

CHALMERS



GÖTEBORGS UNIVERSITET

Geometrin på ytan av en kub

Kortaste avstånd och mest avlägsna punkter

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Elena Ardemo

Jenny Arkevall

Anna Bernskiöld

Sofia Lignell

Geometrin på ytan av en kub

Kortaste avstånd och mest avlägsna punkter

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Lena Ardemo Jenny Arkevall

Examensarbete för kandidatexamen i tillämpad matematik inom matematikprogrammet vid Göteborgs universitet

Anna Bernskiöld Sofia Lignell

Handledare: Peter Sjögren

Examinator: Maria Roginskaya

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2014

Sammanfattning

Beroende på hur två punkter väljs på kubens sidoytor kommer kortaste vägen mellan dessa att passera olika sidor. Det visar sig att, genom att mäta vinklarna mellan punkterna via något av hörnen som ligger på den gemensamma kanten, kan vi avgöra vilka sidor kortaste vägen mellan dessa punkter passerar. Om båda dessa vinklar är mindre än 135° så kommer det alltid att vara närmare att gå raka vägen över den gemensamma kanten. Annars är det närmare att passera någon tredje intilliggande sida. Om punkterna ligger på motstående sidor kommer samma 135° - resultat att gälla.

Mest avlägsna punkt, givet en punkt som har avstånd a och b från närmsta respektive näst-närmsta kant, kommer att återfinnas i koordinaterna $(\frac{2b-2b^2+a}{3-2a}, b)$ eller $(\frac{a+b-ab-b^2}{2-a+b}, b)$ beroende på olikheten $\frac{2b-2b^2+a}{3-2a} < \frac{a+b-ab-b^2}{2-a+b}$. Olikheten representerar vilka punkter som kommer ge det kortaste avståndet till denna mest avlägsna punkt. I allmänhet kommer det att finnas tre sådana vägar som är lika långa, men i några fall finns det fler. Då P ligger på någon av kubens kanter kommer det att finnas fyra vägar som ger ett lika långt avstånd och om punkten ligger på något hörn kommer det att finnas sex vägar. Det finns även ett mycket intressant fall då det finns två punkter som är mest avlägsna samma punkt P , detta inträffar då P ligger på halva sidolängden, men ej i mitten.

Abstract

Depending on the choices of two point on the surface of the cube, the distance between the two points is determined by the angle between the points and a common corner. If the angle is less than 135° then the best way between them is the straight path, otherwise its better to pass an adjacent side of the cube. This is also true if the two points aren't placed on adjacent sides.

The point on the cube which is the most distant to an arbitrary point P , also located on the cube, is either $(\frac{2b-2b^2+a}{3-2a}, b)$ or $(\frac{a+b-ab-b^2}{2-a+b}, b)$ given that a and b are the distance from P to its closest and second closest edge respectively. Which one of these coordinates should be chosen is determined by the following inequality $\frac{2b-2b^2+a}{3-2a} < \frac{a+b-ab-b^2}{2-a+b}$. The inequality represents which ways that give the shortest distance to the most distant point. In general there are only three of these paths that gives the shortest distance, but in some cases there will be more. If the point P is placed on an edge, there will be four paths to its most distant point, and if P is placed on a corner it will be as many as six ways that gives the shortest path. The last case of interesting points will be if P is placed on one of two middle lines parallel to the sides excluding their crosspoint. With P located on these lines there are TWO most distant points, not just one.

Innehåll

1	Inledning	4
2	Definitioner och frågeställning	4
3	Geodetiska cirklar	5
4	Avstånd mellan två punkter	6
4.1	Avstånd mellan punkter på intilliggande sidor	6
4.1.1	Algebraisk lösning	6
4.1.2	Geometrisk lösning	9
4.2	Vägar mellan punkter på motstående sidor	10
4.2.1	Vägen över en eller två vertikala sidor	10
4.2.2	Vägen över tre vertikala sidor eller fler	12
5	Den mest avlägsna punkten	13
5.1	Allmänt fall	13
5.2	Specialfall	20
5.2.1	P ligger på diagonalen	22
5.2.2	P ligger på kanten	23
5.2.3	P ligger i hörnet	23
5.3	Sammanfattning av resultat	23

Förord

Först och främst vill vi tacka vår handledare Peter för hans stora stöd och engagemang i vårt projekt.

Planeringen av arbetet gjordes tillsammans i gruppen, vi beslutade oss för upplägg av skrivandet och resultatinförskaffandet samt hur loggboken skulle skötas. Loggboken består av ett dokument där den enskilda individen ömsom har skrivit på egen hand, ömsom skrivit om hela gruppen. Vem och vilka inläggen handlar om framgår klart och tydligt på rubrikerna. Sofia har försett gruppen med administrativa verktyg, organiserat planering och sett till att vi följer den ursprungliga planen samt att vårt dokument är enhetligt med alla krav och mallar.

Metodiken för vårt arbete har i stora delar bestått i att tänka ut angreppssätt samt att, när ett sådant kommit upp, även angripit problemen utifrån detta angrepsätt. De metoder vi först använde oss av är egenkonstruerade datorprogram, som senare övergick till mer matematiska metoder. Modellering och programmering gjordes främst med hjälp av verktyget Geogebra. Där försökte vi se olika samband, satte hypotes, undersökte och försökte bevisa dessa.

I gruppen har under arbetets gång ansvarsområden fördelats och Lena har producerat många av de ovan nämnda datorprogrammen som lett fram till resultaten. Lena och Sofia står som huvudförfattare till beviset om mest avlägsna punkt i det allmänna fallet samt har bidragit i allra högsta grad till sektionen som handlar om cirkelskivor. Sofias stora uppgift i arbetet har också varit att skriva och formulera stora delar av texten samt att se till så det finns mycket beskrivande bilder tillgängliga.

Anna och Jenny är huvudförfattare till specialfallen till vilket Jenny varit initiativtagande men de båda har lika stor delaktighet i produktionen av resultat. De har även påbörjat ett bevis i stil med specialfallen som även skulle gälla i det allmänna fallet. Detta bevis visade sig vara överflödigt i slutändan även om det ligger mycket arbete bakom det. De har valt metod, bidragit med idéer och skött beräkningarna som presenteras i specialfallen. P.g.a. de många och långa uttrycken i beräkningarna i det bortklippta avsnitt har det varit av stor betydelse att vara två personer som kontrollerar resultaten. Delar av resultaten har analyserats av Anna och Jenny, både tillsammans och var för sig, delar av resultaten har analyserats tillsammans med Lena för jämförelse med det geometriska bevisen. Genom dessa jämförelser har värdefulla diskussionsbidrag till de olika kapitlen utbyts mellan kapitlens huvudförfattare, vilket lett till ytterligare slutsatser.

Anna och Jenny har jobbat fram 135° -resultatet i kapitlet ”Avstånd mellan två punkter”, ett resultat som alla i gruppen har analyserat tillsammans. Lena har tagit fram en geometrisk lösning som ett alternativt bevis.

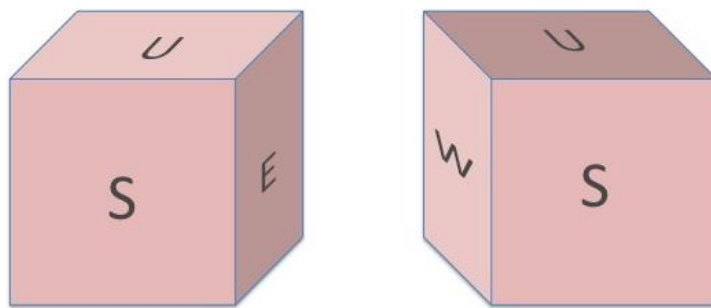
1 Inledning

Detta arbete handlar om hur olika punkter på ytan av en kub med sidan 1 förhåller sig till varandra. Om vi godtyckligt väljer två punkter på ytan av kuben, hur hittar vi då kortaste vägen mellan dem? Kommer vi att kunna finna flera vägar med samma längd som den kortaste? Hur ser det ut då vi ställer oss frågan -vilken punkt är längst bort givet en godtycklig punkt på kuben och vad händer om vi låter cirkelskivor växa från denna givna punkt? Vilken form kommer den ytan som inte är täckt av cirkelskivorna att anta och vad betyder detta?

Det är dessa frågor vi ställdes inför i projektet och således dessa frågor vi besvarar. I huvuddel har arbetet gått ut på att resonera om och bevisa de olika satserna och formuleringarna som förekommer i rapporten. Definitioner och uttryck har även tagits fram.

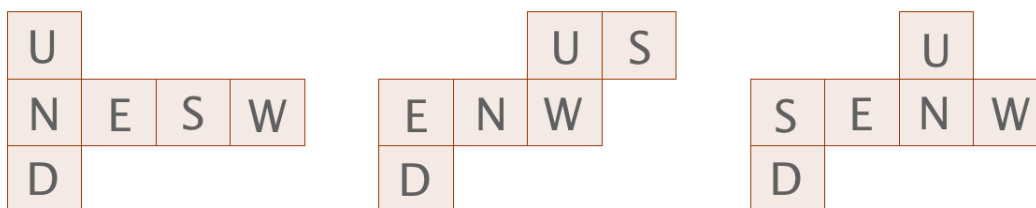
2 Definitioner och frågeställning

När det talas om kuben avses kubens yta - randen av kuben. De beteckningar som används för kubens sidoytor (kallas kortare för sidor) är *Up*, *Down*, *North*, *South*, *West* och *East*, se figur 2.1.



Figur 2.1: Beskrivning av kubsidornas beteckning: *Up*, *Down*, *North*, *South*, *West*, *East*

För att kunna illustrera de kortaste vägarna används olika utvikningar av kuben, figur 2.2 presenterar ett fåtal möjliga utvikningar.



Figur 2.2: Exempel på utvikningar av kuben

Innan frågeställningarna presenteras måste vi definiera några uttryck och begrepp.

Definition 2.1 (Intilliggande sida). Två sidor är intilliggande om de har en gemensam kant.

Definition 2.2 (Väg). En rektifierbar kurva på kuben kallas en väg mellan kurvans ändpunkter.

Definition 2.3 (Avstånd). Längden på den kortaste vägen mellan två punkter kallas för avståndet mellan punkterna.

