 tiotal, alltså $0 \times 10^1 = 0$ och 5 hundratal, alltså $5 \times 10^2 = 500$. Detta ger att $500 + 0 + 3 = 503$. Här används nollan som ett tecken för tom plats.

Årangivelser
Då uppsatsen innehåller en hel del årangivelser anger vi i största möjligaste mån om det är ett årtal före eller efter Kristus. I de fall som det i texten står exempelvis 1500-talet menas 1500-talet e.Kr.

4. Metod

Denna uppsats är en litteraturstudie av talsystemens historia. Då en stor del av vår uppsats består i att beskriva olika kulturers utveckling av talsystem har en mängd olika matematikhistorikers verk studerats och lästs. Den matematikhistoriker vi främst använt oss av är Georges Ifrah och hans verk *Räknekonstens kulturhistoria - från forntiden till dataåldern* som anses vara ett av de mest gedigna verken inom sifferhistorik. Utöver det har två svenska matematikhistoriker Bo Göran Johansson och Jan Thompson och hemsidan *The MacTutor History of Mathematics archive* av University of St Andrews i Scotland varit källor i vårt arbete. Andra historiker har använts till mer specifika ämnesområden. Sökord som använts i vårt arbete med uppsatsen har varit matematikhistoria, talsystem, talbaser, beräkningstekniker, räknebord. Utöver detta har vi använt mer specifika sökord kopplade till olika talsystem.

Avgränsningar
De avgränsningar som gjorts har främst berott på att informationen varit mättad då vi sökt i andra källor, det vill säga dessa har inte bidragit till någon ytterligare information. I resultatet presenteras åtta kulturers talsystem vilket givetvis är en avgränsning då det genom historien funnits många fler talsystem. Anledningen till att vi väljer dessa åtta kulturer är för att det är de vi idag har mest kunskap om. Varför vi valt att inte ta upp en del talsystem kan dels bero på att de använts av en liten skara människor och/eller under kort tid eller dels att vi idag har så lite bevis att det riskerar bli enbart spekulation.

5. Del I – Talsystemens historia

I resultatet nedan presenteras de åtta talsystem som vi valt att i denna uppsats fokusera på. Innan det ges en inledning till en kategorisering av talsystem vilken vi fortsättningsvis i uppsatsen använder oss av.

5.1 Introduktion till talsystem

De talsystem som kommer beskrivas i denna uppsats kan kategoriseras i tre kategorier; additiva talsystem, talsystem av hybridtyp och positionssystem. Nedan följer en kort och exemplifierande redogörelse för var och ett av systemen för att underlätta läsning.

Additiva talsystem

I varje talsystem krävs att det finns taltecken vilka tilldelas värden. Därför behöver vi först av allt bestämma vilka taltecken som ska användas i det additiva talsystem som nu byggs upp.

✎	♎	☎	❄
1	10	100	1000

I ett additivt system upprepas de taltecken som additivt tillsammans bildar det tal vi önskar representera. Nedan följer några exempel på hur olika tal kan skrivas.

11	♎✎ (10 + 1)
248	☎☎♎♎♎♎✎✎✎✎✎✎✎✎ (100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)
4132	❄❄❄❄☎♎♎♎✎✎ (1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1)

Ovan har alla tal skrivits med taltecknen sorterade i storleksordning men då vi enbart adderar de taltecken som finns nedskriva har ordning inte avgörande betydelse, vilket betyder att talet 11 kan skrivas både ♎✎ och ✎♎. Att välja taltecken, där varje tecken är en potens av tio, är inte nödvändigt i additiva system. Det är möjligt att tilldela taltecken godtyckliga värden.

Talsystem av hybridtyp

Ett hybridsystem använder till skillnad från det additiva systemet både addition och multiplikation för att representera ett tal. Låt oss först bestämma våra taltecken.

✎	✂	⌧	💣	✋	⊙	♒	⌘	⌛	♎	☎	❄
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000

När ett tal skrivs i hybridsystem tecknas det med hjälp av tecken för 1-9 kombinerat med tecken för tiopotenserna. Talet 5251 skrivs som ✋❄✂☎✋♎✎, alltså 5 1000 2 100 5 10 1. Multiplikationsprincipen gäller där ental följs av en tiopotens samt addition mellan dessa produkter. Detta ger att ✋❄✂☎✋♎✎ motsvaras av $5 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 1$. Nedan följer några exempel på hur tal i hybridsystem kan skrivas med ovan nämnda teckenkonvention.

11	✎♎ ✎ $(1 \times 10 + 1)$
248	✂☎ 💣♎ ⌘ $(2 \times 100 + 4 \times 10 + 8)$
4132	💣❄ ✎☎ ⌧♎ ✂ $(4 \times 1000 + 1 \times 100 + 3 \times 10 + 2)$

Med angivna tecken enligt listan ovan kan vi här alltså uttrycka alla tal upp till 9999. För att uttrycka större tal än detta krävs att ett nytt tecken för 10 000 införs.

Positionssystem

Positionssystemet och är det talsystem vi använder idag. Likt de tidigare beskrivna systemen behöver vi först av allt bestämma vilka taltecken som representerar vilka tal och därmed bestäms också basen i talsystemet. Utöver dessa taltecken kräver ett fullvärdigt positionssystem även ett tecken för den tomma mängden, det som i vårt decimalsystem är nollan.

✎	✂	⌧	💣	✋	⊙	♒	⌘	⌛	☐
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0 (tom mängd)

I detta talsystem spelar positionen på taltecknen en avgörande roll för vilket tal som representeras. I talsystemet behöver det också bestämmas vilken position som har vilket värde, exempelvis huruvida entalen ska skrivas längst till höger, som i vårt decimalsystem, eller längst till vänster. Vi bestämmer oss för att använda samma konvention som decimalsystemet, alltså att entalet skrivs längst till höger och därefter är varje position till vänster om denna växande med en tiopotens.

11 ✏✏
($1\times10^1 + 1\times10^0$)

248 ✂💣⌘
($2\times10^2 + 4\times10^1 + 8\times10^0$)

4132 💣✏⌧✂
($4\times10^3 + 1\times10^2 + 3\times10^1 + 2\times10^0$)

Tecknet för den tomma mängden (nollan) fyller en viktig roll för att vi ska kunna särskilja tal som exempelvis 43 från 403 och 430. Utan tecken för den tomma mängden skulle dessa tal representeras på samma sätt vilket de nu inte gör.

43 💣⌧
($4\times10^1 + 3\times10^0$)

403 💣□⌧
($4\times10^2 + 0\times10^1 + 3\times10^0$)

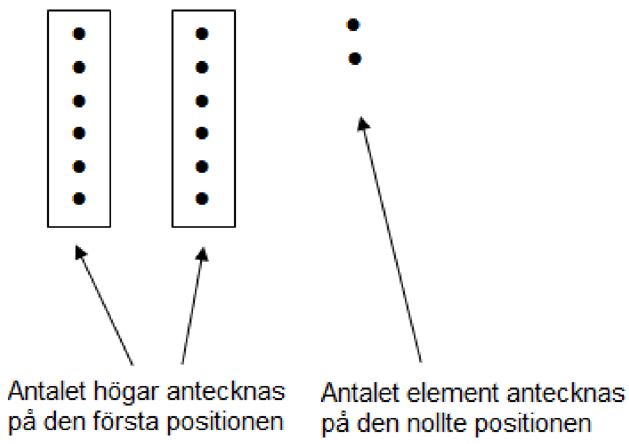
430 💣⌧□
($4\times10^2 + 3\times10^1 + 0\times10^0$)

Talbaser i positionssystemet

I det decimala talsystemet är tio vår talbas, det vill säga grunden för vårt talsystem. Detta innebär att varje position representerar en potens av tio. Exempelvis i talet 278, står 2 för hundratalen det vill säga 10^2, 7 står för tiotalen alltså 10^1 och 8 står för entalen, 10^0. Men likväl kan ett annat tal väljas till vår bas, exempelvis sex. De taltecken som är giltiga i detta talsystem är då 1-5 samt tecken för den tomma mängden, 0. Varje position i denna talbas representeras nu av en potens av sex, 6^0, 6^1, 6^2 och så vidare. För att vara tydliga med vilken bas vi befinner oss i kommer vi nedan beteckna tal enligt följande. $[\ldots\text{tredje position, andra position, första position, nollte position}]_{\text{talbas}}$.

Talet 1234 i vårt decimala positionssystem kan svara för vårt exempel och skrivs nedan som $[1, 2, 3, 4]_{\text{tio}}$ och 14 skrivs alltså som $[1, 4]_{\text{tio}}$ där index visar vilken talbas vi befinner oss i. För den som vill skriva om $[1, 4]_{\text{tio}}$ i talbas sex behöver följande göras:

Tag alla 14 element och försök så långt det går att sortera dem i högar om sex element. De element som blir över, det vill säga de resterande elementen som i detta fall två, nedtecknas på den nollte positionen. Därefter försöker vi att gruppera högarna i grupper om sex, alltså i grupper om totalt $6 \times 6 = 36$ element. De högar som blir "över" är det antal som antecknas på den första positionen. På samma sätt fortsätter vi tills vi inte kan gruppera mer.



På detta sätt görs omvandlingen: $[1,4]_{\text{tio}} = [2,2]_{\text{sex}}$

Samma resonemang går att använda i en högre talbas. Hur kan vi exempelvis skriva $[4,1,3,2]_{\text{tio}}$ i talbas sextio (som är en talbas vi kommer stöta på framöver).

$$[4,1,3,2]_{tio} = 4 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$
$$= 1 \times 60^2 + 8 \times 60^1 + 52 \times 60^0 = [1,8,52]_{sextio}$$

5.2 Sumerer och babylonier

För omkring 6000 år sedan uppträdde ett folk, som kallas sumererna, i de nedre delarna av Mesopotamien (nutida Irak). Var detta folk har sitt ursprung är det fortfarande ingen som vet, men omkring 4000 f.Kr. bosatte de sig vid floderna Tigris och Eufrat och började uppbyggandet av en stor och betydande mesopotamisk kultur (Ifrah, 2001a, s.205). Sumererna verkade fram till ca 2000 f.Kr. då elamiter ifrån öst och amoriter i väst störtade den dåvarande sumeriska dynastin Ur III. Ifrån detta växte den babyloniska kulturen fram (Ifrah, 2001a, s. 206). Det som sumererna utvecklat inom skrift och matematik tog babylonierna över och fortsatte utveckla (O'Connor & Robertson, 2011).

Figur 1: Sumeriska skrifttecken.

Skrivkonsten är en utav den moderna människans viktigaste uppfinningar. Med skrivkonsten har kulturer kunnat växa, information kunnat sparas och tankar fått en helt ny möjlighet till åskådning. Den allra äldsta skrift som hittats är från omkring 4000 f.Kr. och skriven av sumererna i nedre Mesopotamien (Ifrah, 2001a s. 122). På den tiden användes lertavlor som dagens papper, när dessa tavlor var fuktiga trycktes olika streck och tecken in i leran och sedan fick tavlan torka. Tecknen som hittats går att beskriva som bilder av föremål, se figur 1. Den sumeriska skriften är alltså vid denna tidpunkt av ideografisk karaktär (Ifrah, 2001a s.123).

Dessa tecken liknar det ord som det står för, men har inte bara en betydelse. Det tredje tecknet i figuren kan betyda både “vatten”, “ström” och “våg” (Ifrah, 2001a s.123-124). En skrift utformad på detta vis sägs vara ett förstadie till skriften som den ses på idag. Det skrivna ordet ska förmedla nyanser, perspektiv och preciseringar som det talade ordet förmedlar. Detta är dock svårt att åstadkomma med en skrift bestående av tecken som byggs på bilder av föremål, som dessutom hade flera olika betydelser (Ifrah, 2001a s.125-126). Tvetydigheten hos skrifterna gör att det är troligt att skrifterna skapats som minnesanteckningar för de redan insatta, detta för att kunna hänga med i den ständigt växande kulturen (ibid.). De allra flesta skrifter inkluderar också sammanfattningar av räkenskaper, exempelvis byten av varor, antingen längst ner på lertavlan eller på baksidan. Detta vittnar om att skriften användes mycket i ett räknande syfte (ibid.).

Taltecken

Namngivelse av siffrorna

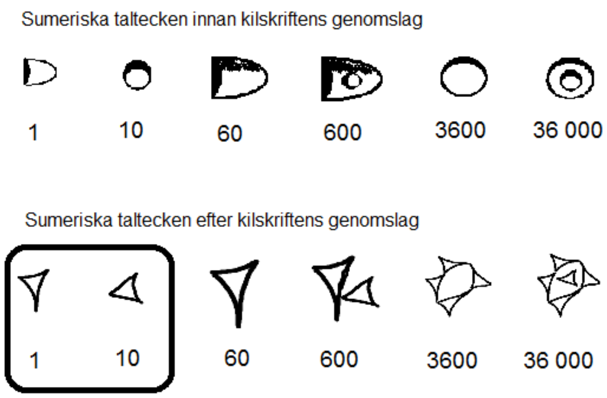
Sumererna använde sig av ett sexagesimalt talsystem, alltså ett talsystem som bygger på basen sextio. För att ge namn till alla tal användes en form av "trappteknik". Namnen byggs upp med hjälp av olika trappavsatser, grundenheter, och kan jämföras med det decimala systemets 1, 10, 100, 1000 osv. Men i det sexagesimala talsystemet är trappavsatserna istället 1, 10, 60, 600, 3600, 36000, 216000 osv. Grundenheterna ökar alltså växelvis med tio och sex, som sägs vara hjälpbaser till det sexagesimala systemet och finns för att hjälpa minnet (Ifrah, 2001a s.128-129). Namngivningen startar med att alla tal mellan 1 och 10 fick egna namn, sedan användes dessa för att formulera namnen upp till nästa grundenhet 60. 1 och 60 har samma namn, detta gör räkning något otydlig ibland men man tror anledningen till detta var talet 60:s betydelse som "det stora talet 1". Processen börjar nu om upp till nästa grundenhet, 600. Här ges 600 ett nytt fristående namn och processen börjar om till nästa grundenhet. Tanken är alltså att använda redan formulerade namn för att skapa nya, vilket är samma uppbyggnad som vi har i det decimala systemet (ibid.).

Varför basen sextio?

Sumererna är den enda folkgrupp som skapat och använt ett talsystem med basen sextio. På frågan om vart denna talbas kommer ifrån finns inget säkert svar, det finns endast hypoteser. Dock anser Ifrah (2001a, s.145-146) att det finns en hypotes som är mest trolig, denna bygger på en kombination av två olika talsystem - med basen fem respektive tolv. Kombination skulle alltså kommit då sumererna bosatte sig i nedre Mesopotamien där det redan fanns en befolkning. Bland de ord sumererna har för talen 1 - 10 kan en kvarleva av basen fem antydas, vilket innebär att den tidigare befolkningen antas haft basen tolv. Kombineras dessa baser är basen sextio en möjlighet (ibid.).

Tecknen och additionssystem

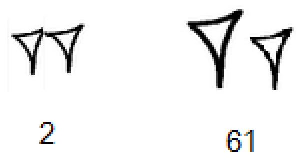
Gemensamt med den ideografiska skriften utvecklades olika taltecken för att kunna anteckna antal av olika slag. Detta tog plats ca. 3200 f.Kr. vilket gör de sumeriska taltecknen de äldsta kända taltecknen (Ifrah, 2001a, s.123). De tecken som fanns kopplas till de grundenheter som byggde upp namnen på de olika talen. Varje grundenhet hade sitt eget tecken, detta illustreras i figur 2.



Figur 2: Taltecken i det sumeriska talsystemet.

I figuren ser vi att efter kilskriftens genomslag ca. 2600 f.Kr. ändrades tecknens utseende drastiskt. Notera att sumererna endast använde sig av två olika tecken, som kombinerades på olika vis för att skapa de olika taltecknen (McLeish, 1991, s.38). Symbolerna för 1 och 10 är alltså de enda "siffrorna" som fanns, som går att jämföra med siffrorna 0 - 9 i det decimala systemet. Resterande siffror, inklusive grundenheterna, byggdes sedan upp av endast dessa två tecken (Ifrah, 2001a, s.131).

Sumerernas sexagesimala talsystem var vid denna tidpunkt ett additionssystem. Alla taltecken som fanns adderades alltså ihop på lämpligt sätt för att skapa alla möjliga tal (Ifrah, 2001a, s.136). Tecknen grupperades efter storlek och skrevs först i par, senare tre och tre. Additionssystemet hade här två områden som gjorde användandet problematiskt. För det första innebär systemet att stor plats behövs för nedskrivandet av tal, detta tillsammans med faktumet att alla räkenskaper skrevs på klumpiga lertavlor gjorde att de sumeriska skrivarna vid sidan av additionssystemet skapade en subtraktionsmetod. Denna fungerar på liknande vis som vår nutida subtraktionsräkning, så talet 9 skrevs ut så som vi skriver beräkningen "10-1". Minustecknet, som ser ut som ett ungefärligt vinkelrätt hörn, fungerar som vårt minustecken (Ifrah, 2001a, s.137-138). För det andra så är det problematiskt att både 1 och 60 skrivs som en kil vinklad åt samma håll. För att försöka undkomma att 1 och 60 förväxlas skrevs kilen som betydde 60 något större. Dock var det också problematiskt att skriva 2 och 61, då detta lätt kunde se ut som samma tal. Mellanrum mellan tecknen var därför också viktigt (Ifrah, 2001a, s.139). Det lades till ett något större mellanrum mellan tecknet för 60 och tecknet för 1 i 61 än vad det är mellan de båda tecknen för 1 i 2, se figur 3.



Figur 3: Jämförelse mellan taltecken för 2 och 61.

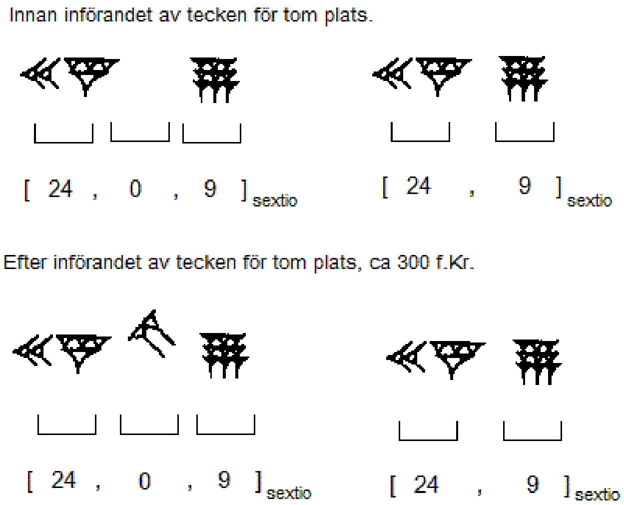
För att räkna antal föremål så använde sumererna sig först av stenar i olika storlekar, som hade olika värde. Detta system visade sig vara problematiskt då det krävs många stenar av lika storlek. Sumererna skapade därför så kallade talpjäser av lera. Varje grundenhet fick sin egen form på en talpjäs och utseendet tros vara grunden till utseendet av de taltecken (innan kilskriften) som används i skrift (Ifrah, 2001a, s. 154). Först användes dessa talpjäser till räkning av antal och var väldigt viktiga vid byten av varor eller vid annan typ av handel, då de markerade hur mycket ena parten hade kvar i skuld till den andra parten (Ifrah, 2001a, s.161). Men när skriften utvecklades och det istället gick att "skriva ner" talpjäserna på lertavlor så behövdes de inte längre i detta syfte, dock användes de fortfarande för att räkna (Ifrah, 2001a, s.164,191).

