

CHALMERS



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Geometri i höga dimensioner

Busemann-Petty-problemet

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Jessica Andersson

Alexandra Baumann

Kristoffer Boman

Geometri i höga dimensioner

Busemann-Petty-problemet

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Jessica Andersson Alexandra Baumann

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom matematikprogrammet vid Göteborgs universitet

Kristoffer Boman

Handledare: Elin Götmark Matematiska Vetenskaper
 Elizabeth Wulcan Matematiska Vetenskaper
Examinator: Maria Roginskaya

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2014

Sammanfattning

I detta kandidatarbete har vi fördjupat oss i ett par problem inom konvex geometri som har intresserat matematiker sedan mitten av 1900-talet, nämligen Busemann-Petty-problemet och Shephards problem. Busemann-Petty-problemet ställer följande fråga: Om det för alla hyperplan H genom origo gäller att volymen av snittet mellan den konvexa kroppen K och H är mindre än eller lika med volymen av snittet mellan den konvexa kroppen L och H , följer det då att volymen av K är mindre än eller lika med volymen av L ? I Shephards problem tittar vi på volymen av projektionen av konvexa kroppar på hyperplan istället för volymen av snitten mellan konvexa kroppar och hyperplan.

Innan vi fördjupar oss i dessa problem behöver vi ha en förståelse för vad som händer i höga dimensioner, vilket inte alltid följer intuitionen. Ett exempel är att volymen av den euklidiska bollen med fix radie ökar upp till dimension 5 och sedan minskar. Volymen för den euklidiska bollen går till och med mot noll då dimensionen går mot oändligheten. Det räcker inte med att studera euklidiska bollen för att få en förståelse av hur kroppar beter sig i höga dimensioner så vi har fokuserat på ytterligare två kroppar, nämligen kuben och korspolytopen. Vi har också studerat fenomen som volymkoncentration, innehållna och omslutande sfärer samt Johns sats.

Abstract

This bachelor thesis has its focus on a few problems in convex geometry which have interested mathematicians since the middle of the 20th century, namely the Busemann-Petty and Shephards problem. The Busemann-Petty problem asks the following question: If it for all hyperplanes H through the origin holds that the volume of the intersection between the convex body K and H is less than or equal to the volume of the intersection between the convex body L and H , is it true that the volume of K is less than or equal to the volume of L ? In Shephard's problem we look at the volume of the projection of convex bodies onto hyperplanes instead of intersections between convex bodies and hyperplanes.

Before treating these problems we need to have a better understanding of how things act in high dimensions, which is not always intuitive. An example is that the volume of the Euclidean ball with fixed radius increases up to the 5th dimension but then decreases. The volume in fact tends to zero as the dimension tends to infinity. It is not enough to study the Euclidean ball to form an understanding of how bodies act in high dimensions so we have chosen to focus on two other bodies, namely the cube and the cross-polytope. We have also studied phenomena like concentration of volume, sandwiching and enclosing spheres, and John's theorem.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Förberedande material och notation	3
I		5
3	Volym av bollen i L_p-normen	6
3.1	Rekursiv formel för beräkning av bollars volym	6
3.1.1	Volym av kub och korspolytop	8
3.2	Volym av euklidiska bollen	8
4	Kroppars innehållna och omslutande sfärer	9
4.1	Kuben	9
4.2	Korspolytopen	9
5	Volymkoncentration	10
5.1	Skal vid randen	10
5.2	Skivor genom origo	11
6	Johns sats	12
7	Approximation av den euklidiska bollen	12
II		14
8	Shephards problem och Petty Schneiders sats	15
8.1	Shephards problem, problem 2, i dimension 2	15
8.2	Projektionskroppar och mixad volym	15
8.3	Bevis av Petty-Schneiders sats, sats 1.1	19
9	Busemann-Petty-problemet och Lutwaks sats	20
9.1	Busemann-Petty-problemet, problem 1, i 2 dimensioner	20
9.2	Snittkroppar och dual mixad volym	20
9.3	Bevis av Lutwaks sats, sats 1.2	22

Förord

Arbetet är i första hand en litteraturstudie med inslag av egna resultat. Eftersom de olika delarna av teorin är ganska sammanhängande så har vi alla behövt studera litteraturen enskilt. Vi har haft regelbundna möten varje vecka där vi diskuterat materialet, jobbat i grupp med att lösa vissa problem, samt jobbat med rapport-skrivning. Jessica har tagit på sig det överhängande ansvaret för det administrativa upplägget av rapporten, så som versionshantering via dropbox och strukturen på dokumentet. Hon har även varit drivande med att planera möten. Huvudfokus i studien har legat på två artiklar [1] och [2] som handledarna har rekommenderat. Medlemmarna har självständigt hittat egna källor vid behov. Alexandra har varit ansvarig för all grafik utom figur 2 som Kristoffer har producerat och figur 10 som Jessica har gjort. Kristoffer och Jessica har stått för den större delen med att komma på idéer och att lösa problem men Alexandra har varit bidragande. Medlemmarna är huvudförfattare till följande kapitel och avsnitt. Kapitel och avsnitt inom parentes innebär att medlemmen haft en mindre roll.

Kristoffer: (1), 2, 3.1, 3.1.1, 3.2, (4), 5.1, 5.2, (8.2)

Jessica: 1, 2, 3, 3.1.1, 4, 5.2, 7, 8, 8.1, 8.2, 8.3, 9, 9.1, 9.2, 9.3

Alexandra: (1), 2, 3.1.1, (4), 6, (8.2), (9.2), 9.3

Vidare har medlemmarna producerat material som inte kommit med i rapporten. Mer detaljer finns i loggbok och dagbok.

Vi vill dessutom tacka Elin Götmark och Elizabeth Wulcan för deras givande och entusiastiska handledning av arbetet.

1 Inledning

Målet med detta kandidatarbete är att detaljerat gå igenom bevisen av två satser inom konvex geometri, nämligen Petty-Schneiders sats och Lutwaks sats. Vi har i vårt arbete inte bevisat alla de satser vi tar upp då fokus har legat på andra delar. För att nå vårt mål behöver vi börja med att lära oss mer om vad som händer med olika konvexa och symmetriska kroppar när dimensionen blir hög då det inte alltid följer intuitionen. Därför har vi i del I studerat egenskaper hos tre objekt, nämligen kuben, korspolytopen och euklidiska bollen. Vi har tittat på deras volym och på hur volymen av skivor och skal av dessa kroppar beror av dimensionen. Vi har också valt att fördjupa oss i Johns sats som säger att för varje konvex symmetrisk kropp K finns en unik ellipsoid inuti K av maximal volym. Satsen ger även villkor för när denna ellipsoid är den euklidiska enhetsbollen. Vi har också studerat frågan om man kan approximera den euklidiska bollen med polytofer.

År 1956 formulerades tio problem som handlade om konvexa origo-symmetriska kroppar i \mathbb{R}^n av Herbert Busemann och Clinton Myers Petty [4]. Det första av dessa var det så kallade Busemann-Petty-problemet. Låt oss införa lite notation för att kunna formulera Busemann-Petty-problemet.

Låt $V^n(K)$ beteckna den n -dimensionella volymen av kroppen K . En mängd N sägs vara konvex om det för alla punkter $x, y \in N$ uppfyller villkoret $\lambda x + (1 - \lambda)y \in N$ för alla $\lambda \in [0, 1]$, det vill säga linjestycket mellan x och y ligger helt innehållit i N . En konvex kropp är en konvex mängd med ett icke-tomt inre. Låt \mathcal{K}^n beteckna mängden av alla konvexa kroppar i \mathbb{R}^n och låt \mathcal{K}_c^n beteckna mängden av alla konvexa kroppar i \mathbb{R}^n som är symmetriska med avseende på origo. Då är $\mathcal{K}_c^n \subset \mathcal{K}^n$. Ett hyperplan delar \mathbb{R}^n i två halvrum.

Problem 1 (Busemann-Petty). *Antag att $K, L \in \mathcal{K}_c^n$ sådana att*

$$V^{n-1}(K \cap H) \leq V^{n-1}(L \cap H)$$

för alla hyperplan H som går genom origo. Följer det då att

$$V^n(K) \leq V^n(L)?$$

Busemann och Petty visade själva att detta antagande stämde för godtyckliga n om K är en euklidisk boll [5]. För andra konvexa kroppar i \mathcal{K}_c^n är påståendet sant för $n \leq 4$ men inte i allmänhet för $n > 4$ [5]. Ett relaterat problem är Shephards problem. Låt oss införa ytterligare notation för att kunna formulera detta problem.

Låt S^{n-1} beteckna enhetssfären i \mathbb{R}^n , alltså

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}.$$

För $u \in S^{n-1}$ låt E_u beteckna det hyperplan som är ortogonalt mot u och går genom origo. Låt $K|E_u$ vara bilden av $K \in \mathcal{K}^n$ under den ortogonala projektionen på E_u .