Definition 2.4 (Antipod). Två punkter är varandras antipoder om en rät linje genom punkterna går genom kubens medelpunkt. Två hörn som är antipoder kallas motstående.

Definition 2.5 (Geodet). är en väg som lokalt ger avståndet mellan två punkter. En kurva är en geodet omm kurvan är en rät linje i någon utvikning [1].

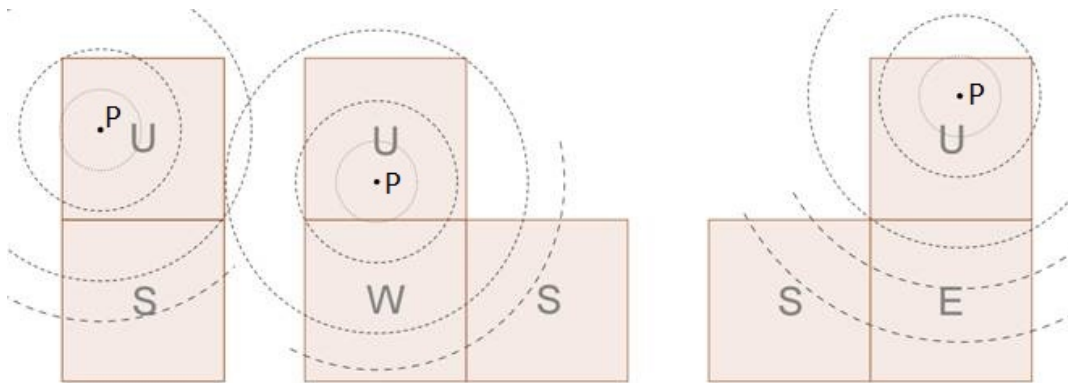
Definition 2.6 (Cirkelskiva). En cirkelskiva är en cirkel vars hela area skär kubens yta.

Följande frågeställningar besvaras i rapporten:

- Antag att vi börjar i en given punkt P och från den punkten skapar cirkelskivor som vi låter växa tills endast en minimal del av kuben är utanför dessa cirkelskivor. Vilken form har då denna yta?
- Välj två godtyckliga punkter på kuben. Vilken är kortaste vägen mellan dessa? Finns det fler än en sådan väg? När inträffar i så fall detta?
- Vilken är den mest avlägsna punkten givet en punkt P ? Kan det finnas fler än en sådan punkt, i så fall när?

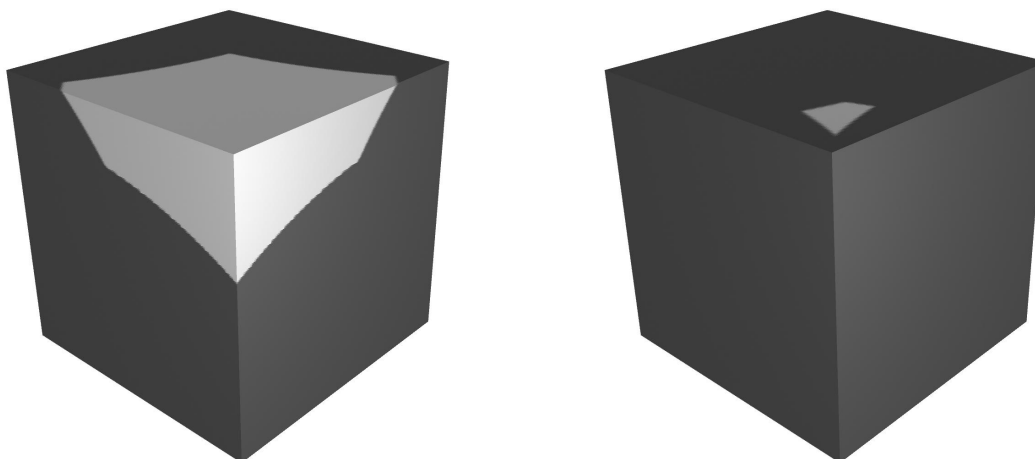
3 Geodetiska cirklar

En liten cirkel placeras med origo i en punkt P , radien växer så att cirkelskivan sprids över kuben. I olika utvikningar får vi då olika plana cirklar, med samma radie, se figur 3.1.



Figur 3.1: Cirklar som sprider sig från punkten P .

För att se vilket mönster som cirklarna bildar på kuben se figur 3.2. Om plana cirklar, med samma radie, från olika utvikningar möts i en punkt betyder det att den punkten har lika långt avstånd till P i de olika plana utvikningarna.



Figur 3.2: Cirkel som sprider sig från punkten P .

Låt radien bli så stor att endast en liten del av kuben inte täcks av cirkelskivorna. Den delen som inte är täckt får olika form beroende på var punkten P , cirkelns centrum, är placerad. För att hela kuben ska täckas är det alltid minst tre plana cirkel som möts i den punkt som längst utgör det icke täckta område. Så länge som det endast är två plana cirkel som möts finns det alltid icke täckt område vid sidan om skärningspunkterna.

På grund av detta gäller följande:

Lemma 3.1. *Om Q är den mest avlägsna punkten från P , så finns minst tre kortaste vägar från P till Q .*

Genom att studera hur cirkelskivorna, för olika placeringar av P , möts när de täcker det sista fria området får vi information kring vilken punkt som är den mest avlägsna punkten till P , det är den punkten som längst undgår att täckas av cirkelns när radierna växer. Det finns mer att läsa om den mest avlägsna punkten i kapitel 5.

4 Avstånd mellan två punkter

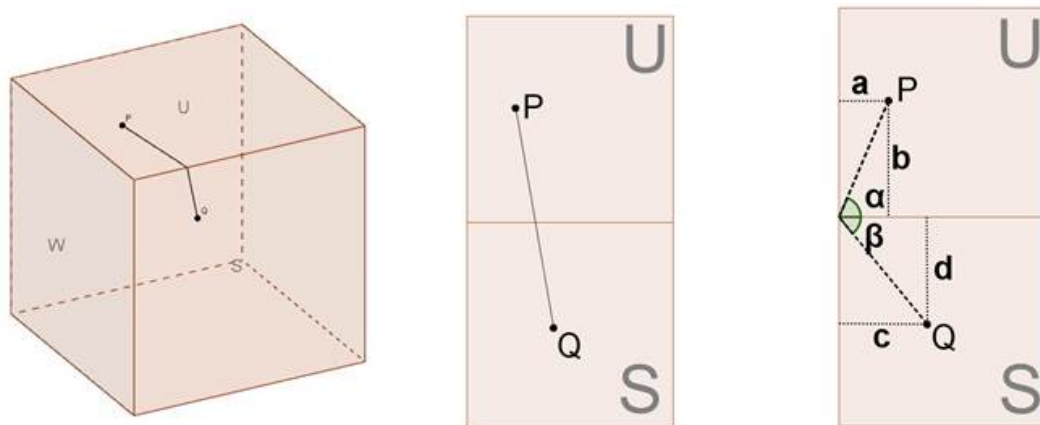
I detta kapitel behandlas avståndet mellan två godtyckliga punkter. För att hitta den kortaste vägen studeras olika utvikningar av kuben med de två punkterna inritade. Olika utvikningar gör det möjligt att se olika vägar. För att hitta avståndet mellan två punkter jämförs vägar som är kortast i sina respektive utvikningar. I de fall då det är möjligt att dra en rät linje mellan punkterna i någon utvikning, är detta alltid den kortaste vägen i den utvikningen. En sådan rätlinjig väg är alltså en geodet.

4.1 Avstånd mellan punkter på intilliggande sidor

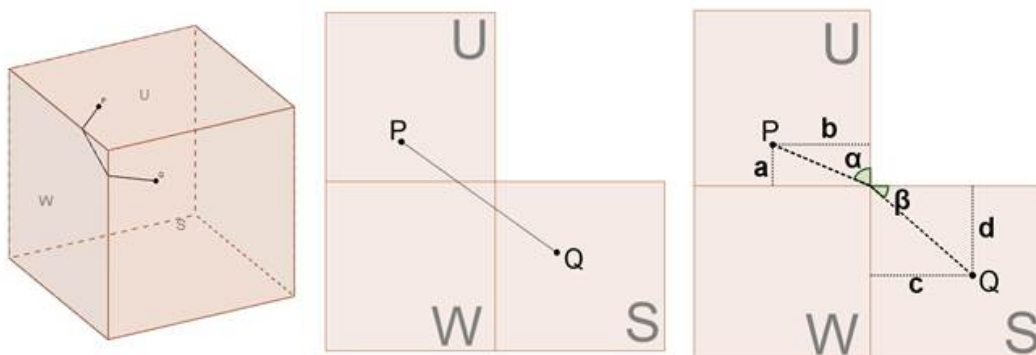
Vi börjar med att behandla avståndet mellan två punkter då de ligger på intilliggande sidor. Detta görs först med en algebraisk lösning, sedan med ett geometriskt resonemang.

4.1.1 Algebraisk lösning

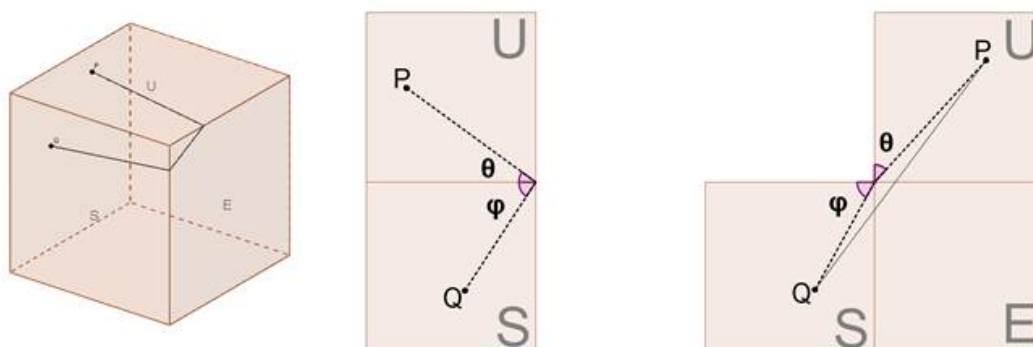
Låt en punkt, P , ligga på sidan U och en punkt, Q , ligga på sidan S . Antingen skär vägen mellan punkterna sidornas gemensamma kant, detta illustreras i figur 4.1, eller så passeras en tredje sida, se figur 4.2 och 4.3. Observera att det finns fler geodeter mellan punkterna än dessa, men ingen av de andra kan vara den kortaste. Låt oss kalla en geodet som går mellan en punkt på sidan S till en punkt på sidan U för G_{SU} och inför beteckningarna $\alpha, \beta, \varphi, \theta, \sigma, a, b, c, d$ enligt figurerna 4.1, 4.2, 4.3 och 4.4.



