CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Ändliga projektiva plan

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Bogdan Dobondi
Malin Nilsson

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2014

Ändliga projektiva plan

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Malin Nilsson

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom matematikprogrammet vid Göteborgs universitet
Bogdan Dobondi

Handledare: Jan Stevens
Examinator: Maria Roginskaya

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2014

Sammanfattning

Denna rapport är ett examensarbete på kandidatnivå. Vi börjar med att introducera de nödvändiga algebraiska koncepten som behövs. Därefter introducerar vi projektiva plan och går igenom de grundläggande egenskaperna för dessa. Vi fortsätter med att definiera och undersöka kollineationer, för att sedan konstruera projektiva plan över kroppar. Vi ger exempel på ett Galoisplan av ordning tre och minikvarternionplanet Ω. Därefter behandlas koordinatisering av projektiva plan. Vi introducerar den planära ternära ringen och undersöker dess algebraiska egenskaper. Detta gör att vi avslutningsvis kan bevisa den fundamentala satsen för ändlig projektiva geometri.

Abstract

This paper is a bachelor thesis in mathematics. We begin by introducing the necessary algebraic concepts. We then introduce projective planes and explore some of their fundamental properties. This is followed by an introduction and discussion regarding kollineations of projective planes. We then give examples of Galoisplanes of order 3 and the miniquaternion plane Ω. We give a method for coordinatization of projective planes and introduce planar ternary rings and explore their algebraic properties. This then leads us to the proof of the fundamental theorem of finite projective geometry.

Förord

Detta är ett kandidatarbete i matematik vid Göteborgs universitet gjort av Bogdan Dobondi och Malin Nilsson. Arbetet riktar sig främst mot elever med liknande studiebakgrund som författarna.

Syfte

Detta arbete ger grundläggande förståelse för vad ändliga projektiva plan är och för sambanden som finns, samt verkar finnas, mellan existensen av planen och deras ordning. Det introduceras vissa algebraiska koncept, begreppet projektiva plan samt ändliga sådana.

Eftersom de ändliga projektiva planen endast verkar existera då ordningen av dem är en primtalspotens, är detta något som undersöks i rapporten. Vi redogör för de satser inom området som är bevisade samt undersöker och presenterar ett viktigt resultat rörande sambandet mellan den geometriska och den algebraiska strukturen av projektiva plan, den så kallade ”Fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri”.

Avgränsningar

Då vårt fokus ligger på de ändliga planen, har vi inte haft möjlighet att behandla alla aspekter av projektiva plan. Exempelvis gäller satserna 5.1 och 5.2 i konstruktionsdelen även om man generaliserar ordet ”kropp” till ”skevkropp”. Då den linjära algebran som vi tidigare studerat bygger på att vi behandlar kroppar, och inte skevkroppar, har vi valt att begränsa oss till kroppar i dessa satser. Är läsaren intresserad av teorin som bygger på skevkroppar så hänvisar vi till källorna [AS] och [LMB].

De algebraiska begreppen introduceras huvudsakligen för att möjliggöra konstruktion och undersökning av de ändliga projektiva planen, och vi berör alltså endast de koncept och satser som är relevanta för våra fortsatta studier av projektiva plan. Satserna i delkapitlet ”Algebraiska resultat” är mycket viktiga för detta arbete, men lämnas obevisade då bevisen kräver en omfattande genomgång av andra algebraiska satser och begrepp (till exempel splittringskroppar). Då syftet med vårt arbete inte är algebra, utan projektiv geometri, har vi valt att inte redogöra för bevisen, utan bara återge satserna.

Metod och genomförande

Denna rapport har gjorts med hjälp av mycket litteraturstudier. Vi har återgett mycket av teorin som vi läst, men en stor del av vårt arbete har även legat i att fylla ut och skriva fullständiga bevis till satser, då det i litteraturen ofta har utelämnats många detaljer eller större delar av beviset. Många bevis har även utelämnats helt i litteraturen (ofta lämnade som övningar åt läsarna), varför en hel del bevis är gjorda av oss från grunden. Många av de exemplen vi har med är också sådana som vi har kommit på själva, då böckerna som vi läst ofta inte har med så mycket förklarande exempel. Vi tycker själva att det är en stor fördel med exempel för förståelsens skull och har därför valt att ta med mycket förklarande exempel och bilder i rapporten.

Som läsaren kommer att märka har vi även en del bilder i bevisen. Detta har vi valt på grund av att vi själva, när vi studerade bevisen, tyckte att de var mycket komplicerade och svåra att hänga med i om man inte ritade upp bilder och kunde visualisera vad som hände. I en del bevis behöver man hålla reda på många olika punkter och linjer på samma gång, vilket blir väldigt svårt om man inte har en bild framför sig.

Disposition

Då studierna av projektiva plan bygger på en del algebra, har vi valt att i början av rapporten ha ett kapitel som ger läsaren den algebraiska bakgrunden. Detta kapitel påminner dels läsaren om grundläggande koncept och dels introduceras vissa algebraiska definitioner och satser som kanske kan vara nya för läsaren. I kapitel 3 introducerar vi sedan de projektiva planen samt går igenom grundläggande teori kring dem. I kapitel 4 - 6 går vi igenom djupare teori och framför olika resultat som bland annat berör projektiva plans egenskaper, existensen av dem och hur man kan konstruera dem, samt avslutar med den fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri.

Författarnas ansvarsområden

Bogdan har haft huvudansvaret för delkapitlen ”Grupper, ringar och kroppar”, ”Affina plan”, ”Incidensmatriser” samt kapitlen ”Inledning” och ”Koordinatisering av projektiva plan”. Malin har haft huvudansvaret för delkapitlen ”Algebraiska resultat” och ”Minikvaternionsystemet” samt kapitlena ”Projektiva plan” , ”Kollineationer” och ”Konstruktion av projektiva plan”.

Det har förts en dagbok samt en tidslogg för var och en av de medverkande, vari de enskilda prestationerna redogjorts för.

Avslutningsvis vill vi passa på att tacka vår handledare Jan Stevens. Vi uppskattar enormt mycket de fria tyglarna vi fick i början, men också det faktum att Jan har varit tillgänglig för frågor varje gång vi behövt det. Vi vill även tacka vår opponeringsgrupp, speciellt Jenny Arkevall för hennes detaljerade och mycket uppskattade återkoppling.

Innehåll

1 Inledning

Detta arbete handlar om projektiv geometri. Matematikens utveckling har haft en stor betydelse för vetenskapens utveckling, som i sin tur ligger till grund för det vi idag tar för givet. En av matematikens stöttepelare och en av de äldsta disciplinen inom matematiken är geometrin. Som med mycket av den grundläggande matematiken börjar vi vår resa i antikens Grekland.

1.1 Euklides och linjerna i sanden

När man nämner ordet geometri så tänker troligtvis de allra flesta av oss på trianglar, fyrhörningar och cirklar. Dessa objekt var studieföremål för matematiker och vetenskapsmän i antikens Grekland. Det är inte svårt att föreställa sig hur man i antikens Grekland studerade geometri genom att rita i sanden. Denna något romantiska inställning till matematiker i antikens Grekland bara förstärker deras bedrifter.

De allra flesta av oss studerar de vanligaste geometriska objekten innan vi kommer till universitetet. Rätvinkliga trianglar är som bekant centrala inom trigonometrin som lärs ut på gymnasiet. Den grekiske matematikern Euklides postulerade i boken *Elementa* fem axiom med vilkas hjälp han och andra kunde bevisa olika geometriska samband. Vi påminner läsaren om dessa:

(i) Mellan två punkter kan man alltid dra en rät linje.

(ii) Varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat.

(iii) Runt varje punkt kan man beskriva en cirkel med given radie.

(iv) Alla räta vinklar är lika med varandra.

(v) När en rät linje skär två räta linjer, och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande räta linjen är mindre än två räta vinklar, så kommer de båda räta linjerna, om de förlängs obegränsat, att skära varandra på den sida om den skärande räta linjen som de två inre vinklarna ligger.

Det femte postulatet är även känt som parallellpostulatet och matematiker trodde länge att detta var överflödigt. Men, som vi ska se, är parallellpostulatet det som projicerar oss in i den icke-euklidiska geometrin. Andra berömda, och för den mänskliga civilisationens utveckling viktiga, resultat från antikens Grekland är bland andra Pythagoras sats. Denna sats betydelse för matematikens och den mänskliga civilisationens utveckling går inte att underskatta. [JS]

1.2 Icke-euklidisk geometri

Av Euklides postulat så har parallellpostulatet genom tiderna varit det kontroversiella. Matematiker har genom tiderna försökt att bevisa att detta postulat är överflödigt och misslyckats. Men tiden efter medeltiden innebar en pånyttfödelse för konsten och vetenskapen. Det är föga förvånande att även matematiken och, med den, geometrin kom att utvecklas under denna period. En djupare diskussion om detta och andra vetenskapsfilosofiska frågor kan hittas i artikeln skriven av professor Olle Häggström [OH].

I början av 1800-talet började Gauss att undersöka konsekvenserna som en ändring av parallellpostulatet skulle kunna medföra. Han var dock inte ensam. Det var just under denna period som matematiker upptäckte att parallellpostulatet, om det ändras, ger upphov till det vi idag kallar för hyperbolisk geometri. En mer uttömmande historik om hur icke-euklidisk geometri utvecklades ges i [IE]. Även den så kallade projektiva geometrin började utvecklas vidare.

1.3 Projektiv geometri

Inom den projektiva geometrin studerar vi hur olika objekt uppfattas från olika perspektiv. Framförallt är vi intresserade av vilka egenskaper till ett geometriskt objekt som förblir detsamma oavsett perspektiv. Men vad menar vi med ordet *projektiv*? I en artikel publicerad på Rutgers University's internetsida ger Alexis Conrad ett bra exempel. Om vi betraktar ett schackbräde uppifrån så kommer vi att observera att alla linjer på brädet är parallella. Om vi nu vrider schackbrädet och betraktar det från en vinkel så kommer det att se annorlunda ut. De parallella linjerna är inte längre parallella. Betraktat ur ett geometriskt perspektiv säger vi att schackbrädet är projicerat på ett annat bräde. [AC]

Den tidigaste projektiva geometrin anses vara upptäckt av Pappus av Alexandria (290-350). Den franska matematikern Gérard Desargues (1591-1661) lade grunden till den moderna projektiva geometrin genom sina upptäckter angående projektiva plan. Fastän Desargues räknas som den projektiva geometrins fader dröjde det ett sekel innan andra matematiker kom att förstå vidden av Desargues upptäckter. [AC]

Ett projektivt plan erhålls genom att man låter alla parallella linjer korsa varandra i en oändligt avlägsen punkt. I det vanliga euklidiska planet hämtar man koordinater från $\mathbb{R}$. Om denna idé generaliseras så kan man hämta koordinater från en godtycklig ring R. Om R då skulle vara en kropp så kallas det projektiva planet för ett kroppsplan. Skulle R vara en ändlig kropp kallas (det ändliga) planet för ett Galoisplan och det är dessa som är centrala för detta arbete. Det visar sig nämligen att Galoisplan är nära förknippade med projektiva plan som uppfyller vissa geometriska egenskaper beskrivna av Desargues.

1.4 Modern projektiv geometri

En av de största frågorna inom projektiv geometri har varit, och är fortfarande, existensen av ändliga projektiva plan. Ett ändligt projektivt plan är ett projektivt plan som har ändligt många linjer och punkter. Detta något ointuitiva begrepp kommer undersökas och förklaras i detta arbete. Som vi kommer att se så gäller det att om n är en primtalspotens så existerar det ett ändligt projektivt plan för alla n. Men vad gäller då när n inte är en primtalspotens? Ett resultat är Bruck-Rysers sats:

Sats 1.1 (Bruck-Rysers sats)**.** *Om $n \equiv 1 \pmod 4$ eller om $n \equiv 2 \pmod 4$ så kan det bara existera ett ändligt projektivt plan om n är en summa av två kvadrater.*

Beviset är tämligen tekniskt och kan studeras i detalj i [HP]. Det minsta fallet som ej täcks upp av Bruck-Ryser är då $n = 10$. Det var länge en öppen fråga som till slut avgjordes 1989 efter flera år av beräkningar med hjälp av datorer. En av de som var med och genomförde denna beräkning var Clement Lam. Det visades att det inte existerar ändliga projektiva plan av ordning 10. [LAM]

Lam hade jobbat länge med detta projekt och om man läser hans redogörelse inser man att problemets lösning växte fram i takt med att datorerna blev alltmer kraftfulla under 1980-talet. Lam själv uppskattar att det krävdes upp mot 3000 timmar av databeräkningar för att lösa problemet. Det finns ett samband mellan projektiva plan och så kallade latinska kvadrater, och det var med hjälp av detta samband som Lam et al. kunde lösa problemet. Det var en kombinatorisk lösning på ett geometriskt problem. [LAM]

Den nutida forskningen inom projektiv geometri behandlar projektiv geometri i högre dimensioner och projektiva plan med varierande grad av struktur. Den moderna projektiva geometrin sträcker sig till andra matematiska discipliner såsom algebra, kombinatorik och topologi. Projektiv geometri är ett dynamiskt område och vårt arbete behandlar de mest välstrukturerade projektiva planen. Men detta är bara toppen på ett fascinerande och komplext isberg.

I detta arbete ska vi därför introducera Desargues upptäckter och bevisa ett mycket viktigt och fascinerande samband mellan ändliga kroppar och den geometriska egenskapen uppkallat efter Desargues. Detta samband kallas för fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri.

Sats 1.2 (Fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri)**.** *Låt $\mathbb{P}$ vara ett ändligt projektivt plan. Då är $\mathbb{P}$ desargiskt om och endast om det är ett kroppsplan.*

2 Algebraisk bakgrund

Vi ämnar att i detta kapitel påminna läsaren om några av de algebraiska begrepp och strukturer som kommer att användas i detta arbete. Vi har valt att inte ta med alltför mycket exempel i detta kapitel på grund av att det mestadels ska vara repetition för läsaren.

Då studierna av projektiva plan är nära sammankopplade med grupper och kroppar är detta några begrepp som vi här behöver definiera. Några viktiga satser är *delgruppskriteriet* samt satser som behandlar ändliga kroppar, varför vi redogör för dessa här. Det finns även ett par satser som är mycket viktiga för våra studier av projektiva plan, men vars bevis är alltför omfattande för att redogöras för här. Dessa är således samlade under delkapitel 2.2. Delkapitel 2.3 innehåller teori om minikvaternioner, vilka vi behöver för att senare konstruera speciella projektiva plan.

Kapitlet baseras främst på [JD], förutom sista delkapitlet som baseras på [RK].

2.1 Grupper, ringar och kroppar

Definition 2.1. En *binär operation* $*$ på en mängd A är en regel som till varje ordnat par $(x, y) \in A \times A$ ordnar ett element i A, det vill säga att $A \times A \ni (x, y) \mapsto z \in A$.

Definition 2.2 (Grupp)**.** En mängd G tillsammans med en binär operation, $(G, *)$, sägs vara en *grupp* om det tillfredsställer följande egenskaper:

(a) slutenhet under operationen $*$, det vill säga att för alla $a, b \in G$ gäller att $a * b \in G$,

(b) associativitet, det vill säga att för alla $a, b, c \in G$ gäller att $a * (b * c) = (a * b) * c$,

(c) existens av neutralt element, det vill säga att det finns ett element $e \in G$ sådant att $e * g = g * e = a$, för alla $g \in G$,

(d) existens av inversa element, det vill säga att för alla $g \in G$ så finns det ett element $g^{-1} \in G$ sådant att $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

En delmängd $H \subset G$ sägs vara en *delgrupp* till G om $(H, *)$ i sig uppfyller villkoren för att vara en grupp.

Lemma 2.3. *Låt G vara en grupp under operationen $*$.*

(i) Identitetselementet i G är unikt.

(ii) Inversen till ett element g är unikt för alla $g \in G$.

Bevis. (i) Antag att e och f är två neutrala element i G. Då e är neutralt gäller att $e*g = g$ för alla $g \in G$. Speciellt gäller då att $e * f = f$ för elementet $f \in G$. Då f är neutralt gäller att $g * f = g$ för alla $g \in G$. Speciellt gäller då att $e * f = e$ för elementet $e \in G$. Vi får då att $f = e * f = e$.

(ii) Antag att e är det neutrala elementet i G och att g^{-1} och g' är två inverser till $g \in G$. Vi får då $g^{-1} = g^{-1} * e = g^{-1} * (g * g') = (g^{-1} * g) * g' = e * g' = g'$ och vi ser att vi således fått $g^{-1} = g'$.

□

Lemma 2.4. *Låt G vara en grupp under operationen $*$ och H vara en delgrupp till G.*

(i) Om e är det neutrala elementet i G och f är det neutrala elementet i H så är $e = f$.

(ii) Om $h \in H$, h^{-1} är inversen till h i H och h' är inversen till h i H, så är $h^{-1} = h'$.

Bevis. (i) Då f är det neutrala elementet i H gäller att $f * f = f$. Låt f^{-1} beteckna det inversa elementet till f i G. Vå får då

$$\begin{aligned} f^{-1} * (f * f) = f^{-1} * f & \quad \Leftrightarrow \\ (f^{-1} * f) * f = e & \quad \Leftrightarrow \\ e * f = e & \quad \Leftrightarrow \\ f = e. & \end{aligned}$$

(ii) Vi har att $h' * h = h * h' = f$ då f är neutral i H. Men då $f = e$ har vi att $h' * h = h * h' = e$ i H. Lemma 2.3 implicerar dock att h^{-1} är en unik invers till h i G, vilket medför att $h' = h^{-1}$.