Positionssystem

Runt 1800 f.Kr., alltså när babylonierna tagit över den sumeriska kulturen, började ett positionssystem utvecklas. Systemet byggs upp så som det decimala systemet med stigande värde för positionerna från höger till vänster, men babylonierna använde basen sextio (O'Connor & Robertson, 2011). Där positionernas värde i det decimala systemet bygger på 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 och så vidare, bygger positionernas värde i det sexagesimala systemet på 60^0, 60^1, 60^2, 60^3 och så vidare. Talen 1 till 59 går alltså här att jämföra med våra tal 1 till 9 och de skrivs fortfarande med hjälp av additionsprincipen. Det är när fler siffror ska läggas in som positionernas värde blir viktig. Alltså är det ifrån 60 och uppåt som systemet blir positionellt (Ifrah, 2001a, s.221). För att skriva 75, som överstiger 60 och alltså kräver utskrivning positionellt, skrevs ett tecken för 60 i första positionen och tecken för 15 i nollte positionen. Talet 75 skrivs alltså som $1 \times 60 + 15$ (Ifrah, 2001a, s.222). I inledningen till resultatet finns tydligare genomgångar kring hur positionssystemet fungerar och hur man växlar mellan olika baser. I ett positionssystem har hjälpbaserna tio och sex inte längre en passande roll. Det finns längre ingen anledning att ha dessa som hjälp, så positionerna var denna hjälp istället. Talet 1859 som kan skrivas som $30 \times 60 + 59$ skrevs i positionssystemet som $[30;59]_{\text{sextio}}$.

Nollan och bråken

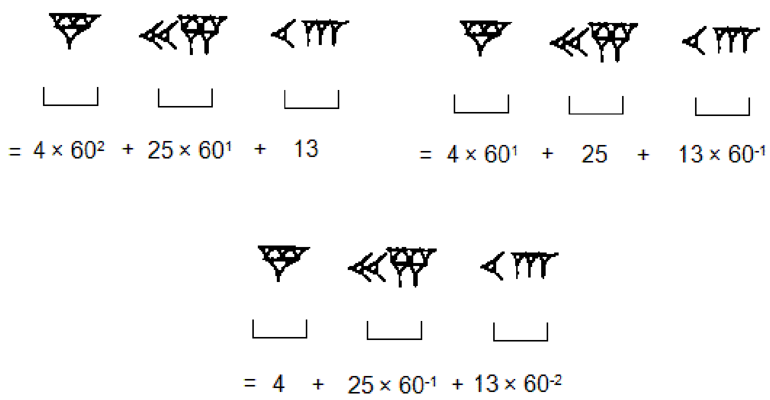
Varken sumererna eller babylonierna hade nollan, men babylonierna skapade senare ett tecken för tom plats. Avsaknaden av ett tecken för tom plats märktes inte förrän positionssystemet utvecklades och det dröjde ytterligare 1500 år innan konceptet tom plats faktiskt uppfanns av de babyloniska lärda (Ifrah, 2001a, s.225). Utan ett tecken för tom plats såg exempelvis 101, 11 och 110 ut på samma sätt och för att veta vilken av dessa som syftades på behövde kontexten vara känd. Detta gjorde teoretisk matematik svårtolkad (Thompson, 1996, s.49). Det blev alltså problematiskt att skriva tal som i någon position behövde visa “ingenting”, talet $[24,0,9]_{\text{sextio}}$ kunde tolkas som $[24,9]_{\text{sextio}}$, vilket ger stora skillnader i värde (Ifrah, 2001a, s.226). Precis när tecknet för tom plats skapades är svårt att datera men runt 300 f.Kr. vet vi att ett sådant tecken användes, en dubbelkil lutad till vänster. Detta tecken lades till i de storleksordningar där det inte fanns någon potens av sextio (Ifrah, 2001a, s.229).



Figur 4: Illustrering över hur införandet av nollan förändrade det babyloniska skrivsättet.

Detta tecken för tom plats, som användes både i och i slutet av uttryck, tros vara historiens första (Ifrah, 2001a, s.230-231). Dock var detta tecken alltså inte en fullvärdig nolla för den stod alltså inte för den tomma mängden, utan ett sätt att teckna tal tydligare. Tecknet för tom plats användes aldrig som svar på frågan “Vad blir $10 - 10$?” (ibid.).

När positionssystemet utvecklades fanns det också utrymme att utveckla betydelsen av bråken. I additionssystemet hade varje meningsfullt bråk fått sitt eget tecken, men nu utvidgade babylonierna istället positionssystemet till att innehålla positioner med negativ potens av sextio, alltså bråk med potenser av sextio i nämnaren. Bråk markerades inte på ett speciellt sätt vid denna tid (alltså inte som exempelvis med bråkstreck; $\frac{3}{60}$). Det fanns ingen anledning att göra detta då nämnaren alltid var en potens av sextio, det var positionen av bråket som var fingervisare om vilken storlek nämnaren hade (Johansson, 2013, s.16). Detta blev dock problematiskt i det babyloniska positionssystemet då det inte i en talmängd fanns några markeringar för när heltalsdelen av talet slutade och när bråkdelarna startade (O'Connor & Robertson, 2011). Därför kunde ett tal, som $[4,25,13]_{\text{sextio}}$ i figur 5, tolkas på flera olika sätt.



Figur 5: Exempel på förväxling av storleksordningar i det babyloniska talsystemet.

Faktumet att 1 och 60 hade samma tecken gjorde inte problemet lättare. Det fanns ingen tydlig urskiljning för vilken storleksordning som talet i fråga syftade på, för nu finns det ingen "sista placering" som entalen var innan bråken infördes. Även i detta problem fick sammanhanget vara räddningen för vilken storleksordning som var aktuell (Ifrah, 2001a, s.228).

5.3 Egyptierna

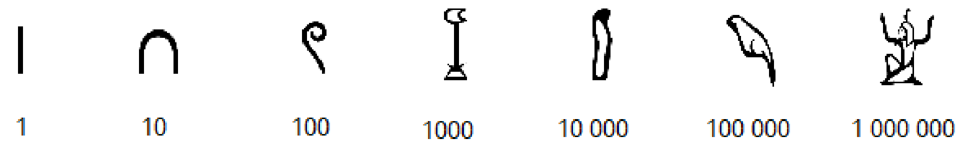
Den egyptiska kulturen är en utav de äldsta. Placeringen vid Nilen och de långa perioderna av fred gav kulturen möjlighet att utvecklas mycket och snabbt vilket också gjorde kulturen långlivad (Johansson, 2013, s.31). Egyptens storhetstid sträcker sig ifrån den tidiga dynastiska tiden vid ca 3000 f.Kr. till då greken Alexander den store tog över och gjorde Egypten till en grekisk provins ca 330 f.Kr. Under denna tid hann den egyptiska kulturen långt inom många områden, bland annat byggkonst, jordbruk, skrift och matematik.

Redan århundradena innan 3000 f.Kr. började egyptierna utveckla ett skrift- och talteckensystem som byggde på ideografiska symboler kallade hieroglyfer, detta var ungefär samtidigt som sumererna utvecklade sin ideografiska skrift. Det finns olika åsikter om huruvida den egyptiska matematiken varit influerad av andra kulturer eller inte. Möjligen har egyptierna influerats av sumererna, men detta är inte bekräftat. Ifrah menar att det allra troligaste är att den egyptiska skriften och matematiken utvecklats fristående ifrån någon influering, speciellt ifrån babylonierna då det finns stora skillnader mellan de olika talsystemen (Ifrah, 2001a, s.242). Ett ideografiskt system tenderar bli tvetydigt då den bygger på bilder som kan tolkas på olika sätt eller helt enkelt hade olika betydelser, detta gällde även hieroglyfer. Det är också svårt att med bilder uttrycka abstrakta ord som inte har en konkret avbildning (Ifrah, 2001a, s.243). De hieroglyfer som användes föreställde människan och djur i åtskilliga positioner som ska föreställa olika ord. Riktningen som tecknen ska läsas i beror på hur tecknen är skrivna. Då tecknen som föreställer exempelvis en människa blickar åt vänster ska texten läsas från höger till vänster och vice versa (Johansson, 2013, s. 31-32)

Vad vi vet om den egyptiska matematiken kommer till största del ifrån *Rhindpapyrusen*, men även ifrån ett fåtal andra kortare dokument. Eftersom egyptierna skrev på ömtåliga papyrus och läderbitar har många dokument förgåtts i historien. *Rhindpapyrusen* är en avskrift av äldre dokument vars ursprung inte känns till och den nedtecknades 1650 f.Kr. Den består av hoplimmade ark som tillsammans blir fem meter långt. På papyrusen går det att urskönja hur egyptierna använde sig av matematik då den beskriver 87 matematiska problem och dess lösningar (Johansson, 2013, s.35). Problemen är ofta praktiska och beskriver en vardaglig situation, som hur det går att dela 7 limpor bröd mellan 10 män (Johansson, 2013, s.38).

Taltecken

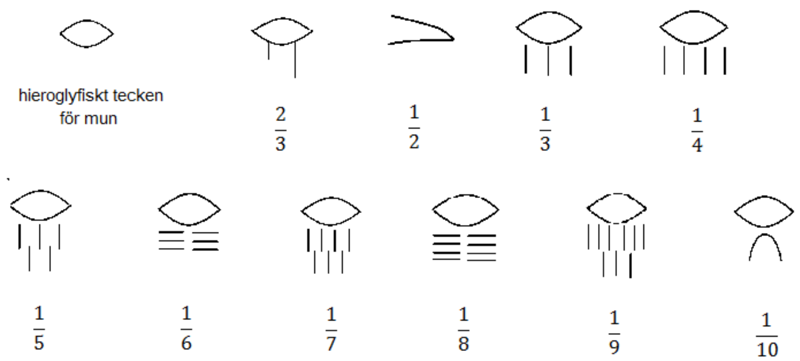
Egyptierna använde ett strikt decimalt additivt talsystem. I figur 6 visas de tecken för talen som fanns - 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 och 1 000 000. Ifrah (2001a, s.249) menar att tecknens utformning har kommit ifrån olika traditioner, där en del av tecknen har sitt ursprung i symbolik och andra i de fonetiska ljuden av vad tecknet avbildar och talet som tecknet står för. Det fanns inga tecken för addition, subtraktion, multiplikation eller division även om alla dessa räknesätt utövades i Egypten. Det fanns inte heller tecken för “lika med” och egyptierna hade varken tecken för tom plats eller tom mängd (McLeish, 1991, s.48-49).



Figur 6: Taltecken i det egyptiska talsystemet.

Bråk

I den egyptiska matematiken användes enbart stambråk, vilket är bråk som endast har 1 i täljaren. Alla andra bråk skrevs som en summa av stambråk (Johansson, 2013, s.36). Dock var bråket ⅔ ett undantag och var ett mycket viktigt verktyg i beräkningar, detta bråk hade också ett speciellt eget tecken. Istället för vårt sätt att skriva bråk med ett snedstreck så skrev egyptierna till tecknet för mun ovanför vad vi skulle kalla nämnarens värde, se figur 7. Senare har detta även representerats med en prick över talet (Johansson, 2013, s.37).



Figur 7: Hur de egyptiska stambråken illustrerades.

I utskrivning av bråk ställdes stambråken i storleksordning och samma stambråk fick inte användas två gånger i en summa, varje bråk hade också flera möjliga summor. Allt detta gjorde omskrivning till stambråken mer komplicerad (ibid.). Många utav dessa summor fanns i tabeller och deras omskrivning var förutbestämd. I *Rhindpapyrusen* finns tabeller över hur bråk på formen $\frac{2}{n}$ skulle skrivas om till stambråk och dessa användes vid beräkningar (Johansson, 2013, s.38).

Egyptiernas matematik var bristande på flera plan, men trots detta kunde de räkna relativt komplicerade problem, bland annat de som presenteras i *Rhindpapyrusen*. För att upprätthålla en sådan massiv kultur som den egyptiska måste lärda också kunna lösa problem inom byggnation, administration och annan allmän planering. Dock skilde sig egyptiernas bråkberäkningar avsevärt från andra kulturers på grund av deras ovanliga sätt att behandla bråk, som kan ha sin grund i att egyptierna på denna tid inte hade några mynt. Mycket räkning gjordes därför på saker som i teorin går att dela i oändligheten, som bröd och säckar med korn. Detta går inte att göra med mynt, som många andra kulturer utvecklat sin matematik kring (McLeish, 1991, s.50).

5.4 Grekerna och romarna

Antikens Grekland var den dominerande kulturen i medelhavsområdet från 500 f.Kr. och fram till vår tideräknings början. I grekernas kultur var kunskap något som i sig hade ett högt värde. Deras passion var att söka kunskap och det var viktigt att kunskap och religion aldrig skulle vara något som stod i konflikt med varandra (Heath, 1965, s.10). En av de första grekiska matematikerna, Thales, som var verksam omkring 600 f.Kr. hämtade sin inspiration både från egyptierna och babylonierna och även fortsättningsvis inspirerades grekerna av båda dessa kulturer (Johansson, 2013, s.59; Heath, 1965, s.8). Thales utforskade geometriska problem och det sägs också att han vann respekt bland folk i mellersta Asien genom att beräkna och förutsäga en solförmörkelse (Thompson, 1996, s.115). Den största delen av den matematiska utvecklingen som skedde bland grekerna var dock av teoretiskt art. Kanske berodde detta på en grekisk världssyn som tydligt präglades av Platons uppdelning mellan praktiskt kunnande och teoretiskt vetande där det teoretiska värderades högre än det praktiska (Johansson, 2013, s.60). Platon menade att kunna utföra beräkningar visserligen visade att en person hade talang för att lära sig andra saker men att beräkningar enbart är en förberedelse för den sanna vetenskapen (Heath, 1965, s.13). Detta betydde att det fanns en distinktion mellan vad som ansågs vara finare matematik, den teoretiska, och den matematik som ansågs vara för simpelt folk vilket var de praktiska beräkningarna som hänvisades som göromål för barn och slavar.

Det klassiska verket *Elementa* består av tretton böcker skrivna omkring 300 f.Kr. och är en sammanfattning av det matematiska kunnandet i det dåtida Antikens Grekland. *Elementa* är det enskilda verk som sedan varit mest dominerade inom matematiken fram till 1800-talet och det var först då som det började granskas kritiskt (McLeish, 1991, s.94; Heath, 1965, s.358). Grekerna såg den teoretiska matematiken nästan som något gudomligt, därför blev *Elementa* en gudomlig bok. Pythagoras, som vi vanligtvis känner till på grund av Pythagoras sats, var grundare till en religiös sekt som studerade tal och utförde olika religiösa riter kopplade till matematiken (McLeish, 1991, s.87). *Elementa* innehöll inga beräkningar som kan anses materiella då beräkningar inte var av intresse för den tidens greker. *Elementa* fokuserar istället på bevisföring och teori (Johansson, 2013, s.71). Euklides brukar tillskrivas författarskapet till *Elementa* även om det i arabiska skrifter nämns att en annan grek vid namn Apollonius skulle ha skrivit det mesta och sedan skickat materialet till Euklides. Därefter ska Euklides som känd geometriker granskat materialet och publicerat i sitt namn. Araberna menar att det är så Euklides fick sitt namn kopplat till detta verk (Heath, 1965, s.356). *Elementa* skiljer sig en hel del från ett liknande verk i Kina, *Nio böcker om räknekonsten* där algoritmer är viktiga och beräkningarna förklaras utförligt.

Senare får staden Alexandria i Egypten ta över Atens roll som den grekiska världens centrum och där finns en grekisk matematiker vid namn Diofantos som är verksam och publicerar verket *Arithmetica* omkring 250 e.Kr. Detta verk skiljer sig väsentligt från *Elementa* då det innehåller en mängd beräkningar och lösningar av specifika problem. Verket har notationer för tal och operationer som gör det möjligt att uttrycka tal algebraiskt (Johansson, 2013, s.166; McLeish, 1991, s.98). Diofantos har skrivsätt för negativa termer, han använder sig inte av negativa tal utan kan enbart uttrycka en subtraktion av ett mindre tal från ett större. Även om Diofantos tidigt skriver algebraiska uttryck är hans skrivsätt inte särskilt likt de vi använder oss av idag (Johansson, 2013, s.166).

Parallellt med den grekiska kulturen växer även Romarriket växer fram, en kultur med politiskt och kulturellt centrum i staden Rom. Från cirka 100 f.Kr. blir det en betydande maktfaktor kring Medelhavet. Givetvis påverkas romarna av grekerna men något av grekernas framgångar inom matematik kan vi inte se inspirerat romarna då det i Romarriket inte finns några omskrivna framstående matematiker. Vi vet att grekerna och romarna använde samma räknebräde men i övrigt vet vi lite om romarnas matematik och deras eventuella bidrag till den matematiska utvecklingen (Ifrah 2001a, s.289-308). Detta är något som kan förklaras med att romarnas talsystem inte var tillräckligt välutvecklat för att föra utvecklingen framåt. McLeish menar också att den kristna kyrkan hade dåligt inflytande på romarna och därefter européerna när det gäller vetenskap och forskning (1991, s.149). Tyvärr uteblev många matematiska framsteg i medelhavsområdet under romarnas tid och därefter i Europa vilket också brukar kallas "den mörka medeltiden" där knappast några framsteg gjordes inom vetenskapen (McLeish, 1991, s.100).

Taltecken

I den grekiska världen var det många olika talsystem som användes då varje stad hade sitt eget mått-, vikt- och penningsystem (Ifrah, 2001a, s.275-282). Dock utgick grekerna från ett decimalt talsystem, något som sedan tidigare använts av flera kulturer över hela världen (Heath, 1965, s.26). Ett av de första talsystem som fick spridning utanför den egna staden var det som användes av atenarna på 500- och 400-talet f.Kr. Atenarnas system, det attiska talsystemet, var ett additivt talsystem med tecken för siffrorna 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000 och 50000 och illustreras i figur 8.

Figur 8: Taltecken i det attiska talsystemet.

Tecknet för 1 var ett streck medan därefter tecknen för 5, 10, 100, 1000, 10000 var begynnelsebokstaven för räkneordet, något vi skulle kunna jämföra med att vi skrev siffran 5 med bokstaven F, som i fem. Utformningen av tecknen för 50, 500, 5000 var en kombination begynnelsebokstäver där multiplikationsprincipen användes för att beskriva talen. Exempelvis skrevs symbolen för 50 som en kombination av 5 och 10 och så vidare (Ifrah, 2001a, s.275). Grekernas talsystem utvecklades troligen utifrån de talsystem som kretensare och hettiter använde omkring 1500-1400 f.Kr. och som var helt additiva och decimala talsystem. Grekerna ville dock förenkla sitt talsystem och införde därmed ett särskilt tecken för hjälpbaser, så som 5, 50 och så vidare. Men på grund av dessa hjälpbaser omintetgjordes talsystemets möjligheter till utveckling. Det praktiska, som grekerna ansåg positivt, var att det krävdes färre tecken att skriva tal med hjälpbaser. Därmed begränsade grekerna sig ytterligare många århundraden till att vara beroende av räknebrädet för att kunna göra beräkningar (Ifrah, 2001a, s.282; Johansson, 2013, s.66).

Dock ansågs även det attiska systemet ha för många tecken. Därför utvecklades det alfabetiska talsystemet, ett nytt additivt system som byggde på det grekiska alfabetet och som omkring 200 f.Kr. kom att i de flesta delarna av antikens Grekland ersätta det attiska talsystemet (Heath, 1965, s.35). De nio första bokstäverna i alfabetet stod i tur och ordning för siffrorna ett till nio. Nästkommande grekiska bokstäver stod för 10, 20...90 och de därefter kommande för 100, 200...900 (se figur 9 nedan).

Figur 9: Taltecken i det grekiska alfabetiska talsystemet.