Figur 4.1: Illustration av G_{SU} både på kuben och i en utvikning, samt α och β .



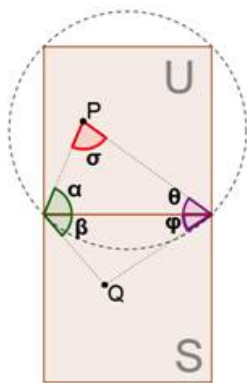
Figur 4.2: Illustration av G_{SWU} både på kuben och i en utvikning samt α och β .



Figur 4.3: Illustration av G_{SEU} både på kuben och i en utvikning, samt φ och θ i två utvikningar.

Vi börjar med att visa ett lemma som används för att bevisa satser senare i avsnittet.

Lemma 4.1. $\alpha + \beta > 135^\circ$ och $\varphi + \theta > 135^\circ$ kan inte inträffa samtidigt.



Figur 4.4: Illustration till lemma 4.1.

Bevis. Med hjälp av periferivinkelsatsen konstateras följande

$$\left. \begin{array}{l} \sigma + \alpha + \theta = 180^\circ \\ \sigma \geq 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \theta \leq 135^\circ.$$

Samma resonemang ger $\beta + \varphi \leq 135^\circ$, därför gäller

$$\alpha + \beta + \theta + \varphi \leq 2 \cdot 135^\circ$$

vilket betyder att $\alpha + \beta$ och $\theta + \varphi$ inte samtidigt kan vara större än 135° . \square

Låt oss avgöra vilken väg som är kortast mellan två punkter som ligger på intilliggande sidor.

Sats 4.2. Låt $Q \in S$ och $P \in U$.

Geodeten G_{SU} ger avståndet mellan punkterna om och endast om $\alpha + \beta, \varphi + \theta \leq 135^\circ$.

Geodeten G_{SWU} ger avståndet mellan punkterna om och endast om $\alpha + \beta \geq 135^\circ$.

Geodeten G_{SEU} ger avståndet mellan punkterna om och endast om $\varphi + \theta \geq 135^\circ$.

I fallet $\alpha + \beta = 135^\circ$ är alltså G_{SU} och G_{SWU} lika långa och ger båda avståndet mellan punkterna. Motsvarande gäller när $\varphi + \theta = 135^\circ$.

Innan satsen bevisas bör läsaren påminna sig om att följande gäller:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

samt att $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ och $\tan \beta = \frac{d}{c}$ i figurerna 4.1 och 4.2.

Bevis. Vi börjar med att jämföra geodeten, G_{SU} , som skär den gemensamma kanten med någon väg som passerar sidan W . Då $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ är varje väg som passerar sidan W längre än en väg som passerar hörnet gemensamt för sidorna U, W och S , se på utvikningen i figur 4.2. Den kortaste vägen som passerar hörnet i utvikningen i figur 4.2 går också att rita in i utvikningen i figur 4.1, en linje från P till hörnet till Q . Men då är det tydligt att G_{SU} är kortare, eftersom den är en rät linje mellan punkterna P och Q . Så när $\alpha + \beta \leq 90^\circ$ ger G_{SU} avståndet mellan punkterna.

Låt $a, b, c, d > 0$, studera geodeterna G_{SU} och G_{SWU} då $\alpha + \beta > 90^\circ$. Längden för G_{SU} är

$$\sqrt{(a - c)^2 + (b + d)^2}.$$

Längden för G_{SWU} är

$$\sqrt{(b + c)^2 + (a + d)^2}.$$

G_{SU} är således kortast när

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a-c)^2 + (b+d)^2} &\leq \sqrt{(b+c)^2 + (a+d)^2} \iff \\
a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac + 2bd &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2bc + 2ad \iff \\
bd - ac &\leq bc + ad \iff \\
b(d-c) &\leq a(d+c) \iff \\
\frac{d-c}{d+c} &\leq \frac{a}{b} \iff \\
\frac{\frac{d}{c} - 1}{\frac{d}{c} + 1} &\leq \frac{a}{b} \iff \\
\frac{\tan \beta - 1}{\tan \beta + 1} &\leq \frac{1}{\tan \alpha} \iff \\
\tan \alpha \tan \beta - 1 &\leq \tan \alpha + \tan \beta \iff \tag{1} \\
1 &\leq \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta - 1} \iff \\
\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} &= \tan(\alpha + \beta) \leq -1 \iff \\
\alpha + \beta &\leq 135^\circ.
\end{aligned}$$

Låt oss försäkra oss om att ekvivalens (1) är korrekt, dvs att $\tan \alpha \tan \beta - 1 > 0$. Vi har $\alpha + \beta > 90^\circ$ samt att vårt krav $a, b, c, d > 0$ ger $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$ och $\alpha + \beta < 180^\circ$.

$$90^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ \iff \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} < 0$$

alltså är $\tan \alpha \tan \beta - 1 > 0$ eftersom $\tan \alpha + \tan \beta > 0$.

Av symmetriskäl gäller att G_{SU} ger avståndet mellan punkterna när $\alpha + \beta, \varphi + \theta \leq 135^\circ$. Enligt resonemanget ovan tillsammans med lemma 4.1 vet vi att G_{SWU} är kortast då $\alpha + \beta \geq 135^\circ$, och att G_{SEU} är kortast då $\varphi + \theta \geq 135^\circ$. \square

Fallet som återstår är $\alpha + \beta = \varphi + \theta = 135^\circ$, detta händer bara när punkterna ligger på motstående hörn. Avståndet mellan sådana punkter behandlas i sats 4.3.

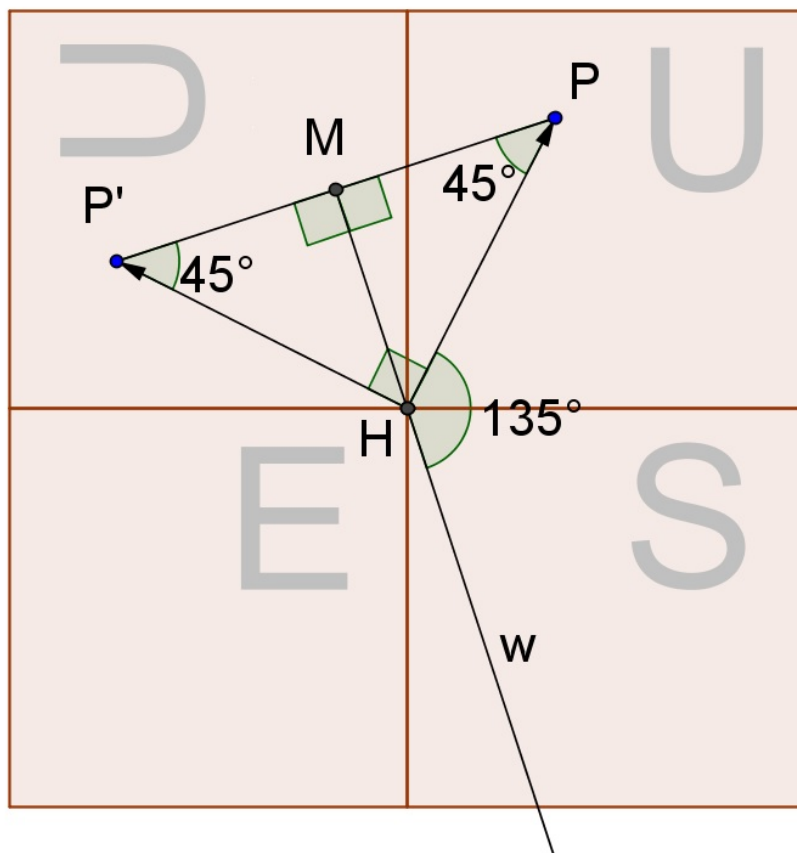
Sats 4.3. *Det finns sex vägar som utgör avståndet mellan två punkter om och endast om punkterna ligger på motstående hörn.*

Bevis. Fortsätt betrakta det som att punkterna ligger på sidorna U och S . Jämför G_{SU} , G_{SWU} och G_{SEU} . När $\alpha + \beta = \varphi + \theta = 135^\circ$ är dessa lika långa. Eftersom punkterna är placerade i hörnen kan vi lika gärna betrakta det som att punkten P ligger på sidan N och punkten Q ligger på sidan D . Av symmetriskäl finns ytterligare tre vägar, G_{DN} , G_{DWN} och G_{DEN} , som alla har samma längd som de tre ovan nämnda. \square

4.1.2 Geometrisk lösning

I detta avsnitt erbjuds ett alternativt bevis till sats 4.2. Vi kan också se på problemet om kortaste vägen mellan två punkter på intilliggande sidor, säg $P \in U$ och $Q \in S$, ur ett geometriskt perspektiv. Vi jämför två utvikningar, se figur 4.5. Här kallar vi motsvarigheten till punkten P för P' i ena utvikningen. Sträckorna HP och HP' är lika långa så, mittpunktsnormalen w till sträckan PP' går genom H . Om Q ligger på ena sidan av mittpunktsnormalen är det kortast att gå genom den utvikning som representeras av P' (G_{SEU}), på andra sidan av mittpunktsnormalen är det kortast att gå genom utvikningen som representeras av P (G_{SU}). Triangeln $PP'H$ är likbent. Vi vet också att vinkeln vid H är 90° . Det betyder att vinklarna vid P och P' i triangeln är 45° . Det innebär att vinkeln mellan w och HP är 135° , så även här kommer vi fram till sats 4.2. Skärningen mellan w och S utgörs av de punkter för vilka geodeterna G_{SEU} och G_{SU} är lika långa. Notera gärna att den linjen

består av skärningspunkterna för cirklar med samma radie som sprids från P genom de två utvikningarna som kombineras i figur 4.5 (det finns mer att läsa om cirkelskivor i kapitel 3).