Problem 2 (Shephard). *Om $K, L \in \mathcal{K}_c^n$ och*

$$V^{n-1}(K|E_u) \leq V^{n-1}(L|E_u)$$

för alla $u \in S^{n-1}$, följer det då att

$$V^n(K) \leq V^n(L)?$$

Problemet kan till exempel hittas i [2, s.232]. Petty [6] och Schneider [7] visade, oberoende av varandra, att Shephards problem i allmänhet inte är sant. De lyckades även, ett år efter att Shephards problem formulerats, visa att påståendet är sant om kroppen L begränsas till att vara en projektionskropp, vilken definieras i del II. Projektionskroppen av en kropp $K \in \mathcal{K}^n$ skriver vi som ΠK och vi låter $\Pi^n = \{\Pi K \mid K \in \mathcal{K}^n\}$. En *translation* är en förflyttning i någon riktning, det vill säga en translation är bilden under avbildningen $f(x) = x + a, a \in \mathbb{R}$ [9].

Sats 1.1 (Petty-Schneider). *Antag $K \in \mathcal{K}^n, L \in \Pi^n$. Om det för alla $u \in S^{n-1}$ gäller att*

$$V^{n-1}(K|E_u) \leq V^{n-1}(L|E_u), \tag{1}$$

så är $V^n(K) \leq V^n(L)$. Dessutom gäller $V^n(K) = V^n(L)$ om och endast om K och L är translationer av varandra.

Låt \mathcal{S}^n beteckna mängden av alla stjärnkroppar och låt \mathcal{K}^n beteckna mängden av alla snittkroppar av stjärnkroppar. Vi lämnar definition av stjärnkropp och snittkropp till del II. Det gäller att $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{S}^n$. År 1988 visade Lutwak att svaret på Busemann-Petty-problemet är ja i alla dimensioner om $K \in \mathcal{S}^n$ och $L \in \mathcal{S}^n$ [2]. Mer allmänt bevisade Lutwak följande sats.

Sats 1.2 (Lutwak). *Om $K \in \mathcal{S}^n$, $L \in \mathcal{S}^n$ och*

$$V^{n-1}(K \cap E_u) \leq V^{n-1}(L \cap E_u) \tag{2}$$

för alla $u \in S^{n-1}$, så är $V^n(K) \leq V^n(L)$. Dessutom gäller $V^n(K) = V^n(L)$ om och endast om $K = L$.

I del II visar vi att Shephards problem är sant i 2 dimensioner för konvexa kroppar K och L . Vi visar Petty-Schneiders sats, sats 1.1, genom att följa Lutwaks bevis [2, kapitel 9]. Vi visar att Busemann-Petty-problemet är sant i 2 dimensioner för konvexa kroppar K och L och avslutar med att ge ett bevis för sats 1.2 som följer Lutwaks [2, kapitel 10]. Beviset av Petty-Schneiders sats och beviset för Lutwaks sats, sats 1.2, har liknande struktur.

2 Förberedande material och notation

En konvex mängd M kan beskrivas utifrån stödjande hyperplan och stödjande halvrum. Hyperplanet sägs vara stödjande till M om M är helt innehållen i ett av de två halvrummen samt om M har åtminstone en av sina randpunkter på hyperplanet. Slutna halvrum H_i som innehåller M kallas stödjande halvrum och M kan beskrivas som $\bigcap H_i$.

En *polytop* i \mathbb{R}^n kan definieras som en mängd begränsad genom ett ändligt snitt av halvrum. En *fasett* är en sida av denna polytop av dimension $n - 1$.

Gammalfunktionen definieras som

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

och kallas även för Eulers integral av typ två. Det finns två egenskaper hos $\Gamma(t)$ som vi vill uppmärksamma lite extra.

1. Om n är ett positivt heltal så är

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{3}$$

2. Låt $t \in \mathbb{R}_+$. Det följer genom partialintegration av $\Gamma(t)$ att

$$t\Gamma(t) = \Gamma(t+1). \tag{4}$$

En *dilatation* är en förstoring eller en förminskning kring en given punkt med hjälp av en skalfaktor [10]. Att två kroppar är *homotetiska* betyder att de kan vara både dilatationer och/eller translationer av varandra [12].

Låt $(e_i)_1^n$ vara standardbasen till \mathbb{R}^n . Låt ∂K beteckna randen till kroppen K . När vi skriver dV menas det n -dimensionella volymelementet och dA^{n-1} är motsvarande areaelement. Vi kommer ibland att skriva $V(K)$ istället för $V^n(K)$.

Vi kommer använda oss av olika L_p -normer när vi mäter längden på vektorn $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i \mathbb{R}^n för att på ett enkelt sätt kunna beskriva några av de kroppar vi kommer diskutera. L_p -normen i \mathbb{R}^n är definierad för $p < \infty$ enligt följande:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{R}_+.$$

L_∞ -normen eller *maxnormen* är definierad enligt följande:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Sats 2.1. *Maxnormen är gränsvärde för $\|\mathbf{x}\|_p$ då \mathbf{x} hålls fix och $p \rightarrow \infty$.*

Bevis. Från uttrycket $(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ får vi olikheten

$$\left(\max_{1 \leq k \leq n} |x_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(n \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Eftersom $(\max_{1 \leq k \leq n} |x_k|^p)^{1/p} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ och $\lim_{p \rightarrow \infty} (n \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|^p)^{1/p} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ så följer satsen från instängningssatsen. \square

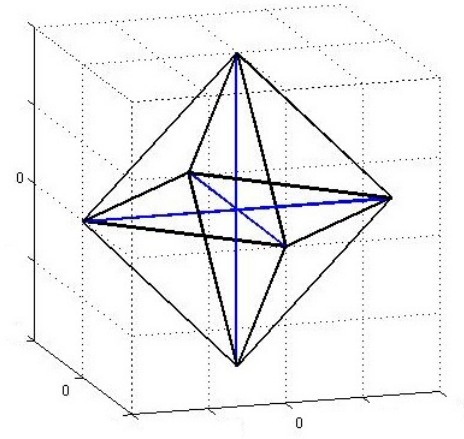
Bollen i \mathbb{R}^n med radie R i L_p -normen betecknar vi som

$$B_p^n(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_p \leq R\}.$$

Vi kommer skriva $B_p^n(1)$ som B_p^n . En sådan boll kommer ha en rand som vi betecknar

$$S_p^{n-1}(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_p = R\}.$$

Exempelvis är en kub en boll i L_∞ -normen. En boll i L_1 -normen kallar vi en korspolytop (eng. cross-polytope), se figur 1. Bollen i L_2 -normen är den vanliga euklidiska bollen. Vi kommer beteckna volymen av $B_p^n(R)$ med $V_p^n(R)$ och arean av dess rand med $A_p^{n-1}(R)$.



Figur 1: Korspolytopen i 3 dimensioner, B_1^3 .

Del I

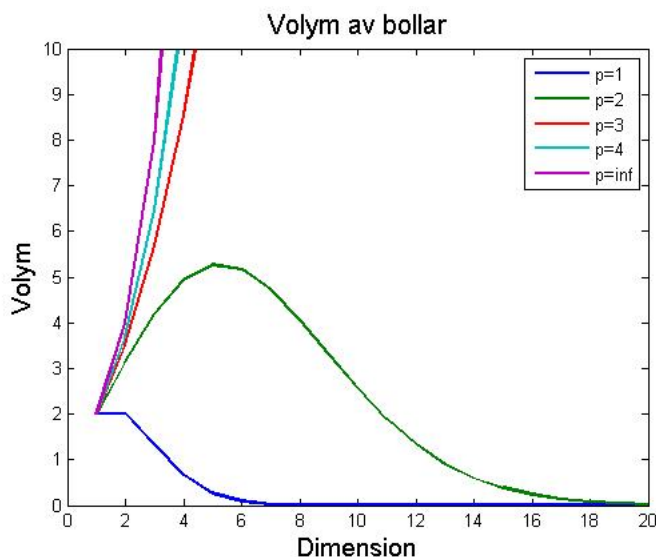
3 Volym av bollen i L_p -normen

Låt oss studera volymen av bollar i olika L_p -normer i dimension n för att få en uppfattning om vad som händer i höga dimensioner. Det är känt [13] att det allmänna uttrycket för volymen av $B_p^n(R)$ är:

$$V_p^n(R) = \frac{\left(2R\Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p} + 1\right)}. \quad (5)$$

Figur 2 illustrerar detta för olika normer och dimensioner då $R = 1$.

Låt oss titta mer specifikt på kuben, korspolytopen och euklidiska bollens volym i godtycklig dimension i kommande avsnitt.



Figur 2: Volym av bollar för olika normer och dimensioner.

3.1 Rekursiv formel för beräkning av bollars volym

Vi tar nu fram en rekursionsformel som beskriver volymen av en boll $B_p^n(R)$. Denna kan användas för att ta fram slutna formler för volymerna av de olika bollarna.