$\square$

Med dessa lemman i baggaget är vi nu redo för att formulera delgruppskriteriet.

Sats 2.5 (Delgruppskriteriet)**.** *Låt G vara en grupp under operationen $*$. En delmängd $H \subset G$ är en delgrupp till G om och endast om*

(i) $H \neq \emptyset$,

(ii) H *är sluten under* $*$, *och*

(iii) H *är sluten under inversbildning.*

Bevis. Vi börjar med att visa att att en delgrupp måste uppfylla villkoren i delgruppskriteriet. Låt H vara en delgrupp till G. Vi har då enligt axiom (c) ur definitionen av grupper att H innehåller ett neutralt element. Alltså är H icke-tom. Vi har enligt axiom (a) att H är sluten under $*$ och enligt axiom (d) att H är sluten under inversbildning.

Vi måste nu visa att en delmängd till G som uppfyller kriterierna (i), (ii) och (iii) är en delgrupp. Antag att H är en sådan delmängd. Enligt (i) har vi ett element $h \in H$. Enligt (iii) finns även inversen h^{-1} i H, och således enligt (ii) har vi att $h * h^{-1} = e \in H$, där e betecknar det neutrala elementet. Vi har alltså att axiom (c) är uppfyllt. Axiom (a) fås direkt från att H uppfyller (ii) och axiom (d) fås direkt från att (iii) är uppfyllt. H ärver även associativiteten (axiom (b)) direkt från G. Därmed är H en delgrupp och beviset är således klart. $\square$

Definition 2.6. En grupp $(G, *)$ vars operation är kommutativ sägs vara en *abelsk grupp.*

Då vi nu vet vad en abelsk grupp är kan vi definiera begreppet *ring*, för att så småningom kunna definiera vad en *kropp* är.

Definition 2.7 (Ring)**.** En mängd R med två stycken binära operationer

$$(a, b) \mapsto a + b \text{ (addition)}$$

$$(a, b) \mapsto ab \text{ (multiplikation)}$$

sägs vara en *ring* om

- $(R, +)$ är en abelsk grupp,
- multiplikationen är associativ, det vill säga att för alla $a, b, c \in R$ så gäller att $a(bc) = (ab)c$, och
- multiplikationen är distributiv över additionen, det vill säga att för alla $a, b, c \in R$ så gäller att $a(b + c) = ab + ac$ och $(b + c)a = ba + ca$.

Definition 2.8. Låt $(R, +, \cdot)$ vara en ring.

- R sägs vara en *kommutativ ring* om multiplikationen är kommutativ.
- R sägs ha en *etta* om det finns ett multiplikativt neutralt element 1 sådant att för alla $a \in R$ så gäller att $1a = a1 = a$.

Definition 2.9. Låt $(R, +, \cdot)$ vara en ring. R sägs *sakna nolldelare* om det för alla $a, b \in R$ gäller att $ab = 0$ implicerar att $a = 0$ eller $b = 0$.

Egenskapen att sakna nolldelare innebär således att om en produkt av två element i en ring är noll, så måste minst ett av elementen vara noll. Detta är en viktig egenskap för konstruktionen av en algebraisk kropp, vilket är målet med denna diskussion. Vissa ringar har några viktiga egenskaper.

Definition 2.10. En ring R som är kommutativ, saknar nolldelare och har en nollskild etta sägs vara ett *integritetsområde.*

Anm. Med uttrycket *nollskild etta* menas att det neutrala elementet för multiplikation inte är lika med det neutrala elementet för addition, det vill säga att $1 \neq 0$.

Vi har nu allt som behövs för att kunna definiera den ring som har mest struktur, eller regelbundenhet, av alla.

Definition 2.11 (Kropp)**.** En kommutativ ring R där $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ bildar en grupp sägs vara en *kropp.*

Följande inklusion

$$\textit{kropp} \subset \textit{integritetsområde} \subset \textit{kommutativ ring} \subset \textit{ring}$$

illustrerar graden av struktur hos en ring. Kroppen är den alltså den mest strukturerade ringen, något som innebär att man i en kropp kan utföra de fyra aritmetiska operationerna $+, -, \cdot, \div$. Vi har till exempel att $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ är en kropp medan $(\mathbb{Z}_4, \oplus, \odot)$ inte är en kropp.

Definition 2.12 (Skevkropp)**.** En ring R, där $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ bildar en grupp sägs vara en *skevkropp.*

Vi har alltså att en kropp är en kommutativ skevkropp.

Ett till verktyg som vi behöver för våra fortsatta studier av projektiva plan är det som behandlar sidoklasser och partitioner.

Definition 2.13 (Partition)**.** En mängd P av icke-tomma delmängder till en annan mängd M sägs bilda en *partition* om

(i) $\bigcup_i P_i = M$, där P_i betecknar elementen i P, och

(ii) $P_i \cap P_j = \emptyset$ om och endast om $P_i \neq P_j$ för alla par av element $P_i, P_j \in P$.

Definition 2.14 (Ekvivalensklass)**.** Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på en mängd M och låt $[m] = [x \in S; x \sim m]$. $[a]$ sägs då vara *ekvivalensklassen* till $\sim$ för elementet m.

Sats 2.15. *Ekvivalensklasserna $[m]$ till en ekvivalensrelation $\sim$ på en mängd M bildar en partition av M.*

Bevis. Vi behöver först visa att $M = \bigcup_{m \in M} [m]$. Då vi har att $\sim$ är reflexiv, gäller att $m \in [m]$. Således är detta uppfyllt.

Vi behöver även visa att $P_i \cap P_j = \emptyset$ om och endast om $P_i \neq P_j$. Antag att $P_i \cap P_j \neq \emptyset$. Då finns det ett element $m \in M$ sådant att $m \in P_i$ och $m \in P_j$. Låt $P_i = [a]$ och $P_j = [b]$. Vi har då att $m \sim a$ och $m \sim b$. Då $\sim$ är symmetrisk och transitiv leder detta till att $a \sim b$. Tag nu ett godtyckligt element $x \in [a]$. Vi har då att $x \sim b$ och $b \sim d$, vilket leder till att $x \sim d$ då $\sim$ är transitiv. Således har vi att $[a] \subset [b]$. På samma sätt fås att $[b] \subset [a]$. Alltså gäller att $[a] = [b]$. Därmed utgör ekvivalensklasserna en partition. $\square$

Sats 2.16. *Låt H vara en delgrupp till en grupp G och låt relationen $\sim$ ges av $a \sim b$ om och endast om $ab^{-1} \in H$. Då utgör $\sim$ en ekvivalensklass.*

Bevis. Tag ett element $a \in G$. Då gäller att $aa^{-1} = e \in H$. Alltså är $\sim$ reflexiv. Antag att $a \sim b$. Då har vi att $ab^{-1} \in H$ och då H är en delgrupp måste det gälla att $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$ och således gäller att $b \sim a$. Alltså är $\sim$ symmetrisk.

Antag nu att $a \sim b$ och $b \sim c$. Då har vi att $ab^{-1}, bc^{-1} \in H$, och då H är en delgrupp är den sluten under operationen och således får vi att $ab^{-1}bc^{-1} = ac^{-1} \in H$ och därmed gäller att $a \sim c$. Vi har då även att $\sim$ är transitiv och därmed är beviset klart. $\square$

Definition 2.17 (Sidoklass)**.** Ekvivalensklasserna till ekvivalensrelationen $\sim$ definierad i sats 2.16 kallar vi för *sidoklasser.*

2.2 Algebraiska resultat

Kommande satser är mycket viktiga för studier av projektiva plan. Deras bevis kräver dock en omfattande algebraisk bakgrund, vilket vi, som vi nämnde i inledningen, inte ska redogöra för här. Därför stipuleras här satserna utan bevis.

Sats 2.18. *Det existerar en kropp av ordning n om och endast om $n = p^m$, där p är ett primtal och m är ett positivt heltal.*

Definition 2.19. Kroppen av primtalspotensordningen p^n kallas för en *Galoiskropp* av ordning p^n och betecknas med $GF(p^n)$.

Sats 2.20. *I Galoiskroppen $GF(p^n)$ gäller att $(a+b)^p = a^p + b^p$ för alla $a, b \in GF(p^n)$.*

Sats 2.21 (Wedderburns lilla sats)**.** *Varje ändlig skevkropp är en kropp.*

2.3 Minikvaternionsystemet

Definition 2.22 (Närkropp)**.** En ändlig mängd N tillsammans med operationerna addition och multiplikation, sägs vara en *ändlig närkropp* om

- $(N, +)$ bildar en abelsk grupp med det neutrala elementet 0,
- $(N \setminus \{0\}, \cdot)$ bildar en grupp med det neutrala elementet 1,
- multiplikationen är högerdistributiv över additionen, det vill säga att $(a+b)c = ac+bc$ för alla $a, b, c \in N$
- $n \cdot 0 = 0$ för alla $n \in N$.

En ändlig närkropp är alltså ”nästan en kropp”. Skillnaden är att multiplikationen inte behöver vara vänsterdistributiv över additionen, och, som för skevkroppar, att multiplikationen inte behöver vara kommutativ. Om en ändlig närkropp även skulle vara vänsterdistributiv, skulle den vara en skevkropp och enligt Wedderburns lilla sats skulle den således även vara en kropp.

Vårt mål med detta delkapitel blir nu att konstruera en närkropp av ordning 9 som inte är en kropp; det så kallade minikvaternionsystemet. Vi börjar dock med att konstruera en kropp av ordning 9.

Låt M vara en mängd med de nio elementena i $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, där $\mathbb{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$. Vi benämner elementen som följande:

$$\begin{array}{ccc} & 0 = (0,\,0), & \\ 1 = (1,0), & & -1 = (-1,0), \\ \alpha = (1,-1), & & -\alpha = (-1,1), \\ \beta = (0,-1), & & -\beta = (0,1), \\ \gamma = (-1,-1), & & -\gamma = (1,1). \end{array}$$

Vi definierar nu $+$ enligt $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, där additionen i $\mathbb{Z}_3$ ges av:

$+$	0	1	-1
0	0	1	-1
1	1	-1	0
-1	-1	0	1

Tabell 1

Denna definition av $+$ genererar följande Cayley-tabell för $(M, +)$:

$+$	0	1	-1	α	$-\alpha$	β	$-\beta$	γ	$-\gamma$
0	0	1	-1	α	$-\alpha$	β	$-\beta$	γ	$-\gamma$
1	1	-1	0	γ	$-\beta$	α	$-\gamma$	β	$-\alpha$
-1	-1	0	1	β	$-\gamma$	γ	$-\alpha$	α	$-\beta$
α	α	γ	β	$-\alpha$	0	$-\gamma$	1	$-\beta$	-1
$-\alpha$	$-\alpha$	$-\beta$	$-\gamma$	0	α	-1	γ	1	β
β	β	α	γ	$-\gamma$	-1	$-\beta$	0	$-\alpha$	1
$-\beta$	$-\beta$	$-\gamma$	$-\alpha$	1	γ	0	β	-1	α
γ	γ	β	α	$-\beta$	1	$-\alpha$	-1	$-\gamma$	0
$-\gamma$	$-\gamma$	$-\alpha$	$-\beta$	-1	β	1	α	0	γ

Tabell 2

Vi ser direkt att M är sluten under addition, att 0 är det neutrala elementet, att varje element har en unik invers och att additionen är kommutativ. Associativiteten ärvs från $\mathbb{Z}_3$. Således bildar $(M, +)$ en abelsk grupp.

Vi låter multiplikationen $\cdot$ på M bestämmas av

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + cb)$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$. Vi ska nu se att $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ är en grupp. Identitetselementet är $(1, 0) = 1$, då

$$\begin{aligned}(1,0)\cdot(c,d) &= (1\cdot c - 0\cdot d, 1\cdot d + 0\cdot c) = (c,d), \text{ och}\\ (c,d)\cdot(1,0) &= (c\cdot 1 - d\cdot 0, c\cdot 0 + d\cdot 1) = (c,d).\end{aligned}$$

För ett godtyckligt element $(a, b) \in M \setminus \{0\}$ har vi att dess invers ges av $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2})$. Vi har vidare att $\cdot$ är associativ då

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) &= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) =\\ &= (a(ce-df) - b(cf+de), a(cf+de) + b(ce-df)) =\\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) =\\ &= (ac - bd, ad + bc)\cdot(e,f) =\\ &= ((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f),\end{aligned}$$

för alla $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_3$. Således är $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ en grupp.

Multiplikationen är kommutativ då $(c, d) \cdot (a, b) = (ca - db, cb + da) = (ac - bd, cb + ad)$. Vi har även att multiplikationen är högerdistributiv över additionen då

$$\begin{aligned}((a,b)+(c,d))\cdot(e,f) &= (a+c, b+d)\cdot(e,f) =\\ &= ((a+c)e - (b+d)f, (a+c)f + (b+d)e) =\\ &= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de) =\\ &= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) =\\ &= (a,b)\cdot(e,f) + (c,d)\cdot(e,f).\end{aligned}$$

Således är $(M, +, \cdot)$ en skevkropp. Då M innehåller endast ändligt många (9) element, så följer det av Wedderburns lilla sats att $(M, +, \cdot)$ utgör en kropp - Galoiskroppen $GF(9)$, och vi har bevisat följande sats.

Sats 2.23. $(M, +, \cdot)$ *är Galoiskroppen av ordning 9.*

För att fortsätta att konstruera en närkropp vars multiplikation inte är vänsterdistributiv med avseende på additionen, ska vi först införa ett nytt sätt att betrakta multiplikationen $\cdot$ på. Låt elementen i M betecknas:

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{0 = 0,} \\
1 = w^0, & -1 = w^4, \\
\alpha = w^1, & -\alpha = w^5, \\
\beta = w^6, & -\beta = w^2, \\
\gamma = w^7, & -\gamma = w^3.
\end{array}
$$

Cayley-tabellen för multiplikationen $\cdot$ blir med dessa beteckningar:

$\cdot$	0	w^0	w^4	w^1	w^5	w^6	w^2	w^7	w^3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w^0	0	w^0	w^4	w^1	w^5	w^6	w^2	w^7	w^3
w^4	0	w^4	w^0	w^5	w^1	w^2	w^6	w^3	w^7
w^1	0	w^1	w^5	w^2	w^6	w^7	w^3	w^0	w^4
w^5	0	w^5	w^1	w^6	w^2	w^3	w^7	w^4	w^0
w^6	0	w^6	w^2	w^7	w^3	w^4	w^0	w^5	w^1
w^2	0	w^2	w^6	w^3	w^7	w^0	w^4	w^1	w^5
w^7	0	w^7	w^3	w^0	w^4	w^5	w^1	w^6	w^2
w^3	0	w^3	w^7	w^4	w^0	w^1	w^5	w^2	w^6

Tabell 3

Notera att det med dessa beteckningar gäller att $w^r \cdot w^s = w^{(r+s) \bmod 8}$ för alla $w^r, w^s \in M \setminus \{0\}$.

Nu kan vi börja konstruera en närkropp av mängden M, vars multiplikation inte är vänsterdistributiv över additionen. Vi låter additionen vara likadan som för Galoiskroppen $GF(9)$. Vi har således redan att $(M, +)$ bildar en abelsk grupp.
Vi definierar sedan multiplikationen $\times$ med hjälp av multiplikationen $\cdot$, och låter

$$0 \times \xi = 0, \xi \times 0 = 0, \forall \xi \in M,$$

$$w^r \times w^s = w^r \cdot w^s = w^{(r+s) \bmod 8} \text{ då } s \in \{0, 2, 4, 6\},$$

$$w^r \times w^s = w^{3r} \cdot w^s = w^{(3r+s) \bmod 8} \text{ då } s \in \{1, 3, 5, 7\}.$$

Denna definition genererar följande Cayley-tabell för multiplikationen på M:

$\times$	0	1	-1	α	$-\alpha$	β	$-\beta$	γ	$-\gamma$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	-1	α	$-\alpha$	β	$-\beta$	γ	$-\gamma$
-1	0	-1	1	$-\alpha$	α	$-\beta$	β	$-\gamma$	γ
α	0	α	$-\alpha$	-1	1	γ	$-\gamma$	$-\beta$	β
$-\alpha$	0	$-\alpha$	α	1	-1	$-\gamma$	γ	β	$-\beta$
β	0	β	$-\beta$	$-\gamma$	γ	-1	1	α	$-\alpha$
$-\beta$	0	$-\beta$	β	γ	$-\gamma$	1	-1	$-\alpha$	α
γ	0	γ	$-\gamma$	β	$-\beta$	$-\alpha$	α	-1	1
$-\gamma$	0	$-\gamma$	γ	$-\beta$	β	α	$-\alpha$	1	-1

Tabell 4

Observera nu att multiplikationen inte är kommutativ, då till exempel $\alpha \times \beta = \gamma$ medan $\beta \times \alpha = -\gamma$. Vi har även att multiplikationen inte är vänsterdistributiv över additionen, då $\alpha \times (\alpha + 1) = \alpha \times \gamma = -\beta$, men $\alpha \times \alpha + \alpha \times 1 = -1 + \alpha = \beta$.