Då talsystemet var additivt fanns inget behov av nollan och med detta talsystem kunde tal upp till 1000 skrivas med maximalt tre tecken. För att i en text markera för läsaren att det var ett tal och inte en bokstav särskiljdes dessa med hjälp av ett streck ovanför den grekiska bokstaven då bokstaven representerade ett tal (Heath, 1965, s.31-37). Tusental, det vill säga talen 1000, 2000...9000, skrevs som ental men med en apostrof bredvid den grekiska bokstaven. Exempelvis förstod läsaren att en apostrof bredvid bokstaven beta betydde 2000 istället för talet 2. Med dessa tecken kunde alltså alla tal upp till 9999 beskrivas och alla dessa tal ingår i det som senare omnämns som den elementära klassen. Apollonios som var verksam omkring 200 f.Kr. utvecklade sedan ett system för att beskriva ännu större tal genom att införa ett tecken för tiotusental (10^4), tiotusental tiotusental ($10^4 \times 10^4 = 10^8$) samt för tiotusental tiotusental tiotusental ($10^4 \times 10^4 \times 10^4 = 10^{12}$). Med hjälp av de första elementära tecknen (för tal upp till 9999) och med tecken för 10^4, 10^8, 10^{12} kunde alla tal upp till 99 990 000 skrivas. Den grekiska vetenskapsmannen och matematikern Arkimedes hade behov av att skriva ännu större tal. Han presenterar i sitt verk *Boken om sand* hur antalet sandkorn skulle kunna rymmas i ett klot med en radie lika stor som från jorden till fixstjärnorna. Istället för att som Apollonios system använda 10^4 tänkte Arkimedes sig att använda 10^8 som en bas. Men trots att detta skrivsätt innebar större möjligheter att skriva stora tal så vann det inte mark hos grekerna som istället fortsatte använda sig av Apollonios system (Ifrah, 2001a, s.332-334; Heath, 1965, s.41). Det alfabetiska talsystemet användes långt in på medeltiden i de östra delarna av medelhavsområdet (Ifrah, 2001a, s.333-335). Man kan givetvis ställa sig frågan varför grekerna inte kom längre i utvecklandet av talsystem och svaret på den frågan är säkerligen komplex, men vi får inte glömma att den grekiska matematiken främst var teoretisk där beräkningar, siffror och tal inte var primärt intressant bland många greker (O'Connor & Robertson, 2011).

Romarnas talsystem som växte fram cirka 500 f.Kr. och till viss del lever kvar ännu idag har inte sitt ursprung i grekernas talsystem. Istället kan det romerska talsystemet härledas långt tillbaka till användningen av karvstockar under förhistorisk tid där jägare och andra samlare på så sätt bokförde antalet djur i sin hjord eller liknande. I Europa är det äldsta fyndet ett vargben som hittades i Tjeckien och dateras till att vara 30 000 år gammalt (Thompson, 1996, s.16). Dessa förhistoriska personer utvecklade ett sätt att markera det femte och tionde strecket för att systematisera och på så vis utveckla en form av additivt talsystem (Ifrah, 2001a, s.298). De tecken som vi idag känner till som romerska ser ut enligt figur 10.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Figur 10: Taltecken i det romerska talsystemet.

Talsystemet var till en början helt additivt. Men bland vissa lärda romare användes också en form av subtraktionsprincip där talet fyra kunde skrivas som IV istället för IIII, därmed blir tecknens ordning avgörande och något som måste tas hänsyn till vilket annars inte är fallet i additiva system (Ifrah, 2001a, s.288). Som skrivsätt kunde detta underlätta samtidigt som det dock begränsade möjligheterna till att använda talsystemet för att göra beräkningar. Därmed var romarna beroende av sitt räknebord. Senare upptäckte dock romarna hur deras tecken (upp till 1000) begränsade dem att skriva stora tal och de införde en form av multiplikationsprincip. Tal med ett streck över sig skulle multipliceras med 1000. För att skapa ännu större tal infördes fler konventioner men problemet var att det blev för många konventioner vilka tillslut skapade en hel del förvirring. Ifrah (2001a, s.303) menar att systemet tillslut blev så komplicerat och otillfredsställande att det inte längre dög för räkneoperationer. Trots detta var romarnas talsystem det som kom att råda och dominera i Europa fram till 1500-talet (Ifrah, 2001a, s.310).

5.5 Kineserna

De äldsta fynden av kinesiska skrift- och taltecken är från Shangdynastin cirka 1500-1100 f.Kr. I slutet av 1800-talet gjordes arkeologiska fynd i Xiao dun, den by som var huvudorten för de sista kejsarna i Shangdynastin. Det som då hittades var sköldpaddeskal och ben som den tidens spåmän ristat skrifter på. Dessa ben och skal hettades upp för att spåmännen sedan skulle kunna spå i de krackeleringar som blev. Bland dessa har det bland annat hittats tecken för antalet personer som stupat i ett krig (Ifrah, 2001a, s.393; Thompson, 1996, s.76; O'Connor & Robertson, 2011)

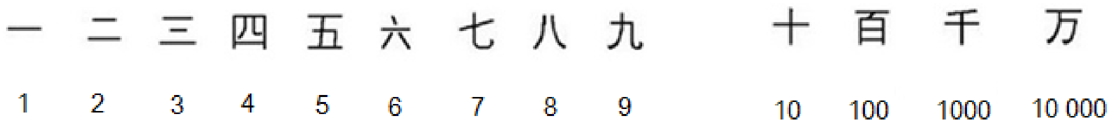
Sedan Shangdynastin har matematiken i Kina utvecklats utan nämnbar påverkan från andra civilisationer då landet ligger tämligen isolerat med hav i syd och öst och bergsområden i de övriga väderstrecken. Detta trots att det i Kinas historia finns folkgrupper, så som mongolerna, vilka kommit från bergsområdena och invaderat landet. Men istället för att påtvinga kineserna sin kultur har dessa folkgrupper anammat och inlemmats i Kinas. På det sättet har det kinesiska språket, tankesättet och även matematiken levt vidare och fortsatt att självständigt utvecklas (O'Connor & Robertson, 2011). Det var först på 700-talet som utbytet med andra civilisationer startade på allvar. Det var under denna tidsperiod som den så kallade Sidenvägen, ett nätverk av handelsvägar som sträckte sig från Europa i väst till Kina i öst, hade sin guldålder.

Nio böcker om räknekonsten är ett mycket känt kinesiskt matematiskt verk med okänd författare som innehåller 246 matematiska problem, svar på dessa och hur uppgifterna löses. Den äldsta kopian som hittats är från cirka 200 e.Kr. men verket sammanfattar den samlade matematiska kunskapen i Kina från 900-100 f.Kr. Detta klassiska verk har haft liknande ställning i det kinesiska samhället som grekernas *Elementa* och var en naturlig del av utbildningen av det kinesiska rikets tjänstemän. En viktig skiljelinje mellan *Elementa* och *Nio böcker om räknekonsten* är att den senare fokuserar på beräkningsteknik och algoritmer till skillnad från den första som fokuserar på bevisföring (Johansson, 2013, s.175-176).

McLeish (1991, s.62) menar att en av de stora anledningarna till att matematiken i Kina utvecklades längre än den gjorde under samma tidsperiod i västerlandet är att matematik i Kina ansågs vara en viktig syssla vilken borde utföras av rikets mest begåvade. Detta kan ställas i kontrast till västerlandet, exempelvis bland egyptier och greker där praktisk matematik så som beräkningar ansågs vara en sysselsättning för slavar. Kineserna använde matematiken för att lösa praktiska problem och det var av högsta vikt att Kinas kejsare var omgiven av personer som kunde utföra korrekta beräkningar för att hans rike skulle blomstra.

Taltecken

Redan 1450 f.Kr. växer det klassiska kinesiska talsystemet fram. Det är ett talsystem bestående av tretton tecken. Där finns tecken för 1-9 samt 10, 100, 1000, 10000, se figur 11 nedan. Dessa tecken används fortfarande idag och vi kan anta att det varit ett stabilt och framgångsrikt system för matematiken i Kina (Ifrah, 2001a, s.396).



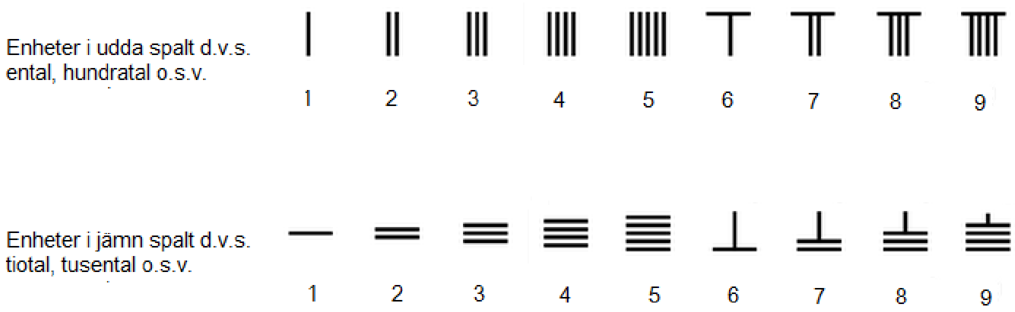
Figur 11: Taltecken i det klassiska kinesiska talsystemet.

Detta är ett talsystem av hybridtyp där blandade tal kan framställas som en kombination av addition och multiplikation (Ifrah, 2001a, s.395). Kina använde sig av ett decimalt system alltså med talet tio som bas och likt andra talsystem av hybridtyp finns inget behov av ett tecken för den tomma mängden, nollan. Parallellt med dessa taltecken använde kineserna också tecken som var lite krångligare att skriva. Detta var ett sätt att försvåra eventuell förfalskning. Skrivsättet användes främst av bankirer i skrifter som var offentliga handlingar så som köpe- och säljebrev, checkar och kvitton (Ifrah, 2001a, s.392). Under tiden det klassiska systemet användes började vissa kinesiska matematiker utesluta tecknen för 10, 100, 1000 och 10 000 och på det sättet togs steg närmre ett positionssystem. Detta förde dock med sig vissa problem då exempelvis talet 606 skrevs ut på samma sätt som 66 eftersom det inte förrän långt senare fanns ett tecken för nollan (Ifrah, 2001a, s.474).

Från Handynastin 200 f.Kr. - 200 e.Kr. har man hittat de första fynden av räknestavar vilka kineserna började använda tillsammans med räknebräden för att utföra beräkningar. I samband med detta utvecklades nya beteckningar för tal, det som kallas kinesernas vetenskapliga talsystem (Ifrah, 2001a, s.517). Räknebrädena användes för att utföra beräkningar och bestod av rutor i vilka kineserna lade räknestavar gjorda av bambu. Ett tal representerades av räknestavar utlagda på räknebrädet där värdet för dem var beroende av vilken ruta de lades i, alltså en form av positionssystem. Kinesernas räknebräde byggde på ett decimalt positionssystem där värdet för rutan längst till höger var utlagda räknestavar multiplicerat med 10^0, värdet för rutan näst längst till höger var antalet räknestavar multiplicerat med 10^1 och så vidare. Talet ett representerades med en stav och varje tal upp till fem representerades av lika många stavar som talet självt. Taltecknen var på så vis ideografiska bilder då en räknestav motsvarade talet ett, två räknestavar talet två och så vidare upp till talet sex där fem stavar ersattes med en stav på tvärs, se figur 12 nedan (Ifrah, 2001a, s.407,414).

Figur 12: Taltecken i kinesernas vetenskapliga system.

Räknebrädet användes till att börja med enbart vid uträkningarna men allt eftersom började kineserna även flytta ribborna från räknebordet och använda dem i matematiska texter istället för de klassiska tecknen för tal. Detta förde med sig en del problem då II kunde tolkas som talet två eller elva. För att den förväxlingen inte skulle göras infördes en konvention att varannan position skulle ha alternerande riktningar på ribborna, se figur 13.



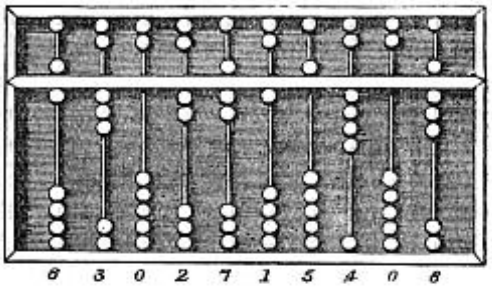
Figur 13: Konvention införd för att förhindra förväxling.

Talet ett representerades av en lodrät ribba i första rutan medan 10 representerades av en vågrät ribba i andra rutan. På detta sätt kunde talet utläsas korrekt även om stickorna lades utanför brädan. Dock vet vi inte om en vågrät ribba representerar talet tio, tusen eller hundratusen, något som Mei Wen Ding påpekar i sitt matematiska problem från 1600-talet (Ifrah, 2001a, s.404). Eftersom ribborna får olika värden beroende på i vilken ruta på räknebordet de ligger är kinesernas vetenskapliga talsystem ett nästintill helt utvecklat positionssystem. Så länge räknebrädet användes fanns inte något behov av en nolla då den tomma rutan markerade en tom mängd. Problemet uppstod först då ribborna flyttades från räknebrädet. Det var när svaret nedtecknas utanför brädet som nollan kom att behövas. Det är först på 700-talet under Tangdynastin som tecknet för den tomma mängden, nollan kommer till Kina via Sidenvägen. Det var de indiska buddhistiska missionärerna som tog med nollan och detta under en tidsperiod när Kina blomstrade både vetenskapligt och teknologiskt (Ifrah, 2001b, s.86; Thomson, 1996, s.76). I ett kinesiskt astronomiskt verk som publiceras någon gång mellan 718 och 729 e.Kr. skriver författaren “Varje gång ett tomrum uppträder i en spalt placerar man en punkt” (Ifrah, 2001b, s.86). Ett matematiskt verk publicerat 1713 klargör att tecken för 10, 100, 1000 och 10 000 för alltid är borta och hybridsystemet är förkastat för att istället fullt ut ersättas med positionssystemet.

Även om kineserna under lång tid inte hade något tecken för noll kunde de utan problem räkna med det som de kallar “utan extra”, en tom plats på räknebordet. Men kineserna använde sig också av negativa tal och det är i *Nio böcker om räknekonsten* vi möter räkneregler för hur man räknar med “utan extra” och med negativa tal. Liu Hui som skrev en kommentar till verket 263 e.Kr. har förklarat hur negativa tal representeras av röda stavar på räknebrädet till skillnad från positiva som representerades av svarta stavar (Johansson, 2013, s.205,209). Nästa gång efter detta som vi finner några liknande räkneregler för negativa tal och nollan är hos Diofantos 200 e.Kr. (Johansson, 2013, s.205-206).

Räknebrädet är en viktig del av matematiken under lång tid i Kina och förekommer länge i samma form. Under 1300-talet ersätts den dock successivt med kulramen som finns kvar och används bland gemene man även i dagens Kina. Fördelen med detta nya hjälpmedel för beräkningar är att den inte är så skrymmande då beräkningar enbart görs på en och samma rad, i övrigt sker beräkningarna på samma sätt som på räknebrädet (O'Connor & Robertson, 2011). Den var enklare att hantera och beräkningarna gick snabbare att göra, alltså mer praktisk och för vardagsbehovet (Johansson, 2013, s.170).

Kulramen har levt kvar länge som ett viktigt hjälpmedel för försäljare, bankirer och andra i behov av att räkna både i Kina men också Japan och Sovjet. Ifrah (2013, s.419) berättar om en vän som vid valutaväxling såg tjänstemannen först beräkna med en miniräknare för att sedan kontrollera svaret med sin kulram. Den kinesiska kulramen bestod som standard av femton metallstänger vilket gjorde att den hade kapacitet att räkna tal upp till storleksordningen 10^{15}. Kulramen bestod av kulor fastsatta på metallstången vilket gjorde det smidigare att ha med än ett räknebräde med lösa ribbor. Precis som talet sex på ett räknebräde representerades av en ribba på tvärs var varje metallstång avdelad i två delar där en kula på den övre delen (se figur 14) motsvaras av talet fem. Precis som man på räknebrädet uttrycker talet 6 som 5+1 görs det även på samma sätt på kulramen.



Figur 14: Kinesisk kulram (Abakus, 2013).

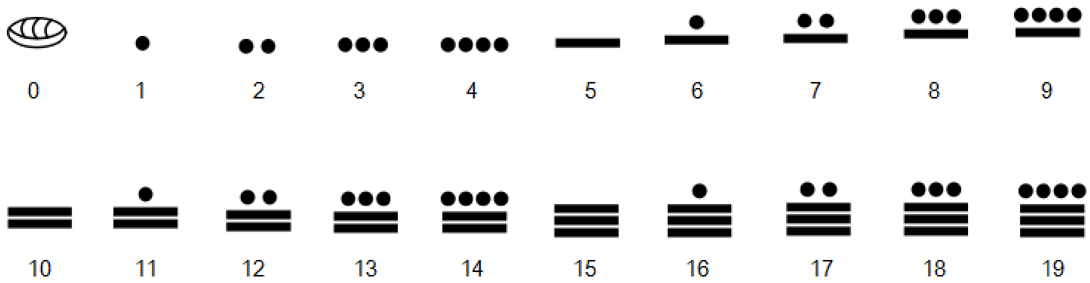
5.6 Mayakulturen

Mayakulturen var en av de kulturer vilken växte fram och blomstrade i Amerika under förcolumbiansk tid, det vill säga innan européerna anlände till den nya världen (Ifrah, 2001a, s.431). Mayakulturen växte fram omkring 400 f.Kr. och hade sin storhetstid mellan 200-900 e.Kr. Övergivna och övervuxna städer i djungeln med enorma pyramider och andra byggnader har vittnat för eftervärlden om mayakulturens kunskap inom arkitektur, byggteknik och konst. Utöver detta har forskare också funnit att mayakulturen hade stor astronomisk kunskap och utan påverkan av den gamla världen kunnat utveckla matematiken långt (Ifrah, 2001a, s.429; McLeish, 1991, s.137). Tack vare att mayakulturen utvecklade ett skriftspråk vilket bestod av hieroglyfer, likt egyptiernas ideografiska skriftspråk, blev det möjligt för dem att utveckla ett talsystem. Detta kan ställas i kontrast till deras grannkultur inkakulturen som utifrån vad vi vet idag aldrig utvecklade något skriftspråk och därmed inte heller något talsystem (Ifrah, 2001a, s.446).

Européernas iver att "kristna" den inhemska befolkningen i Amerika när de kom till den nya världen resulterade i att munken Diego de Landa 1541 brände i stort sett alla mayakulturens skrifter. Det finns enbart tre texter som man idag känner till som inte brändes. Däribland en text vilken kallas *Codex Dresdensis* och som främst är astronomisk och gett oss många ledtrådar till mayakulturens matematik. Några år efter bokbålet insåg de Landa vilket illdåd bokbålet var och sonade detta genom att nedteckna en krönika på spanska om mayafolket, deras språk och kultur. Det verket har gett eftervärlden stor kunskap om mayakulturen. I krönikan nedtecknade han bland annat några hieroglyfer som hjälpt eftervärlden att tolka de tre texterna som klarade sig från bokbålet men även andra fakta i hans krönika har blivit en källa till kunskap om mayakulturen för oss idag (McLeish, 1991, s.137; Ifrah, 2001a, s.443). Utifrån det vi idag vet, vilket är litet i jämförelse med många andra historiska kulturer och civilisationer, verkar matematiken i mayakulturen nästan uteslutande använts för astronomiska beräkningar vilket i sin tur tjänade ett religiöst syfte. Astronomin var därmed en syssla förbehållen de lärde, det vill säga prästerna. Genom astronomi tolkades gudarnas sinnesstämning och beroende på denna kunde kommande tidsperiod antingen fyllas av hopp och välgång eller av elände och förtvivlan. Prästernas tolkningsföreträde gav alltså dem möjlighet till stort maktutövande på övriga folket (Ifrah, 2001a, s.451; McLeish, 1991, s.140).