Sats 3.1. Volymen av $B_p^n(R)$ kan beräknas med den rekursiva formeln

$$V_p^n(R) = \int_{-R}^R V_p^{n-1}\left((R^p - |x_n|^p)^{1/p}\right) dx_n \quad (6)$$

då $p < \infty$ och $n > 2$. I L_∞ gäller specialfallet

$$V_\infty^n(R) = \int_{-R}^R V_\infty^{n-1}(R) dx_n. \quad (7)$$

Bevis. Volymen $V_p^n(R)$ beräknas med en integral över x_n -axeln där integranden beskriver de tvärsnitt av dimension $n - 1$ i $B_p^n(R)$ som är ortogonala mot denna axel. Som bekant består $B_p^n(R)$ av alla punkter som uppfyller

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \leq R. \quad (8)$$

Låt oss nu fixera x_n och lösa ut de fria variablerna i (8). Vi erhåller då

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} |x_k|^p \right)^{1/p} \leq (R^p - |x_n|^p)^{1/p}. \quad (9)$$

Tvårsnittet som innehåller punkten x_n består alltså av mängden $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \left(\sum_{k=1}^{n-1} |x_k|^p \right)^{1/p} \leq (R^p - |x_n|^p)^{1/p}\}$.

Vi känner igen detta som $B_p^{n-1}((R^p - |x_n|^p)^{1/p})$ vilket har volym $V_p^{n-1} \left((R^p - |x_n|^p)^{1/p} \right)$, så om vi integrerar längs x_n -axeln får vi

$$V_p^n(R) = \int_{-R}^R V_p^{n-1} \left((R^p - |x_n|^p)^{1/p} \right) dx_n,$$

vilket bevisar första delen av satsen.

Andra delen följer eftersom volymen av en kub är integralen från $-R$ till R längs alla axlar, men vi visar nu även hur det följer från ovanstående resonemang. När $|x_n| < R$ går det att visa att

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (R^p - |x_n|^p)^{1/p} = R, \quad (10)$$

och från sats 2.1 vet vi att $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} |x_k|^p \right)^{1/p} = \max_{1 \leq k \leq n-1} |x_k|$. Eftersom (9) gäller för alla p och (10) gäller, följer det att (9) blir $\max_{1 \leq k \leq n-1} |x_k| \leq R$ för L_∞ -normen. Vi kan nu beskriva tvårsnittet som innehåller punkten x_n som mängden $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \max_{1 \leq k \leq n-1} |x_k| \leq R\}$ istället, som vi känner igen som $B_\infty^{n-1}(R)$. Volymen av $B_p^n(R)$ ges därför av

$$V_\infty^n(R) = \int_{-R}^R V_\infty^{n-1}(R) dx_n.$$

□

Då $B_p^1(R)$ består av linjesegmentet $-R \leq x \leq R$ för alla p , så inses det lätt att $V_p^1(R) = 2R$.

Sats 3.2. *Det gäller att $V_p^n(R)$ är proportionell mot R^n och $A_p^{n-1}(R)$ är proportionell mot R^{n-1} .*

Bevis. Satsen följer genom induktion. Basfallet $n = 1$ är klart eftersom $V_p^1(R) = 2R$. Antag att påståendet är sant för $n - 1$ och $p < \infty$. Då gäller, för någon konstant k_{n-1} :

$$V_p^{n-1}(R) = k_{n-1} \cdot R^{n-1}.$$

Detta medför att

$$V_p^{n-1} \left((R^p - x_n^p)^{1/p} \right) = k_{n-1} \cdot R^{n-1} \left(1 - \left(\frac{x_n}{R} \right)^p \right)^{(n-1)/p} = R^{n-1} V_p^{n-1} \left(\left(1 - \left(\frac{x_n}{R} \right)^p \right)^{1/p} \right).$$

Enligt sats (3.1) har vi

$$V_p^n(R) = \int_{-R}^R V_p^{n-1} \left((R^p - x_n^p)^{1/p} \right) dx_n = R^{n-1} \int_{-R}^R V_p^{n-1} \left(\left(1 - \left(\frac{x_n}{R} \right)^p \right)^{1/p} \right) dx_n.$$

Variabelbytet $t = x_n/R$ ger nu

$$V_p^n(R) = R^n \int_{-1}^1 V_p^{n-1} \left((1 - t^p)^{1/p} \right) dt = R^n V_p^n(1), \quad (11)$$

vilket bevisar första delen. Sista likheten följer från (6). Sambandet gäller även för $p = \infty$ enligt den slutna formeln för $V_\infty^n(R)$ som visas i nästa avsnitt. Andra delen följer genom att betrakta volym som en integral av area, $\int_0^R A_p^{n-1}(r) dr = V_p^n(R)$, vilket enligt analysens fundamentalsats och (11) ger

$$A_p^{n-1}(R) = \frac{d}{dR} V_p^n(R) = nR^{n-1} V_p^n(1). \quad (12)$$

□

Från (12) får vi direkt att $A_p^{n-1}(1) = nV_p^n(1)$. Därmed kan vi skriva (12) som

$$A_p^{n-1}(R) = R^{n-1} A_p^{n-1}(1). \quad (13)$$

3.1.1 Volym av kub och korspolytop

Vi undersöker nu vad sats 3.1 säger om volymen av kuben och korspolytopen. Det följer direkt från (7) att $V_\infty^n(R) = (2R)^n$. En enkel räkning från sats 3.1 ger

$$V_1^2(R) = \frac{(2R)^2}{2!}, V_1^3(R) = \frac{(2R)^3}{3!}.$$

Detta leder oss till hypotesen att $V_1^n(R) = \frac{(2R)^n}{n!}$, vilket är i överensstämmelse med (5).

Sats 3.3. Korspolytopen har volym $V_1^n(R) = \frac{(2R)^n}{n!}$.

Bevis. Satsen följer genom induktion, där basfallet är $V_1^1(R) = 2R$. Antag att $V_1^{n-1}(R) = \frac{(2R)^{n-1}}{(n-1)!}$. Sätter vi in detta i (6) så får vi

$$V_1^n(R) = \int_{-R}^R V_1^{n-1}(R - |x_n|) dx_n = 2 \int_0^R \frac{(2(R - x_n))^{n-1}}{(n-1)!} dx_n = \frac{(2R)^n}{n!}$$

där vi i andra likheten använder symmetri. □

3.2 Volym av euklidiska bollen

Vi tar här fram en sluten formel för volymen av den euklidiska bollen. Istället för att använda oss av rekursionsformeln så använder vi en mer vanligt förekommande metod. Vi börjar med att betrakta ett resultat rörande gaussiska integraler.

Sats 3.4. Integralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$ har värdet $\sqrt{2\pi}$.

Då den primitiva funktionen av integranden inte kan uttryckas i elementära funktioner så kan inte integralen utvärderas direkt. Integralen kan ändå räknas ut genom en elementär metod som först utarbetades av Poisson. Om man kvadrerar integralen så kan den skrivas som en dubbelintegral över \mathbb{R}^2 . Denna kan lösas genom byte till polära koordinater:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-1/2(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr = 2\pi.$$

Satsen följer från detta. Vi kommer att använda detta resultat i följande sats som är välkänd och vi följer beviset i [11].

Sats 3.5. Volymen av $B_2^n(R)$ är

$$V_2^n(R) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n.$$

Bevis. Betrakta funktionen

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \left(\prod_{i=1}^n e^{x_i^2}\right)^{-1/2}.$$

Denna funktion är symmetrisk kring origo och därmed invariant under rotation. Funktionen är också integrerbar, så integralen av $f(x)$ i \mathbb{R}^n kan skrivas som itererade enkelintegraler enligt Fubinis sats. Därmed kan vi integrera funktionen över hela \mathbb{R}^n på följande vis:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2/2} dx_i = (2\pi)^{n/2}. \tag{14}$$

I sista likheten har vi använt sats 3.4. Genom att integrera f över en sfär $S_2^{n-1}(r)$ med areaelement dA så får vi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dV = \int_0^{\infty} \int_{S_2^{n-1}(r)} e^{-r^2/2} dA dr.$$

Enligt (13) gäller $A_2^{n-1}(r) = r^{n-1}A_2^{n-1}(1)$, så

$$\int_0^\infty \int_{S_2^{n-1}(r)} e^{-r^2/2} dAdr = \int_0^\infty e^{-r^2/2} \int_{S_2^{n-1}(r)} dAdr = A_2^{n-1}(1) \int_0^\infty e^{-r^2/2} r^{n-1} dr.$$

Vi gör nu variabelbytet $t = \frac{r^2}{2}$ och får då

$$A_2^{n-1}(1) \cdot 2^{n/2-1} \int_0^\infty e^{-t} t^{n/2-1} dt = A_2^{n-1}(1) \cdot 2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = (2\pi)^{n/2}$$

där sista likheten följer från (14). Därmed ser vi att

$$A_2^{n-1}(1) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Slutligen så beräknar vi volymen av bollen genom att integrera areaelementen:

$$V_2^n(R) = \int_0^R A_2^{n-1}(r) dr = \int_0^R \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} dr = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n.$$

□

Sats 3.6. *Vi har att $V_2^n(R) \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$.*

Bevis. Om vi låter $n \rightarrow \infty$ kommer $\Gamma(n)$ bete sig ungefär som $n!$, se (3), och vi ser att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_2^n(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n = 0.$$

□

4 Kroppars innehållna och omslutande sfärer

I detta kapitel ska vi titta på den minsta sfär som omsluter $S_\infty^{n-1}(R)$ och $S_1^{n-1}(R)$ samt den största sfär som får plats inuti $S_\infty^{n-1}(R)$ och $S_1^{n-1}(R)$. Låt R_{oms} beteckna radien för den minsta omslutande sfären och låt R_{inh} beteckna radien för den största sfär som får plats inuti kroppen.