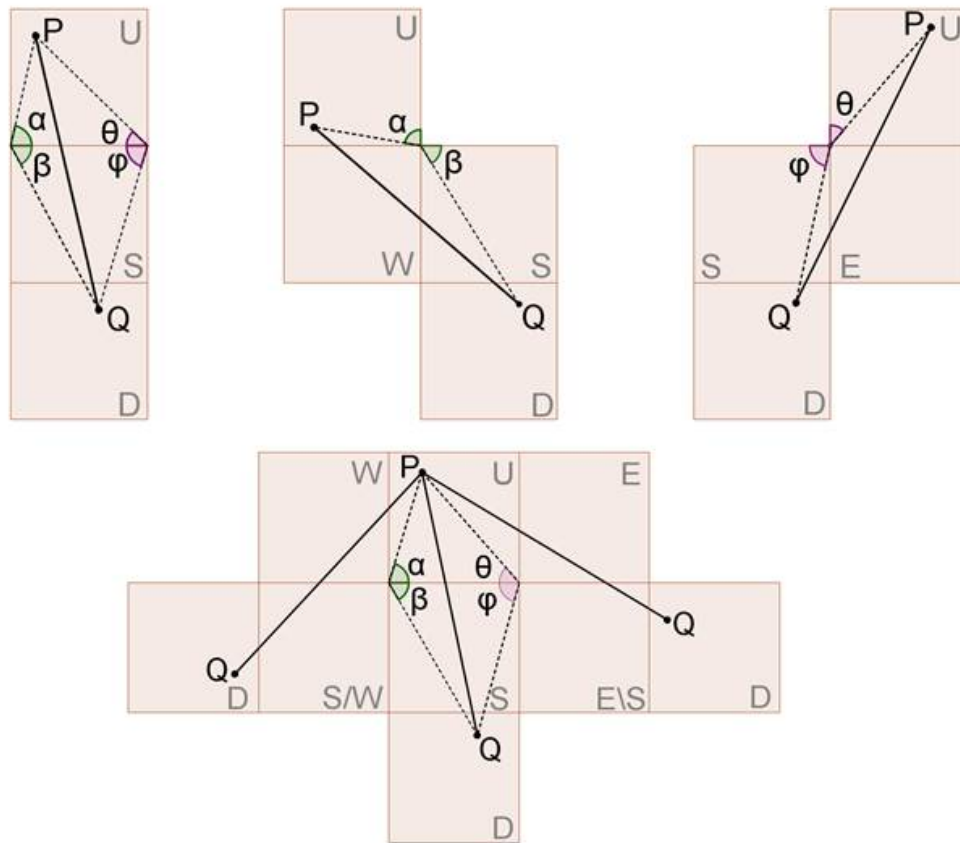
Figur 4.5: Illustration av sats 4.2.

4.2 Vägar mellan punkter på motstående sidor

Här behandlas vägar mellan två punkter då de ligger på motstående sidor. Det finns då fler möjliga geodetiska vägar att betrakta varför vi först betraktar vägar över en eller två vertikala sidor och vidare då geodeten passerar tre vertikala sidor.

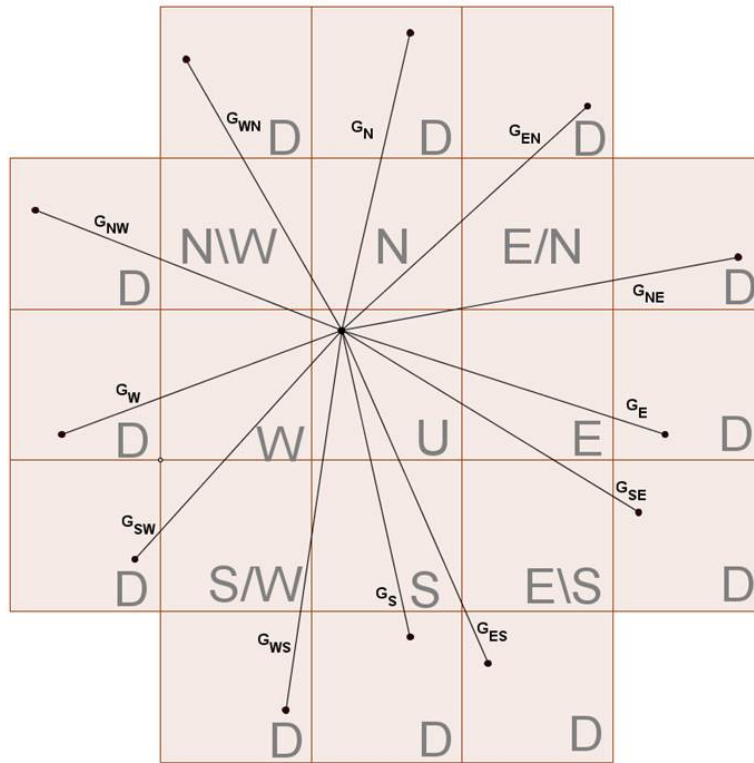
4.2.1 Vägen över en eller två vertikala sidor

Låt ena punkten, P , vara placerad på sidan U och andra punkten, Q , vara placerad på sidan D . När punkterna är placerade på motstående sidor finns högst 12 geodeter som har möjlighet att ge avståndet mellan punkterna. Antingen ges avståndet av en geodet som passerar en av sidorna N, S, E, W eller av en geodet som passerar två av dessa sidor. Vi betecknar geodeterna som tidigare med G_i , där $i \in \{WN, N, EN, NE, E, SE, ES, S, WS, SW, W, NW\}$ avser sidorna som passerar med start i punkten Q (bortsett från sidorna D och U). De 12 möjliga geodeterna kan grupperas, med tre geodeter i varje grupp, så att vinklar avgör vilken geodet som är kortast i varje grupp. Beräkningarna sker på precis samma sätt som i avsnitt 4.1. En grupp utgörs då av geodeterna G_S, G_{SW} och G_{SE} . Utav dessa tre är G_S den kortaste vägen när $\alpha + \beta, \varphi + \theta \leq 135^\circ$, se figur 4.6.



Figur 4.6: Illustration av geodeterna G_S , G_{SW} och G_{SE} . Undre bilden är en kombination av de tre övre utvikningarna.

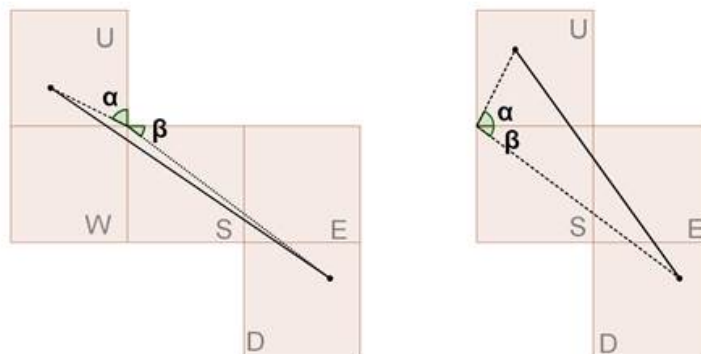
Samtliga 12 geodeter illustreras i en kombination av flera utvikningar i figur 4.7. I avsnitt 4.2.2 motiveras varför kortaste vägen mellan två punkter på motstående sidor aldrig passerar fler än två vertikala sidor. På samma sätt avgörs när G_W är kortare än G_{WS} och G_{WN} osv. Nu vet vi att avståndet mellan två punkter, om de ligger på motstående sidor, utgörs av någon geodet som passerar endast en vertikal sida när samtliga vinkelsummor är mindre än 135° . Alltså när geodeten som passerar en vertikal sida är kortast i varje grupp.



Figur 4.7: 12 geodeter har möjlighet att ge avståndet mellan punkter på motstående sidor.

4.2.2 Vägen över tre vertikala sidor eller fler

Nu ska vi fundera över möjligheten att kortaste vägen mellan två punkter passerar tre av sidorna N, S, W, E när punkterna ligger på motstående sidor, alltså skapa en väg som G_{ESW} . Vi jämför G_{ESW} med G_{ES} genom att införa vinklarna α och β som de är inritade i figur 4.8. Räkningarna blir analoga med de i beviset till sats 4.2, vi får således att $G_{ESW} < G_{ES}$ när $\alpha + \beta > 135^\circ$. Men för att G_{ESW} ska finnas måste $\beta < 45^\circ$ och vi vet att $\alpha \leq 90^\circ$, alltså $\alpha + \beta < 135^\circ$. Det betyder att G_{ES} är kortare än G_{ESW} i alla områden där G_{ESW} finns och därför är G_{ES} alltid kortare. Detta betyder av symmetriskäl att en geodet som passerar tre vertikala sidor (eller fler) aldrig kan vara en kortaste väg mellan två punkter på motstående sidor.



Figur 4.8: Geodeterna G_{ESW} och G_{ES} mellan motstående sidor.

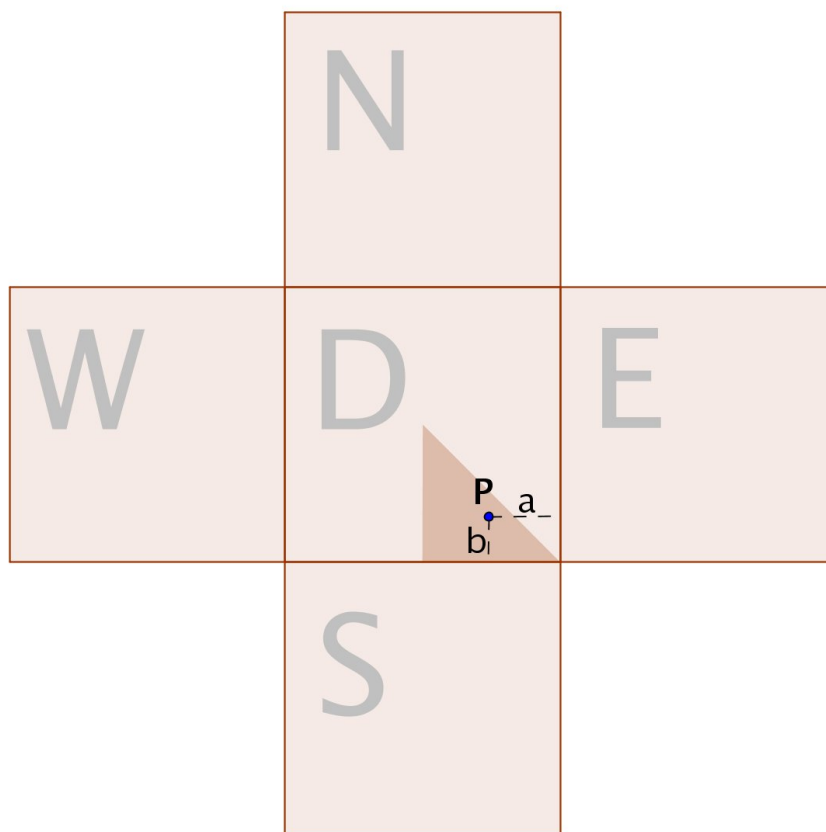
5 Den mest avlägsna punkten

I det här kapitlet bestäms den mest avlägsna punkten, Q , till en godtycklig punkt P genom olika resonemang. Det visas också att det i allmänhet finns en enda mest avlägsen punkt till P och tre kortaste vägar som leder dit. Q antas ligga nära P 's antipod, speciellt så ligger Q på motsatta sidan till P . Detta baseras på att den mest avlägsna punkten till någon punkt sammanfaller med antipoden inom sfärisk geometri.