Vi ser från Cayley-tabellen att M är sluten under $\times$ och att det för $M \setminus \{0\}$ existerar ett neutralt element 1 samt en unik invers till varje element däri. För att påvisa associativiteten får vi dela upp undersökningen i olika fall. Vi börjar med att undersöka huruvida $w^r \times (w^s \times w^t) = (w^r \times w^s) \times w^t$ då $s, t \in \{0, 2, 4, 6\}$. Vi får då

$$\begin{aligned} w^r \times (w^s \times w^t) &= w^r \times w^{(s+t) \bmod 8} = w^{(r+s+t) \bmod 8} = \\ &= w^{(r+s) \bmod 8} \times w^t = (w^r \times w^s) \times w^t, \end{aligned}$$

och har således att associativa lagen gäller i detta fall. Vi går vidare till fallet då $s \in \{0, 2, 4, 6\}$ och $t \in \{1, 3, 5, 7\}$. Vi får

$$\begin{aligned} w^r \times (w^s \times w^t) &= w^r \times w^{(3s+t) \bmod 8} = w^{(3r+3s+t) \bmod 8} = \\ = w^{(3(r+s)+t) \bmod 8} &= w^{(r+s) \bmod 8} \times w^t = (w^r \times w^s) \times w^t, \end{aligned}$$

och vi ser att associativiteten uppfylls även här. Då istället $s \in \{1, 3, 5, 7\}$ och $t \in \{0, 2, 4, 6\}$ har vi

$$\begin{aligned} w^r \times (w^s \times w^t) &= w^r \times w^{(s+t) \bmod 8} = w^{(3r+s+t) \bmod 8} = \\ &= w^{(3r+s) \bmod 8} \times w^t = (w^r \times w^s) \times w^t, \end{aligned}$$

och sista fallet då $s \in \{1, 3, 5, 7\}$ och $t \in \{0, 2, 4, 6\}$ ger oss

$$\begin{aligned} w^r \times (w^s \times w^t) &= w^r \times w^{(3s+t) \bmod 8} = w^{(r+3s+t) \bmod 8} = \\ = w^{(9r+3s+t) \bmod 8} &= w^{(3r+s) \bmod 8} \times w^t = (w^r \times w^s) \times w^t. \end{aligned}$$

Vi har nu visat att $(M \setminus \{0\}, \times)$ bildar en grupp. Då vi vill visa att M är en närkropp fortsätter vi med att visa att multiplikationen är högerdistributiv över additionen, alltså att $(w^r + w^s) \times w^t = w^r \times w^t + w^s \times w^t$ gäller för alla element i $M \setminus \{0\}$ (vi har trivialt att det gäller om något av elementen är 0). Även detta får vi dela upp i två fall; $t \in \{0, 2, 4, 6\}$ och $t \in \{1, 3, 5, 7\}$. Då $t \in \{0, 2, 4, 6\}$ har vi

$$(w^r + w^s) \times w^t = (w^r + w^s) \cdot w^t = w^r \cdot w^t + w^s \cdot w^t = w^r \times w^t + w^s \times w^t.$$

Då $t \in \{1, 3, 5, 7\}$ har vi

$$(w^r + w^s) \times w^t = (w^r + w^s)^3 \cdot w^t = (w^{3r} + w^{3s}) \cdot w^t = w^{3r} \cdot w^t + w^{3s} \cdot w^t = w^r \times w^t + w^s \times w^t,$$

där den andra likheten kommer från sats 2.20 (då $(M, +, \cdot)$ bildar en kropp).

Det är således klart att $(M, +, \times)$, vilken vi hädanefter kommer att kalla för *minikvaternionsystemet* och beteckna $\mathcal{M}$, uppfyller alla villkor för att vara en närkropp. Därmed har vi bevisat följande sats.

Sats 2.24. *Minikvaternionsystemet $\mathcal{M}$ är en närkropp av ordning 9.*

3 Projektiva plan

Vi inleder introduktionen av projektiva plan med ett avsnitt som behandlar *linjära plan*, då detta ger läsaren större förståelse för hur de projektiva planen hänger samman med euklidisk geometri. Det första delkapitlet baserar sig framförallt på källan [LMB]. Vi introducerar sedan de projektiva planen och går igenom grundläggande teori kring dem. Delkapitlet utgår mest från källan [RK]. Delkapitlena 3.2, 3.3 och 3.4 utgår framför allt från [RK]. Vi avslutar kapitlet med ett avsnitt om affina plan, vilka är nära sammankopplade med projektiva plan. Det delkapitlet baserar sig framför allt på [HP].

3.1 Linjära plan

Definition 3.1. Vi säger att en linje och en punkt är *incidenta* med varandra om punkten ligger på linjen, eller ekvivalent, om linjen går genom punkten. Två linjer är *incidenta i en punkt* om det finns en punkt som är incident med båda linjerna.

Vi kommer hädanefter att använda versaler för beteckning av punkter och gemener för beteckning av linjer.

Definition 3.2 (Linjära plan)**.** Ett *linjärt plan* är ett system av punkter och linjer som uppfyller följande axiom:

(1) Givet två distinkta punkter finns det en och endast en linje som går genom båda dessa, det vill säga att det finns en entydig linje som är incident med båda punkterna.

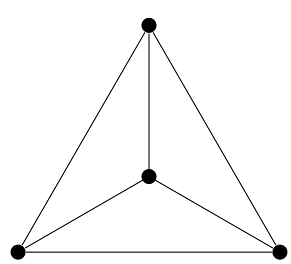
(2) En linje är incident med minst två punkter.

(3) Det finns tre punkter i systemet sådana de ej är incidenta med en och samma linje.

Vi kan direkt konstatera att det euklidiska planet med räta linjer är ett linjärt plan.

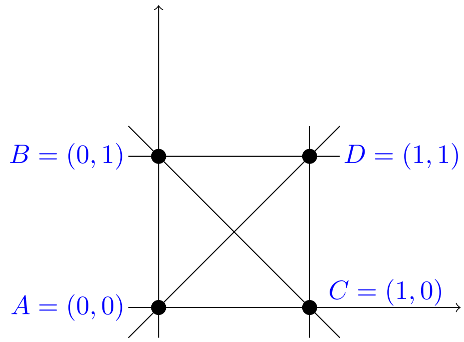
Exempel 3.3. Planet $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ med räta linjer är ett linjärt plan.

Exempel 3.4. Följande system är ett linjärt plan innehållande fyra punkter, ty genom varje par av punkter går en linje och varje linje innehåller (minst) två punkter:



Figur 1

Exempel 3.5. Vill vi hålla oss till mängden $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ bildar vi ett linjärt plan på följande sätt:



Figur 2

3.2 Introduktion av projektiva plan

Definition 3.6 (Projektiva plan)**.** Ett *projektivt plan* $\mathbb{P}$ är en mängd av punkter och linjer tillsammans med en incidensrelation sådan att

(1) givet två distinkta punkter finns det en och endast en linje som går genom båda dessa, det vill säga att det finns en entydig linje som är incident med båda punkterna,

(2) givet två distinkta linjer finns det en och endast en punkt som ligger på båda linjerna, det vill säga att det finns en entydig punkt som är incidenta med båda linjerna,

(3) det finns fyra punkter i systemet sådana att vilka tre av dessa man än väljer så ligger de ej på en och samma linje.

Notera att dessa axiom säkerställer att en linje är incident med minst två punkter. Ett projektivt plan är alltså ett linjärt plan med de extra villkoren att två linjer måste skära varandra i någon punkt (detta kommer vi ibland uttrycka att de tillsammans definierar en entydig punkt; se nedanstående definition). Vi kan direkt konstatera att det Euklidiska planet *inte* är ett projektivt plan, då det inte finns en entydig punkt som ligger på två linjer som är parallella.

Definition 3.7. (i) Två punkter A och B definierar tillsammans den entydiga linjen AB eller BA.

(ii) Två linjer l och m definierar tillsammans den entydiga punkten $l \cap m$.

Exempel 3.8. Vi ser att varken det linjära planet från exempel 3.4 eller det från exempel 3.5 ovan definierar projektiva plan. Systemet i exempel 3.4 uppfyller inte axiomen för att vara ett projektivt plan, då det lätt ses att det finns linjer som inte korsar varandra och således inte definierar en punkt tillsammans. Detsamma gäller för exempel 3.5, ty linjerna AB och CD definierar inte någon punkt tillsammas. Notera även att linjerna AD och BC inte skär varandra i någon punkt i planet $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Definition 3.9. Två eller fler punkter P_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \geq 2$ sägs vara *kolinjära* om de är incidenta med en och samma linje.

Notera att två punkter *alltid* är kolinjära enligt axiom (1) ur definitionen av projektiva plan. Vi kommer därför mest i fortsättningen att prata om att punkter är kolinjära om det är tre stycken eller fler.

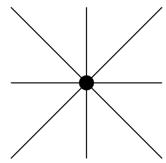
Plan som uppfyller axiom (1) och (2) ur definitionen av projektiva plan, men inte (3), kallas för *degenererade plan*. Det finns sju sådana: [AS]

1. Den tomma mängden.

2. Planet bestående av endast en punkt.

3. Planet bestående av endast en linje.

4. Flera linjer och endast en punkt med vilken linjerna är incidenta:

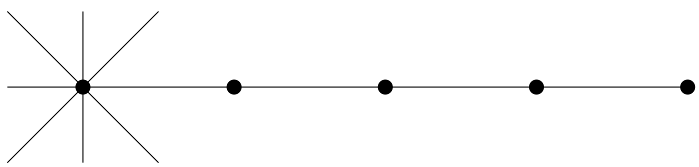


Figur 3

5. En linje och flera punkter som alla är kolinjära:

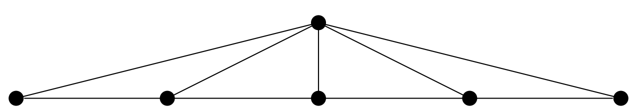
Figur 4

6. Flera linjer och flera punkter, där alla punkter är kolinjära:



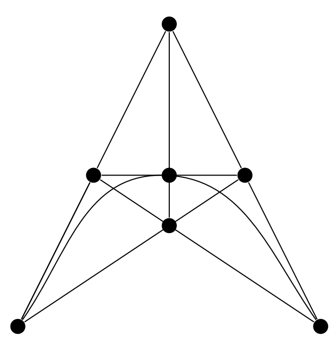
Figur 5

7. Flera punkter och flera linjer, där alla punkter utom en är kolinjära.



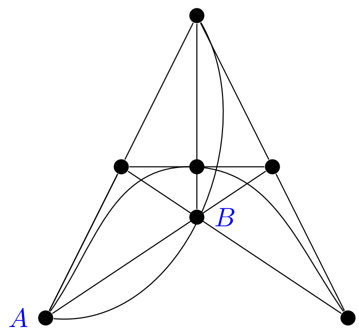
Figur 6

Exempel 3.10. Det så kallade *Fano-planet* är ett system som uppfyller alla tre axiom. Här vill vi även belysa att det inte i definitionen av projektiva plan ingår att linjerna behöver vara raka:



Figur 7

Exempel 3.11. Observera att nedanstående system *inte* är ett projektivt plan, ty punkterna A och B definierar inte entydigt en linje, utan två stycken.

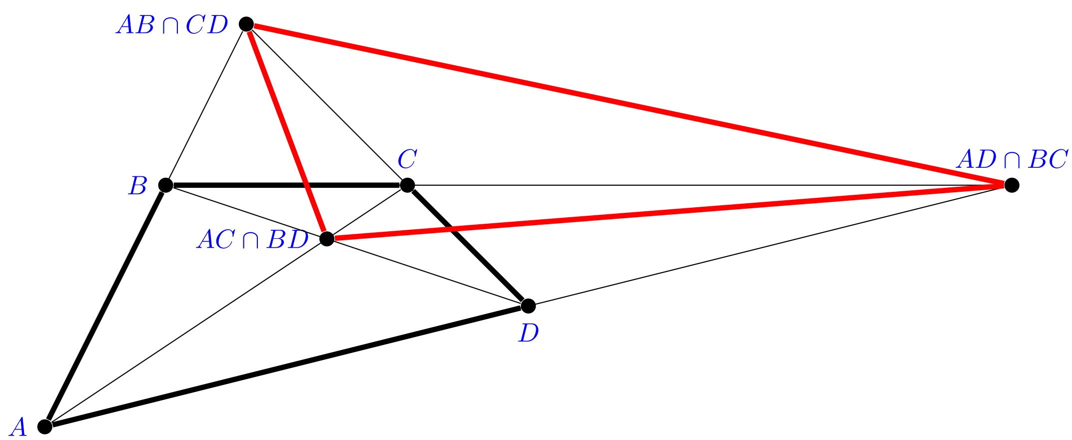


Figur 8

Definition 3.12. (i) En *fyrhörning* $ABCD$ är en mängd av fyra punkter A, B, C och D, sådana att man ej kan välja tre stycken som är kolinjära. Sidorna till denna fyrhörning utgörs av $\{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$. *Diagonaltriangeln* till denna fyrhörning är den vars hörn ges av $AB \cap CD$, $AC \cap BD$ och $AD \cap BC$.

(ii) En *fyrsiding* är en mängd av fyra linjer, sådana man ej kan välja tre stycken som är incidenta med en och samma punkt.

Exempel 3.13. De röda linjerna i figur 9 markerar diagonaltriangeln till fyrhörningen $ABCD$.



Figur 9

Lemma 3.14. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan. $\mathbb{P}$ innehåller då en fyrsiding.*

Bevis. Från axiom (3) av projektiva plan har vi att varje projektivt plan $\mathbb{P}$ innehåller en fyrhörning $ABCD$. Antag nu att tre av sidorna AB, BC, CD och DA är incidenta med en och samma punkt. Vi kan anta att det är linjerna AB, CD och DA som är incidenta med samma punkt utan att gå miste om generaliteten i beviset. Eftersom linjerna AB och DA båda två går genom punkten A samt genom punkten P, har vi att $P = A$, ty två linjer definierar entydigt en punkt. På samma sätt har vi att linjerna CD och DA båda går genom punkterna D respektive P, vilket leder till att $P = D$. Vi har då att $P = A$ och $P = D$, vilket implicerar att $A = D$. Detta motsäger att $ABCD$ skulle vara en fyrhörning. Alltså måste $\{AB, BC, CD, DA\}$ utgöra en fyrsiding. $\square$

Sats 3.15. *Ur ett projektivt plan $\mathbb{P}$ bildas ett nytt system $\mathbb{P}^D$ genom att linjerna i $\mathbb{P}$ låts vara punkter i $\mathbb{P}^D$, punkterna i $\mathbb{P}$ låts vara linjer i $\mathbb{P}^D$ och en punkt och en linje i $\mathbb{P}^D$ är incidenta omm de är incidenta i $\mathbb{P}$. $\mathbb{P}^D$ är då ett projektivt plan.*

Bevis. $\mathbb{P}^D$ uppfyller axiom (1) ty $\mathbb{P}$ uppfyller axiom (2) och vice versa. För att se att axiom (3) är uppfyllt låter vi $ABCD$ vara en fyrhörning i $\mathbb{P}$. Då bildar linjerna AB, BC, CD och DA tillsammans en fyrsiding enligt beviset till lemma 3.14, där man alltså inte kan välja tre linjer som alla är incidenta med en och samma punkt. Med andra ord bildar punkterna $AB, BC, CD, DA \in \mathbb{P}^D$ en fyrhörning, där man inte kan välja tre punkter som är incidenta med en och samma linje (ty punkter och linjer är incidenta i $\mathbb{P}^D$ omm de är incidenta i $\mathbb{P}$). Således uppfyller $\mathbb{P}^D$ det tredje axiomet för projektiva plan. □

Definition 3.16. $\mathbb{P}^D$ kallas *dualplanet* till $\mathbb{P}$.

En direkt konsekvens av sats 3.15 blir nu den så kallade *dualitetsprincipen.*

Korollarium 3.17 (Dualitetsprincipen)**.** *Låt S vara ett påstående om projektiva plan. Då är det duala påståendet, det vill säga samma påstående men med orden "linje" och "punkt" utbytta mot varandra, sant för projektiva plan.*

Som vi kommer att se är denna princip mycket användbar vid bevisföring för satser som anger ekvivalenta påståenden för både punkter och linjer.

3.3 Grundläggande egenskaper hos projektiva plan

Lemma 3.18. *Låt l och m vara två distinkta linjer i ett projektivt plan $\mathbb{P}$. Då gäller att det finns en punkt $P \in \mathbb{P}$ sådan att $P \notin l \cup m$.*

Bevis. Låt $ABCD \in \mathbb{P}$ vara en fyrhörning. Antag att det inte finns en punkt $P \in \mathbb{P}$ sådan att $P \notin l \cup m$. Då är alla punkter A, B, C, D incidenta med antingen l eller m. Eftersom tre av punkterna ej kan vara incidenta med en och samma linje måste två av dem vara incidenta med l och de andra två vara incidenta med m. Vi kan anta att $A, B \in l$ och $C, D \in m$ utan att gå miste om generaliteten i beviset. Låt då $Q = AC \cap BD$. Denna punkt existerar då två linjer i ett projektivt plan definierar en punkt i planet. Antag $Q \in l$. Eftersom $A, B \in l$ har vi att $l = AB$, alltså gäller att $Q \in AB$. Punkterna A, B, C är ej incidenta med samma linje. Detta leder till att $AB \neq AC$. Att $Q \in AC$ leder till att $Q = AB \cap AC$. Men vi har även att $A = AB \cap AC$, vilket leder till att $Q = A$. Vi vet även att $Q \in BD$, vilket nu är ekvivalent med att $A \in BD$. Då har vi alltså att A, B och D är incidenta med en och samma linje, vilket motsäger att $ABCD$ skulle vara en fyrhörning. Detta leder till att $Q \notin l$.