4.1 Kuben

För att hitta R_{oms} till $S_\infty^{n-1}(R)$ behöver vi veta vilka punkter på $S_\infty^{n-1}(R)$ som befinner sig längst bort från origo. Dessa punkter är hörnen i $S_\infty^{n-1}(R)$ och det inses att punkterna har koordinaterna $(\pm R, \dots, \pm R)$. Deras avstånd från origo blir R_{oms} . Vi får att

$$R_{oms} = \sqrt{R^2 + \dots + R^2} = \sqrt{n}R.$$

För att hitta R_{inh} vill vi hitta de punkter på $S_\infty^{n-1}(R)$ som ligger närmast origo. Det är punkterna på $S_\infty^{n-1}(R)$ som ligger på koordinataxlarna och det inses lätt att punkterna har koordinaterna $\pm Re_1, \dots, \pm Re_n$. Punkternas avstånd från origo är R , så

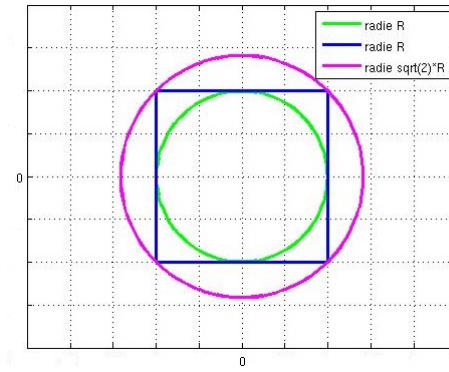
$$R_{inh} = R.$$

Den omslutande sfärens radie kommer att öka med dimensionen medan den innehållnas radie kommer att vara fix. Figur 3 illustrerar den minsta omslutande samt den största innehållna sfären till $S_\infty^{n-1}(R)$ i 2 dimensioner.

4.2 Korspolytopen

Låt oss nu titta på den minsta omslutande samt största innehållna sfären till $S_1^{n-1}(R)$. De punkter på $S_1^{n-1}(R)$ som ligger längst bort från origo blir punkterna på koordinataxlarna och det inses att punkterna har koordinaterna $\pm Re_1, \dots, \pm Re_n$. Alltså är

$$R_{oms} = R.$$

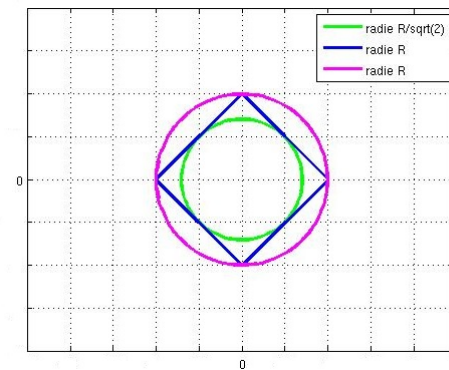


Figur 3: Kuben med omslutande och innehållna sfärer.

Punkterna på $S_1^{n-1}(R)$ som ligger närmast origo kommer vara punkterna som ligger i mitten av varje kvadrant på $S_1^{n-1}(R)$. Det inses lätt att dessa punkter har koordinaterna $(\pm R/n, \dots, \pm R/n)$. Så

$$R_{inh} = \sqrt{\left(\frac{R}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{R}{n}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{n}}.$$

Den innehållna sfärens radie kommer att minska med dimensionen medan den omslutandes radie kommer att vara fix. Figur 4 illustrerar den minsta omslutande samt den största innehållna sfären till $S_1^{n-1}(R)$ i 2 dimensioner.



Figur 4: Korspolytopen med omslutande och innehållna sfärer.

5 Volymkoncentration

Vi undersöker nu volymen av olika delar av bollarna. Vi kommer att titta på ett tunt skal nära kroppens yta samt skärningen av kroppen med en tunn skiva genom origo. Vi kommer att visa att volymen koncentreras i skalet på samtliga bollar då $n \rightarrow \infty$ medan volymen koncentreras i skivorna när $n \rightarrow \infty$ för några av bollarna.

5.1 Skal vid randen

Vi tar först fram ett uttryck för volymen av ett tunt yttre skal med tjocklek ε där kropparnas rand utgör skalets yttre rand.

Definition 5.1. Låt $D_p^n(R, \varepsilon)$ beteckna volymen av ε -skalet $B_p^n(R) \setminus B_p^n(R - \varepsilon)$.

För $p \leq \infty$ får vi

$$D_p^n(R, \varepsilon) = V_p^n(R) - V_p^n(R - \varepsilon).$$

Vi använder tidigare resultat för att beräkna tre specialfall. Då $p = \infty$ får vi

$$D_\infty^n(R, \varepsilon) = V_\infty^n(R) - V_\infty^n(R - \varepsilon) = (2R)^n - (2(R - \varepsilon))^n$$

som är volymen av ε -skalet i kuben, samt då $p = 1$ fås

$$D_1^n(R, \varepsilon) = V_1^n(R) - V_1^n(R - \varepsilon) = \frac{2^n}{n!} (R^n - (R - \varepsilon)^n)$$

som är volymen av ε -skalet i korspolytopen. För euklidiska bollen blir volymen av skalet

$$D_2^n(R, \varepsilon) = V_2^n(R) - V_2^n(R - \varepsilon) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} (R^n - (R - \varepsilon)^n).$$

Volymen hos $B_p^n(R)$ koncentreras vid randen i höga dimensioner vilket ses genom följande sats.

Sats 5.2. *Det gäller att $\frac{D_p^n(R, \varepsilon)}{V_p^n(R)} \rightarrow 1$ när $n \rightarrow \infty$.*

Bevis.

$$\frac{D_p^n(R, \varepsilon)}{V_p^n(R)} = \frac{R^n V_p^n(1) - (R - \varepsilon)^n V_p^n(1)}{R^n V_p^n(1)} = 1 - \left(\frac{R - \varepsilon}{R}\right)^n.$$

Detta uttryck närmar sig 1 då $n \rightarrow \infty$ och det följer att massan koncentreras vid randen av dessa objekt. \square

5.2 Skivor genom origo

Vi undersöker nu hur stor andel av volymen som ligger i smala skivor genom origo, speciellt då $n \rightarrow \infty$.

Definition 5.3. Låt $G_p^n(R, \varepsilon)$ beteckna volymen av ε -skivan som utgörs av mängden $\{x \in B_p^n(R) \mid -\frac{\varepsilon}{2} \leq x_n \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$.

Då $p = \infty$ får vi

$$G_\infty^n(R, \varepsilon) = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} V_\infty^{n-1}(R) dx_n = (2R)^{n-1} \varepsilon.$$

Detta är volymen av den skiva som skär $B_\infty^n(R)$ på dess "smalaste" område och volymen av snittet går mot oändligheten när $n \rightarrow \infty$ om $R > 1/2$. Det följer då att volymen av alla snitt med skivor genom origo i $B_\infty^n(R)$ med $R > 1/2$ och med bredd ε går mot oändligheten. Andelen av den totala volymen som $G_\infty^n(R, \varepsilon)$ utgör är

$$\frac{G_\infty^n(R, \varepsilon)}{V_\infty^n(R)} = \frac{(2R)^{n-1} \varepsilon}{(2R)^n} = \frac{\varepsilon}{2R}.$$

Alltså är andelen volym i en sådan skiva oberoende av dimensionen för $B_\infty^n(R)$.

För $p = 1$ får vi

$$G_1^n(R, \varepsilon) = 2 \int_0^{\varepsilon/2} V_1^{n-1}(R - x_n) dx_n = \frac{2^n}{n!} \left(R^n - \left(R - \frac{\varepsilon}{2} \right)^n \right) \quad (15)$$

som är volymen av den skiva som går över korspolytopens "bredaste" område. Andelen av den totala volymen som $G_1^n(R, \varepsilon)$ utgör är

$$\frac{G_1^n(R, \varepsilon)}{V_1^n(R)} = \frac{\frac{2^n}{n!} (R^n - (R - \frac{\varepsilon}{2})^n)}{\frac{(2R)^n}{n!}} = 1 - \left(\frac{R - \frac{\varepsilon}{2}}{R} \right)^n.$$

Denna kvot går mot 1 då n går mot oändligheten, vilket betyder att volymen koncentreras i skivan.

6 Johns sats

En ytterligare aspekt av konvexa origosymmetriska kroppars beteenden visas i följande sats, som bevisades av Fritz John 1948 [8].

Sats 6.1 (Johns sats). *För varje $K \in \mathcal{K}^n$ finns en unik ellipsoid, ϵ_{max} , innehållen i K , av maximal volym. Ellipsoiden ϵ_{max} är B_2^n om och endast om*

1. $B_2^n \subseteq K$

2. *det för något m finns enhetsvektorer $(u_i)_{i=1}^m$, $u_i \in \partial B_2^n \cap \partial K$, och positiva tal $(c_i)_{i=1}^m$ så att*

- i) $\sum c_i u_i = 0$

- ii) $\sum c_i \langle x, u_i \rangle^2 = |x|^2$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$ vilket är ekvivalent med att $x = \sum c_i \langle x, u_i \rangle u_i$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$.