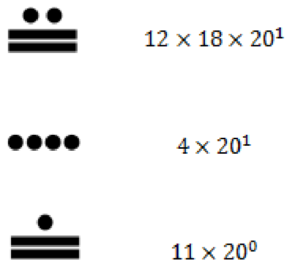
Taltecken

Mayafolkets präster och lärde byggde upp ett positionssystem med talbas tjugo. Till skillnad från det decimala systemet som utgår från människans tio fingrar utgick mayafolket från totalt tjugo fingrar och tår som människan har (Ifrah, 2001a, s.439). Talen 1-19 skrivs additivt med hjälp av punkter, se figur 15, där varje punkt har värdet ett och varje vågrätt streck värdet fem.



Figur 15: Taltecken i mayafolkets talsystem.

Mayakulturen har också ett tecken för tom plats, en snäcka som fick en viktig betydelse i det positionssystem som mayakulturens lärde utvecklade (Ifrah, 2001a, s.449). Mayafolkets talsystem är ett positionssystem där sammansatta tal skrivs lodrätt där den översta siffran i raden är av högsta ordningen. Se exempel i figur 16.



Figur 16: Talet 4411 i mayafolkets talsystem.

I ett strikt vigesimalt positionssystem tjänar talet tjugo som bas och varje position representeras av en tjugopotens. Nollte positionens värde motsvaras av talet multiplicerat med 20^0, därefter motsvaras första positionens värde av talet multiplicerat med 20^1 och talet i andra positionen multiplicerat med 20^2. Men i mayakulturen ska talet i den andra positionen multipliceras med 18×20 istället för 20^2 (Ifrah, 2001a, s.447; O'Connor & Robertson, 2011). Detta är något som vid första anblick kan verka märkligt då aritmetiska beräkningar i detta system blir svåra att genomföra på grund av systemets inkonsekvens. Vi skulle finna systemet mindre praktiskt och inte så användbart men bland mayakulturens lärde var detta något mycket användbart då $18 \times 20 = 360$ syftar till antalet dagar under ett mayanskt solkalenderår. I talsystemet står den nedersta positionen för antalet dagar som gått, andra för antalet månader och tredje för antalet år (McLeish, 1991, s.142). Talet i figur 16 betyder alltså tolv solår, fyra månader och elva dagar. Vi skulle kunna jämföra detta med vår digitala klocka som har lite speciella regler, allt för att det ska passa klockan och i det sammanhanget är det otroligt praktiskt även om det inte är lika användbart i andra sammanhang.

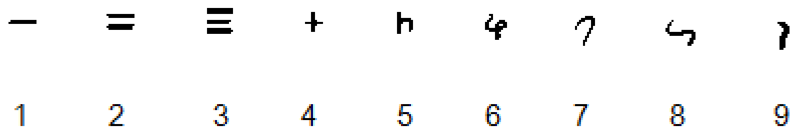
5.7 Indierna

Vedaskriften är den äldsta skrift om hinduism som hittats (O'Connor & Robertson, 2011) och den är daterad några århundraden innan vår tideräknings början. Med denna skrift startar vi beskrivningen över indiernas matematik. Den vediska tiden sträcker sig från 1400 - 400 f.Kr. och det är under denna tid hinduismen växer fram och växer sig stark. Till *Vedaskriften* finns det bilagor och en av dem är den så kallade *Sulbasutran*. I denna finns olika matematiska uträkningar, till exempel beskrivs hur storleken på altaret skulle vara och hur det skulle konstrueras för att göra gudarna nöjda. Bilagan innehåller även flera exempel på så kallade pythagoreiska tripplar (till exempel 3,4,5) vilket visat att indierna tidigt hade kunskaper inom geometri (McLeish, 1991, s.126). I och med dessa regler kring religiösa konstruktioner var de matematiska tillämpningarna viktiga för indierna. Begrepp som evighet och oändlighet fann de mycket spännande och de intresserade sig tidigt för stora tal. Indierna skapade begreppet "matematisk oändlighet" (Ifrah, 2001b, s.100) och de hade också namn för stora tiopotenser. Till exempel utgjorde 10^7 en *koti* och 10^{119} utgjorde en *paduma* (Ifrah, 2001b, s.102). Ifrah (2001b, s.105) menar att det troligen är så att indierna började med dessa spekulationer kring stora tal runt år 200 e.Kr.

Vedaskriften är en viktig skrift om indiernas matematiska historia. Dock finns det inte särskilt mycket material som berättar om den matematiska utvecklingen i Indien och det material som finns är ofta svårt att datera. Indierna skrev på bark och i och med det har mycket också försvunnit (Johansson, 2013, s.226). Den äldsta kända skriften ifrån Indien är från 2500-1500 f.Kr. men har ej kunnat tydas (Ifrah, 2001b, s.36). Först från ca 250 f.Kr. finns skriftspråk som nu kan tydas. Ett av de skriftspråk som funnits är brahmiskriften, men varifrån det skriftspråket har kommit är idag okänt. Indierna skrev från vänster till höger och det var anpassat för ljuden i sanskrit som är brahminernas språk. Brahminerna var de härskande prästerna efter 1500 f.Kr. (Thompson, 1996, s.64). Detta språk behärskade bara brahminerna och de vakade över det så att det inte skulle komma andra till del. Kastsystemet hade kommit till Indien och kunskapen skulle inte spridas till de som befann sig i lägre kaster.

Taltecken

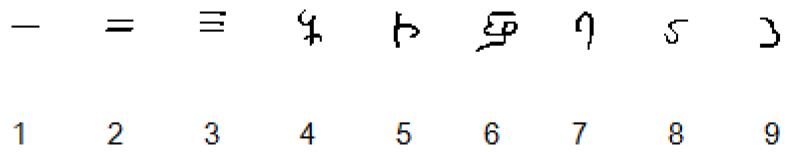
Omkring år 200 f.Kr. fanns det i Indien siffror som byggde på additionsprincipen i ett decimalt system. Symboler fanns även för alla tiotal, hundratal, tusental och tiotusental så det högsta talet det fanns ett tecken för var 90 000 (Ifrah, 2001b, s.68,72). Detta system var inte anpassat för stora tal, det var ett additivt system men det var till och med svårt att addera tal i detta system (Ifrah, 2001b, s.72). Tecknen kallades för brahmisiffrorna och under första århundradet såg de ut som i figur 17 nedan.



Figur 17: Taltecken i brahmisystemet.

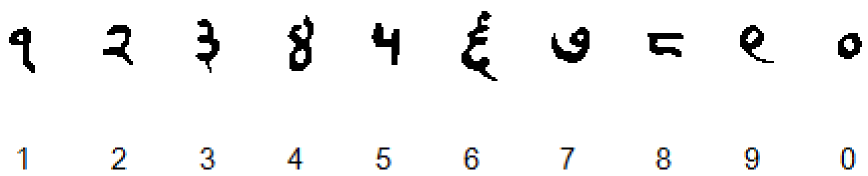
Ifrån brahmisiffrorna kom nya grenar av taltecken och de kan idag delas in i tre tydliga grupper av skriftsystem som fortfarande används; de nord- och centralindiska skriftsystemen, de sydliga skriftsystemen och de orientaliska skriftsystemen (Ifrah, 2001b, s.39).

I norra och centrala Indien utvecklades mellan 300-500 e.Kr. brahmisiffrorna och de nya tecknen kom att kallas guptasiffrorna. (Ifrah, 2001b, s.42). Förutom att taltecknen har förändrats har även fler taltecken lagts till för att kunna skriva större tal och här kan man föreställa sig tal så stora som 10^{421} (Ifrah, 2001b, s.99). Guptasiffrorna illustreras i figur 18:



Figur 18: Taltecken i guptasystemet.

Även guptasiffrorna utvecklas vidare med flera olika grenar och en gren är nagarisiffrorna som utvecklades 600-1000 e.Kr. (Ifrah, 2001b, s.98). Det är idag de siffrorna som är de vanligast förekommande i Indien (Ifrah, s. 188). Mellan gupta och nagari fortsätter taltecknen utvecklas teckenmässigt men ett tecken läggs även till. Det tillkommer en symbol för tom plats och det är även när nagarisiffrorna används som positionssystemet utvecklas (Ifrah, 2001b, s.43). Figur 19 visar hur nagarisiffrorna såg ut under 1000-talet och vissa av dessa siffror kan kännas igen i de siffror som används idag.



Figur 19: Taltecken i nagarisystemet.

Brahmisystemet var som tidigare nämnts ett additivt system men allteftersom beräkningar blev svårare och nya sätt att räkna kom började indierna använda sig av ett positionssystem. Det decimala positionssystemet användes i Indien under slutet av 500-talet vilket vi känner till genom ett donationsbrev som har hittats där årtalet 594 var uttryckt i ett decimalt positionssystem (Ifrah, 2001b, s.75). Men Ifrah (2001b, s.95-96) vill även mena att det fanns med långt tidigare än så då han hänvisar till en avhandling från år 458 e.Kr. om den jainitiska kosmologin. Där användes nollan och även det decimala positionssystemet och utifrån detta menar Ifrah att vårt moderna talsystem måste tillkommit långt tidigare.

Indierna använde nollan både som en symbol för den tomma mängden och för tom plats och redan i början av vår tideräkning samlade indierna de filosofiska begreppen för noll under rubriken "tomheten". I och med positionssystemets utveckling hamnade begreppet noll på 400-talet även under en rubrik som hade med tomrummet mellan enheter att göra. Detta gjorde att begreppet innan 600-talet var en fullvärdig nolla och Ifrah (2001b, s.194) menar att dessa vidare tankar kring nollan möjliggjorde för algebrans uppsving. Brahmagupta skrev år 628 e.Kr. en text om nollan efter att först ha definierat den som ett tal subtraherat med sig självt. Ifrah (2001b, s.121) menar att den moderna algebran i denna text föddes ty Brahmagupta generaliserade matematiken. Översätts skuld och tillgång till negativa och positiva tal framkommer hur indierna tänkte kring och hanterade det.

> En skuld minus noll är en skuld
> En tillgång minus noll är en tillgång
> Noll minus noll är ingenting
> En skuld dragen från noll är en tillgång medan en tillgång dragen från noll är en skuld
> Produkten av noll och en skuld eller en tillgång är noll
> Produkten av noll med sig själv är noll
> Produkten eller kvoten av två tillgångar är en tillgång
> Produkten eller kvoten av två skulder är en tillgång
> Produkten eller kvoten av en skuld och en tillgång är en skuld
> Produkten eller kvoten av en tillgång och en skuld är en skuld (Ifrah, 2001b, s.121)

Indierna var poetiska och använde även flera olika ord på sanskrit för att uttrycka samma tal. Exempelvis kunde talet åtta uttryckas med *gaja* som står för de åtta elefanterna, *naga* som står för orm och *murti* som står för formerna (Ifrah, 2001b, s.88). Dessa växte fram parallellt med siffrorna under de första århundradena (Johansson, 2013, s.229) och Ifrah (2001b, s.87-91) ger detta exemplet:

> Månen apsider i en *yuga*:
> elden. tomrum. ryttarna. *Vasu*. ormen. havet,
> och i dess avtagande nod:
> *Vasu*. elden. de första människorna. ryttarna. elden. tvillingarna.

Elden står för tre, tomrum står för noll, de första människorna för två och även de andra orden står för en siffra som är kopplad till ordet. Det är alltså symbolord (Ifrah, 2001b, s.87) och det gör att texten ovan kan översättas med (Ifrah, 2001b, s.89):

> Antalet varv som månen apsider gör i en yuga är 488203,
> och antalet varv i dess avtagande nod är 232238.

Ifrån “elden. tomrum. ryttarna. *Vasu*. ormen. havet” får vi alltså fram siffrorna $3\ 0\ 2\ 8\ 8\ 4$ vilket för oss kan kännas bakvänt. Men siffrorna skrevs i ordningen med stigande tiopotenser från vänster till höger och gav alltså $3 \times 10^0 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^2 + 8 \times 10^3 + 8 \times 10^4 + 4 \times 10^5 = 488203$. Här är det positionssystemet som används och “metoden med talsymboler på sanskrit var spridd i Indokina och Indonesien redan från slutet av 500-talet e.Kr.” (Ifrah, 2001b, s.91). Med detta menas att indierna troligen använde sig av detta system långt innan det.

Det är ifrån de olika orden för noll på sanskrit som tecknen för noll kommit ifrån (Ifrah, 2001b, s.190). Ordet *sunya* står för noll och betyder tomrum och ordet *bindu* som också står för noll betyder punkt. Utifrån *bindu* blir tecknet för noll en punkt och utifrån *sunya* en ring utan innehåll. Det fanns alltså två olika tecken för noll och runt om i Indien varierade även tecknen för siffrorna. Ifrån brahmisiffrorna bildades många olika grenar som gav nya tecken till siffrorna (Ifrah, 2001b, s.48). Siffrornas tecken var skilda ifrån varandra på olika platser och det gjorde orden för siffrorna på sanskrit än mer användbara eftersom siffersymbolerna inte var enhetliga. Än idag är det inte ett enhetligt siffersystem i Indien ty de olika grenarna som bildats har levt vidare. Till exempel används en punkt för siffran noll fortfarande i det muslimska Indien (Ifrah, 2001b, s.28-32,224). Sindhisiffrorna är en annan utveckling flera steg efter brahmisiffrorna och används i en region vid floden Sindh (Ifrah, 2001b, s.29,225). De siffrorna används i ett positionssystem där nollan tecknas som en ring, men de andra siffrorna ser annorlunda ut än våra men det finns ändå vissa likheter.

Denna del om indierna avslutas med ett aritmetiskt problem som Ifrah (2001b, s.112) ger exempel på. Ett problem skrivet på vers vilket var mycket vanligt bland indierna. Såhär lyder problemet:

> Ett halsband brast under de älskandes lek.
> En rad av pärlor lossnade från det.
> Var sjätte pärla föll till golvet,
> var femte stannade på deras läger.
> Var tredje räddades av flickan,
> var tionde av hennes älskade.
> På remmen fanns sex pärlor kvar.
> Säg mig hur många pärlor det fanns på de lyckligas halsband!

5.8 Araberna

De arabiska nomaderna levde till en början på handel med bland annat kryddor och parfymer (Ifrah, 2001b, s.261-263,273). Skriftspråk och räkning var då inte utvecklat hos dem utan det började utvecklas ungefär 100 år efter profeten Muhammeds död 632 e.Kr. Det var då araberna började erövra stora områden och genom dessa erövringar fick de kontakt med andra nationer och kulturer och med det nya kunskaper som de tog till sig och använde sig av. Araberna ville vara med och sprida och göra kunskapen från olika kulturer tillgänglig och startade ett gediget översättningsarbete där matematiska skrifter från den babyloniska, egyptiska, kinesiska och grekiska kulturen översattes till arabiska (McLeish, 1991, s.166). Flera universitet upprättades i den islamiska världen och välfyllda bibliotek fanns det nu gott om (Ifrah, 2001b, s.261-263,273).

Araberna var öppna för kunskaper från de andra kulturerna, till skillnad från de kristna i Europa, och mottog till exempel hjälp av brahminer från Indien när de ville tillägna sig indiernas vetenskap (McLeish, 1991, s.149). Ifrah (2001b, s.262) nämner att “de muslimska erövrarna hade törstat efter den kunskap som fanns hos de underkuvade folken, och hade i sina religiösa texter en regelrätt maning till studier och forskning.” I och med att araberna tog till sig kunskaper från olika kulturer och olika vetenskaper finns det idag en världsomspännande vetenskap, tidigare fanns det en grekisk vetenskap, en persisk vetenskap och så vidare. Men nu samlades allt ihop till en helhetsbild.

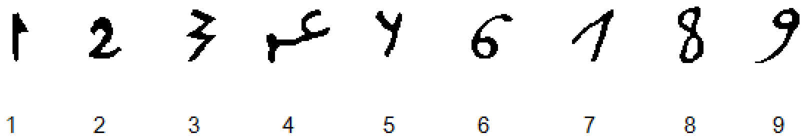
> ...så blandades i matematiken grekiska metoder med indiska, ibland till och med i kombination med babyloniska procedurer, och senare procedurer av kinesiskt ursprung. Detta visar att araberna, med det utpräglat syntetiserande tänkande som kännetecknade dem, kunde förena den stränga systematiken hos det antika Greklands matematiker och historiker med den indiska vetenskapens praktiska karaktär. Detta var förklaringen till de stora framsteg de gjorde inom aritmetik, algebra, trigonometri och astronomi (Ifrah, 2001b, s.268).

Taltecken

Araberna tog till sig indiernas siffror och det kan ha ägt rum så tidigt som 700 e.Kr. (Ifrah, 2001b, s.282-283). Araberna tog till sig indiernas astronomi och med det lärde de sig indiernas taltecken och räknemetoder. Men det var inte alla som på en gång uppskattade de indiska siffrorna utan vissa av araberna var konservativa och stannade kvar vid att räkna som deras fäder gjort. De fortsatte använda sig av fädernas räknemetoder, fingerräkning och använda sig av räkneord de hade sedan tidigare (Ifrah, 2001b, s.297).

Araberna kopierade till en början indiernas nio siffror och de liknade länge siffrorna i nagaristilen, men allt eftersom förändrades siffrorna för att mer passa det arabiska skrivsättet (Ifrah, 2001b, s.286). Även nollan tog araberna till sig ifrån indierna och den återfinns både som en punkt och som en cirkel i olika delar av arabernas områden (Ifrah, 2001b, s.191-192). Araberna tog dock inte till sig de indiska siffrorna helt på en gång utan de användes mestadels för att underlätta räkningen (Ifrah, 2001b, s.300). Allmänheten tog till sig siffrorna snabbare än ämbetsmännen som gärna räknade med de nio första bokstäverna i det arabiska alfabetet. Länge använde araberna flera olika tecken och symboler för tal, man hittar det så sent som på 1500-talet (Ifrah, 2001b, s.300-301).

Ghubarsiffrorna är en grupp taltecken som araberna i väst använde sig av (Ifrah, 2001b, s.289) och de är ursprunget till våra “arabiska siffror” som senare kommer till Europa. Även ghubarsiffrorna kommer ifrån Indien och de är en utveckling av nagarisiffrorna (Ifrah, 2001b, s.15). Troligen kom de till araberna i väst via kringresande köpmän som inte kunde undgå att lära sig hur det räknades på de platser de besökte (Ifrah, 2001b, s.293). Ghubarsiffrorna förändrades och här kan de mer och mer kännas igen med de siffror vi använder oss av idag. I figur 20 illustreras hur taltecknen såg ut när al-Banna al-Marrakushi skrev dem, omkring år 1300 e.Kr. (O'Connor & Robertson, 2011).



Figur 20: Taltecken i ghubarsystemet.

En viktig arabisk matematiker är Al-Khwarizmi som levde i början av 800-talet (O'Connor & Robertson, 2011). Han skrev en bok om hinduiska siffror som är av stor betydelse för de indiska siffrornas spridning till västerlandet (Thompson, 1996, s.312). Termen al-Jabr finns i bokens titel och det är därifrån vårt uttryck algebra kommer (McLeish, 1991, s.157). I boken ger Al-Khwarizmi en grundläggande introduktion till första och andragradsekvationer och i den skrivs talen med ord, inte så som vi är vana. Till exempel skriver författaren “kvadrater lika med rötter” (Thompson, 1996, s.312) och det skulle vi idag kunna skriva som exempelvis $x^2 = 2x$ (ibid.). Al-Khwarizmi räknar dock inte med negativa tal då det var obekant för honom (Thompson, 1996, s.313).