På samma sätt fås att $Q \notin m$. Alltså måste det finnas en punkt $Q \notin l \cup m$. □

Sats 3.19. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan.*

(i) För två linjer $l, m \in \mathbb{P}, m \neq l$ så gäller att det finns en bijektiv avbildning mellan mängden av punkter på linjen l och mängden av punkter på linjen m.

(ii) För en linje $l \in \mathbb{P}$ och en punkt $P \in \mathbb{P}$ så gäller att det finns en bijektiv avbildning mellan mängden av alla punkter på l och mängden av alla linjer incidenta med P.

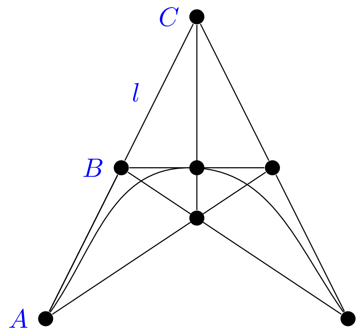
Bevis. (i) Välj en punkt $P \notin l$. En sådan existerar enligt axiom (3) för projektiva plan. Varje linje genom P passerar då l i en punkt, ty två linjer definierar entydigt en punkt, enligt axiom (2). Varje punkt $L \in l$ bestämmer tillsammans med P entydigt en linje LP, enligt axiom (1) för projektiva plan. Alltså har vi att det finns en 1-1 korrespondens mellan punkterna $\{L; L \in l\}$ och linjerna $\{PL; L \in l\}$.

Låt $m, l \in \mathbb{P}, m \neq l$ vara två linjer. Välj en punkt $Q \in \mathbb{P} \setminus (m \cup l)$. En sådan existerar enligt lemma 4.9. Vi har nu enligt föregående stycke att det finns en bijektion $\phi : \{QL; L \in l\} \to \{L; L \in l\}$ samt en bijektion $\psi : \{M; M \in m\} \to \{QM; M \in m\}$. Sammansättningen $\phi \circ \psi$ bildar då en bijektion mellan mängden av punkter på l och mängden av punkter på m (vi har att $\{QL; L \in l\} = \{QM; M \in m\}$, ty dessa är båda mängden av alla linjer genom Q).

(ii) Fallet $P \notin l$ visades i första stycket i beviset. Nu återstår således att visa att det finns en bijektion mellan mängden av alla punkter på l och mängden av alla linjer incidenta med P, då $P \in l$. Välj en linje n så att $P \notin n$. Vi har att det finns en bijektion mellan $\{L; L \in l\}$ och $\{N; N \in n\}$ enligt första delen av satsen. Vi har även att det finns en bijektion mellan $\{N; N \in n\}$ och $\{PN; N \in n\}$ enligt första stycket i beviset. Alltså finns det en bijektion mellan alla punkter på l och alla linjer genom P.

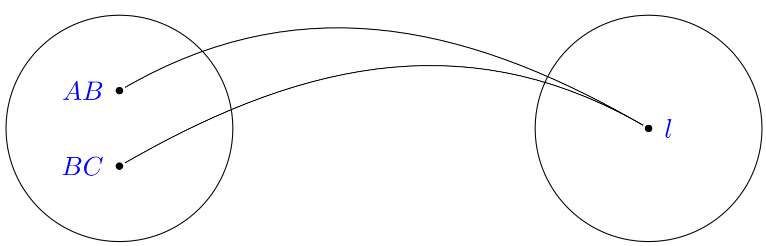
$\square$

Anm. Observera att sats 3.19 *inte* säger att det finns en 1-1 korrespondens mellan mängden av parvisa punkter i $\mathbb{P}$ och mängden av linjer i $\mathbb{P}$. Dra till minnes Fano-planet:



Figur 10

Här ser vi att de två punkterna A och B tillsammans definierar linjen l. Likaså definierar punkterna B och C linjen l, vilket kan illustreras:



Figur 11

Alltså ser vi att korrespondensen mellan mängden av parvisa punkter i $\mathbb{P}$ och mängden av linjer i $\mathbb{P}$ inte är injektiv.

I fallet då en linje är incident med ändligt många punkter, säg $k+1$ stycken, följer det från satsen ovan att alla linjer är incidenta med $k+1$ punkter, och även att det genom varje punkt $P \in \mathbb{P}$ går $k+1$ linjer. Hädanefter kommer vi att åsyfta ändliga projektiva plan när det står projektiva plan.

Definition 3.20. Ett projektivt plan $\mathbb{P}$ sådant att en av dess linjer går genom $k+1$ punkter kallas för ett plan av *ordning* k.

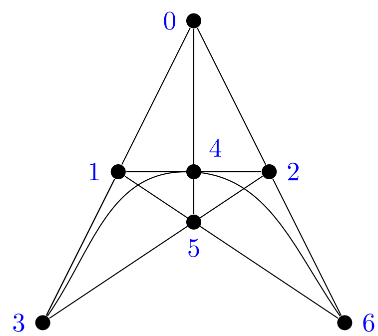
Sats 3.21. *I ett ändligt projektivt plan av ordning k finns det k^2+k+1 linjer och k^2+k+1 punkter.*

Bevis. Sats 3.19 tillsammans med definition 3.20 ger att alla linjer passerar genom $k+1$ punkter och att $k+1$ linjer passerar genom varje punkt $P \in \mathbb{P}$. Tag en punkt $Q \in \mathbb{P}$. För alla punkter $R \neq Q$ så ligger R på en av de $k+1$ linjerna genom Q, ty två punkter måste definiera en punkt och det går totalt $k+1$ linjer genom Q. Då det finns $k+1$ linjer genom Q och k punkter exklusive Q på varje sådan linje, gäller att det totalt finns $k(k+1)+1$ punkter i systemet, där den adderade ettan står för Q själv.

Tag nu en linje $l \in \mathbb{P}$. Denna linje innehåller $k+1$ punkter. Alla linjer i det projektiva planet måste vara incidenta med någon av dessa punkter, ty alla par av linjer måste definiera en punkt. Genom var och en av punkterna går det ytterligare k linjer. Alltså finns det totalt $k(k+1)+1$ linjer i planet, där den adderade ettan kommer från l själv. □

Definition 3.22. Två projektiva plan $\mathbb{P}$ och $\mathbb{Q}$ sägs vara *isomorfa* om det finns en bijektiv avbildning $\theta : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ som avbildar punkter i $\mathbb{P}$ på punkter i $\mathbb{Q}$ och linjer i $\mathbb{P}$ på linjer i $\mathbb{Q}$ sådan att $P \in l$ i $\mathbb{P}$ om och endast om $\theta(P) \in \theta(l)$ i $\mathbb{Q}$.

Exempel 3.23. Vi studerar återigen Fano-planet.



Figur 12

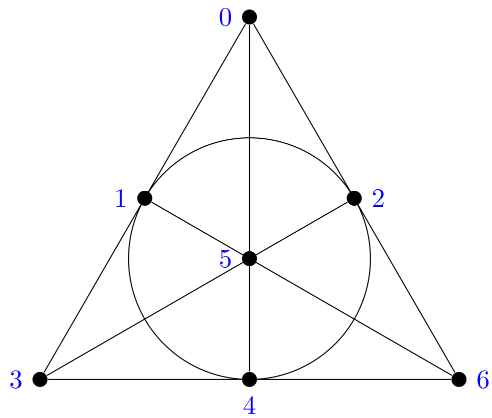
Om vi skriver upp systemet som en tabell på följande vis så ser vi att kolumnerna bildar linjerna i planet:

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
3	4	5	6	0	1	2

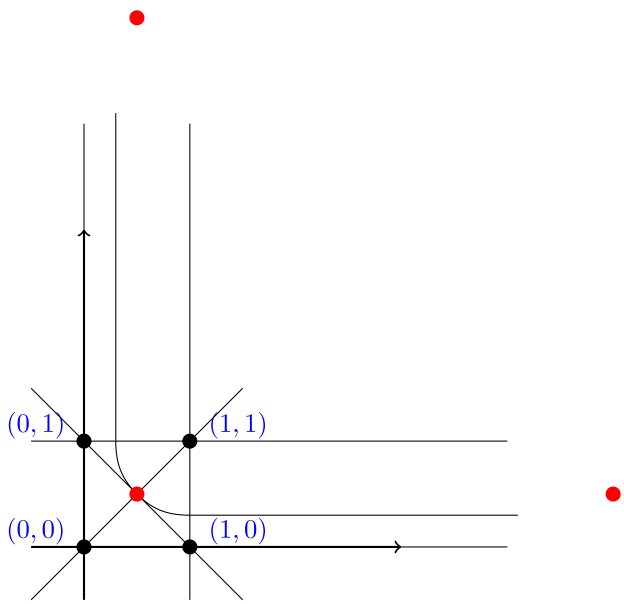
Tabell 5

Studera nu planet i figur 13 med sju punkter respektive linjer. Vi ser att även detta plan kan beskrivas med exakt samma tabell som planet ovan. Dessa plan är alltså isomorfa och är således blott två olika framställningar av samma plan; Fano-planet. Fortsättningsvis kommer vi att framställa Fano-planet som i aktuell figur. Jämför denna framställning med exempel 3.4 ovan.

Ett tredje alternativ till bilden av Fano-planet får man om man inför kartesiska koordinater, håller sig till rummet $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ och inför ytterligare tre punkter, se figur 14.



Figur 13



Figur 14

Här ser vi att de parallella linjerna tillsammans kommer att definiera punkter i oändligheten. Jämför detta plan med exempel 3.5!

Vi har nu sett att det finns olika sätt att visualisera Fano-planet. Vi vill nu visa att projektiva plan av ordning 2 alltid är isomorfa och alltså att Fano-planet är det enda projektiva plan av ordning 2 som finns.

Sats 3.24. *Det finns ett projektivt plan av ordning 2. Alla projektiva plan av ordning 2 är isomorfa.*

Bevis. För att bevisa detta ska vi konstruera Fano-planet och visa att konstruktionen är entydig. Vi börjar med en mängd av fyra punkter $\{A, B, C, D, E, F, G\}$. Genom punkten A måste det gå tre linjer som tillsammans sammanbinder A med alla de andra punkterna, för att uppfylla axiom (1) ur definitionen av projektiva plan. Vi har även att varje linje måste innehålla tre punkter totalt enligt sats 3.21. Vi låter då linjerna genom A vara ABD, ACG och AEF.

Vi måste ha en linje som sammanbinder B och C, för att uppfylla axiom (1). Denna linje BC måste då gå genom någon av punkterna E eller F. Då dessa punkter inte har någon mer bestämd incidens än att ligga på linjen AEF, spelar det ingen roll vilken av dem vi låter ligga på BC. Vi kan då låta $E \in BC$ (annars kan vi bara byta namn på E och F).

Det måste även finnas en linje BG. Denna måste gå genom F, då B och E redan sammanbinds av en linje. Vidare måste vi ha en linje CD. Även denna måste gå genom F då C och E redan är incidenta med en och samma linje. Slutligen måste vi ha linjen DEG, som sammanbinder de sista punkterna.

Genom denna konstruktion har vi nu sett att incidenserna är förutbestämda och det enda man kan ändra på är själva namnen på punkterna. Vi kan alltså alltid finna en bijektiv avbildning från ett plan av ordning 2 till ett annat, sådan att incidensrelationen bevaras. Således följer att alla plan av ordning 2 är isomorfa. □

3.4 Delplan

Ett viktigt karaktärsdrag beträffande de projektiva planen är att de kan innehålla så kallade delplan, vilka vi här ämnar att definiera och utveckla.

Definition 3.25 (Delplan)**.** Ett *delplan* av ett projektivt plan $\mathbb{P}$ är en delmängd $\mathbb{P}'$ av punkter och linjer ur $\mathbb{P}$, vilken själv uppfyller axiomen i definitionen av projektiva plan.

Sats 3.26 (Brucks sats)**.** *Om $\mathbb{P}'$ är ett delplan av ordning m till ett ändligt projektivt plan $\mathbb{P}$ av ordning n, och $\mathbb{P}' \neq \mathbb{P}$, så gäller ett av följande:*

(i) $m^2 = n$

(ii) $m^2 + m \leq n$

Bevis. Antag $\mathbb{P}' \neq \mathbb{P}$. Låt $l \in \mathbb{P}'$. Välj en punkt $P \in l, P \notin \mathbb{P}'$ (en sådan existerar ty $\mathbb{P}' \neq \mathbb{P}$). Det finns $(m^2 + m + 1) - (m + 1) = m^2$ punkter $Q_1, ..., Q_{m^2}$ i $\mathbb{P}'$ som ej ligger på l.

Antag nu att P, Q_i och Q_j, $i \neq j$ är kolinjära. Linjen PQ_i skulle då innehålla två punkter ur $\mathbb{P}'$, alltså har vi att $PQ_i \in \mathbb{P}'$. Vi har även sedan innan att $P \in l \in \mathbb{P}'$, vilket implicerar att $P \in \mathbb{P}'$. Detta strider mot vårt val av P. Alltså kan P, Q_i och $Q_j, i \neq j$ ej vara incidenta med samma linje och således har vi att $PQ_1, ..., PQ_{m^2}$ måste vara m^2 stycken skilda linjer genom P.

Genom $P \in \mathbb{P}$ har vi dessutom att det passerar $n + 1$ stycken linjer i $\mathbb{P}$. Detta ger oss att $n + 1 \geq m^2 + 1$, där sista ettan kommer från att $l \in \mathbb{P}'$ själv går genom P. Alltså har vi nu att $m^2 \leq n$.

(i) $m^2 = n$ uppfyller uppenbarligen $m^2 \leq n$.

(ii) Antag nu att $m^2 < n$, d.v.s. $m^2 + 1 < n + 1$. Eftersom denna olikhet säger att antalet linjer genom P och någon punkt i $\mathbb{P}'$ är strikt färre än antalet linjer i $\mathbb{P}$ genom P, måste det alltså finnas någon linje $k \ni P$ som inte innehåller någon punkt i $\mathbb{P}'$. Linjen k måste dock passera genom alla linjer i $\mathbb{P}'$, ty alla linjer i $\mathbb{P}'$ ligger även i $\mathbb{P}$ och två linjer i $\mathbb{P}$ definierar alltid en punkt i $\mathbb{P}$. Med andra ord måste k möta alla linjer i $\mathbb{P}'$ i några punkter som ligger i $\mathbb{P}$. Vi har även att k måste möta linjerna i $\mathbb{P}'$ i $m^2 + m + 1$ *olika* punkter, ty om k skulle möta två linjer i $\mathbb{P}'$ i en och samma punkt, skulle de två linjerna definiera en punkt som skulle ligga i $\mathbb{P}'$, men enligt antagandet innehåller k inte några punkter ur $\mathbb{P}'$.

Då k innehåller $n + 1$ punkter ur $\mathbb{P}$ samt $m^2 + m + 1$ punkter ur $\mathbb{P}'$ (som vi nyss sett), har vi alltså: $n + 1 \geq m^2 + m + 1$, vilket är ekvivalent med att $m^2 + m \leq n$.

□

Av denna sats kan vi alltså dra följande slutsatser:

- Fano-planet har inga äkta delplan (delplan som inte är hela planet), ty det finns inga (icke-degenererade) projektiva plan av ordning 1.
- Om vi har ett projektivt plan av ordning 3 så finns det inga äkta delplan, ty $2^2 \neq 3$ och $2^2 + 2 \nleq 3$. Fano-planet är alltså inte ett delplan till ett plan av ordning 3.

- Om vi har ett projektivt plan av ordning 9 så kan eventuella äkta delplan ha ordning 2 (ty $2^2 + 2 \leq 9$) eller 3 (ty $3^2 = 9$).

3.5 Affina plan

Målet med denna sektion är att utveckla ändliga affina plan. Affina plan kan erhållas från projektiva plan och utgör därför en aspekt i studierna av projektiva plan.

Definition 3.27 (Affina plan)**.** Ett affint plan $\mathbb{A}$ är en mängd punkter och linjer tillsammans med en incidensrelation sådan att

(i) givet två distinkta punkter finns det en och endast en linje som går genom båda dessa,

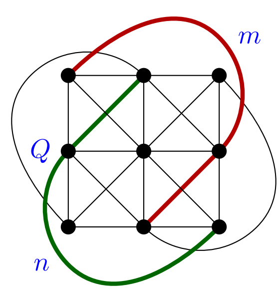
(ii) en linje är incident med minst två punkter,

(iii) givet en linje l och en punkt $P \notin l$ så existerar det en unik linje $m \in \mathbb{A}$, $m \neq l$, sådan att $P \in m$ och $l \cap m = \emptyset$,

(iv) det existerar tre icke-kolinjära punkter.

Notera att alla affina plan uppfyller definitionen för linjära plan. Det extra axiomet, axiom (iii), är ekvivalent med Euklides parallellaxiom. Vi kan således konstatera att det euklidiska planet är ett exempel på ett affint plan. Vi ser även lätt att det linjära planet i exempel 3.4 är ett affint plan.