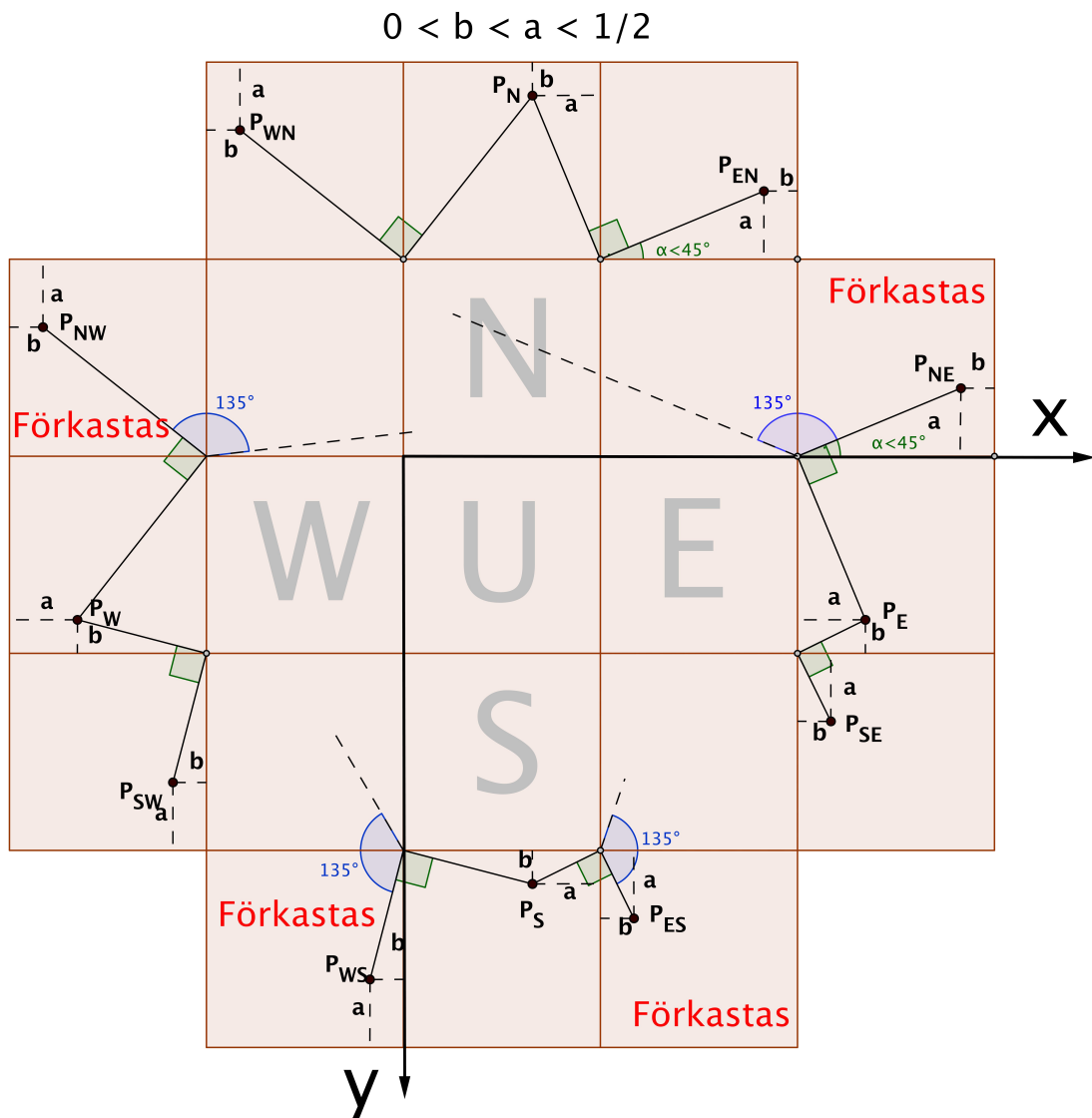
5.1 Allmänt fall

För att kunna följa resonemangen som förs senare i avsnittet påminner vi först och främst läsaren om att till varje punkt på mittpunktsnormalen är det lika stort avstånd till sträckans båda ändpunkter.

Vi utgår från någon punkt $P \in D$ så att $Q \in U$. Vidare tilldelas Q koordinaterna (x, y) vilka ska bestämmas. Området i vilket P ligger begränsas till $0 < b < a < \frac{1}{2}$ p.g.a. kubens symmetri. a och b är avstånden från P till de närmaste kanterna som illustreras i figur 5.1. I avsnitt 4.2 (se figur 4.7) konstateras att det finns högst 12 geodeter som har möjlighet att vara kortaste vägen mellan två punkter på motstående sidor. För att kunna jämföra dessa geodeter skapas en kombination av utvikningar, se figur 5.2, där även fyra geodeter markeras förkastas. Vi inför ett koordinatsystem i utvikningen genom att placera origo i hörnet gemensamt för sidorna U, N, W med x -axelns positiva riktning åt höger och y -axelns positiva riktning nedåt. Kombinationer av utvikningar som i figur 5.2 ger flera representanter för P betecknade P_i där $i \in \{WN, N, EN, \dots, NW\}$. För varje i betraktas den geodet G_i som i figur 5.2 motsvarar sträckan P_iQ . Samtliga G_i illustreras i figur 4.7.



Figur 5.1: Beskrivning av P 's placering på sidan D . I denna bild ses "insidan" av D uppifrån, genom sidan U .



Figur 5.2: Kombination av flera utvikningar som ger flera representanter för P på sidan D .

Mängden av de vägar G_i som ger kortaste vägen mellan P och Q kallas Ω , nu ska avgöras vilka G_i som tillhör Ω . Vi vet sedan tidigare att Ω består av minst tre geodeter (lemma 3.1). Några vägar utesluts genom lemma 5.1.

Lemma 5.1. $G_{NE}, G_{ES}, G_{WS}, G_{NW}$ tillhör inte Ω (se figur 5.2).

Bevis. Vi visar att $G_{NE} \notin \Omega$. I figur 5.2 är vinkeln $\alpha < 45^\circ$ ty $0 < b < a < \frac{1}{2}$, därför skär inte mittpunktsnormalen till sträckan $P_{NE}P_E$ sidan U . Eftersom P_{NE} -sidan av mittpunktsnormalen inte skär U ligger P_E närmare alla punkter på sidan U än vad P_{NE} gör. På samma sätt visas att $G_{ES}, G_{WS}, G_{NW} \notin \Omega$. \square

I figur 5.2 noteras från vilka P -punkter vägar förkastas genom lemma 5.1.

Vi fortsätter utesluta vägar genom resonemang med mittpunktsnormaler. Först beräknas x -koordinaterna för skärningspunkter mellan mittpunktsnormalerna till sträckor P_iP_N och P_iP_S . Vi låter x_i beteckna x -koordinaten för dessa skärningspunkter. Speciellt är alltså x_W

Låt oss få fram x_{EN} :

Vi beräknar x_{EN} med samma metod som x_{SE} . En triangel som i figur 5.3 ritas med hjälp av mittpunktsnormalen till $P_N P_{EN}$. Inför beteckningarna $\tan \alpha = \frac{a}{1-b}$ samt $\varphi = 45^\circ - \alpha$, vi får

$$1 - x_{EN} = (1 + b) \cdot \tan \varphi = (1 + b) \cdot \tan(45^\circ - \alpha) = (1 + b) \cdot \frac{1 - b - a}{1 - b + a}.$$

Alltså är

$$x_{EN} = 1 - (1 + b) \cdot \frac{1 - b - a}{1 - b + a} = \frac{2a - b + b^2 + ab}{1 - b + a}.$$

Låt oss visa att x_{EN} , precis som x_{SE} , ligger till höger om antipoden. Alltså att

$$\frac{2a - b + b^2 + ab}{1 - b + a} > a \iff \frac{2a - b + b^2 + ab - a + ab - a^2}{1 - b + a} > 0.$$

Nämnumaren är positiv, så det räcker att visa

$$2a - b + b^2 + ab - a + ab - a^2 > 2a - b - b^2 + ab - a + ab - a^2 = (a - b) - (a - b)^2 > 0 \iff (a - b) > (a - b)^2 \iff 1 > a - b$$

Vilket stämmer eftersom $a > b$, så vi vet att $x_{EN} > a$.