Innan den boken skrev Al-Khwarizmi en annan bok som behandlade algoritmer, till exempel addition, subtraktion och konsten att beräkna roten ur ett tal. Dessa algoritmer tillsammans med siffrorna från indierna gjorde räkningen så enkel att abakusen inte längre var nödvändig då det nu kunde arbetas direkt med talen (McLeish, 1991, s.151). Boken har i arabiska bibliotekskataloger kallats *Boken om addition och subtraktion med indiska metoder* och är en sammanfattning av det Al-Khwarizmi fått veta från olika håll, men främst ifrån indierna (McLeish, 1991, s.153). I boken talar han även om bråkräkning. Han talar om sexagesimala bråk, multiplikation med stambråk och det är samma system som vi använder idag (McLeish, 1991, s.156).

Till Europa

Araberna har bidragit med mycket till matematikens utveckling och vi ska avsluta denna del med att kort berätta hur arabernas matematik togs vidare till Europa. Där den sedan fortsatte utvecklas till den matematik vi har idag. Européerna blev under 1100-talet mycket intresserade av arabernas vetenskaper (Ifrah, 2001b, s.351). Precis som araberna hade översatt texter till arabiska började kristna nu översätta texter som fanns på arabiska till latin och de räknemetoder som nu fanns hos araberna ville fler och fler lära sig mer om. En man vid namn Leonardo från Pisa, känd som Fibonacci, besökte Främre Orienten och det muslimska Afrika och "där träffade han arabiska räknemästare som förklarade sitt talsystem och sina räknemetoder, algebrans regler och geometrins grundprinciper" för honom (Ifrah, 2001b, s.351). Fibonacci skrev sedan en avhandling om det han lärt sig som var av stor betydelse för ”de ’arabiska’ siffrornas spridning och algebrans utveckling i Västeuropa”. Avhandlingen hade namnet *Liber abacci* och den var en introduktion till de hinduiska siffrorna och hur det räknades med dem (Thompson, 1996, s.336).

Det var inte enkelt för européerna att ta till sig de arabiska siffrorna flera personer försökte innan Fibonacci lyckades (Thompson, 1996, s.336). Det namn Fibonacci gav hans avhandling kan ses som en del av detta då det översatt heter *Fri abacus.* Det indiska sättet att räkna var så enkelt att även vanliga enkla människor kunde börja lära sig att räkna. En man som såg de stora fördelarna sägs även ha sagt att matematiken blev så enkel att till och med kvinnor kunde börja räkna (Ifrah, 2001b, s.353). Många män kände att deras makt riskerade att försvinna och däri låg problemet. Trots det vann de arabiska siffrorna mark även om det tog lång tid innan de helt accepterades.

6. Del II - Jämförelser

I detta avsnitt av uppsatsen görs jämförelser av de olika talsystemen utifrån tre inriktningar. Den första inriktningen är övergripande då vi gör en jämförelse mellan additiva system, system av hybridtyp och positionssystem. Dessutom behandlar vi frågan kring nollans betydelse samt vad hjälpbaser eventuellt kan bidra med.

Inom den andra inriktningen lyfter vi hur olika kulturer utfört beräkningsprocesser, så som multiplikation och division. Olika system för beräkning har utvecklats oberoende av varandra vilket leder till skillnader i hur beräkning har gått till genom tiderna och några av dessa tar vi upp och jämför. Vidare behandlar vi användningen av bråk, samt jämför kinesernas sätt att beräkna kvadratroten ur ett tal med tillvägagångssättet vi idag skulle använda oss av, om vi inte har något digitalt hjälpmedel tillgängligt.

Vi kan än idag finna spår av äldre talsystem i vår vardag och detta tar vi upp i vår tredje inriktning och funderar kring hur de olika kulturernas talsystem är tillämpbara idag. Här kommer vi också diskutera fördelar och nackdelar hos skilda talbaser.

6.1 Olika typer av talsystem

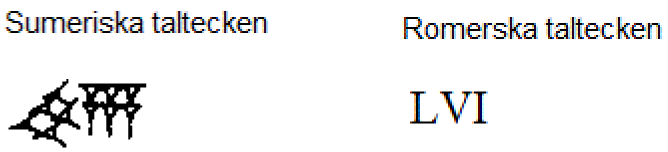
För att få en överblick av de talsystem vilka vi presenterat tidigare i denna uppsats följer nedan en tabell som kategoriserar talsystemen.

Additiva system	karvstocksystemet sumeriska talsystemet tidiga babyloniska talsystemet egyptiska systemet brahmisystemet guptasystemet attiska talsystemet grekiska alfabetiska talsystemet romerska talsystemet
System av hybridtyp	klassiska kinesiska talsystemet
Positionssystem	senare babyloniska systemet kinesernas vetenskapliga talsystem nagarisystemet ghubarsystemet mayafolkets talsystem

Tabell 1: Översikt av olika sorters talsystem.

6.1.1 Det additiva systemets enkelhet

Någon gång i människans historia uppkom ett behov av att nedteckna tal för att hjälpa människans begränsade minne. Det kunde exempelvis vara för att kunna dokumentera antal boskapsdjur eller fångade byten. I de första talsystemen som var additiva var addition av små tal enkelt att genomföra. Dock kan det behöva göras vissa omvandlingar, exempelvis då vi i det egyptiska systemet adderar sex och sju. Svaret kommer att innehålla tretton tecken för ett där tio kan ersättas av ett tecken för 10. I detta enkla fall är det ingen större svårighet att lösa men vid addition av tal innehållande många taltecken kommer den som adderar ändå behöva ordna och gruppera sina taltecken för att göra teckenomvandlingar. Därmed tappar det additiva systemet sin poäng i att ordning inte spelar roll. De additiva systemen är enkla att förstå och att utföra enkla additioner i men har en stor nackdel då vissa tal blir skrymmande att skriva, vilket dock kan avhjälpas genom att införa fler taltecken. Vi kan se detta genom ett exempel när sumerer och romare ska skriva talet 56, se figur 21 nedan.

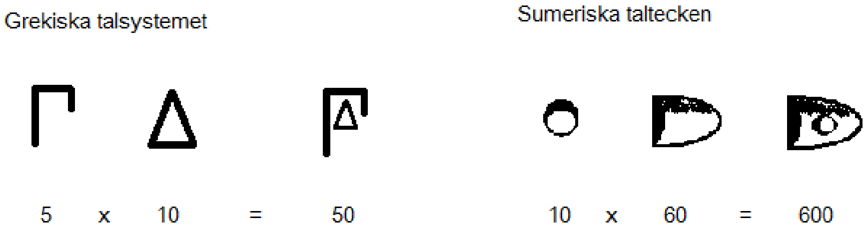


Figur 21: Sumerers och romares sätt att skriva talet 56.

Romarnas fördel var att talet inte krävde så stort utrymme, nackdelen var att det många talsymboler som den som läser talet måste känna till. Detta är dilemmat med de additiva systemen. Det behövs ett antal olika taltecken som gör att det inte krävs för många tecken för att uttrycka ett tal samtidigt som det inte går att ha alldeles för många taltecken då det blir svårt att minnas dem alla. Det grekiska alfabetiska talsystemet hade dock minnesregler för sina taltecken då det fanns ett logiskt samband med det grekiska alfabetet. Den som kunde rabbla det grekiska alfabetet kunde därmed enkelt minnas vilket taltecken som representerade vilket tal. Brahmisystemet hade lika många tecken som det grekiska, skillnaden är att dessa, vad vi vet, enbart var abstrakta och inte hade någon koppling likt de grekiska.

Romarna utvecklade i sitt additiva system en subtraktionsprincip, vilket gjorde att man kunde skriva talet fyra som IV istället för IIII. Detta var dock inget som användes av gemene man utan något man hittar i skrifter som är väl genomarbetade (Ifrah, 2001a, s.288). Denna subtraktionsprincip underlättade, då tal som skrevs med denna princip inte blev så skrymmande. Samtidigt försvårade detta system möjligheten att genomföra beräkningar, då ordning i vanliga additiva system inte spelar någon roll, men att de nu gör det.

I vissa additiva system möter vi multiplikationsprincipen i utformningen av vissa tecken. Multiplikationsprincipen är en viktig grund för talsystem av hybridtyp och finns redan i vissa additiva system. Exempelvis är sumerernas tecken för 600 är en kombination av tecknet för 10 och tecknet för 60. Likaså är grekernas tecken för 50 en kombination av tecknet för 5 och 10.



Figur 22: Exempel på hur taltecken multiplikativt kombineras för att skapa nya taltecken.

Dessa talsystem är fortfarande additiva även om talsymbolernas utformning bygger på multiplikation.

6.1.2 Hybridsystemet - ett steg närmre positionssystemet

Även om vi i denna uppsats enbart presenterar ett hybridsystem, nämligen kinesernas klassiska system, har det funnits flertalet hybrida talsystem genom historien. Fördelen med hybrida system är att de inte kräver lika många upprepande tecken för att uttrycka ett tal som additiva system gör. Här kan några grundtecken, 1-9 i det decimala systemet återanvändas på flera positioner och genom att ha olika tecken för tiopotenser går det lätt att utläsa talets värde. Talsystem av hybridtyp underlättar då färre taltecken behövs än i ett additivt system men begränsas ändå av att varje tiopotens kräver ett nytt taltecken. Jämfört med additiva system är det i hybrida system enklare att uttrycka stora tal men trots detta begränsar det hybrida systemet oss.

Våra räkneord är en form av ett hybridt talsystem. Vår muntliga framställning av talet 5 231 är inte att vi säger fem-två-tre-ett utan istället uttrycker vi talet som fem-tusen-två-hundra-tre-tio-ett. Den muntliga framställningen har alltså många likheter med ett hybridsystem där varje del av ordet motsvaras av ett eget tecken. Hybridsystemet kan alltså ge oss större förståelse för vad exempelvis siffran 5 är värd i talet 5231. Vid större tal än tusental görs dock en gruppering. Talet 15 231 säger vi nämligen inte som ett-tiotusen-fem-tusen-två-hundra-tre-tio-ett utan här grupperas tusentalen som femtontusen. På samma sätt kommer också miljontalen att grupperas. Om denna gruppering inte skulle ske skulle det bli långt att exempelvis säga talet 91 351 231 som nio-tio-miljon-en-miljon-tre-hundratusen-fem-tiotusen-ett-tusen-två-hundra-tre-tio-ett istället kan vi säga nittioen-miljon-tre-hundra-fem-tio-ett-tusen-två-hundra-tre-tio-ett.

När de hybrida talsystemen försökts förenklas har det varit ett steg närmre ett positionssystem. Det är inte möjligt att ge en kultur eller ett folk äran för att de upptäckte eller uppfann positionssystemet. Ifrah (2001a, s.474-475) menar att positionssystemet är något som upptäckts flertalet gånger. Först av babylonierna som byter ut sitt omfattande additionssystem till det sexagesimala positionssystemet, därefter av kinesiska författare som förkortar och förenklar sina hybrida taluttryck genom att utesluta tecknen för tiopotenserna. Sedan även av mayafolket som likt kineserna utelämnar tiopotenserna i detta hybridsystem. Ifrah (2001b, s.87) menar även att det är troligt att indiernas positionssystem var en helt inhemsk uppfinning. Positionssystemet har ingen begränsning i att det behövs oändligt många tecken utan här krävs det enbart lika många tecken som vår talbas. Utifrån detta kan vi uttrycka alla tal. Positionssystemet ger oss också frihet att välja en talbas som är lämplig för vårt syfte vilket gör det flexibelt.

	FÖRDELAR	NACKDELAR
ADDITIVA TALSYSTEM	Enkelt att förstå Enkelt att göra enkla additioner Talets värde är oberoende av taltecknens ordning.	Stora tal blir skrymmande att skriva ut Införs för många taltecken kan det bli svårt att minnas vad alla står för
TALSYSTEM AV HYBRIDTYP	Inte lika skrymmande att skriva ut tal som i additivt system Har direkt koppling till våra räkneord	Kräver ett nytt tecken för varje tiopotens.
POSITIONSSYSTEM	Med ett fåtal tecken kan alla tal uttryckas Enkelt att uttrycka stora tal Lätt att göra svåra operationer	Kräver förståelse för varje positions värde.

Tabell 2: För- och nackdelar med olika typer av talsystem

6.1.3 Hjälpbaser

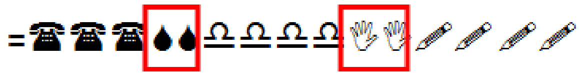
I flertalet talsystem som presenterats fanns hjälpbaser, det vill säga tecken för tal som inte är en potens av den aktuella talbasen. Sumererna och romarna är exempel på kulturer som använde detta. Dessa hjälpbaser underlättade utskrivning av tal men vid beräkningar kunde vissa problem uppstå. Nedan följer en jämförelse av additionen 167 + 287 i ett additivt talsystem där vi först använder hjälpbaser (5, 50) och sedan gör samma beräkning utan dessa.

1 5 10 50 100

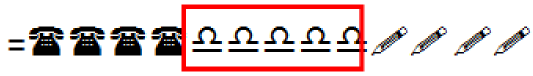
Med hjälpbaser i vårt additiva system

Steg ett: Gruppera alla taltecken och skriv lika tecken bredvid varandra.

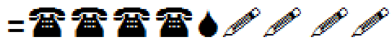
Steg två: Växla, det vill säga två tecken för 50 blir ett tecken för 100, två droppar blir en telefon och två tecken för 5 blir ett tecken för 10.



Steg tre: Växla, fem tecken för 10 växlas till ett tecken för 50.

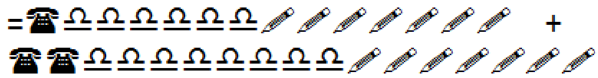


Steg fyra: Då inga fler växlingar kan göras har vi fått vårt svar.

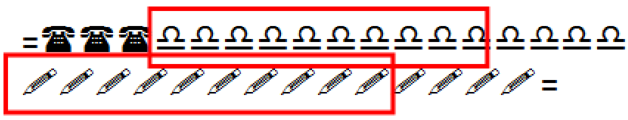


Utan hjälpbaser i vårt additiva system

Steg ett: Gruppera alla taltecken och skriv lika tecken bredvid varandra.



Steg två: Växla, det vill säga tio tecken för ett kan ersättas av ett tecken för tio samt att tio tecken för 10 kan ersättas med ett tecken för 100 och så vidare.



Steg tre: Då inga fler växlingar kan göras har vi fått vårt svar.

För- och nackdelar med hjälpbaser

Fördelen med hjälpbaser är att talet kan skrivas mer kompakt (Ifrah, 2001a, s. 280). Som vi ser ovan kan talet 287 skrivas med nio tecken om vi använder hjälpbaser till skillnad mot sjutton tecken utan hjälpbaser. Vid beräkningen ovan kommer systemet utan hjälpbaser vara enklare att använda då det i alla steg växlas tio tecken till ett tecken. Med hjälpbaser behöver man hålla ordning på om man ska växla två eller fem i nästa steg, något som kan försvåra beräkningen. Dock är det svårt att undvika hjälpbaser i talsystem med en hög bas, så som sumerernas, eftersom det är otympligt att växla sextio tecken i varje växling.

Vårt penningsystem är ett additivt system med hjälpbaser då vi inte enbart har sedlar och mynt i valörer av tiopotenser. Vi har även sedlar och mynt i valörer fem, tjugo, femtio samt femhundra vilka fungerar som hjälpbaser. En fördel med dessa valörer är att antalet sedlar och mynt blir färre och på det sättet underlättas kontanthanteringen. I oktober 2015 kommer Sveriges Riksbank ge ut nya sedlar där även några nya valörer kommer finnas med. Istället för att det idag finns åtta valörer av sedlar och mynt kommer det i det nya systemet finnas tio valörer där tvåkronan och tvåhundralappen blir nya tillskott (Sveriges riksbank, 2012). Euron har femton olika valörer och med det nya svenska systemet kommer dessa valutor ha samma hjälpbaser, med undantag för att valörer för de svenska örena saknas.

Även om penningsystemet finns i vår vardag är det få personer som skulle utföra avancerade beräkningar med hjälp av detta additiva system. När vi ska beräkna den totala kostnaden för exempelvis fyra höns som kostar 167 kr/höna använder vi oss sällan av sedlar och mynt för att komma fram till den totala kostnaden. Istället skulle de flesta av oss ställa upp talet och med vårt positionssystem utföra beräkningarna. Därmed slipper vi fundera på hur många femkronor som kan växlas till nästa valör, eller hur många tjugolappar det går på en hundralapp.

6.1.4 Nollans betydelse i olika talsystem

Det är svårt att tänka sig ett talsystem idag utan en nolla, men tecken för en tom plats eller den tomma mängden har inte alltid varit en självklarhet. När talsystemen började utvecklas var nollan ett främmande och ibland helt onödigt koncept och i de kulturer som började med eller endast hade ett additivt system fanns ingen nolla. Dock är detta inget problem i just ett additivt system då tal skrivs genom att lägga ihop så många tecken av varje sort som behövs. Du adderar aldrig med noll och även fast 101 innehåller en nolla skrivet i ett positionssystem finns inte den nollan skriven i ett additionssystem. Det finns alltså ingen anledning att markera ut tom plats eller tom mängd vilket innebär att det inte heller finns någon anledning att ha en nolla. Därför begränsar avsaknaden av nollan de additiva systemen för att utvecklas vidare, för nollan är grundläggande för den matematiken vi känner till idag. Men avsaknaden av nollan begränsar inte användandet av systemet i sig.

När babylonierna utvecklade positionssystemet och när kineserna skrev sina siffror utan räknebrädet blev nollans avsaknad tydlig. När talens position relativt varandra syftar på talets storlek blir nollan, eller den tomma platsen, viktig för talets storlek. I början försökte babylonierna se förbi det problemet och fortsatte skriva tal utan en nolla, vilket ledde till stora tvetydigheter. Problemet försökte kringgås med större mellanrum, men en tom plats är svårtolkad. Är det en nolla? Två nollor? Och ju fler nollor ju större mellanrum och risken är stor att man istället läser det som två separata tal. Ett annat problem är att ett mellanrum inte kan läggas till i slutet av ett tal, som i 1 000.

Den babyloniska nollan är en produkt av detta problem, men som vi tidigare nämnt var den inte en fullvärdig nolla utan var enbart ett tecken för tom plats. Indierna som utvecklade sin nolla mycket senare hade mycket större tankar och idéer kring nollan och dess betydelse. Deras nolla representerade inte bara tom plats utan också den tomma mängden, vilket var ett steg längre än babyloniernas nolla. Indiernas nolla var mer än bara en nödlösning för att minska förvirring i utskrivande av tal, deras tecken för noll betydde ingenting. Men även mayakulturen hade en fullvärdig nolla. Detta innebär att det inte var en otillräcklig nolla som hindrade det vigesimala talsystemet ifrån större utveckling. Istället var det systemets inkonsekvens som satte käppar i hjulen då den andra positionens värde inte är 20^2 utan 18×20. Därmed kunde inte nollan användas i matematiska beräkningar (Ifrah, 2001a, s.449-450).

Varför kom indierna och mayakulturen så mycket längre än babylonierna med nollans betydelse? Ifrah (2001b, s.191) talar om hur indierna tänkte på nollan ur flertaliga filosofiska perspektiv och menar att detta kan vara anledningen till indiernas framgång i området. De funderade kring begreppen ingenting, tomhet, rymden och himlen och kopplade dessa till nollan. Möjligen är filosofin nyckeln till den stora utvecklingen av nollan. Den fullvärdiga nollan, som både markerar den tomma platsen och den tomma mängden, kräver en del tankearbete för att bli begriplig. Vad betyder egentligen ingenting? Och hur markeras ingenting med någonting?