Exempel 3.28. Följande system är ett affint plan av ordning 3, ty givet någon linje l och någon punkt P som ej ligger på linjen, så finns det en entydig linje genom punkten som ej korsar l. Exempelvis, givet linjen m och punkten Q i bilden nedan, så är n den enda linjen genom Q som ej korsar m:



Figur 15

Vi vill nu se hur affina plan hänger ihop med projektiva sådana.

Sats 3.29. *Givet ett projektivt plan $\mathbb{P}$ och en linje $l \in \mathbb{P}$ så kan vi konstruera ett affint plan $\mathbb{A}$ genom att i $\mathbb{P}$ ta bort l och alla punkter incidenta med l. Detta betecknar vi $\mathbb{A} = \mathbb{P}^l$.*

Bevis. Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan innehållande linjen l och punkten $X \in l$. Låt $m, n \neq l$ vara två distinkta linjer incidenta med X.

Vi konstruerar ett affint plan $\mathbb{A} = \mathbb{P}^l$ genom att ta bort l och alla punkter incidenta med l. Då har vi att $m \in \mathbb{P}^l$ och $n \in \mathbb{P}^l$. Men $m \cap n = \emptyset$ då $X \in l$ och således $X \notin \mathbb{P}^l$. Tag en punkt $A \in \mathbb{P}^l$ sådan att $A \in \mathbb{P}$, $A \neq X$ och $A \notin m$. Låt r vara linjen som förbinder X och A i $\mathbb{P}$. Nu observerar vi att $A \in \mathbb{P}^l$ leder till att $r \in \mathbb{P}^l$. Men då är $r \in \mathbb{P}^l$ den enda linjen i $\mathbb{P}^l$ som går genom A med egenskapen att $r \cap m = \emptyset$. Vi har alltså två linjer $r, m \in \mathbb{P}^l$ som inte korsar varandra i det affina planet $\mathbb{P}^l$.

Vi har således visat att det erhållna planet uppfyller axiom (iii) ur definitionen av affina plan, och då de andra trivialt uppfylls, har vi fått ett affint plan. $\square$

Exempel 3.30. Låt $\mathbb{P}$ vara Fano-planet. Antag att $l \in \mathbb{P}$ och att A, B och C är de punkter som ligger på l. Då bildar vi ett affint plan $\mathbb{A}$ genom

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^l := \mathbb{P} \setminus \{l, A, B, C\}.$$

Eftersom $\mathbb{A}$ konstruerats från $\mathbb{P}$ följer det att alla linjer och punkter som finns i $\mathbb{A}$ även finns i $\mathbb{P}$ och att $\mathbb{A}$ ärver incidensrelationen från $\mathbb{P}$.

Vi har sett att det i affina plan finns linjer som inte korsar varandra. I den euklidiska geometrin sägs två sådana linjer vara parallella. Detta leder till att vi kan definiera egenskapen parallellism i ett affint plan på ett naturligt sätt:

Definition 3.31. Låt $\mathbb{A}$ vara ett godtyckligt affint plan. Två linjer $l \in \mathbb{A}$ och $m \in \mathbb{A}$ sägs vara parallela om $l = m$ eller om $l \cap m = \emptyset$. Vi betecknar då detta med $l \parallel m$.

Lemma 3.32. *Låt $\mathbb{A}$ vara ett godtyckligt affint plan och låt $\sim$ beteckna en ekvivalensrelation. Då gäller att parallellism är en ekvivalensrelation*

Bevis.

Vi ska visa att relationen "$\sim$" definierad enligt $l \sim m \Leftrightarrow l \parallel m$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

Enligt 3.31 gäller för $l, m \in \mathbb{A}$ att $l = m \Rightarrow l \parallel m$. Så $l \parallel l$ ty $l = l$. Då är $l \sim l$, det vill säga $\sim$ är reflexiv.

Vidare har vi $\forall l, m \in \mathbb{A} : l \sim m \Leftrightarrow l \parallel m$. Men $l \parallel m \Leftrightarrow m \parallel l$ gäller uppenbarligen och vi har således att $m \sim l$. Så $\forall l, m \in \mathbb{A} : l \sim m \Leftrightarrow m \sim l$. Alltså är $\sim$ är symmetrisk.

Det återstår att visa att $\sim$ är transitiv, det vill säga visa följande utsaga $\forall l, m, n \in \mathbb{A}$: $l \sim m \wedge m \sim h \Rightarrow l \sim h$. Vi väljer $l, m, h \in \mathbb{A}$ så att $l \parallel m$ och $m \parallel h$. Antag först att två av dessa linjer är lika, det vill säga antag att $l = m$, $m = h$ eller $l = h$. Om $l = m$ så är $l \parallel m$ enligt 3.31. $m \parallel h$ enligt val av m och h ger att $l \parallel h$, varför $l \sim h$. På liknande sätt har vi att om $m = h$ så är $l \parallel h$ ty $l \parallel m$ enligt val av l och m så $l \sim h$. Om $l = h$ så är det klart att $l \sim h$. Alltså håller utsagan och därmed är $\sim$ transitiv.

Antag istället att l, m, n ovan är distinkta. Antag att $l \nparallel h$. Då $\exists P \in l \cap h$, det vill säga punkten P är incident med två distinkta linjer i det affina planet $\mathbb{A}$. Men detta säger emot axiom (ii) i 3.27. Alltså gäller $l \parallel h$, det vill säga $l \sim h$. Så $\sim$ är transitiv. Vi har därmed visat att $\parallel$ är en ekvivalensrelation. □

Definitionen av isomorfi mellan affina plan är lik den för projektiva plan.

Definition 3.33. Två affina plan $\mathbb{A}$ och $\mathbb{B}$ sägs vara isomorfa om det finns en bijektiv avbildning $\theta : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ som avbildar punkter i $\mathbb{A}$ på punkter i $\mathbb{B}$ och linjer i $\mathbb{A}$ på linjer i $\mathbb{B}$, sådan att $P \in l$ i $\mathbb{A}$ om och endast om $\theta(P) \in \theta(l)$ i $\mathbb{B}$.

Utrustade med detta verktyg kan vi jämföra affina plan, vilket kommer att leda oss till formuleringen av ett viktigt resultat om ändliga affina plan, vilket är huvudmålet med detta delkapitel. För att kunna uppnå detta behöver vi följande sats.

Sats 3.34. *Låt $\mathbb{A}$ vara ett affint plan. Då existerar det upp till isomorfi ett unikt projektivt plan $\mathbb{P}$ sådant att $\mathbb{A} = \mathbb{P}^l$ för någon linje $l \in \mathbb{P}$. Parallellklasserna i $\mathbb{A}$ betecknar vi med A^*.*

Bevis. Vi börjar med att konstruera ett projektivt plan med en linje l_∞ sådan att $\mathbb{A} = \mathbb{P}^{l_\infty}$. Låt P vara en punkt och l en linje i $\mathbb{A}$. Incidensrelationen i $\mathbb{P}$ definierar vi genom

(i) $P \in l$ i $\mathbb{P}$ om och endast om $P \in l$ i $\mathbb{A}$,

(ii) en punkt $P^* \in l$ i $\mathbb{P}$ om och endast om $l \in P^*$ i $\mathbb{A}$, där P^* är de olika parallellklasserna,

(iii) för alla P^* gäller att $P^* \in l_\infty$ i $\mathbb{P}$, och

(iv) för alla $P \in \mathbb{A}$ gäller att $P \notin l_\infty$ i $\mathbb{A}$.

Denna konstruktion ger således att $\mathbb{A} = \mathbb{P}^{l_\infty}$ och det återstår därmed att visa att $\mathbb{P}$ är ett projektivt plan. För detta ändamål, betrakta två godtyckliga punkter $A, B \in \mathbb{A}$ som är sammanlänkande av linjen AB. Då har vi att AB ligger i $\mathbb{A}$ såväl som i $\mathbb{P}$. På samma sätt har vi att två godtyckliga punkter A, B^* är sammanlänkade i $\mathbb{P}$ av den entydiga linjen $AB^* \in \mathbb{A}$, som tillhör parallellklassen B^*. A och B^* existerar enligt lemma 3.32. Vidare har vi att två punkter A^*, B^* är sammanlänkade av linjen l_∞. Således har vi att två godtyckliga punkter i $\mathbb{P}$ alltid är sammanlänkade av en unik linje i $\mathbb{P}$. Linjen $l_\infty \in \mathbb{P}$ korsar alla andra linjer i $\mathbb{P}$ i en unik punkt. Låt därför l och m vara två linjer i $\mathbb{P}$. Då har vi att om $l \cap m = P$ i $\mathbb{A}$ leder detta till att $l \cap m = P$ i $\mathbb{P}$, alltså finns det en unik skärningspunkt mellan två linjer l och m i $\mathbb{P}$.

Antag istället att $l \cap m = \emptyset$ i $\mathbb{A}$. Då är $l \parallel m$ vilket ger att l och m tillhör samma parallellklass som vi då kallar A^*. Alltså gäller att $A^* \in l \cap m$ i $\mathbb{P}$ enligt (iii), vilket innebär att två godtyckliga linjer i $\mathbb{P}$ korsar varandra i en unik punkt.

Eftersom $\mathbb{A}$ är ett affint plan innehåller $\mathbb{A}$ tre icke-kolinjära punkter X, Y och Z. Låt $XY \cap l_\infty = A^*$ i $\mathbb{P}$ och $YZ \cap l_\infty = B^*$ i $\mathbb{P}$. Då har vi att $A^* \neq B^*$ leder till att $XY \nparallel YZ$, vilket betyder att X, Z, A^* och B^* bildar en fyrhörning i $\mathbb{P}$. Alltså är $\mathbb{P}$ ett projektivt plan.

Antag nu att $\mathbb{A}$ kan bildas ur två olika projektiva plan, det vill säga att $\mathbb{A} = \mathbb{P}^l = \mathbb{P}'^{l'}$. Identitetsavbildningen är då en en isomorfi $\mathbb{P}^l \to \mathbb{P}'^{l'}$. Beviset är klart tack vare följande:

Lemma 3.35. *Två affina plan $\mathbb{P}^l, \mathbb{P}'^{l'}$ är isomorfa är ekvivalent med att det existerar en isomorfi $\alpha : \mathbb{P}' \to \mathbb{P}'^{l'}$ med $l^\alpha = l'$.*

Bevis. Antag att $\theta : \mathbb{P}^l \to \mathbb{P}'^{l'}$ är en isomorfi. Låt α vara definierad som $\alpha(X) = \theta(X)$, för alla $X \notin l$. Vi väljer något $Y \in l$ och för detta Y väljer vi en linje m genom Y sådan att $m \neq l$. Därefter definierar vi $\alpha(Y) = \theta(m) \cap l'$. Då verkar α på alla linjer $h, l \in \mathbb{P}$, där $h \neq l$ genom $\alpha(h) = \theta(h)$ och $\alpha(l) = l'$. För att se att α är en isomorfi behöver vi visa att för $Y \in l$ är $\alpha(Y)$ oberoende av vilket m vi väljer. Men att θ är en isomorfi betyder att θ bevarar ekvivalensklasser, det vill säga att θ bevarar parallellklasserna.

Antag att nu att $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ är en isomorfi mellan de projektiva planen $\mathbb{P}$ och $\mathbb{P}'$ sådan att $\alpha(l) = l'$. Då har vi att α är en injektiv avbildning från punkterna i $\mathbb{P}$ till punkterna i $\mathbb{P}'$ och från linjerna i $\mathbb{P}$ till linjerna i $\mathbb{P}'$. Vidare har vi att α är en isomorfi vilket betyder att α bevarar incidensrelationen. Således är $\mathbb{P}$ och $\mathbb{P}'^{l'}$ isomorfa och beviset för lemmat är klart. □

□

Om $\mathbb{A} = \mathbb{P}^l$ säger vi att $\mathbb{A}$ är det affina planet som är associerat med $\mathbb{P}$ och $l \in \mathbb{P}$. Vidare så säger vi att $\mathbb{P}$ är associerat med $\mathbb{A}$ upp till isomorfi. Detta följer från 3.34. Observera att icke-isomorfa affina plan kan vara associerade till samma projektiva plan $\mathbb{P}$. Vi är nu redo att definiera ordningen av affina plan.

Definition 3.36. Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan av ordning n och låt $\mathbb{A}$ vara ett affint plan associerat till $\mathbb{P}$. Då har $\mathbb{A}$ samma ordning som $\mathbb{P}$, det vill säga $\mathbb{A}$ är av ordning n.

3.6 Incidensmatriser

Låt $\mathbb{B}$ vara ett ändligt projektiv eller affint plan av ordning n. Vi betecknar punkterna i $\mathbb{B}$ med $P_1, P_2, ..., P_v$ och linjerna med $l_1, l_2, ..., l_b$. Då har vi följande

Definition 3.37. En *incidensmatris* A till $\mathbb{B}$ är en $v \times b$-matris vars element $a_{i,j}$ är ettor om $P_i \in l_j$ och nollor om $P_i \notin l_j$.

Exempel 3.38. Vi använder Fano-planet i figur 13 i exempel 3.23 för att konstruera en incidensmatris. Vi har tidigare sett att Fano-planet innehåller sju linjer och sju punkter. Vi definierar linjerna från kolonnerna i tabell 5 i exempel 3.23, det vill säga l_i ges av den i-te kollonen i 5. Då har vi att $\mathbb{D}$ är ett ändligt affint eller projektivt plan av ordning sju vars incidensmatris ges av

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

där raderna är de olika punkterna och kollonerna är de olika linjerna. Från matrisen kan vi alltså utläsa att punkten 0 är incident med l_1, l_2 och l_3.

Sats 3.39. *Låt A vara en incidensmatris av ett ändligt projektivt plan av ordning n. Då är $AA^T = nI_v + J_v$, där I_v är identitetsmatrisen i $v \times v$ och J_v är en $v \times v$-matris vars element alla är ettor.*

Bevis. Låt elementen ur AA^T vara givna av $(b_{i,j})$, där i anger raden och j anges kolonnen. Vi betraktar först A's diagonalelement. Dessa är skalärprodukter av rad i med sig själv. I sin tur är detta summan av alla nollskilda element i rad i ur A, då elementen antingen är 1 eller 0. Antalet nollskilda element i rad i är detsamma som antalet linjer l_i som går genom punkten P_i. Enligt definition 3.20 samt sats 3.21 är dessa $n + 1$ stycken för $i = 1, 2, ..., n^2 + n + 1$.

På samma sätt är $b_{i,j}$, där $i \neq j$, skalärprodukten av rad i med kolonn j ur A. Detta är detsamma som antalet k sådana att $a_{i,k} = a_{j,k} = 1$. Men vi har att $a_{i,k} = 1$ betyder att $P_i \in l_k$ och $a_{j,k} = 1$ betyder att $P_j \in l_k$. Eftersom P_i och P_j tillsammans entydigt definierar en linje, har vi att $b_{i,j} = 1$ då $i \neq j$. Därmed är beviset klart. □

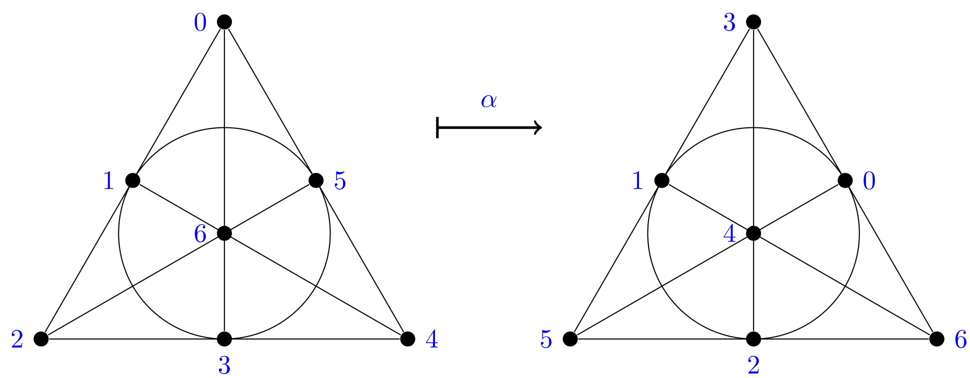
4 Kollineationer

I detta kapitel introduceras konceptet *kollineation* av projektiva plan. Detta begrepp är viktigt för fortsatta studier av ändliga projektiva plan. Hela kapitlet baseras mycket på källorna [AS] och [RK].

4.1 Introduktion av kollineationer

Definition 4.1. En *kollineation* av ett projektivt plan $\mathbb{P}$ (eller ett affint plan $\mathbb{A}$), är en bijektiv avbildning $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ som avbildar1 punkter på punkter och linjer på linjer, sådan att bilderna av kolinjära punkter är kolinjära.

Exempel 4.2. Nedan ser vi en kollineation av Fano-planet. Observera att alla punkter som är kolinjära i det första planet fortfarande är kolinjära i det andra.



Figur 16

Sats 4.3. *Mängden av kollineationer av ett projektivt plan $\mathbb{P}$, vilken vi benämner med $\mathcal{G}$, bildar en grupp under sammansättning.*

Bevis. Vi använder definitionen av grupper för att bevisa satsen. Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan och låt $\mathcal{G}$ vara mängden av kollineationer av detta. Tag två godtyckliga avbildningar $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$ och låt $\gamma = \alpha \circ \beta$ vara sammansättningen av dessa. Att γ är en bijektiv avbildning följer direkt från att både α och β är det. För att se att γ avbildar kolinjära punkter kolinjärt tar vi tre kolinjära punkter A, B och C. Vi har, då β är en kollineation, att $\beta(A), \beta(B)$ och $\beta(C)$ är kolinjära. Då även α är en kollineation gäller att $\alpha(\beta(A)) = \gamma(A)$, $\alpha(\beta(B)) = \gamma(B)$ och $\alpha(\beta(C)) = \gamma(C)$ är kolinjära. Således är γ en kollineation och $\mathcal{G}$ är då sluten under sammansättning.