Följande beräkningar ger x_{WN} :

Vi beräknar x_{WN} med samma metod som x_{SE} och x_{EN} . En triangel ritas med hjälp av mittpunktsnormalen till $P_N P_{WN}$. Inför beteckningarna $\tan \alpha = \frac{1-a}{1-b}$ samt $\varphi = 45^\circ - \alpha$. Vi får

$$x_{WN} = (1 + b) \cdot \tan \varphi = (1 + b) \cdot \frac{1 - \frac{1-a}{1-b}}{1 + \frac{1-a}{1-b}} = (1 + b) \cdot \frac{1 - b - 1 + a}{1 - b + 1 - a} = \frac{(1 + b)(a - b)}{2 - a - b}.$$

Vi visar att x_{WN} ligger till vänster om antipoden, alltså att

$$\frac{(1 + b)(a - b)}{2 - a - b} < a \iff \frac{(1 + b)(a - b) - a(2 - a - b)}{2 - a - b} < 0.$$

Nämnumaren är positiv, så det räcker att visa

$$(1 + b)(a - b) - a(2 - a - b) = -a - b + 2ab + a^2 - b^2 < -(a + b) + (a + b)^2 < 0 \iff (a + b)^2 < (a + b) \iff a + b < 1.$$

Låt oss få fram x_{SW} :

Mittpunktsnormalen till sträckan med ändpunkter (x_1, y_1) , (x_2, y_2) har ekvationen

$$(x_2 - x_1)\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_2 - y_1)\left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0$$

den kan också skrivas

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} = 0$$

$P_{SW} = (x_1, y_1) = (-1 - b, 2 - a)$ och $P_S = (x_2, y_2) = (1 - a, 2 + b)$.

Ekvationen för mittpunktsnormalen till $P_{SW} P_S$:

$$(1 - a + 1 + b)x + (2 + b - 2 + a)y + \frac{(1 + b)^2 - (1 - a)^2 + (2 - a)^2 - (2 + b)^2}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$(2 - a + b)x + (a + b)y - a - b = 0.$$

Vi konstaterar att det är lika långt från P_S som från P_{SW} på mittpunktsnormalen till sträckan $P_S P_{SW}$, så i skärningspunkten mellan den mittpunktsnormalen och mittpunktsnormalen till

sträckan $P_S P_N$ är det lika långt till de tre punkterna P_S , P_{SW} , P_N . Vi vill hitta var mittpunktsnormalen till $P_{SW} P_S$ skär $y = b$ och kallar den x_{SW} .

$$(2 - a + b)x + (a + b)b - a - b = 0 \Rightarrow$$

$$x_{SW} = \frac{a + b - ab - b^2}{2 - a + b}.$$

Vi visar att x_{SW} ligger till vänster om antipoden, alltså att

$$x_{SW} = \frac{a + b - ab - b^2}{2 - a + b} < a \iff \frac{a + b - ab - b^2 - 2a + a^2 - ab}{2 - a + b} < 0.$$

Nämnumaren är positiv så det räcker att visa $a + b - ab - b^2 - 2a + a^2 - ab = (b - a) - 2ab + (a^2 - b^2) = (a - b)(a + b - 1) - 2ab < 0$ vilket stämmer eftersom $(a - b) > 0$ medan $(a + b - 1) < 0$.

Låt oss få fram x_W :

Liksom i beräkningen av x_{SW} utnyttjas nu att vi söker skärningen mellan mittpunktsnormaler. Men nu utgår vi från sträckan $P_S P_W$ och betraktar den som en normalvektor till linjen vi söker - mittpunktsnormalen till $P_S P_W$. $P_S \vec{P}_W = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2a \\ 1 + 2b \end{pmatrix}$, mittpunkten på sträckan $P_S P_W$ är $M = (x_0, y_0) = (-1/2, 3/2)$. Använd att $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ ger en ekvation för mittpunktsnormalen till $P_S P_W$

$$(3 - 2a)(x + 1/2) + (1 + 2b)(y - 3/2) = 0.$$

Räkna ut x -koordinaten i skärningen med linjen $y = b$, kalla den x_W

$$(3 - 2a)(x + 1/2) + (1 + 2b)(b - 3/2) = 0 \Rightarrow$$

$$x_W = \frac{2b - 2b^2 + a}{3 - 2a}.$$

Vi visar att x_W ligger till vänster om antipoden, dvs att

$$\frac{2b - 2b^2 + a}{3 - 2a} < a \iff \frac{2b - 2b^2 + a - 3a + 2a^2}{3 - 2a} < 0.$$

Nämnumaren är positiv så det räcker att visa

$2b - 2b^2 + a - 3a + 2a^2 = 2b - 2a + 2a^2 - 2b^2 < 0 \iff (b - a) + (a - b)(a + b) = (a + b - 1)(a - b) < 0$.
Vilket stämmer eftersom $(a + b - 1) < 0$ medan $(a - b) > 0$.

Låt oss få fram x_E :

x_E beräknas med samma metod som x_W .

$P_S \vec{P}_E = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + a - 1 + a \\ 1 - b - 2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2a \\ -1 - 2b \end{pmatrix}$ och $M = (x_0, y_0) = (3/2, 3/2)$. Sätt in i ekvationen $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, det ger

$$(1 + 2a)(x - 3/2) - (1 + 2b)(y - 3/2) = 0.$$

Räkna ut x -koordinaten i skärningen med linjen $y = b$, kalla den x_E

$$(1 + 2a)(x - 3/2) - (1 + 2b)(b - 3/2) = 0 \Rightarrow$$

$$x_E = \frac{2b^2 + 3a - 2b}{1 + 2a}.$$

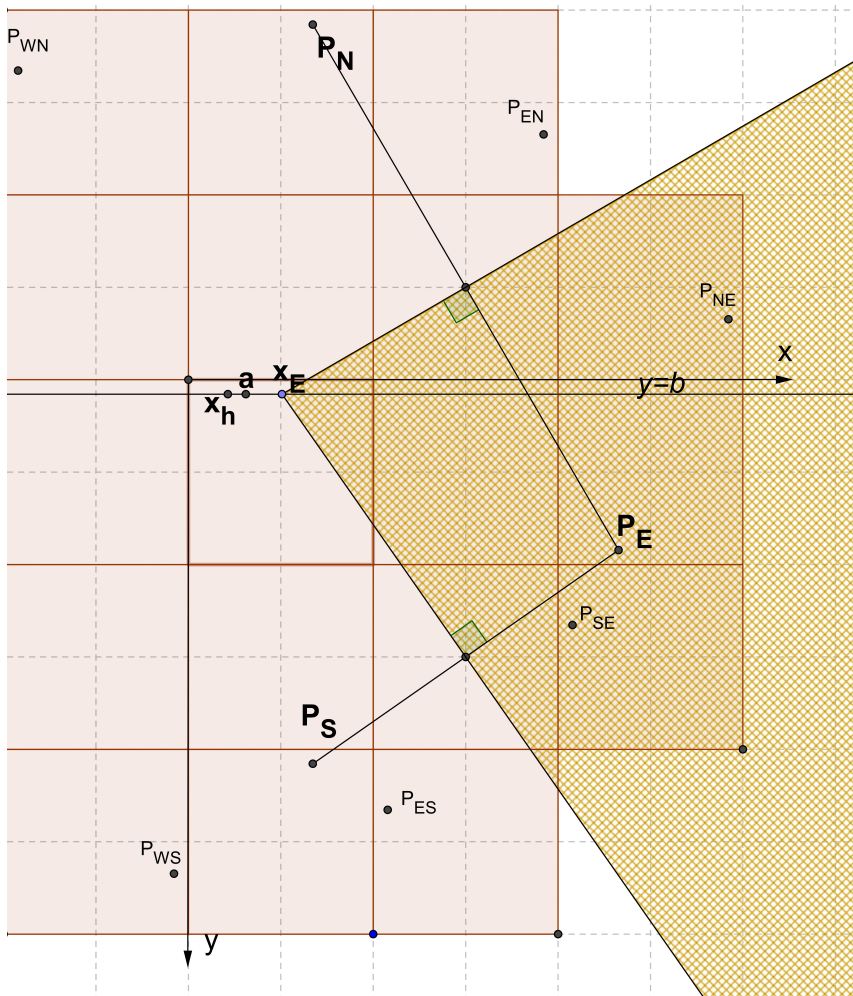
Vi visar att x_E ligger till höger om antipoden, alltså att

$$\frac{2b^2 + 3a - 2b}{1 + 2a} > a \iff \frac{2b^2 + 3a - 2b - a - 2a^2}{1 + 2a} > 0 \iff \frac{2(b^2 + a - b - a^2)}{1 + 2a} > 0.$$

Nämnumaren är positiv så det räcker att visa $2(b^2 + a - b - a^2) = -2(a^2 - b^2) + 2(a - b) = 2(a - b)(1 - a - b) > 0$ vilket stämmer eftersom $(1 - a - b) > 0$ och $(a - b) > 0$. □

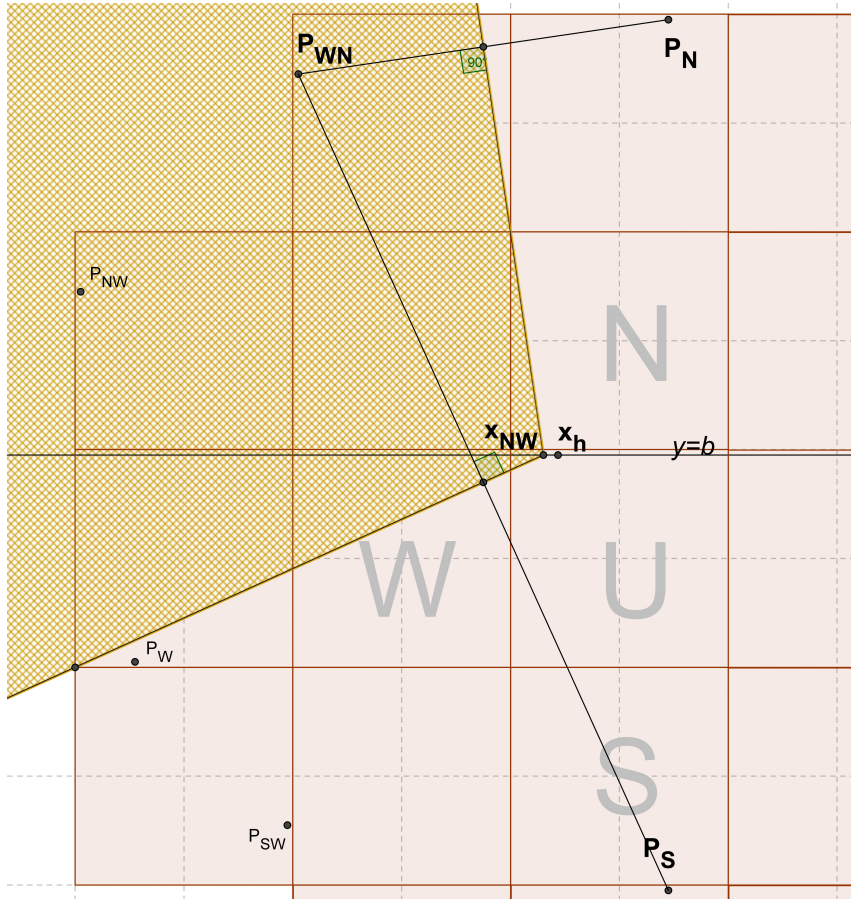
Låt oss nu fortsätta med att jämföra x_{SW} och x_W . Om $x_{SW} > x_W$ eller $x_{SW} < x_W$ beror av a och b , detta diskuteras mer senare. Just nu nöjer vi oss med att kalla den största (den som ligger längst till höger) av x_{SW} och x_W för x_h och den minsta för x_v , motsvarande P -punkter kallas P_h och P_v . Avståndet till (x_h, b) ges av vägarna från P_N, P_S och P_h . Att så är fallet motiveras senare genom uteslutande av vägarna från P_v och P_{WN} . P.g.a. begränsningen $0 < b < a < \frac{1}{2}$ vet vi att vägar från P_N och P_S är längre till de punkter på linjen $y = b$ som ligger till vänster om antipoden jämfört med de som ligger till höger om antipoden.