I historien har många olika talsystem skapats och prövats och människan har letat efter det mest effektiva. Vi har testat oss fram genom tiderna vilket lett oss till positionssystemet, som förbättrades avsevärt med uppfinnandet av nollan. Nollan var "räknemästarnas senkomna men mest storartade skapelse" (Ifrah, 2001a, s.480). Nollan gjorde det möjligt att ta mycket större steg i räknekonsten och detta kombinerat med ett positionssystem och abstrakta mer lätthanterliga taltecken skapade grunden till det talsystem vi använder idag (Ifrah, 2001a, s.481). Utan dessa matematiska uppfinningar hade matematiken inte alls varit där den är idag och det innebär att alla världens civilisationer inte heller hade varit där vi är idag.

6.2 Beräkning i olika talsystem

Matematiken är ett utav de verktyg människan använt sig av genom tiderna för att bygga upp civilisationer. Utan matematiska beräkningar hade byggnationer, olika typer av handel, kontroll över boskap och befolkning och mycket annat blivit betydligt svårare och vi hade inte kommit lika långt i utvecklingen som vi har gjort idag.

Genom följande beskrivningar av olika beräkningsprocesser kommer olika begrepp att användas. Vi är vana att vid multiplikation tala om faktorer, men i detta arbete finns det en poäng i att hålla isär själva faktorerna. Vi kommer nedan att benämna den första faktorn som *multiplikator* och den andra som *multiplikand*. Liknande benämning gäller för täljare och nämnare i division, täljaren kallas här för *dividend* och nämnaren kallas *divisor*.

6.2.1 Multiplikation

Egyptisk multiplikation

Egyptierna hade ett fungerande, men något komplicerat, sätt att utföra multiplikationer. Alla multiplikationer med 10 som multiplikand var lätta att utföra då man endast behövde byta ut alla befintliga tecken till tecken av en större storlek (Ifrah, 2001a, s.263). Men när andra multiplikationer skulle utföras använde egyptierna en process som endast innefattade successiv addition och fördubblingar, den kunde också innefatta tiofördubblingar. Problemet 87×18 hjälper till att illustrera processen och är ett problem som skulle kunna uppstått i forntida Egypten då man exempelvis skulle vilja räkna ut hur många får som finns då 18 bönder har 87 får var.

För att utföra multiplikationen används två kolumner - i den vänstra skrivs först 1 och i den högra först 18, det vill säga multiplikanden. Sedan stegas fördubblingar i varje kolumn nedåt och en lista arbetas fram. Fördubblingarna avslutas innan ett högre tal än multiplikatorn 87 framkommer i vänster kolumn.

/ 1	18
/ 2	36
/ 4	72
8	144
/ 16	288
32	576
/ 64	1152

I nästa steg ses till den vänstra kolumnen och där markeras med snedstreck alla de rader som behövs för att tillsammans bilda summan 87. Samma rader i den högra kolumnen adderas också ihop och därifrån kommer svaret på multiplikationen.

Vänster kolumn: $64 + 16 + 4 + 2 + 1 = 87$
Höger kolumn: $1152 + 288 + 72 + 36 + 18 = 1566$

$$87 \times 18 = 1566$$

Det här sättet att utföra en multiplikation skiljer sig ifrån de andra talsystemen och är därför lite speciell, dock finns det en tydlig koppling till det binära talsystemet som har en viktig roll i dagens samhälle. Det binära talsystemet har talbasen två och det innebär att det endast är siffrorna 0 och 1 som används. Positionernas värde i det binära systemet ökar med en fördubbling, vilket är precis vad som händer i fördubblingen i den vänstra kolumnen ovan. Kolumnerna nedan visar på kopplingen mellan fördubblingarna och det binära talsystemets positioner. Vi kan alltså med hjälp av fördubblingskolumnen skriva om tal - i detta fall tar vi 87 och 18 - till det binära talsystemet.

För talet 87:

/1	2^0	1
/2	2^1	1
/4	2^2	1
8	2^3	0
/16	2^4	1
32	2^5	0
/64	2^6	1

För talet 18:

1	0
/2	1
4	0
8	0
/16	1

Varje markerad rad i fördubblingskolumnen markerar också den position som i det binära talsystemet betyder en 1:a. Vi ser alltså att 87 skrivs som $[1010111]_{\text{två}}$ och 18 skrivs som $[10010]_{\text{två}}$ i det binära talsystemet. Denna liknelse går att dra ett steg till då multiplikation i det binära talsystemet och egyptisk multiplikation bygger på samma princip. Nedan beskrivs detta utifrån multiplikationen 45×11. Till vänster i figur 23 ställs den binära multiplikationen upp och för tydlighetens skull finns översättningen mellan de binära talen till det decimala systemet inom parentes bredvid. Till höger visas den egyptiska multiplikationen.

Binär multiplikation

1 0 1 1 0 1	(45)
* 1 0 1 1	(11)
1 0 1 1 0 1	(45)
1 0 1 1 0 1 0	(90)
+ 1 0 1 1 0 1 0 0 0	(360)
1 1 1 1 0 1 1 1 1	(495)

Egyptisk multiplikation

/ 1	45
/ 2	90
4	180
/ 8	360

Vänster kolumn: 1 + 2 + 8 = 11
Höger kolumn: 45 + 90 + 360 = 495

Figur 23: Jämförelse mellan egyptisk multiplikation och multiplikation i det binära talsystemet.

I egyptisk multiplikation markeras de rader som ska adderas ihop för att ge svaret, i detta fall $45 + 90 + 360 = 495$. Dessa tal är också de som adderas ihop i den binära multiplikationen. Dessa båda processers likhet bygger på talbasen två i det binära talsystemet och den successiva fördubblingen i egyptisk multiplikation.

Multiplikation med räknebräde

Egyptiernas sätt att beräkna multiplikation med hjälp av successiv fördubbling kan anses vara av en ganska egen art. När vi istället tittar på andra historiska kulturers sätt att utföra beräkningar, så som babylonier, kineser, indier, greker och romare, utförs de med hjälp av någon form av räknebräde. Räknebrädena såg lite olika ut men huvudprincipen är ett fysiskt hjälpmedel bestående av ett bord eller bräde med kolumner eller rutor samt lösa föremål, så som exempelvis räknestenar, kulor, bambupinnar etcetera. Kinesernas räknebräde uppträdde först under Handynastin och det finns gott om fynd som visar att både greker och romare använde sig av räknebord för beräkningar (Ifrah, 2001a, s.304-307). Någon form av räknebord fanns även hos indierna där araber efter att ha tagit till sig indiernas räknekonst beskrev indiernas sätt att räkna (Ifrah, 2001b, s.209).

Nedan kommer vi presentera hur kineserna använde sitt räknebräde för att utföra multiplikation och därefter beskriva likheter och skillnader i hur romarna och indierna gjorde desamma. Vad gäller grekernas användning av räknebord vet vi för lite för att kunna uttala oss om (Heath, 1965, s.46). Även babyloniernas sätt låter vi bero då det inte är bekräftat att de använde räknebräde även om Ifrah lägger fram bevis för att det till största trolighet var så (2001a, s.195).

Vi kan anta att kineserna skulle kunna möta samma problem som egyptierna, att behöva beräkna det totala antalet får i det fall det finns 63 bönder med 47 får var, alltså utföra multiplikationen 63×47. Låt oss nu utföra denna beräkning med hjälp av ett räknebräde.

Steg 1: Uppställning av tal.
Multiplikanden skrivs i rutorna på översta raden längst mot högra kanten av räknebrädet. Därefter lämnas en blankrad där svaret kommer växa fram och på raden under det skrivs multiplikatorn där entalssiffran i multiplikatorn skrivs rakt under den högsta siffran i multiplikanden.

		4	7
	6	3	

Steg 2a: Multiplikation mellan siffran av högsta ordning i multiplikanden respektive multiplikatorn.
Multiplicera 4×6 och skriv svaret i blankraden med entalet i svaret direkt ovan siffran av högsta ordning i multiplikatorn.

		4	7
2	4		
	6	3	

Steg 2b: Multiplikation mellan siffran av högsta ordning i multiplikanden och siffran av näst högsta ordning i multiplikatorn.
Multiplicera 4×3 och skriv svaret i blankraden ovan på samma sätt som i förra steget adderat till svaret som redan finns där, det vill säga $240 + 12 = 252$.

		4	7
2	5	2	
	6	3	

Steg 2c: Multiplikation mellan siffran av högsta ordning i multiplikanden och siffran av ordning x i multiplikatorn.
Upprepa steg 2 tills siffran av högsta ordning i multiplikanden har multiplicerats med siffror av alla ordningar i multiplikatorn.

Steg 3: Förflyttning av multiplikator.
Ta bort siffran av högsta ordning i multiplikanden och flytta multiplikatorn ett steg åt höger. Övergå till multiplikation av siffran av näst högsta ordning i multiplikanden.

			7
2	5	2	
		6	3

Steg 4a: Multiplikation mellan siffran av näst högsta ordningen i multiplikanden och siffran av högsta ordningen i multiplikatorn
Multiplicera 6×7 och skriva svaret i blankraden ovan på samma sätt som i förra steget adderat till svaret som redan finns där, det vill säga $252 + 42 = 294$.

			7
2	9	4	
		6	3

Steg 4b: Multiplikation mellan siffran av näst högsta ordning i multiplikanden och siffran av näst högsta ordningen i multiplikatorn
Multiplicera därefter 3×7 och skriv svaret i blankraden ovan på samma sätt som i förra steget adderat till svaret som redan finns där. Det vill säga $2940 + 21 = 2961$.

			7
2	9	6	1
		6	3

Steg 4c: Multiplikation mellan siffran av näst högsta ordning i multiplikanden och siffran av ordning x i multiplikatorn
Upprepa steg 4 tills siffran av näst högsta ordning i multiplikanden har multiplicerats med siffror av alla ordningar i multiplikatorn.

Steg 5: Förflyttning av multiplikator/avslutning.
Ta bort siffran av näst högsta ordning i multiplikanden och flytta multiplikatorn ett steg åt höger om så är möjligt och övergå till multiplikation av siffran av nästa ordning enligt stegen ovan. Om det inte finns något mer att multiplicera med är svaret det som är kvar.

2	9	6	1

Alltså hade bönderna gemensamt 2961 får.

Indierna räknade på liknande sätt. Multiplikatorn ställdes under multiplikanden på samma sätt som hos kineserna och beräkningen innehöll samma steg. Däremot hade indierna inte rutor utan arbetade i kolumner. Flera siffror kunde alltså dyka upp i samma kolumn. Till skillnad från kineserna hade indierna inte en särskild svarsrad utan vid beräkningen dyker svaret upp på multiplikandens rad vars siffror allt eftersom ersätts med våra svarssiffror. Steg 3 hos kineserna innebar därför för indierna enbart förflyttning av multiplikatorn. (Ifrah, 2001b, s.315-

317). Det kinesiska systemet kan därför vara lättare att följa än indiernas då det tydligt syns vilka siffror som tillhör multiplikanden och vilka som tillhör svaret då produkten växer fram på en egen rad. Det som däremot hände hos indierna var att de tog bort även kolumnerna och ersatte de platser som hade kunnat bli tomma med ett tecken för tom plats, nollan. Indierna hade skapat sitt positionssystem och det förstods fullt ut när de plockade bort kolumnerna vid beräkning (Ifrah, 2001b, s.318).

Som tidigare nämnts vet vi mycket lite om hur grekerna använde sina räknebräden men vi kan anta att grekernas och romarnas tillvägagångssätt påminner om varandra då dessa kulturer levde sida vid sida i samma geografiska område. Romarnas sätt att använda räknebrädet påminner om det kinesiska med skillnaden att kinesernas lägger ut sina tal i rutor medan det romerska räknebrädet är uppbyggt av kolumner.

På romarnas räknebräde har varje kolumn ett specifikt värde. Då romarna lägger tre räknestenar i kolumnen längst till höger står detta för talet tre. Läggs samma antal räknestenar i den andra kolumnen från höger sida sett har räknestenarna värdet 30 vilket gäller både för multiplikanden och multiplikatorn. Detta är något som skiljer det kinesiska och romerska räknebrädet åt då multiplikatorn hos kineserna inte ligger i rutor som motsvaras av talets värde. För romarna skulle en utläggning av räknestenar likt i steg 1 betyda att multiplikatorn är värd 630 och inte 63. Om romarna skulle multiplicera 47×63 skulle multiplikatorn likt multiplikanden ligga längst till höger. Romarna var därför alltid tvungna att vara medvetna om att när de i detta fall tog 6×4 var det 60×40 de räknade och därmed skulle svaret läggas ut som två räknestenar i kolumnen för tusental och fyra räknestenar i kolumnen för hundratal.

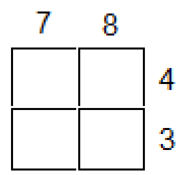
Romarna räknade multiplikation från vänster till höger, likt indierna och kineserna, vilket innebär att de började med att multiplicera de stora talen. Det är tvärt emot hur vi gör idag då vi börjar med multiplikation av ental för att sedan arbeta oss till större och större ordningar. Om man bortser från romarnas sätt att räkna från vänster till höger och deras räknestenar kan vi se att vår multiplikation idag sker på samma sätt som romarnas. I grunden är detta också samma sätt som kinesernas dock med skillnaden att kineserna flyttade multiplikatorn under beräkningarna. En fördel med det romerska räknebordet är användningen av stenar vilka kan sparas och i nästa delresultat enbart adderas, detta gör det möjligt att följa delresultat i multiplikationen vilket inte var möjligt på kinesernas räknebräde där mittenraden modifierades och svaret successivt växte fram. Det är därför på kinesernas räknebräde omöjligt att hitta eventuella felberäkningar då delresultaten inte syns.

Romarnas räknebräden som till en början var stora och otympliga utvecklades till mer nätta och bärbara räkneverktyg. Vaxtavlan är ett sådant exempel som användes i Rom och bestod av en platta med svart vax vilken romarna skrev på och suddade med en så kallad stylus, ett verktyg i järn som användes för att både rita och stryka ut vad som tidigare ritats. Ett annat verktyg var en sandfylld ram där man med en smal pinne ritade sina kolumner och spalter. Redan omkring vår tideräknings början tros dessa räkneverktyg ha använts bland romarna och på 800-talet finns beskrivningar av desamma i europeiska skrifter (Ifrah, 2001a, s. 312).

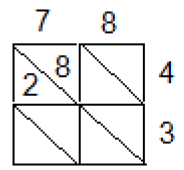
Multiplikation på papper

Räknebräden är inte något vi vanligtvis använder oss av idag när vi utför beräkningar utan beräkningsprocesserna fortsatte utvecklas. Araberna utvecklade ett sätt att multiplicera på 1200-talet som sedan förmedlades till Västeuropa (Ifrah, 2001b, s. 326-327). Till skillnad från tidigare använde araberna nu penna och papper som hjälpmedel vid multiplikationen vilket gav till följd att alla delresultaten vid beräkning bevarades. Här nedan presenteras hur denna process används.

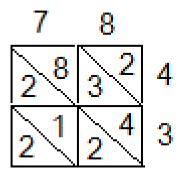
Vi väljer multiplikatorn 78 och multiplikanden 34 och gör ett rutmönster med två kolumner och två rader. Antal rader och kolumner beror på antalet siffror i multiplikatorn och multiplikanden. Multiplikatorn skrivs ovanför rutsystemet, siffran av högsta ordning först och siffran av lägsta ordning (alltså entalen) sist. Multiplikanden skrivs till höger om rutsystemet där siffran av högsta ordning skrivs vid raden längst ner och siffran av lägsta ordning till höger om första raden.



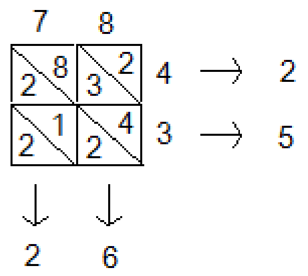
Efter detta dras i varje ruta en diagonal ifrån övre vänstra hörnet. Därefter multipliceras talen med varandra. Vi tar $7 \times 4 = 28$ och skriver på detta sätt:



Resterande tal multipliceras på samma sätt med varandra. Om någon storleksordning saknas skrivs 0 på den platsen.



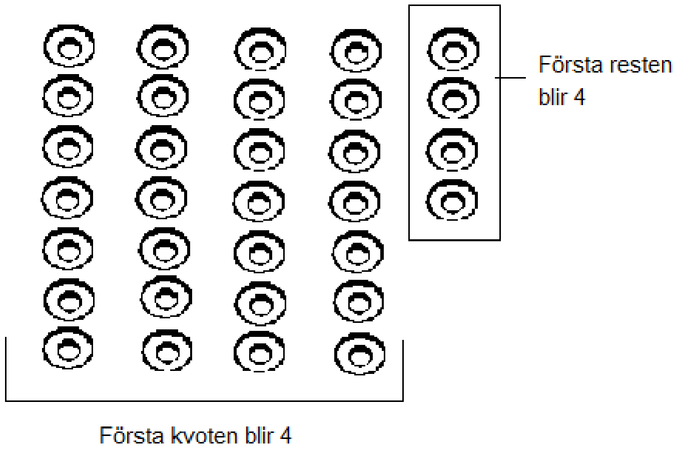
Därefter adderas siffrorna i varje diagonal och man börjar med diagonalen längst upp till höger. Vi får alltså 2, $8 + 3 + 4 = 15$, $2 + 1 + 2 = 5$, 2. När vi får talet 15 lägger vi till tiotalssiffran som minne till nästa diagonals summa, alltså till summan 5 som istället bli summan 6. Resultatet utläses sedan från vänster till höger och därefter nedifrån och upp, vilket ger oss 2652 som produkt.



I denna beräkningsprocess spelar det ingen roll vilket tal vi börjar multiplicera med då alla produkter har sina egna platser. Det gör beräkningen enkel. Alla delresultat finns kvar, inget stryks längs vägen vilket är en fördel även med romarnas räknebräde och egyptiernas successiva fördubbling. Att kunna se delresultaten gör att vi i efterhand kan kontrollera våra svar vilket kineserna inte kunde göra. På grund av det vet vi idag inte hur alla kulturer räknat då det i många fall enbart är svaret som finns bevarat. Genom historien syns att matematik till en början var såpass komplicerad att den förbehölls kulturens mest lärde. I och med att olika system arbetades fram blev den mer avancerade matematiken enklare och enklare för vanliga människor att ta del av och lära sig om.

6.2.2 Division

På en lertavla, daterad till år 2650 f.Kr., finns den äldsta kända nedskrivna divisionen (Ifrah, 2001a, s.190-193). Problemet berör hur många personer som 1 152 000 síla (ett sumeriskt rymdmått) korn kan delas ut till, om varje person ska få 7 síla var. För att genomföra denna division använde sig sumererna av sina talpjäser och det första steget är att dela upp dividenden i lämpligt antal av olika talpjäser. I vår division kan vi dela upp 1 152 000 i 32 talpjäser som vardera är värda 36 000 alltså $1\,152\,000 = 32 \times 36\,000$. De här 32 talpjäserna delas sedan in i grupper om 7 vilket illustreras i figur 24.



Figur 24: Illustration över tillvägagångssättet i den äldsta sumeriska divisionen.

Den första kvoten beskriver att $4 \times 36\,000$ personer kan få 7 síla korn var. Den första resten representerar de personer vi har kvar att tilldela 7 síla korn. Men för att göra detta måste vi växla in de 4 talpjäser av värde 36 000 till 40 stycken talpjäser av värde 3600. Nu tillämpas samma metod som tidigare, vi får då ut en ny kvot som beskriver ytterligare personer som kan få 7 síla korn. Denna process upprepas tills det inte finns någon rest, eller tills det inte går att växla till en mindre talpjäs. Sumererna utförde varje steg och lade i varje steg bort så många talpjäser som kvoterna gav, addition av dessa gav till slut svaret. I figur 25 går att utläsa kvoterna och resterna i alla steg som görs.

Talpjäs	Kvot	Rest
36 000	4	4
3600	5	5
600	4	2
60	2	6
10	5	1
1	1	3

Figur 25: Tabell över alla steg i den sumeriska divisionen.