Vidare vill vi visa att sammansättningen är associativ. Tag $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{G}$. Vi har då att $[\gamma \circ (\alpha \circ \beta)](x) = [\gamma(\alpha \circ \beta)](x) = \gamma(\alpha(\beta(x))) = (\gamma \circ \alpha)(\beta(x)) = [(\gamma \circ \alpha) \circ \beta](x)$, vilket visar associativiteten.

Definiera nu en kollineation $i \in \mathcal{G}$, genom $x \mapsto x$ för punkter eller linjer x. Detta är då identitetsavbildningen. Då gäller för alla $\alpha \in \mathcal{G}$ att $(\alpha \circ i)(x) = \alpha(i(x)) = \alpha(x) = i(\alpha(x)) = (i \circ \alpha)(x)$. Det är självklart att i bevarar den fordrade incidensrelationen. Vi har då att i är identitetselementet i $\mathcal{G}$.

Vi vill nu se att $\mathcal{G}$ är sluten under inversbildning. Tag ett godtyckligt element $\alpha \in \mathcal{G}$. Definiera α^{-1} genom

$$\alpha^{-1}(P) = P_1 \Leftrightarrow \alpha(P_1) = P \text{ för alla punkter } P \in \mathbb{P},$$
$$\alpha^{-1}(l) = l_1 \Leftrightarrow \alpha(l_1) = l \text{ för alla linjer } l \in \mathbb{P}.$$

Vi har då att $\alpha \circ \alpha^{-1}(P) = \alpha(\alpha^{-1}(P)) = \alpha(P_1) = P$ för alla punkter $P \in \mathbb{P}$, samt $\alpha \circ \alpha^{-1}(l) = \alpha(\alpha^{-1}(l)) = \alpha(l_1) = l$ för alla linjer $l \in \mathbb{P}$. Analogt för $\alpha^{-1} \circ \alpha(P)$ och $\alpha^{-1} \circ \alpha(l)$. Alltså är α^{-1} invers till α. Avbildningen $\alpha^{-1} : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ är uppenbarligen bijektiv då $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ är det.

Den fordrade incidensrelationen för α^{-1} fås direkt från att α uppfyller den. Alltså gäller att $\alpha^{-1} \in \mathcal{G}$ och $\mathcal{G}$ är således sluten under inversbildning.

Detta visar att $(\mathcal{G}, \circ)$ bildar en grupp. □

Anm. Med *kollineationsgruppen* till $\mathbb{P}$ menar vi $\mathcal{G}$ och vi betecknar dess identitetselement, den *triviala kollineationen*, med i.

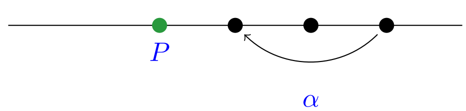
Utrustade med kollineationsgruppen kan kan vi formulera nedanstående lemma om när två affina plan är isomorfa.

Lemma 4.4. *Antag l och k är två godtyckliga linjer i det projektiva planet $\mathbb{P}$. Då gäller att det affina planet $\mathbb{P}^l$ är isomorft med det affina planet $\mathbb{P}^k$ om och endast om det existerar en kollineation $\alpha \in \mathcal{G}$, sådan att $\alpha(l) = k$.*

Bevis. Detta följer direkt från lemma 3.35. □

Definition 4.5. En *central kollineation* är en kollineation α till vilken det finns en punkt P, kallad ett *centrum*, sådan att $\alpha(P) = P$ och sådan att alla linjer som går därigenom är *fixa*, det vill säga att $\alpha(l_i) = l_i$ för alla linjer l_i genom P.

Detta betyder alltså att en central kollineation endast permuterar punkterna på varje linje $l \in \mathbb{P}$ som går genom centrumet.



Figur 17: En central kollineation α permuterar endast punkterna på linjer genom centrumet P.

Definition 4.6. En *axial kollineation* är en kollineation α till vilken det finns en linje l, kallad en *axel*, sådan att $\alpha(l) = l$ och sådan att alla punkter på linjen är *fixa*, det vill säga att $\alpha(P_i) = P_i$ för alla punkter $P_i \in l$.

En axial kollineation α av ett projektivt plan $\mathbb{P}$ är alltså en central kollineation av det duala planet $\mathbb{P}^D$.

Sats 4.7. *Varje icke-trivial central kollineation har endast ett centrum och varje icke-trivial axial kollineation har endast en axel.*

Bevis. Antag att $\alpha \neq i$ är en central kollineation med två centrum P och Q. Tag en godtycklig punkt $A \notin PQ$. Vi har att PA och QA är fixa linjer då båda går genom något centrum till α. Detta medför att A är en fix punkt, ty om $\alpha(A) = A'$ så måste $A' \in PA$ (då PA fix linje) och $A' \in QA$ (då QA fix linje). Men två linjer skär varandra i precis en punkt enligt definitionen av projektiva plan, och vi har redan att $PA \cap QA = A$, alltså måste gälla att $\alpha(A) = A$ för alla $A \notin PQ$.

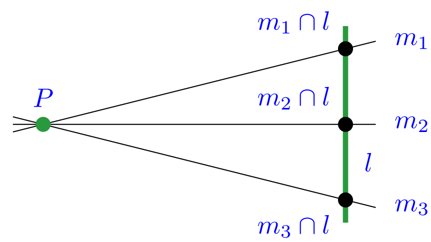
Tag nu en godtycklig punkt $B \in PQ$ och en linje $l \neq PQ$ genom B. Vi har att alla punkter $B' \in l : B' \neq B$ är fixa punkter enligt ovan. Då måste även B vara en fix punkt, då kolinjära punkter ska mappas kolinjärt enligt definitionen av kollineationer.

Att varje icke-trivial axial kollineation endast har en axel följer nu direkt på grund av dualitetsprincipen. □

Sats 4.8. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan och $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ vara en kollineation av $\mathbb{P}$. Då gäller att α är en central kollineation om och endast om α är en axial kollineation.*

Bevis. Om $\alpha = i$ har vi trivialt att satsen gäller. Antag att $\alpha \neq i$ är en central kollineation. För att visa implikation åt höger måste vi visa att α har en axel.

Om det finns en fix linje l som ej går genom P måste denna vara en axel. För att se detta låter vi linjerna genom P betecknas m_i. Dessa linjer är fixa och således kan en punkt från en av linjerna inte avbildas på en punkt på en annan linje. Om l då inte skulle vara en axel betyder det att några av punkterna $m_i \cap l$ skulle avbildas på varandra och således att de skulle avbildas på en annorlunda linje m_i, vilket strider mot att de linjerna är fixa.

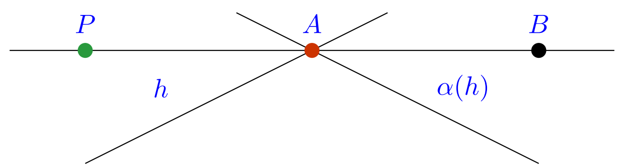


Figur 18

Om det finns en fix linje l som ej går genom P måste denna alltså vara en axel och således är α en axial kollineation med den unika axeln l, där entydigheten fås från att α är icke-trivial samt sats 4.7.

Vi har således att alla fixa linjer, utom möjligtvis en, går genom centrumet P. Då det totalt finns n^2+n+1 linjer i det projektiva planet och endast $n+1$ stycken genom P, måste det finnas någon linje h som ej är fix. Låt då $A = h \cap \alpha(h)$. Vi har att $A \neq P$ ty $P \notin h$ (då h ej är fix). A och P sammanbinds av den fixa linjen AP. Detta betyder att $\alpha(A) \in PA$ och $\alpha(A) \in h$. Då $h \cap PA = A$ är den entydiga skärningspunkten gäller att $\alpha(A) = A$ och således har vi att A är en fix punkt.

Tag en godtycklig punkt $B \in PA, B \neq P, B \neq A$. Vi har då att det finns en linje k genom B som ej är fix, ty det finns $n+1$ linjer genom B, där $n \geq 2$, och maximalt två stycken av dessa kan vara fixa.

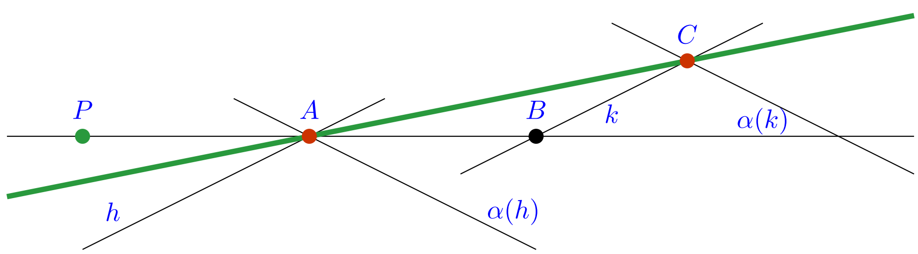


Figur 19

Låt $C = k \cap \alpha(k)$. Genom samma resonemang som vi förde för A, får vi att C är en fix punkt. Vi har även att $C \neq P$ och $C \neq A$ då $k \neq PA$ och två linjer (k och PA) entydigt definierar en punkt, enligt definitionen av projektiva plan.

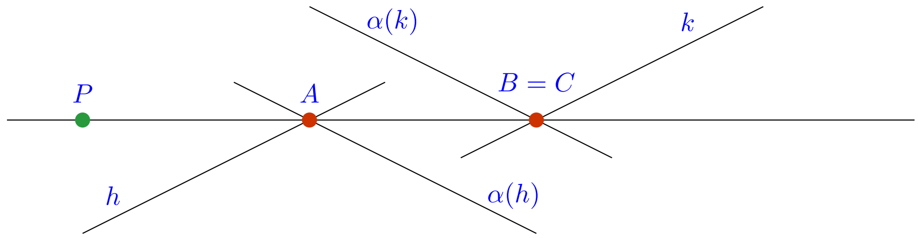
Vi har att linjen AC måste vara fix. För att se detta tar vi en godtycklig punkt $Q_i \in AC$. Då gäller att A, Q_i och C är kolinjära. Enligt definitionen av kollineationer måste då $A, \alpha(Q_i)$ och C vara kolinjära. Alltså permuteras endast punkterna $Q_i \in AC$ och således är linjen fix. Vi får två fall:

Fall 1: $P \notin AC$. Då har vi enligt ovan att AC är den unika axeln:



Figur 20

Fall 2: $P \in AC$. Då har vi att $C \in PA \cap k$ och $B \in PA \cap k$. Då skärningspunkten mellan två linjer är entydigt bestämd i projektiva plan har vi att $C = B$ och B är då en fix punkt.



Figur 21

Vi har att punkterna P, A och B är fixa punkter. Om det projektiva planet är Fano-planet, så är linjen PAB en axel. Om det inte är Fano-planet, tag en godtycklig punkt $D \in PAB, D \notin \{P, A, B\}$. Enligt samma resonemang som ovan har vi att det finns en icke-fix linje m genom D. Låt $E = m \cap \alpha(m)$. Om $E \notin PAB$ har vi att AE och BE är fixa, på samma sätt som AC förut bedömdes vara fix. Detta strider enligt sats 4.7 mot vårt antagande att α ej är trivial. Alltså måste $E \in PAB$ och eftersom $E = PAB \cap m$ och $D = PAB \cap m$ har vi att $E = D$. D är då en fix punkt. Då D valdes godtyckligt har vi att alla punkter på linjen PAB måste vara fixa och det är således en axel.

Vi har nu visat att en central kollineation nödvändigtvis har en axel och därmed är en axial kollineation. Att en axial kollineation är en central kollineation fås från dualitetsprincipen.

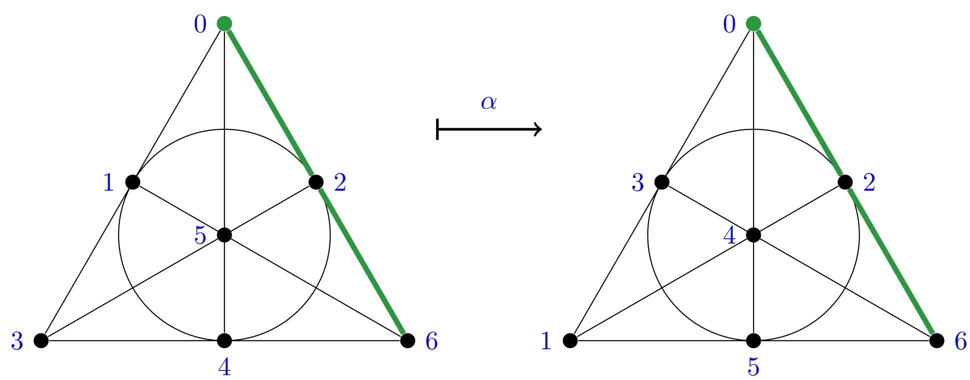
$\square$

Vi har alltså att centrala kollineationer och axiala kollineationer är ekvivalenta begrepp. Vi kommer mestadels i fortsättningen att referera till en sådan kollineation som central. Det finns två typer av centrala kollineationer:

- kollineationer där centrumet ligger på axeln,
- kollineationer där centrumet inte ligger på axeln.

Kolla igen på kollineationen i exempel 4.2. Vi ser att kollineationen varken har ett centrum eller en axel.

Exempel 4.9. Betrakta den centrala kollineationen α av Fano-planet nedan. Vi ser att 0 avbildas på 0 och att alla linjer som går därigenom är fixa, alltså är detta centrumet för α. Även 2 och 6 avbildas på sig själva, alltså är linjen 026 axeln. Notera att de andra linjerna genom 2 och 6 inte är fixa.



Figur 22

Sats 4.10. *En central kollineation α av ett projektivt plan $\mathbb{P}$ är unikt bestämd av centrumet P, axeln l och en punkt $Q : Q \neq P, Q \notin l$ tillsammans med dess bild $\alpha(Q)$.*

Bevis. Tag någon punkt $A \in \mathbb{P}$ sådan att $A \neq P$, $A \neq Q$, $A \neq \alpha(Q)$, $A \notin l$. Linjen PA är fix då den går genom centrumet P. Därför har vi att $\alpha(A) \in PA$.

Betrakta nu punkten $B = AQ \cap l$. Då l är kollineationens axel har vi att $\alpha(B) = B$. Eftersom A, Q och B är kolinjära måste även $\alpha(A)$, $\alpha(Q)$ och $\alpha(B) = B$ vara det. Vi har då att $\alpha(A) \in \alpha(Q)B$. Men då har vi att $\alpha(A) = \alpha(Q)B \cap PA$, skärningspunkten mellan två redan kända linjer. Alltså är $\alpha(A)$ entydigt bestämd av P, l, Q och $\alpha(Q)$. □

Notera att denna sats leder till att alla punkter (linjer) som inte är incidenta med axeln eller centrumet måste avbildas på någon annan punkt (linje) av en icke-trivial central kollineation, ty om en sådan punkt (linje) skulle avbildas på sig själv så skulle den unika centrala kollineation som bestäms av centrumet, axeln samt denna punkt (linje), vara identitetsavbildningen.

Exempel 4.11. Studera igen Fano-planet från exempel 4.9. Givet centrumet 0, axeln 026 och en punkt med dess bild kan vi entydigt bestämma bilden av de andra punkterna. Vi kan utgå från att vi vet att $\alpha(5) = 4$. Tag då någon annan punkt, t.ex. 3. Då 3 är kolinjär med 5 och 2, måste $\alpha(3)$ vara kolinjär med $\alpha(5) = 4$ och $\alpha(2) = 2$. Vi har alltså att $\alpha(3) = 1$. På liknande sätt kan vi bestämma resten av punkterna.

Definition 4.12. (i) En (P, l)-*kollineation* är en central kollineation med centrumet P och axeln l.

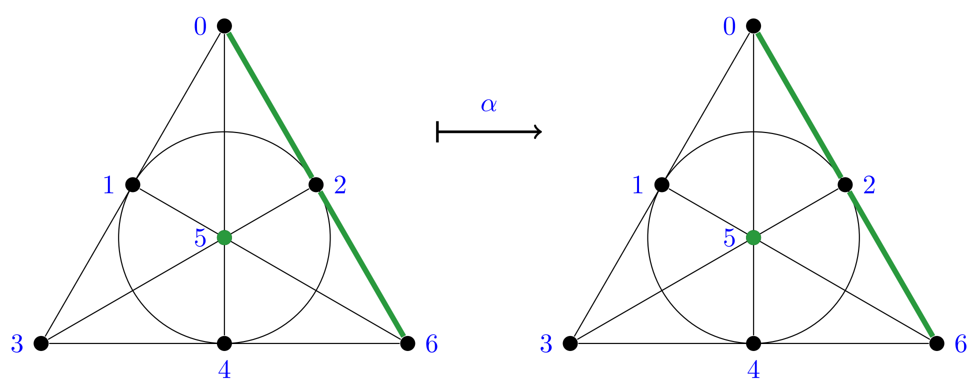
(ii) En *homologi* är en central kollineation där centrumet inte ligger på axeln.

(iii) En *elation* är en central kollineation där centrumet ligger på axeln.