Vi ska ej bevisa satsen men för att illustrera satsen i \mathbb{R}^n kan vi ta ett enkelt exempel. En konvex kropp vars maximala ellipsoid utgörs av enhetsbollen är kuben med centrum i origo och sidan 2. I den kuben kan vi välja u_i till att vara $\pm e_1, \dots, \pm e_n$. När dessa adderas blir summan 0 om alla $c_i = 1/2$. Även villkor ii) är då uppfyllt.

Om kroppen istället är en rektangel i \mathbb{R}^2 med hörn i punkterna $(-1, 2)$, $(1, 2)$, $(1, -2)$ samt $(-1, -2)$ skulle de enda u_i som ligger i snittet $\partial B_2^n \cap \partial K$ vara $(-1, 0)$ och $(1, 0)$. Så villkor i) är uppfyllt men inte villkor ii), ty enbart vektorerna $(-1, 0)$ och $(1, 0)$ spänner inte upp \mathbb{R}^2 . I detta fall är inte $\epsilon_{max} B_2^2$ utan ellipsoiden $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$.

Det finns även en analog till sats 6.1 som säger att varje $K \in \mathcal{K}^n$ omsluts av en unik ellipsoid, ϵ_{min} , av minimal volym [1, s.15].

7 Approximation av den euklidiska bollen

I detta kapitel studerar vi hur väl det går att approximera B_2^n med symmetriska polytooper i olika dimensioner och materialet kommer från [1]. Alla kroppar i detta kapitel är symmetriska och konvexa med avseende på origo. För att kunna jämföra avstånd mellan två kroppar inleder vi med följande definition.

Definition 7.1. Givet två symmetriska och konvexa kroppar K och L , låt $d = d(K, L)$ vara det minsta d så att det existerar en linjär avbildning T sådan att

$$T(L) \subset K \subset dT(L).$$

Vi kallar $d(K, L)$ avståndet mellan K och L .

Polytooper som kan omvandlas, genom en linjär avbildning, till samma polytop bildar en ekvivalensklass. Avståndet d i definition (7.1) bildar ett multiplikativt avstånd mellan alla sådana ekvivalensklasser. Om vi tar $\log d$ istället så får vi ett additivt avstånd som blir en metrik på mängden av alla ekvivalensklasser. Då K och L är ekvivalenta blir det multiplikativa avståndet $d = 1$, medan det additiva blir $\log(1) = 0$.

Exempel 1. Vad blir avståndet mellan B_∞^n och B_2^n ? För B_∞^n är avståndet från origo till punkten längst bort \sqrt{n} och för B_2^n är avståndet 1, som vi såg i avsnitt 4.1. Vi såg också i avsnitt 4.1 att den största innehållna sfären i B_∞^n är B_2^n och att den minsta omslutande är $B_2^n(\sqrt{n}) = \sqrt{n}B_2^n$. Det följer att

$$d(B_\infty^n, B_2^n) = \sqrt{n}.$$

Sats 7.2. *Låt K vara en symmetrisk polytop i \mathbb{R}^n med $d(K, B_2^n) = d$. Då har K minst $e^{n/(2d^2)}$ fasetter. För varje n finns en polytop med 4^n fasetter vars avstånd från bollen är högst 2.*

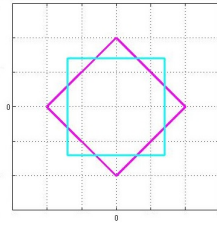
Satsen bevisas i [1, s.9]. När K har m fasetter är alltså avståndet till B_2^n åtminstone $d = \sqrt{\frac{n}{2 \log(m)}}$.

Om vi tar snittet av en kub i dimension m med ett linjärt underrum av dimension n får vi en polytop i \mathbb{R}^n med som mest $2m$ fasetter. Detta beror på att kuben är ett snitt av $2m$ halvrum i \mathbb{R}^m . Det finns alltså endast $2m$ halvrum som underrummet kan skära, och varje sådant halvrum kan bidra till som mest en fasett. Det existerar snitt i B_∞^m vars avstånd från B_2^n är litet och dimensionen på dessa snitt är högst ungefär $\log(m)$ [1, s.9]. Ett snitt som har avstånd d från B_2^n har enligt sats 7.2 minst $e^{n/(2d^2)}$ antal fasetter, där n är dimensionen på skärningen. Vi har därför olikheten $e^{n/(2d^2)} \leq 2m$. Från detta får vi $n \leq 2d^2 \log(2m)$, vilket betyder att dimensionen för snittet är som mest ungefär $\log(m)$ om snittet ska ha litet avstånd från B_2^n .

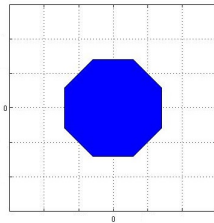
Det går också att snitta B_1^m med ett linjärt underrum av dimension n så att snittet har litet avstånd till B_2^n [1, s. 19]. Dimensionen n måste vara ungefär $m/2$ och inte mer [1, s. 20].

Sats 7.3. För varje n finns en ortogonal transformation T för vilket snittet $B_1^n \cap TB_1^n$ omsluts av den euklidiska bollen med radie $32/\sqrt{n}$.

Satsen bevisas i [1, s.20]. En av de saker man kan titta på för att få en intuitiv bild av satsen är antalet fasetter. Till exempel har kuben $2n$ fasetter och en korspolytop 2^n stycken. För att kunna approximera bollen behövs exponentiellt många. Vi kan inse att satsen inte kan gälla för kuben då den inte har exponentiellt många fasetter. Korspolytopen som dock har exponentiellt många fasetter är inte heller nära bollen. Om man däremot roterar korspolytopen och ser på $B_1^n \cap TB_1^n$ så kommer det att likna en boll mer. För en korspolytop i två dimensioner B_1^2 är den bästa avbildningen T vi kan välja, en rotation på $\pi/4$ radianer. Snittet mellan B_1^2 och TB_1^2 blir en oktagon, se figur 5 och 6.



Figur 5: Snittet ger en oktagon



Figur 6: Oktagon

Kan vi få något som liknar en sfär oavsett vilken kropp vi startar med? QS -satsen nedan säger att oavsett vilken kropp man börjar med kan man få något som ligger nära en sfär genom att kombinera operationerna snitt och konvext hölje.

Sats 7.4 (QS -satsen). Det existerar en oberoende konstant C , så att det för varje $K \in \mathcal{K}_c^n$ finns linjära avbildningar Q och S samt en ellipsoid ξ så att

$$\xi \subset \tilde{K} \cap S\tilde{K} \subset C\xi,$$

där $\tilde{K} = \text{conv}(K \cup QK)$.

QS -satsen kan hittas i [1, s. 25].

Del II

8 Shephards problem och Petty Schneiders sats

I detta kapitel visar vi att Shephards problem, problem 2, är sant i 2 dimensioner. Vi ger ett bevis för Petty-Schneiders sats, sats 1.1, och vi introducerar ett avsnitt med definitioner och lemmen före som behövs för beviset.

8.1 Shephards problem, problem 2, i dimension 2

Sats 8.1. Om $K, L \in \mathcal{K}_c^2$ och

$$V^1(K|E_u) \leq V^1(L|E_u)$$

för alla $u \in S^1$, så är

$$V^2(K) \leq V^2(L).$$

Bevis. Notera att $K|E_u$ och $L|E_u$ är linjesegment. Därför är $V^1(K|E_u)$ och $V^1(L|E_u)$ längden av respektive linjesegment. Eftersom $V^1(K|E_u) \leq V^1(L|E_u)$ gäller och kropparna är centrerade så är

$$K|E_u \subseteq L|E_u. \quad (16)$$

Låt $a_{K1}(u)$ vara vektorn som är ortogonal mot u med $|a_{K1}(u)| = V^1(K|E_u)/2$ och låt $a_{K2}(u) = -a_{K1}(u)$. Låt $l_{K1}(u)$ vara linjen som är parallell med u och går genom $a_{K1}(u)$. Notera att $l_{K1}(u)$ är stödjande hyperplan till K . Låt nu $H_{K1}(u)$ vara det stödjande halvrummet till K som definieras av $l_{K1}(u)$, det vill säga

$$H_{K1}(u) = \{x \mid x \cdot a_{K1}(u) \leq |a_{K1}(u)|^2\}.$$

Definera på samma sätt $l_{K2}(u)$, $H_{K2}(u)$, $a_{L1}(u)$, $a_{L2}(u)$, $l_{L1}(u)$, $l_{L2}(u)$ och $H_{L1}(u)$, $H_{L2}(u)$.