Sumererna använde sig inte av tabeller på det sättet som illustreras här, men vi har valt att ha med en tabell för beskrivning och förenkling. Det slutgiltiga svaret ges genom att addera rätt antal talpjäser, detta antal kommer alltså ifrån kvoterna. Resultatet blir:

$$36\,000 \times 4 + 3600 \times 5 + 600 \times 4 + 60 \times 2 + 10 \times 5 + 1 \times 1 = 164\,571$$

Alltså är svaret på den äldsta kända nedskrivna divisionen att 1 152 000 síla korn går att dela ut till 164 571 personer så att varje person får 7 síla korn. Dock får man inte glömma bort resten. Det sista steget ger en rest som varken går att dela upp i grupper om sju eller att växla till andra talpjäser. Det innebär att divisionen 1 152 000/7 har en rest på 3, en rest som sumererna inte hanterade vidare som ett bråktal.

6.2.3 Tal i bråkform

Till skillnad från sumererna som genomförde den äldsta divisionen kunde kineserna, när de genomförde divisioner, fortsätta att arbeta med den rest de fick fram och resten uttrycktes då som ett bråk (Johansson, 2013, s.173-174). Sättet att uttrycka bråk i decimalform fanns inte men bråk, delar av en helhet, har funnits med i flertalet kulturer. Hade kineserna räknat samma division som sumererna hade de alltså fortsatt och lagt till bråket $\frac{3}{7}$ till svaret. Resten 3 i beräkningarna blir alltså täljaren i bråket och divisorn 7 blir nämnaren.

Om resten inte är förkortad så långt som möjligt görs detta genom att hitta den största gemensamma delaren, som beskrivs i *Nio böcker om räknekonsten* (Thompson, 1996, s.87). Hade divisionen gett resten $\frac{49}{91}$ hade den största gemensamma delaren hittats genom successiva subtraktioner. Vi tar $91 - 49 = 42$, $49 - 42 = 7$ osv. Denna process ger oss en tabell och där ser vi att den största gemensamma delaren är 7, vilket för att vi kan förkorta $\frac{49}{91}$ till $\frac{7}{13}$.

49	49	7	7	7	7	7	7
91	42	42	35	28	21	14	7

Stora likheter finns med det sätt vi använder oss av idag, Euklides algoritm, som finns i *Elementa* (Thompson, 1996, s.222-225). Grekerna, som till skillnad från kineserna var mer teoretiska, använde sig av denna algoritm även för att bestämma om tal var relativt prima. För grekerna var det de teoretiska tankarna kring tals gemensamma delbarhet och motsatsen, irrationella förhållanden, som var det intressanta (Johansson, 2013, s.118). Kinesernas anledning däremot var att det var mer tillämpbart då bråken var förkortade så långt som möjligt.

Det dröjde ganska lång tid innan européer började räkna med bråk där nämnaren var en potens av 10, men det var det som bidrog till att systemet med decimaler utvecklades. Babylonierna var först med att ge bråkdelarna ett rationellt teckensystem där nämnaren var en potens av 60. Dock fanns det flera nackdelar i sättet de skrev bråken på då de lätt kunde missförstås om man inte tog hänsyn till sammanhanget (Ifrah, 2001b, s.362). Det teckensystem vi idag använder kommer ifrån indierna, de skrev bråk ungefär som vi gör idag men utan ett bråkstreck vilket araberna lade till senare (Johansson, 2013, s.281).

På 1500-talet togs ett avgörande steg av belgaren Simon Stevin då han skrev talet 679,567 som 679(0) 5(1) 6(2) 7(3). Detta innebar "679 fullständiga enheter, 5 decimalenheter av första storleksordningen (eller tiondelar), 6 decimalenheter av andra storleksordningen (hundradelar), och 7 decimalenheter av tredje storleksordningen (tusendelar)" (Ifrah, 2001b, s.363).

Skrivsättet utvecklades sedan till att talet skrevs: 679 567 där siffran 9 (alltså entalssiffran) hade en liten cirkel precis ovanför sig. Den ersattes sedan av dagens decimalkomma i början av 1600-talet då det var viktigare att räkna mer exakt och med mer än enbart heltalsdelen (Ifrah, 2001b, s.363)

Det finns flera positiva saker med decimalerna. Det enklare att addera med decimaltal än med tal i bråkform eftersom addition med bråk kräver att nämnarna är lika, men står talen i decimalform är det bara att addera. Vid användande av decimaltal är det även enklare att se vilket tal som är störst. Att säga vilket bråk som är störst av 13/27 och 17/37 är mycket svårare än att säga vilket tal som är störst av 0,4815 och 0,4595. Detta gör också att det blir mycket lättare att se en successiv förändring där vi har tal i decimalform, exempelvis om vi vill följa en kurva. Utvecklandet av decimaltal var därför ett stort steg för matematiken.

6.2.4 Bestämma kvadratroten ur stora tal

Att bestämma kvadratroten ur ett stort tal är något som än idag kräver en komplicerad beräkning. Trots detta gjordes beräkningar av kvadratroten redan på babyloniernas tid, då detta var praktiskt att använda bland annat inom geometri. Många utav de mer komplicerade beräkningarna utfördes med hjälp av de stora och utförliga tabeller som de lärda skapat. Svar på beräkningar av sorten $1 - \frac{1}{n}$ ficks genom att i en tabell se vad $\frac{1}{n}$ behöver kompletteras med för att nå 1. Här utförs alltså en subtraktion med hjälp av en tabell över addition, samma resonemang användes också vid division då tabeller över multiplikation användes. Med samma princip löste babylonierna även andragradsekvationer och roten ur med en stor tabell av kvadrater. Skulle $\sqrt{[20{,}25]_{sextio}}, \sqrt{[1225]_{tio}}$, lösas tittade skrivaren i tabellen och sökte efter de tal som kvadrerat gav svaret $[20{,}25]_{sextio}, [1225]_{tio}$, vilket är $[35]_{sextio}, [35]_{tio}$ (O'Connor & Robertson, 2011). Denna metod kan ses som ett förhistoriskt sätt att beräkna roten ur, eftersom beräkningen inte går att utföra om svaret inte "redan finns" i form av tabellerna.

I det kinesiska verket *Nio böcker om räknekonsten* finns följande problem presenterat: "Givet en area på 55 225 (kvadrat-)bu. Säg: vad är kvadratens sida" Därefter följer en utförlig beskrivning av hur man beräknar detta med hjälp av räknebrädet och räknestavar. Huruvida en hjälprad, den som nedan kallas *shang*, ursprungligen fanns med är oklart men Sun Zi, som på 400-talet kommenterar verket, menar att så var fallet (Johansson, 2013, 186-190).

För att lösa detta problem behövs en hel del skicklighet vad gäller hanteringen kring sitt räknebräde. Vi använder oss av fyra rader på räknebrädet där svaret kommer växa fram på den översta raden shang. På andra raden, som kallas *shi*, lägger vi ut det givna talet vilket vi ska dra kvadratroten ur. Den tredje raden, *fang fa*, motsvaras av divisorn och den nedersta raden, *xia fa*, hjälper oss att veta vilka kolumner som är aktiva i beräkningarna, vilket alltid är kolumnerna till vänster om räknestickan samt den rakt ovan.

Steg ett: Skriv upp talet på raden shi och placera en räknesticka i rutan längst till höger på raden xia fa.

					shang
5	5	2	2	5	shi
					fang fa
				1	xia fa

Steg två: Flytta den lånade räknestickan två platser i taget så långt som möjligt till vänster så att den fortfarande står under talet.

					shang
5	5	2	2	5	shi
					fang fa
1					xia fa

Steg tre: Uppskatta roten ur första siffran till närmsta lägre heltal och skriv det i rutan för hundratal på raden shang.

		2			shang
5	5	2	2	5	shi
					fang fa
1					xia fa

Steg fyra: Ange det skattade talet direkt över lånestickan på raden fang fa.

		2			shang
5	5	2	2	5	shi
2					fang fa
1					xia fa

Steg fem: Subtrahera sedan produkten av det skattade talet och fang fa från shi.
Kommentar: Hittills har vi alltså skattat hundratalssiffran i roten ur. Nu ska vi skatta tiotalsiffran och därför behöver vi flytta vår lånestav två steg åt höger. Men innan det lite förberedelser.

		2			shang
1	5	2	2	5	shi
2					fang fa
1					xia fa

Steg sex: Fördubbla fang fa och flytta ett steg åt höger. Flytta därefter lånestaven två steg åt höger.

		2			shang
1	5	2	2	5	shi
	4				fang fa
		1			xia fa

Steg sju: Nu ska vi uppskatta tiotalssiffran. Siffran kan inte vara större än $15/4$. Testa först med närmsta heltal under denna kvot. Dock måste subtraktionen i steg nio vara möjlig vilket kan betyda att ett lägre heltal får väljas och ange det nya skattade talet i kolumnen ovan lånestaven på rad fang fa.

		2	3		shang
1	5	2	2	5	shi
	4	3			fang fa
		1			xia fa

Steg åtta: Subtrahera den skattade siffran multiplicerat med fang fa från shi $152 - 3 \times 43$. Om det ger ett negativ resultat så behövs den skattade siffran minskas och vi börja om från steg sex.

		2	3		shang
	2	3	2	5	shi
	4	3			fang fa
		1			xia fa

Steg tio: Addera den skattade siffran till fang fa.

		2	3		shang
	2	3	2	5	shi
	4	6			fang fa
		1			xia fa

Steg elva: Flytta lånestaven i raden xia fang två steg åt höger. Flytta fang fa ett steg till höger.

		2	3		shang
	2	3	2	5	shi
		4	6		fang fa
				1	xia fa

Steg tolv: Skatta sedan entalssiffran. Siffran kan inte vara större än 232/46. Testa först med närmsta heltal under denna kvot på samma sätt som i steg sju och ange det nya skattade talet i kolumnen ovan lånestaven på rad fang fa.

		2	3	5	shang
	2	3	2	5	shi
		4	6		fang fa
				1	xia fa

Steg tretton: Subtrahera den skattade siffran multiplicerat med fang fa från shi ($2325 - 5 \times 465$). Om det ger ett negativ resultat så behövs den skattade siffran minskas och vi börja om från steg sex.

		2	3	5	shang
					shi
		4	6	5	fang fa
				1	xia fa

Då shi nu är tom har vi fått fram vårt svar på raden shang. Alltså är $\sqrt{55\,225} = 235$.

Det som händer i stegen ovan kan vid första anblick verka vara magi men genom att titta närmre förstår vi att varje steg har ett matematiskt syfte. Vi börjar med att skatta hundratalet i kvadratroten och i steg fem tar vi sedan bort detta i kvadrat (det vill säga 200^2) från raden shi. Nästa steg är att göra en lite mer exakt skattning av kvadratroten. Detta genom att skatta hundratal och tiotal. Nästa skattning är alltså $200 + 30$ och då vi ska subtrahera detta i kvadrat måste vi beakta den dubbla produkten då $(200 + 30)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times 30 + 30^2$. Den första termen subtraherade vi redan från shi i steg fem. Resterande, $2 \times 200 \times 30 + 30^2$, subtraheras i steg nio. Därefter fortsätter vi på samma sätt tills vi har uppskattat alla siffror. Att vi tidigare i steg sju kunde uppskatta nästkommande siffra genom att ta $15/4$ beror på att 15 000 i detta fall är den dubbla produkten och den sista kvadraten. Det vill säga $2 \times 200 \times \textit{någonting} + \textit{någonting} \times \textit{någonting}$ och detta någonting kan absolut inte vara större än att $2 \times 200 \times \textit{någonting}$ blir mindre än 15 000. Alltså $15000/4000 = 15/4$.

Idag använder de flesta av oss miniräknare för att lösa kvadratroten ur stora tal men att lösa samma problem utan miniräknare kräver mer av oss. Ett vanlig metod är att testa sig fram vilket kan göras på mer eller mindre effektiva sätt. Att försöka lösa uppgiften $\sqrt{237169}$ och börja med att pröva 1^2, 2^2 och så vidare skulle inte vara särskilt effektivt. Ett mer effektiv sätt att pröva sig fram är att inse att kvadratroten ur 237 169 måste vara mindre än 1000 men samtidigt större än 100. På detta sätt kan vi fortsätta och pröva oss fram och stegvis ringa in talet och finna en lösning.

Kinesernas tillvägagångssätt bygger också på vissa uppskattningar men är mer. Den algoritm som kineserna använde är mycket lik den som idag presenteras på internetsidor så som wikipedia med mera (Methods of computing square roots, 15 maj 2014). Skillnaden är att wikipedia och andra använder sig av penna och papper där kineserna enbart hade tillgång till ett räknebräde. Detta ger oss möjligheten att bevara delresultat på ett annat sätt än vad som var möjligt för kineserna. Dessutom används självklart moderna tecken som rottecknet och de arabiska siffrorna. Likheter finns, då xia fa finns med i den moderna algoritmen, men där inte som räknesticka utan istället som utritade prickar som begränsar vilka siffror som är aktiva. I övrigt sker algoritmen på samma sätt förutom att steg sju ovan på wikipedia beskrivs som $4\_ \times \_$ vilket ska vara mindre än 152 och vi frågar oss vilken siffra som ska stå på strecken. Detta steg är matematiskt samma som kinesernas, men uttrycks lite olika i text.

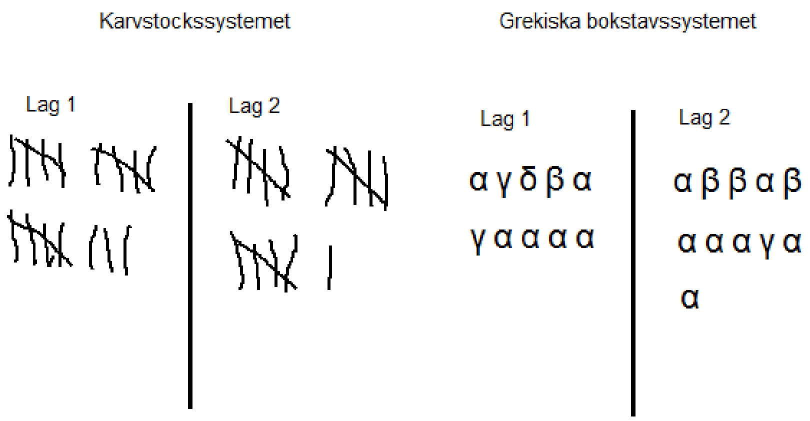
Detta är ett vittnesbörd om hur otroligt väl utvecklad matematiken var även för mycket länge sedan. Även om vi sett en exponentiell kurva av teknologisk utveckling de senaste åren ska vi vara medvetna om att den matematik som ligger till grund för denna utveckling har funnits som kunskap hos människan i flera tusen år.

6.3 Tillämpningar

Som vi i avsnitt 6.1 skrev om finns det fördelar och nackdelar med alla talsystem. I detta avsnitt tar vi utgångspunkt utifrån talsystemens styrkor och presenterar och diskuterar hur delar av olika talsystem lever kvar idag och vad de används till.

6.3.1 Karvstocken

Mänsklighetens första talsystem, karvstocken, kan anses vara ett primitivt sätt att anteckna tal på. Att andra talsystem skulle slå ut detta primitiva sätt är lätt att tro men faktum är att karvstocken finns kvar än idag, 30 000 år efter att den först hittats använd. Vad är det då som gör karvstocken till ett talsystem som fortfarande är användbart? Fördelen med karvstocken är att den bevarar delresultat längs räkningens gång. Den är också, utifrån att strecken grupperas på samma sätt, lätt att jämföra med en annan karvstock och visuellt syns snart vilken karvstock som har flest streck. Ett vardagsnära exempel är poängräkning vid brännbollsmatch. Att föra protokoll i en sådan match görs enklast med karvstocksstreck. Då kan poängräknaren följa delresultaten och även jämföra med det andra laget. Skulle vi istället skriva upp poängen med våra arabiska siffror skulle det behöva göras en räkneoperation för att se vem som leder, vilket vi slipper med karvstockssystemet. I figur 26 nedan går det med en snabb blick i karvstockssystemet lätt att se vilket lag som har mest poäng medan det grekiska systemet kräver att vi adderar ihop alla tecken. Dock är fördelen med det grekiska systemet att man lätt kan se hur många gånger som varje lag fått poäng, något som karvstockssystemet inte visar.



Figur 26: Brännbollsprotokoll i olika talsystem.

6.3.2 Olika talsystem som ännu används

Det sexagesimala talsystemet levde kvar hos de grekiska astronomerna och fördes vidare av arabiska och judiska astronomer till Europa (Ifrah, 2001a, s.234). Vi kan se detta i cirkelns antal grader och i vår tidemätning. Dygnet har 24 timmar, varje timme består av 60 minuter och varje minut består av 60 sekunder och denna uppdelning har en direkt koppling till det sexagesimala talsystemet (Ifrah, 2001a, s.236). Skrivs en tid som 3 timmar, 17 minuter och 35 sekunder på modernt vis kan vi dock inte skriva om detta till det sexagesimala systemet direkt på grund av oregelbundenheten i basen då ett dygn är 24 timmar och inte 60 timmar. Men minuter och sekunder byggs upp som potenser av 60. Oregelbundenheten som uppstod vid övergången mellan timmar och dygn beror troligen på att indelningen av dygnet, som är en obestridlig tidmätning, gjordes först och bestämdes till 24 timmar. Sedan delades dessa timmar in på ett sätt som var känt, därav 60 minuter och 60 sekunder. Detta kan jämföras med oregelbundenheten i mayafolkets talbas som bygger på att värdet 18×20 i andra positionen passar bättre emot årets antal dagar än 20×20. Systemet för vår tidemätning och mayafolkets talsystem har alltså anpassats till en praktisk tillämpning.

Fram till 1700-talet hade många olika måttsystem utvecklats i Europa och de skiftade från område till området. Under franska revolutionen i slutet av 1700-talet gjordes ett försök till standardisering av mått- och viktsystem vilket resulterat i det metriska systemet, som grundar sig på längdenheten meter. Innan denna reform var det vanligt att måttenheter baserades på talbasen tolv, men det fick ge vika för det metriska systemet. Under samma tidsperiod gjordes ett försök att införa decimaltid, det vill säga att dygnet istället skulle bestå av 10 decimaltimmar x 100 decimalminuter x 100 decimalsekunder. Detta för att det skulle underlätta tidsberäkningar men det skulle kräva en omdefiniering av hur lång en sekund skulle vara. Tid var något som blivit djupt rotat i befolkningen och 1803 valde man att återgå till det gamla sättet att räkna tid, i multiplar av 24 och 60 så som vi fortfarande gör. Att göra om tiden till decimaltid gick alltså inte men däremot har våra mått- och viktenheter levt kvar fram tills idag (Ifrah, 2001a, s.71-73, Decimaltid, 2014, 4 januari).

Det romerska talsystemet lever också kvar men dock i en liten utsträckning. Det finns med mer i språkliga sammanhang än i matematiska då de romerska siffrorna ofta används som ordningstal. Exempelvis skriver vi fortfarande oftast Karl XII och inte Karl den 12:e. I övrigt lever det romerska talsystemet i en tynande tillvaro.

6.3.3 Olika basers för- och nackdelar

Den decimala talbasen har haft framgång i många kulturer och talsystem. Talbasen tio återfinns i de flesta av de talsystem vi presenterat i detta arbete. Vad beror det på att talbasen tio fått sådan genomslagskraft? Troligen är svaret så simpelt som att det beror på antalet fingrar på människans hand, då handen tjänat som det första hjälpmedlet till beräkningar. Utifrån detta är det också enkelt att förstå att exempelvis romarnas hjälpbas fem kan härledas till antalet fingrar på en hand. Ingen kan veta hur vårt talsystem skulle sett ut om vi istället hade haft sex fingrar på varje hand, antagligen hade talbasen tolv varit den gängse. Ifrah menar nämligen att "valet" av talbas tio inte gjorts utifrån att den skulle vara den optimala talbasen utan att det snarare är en konsekvens av hur många fingrar människan har (2001a, s.69,79). I vårt talsystem idag är tio talbasen men det finns många fördelar med att välja andra talbaser i ett positionssystem. Nedan presenteras några talbasers för- och nackdelar.