Vi visar nu att $G_E \notin \Omega$. Annars ger P_E en kortaste väg till Q , och då måste vägen från P_E vara kortare än eller lika lång som varje annan väg mellan P och Q . Speciellt måste P_E ligga närmare, eller lika nära, Q jämfört med P_N och P_S . Det är ekvivalent med att Q ligger på P_E -sidan av mittpunktsnormalerna till $P_E P_N$ och $P_E P_S$, se figur 5.4. Från P_E är därför avståndet till Q högst så stort som avståndet till punkten (x_E, b) . Men vägen mellan P_E och (x_E, b) är alltid kortare än avståndet mellan P och (x_h, b) eftersom (x_h, b) ligger till vänster om antipoden medan (x_E, b) ligger till höger. (x_h, b) är alltså en mer avlägsen punkt än alla punkter på P_E -sidan om mittpunktsnormalerna till $P_E P_N$ och $P_E P_S$. Därför kan G_E ej tillhöra Ω . Av samma anledning utesluts G_{EN} och G_{SE} från Ω .



Figur 5.4: Om P_E tillhör Ω ligger Q i det markerade området.

Det är också så att $G_{WN} \notin \Omega$ eftersom varje punkt i området som utgörs av P_{WN} -sidan om mittpunktsnormalerna till $P_{WN} P_N$ och $P_{WN} P_S$ ligger närmare P_h än (x_h, b) , se figur 5.5. Det finns alltså minst en punkt som är mer avlägsen från P än varje punkt i det området som markerats i figur 5.5.



Figur 5.5: Om P_{WN} tillhör Ω ligger Q i det markerade området.

Vidare gäller att vägen till P_h från varje punkt på P_v -sidan om mittpunktsnormalerna P_vP_N och P_vP_S är kortare än vägen mellan P_h och (x_h, b) . Alltså kan inte P_v tillhöra Ω .

Genom att utesluta alla vägar förutom G_h, G_S, G_N har följande sats visats, med begränsningen $0 < b < a < \frac{1}{2}$, d.v.s. att P ligger i en deltriangel på D . Av symmetriskäl gäller motsvarande då P är en godtycklig punkt på D .

Sats 5.3. Antag att $0 < b < a < \frac{1}{2}$.

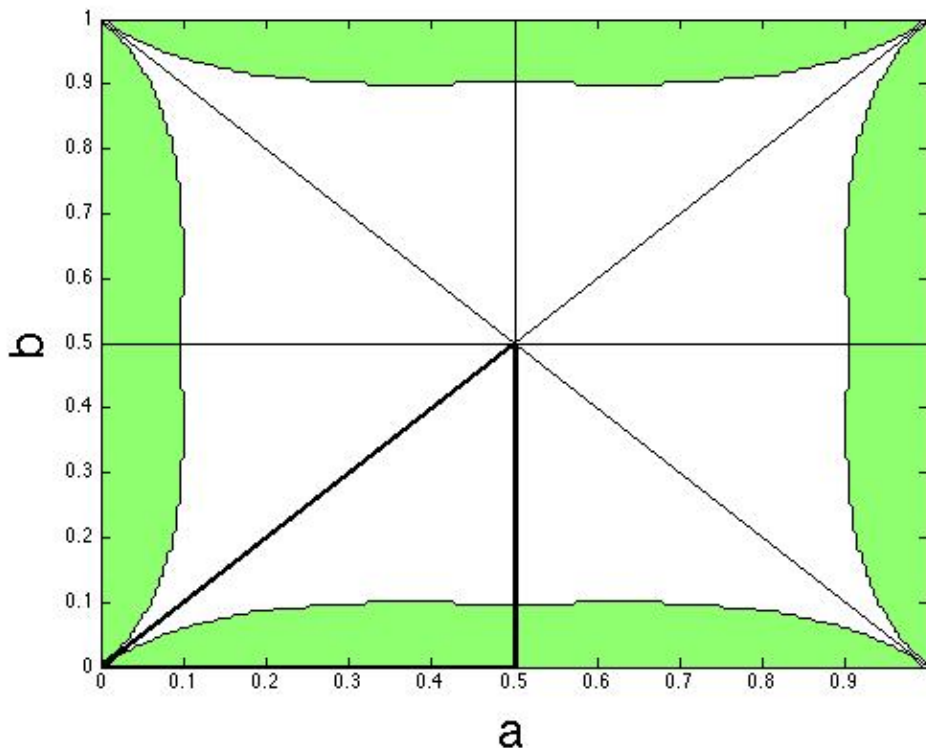
- i) Om $x_W > x_{SW}$ så är $Q = (x_W, b)$ den mest avlägsna punkten till P och mellan P och Q finns tre kortaste vägar, nämligen de från punkterna P_N, P_S, P_W .
- ii) Om $x_W < x_{SW}$ så är $Q = (x_{SW}, b)$ den mest avlägsna punkten till P och mellan P och Q finns tre kortaste vägar, nämligen de från punkterna P_N, P_S, P_{SW} .
- iii) Om $x_W = x_{SW}$ så är $Q = (x_W, b)$, den mest avlägsna punkten till P och mellan P och Q finns fyra kortaste vägar, nämligen de från punkterna P_N, P_S, P_{SW}, P_W .

Fall i inträffar omm $\frac{2b-2b^2+a}{3-2a} > \frac{a+b-ab-b^2}{2-a+b}$, då ligger P i det ofärgade området i den markerade triangeln i figur 5.6.

Fall ii inträffar omm motsatt olikhet gäller, då ligger P i det färgade området i den markerade triangeln figur 5.6.

Fall iii motsvarar likhet, då ligger P på kurvan i den markerade triangeln i figur 5.6.

När $0 < b < a < \frac{1}{2}$ ligger P i den markerade triangeln i figur 5.6. När dessutom $x_W < x_{SW}$, alltså $\frac{2b-2b^2+a}{3-2a} < \frac{a+b-ab-b^2}{2-a+b}$, ligger P i det färgade området av triangeln. Det är då som (x_{SW}, b) är den mest avlägsna punkten till P . Om istället $x_W > x_{SW}$ är x_W den mest avlägsna punkten.

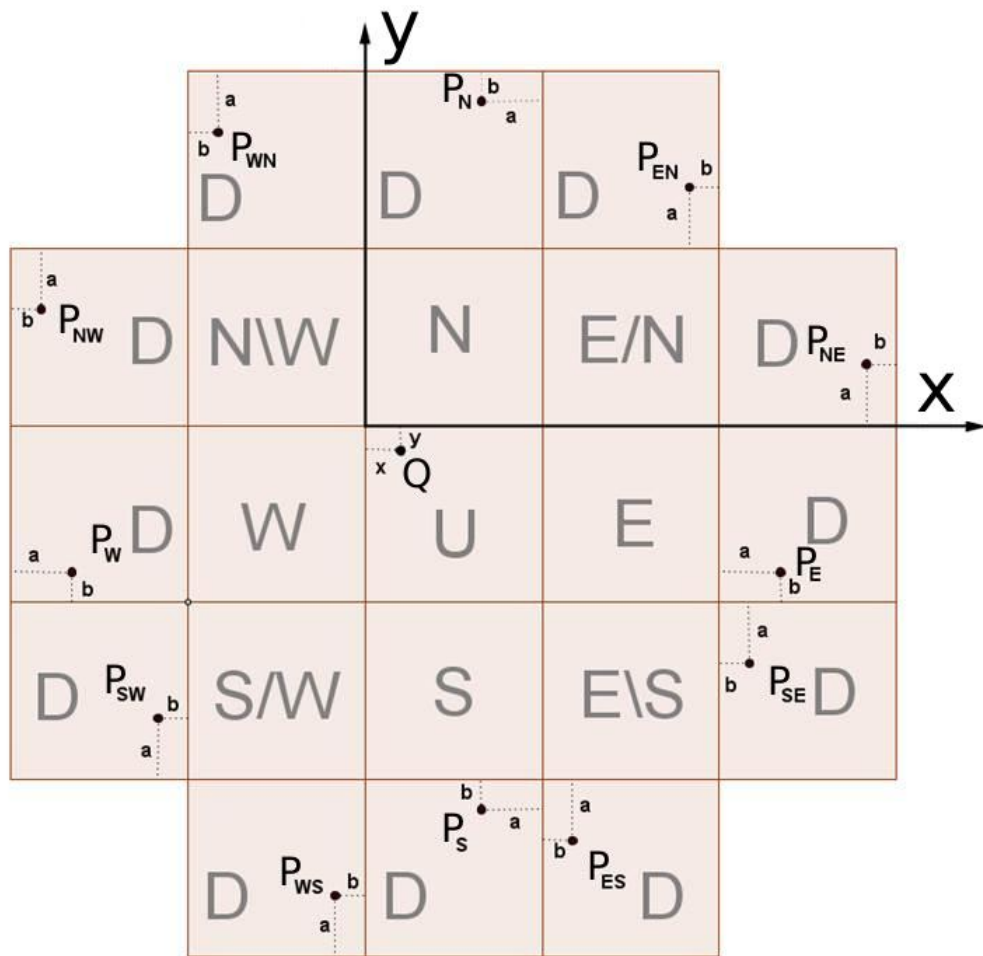


Figur 5.6: Bilden visar sidan D . Med begränsningen $0 < b < a < \frac{1}{2}$ ligger P i den markerade triangeln.