Låt Π_u vara den ortogonala projektionen på E_u , så att $\Pi_u(K) = K|E_u$. Då är $\Pi_u^{-1}(K|E_u) = H_{K1}(u) \cap H_{K2}(u)$ och $\Pi_u^{-1}(L|E_u) = H_{L1}(u) \cap H_{L2}(u)$. På grund av (16) är det sant att

$$\Pi_u^{-1}(K|E_u) \subseteq \Pi_u^{-1}(L|E_u)$$

och då är

$$(H_{K1}(u) \cap H_{K2}(u)) \subseteq (H_{L1}(u) \cap H_{L2}(u)). \quad (17)$$

En sluten konvex mängd är snittet av dess stödjande halvrum, så vi inser att $\bigcap_u (H_{K1}(u) \cap H_{K2}(u))$ beskriver kroppen K på grund av att K är symmetrisk kring origo. På samma sätt beskriver $\bigcap_u (H_{L1}(u) \cap H_{L2}(u))$ kroppen L . Från detta och att (17) gäller för alla $u \in S^1$ får vi att $K \subseteq L$. Det följer att $V^2(K) \leq V^2(L)$. \square

8.2 Projektionskroppar och mixad volym

I detta avsnitt hittas definitioner och lemmen som behövs för beviset av sats 1.1 och materialet kommer från [2].

Vi påminner läsaren om att \mathcal{K}^n betecknar mängden av alla konvexa kroppar i \mathbb{R}^n och att \mathcal{K}_c^n betecknar mängden av alla konvexa kroppar i \mathbb{R}^n som är symmetriska kring origo. Stödfunktionen $h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ associerad till en konvex kropp K definieras som $h_K(x) = \max\{x \cdot y \mid y \in K\}$. Notera att $h_K(x)$ är bestämd av x -värden på S^{n-1} . För $K, L \in \mathcal{K}^n$ gäller det att $K \subset L$ om och endast om $h_K \leq h_L$ [2, ekvation (1.1)]. Låt $K \in \mathcal{K}^n$. Då är *projektionskroppen* ΠK av K definierad som den kropp som har stödfunktionen

$$h_{\Pi K}(u) = V^{n-1}(K|E_u), \quad (18)$$

för $u \in S^{n-1}$. Vi vet att det existerar en sådan kropp K på grund av ett resultat av Minkowski. Projektionskroppen är konvex om K är konvex. Vi påminner läsaren om att $\Pi^n = \{\Pi K \mid K \in \mathcal{K}^n\}$. Lutwak visar [2, s.249] att denna klass är lika med $\Pi^n = \{\Pi K \mid K \in \mathcal{K}_c^n\}$, det vill säga varje projektionskropp är en projektionskropp av någon origocentrerad konvex kropp. Det gäller att $\Pi^n \subset \mathcal{K}_c^n \subset \mathcal{K}^n$ [2, s. 249].

Minkowskisumman av kropparna $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$ definieras som

$$K_1 + \dots + K_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid x_i \in K_i\}.$$

För $K \in \mathcal{K}^n$ definieras multiplikation med en skalär $\lambda \in \mathbb{R}^n$ som

$$\lambda K = \{\lambda x \mid x \in K\}.$$

Volymen av minkowskikombinationen $\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_r K_r$ för $K_j \in \mathcal{K}^n$ och $\lambda_j \geq 0$ är ett homogent polynom [2, s. 238] av grad n :

$$V(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_r K_r) = \sum \nu(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}. \quad (19)$$

Om vi kräver att koefficienterna $\nu(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ är symmetriska i K_{i_j} så är $\nu(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ entydigt bestämda och då kallas $\nu(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ för *mixad volym* (se till exempel [2, s.238]). Vi låter $\nu_i(K, L)$ beteckna den mixade volymen av $(n-i)$ stycken K och i stycken L .

Lemma 8.2. *Låt $K_i, L_i \in \mathcal{K}^n$ vara sådana att $K_i \subset L_i$. Då är*

$$\nu(K_1, \dots, K_n) \leq \nu(L_1, \dots, L_n).$$

Bevis. Vi börjar med att visa

$$\nu(K_1, \dots, K_{n-1}, K) \leq \nu(K_1, \dots, K_{n-1}, L)$$

om $K \subset L$. Vi vet att för konvexa kroppar K och L så är

$$\nu(K_1, \dots, K_{n-1}, L) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_L(u) dS(K_1, \dots, K_{n-1}; u), \quad (20)$$

se till exempel [2, ekvation (1.7)]. Vi påminner läsaren om att $K \subset L$ om och endast om $h_K \leq h_L$ vilket tillsammans med (20) ger

$$\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_K(u) dS(K_1, \dots, K_{n-1}; u) \leq \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_L(u) dS(K_1, \dots, K_{n-1}; u),$$

som kan skrivas som

$$\nu(K_1, \dots, K_{n-1}, K) \leq \nu(K_1, \dots, K_{n-1}, L).$$

Eftersom $K_i \subset L_i$ och den mixade volymen är symmetrisk följer det att

$$\nu(K_1, \dots, K_{n-1}, K_n) \leq \nu(K_1, \dots, K_{n-1}, L_n) \leq \nu(K_1, \dots, K_{n-2}, L_{n-1}, L_n) \leq \dots \leq \nu(L_1, \dots, L_n), \quad (21)$$

det vill säga $\nu(K_1, \dots, K_n) \leq \nu(L_1, \dots, L_n)$. \square

En konvex kropp A sägs ha en *positiv kontinuerlig krökningsfunktion* $f_A : S^{n-1} \rightarrow (0, \infty)$ om det för varje konvex kropp K gäller att $\nu_1(A, K)$ har integralrepresentationen

$$\nu_1(A, K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} f_A(u) h_K(u) dS(u), \quad (22)$$

se till exempel [3, s.2]. För $u \in S^{n-1}$ är *ljuskraften* $\sigma_L(u)$ av en konvex kropp L den $(n-1)$ -dimensionella volymen av den ortogonala projektionen av L på hyperplanet som är ortogonalt mot u . Om A har en positiv kontinuerlig krökningsfunktion f_A så är

$$\sigma_A(u) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| f_A(v) dS(v), \quad (23)$$

se till exempel [3, s.3]. Vi har också att

$$h_{\Pi K} = \sigma_K, \quad (24)$$

se till exempel [3, s.3].

Lemma 8.3. *Det gäller att*

$$\nu_1(L, \Pi K) = \nu_1(K, \Pi L).$$

Detta är lemma 6 i [3] och vi följer beviset i den artikeln.

Bevis. Ekvation (22) ger att

$$\nu_1(L, \Pi K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} f_L(u) h_{\Pi K}(u) dS(u).$$

På grund av (24) så får vi

$$\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} f_L(u) \sigma_K(u) dS(u)$$

och (23) ger

$$\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} f_L(u) \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| f_K(v) dS(v) dS(u).$$

Vi flyttar nu ut konstanten $1/2$ samt ändrar integrationsordningen och får

$$\frac{1}{2n} \int_{S^{n-1}} f_K(v) \int_{S^{n-1}} |u \cdot v| f_L(u) dS(u) dS(v).$$

Vi använder återigen ekvation (23) och får

$$\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} f_K(v) \sigma_L(v) dS(v).$$

Genom ekvation (24) får vi att

$$\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} f_K(v) h_{\Pi L}(v) dS(v),$$

vilket är lika med

$$\nu_1(K, \Pi L).$$

Det vill säga $\nu_1(L, \Pi K) = \nu_1(K, \Pi L)$. □

Lemma 8.4. För en kropp $K \in \mathcal{K}^n$ gäller det att $\nu(K, \dots, K) = V(K)$.

Bevis. Låt $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_j = 0$ för $j \neq 1$. Då är

$$V(K_1) = V(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_r K_r).$$

Från (19) vet vi att detta kan skrivas som

$$\sum \nu(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n},$$

vilket är lika med

$$\nu(K_1, \dots, K_1)$$

då alla utom λ_1^n -termen innehåller en faktor 0. □

Sats 8.5 (Minkowskioolikheten). För $K, L \in \mathcal{K}^n$ är

$$\nu_1(K, L)^n \geq V(K)^{n-1} V(L),$$

där likhet gäller om och endast om K och L är homotetiska.

Satsen är välkänd och vi visar den endast i specialfall.