Exempel 4.13. Vi har att identitetsavbildningen i är en (P, l)-kollineation för alla punkter $P \in \mathbb{P}$ och alla linjer $l \in \mathbb{P}$.

Vi har redan sett exempel på en (P, l)-kollineation av Fano-planet, där centrumet låg på axeln, det vill säga var en elation. (exempel 4.9). Låt oss nu undersöka fallet då centrumet inte ligger på axeln, det vill säga en homologi.

Exempel 4.14. Låt α vara $(5, 026)$-kollineationen av Fano-planet. Tag en punkt, t.ex. 3. Då denna är kolinjär med 5 och 2 måste bilden $\alpha(3)$ vara kolinjär med $\alpha(5) = 5$ och $\alpha(2) = 2$, det vill säga vi måste ha att $\alpha(3) = 3$. Samma resonemang för de andra punkterna leder oss till slutsatsen att $(5, 026)$-kollineationen av Fano-planet är identitetskollineationen.



Figur 23

Det är lätt att på liknande sätt se att alla homologier av Fano-planet är identitetkollineationen.

Sats 4.15. *Givet ett centrum P och en axel l har vi att mängden av alla (P, l)-kollineationer bildar en delgrupp till kollineationsgruppen. Denna betecknar vi med $\mathcal{G}_{(P,l)}$.*

Bevis. Vi visar detta med hjälp av delgruppskriteriet.

Vi har att $\mathcal{G}_{(P,l)}$ är icke-tom då identitetsavbildningen i trivialt är en (P,l)-kollineation (vilket vi påpekade i exempel 4.13).

Vi vill visa att $\mathcal{G}_{(P,l)}$ är sluten under komposition. Låt α och β vara två (P,l)-kollineationer. Enligt sats 4.3 vet vi att $\alpha\circ\beta$ är en kollineation. Vi måste då visa att $\alpha\circ\beta$ har axeln l och centrumet P. Tag en godtycklig punkt $Q \in l$. Vi har då att $(\alpha\circ\beta)(Q) = \alpha(\beta(Q)) = \alpha(Q) = Q$. Alltså är l axeln till $\alpha\circ\beta$. Tag nu en godtycklig linje m genom P. Vi har att $(\alpha\circ\beta)(m) = \alpha(\beta(m)) = \alpha(m) = m$. Alltså är P centrumet till $\alpha\circ\beta$. Därmed är $\alpha\circ\beta$ en (P,l)-kollineation och $\mathcal{G}_{(P,l)}$ är således slutet under komposition.

Det återstår nu att visa att $\mathcal{G}_{(P,l)}$ är sluten under inversbildning. Tag ett godtyckligt element $\alpha \in \mathcal{G}_{(P,l)}$. Definiera nu α^{-1} genom

$$\alpha^{-1}(P) = P_1 \Leftrightarrow \alpha(P_1) = P \text{ för alla punkter } P \in \mathbb{P},$$
$$\alpha^{-1}(l) = l_1 \Leftrightarrow \alpha(l_1) = l \text{ för alla linjer } l \in \mathbb{P}.$$

Enligt beviset till sats 4.3 är α^{-1} nu en kollineation. För att se att det är en (P,l)-kollineation betraktar vi först linjen l. Vi har att $\alpha(l) = l$, vilket enligt defintionen av α^{-1} är ekvivalent med $\alpha^{-1}(l) = l$. Detta är alltså en fix linje. Tag nu en godtycklig punkt Q som ligger på l. Då har vi att $\alpha(Q) = Q$, vilket är ekvivalent med $\alpha^{-1}(Q) = Q$. Alla punkter på linjen l är således fixa och därmed är l en axel. Betrakta nu punkten P. Vi har att $\alpha(P) = P$ är ekvivalent med $\alpha^{-1}(P) = P$ och alltså är P en fix punkt. Tag nu en godtycklig linje m som går genom P. Då m är en fix linje för α och $\alpha(m) = m$ är ekvivalent med att $\alpha^{-1}(m) = m$, har vi att m även är en fix linje för α^{-1}. Därmed är α^{-1} en (P,l)-kollineation och beviset är klart. □

Lemma 4.16. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan, låt $\alpha \in \mathcal{G}_{(P,l)}$ och β vara två kollineationer av $\mathbb{P}$. Då gäller att $\beta\circ\alpha\circ\beta^{-1} \in \mathcal{G}_{(\beta(P),\beta(l))}$.*

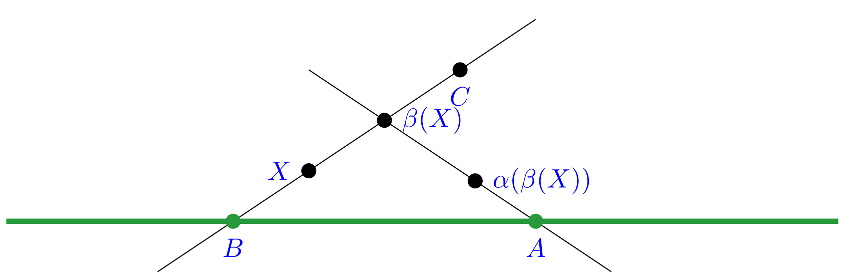
Bevis. Tag en punkt X så att $X = \beta(L)$ för någon punkt $L \in l$. Vi har då att $\beta(\alpha(\beta^{-1}(X))) = \beta(\alpha(L)) = \beta(L) = X$ och således är $\beta(l)$ axeln till kollineationen $\beta\circ\alpha\circ\beta^{-1}$. Tag nu en linje m sådan att $m = \beta(p)$ för någon linje p genom P. Vi har då att $\beta(\alpha(\beta^{-1}(m))) = \beta(\alpha(p)) = \beta(p) = m$. Därmed är $\beta(P)$ centrumet till kollineationen och beviset är klart. □

Sats 4.17. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan och låt $\mathcal{G}_{(l,l)}$ beteckna mängden av alla (P,l)-kollineationer för alla $P \in l$. Då gäller att $\mathcal{G}_{(l,l)}$ är en grupp under sammansättning.*

Bevis. Vi bevisar detta med hjälp av delgruppskriteriet. Först och främst så gäller att $\mathcal{G}_{(l,l)} \neq \emptyset$, då $id \in \mathcal{G}_{(l,l)}$.

Låt $\alpha \in \mathcal{G}_{(A,l)}$ och $\beta \in \mathcal{G}_{(B,l)}$, där $A, B \in l$, vara två kollineationer av $\mathbb{P}$. Vi måste nu visa att sammansättningen $\alpha\circ\beta$ av dessa är en (C,l)-kollineation för något $C \in l$. Tag en godtycklig punkt $L \in l$. Då gäller att $(\alpha\circ\beta)(L) = \alpha(\beta(L)) = \alpha(L) = L$. Alltså har vi att $\alpha\circ\beta$ är en axial kollineation med axeln l.

Då axiala kollineationer och centrala kollineation är ekvivalenta begrepp enligt sats 4.8, har vi att $\alpha\circ\beta$ har ett centrum, C. Vi vill visa att $C \in l$. Vi gör detta med ett motsägelsebevis och antar då att $C \notin l$. Tag en punkt $X \in BC \setminus \{B, C\}$. Då måste $\beta(X) \in BC$ ty $\beta \in \mathcal{G}_{(B,l)}$. Vi har då att $\alpha(\beta(X)) \in A\beta(X) \setminus \{\beta(X), A\}$ och således är C, X och $\alpha(\beta(X))$ icke-kolinjära, vilket motsäger att C skulle vara centrumet. Alltså måste C ligga på axeln l och således är $\mathcal{G}_{(l,l)}$ sluten under sammansättning.



Figur 24

Inversen α^{-1} till en (l,l)-kollineation α är en (l,l)-kollineation, då centrumet och axeln är samma som för α enligt sats 4.15. Därmed är beviset klart. $\square$

Lemma 4.18. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan och låt $\alpha \in \mathcal{G}_{(A,l)}$ och $\beta \in \mathcal{G}_{(B,l)}$, där $A \neq B$, vara två icke-triviala kollineationer av $\mathbb{P}$. Då gäller att $\alpha \circ \beta \in \mathcal{G}_{(C,l)}$, att denna är icke-trivial och att $C \neq A, C \neq B$.*

Bevis. Vi har att l är axeln till $\alpha \circ \beta$ ty $\alpha(\beta(L)) = \alpha(L) = L$ för alla $L \in l$. Alltså är $\alpha \circ \beta$ en axial kollineation och enligt sats 4.8 finns det även ett centrum C till denna.

Vi har att A inte är centrumet ty tag en linje $a \neq l$ genom A. Vi har att $\beta(a) = a'$ för någon linje $a' \neq a, a' \neq l$, då β är icke-trivial med centrumet $B \neq A$. (Detta framgår ur första delen av beviset till sats 4.8.) Vi har också att $\alpha(a') \neq a$ då a är en fix linje till α. Således är $A \neq C$.

Vi har även att B inte är centrumet ty tag en linje $b \neq l$ genom B. Vi har att $\alpha(\beta(b)) = \alpha(b) \neq b$ då $b \neq l$ och $A \neq B$ är centrumet till den icke-triviala kollineationen α.

För att se att $\alpha \circ \beta$ är icke-trivial tar vi en punkt $X \notin l$, $X \neq A$, $X \neq B$. Vi har då att $\alpha(\beta(BX)) = \alpha(BX) \neq BX$, då linjen BX är skild från l, α är icke-trivial och BX är således inte en fix linje. $\square$

Sats 4.19. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan. Om det finns två icke-triviala kollineationer av $\mathbb{P}$ med axeln l och centrumen A respektive B, där $A, B \in l$, så gäller att $\mathcal{G}_{(l,l)}$ är abelsk.*

Bevis. Låt $\alpha \in \mathcal{G}_{(A,l)}$ och $\beta \in \mathcal{G}_{(B,l)}$, där $A \neq B$ och $A, B \in l$, vara två icke-triviala kollineationer av $\mathbb{P}$. Lemma 4.16 ger nu att $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} \in \mathcal{G}_{(\beta(A),\beta(l))}$, och då β har axeln l och $A \in l$ gäller således att $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} \in \mathcal{G}_{(A,l)}$. På samma sätt fås att $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{G}_{(B,l)}$.

Betrakta nu kollineationen $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$. Då denna kan skrivas som $\beta \circ (\alpha \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1})$ och vi får då enligt lemma 4.16 att $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{G}_{(B,l)}$. Analogt kan kollineationen skrivas $(\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}) \circ \alpha^{-1}$ och alltså får vi att $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{G}_{(A,l)}$. Således har vi att $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{G}_{(A,l)} \cup \mathcal{G}_{(B,l)}$, men då $A \neq B$ och ingen icke-trivial kollineation enligt sats 4.7 kan ha fler än ett centrum, måste gälla att $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} = id$. Detta leder till att $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$.

Det återstår att visa att $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$ då $\alpha \in \mathcal{G}_{(P,l)}$ och $\beta \in \mathcal{G}_{(P,l)}$ för någon punkt $P \in \mathbb{P}$. Låt $\alpha, \beta \in \mathcal{G}_{(A,l)}$ för något $A \in l$ vara icke-triviala och låt $\gamma \in \mathcal{G}_{(B,l)}$, där $B \in l, B \neq A$. Enligt ovan har vi då att $\gamma \circ \alpha = \alpha \circ \gamma$ och $\gamma \circ \beta = \beta \circ \gamma$. Från lemma 4.18 får vi att centrumet till $\alpha \circ \gamma$ inte är A, men ligger på l enligt sats 4.17. Således kommuterar $\alpha \circ \gamma$ med β. Vi har då

$$\begin{aligned}\beta \circ (\alpha \circ \gamma) = (\alpha \circ \gamma) \circ \beta &= \\ = \alpha \circ (\gamma \circ \beta) &= \\ = \alpha \circ \beta \circ \gamma&,\end{aligned}$$

vilket ger oss att $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$ genom att kancellera γ. $\square$

4.2 (P, l)-transitivitet

Vi inför nu egenskapen (P,l)-transitivitet. Som vi kommer att märka är denna viktig för undersökning av strukturen hos projektiva plan.

Definition 4.20. Ett projektivt plan $\mathbb{P}$ kallas (P,l)-*transitivt* om det för varje par av distinkta punkter $X, Y \neq P$ i $\mathbb{P}$ sådana att $X, Y \notin l$ och $PX = PY$, finns en (P,l)-kollineation α sådan att $\alpha(X) = Y$.

Sats 4.21. *Antag att ett projektivt plan $\mathbb{P}$ är (P,l)-transitivt. Då är $\mathbb{P}$ även $(\alpha(P), \alpha(l))$-transitivt, för alla kollineationer α.*

Bevis. Låt $P' = \alpha(P)$ och $l' = \alpha(l)$. Tag två distinkta punkter $X', Y' \notin l$, $X', Y' \neq P'$ som är kolinjära med P. Vi vill visa att det finns en $(\alpha(P), \alpha(l))$-kollineation som avbildar X' på Y'.

Låt $X = \alpha^{-1}(X')$ och $Y = \alpha^{-1}(Y')$. Vi har att $\alpha^{-1}(P') = P$ och $\alpha^{-1}(l') = l$. Då α^{-1} är en kollineation har vi att P, X och Y är kolinjära, och att $X, Y \notin l$ samt $X, Y \neq P$. Då $\mathbb{P}$ är

(P, l)-transitivt finns det en kollineation $\beta \in \mathcal{G}_{(P,l)}$ så att $\beta(X) = Y$. Låt nu $\gamma = \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$. Vi har då att

$$\gamma(X') = \alpha(\beta(\alpha^{-1}(X'))) = \alpha(\beta(X)) = \alpha(Y) = Y',$$

vilket är den eftersökta egenskapen hos vår $(\alpha(P), \alpha(l))$-kollineation. Om vi kan visa att γ är en (P', l')-kollineation så är vi alltså klara. Låt L' vara någon punkt på l', och låt $L = \alpha^{-1}(L')$. Vi har då att L ligger på l (då $\alpha(l) = l'$) och således

$$\gamma(L') = \alpha(\beta(\alpha^{-1}(L'))) = \alpha(\beta(L)) = \alpha(L) = L',$$

där den tredje likheten kommer från att l är axeln till β. Således är l' axeln till γ. Låt nu p' vara någon linje som går genom P', och låt $p = \alpha^{-1}(p')$. Vi har att p går genom P (då $\alpha(P) = P'$). Vi får att

$$\gamma(p') = \alpha(\beta(\alpha^{-1}(p'))) = \alpha(\beta(p)) = \alpha(p) = p',$$

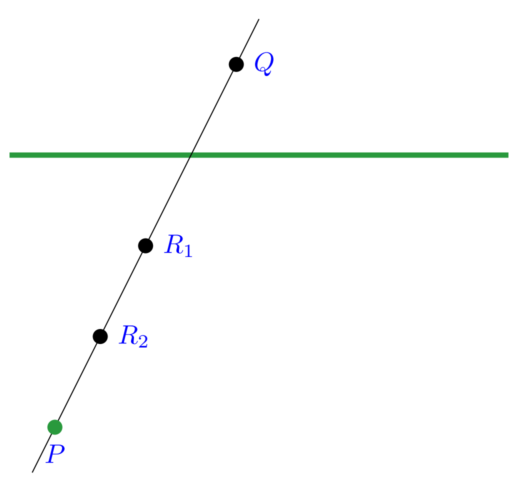
där den tredje likheten kommer från att P är centrumet till β. Vi har nu visat att P' är centrumet till γ, och således finns det en (P', l')-kollineation som avbildar X' på Y'. Därmed är $\mathbb{P}$ $(\alpha(P), \alpha(l))$-transitivt om det är (P, l)-transitivt och α är någon kollineation av $\mathbb{P}$. $\square$

Då definitionen av (P, l)-transitivitet innebär att man måste ta hänsyn till *alla* punkter som inte ligger på l eller är lika med P, kan vi formulera följande sats, med vilken vi bara behöver undersöka *en* linje och dess punkter, och därmed kommer vi lättare kunna bevisa att ett plan är (P, l)-transitivt.

Sats 4.22. *Ett projektivt plan $\mathbb{P}$ är (P, l)-transitivt om det finns en punkt $Q \neq P, Q \notin l$ sådan att för varje punkt $R \in PQ$: $R \neq P$, $R \notin l$ finns det en (P, l)-kollineation α som avbildar Q på R.*

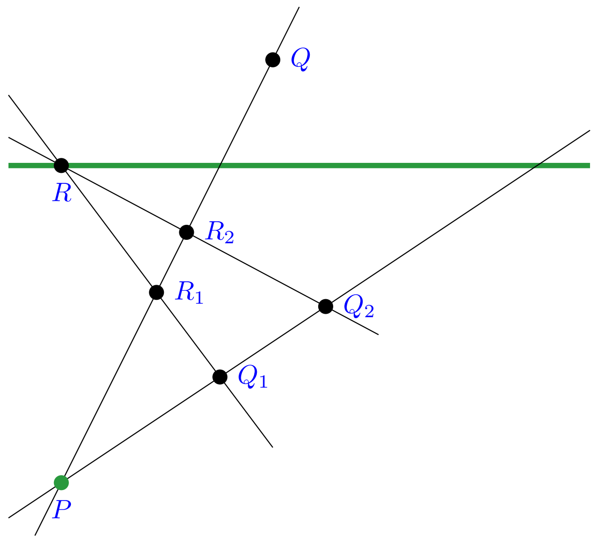
Bevis. Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan med en punkt P och en linje l. Antag att för en punkt $Q \neq P, Q \notin l$ gäller det att för varje punkt $R \in PQ$: $R \neq P$, $R \notin l$ finns det en kollineation $\alpha \in G_{(P,l)}$ som avbildar Q på R. Vi vill visa att det för varje par av distinkta punkter, kolinjära med P, men varav ingen av dem är P eller ligger på l, finns en (P, l)-kollineation α som avbildar den ena punkten på den andra.