Det binära talsystemet - enkla räkneoperationer

Idag är det binära talsystemet med talbas två grunden för all digital teknik. Detta på grund av dess hårdvara som är en uppbyggnad av mängder av strömbrytare som antingen leder eller inte leder ström, 1 eller 0. Nackdelen med ett binärt talsystem är att det kan krävas många siffror för att skriva större tal, många strömbrytare i datorns värld. Talen och antalet strömbrytare blir skrymmande vilket märktes i de första datorerna då strömbrytarna var stora. Men allt eftersom strömbrytarna blivit mindre och bytts ut mot mindre transistorer så är de skrymmande talen inte längre ett problem.

Det binära talsystemet kräver enbart att små additions- och multiplikationstabeller memoreras för att utföra matematiska operationer. I det decimala positionssystemet är tabellerna 10×10 tal till skillnad från det binära positionssystemet där 2×2 tal räcker att memorera. Därmed är det enklare att genomföra matematiska operationer i ett binärt talsystem.

Det duodecimala systemet - med många delare

En egenskap att förespråka för en talbas skulle vara att den har många delare. Talbasen tio har två delare, 2 och 5, vilket gör att många bråk skrivna i decimalform får en oändlig decimalutveckling. En talbas som är lämpligare än tio, utifrån önskemålet om fler delare, är tolv. Det vill säga ett duodecimalt positionssystem. Nackdelen är att de multiplikations- och additionstabeller vi behöver memorera skulle bli något större än i det decimala talsystemet. Det skulle alltså kräva lite mer av det mänskliga minnet än idag. Däremot skulle talbasen tolv, som är delbar med 2, 3, 4 och 6, ge fler tal med en ändlig decimalutveckling i duodecimala systemet, se tabell 3 nedan.

Bråktal	Decimal-systemet	Duodecimal-systemet
$\frac{1}{2}$	0,5	0,6
$\frac{1}{3}$	0,33333333...	0,4
$\frac{1}{4}$	0,25	0,3
$\frac{1}{5}$	0,2	0,24972497...
$\frac{1}{6}$	0,16666666...	0,2
$\frac{1}{7}$	0,142857143...	0,186A35186A35...
$\frac{1}{8}$	0,125	0,16
$\frac{1}{9}$	0,11111111...	0,14

Tabell 3: Decimalutveckling i det decimala- samt duodecimala systemet. A representerar 10 och B representerar 11.

Om vi utgår från den praktiska fördelen att skriva tal i decimalform skulle det alltså vara lättare att duodecimalt beräkna det exakta värdet av $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ än vad det är att göra samma sak i det decimala systemet. Det duodecimala systemet finns till viss del i vår vardag då det gamla måttet dussin bygger på talbasen tolv. Detta kan tolkas som att vi människor förstått att det finns fördelar att räkna element i grupper om tolv. Att det också använts just som ett mått på exempelvis ägg, är kanske inte heller helt orimligt då det är lättare att dela upp tolv ägg i två, tre, fyra och sex grupper till skillnad från att dela upp tio ägg på samma sätt. En annan fördel med att använda det duodecimala talsystemet skulle också göra att klockans timmar och årets månader var samma i antal som vår talbas.

För att även få med fem som en delare skulle vi likt babylonierna kunna använda talbasen sextio, då 60 är delbart med 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 och 30. Självklart är det ur en delbarhetsaspekt bättre, men additions- och multiplikationstabellerna blir väldigt stora och svåra att lära sig utantill, och vi har tidigare nämnt att babylonierna hade tabeller som hjälp för räkning. Därmed kan talbasen sextio anses vara en något osmidig talbas.

7. Del III - Didaktisk diskussion

I denna del kommer vi att utifrån läroplanerna och det vi tidigare i uppsatsens del I och II tagit upp diskutera hur matematikhistoria kan appliceras i skolans matematikundervisning. Vi lyfter några punkter som under arbetets gång har blivit tydliga för oss författare och som vi tror kan vara till hjälp även för andra matematiklärare.

Läroplanerna

En viktig del av matematikundervisningens syfte i grundskolan, vilket vi redan i inledningen av detta arbete uppmärksammat, är att eleverna ska ges "...förutsättningar att utveckla kunskaper om historiska sammanhang där viktiga begrepp och metoder i matematiken har utvecklats." (LGR11, 2011a, s.62). Skolverket ger det historiska perspektivet en betydande del av textutrymmet i syftesbeskrivningen av matematikundervisningen och därmed kan lärare inte avfärda detta som någon form av överkurs.

I det centrala innehållet beskrivs hur detta ska realiseras i de olika åldersgrupperna. Som en punkt i det centrala innehållet för åk 1-3 finns (LGR11, 2011a, s.63):
"Hur positionssystemet kan användas för att beskriva naturliga tal. Symboler för tal och symbolernas utveckling i några olika kulturer genom historien."

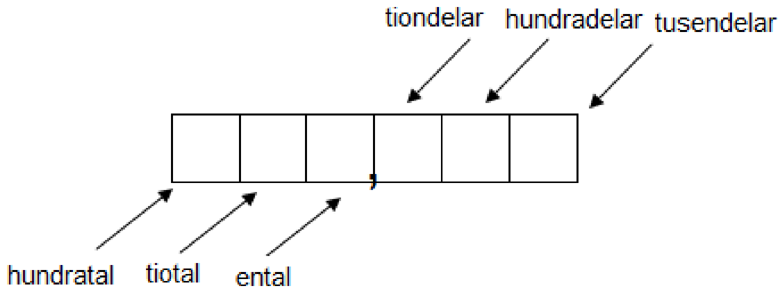
Vidare i åk 4-6 (LGR11, 2011a s.64):
"Positionssystemet för tal i decimalform. Det binära talsystemet och talsystem som använts i några kulturer genom historien, till exempel den babyloniska."

Och i åk 7-9 (LGR11, 2011a s.65):
"Talsystemets utveckling från naturliga tal till reella tal. Metoder för beräkningar som använts i olika historiska och kulturella sammanhang."

Förståelse kring talsystem och dess historia finns alltså med som en röd tråd och progression genom hela grundskolan. Men däremot följs detta inte åt lika tydligt i gymnasieskolans matematikkurser 1a, 1b och 1c. Det enda som syftar till den historiska anknytningen är att det ska finnas "matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria" (*Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola* (LGY11), 2011b s. 93). Här antas elever vara så förtrogna med positionssystemet att det inte längre behöver bearbetas och aktivt arbetas med.

Utifrån både LGR11 och LGY11 märks att en förståelse av den matematiska historien är viktig, viktigare än i *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet* (Lpo94) där det historiska perspektivet i matematik inte var lika framträdande (Skolverket, 2011c). Lärare behöver därför idag på ett tydligare sätt än innan ha goda kunskaper om den matematiska historien. Det är bra för läraren att ha en bred bild över matematiken, exempelvis vara medveten om att det finns många olika historiska metoder för att utföra räkneoperationer.

Det är av största vikt att lärare på mellanstadiet har en god förståelse för positionssystemet då det centrala innehållet syftar till att elever ska utveckla och utvidga sina talbegrepp från naturliga tal till rationella tal och dessutom lära sig att uttrycka tal i decimalform. Mycket undervisningstid behöver därför användas för att eleverna ska få en förståelse för positionssystemet, både till vänster och höger om decimalkommat. Som vi senare återkommer till kan den inkonsekventa språkliga framställningen av decimaltal göra det svårare att förstå positionens värde i decimaltal. Figur 27 visar en bild som ofta återfinns i läroböcker när man talar om positionssystemet.



Figur 27: Illustration av decimala positionssystemet.

Positionssystemet är något som högstadie- och gymnasielärare inte ska behöva undervisa om då elever ska ha med sig denna kunskap från mellanstadiet, men verkligheten ser inte alltid ut som det centrala innehållets målsättning. Högstadielärare möter elever i svårigheter att lösa olika matematiska problem och även om det inte är tydligt för läraren kan detta grundas i att en elev inte förstått positionssystemet. En risk är att läraren förutsätter att förståelsen för positionssystemet finns med från mellanstadiet och ser inte att det är där problemet ligger. Det är viktigt att som lärare ha orienterande kunskap om vad som undervisas i lägre åldrar. Dels för att kunna koppla tillbaka och dels för att vid tillfällen det krävs ge grundläggande undervisning till de elever som behöver det. Detta gäller på alla nivåer av matematikundervisning, då matematik hela tiden är en progression.

Att muntligt uttrycka tal

Även om positionssystemet är det talsystem som dominerar idag finns de andra två typerna fortfarande tydligt närvarande i människors vardag. Additionssystemet använder vi oss av varje gång vi hanterar kontanter, där mynt och sedlar är våra talpjäser eller taltecken. Hybridsystemet finns i vår muntliga framställning av tal: fem-hundra-sju-tio-åtta. Trots detta är många inte medvetna om att vi i vardagen växlar mellan alla de olika typerna av talsystem vi behandlat i detta arbete.

Det kan tyckas märkligt att vi i vårt positionssystem muntligt uttrycker tal genom ett hybridsystem, men skulle man vilja ändra på detta skulle problem uppstå. Ett tal, 571, uttrycks idag muntligt som fem-hundra-sju-tio-ett, men utan det hybrida inflytandet skulle vi säga fem-sju-ett. Här kan det vara svårt att se något problem, men om talet är mycket större blir det svårt att få en uppfattning om hur stort talet är. Exempelvis kan talet 57 097 365 i positionssystemet muntligt uttryckas som fem-sju-noll-nio-sju-tre-sex-fem. För att kunna uppfatta talets storleksordning måste åhöraren nu hålla reda på vilka siffror som sägs och hur många siffror som sägs. Detta för att sedan göra en analys och få en uppfattning av talets storlek. Vet åhöraren inte hur många siffror det var kan denne inte bestämma talets storlek. Samma problem uppstår inte om talet muntligt uttrycks enligt ett hybridsystem, då talets storlek redan från början avslöjas: fem-tio-sju-miljoner-nit-tio-sju-tusen-tre-hundra-sex-tio-fem.

Vårt muntliga uttryckssätt ändras däremot när vi ska uttrycka tal muntligt innehållande decimaler. Det finns inte längre en kontinuitet i hur talen uttrycks och vi blandar de olika systemen. Hur uttrycks 301,024 muntligt? De hela delarna innan decimalkommat sägs enligt det hybrida systemet, men efter decimalkommat händer något. Talet skulle bland annat kunna sägas som: tre-hundra-ett-komma-noll-två-fyra eller tre-hundra-ett-komma-noll-tjugo-fyra. Efter decimalkommat finns ingen entydig muntlig framställning utan decimaltalen framställs enligt positionssystemet, eller så blandas de olika systemen. I artikeln *Tiobasmaterial - för tal i decimalform* skriver Lena Trygg om elevers svårighet att förstå positionernas storlek i decimalutvecklingar. Elever har svårt att ställa decimaltal i storleksordning och många menar att 0,9 är mindre än 0,10 (2013, s.1-2). Detta kan verka märkligt och oroväckande men att problemet uppstår är inte alls konstigt om vi ser till de olika sätt man muntligt kan uttrycka den decimala delen av talet. Uttrycker man talen som noll-komma-nio och noll-komma-tio är det lätt att tolka det första som mindre än det andra, 9 är ju mindre än 10. Då har eleven inte förståelse för vad de olika positionerna betyder. Säger man istället noll-komma-nio och noll-komma-ett-noll markeras positionerna och talens storlek gentemot varandra blir tydligare. Som lärare är det viktigt att vara medveten om detta då språket alltså kan vara ett hinder för eleverna att helt förstå positionssystemet. Alltså bör läraren tänka på hur denne talar i sin undervisning och vara så tydlig och konsekvent som möjligt gällande decimaler. Lärare bör också samtala och problematisera detta tillsammans med eleverna.

Att utföra beräkningar och förstå positionssystemet

Att förstå positionssystemet är av största vikt för att en elev ska kunna utveckla sina matematiska färdigheter. I flera historiska kulturer har kolumner eller rutsystem underlättat förståelsen av siffrornas värden på olika positioner. Detta är något som vi även idag ser i skolans värld då elever lär sig att räkna på rutat papper. Rutornas syfte är för dagens elever samma som för dåtidens matematiker, att underlätta och hålla isär talens storleksordningar, se figur 27. Vi anser att detta är bra, men det är viktigt att eleverna blir så förtrogna med positionssystemet att de skulle kunna räkna på ett blankt papper. Vi ser att detta var ett viktigt steg i historien, när indierna under beräkningar tog bort kolumnerna. Det var då de helt och fullt förstod innebörden av positionssystemet.

I vår jämförelse har vi presenterat några olika kulturers sätt att utföra multiplikation och de olika tillvägagångssätten har för- och nackdelar. En fördel med både den egyptiska och kinesiska multiplikationen är att det tydligt syns att räkneoperationerna division och multiplikation är varandras inverser. Deras uppställning av talen möjliggör för eleverna att få en tydligare förståelse av de båda operationerna och hur de hänger samman vilket inte alls syns på de uppställningar av multiplikation och division som vi idag lär ut till elever.

Vi har nämnt att det inte går att veta hur alla kulturer räknat då det i många fall enbart är svaren som nedtecknats. Detta kan exempelvis bero på att beräkningar skedde på räknebräden där delresultaten inte bevarades. När papper och penna började användas blev beräkningarna mer kompakta och delresultaten under beräkningar sparades, så som arabernas beräkning av multiplikation. En stor fördel med detta är att vi kan kontrollera vårt resultat i efterhand. Något vi märkt under vår verksamhetsförlagda utbildning är att lärare ofta får påpeka att eleverna ska visa sina uträkningar och i räknehäftet inte enbart skriva svaret. Kanske är det så att eleverna använder något digitalt hjälpmedel vilket medför att det blir lättare att snabbt ta sig igenom uträkningen utan att behöva förstå vad det är som görs. En risk med detta är att eleverna får ännu svårare att förstå positionssystemet då det är vid beräkningsprocesser det blir så tydligt.

Goda kunskaper i matematikhistoria gör det möjligt för läraren att förstå att vårt decimala positionssystem inte alltid har varit det gällande. Matematiken ska inte ses som något vedertaget utan som en mänsklig uppfinning som skulle kunna blivit annorlunda om exempelvis våra händer haft annat antal fingrar eller om det metriska systemet aldrig blivit en framgång. Att det decimala systemet idag känns så naturligt är för att vi utvecklat det så långt och det har blivit en del av vårt omedvetna och förgivettagna, en del av vår kultur. Det måste finnas en förståelse hos lärare om att positionssystemets fördelar väger tungt mot dess nackdelar och att det därför vid avancerad matematik är positionssystemet som är det mest framgångsrika. Däremot är valet av talbas mer en konsekvens av historien. Egentligen skulle någon annan talbas vara lika möjlig att använda sig av.

8. Slutsats

Det finns en mängd olika taltecken och talsystem som framträtt i olika kulturer genom åren som gått. Allt eftersom utbytet mellan kulturerna blivit större har taltecknen och talsystemen utvecklats och deras användning har blivit mer och mer konsekvent. Men vi kan fortfarande finna tillfällen där andra taltecken än de arabiska siffrorna används. Likaså finns det också tillfällen idag där vi finner andra talsystem än det decimala positionssystemet, såsom karvstockssystemet. Varför taltecknen blivit som de blivit är av många olika anledningar. Vissa vet vi än idag inte hur de har kommit till medan andra är mer självklara då vi ser att tecknets antal streck motsvarar talet. De olika typerna av talsystem används fortsatt idag; additiva talsystem vid kontanthantering, talsystem av hybridtyp när vi muntligt uttrycker tal och positionssystemet när tal uttrycks skriftligt och beräkningar genomförs. Trots att alla tre typer av talsystem fortfarande används är positionssystemet helt klart det mest fördelaktiga då positionssystemet är det enda i vilket vi kan utföra avancerade beräkningar.

Samma tydliga utveckling gäller inte för “valet” av talbas och taltecken. Där är det snarare tillfälligheter och tillgänglighet som varit avgörande. Även idag finns rester av olika talbaser och det är konsekvenser av historien. En av anledningarna till detta kan vara att olika kulturer kom olika långt inom skilda områden av matematiken och därför blev det deras sätt som levde vidare. Grekerna använde babyloniernas talsystem vid astronomiska beräkningar och detta är grunden till att cirkelns gradantal blev 360. Vi kan tänka oss att om vi idag hade börjat fundera kring ”ett helt varv” och hur många grader det innebär skulle vi förmodligen valt något annat gradantal. I ett decimalt positionssystem hade vi mer troligt valt 100 grader, eller kanske 400 grader för att få fler delare. Trots detta lever 360 grader kvar, mycket som en konsekvens av att vi har arbetat med detta gradantal under lång tid i historien. Ja, vi har vant oss vid det precis som med mycket annat. Vi har också vant oss vid talbasen tio och ser den som alldeles självklar. Den är grundläggande i all matematik inom skolan men bygger på tillfälligheten att människan har just tio fingrar.

Vi inser att det är mycket inom matematiken vi tar för givet som egentligen inte alls är det. Det är en insikt som kommer hjälpa oss, och förhoppningsvis även läsare av denna uppsats, framöver i ett kommande yrkesliv som matematiklärare. Med matematikhistoria i ryggen, förståelse för att det finns olika beräkningsmetoder vars fördelar är olika, kunskap om att vi dagligen lever i olika slags talsystem kan vi på ett bättre sätt föra vidare matematiken till kommande elever.

9. Referenser

Abakus (2013, 3 juni). I *Wikipedia*. Hämtad 2014-05-23, http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/af/Abacus_6.png

Decimaltid (2014, 4 januari). I *Wikipedia.* Hämtad 2014-05-15, http://sv.wikipedia.org/wiki/Decimaltid

Heath, Sir T. (1965). *A History of Greek Mathematics*. Oxford: University Press.

Ifrah, G. (2001a). *Räknekonstens kulturhistoria - från forntiden till dataåldern, Del 1.* Wahlström &Widstrand.

Ifrah, G. (2001b). *Räknekonstens kulturhistoria - från forntiden till dataåldern, Del 2.* Wahlström &Widstrand.

Johansson, B. G. (2013). *Matematikens historia.* Lund: Studentlitteratur.

McLeish, J. (1991). *Matematikens kulturhistoria*. Falkenberg: Forum.

Methods of computing square roots (2014, 15 maj). I *Wikipedia.* Hämtad 2014-05-27, www.en.wikipedia.org/wiki/Methods_of_computing_square_roots

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011* (LGR11).

Skolverket. (2011b), *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011* (LGY11).

Skolverket. (2011c). *Kommentarsmaterial för kursplanen i matematik*.

Skolverket. (2013). *PISA 2012 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap RESULTATEN I KONCENTRAT* (Sammanfattning av rapport: 398). Stockholm: Skolverket

Sveriges riksbank. (2012). *De nya sedlarna.* Hämtad: 2014-05-21, från www.riksbank.se/sv/Sedlar-och-mynt/Nya-sedlar-och-mynt/De-nya-sedlarna/

Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien.* Lund: Studentlitteratur.

Trygg, L. (2013). Tiobasmaterial - för tal i decimalform. *Nämnaren.* Hämtad: http://ncm.gu.se/media/matematiklyftet/pdf/T7-9_06A_03_tiobasmaterial.pdf

University of St Andrews, Scotland. (2011). *The MacTutor History of Mathematics archive.* Hämtad: 2014-04-22, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/HistoryTopics.html