Exempel 2. Vi ger här tre exempel på minkowskioolikheten för mixad volym då $n = 2$. Vi har de tre kropparna kuben B_∞^2 , bollen B_2^2 och korspolytopen B_1^2 . Det är lätt att se att

$$V(\alpha B_\infty^2 + \beta B_2^2) = 4\alpha^2 + 2 \cdot 4\alpha\beta + \pi\beta^2,$$

$$V(\alpha B_\infty^2 + \gamma B_1^2) = 4\alpha^2 + 2 \cdot 4\alpha\gamma + 2\gamma^2$$

och

$$V(\gamma B_1^2 + \beta B_2^2) = 2\gamma^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2}\gamma\beta + \pi\beta^2,$$

se figur 7, 8 respektive 9. Det följer att $\nu(B_\infty^2, B_2^2) = 4$, $\nu(B_\infty^2, B_1^2) = 4$ och $\nu(B_1^2, B_2^2) = 2\sqrt{2}$. Vi får att

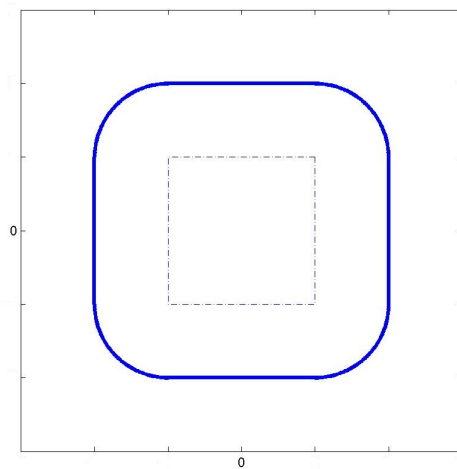
$$\nu(B_\infty^2, B_2^2)^2 = 16 \geq 4\pi = V_\infty^2 V_2^2,$$

$$\nu(B_\infty^2, B_1^2)^2 = 16 \geq 8 = 2 \cdot 4 = V_\infty^2 V_1^2$$

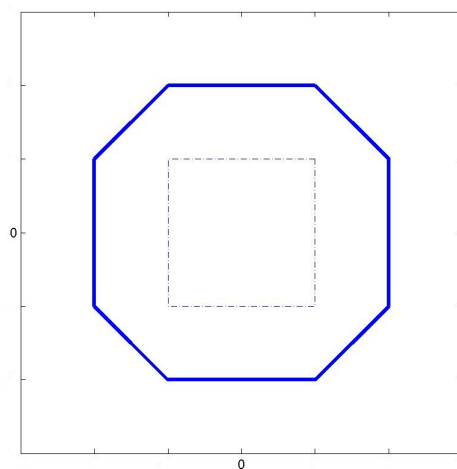
samt

$$\nu(B_1^2, B_2^2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \geq 2\pi = V_1^2 V_2^2,$$

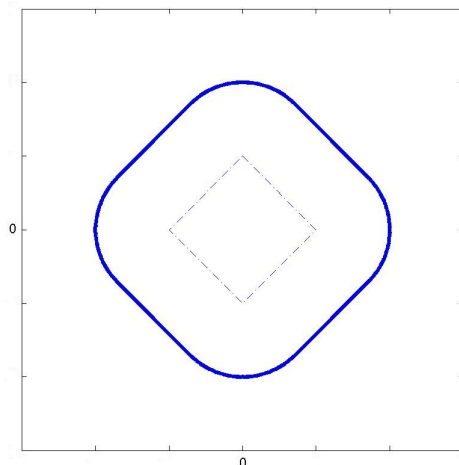
vilket bekräftar sats 8.5 för de tre kropparna B_∞^2 , B_2^2 och B_1^2 .



Figur 7: Minkowskisumman av kuben och bollen.



Figur 8: Minkowskisumman av kuben och korspolytopen.



Figur 9: Minkowskisumman av korspolytopen och bollen.

8.3 Bevis av Petty-Schneiders sats, sats 1.1

Beviset följer Lutwaks [2, kapitel 9].

Då $V(K) = 0$ är satsen trivial så antag att $V(K) \neq 0$. Från (18) och antagandet att (1) gäller för alla $u \in S^{n-1}$ får vi

$$h_{\Pi K} \leq h_{\Pi L}. \quad (25)$$

Vi påminner läsaren om att då $H, G \in \mathcal{K}^n$ gäller det att $H \subset G$ om och endast om $h_H \leq h_G$ vilket tillsammans med (25) och $\Pi^n \subset \mathcal{K}^n$ ger

$$\Pi K \subset \Pi L. \quad (26)$$

Eftersom $L \in \Pi^n$ existerar det en konvex kropp \tilde{L} sådan att $L = \Pi\tilde{L}$. Från (26), lemma 8.2 och $\Pi^n \subset \mathcal{K}^n$ följer det att

$$\nu_1(\tilde{L}, \Pi K) \leq \nu_1(\tilde{L}, \Pi L). \quad (27)$$

Om vi skriver om detta med hjälp av lemma 8.3 får vi

$$\nu_1(K, \Pi\tilde{L}) \leq \nu_1(L, \Pi\tilde{L}).$$

På grund av att $L = \Pi\tilde{L}$ gäller det att

$$\nu_1(K, L) \leq \nu_1(L, L). \quad (28)$$

Från lemma 8.4 får vi att högerledet i (28) är lika med $V(L)$, alltså

$$\nu_1(K, L) \leq V(L). \quad (29)$$

Vi höjer upp ekvation (29) till n på båda sidor:

$$\nu_1(K, L)^n \leq V(L)^n.$$

Minkowskioolikheten för mixad volym, sats 8.5, ger då att

$$V(K)^{n-1}V(L) \leq \nu_1(K, L)^n \leq V(L)^n,$$

där den första olikheten kräver att K och L är homotetiska om likhet ska gälla. Division med $V(L)$ ger

$$V(K)^{n-1} \leq V(L)^{n-1}.$$

Om vi tar $(n - 1)$ -roten av båda sidor erhåller vi

$$V(K) \leq V(L).$$

Från sats 8.5 gäller likhet mellan K och L om och endast om de är homotetiska. Homotetiska kroppar av samma volym måste vara translationer av varandra. Beviset är därmed klart.

9 Busemann-Petty-problemet och Lutwaks sats

I detta kapitel visar vi att Busemann-Petty-problemet är sant i 2 dimensioner. Vi ger ett bevis för Lutwaks sats, sats 1.2, och vi introducerar ett avsnitt med definitioner och lemmen före som behövs för beviset.

9.1 Busemann-Petty-problemet, problem 1, i 2 dimensioner

Sats 9.1. *Antag att K och L är konvexa kroppar i \mathcal{K}_c^2 sådana att*

$$V^1(K \cap H) \leq V^1(L \cap H) \tag{30}$$

för alla hyperplan H som går genom origo. Då är

$$V^2(K) \leq V^2(L).$$

Bevis. Notera att $K \cap H$ och $L \cap H$ är linjesegment som är symmetriska kring origo samt ligger längs samma linje. Därför är $V^1(K \cap H)$ och $V^1(L \cap H)$ längden av respektive linjesegment. Då K och L är centrerade kring origo och (30) gäller, så följer det att

$$K \cap H \subseteq L \cap H. \tag{31}$$

Notera att $K = \bigcup(K \cap H)$, respektive $L = \bigcup(L \cap H)$, där unionen är över alla hyperplan H genom origo. Då (31) gäller för alla hyperplan H medför det att $K \subseteq L$. Då K och L är symmetriska kring origo följer det att

$$V^2(K) \leq V^2(L).$$

□

9.2 Snittkroppar och dual mixad volym

I detta avsnitt hittas definitioner och lemmen som behövs för beviset av sats 1.2. Materialet i detta avsnitt kommer från [2].

En *stjärnformad mängd* är en mängd M i det euklidiska rummet \mathbb{R}^n , sådan att det existerar en punkt $O \in M$ så att det för alla punkter $x \in M$ finns ett linjesegment från O till x som ligger i M . Vi kallar detta för en stjärnformad mängd med avseende på O . För en kompakt mängd $K \in \mathbb{R}^n$ vilken är stjärnformad med avseende på origo defineras den *radiella funktionen* som $\rho_K(u) = \text{Max}\{\lambda \geq 0 \mid \lambda u \in K\}$ för $u \in S^{n-1}$. För $K, L \in \mathcal{S}^n$ gäller det att $K \subset L$ om och endast om $\rho_K(u) \leq \rho_L(u)$ för $u \in S^{n-1}$ [2, s. 240]. Om $\rho_K(u)$ är kontinuerlig är så är K en *stjärnkropp*. En stjärnkropp är antingen en punkt eller har ett icke-tomt inre. Vi påminner läsaren om att \mathcal{S}^n betecknar mängden av alla stjärnkroppar. Låt \mathcal{S}_c^n beteckna mängden av alla stjärnkroppar som är symmetriska med avseende på origo.

Låt $K \in \mathcal{S}^n$. Då är *snittkroppen* IK definierad som den stjärnformade mängd som har den radiella funktionen

$$\rho_{IK}(u) = V^{n-1}(K \cap E_u)$$

där $u \in S^{n-1}$. Man inser att den radiella funktionen måste vara kontinuerlig då $K \in \mathcal{S}^n$. Därför kommer IK vara en stjärnkropp. Vi påminner läsaren om att \mathcal{S}^n betecknar mängden av alla snittkroppar av stjärnkroppar. Det är sant att $\mathcal{S}^n \subset \mathcal{S}_c^n \subset \mathcal{S}^n$, se till exempel [2, s.251]. För att ge en uppfattning om vad en snittkropp är ger vi följande exempel.

Exempel 3. Den radiella funktionen för snittkroppen av B_2^2 , det vill säga IB_2^2 , är $\rho_{IB_2^2}(u) = V^1(B_2^2 \cap E_u) = 2$. Vi inser att den radiella funktionen av $B_2^2(2)$ är konstant lika med 2, det vill säga $\rho_{B_2^2(2)}(u) \equiv 2$. Därför är $IB_2^2 = B_2^2(2)$. Mer allmänt är snittkroppen för symmetriska kroppar i 2 dimensioner samma som kroppen fast skalad med en faktor 2 och roterad $\pi/2$ radianer.