Om P är en godtycklig punkt på D , får vi ett motsvarande färgat område på hela D så som syns i figur 5.6. Om P tillhör det färgade området finns tre kortaste vägar mellan P och Q , varav två passerar endast en av sidorna N, S, E, W och den tredje passerar två av dem. Om P ligger i det ofärgade området av D finns tre kortaste vägar mellan P och Q , och alla tre passerar endast en av N, S, E, W . Om P ligger på randen av det färgade området, finns fyra kortaste vägar mellan P och Q .

5.2 Specialfall

I detta avsnitt bestäms den mest avlägsna punkten till en godtycklig punkt P i specialfallen $a = b = 0$, $0 = b < a < \frac{1}{2}$ samt $0 < a = b < \frac{1}{2}$ med algebraiska metoder. Vi inför ett nytt koordinatsystem med origo i hörnet gemensamt för sidorna U, N, W , med x -axelns positiva riktning till höger och y -axelns positiva riktning uppåt, se figur 5.7. Observera att vi i fortsättningen betecknar längden av geodeten $P_i Q$ i figur 5.7 med G_i och att den beräknas med avståndsformeln. Enligt Lemma 3.1 vet vi att minst tre geodeter är lika långa mellan P och Q , detta utnyttjas i räkningarna i det här avsnittet.



Figur 5.7: Bilden visar punkten P 's position i de olika utvecklingarna. OBS y -axelns riktning!

Med detta koordinatsystem har Q och representanterna för P följande koordinater:

$$Q = (x, -y).$$

$$P_{WN} = (b - 1, 2 - a).$$

$$P_N = (1 - a, 2 - b).$$

$$P_{EN} = (2 - b, 1 + a).$$

$$P_{NE} = (3 - b, a).$$

$$P_E = (2 + a, b - 1).$$

$$P_{SE} = (2 + b, -1 - a).$$

$$P_{ES} = (1 + b, -2 - a).$$

$$P_S = (1 - a, -b - 2).$$

$$P_{WS} = (-b, -3 + a).$$

$$P_{SW} = (-1 - b, a - 2).$$

$$P_W = (a - 2, b - 1).$$

$$P_{NW} = (b - 2, 1 - a).$$

5.2.1 P ligger på diagonalen

I detta avsnittet behandlas specialfallet $a = b$, $0 < a < \frac{1}{2}$. De G_i som alltid är större än någon av de andra kan uteslutas eftersom vi söker avståndet mellan P och Q .

För att utesluta G_{WN} konstateras att $G_{WN} > G_N$, alltså att

$$\sqrt{((b-1)-x)^2 + ((2-a)-(-y))^2} > \sqrt{((1-a)-x)^2 + ((2-b)-(-y))^2} \iff -ax + x > ax - x \iff x > ax$$

att $x > ax$ är uppenbart eftersom $0 < a < \frac{1}{2}$. På samma sätt förkastas $G_{NE}, G_{SE}, G_{ES}, G_{WS}, G_{NW}$. Nu bestäms till vilka punkter det finns tre, eller fler, lika långa geodeter från P till Q (vi bortser från de G_i som redan förkastats).

Bestäm i vilken punkt $G_N = G_S = G_W$.

$$\left. \begin{array}{l} G_N = G_S : \\ \sqrt{((1-a)-x)^2 + ((2-b)-(-y))^2} = \sqrt{((1-a)-x)^2 + ((-b-2)-(-y))^2} \stackrel{b=a}{\iff} \\ ax - ay - 3a - x + 2y = ax + a - ay - x - 2y \implies y = a \\ \\ G_N = G_W : \\ \sqrt{((1-a)-x)^2 + ((2-b)-(-y))^2} = \sqrt{((a-2)-x)^2 + ((b-1)-(-y))^2} \stackrel{b=a}{\iff} \\ ax - ay - 3a - x + 2y = -ax - 3a + ay + 2x - y \implies y = x \end{array} \right\} \implies y = x = a$$

På samma sätt beräknas alla punkter till vilka det finns tre, eller fler, lika långa geodeter från P . I tabell 1 visas deras koordinater.

Kombination	x	y
$G_N = G_E = G_S = G_W$	a	a
$G_N = G_{EN} = G_E$	$\frac{a+2a^2}{2a^2-a+1}$	$\frac{a-2a^2}{2a^2-a+1}$
$G_N = G_S = G_{SW}$	$a - a^2$	a
$G_N = G_E = G_{SW}$	$\frac{2a^2-5a}{2a^2-a-5}$	$\frac{-2a^2-5a}{2a^2-a-5}$
$G_{EN} = G_E = G_S = G_{SW}$	$\frac{a}{a+1}$	$\frac{a}{a+1}$
$G_{EN} = G_E = G_W$	a	$a - a^2$
$G_S = G_{SW} = G_W$	$\frac{a-2a^2}{2a^2-a+2}$	$\frac{2a^2+a}{2a^2-a+2}$
$G_N = G_{EN} = G_S$	$a + 2a^2$	a
$G_N = G_{EN} = G_{SW} = G_W$	$\frac{a}{1-a}$	$\frac{a}{1-a}$
$G_{EN} = G_S = G_W$	$\frac{4a^2+6a}{2a+5}$	$\frac{8a^2+16a}{4a^2+16a+15}$
$G_E = G_{SW} = G_W$	a	$2a^2 + a$

Tabell 1: Här visas koordinaterna för punkterna med minst tre lika långa geodeter till P .

Vi visar att G_{EN}, G_E och G_W inte är avståndet mellan P och Q eftersom det finns minst en annan väg som är kortare till punkten $(a, -(a-a^2))$. Nämligen är $G_N < G_E$ då $x = a, y = a - a^2$. För dessa x och y är $G_N = -4a^2 - 4a + 2a^3$ och $G_E = 2a^2 - 2a^3 - 4a$.

$$-4a^2 - 4a + 2a^3 < 2a^2 - 2a^3 - 4a \iff 2a^2 < 3a$$

då $0 < a < \frac{1}{2}$ är det uppenbart att $2a^2 < 3a$. Detta betyder också att $Q \neq (a, -(a-a^2))$ eftersom inga andra kombinationer av G_i ger den punkten.

Kombinationen G_{EN}, G_E och G_W förkastas, liksom andra kombinationer genom samma resonemang. De som återstår redogörs för i tabell 2.

Kombination	x	y
$G_N = G_E = G_S = G_W$	$x = a$	$y = a$
$G_N = G_{EN} = G_E$	$x = \frac{a+2a^2}{2a^2-a+1}$	$y = \frac{a-2a^2}{2a^2-a+1}$
$G_S = G_{SW} = G_W$	$x = \frac{a-2a^2}{2a^2-a+2}$	$y = \frac{2a^2+a}{2a^2-a+2}$

Tabell 2: Tabellen visar de kombinationer som återstår.

$G_N = G_E = G_S = G_W > G_N = G_{EN} = G_E$ och $G_N = G_E = G_S = G_W > G_S = G_{SW} = G_W$ vilket betyder att $G_N = G_E = G_S = G_W$ är avståndet mellan P och Q . Det ger den mest avlägsna punktens koordinater, $Q = (a, -a)$. Det finns alltså fyra kortaste vägar till Q och den mest avlägsna punkten är antipoden. Genom att studera mittpunkten drar vi slutsatsen att resultatet gäller på hela diagonalen $a = b$ och diagonalen $a = 1 - b$, på sidan D p.g.a. kubens symmetri.

5.2.2 P ligger på kanten

I detta avsnitt behandlas specialfallet $b = 0$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Efter att vi uteslutit de G_i som alltid är större än någon av de andra samt eliminerat de kombinationer av G_i som inte ger avståndet till sin punkt återstår fyra kombinationer av G_{WN}, G_N, G_S och G_{SW} . Samtliga av dessa kombinationer ger $x = \frac{a}{2-a}$, $y = 0$. Det betyder att $Q = (\frac{a}{2-a}, 0)$ och det finns fyra kortaste vägar mellan P och Q . Alla fyra har längden $G_{WN} = G_N = G_S = G_{SW}$. P.g.a. kubens symmetri drar vi slutsatsen att ekvivalent resultat gäller för samtliga deltrianglar av sidan D .

5.2.3 P ligger i hörnet

I detta avsnitt behandlas specialfallet $a = 0$, $b = 0$. Först utesluts G_{NE} och G_{WS} eftersom de alltid är större än någon annan G_i . Observera sedan att geodeterna P_EQ och $P_{SE}Q$ sammanfaller. Utöver dessa sammanfaller även $P_{ES}Q$ och P_SQ , $P_{WN}Q$ och P_WQ samt $P_{NW}Q$ och P_NQ . Att P_EQ och $P_{SE}Q$ sammanfaller kan ses i figur 5.7 genom insikten om att P_S och P_{ES} sammanfaller då $a = 0$, $b = 0$. Detta ger $G_N = G_{EN} = G_E = G_S = G_{SW} = G_W$ med $Q = (0, 0)$. Den mest avlägsna punkten till ett hörn är således det motstående hörnet och det finns sex kortaste vägar dit. Vi drar slutsatsen att det gäller för alla kubens hörn.

5.3 Sammanfattning av resultat

I allmänhet finns tre kortaste vägar mellan en punkt och dess mest avlägsna punkt. När P är placerad på någon diagonal sammanfaller P :s mest avlägsna punkt med P :s antipod, dock finns det fyra kortaste vägar mellan P och antipoden.

I fallet då P tillåts ligga på linjen $a = \frac{1}{2}$, $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$, alltså är placerad någonstans på det "kors" som sammanbinder mittpunkterna på sidans kanter går det att, genom en utvidgning av resonemanget med mittpunktsnormaler i avsnitt 5, se att P har två mest avlägsna punkter. Detta gäller ej då P ligger i punkten gemensam för linjerna som skapar korset - där finns bara den mest avlägsna punkten antipoden.

Det finns ingen punkt som har fler mest avlägsna punkter än två.

Referenser

- [1] GEODESIC LINES, S. E. STEPANOV, 2000, http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/0008_115.pdf