Om $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ så är den *radiella summan* $x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} x_r$ definierad som den vanliga vektorsumman av $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ om alla x_i ligger i ett endimensionellt underrum till \mathbb{R}^n och som nollvektorn annars. Den *radiella minkowskisumman* av kropparna $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{S}^n$ definieras som

$$K_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} K_n = \{x_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} x_n \mid x_i \in K_i\}.$$

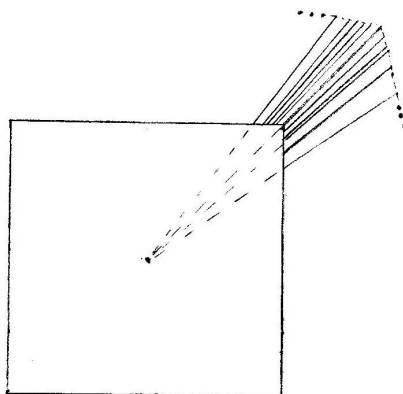
För $K \in \mathcal{S}^n$ definieras multiplikation med en skalär $\lambda \in \mathbb{R}$ som

$$\lambda K = \{\lambda x \mid x \in K\}.$$

Volymen av radiella minkowskikombinationen $\lambda_1 K_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \lambda_r K_r$ för $K_j \in \mathcal{S}^n$ och $\lambda_j \geq 0$ är ett homogent polynom [2, s.240] av grad n :

$$V(\lambda_1 K_1 \tilde{+} \dots \tilde{+} \lambda_r K_r) = \sum \tilde{v}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}. \quad (32)$$

Om vi kräver att koefficienterna $\tilde{v}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ är symmetriska i K_{i_j} så är $\tilde{v}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ entydigt bestämda och då kallas $\tilde{v}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ för *dual mixad volym* (se till exempel [2, s.241]). Vi låter $\tilde{v}_i(K, L)$ beteckna den duala mixade volymen av $(n-i)$ stycken K och i stycken L . Figur 10 illustrerar hur man kan tänka för att rita upp den radiella minkowskisumman $B_\infty^2 \tilde{+} B_2^2$.



Figur 10: Den streckade linjen illustrerar en del av randen av $B_\infty^2 \tilde{+} B_2^2$.

Lemma 9.2. Låt $K_i, L_i \in \mathcal{S}^n$ vara sådana att $K_i \subset L_i$. Då är

$$\tilde{v}(K_1, \dots, K_n) \leq \tilde{v}(L_1, \dots, L_n).$$

Bevis. Enligt Lutwak [2, s.241] är

$$\tilde{v}(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_{K_1}(u) \dots \rho_{K_n}(u) dS(u) \quad (33)$$

om $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{S}^n$. Vi påminner läsaren om att $H \subset G$ om och endast om $\rho_H \leq \rho_G$ vilket tillsammans med (33) ger

$$\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_{K_1}(u) \dots \rho_{K_n}(u) dS(u) \leq \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_{L_1}(u) \dots \rho_{L_n}(u) dS(u),$$

det vill säga

$$\tilde{v}(K_1, \dots, K_n) \leq \tilde{v}(L_1, \dots, L_n).$$

□

Följande lemma är lemma 8.9 i [2] och ett bevis kan hittas i [2, s.253].

Lemma 9.3. Om $K, L \in \mathcal{S}^n$ så är $\tilde{v}_1(K, IL) = \tilde{v}_1(L, IK)$.

Lemma 9.4. För $K \in \mathcal{S}^n$ gäller det att $\tilde{v}(K, \dots, K) = V(K)$.

Bevis. Låt $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_j = 0$ för $j \neq 1$. Då är

$$V(K_1) = V(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_r K_r).$$

Från (32) vet vi att detta kan skrivas som

$$\sum \tilde{\nu}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n},$$

vilket är lika med

$$\tilde{\nu}(K_1, \dots, K_1)$$

då alla utom λ_1^n -termen innehåller en faktor 0. □

Sats 9.5 (Minkowskioolikheten för dual mixad volym). *Om $K, L \in \mathcal{S}^n$ så är*

$$\tilde{\nu}_1(K, L)^n \leq V(K)^{n-1} V(L), \tag{34}$$

och om K och L innehåller mer än bara origo gäller likhet om och endast om K och L är dilatationer av varandra.

Bevisidé för satsen hittas i [2].

9.3 Bevis av Lutwaks sats, sats 1.2

Beviset följer Lutwaks i [2, kapitel 10].

Då $V(K) = 0$ är satsen trivial så antag att $V(K) \neq 0$. Från definitionen av snittkroppar och att $K \in \mathcal{S}^n \subset \mathcal{S}^n$, $L \in \mathcal{S}^n$ får vi att $\rho_{IK}(u) = V^{n-1}(K \cap E_u)$ och $\rho_{IL}(u) = V^{n-1}(L \cap E_u)$ för alla $u \in S^{n-1}$. Då (2) gäller för alla u gäller det att

$$\rho_{IK} \leq \rho_{IL}. \tag{35}$$

Vi påminner läsaren om att för $H, G \in \mathcal{S}^n$ gäller det att $H \subset G$ om och endast om $\rho_H \leq \rho_G$ vilket tillsammans med (35) och $\mathcal{S}^n \subset \mathcal{S}^n$ ger att

$$IK \subset IL.$$

Eftersom $K \in \mathcal{S}^n$ existerar det en stjärnkropp \tilde{K} så att $K = I\tilde{K}$. Från lemma 9.2 vet vi att

$$\tilde{\nu}_1(\tilde{K}, IK) \leq \tilde{\nu}_1(\tilde{K}, IL). \tag{36}$$

Lemma 9.3 ger

$$\tilde{\nu}_1(K, I\tilde{K}) \leq \tilde{\nu}_1(L, I\tilde{K})$$

och då $K = I\tilde{K}$ får vi

$$\tilde{\nu}_1(K, K) \leq \tilde{\nu}_1(L, K).$$

Lemma 9.4 implicerar att $\tilde{\nu}_1(K, K) = V(K)$, så

$$V(K) \leq \tilde{\nu}_1(L, K). \tag{37}$$

Vi höjer upp (37) till n på båda sidor,

$$V(K)^n \leq \tilde{\nu}_1(L, K)^n.$$

Minkowskioolikheten för dual mixad volym, sats 9.5, ger då att

$$V(K)^n \leq \tilde{\nu}_1(L, K)^n \leq V(L)^{n-1} V(K),$$

där likheten i den andra olikheten gäller om och endast om K och L är dilatationer av varandra. Division med $V(K)$ ger

$$V(K)^{n-1} \leq V(L)^{n-1}.$$

Om vi tar $(n-1)$ -roten av båda sidor erhåller vi

$$V(K) \leq V(L).$$

Här är likheten uppfylld om och endast om K och L är dilatationer av varandra.

Referenser

- [1] Keith Ball. *An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry*, Flavors of Geometry MSRI Publications Volume 31 (1997).
- [2] Erwin Lutwak. *Intersection Bodies and Dual Mixed Volumes*. Advances in Mathematics 71 (1988), 232-261.
- [3] Erwin Lutwak. *On some affine isoperimetric inequalities*. J. Differential Geometry 23 (1986), 1-13.
- [4] Recension av G. D. Chakerian på: Petty, C. M.(1-MO), McKinney, James R.(1-CASP), *Convex bodies with circumscribing boxes of constant volume*, Math. 44 (1987), no. 4, 447-455, [hämtat: 2014-04-22]. Tillgängligt: <http://www.ams.org/mathscinet/search/publdoc.html?pg1=INDI&r=1&s1=138865>
- [5] *Busemann-Petty problem*, [hämtat 2014-04-22]. Tillgängligt: http://en.wikipedia.org/wiki/Busemann-Petty_problem
- [6] C. M. Petty. *Projection bodies*, i Proceedings, Coll. Convexity, Copenhagen, 1965, 234-241.
- [7] R. Schneider, *Zu einem Problem von Shephard über die Projektionen konvexer Körper*, Math. Z. **101** (1967), 71-82.
- [8] F. John. *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Studies on essays presented to R. Courant on his 60th birthday 1948-01-08, Interscience, New York, 1948, 187-204.
- [9] *Translation of a polygon*, Math Open Reference [hämtat: 2014-04-30]. Tillgängligt: <http://www.mathopenref.com/translate.html>
- [10] *Dilation of a polygon*, Math Open Reference [hämtat: 2014-04-30]. Tillgängligt: <http://www.mathopenref.com/dilate.html>
- [11] *Volume of an n-ball*, [hämtat: 2014-05-01]. Tillgängligt: http://en.wikipedia.org/wiki/Volume_of_an_n-ball.
- [12] *Homothetic transformation*, [hämtat: 2014-05-01]. Tillgängligt: <http://en.wikipedia.org/wiki/Homothetic>.
- [13] *Volume of an n-ball*, [hämtat: 2014-05-01]. Tillgängligt: http://en.wikipedia.org/wiki/Volume_of_an_n-ball#Balls_in_Lp_norms.