Vi börjar med fallet då de två punkterna, som vi kallar R_1 och R_2, ligger på linjen PQ, se figur 25. Vi vet enligt antagandena att det finns en (P, l)-kollineation α sådan att $\alpha(Q) = R_1$ och att det finns en (P, l)-kollineation β sådan att $\beta(Q) = R_2$. Då mängden av (P, l)-kollineationer bildar en grupp under sammansättning enligt sats 4.15, får vi att det finns en (P, l)-kollineation $\gamma = \beta \circ \alpha^{-1}$ sådan att $\gamma(R_1) = R_2$.



Figur 25

Vi vill nu undersöka fallet då de två punkterna är kolinjära med P, men inte ligger på QP. Vi tar ytterligare två godtyckliga punkter $Q_1 \neq P$ och $Q_2 \neq P$ som ej ligger på l, men är kolinjära med P (se figur 26). Vi antar nu även att de inte ligger på PQ och ska då visa att det finns en (P, l)-kollineation som avbildar Q_1 på Q_2. Tag en punkt $R \in l$, som varken är incident med QP eller Q_1Q_2. Definiera $R_1 = RQ_1 \cap PQ$ och $R_2 = RQ_2 \cap PQ$, se figur 26.

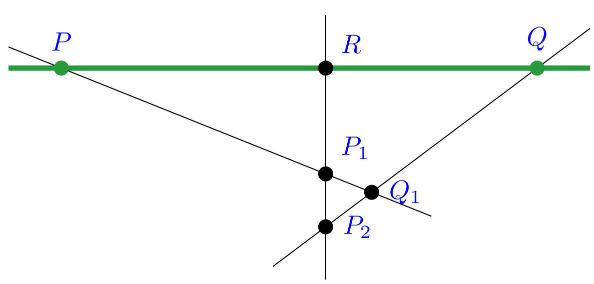


Figur 26

Som vi har sett finns det en (P, l)-kollineation α sådan att $\alpha(R_1) = R_2$. Vi har att $\alpha(P) = P$, $\alpha(QP) = QP$ samt $\alpha(Q_1Q_2) = Q_1Q_2$. Då $Q_1 = RR_1 \cap Q_1Q_2$ och $Q_2 = RR_2 \cap Q_1Q_2$ får vi att $\alpha(Q_1) = \alpha(RR_1 \cap Q_1Q_2) = RR_2 \cap Q_1Q_2 = Q_2$. Vi har således att det alltid finns en (P, l)-kollineation mellan två punkter som uppfyller relevanta villkor, och därmed är planet (P, l)-transitivt. $\square$

Sats 4.23. *Om ett projektivt plan $\mathbb{P}$ är (P, l)-transitivt och (Q, l)-transitivt för två distinkta punkter $P, Q \in l$, så är $\mathbb{P}$ (R, l)-transitivt för alla punkter $R \in l$.*

Bevis. Låt $R \in l \setminus \{P, Q\}$ och låt $P_1, P_2 \notin l$ vara två distinkta punkter kolinjära med R. Låt sedan $l_1 = PP_1$, $l_2 = QP_2$ och $Q_1 = l_1 \cap l_2$ (se figur 27).



Figur 27

Då $\mathbb{P}$ är (P, l)-transitivt gäller att det finns en kollineation $f \in \mathcal{G}_{(P,l)}$ sådan att $f(P_1) = Q_1$. Då $\mathbb{P}$ är (Q, l)-transitivt finns det även en kollineation $g \in \mathcal{G}_{(Q,l)}$ sådan att $g(Q_1) = P_2$. Sammansättningen $g \circ f$ bildar då en kollineation enligt sats 4.3, och det gäller att $(g \circ f)(P_1) = P_2$. Vi måste nu visa att $g \circ f \in \mathcal{G}_{(R,l)}$.

Att axeln ges av l ser vi genom att ta en godtycklig punkt $L \in l$. Denna avbildas då som $(g \circ f)(L) = g(f(L)) = g(L) = L$, då både f och g har l som axel.

För att se att R är centrumet ska vi visa att linjen P_1P_2 är en fix linje. Tag en godtycklig punkt $X \in P_1P_2$. Vi har att P_1, X och R är kolinjära. Då f är en kollineation betyder detta att $f(P_1) = Q_1$, $f(X)$ och $f(R) = R$ är kolinjära. I sin tur leder detta till att $g(Q_1) = P_2$, $g(f(X))$ och $g(R) = R$ är kolinjära då g är en kollineation. Alltså har vi att linjen P_1P_2 är en fix linje. Då vi vet att $g \circ f$ är icke-trivial och att l är axeln vet vi att centrumet måste ligga på P_1P_2. Men enligt sats 4.17 måste centrumet ligga på linjen l och således gäller att centrumet är $l \cap P_1P_2 = R$.

Därmed är det bevisat att det för en godtycklig punkt $R \in l$, och två godtyckliga punkter kolinjära med denna, alltid finns en (R, l)-kollineation som avbildar den ena punkten på den andra. Enligt sats 4.22 är då $\mathbb{P}$ (R, l)-transitivt för alla $R \in l$. □

Denna sats leder oss upp till följande definition.

Definition 4.24. Om ett projektivt plan $\mathbb{P}$ är (P, l)-transitivt för alla $P \in l$, så säger vi att $\mathbb{P}$ är (l, l)-transitivt. Analogt är $\mathbb{P}$ (P, P)-transitivt om $\mathbb{P}$ är (P, l)-transitivt för alla linjer l som går genom punkten P.

4.3 Desargiska plan

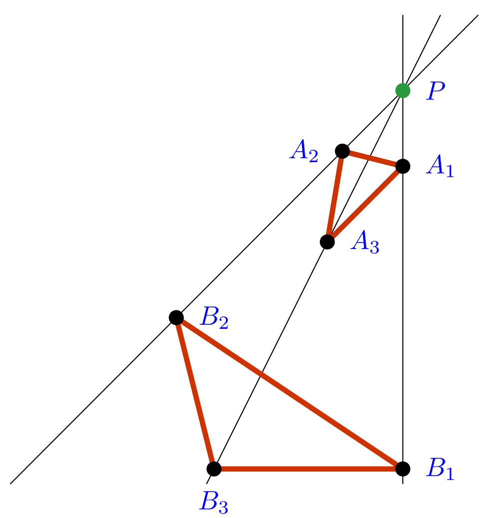
I detta avsnitt ska vi behandla det viktiga begreppet Desargues-konfiguration. Plan med sådana konfigurationer har mer struktur än andra.

Definition 4.25. I ett projektivt plan $\mathbb{P}$ kallas mängden av punkter och linjer $\{A_1, A_2, A_3\} \cup \{A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3\}$, där $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{P}$ är tre icke-kolinjära punkter, för en *triangel*.

Vi kommer i fortsättningen att referera till en sådan triangel som triangeln $A_1A_2A_3$, då det inte råder någon tvetydighet om vilken som åsyftas.

Definition 4.26. Två trianglar $A_1A_2A_3$ och $B_1B_2B_3$, där ingen av trianglarnas hörn ligger på punkten P, sägs vara *perspektiva från* P, alternativt vara i *centralt perspektiv* från P om $P \in A_iB_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exempel 4.27. I figuren nedan är trianglarna $A_1A_2A_3$ och $B_1B_2B_3$ perspektiva mot punkten P.



Figur 28

Vi ska nu se hur vi kan välja två trianglar ifrån ett projektivt plan som är i centralt perspektiv från en punkt P, givet en (P, l)-kollineation av planet.

Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan och $\alpha : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ vara en icke-trivial (P, l)-kollineation unikt bestämd av centrumet P, axeln l och $\alpha(X) = \tilde{X}$, $X \notin l$, $X \neq P$ (enligt sats 4.10). Låt $Y, Z \notin l$, $Y, Z \neq P$ vara två punkter sådana att $PXYZ$ bildar en fyrhörning. Vi har att XYZ bildar en triangel, då de ej är kolinjära. Låt $\tilde{Y} = \alpha(Y)$ och $\tilde{Z} = \alpha(Z)$. Vi har nu även att $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ bildar en triangel. Då $\tilde{X} \in PX$, $\tilde{Y} \in PY$ och $\tilde{Z} \in PZ$ har vi att $P = X\tilde{X} \cap Y\tilde{Y} \cap Z\tilde{Z}$ och således ser vi att trianglarna XYZ och $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ är i centralt perspektiv från punkten P.

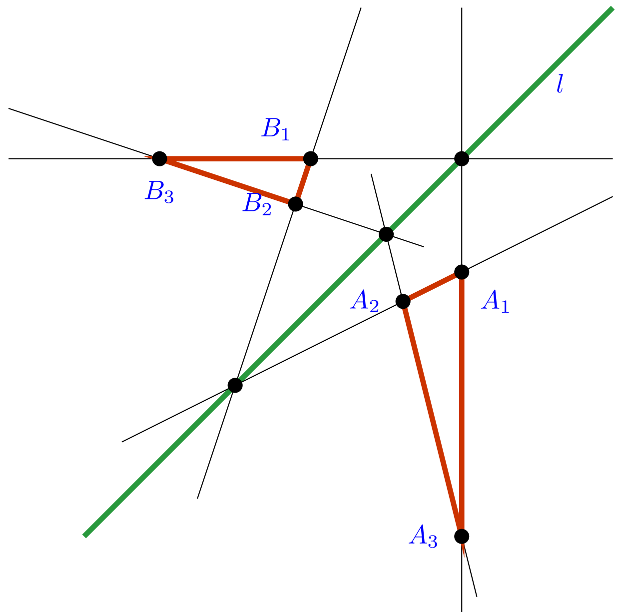
Definition 4.28. Två trianglar $A_1A_2A_3$ och $B_1B_2B_3$ sägs vara *perspektiva från linjen* l, alternativt vara i *axialt perspektiv* från l om

(i) $A_1A_2 \cap B_1B_2 \in l$,

(ii) $A_1A_3 \cap B_1B_3 \in l$, och

(iii) $A_2A_3 \cap B_2B_3 \in l$.

Exempel 4.29. I figuren nedan är trianglarna $A_1A_2A_3$ och $B_1B_2B_3$ perspektiva från linjen l.



Figur 29

Vi ser nu återigen på trianglarna XYZ och $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ definierade ovan. Vi vill nu undersöka skärningspunkterna $XY \cap \tilde{X}\tilde{Y}$, $XZ \cap \tilde{X}\tilde{Z}$ och $YZ \cap \tilde{Y}\tilde{Z}$. Då $\mathbb{P}$ är ett projektivt plan har vi att skärningspunkten $XY \cap \tilde{X}\tilde{Y}$ är unik. Låt L beteckna skärningspunkten $XY \cap l$. Då l är axeln för kollineationen har vi att $\alpha(L) = L$, varför vi kan dra slutsatsen att $XY \cap \tilde{X}\tilde{Y} = L \in l$. Vi har också att $P \notin XY$ och $P \notin \tilde{X}\tilde{Y}$ då $PXYZ$ bildar en fyrhörning. Vi får då att $XY \cap \tilde{X}\tilde{Y}$ ligger på linjen l.

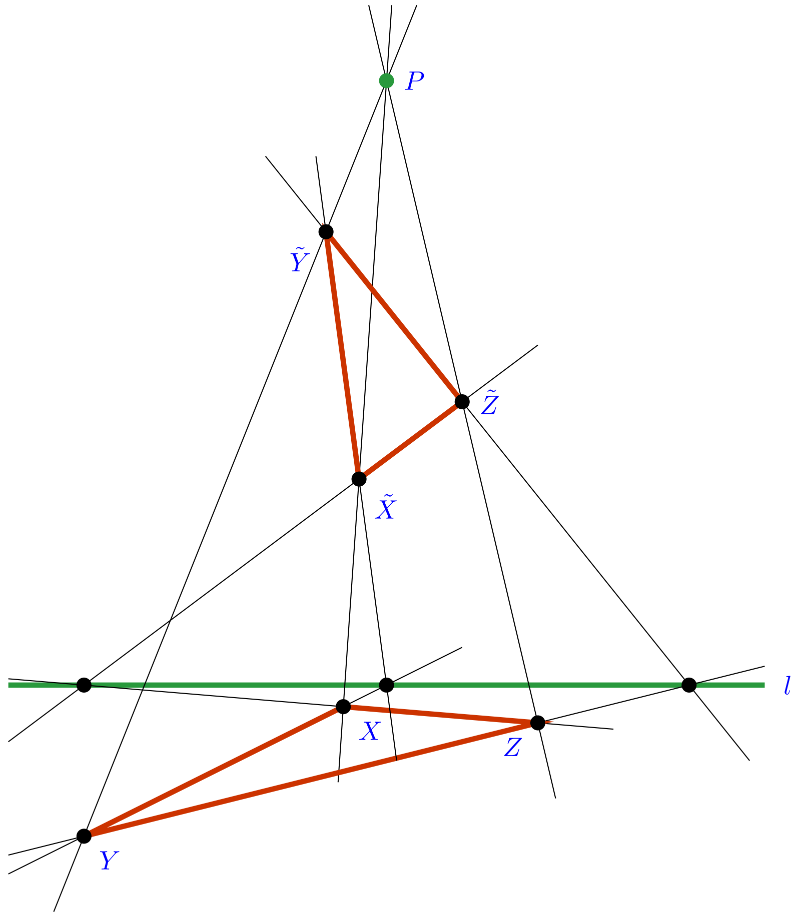
Samma resonemang gäller för de två andra skärningspunkterna. Vi har efter detta att $XY \cap \tilde{X}\tilde{Y}$, $XZ \cap \tilde{X}\tilde{Z}$ och $YZ \cap \tilde{Y}\tilde{Z}$ ligger på en och samma linje (l) och således är trianglarna XYZ och $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ i axialt perspektiv från linjen l.

Detta leder oss fram till nästa definition:

Definition 4.30. Mängden av de tio punkterna $\{P; A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; A_1A_2 \cap B_1B_2, A_1A_3 \cap B_1B_3, A_2A_3 \cap B_2B_3\}$, där $A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_1A_3 \cap B_1B_3$ och $A_2A_3 \cap B_2B_3$ måste vara kolinjära, $A_1A_2A_3$ och $B_1B_2B_3$ perspektiva från punkten P samt perspektiva från linjen som sammanbinds av $A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_1A_3 \cap B_1B_3$ och $A_2A_3 \cap B_2B_3$, kallas en *Desargues-konfiguration*.

Vi kan nu konstatera att trianglarna XYZ och $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ tillsammans med punkten P och linjen l bildar en Desargues-konfiguration.

Exempel 4.31. I figuren nedan är punkterna ordnade för att bilda en Desargues-konfiguration.



Figur 30

Definition 4.32. Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan och låt $A_1A_2A_3$ och $B_1B_2B_3$ vara två trianglar perspektiva från en punkt P. $\mathbb{P}$ sägs då vara (P,l)-*desargiskt* om $A_1A_2 \cap B_1B_2 \in l$ och $A_1A_3 \cap A_1A_3 \in l$ leder till att $A_2A_3 \cap B_2B_3 \in l$.

Notera att de två punkterna $A_1A_2 \cap B_1B_2$ och $A_1A_3 \cap B_1B_3$ alltid är kolinjära (ty de är endast två punkter och två punkter binds alltid samman av en linje, enligt definitionen av projektiva plan).

Vi kan nu sammanfatta vår tidigare analys av XYZ och $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ i följande lemma.

Lemma 4.33. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan, α en (P,l)- kollineation av $\mathbb{P}$, och $\Delta = A_1A_2A_3$ en triangel sådan att $A_i \neq P, A_i \notin l, i \in \{1,2,3\}$ och $PA_i \neq PA_j$, $i \neq j$. Då är $\tilde{\Delta} = \alpha(A_1)\alpha(A_2)\alpha(A_3)$ en triangel sådan att Δ och $\tilde{\Delta}$ är perspektiva från P och l.*

Sats 4.34. *Ett projektivt plan $\mathbb{P}$ är (P,l)-desargiskt om och endast om det är (P,l)-transitivt.*

Bevis. Vi börjar med att anta att $\mathbb{P}$ är (P,l)-transitivt. Vi vill då visa att det är (P,l)-desargiskt. Låt $A_1A_2A_3$ och $B_1B_2B_3$ vara två trianglar perspektiva från P, sådana att $X = A_1A_2 \cap B_1B_2$ och $Y = A_1A_3 \cap B_1B_3$ ligger på l. Vi måste då visa att $Z = A_2A_3 \cap B_2B_3$ ligger på l.

Då $\mathbb{P}$ är (P,l)-transitivt finns det en kollineation $\alpha \in \mathcal{G}_{(P,l)}$ sådan att $\alpha(A_1) = B_1$. Vi har då att

$$\alpha(A_2) = \alpha(A_1X \cap A_2B_2) = \alpha(A_1X) \cap \alpha(A_2B_2) = B_1X \cap A_2B_2 = B_1B_2 \cap A_2B_2 = B_2,$$

där den första likheten kommer från att $A_2 \in A_1X$ och $A_2 \in A_2B_2$, och den tredje från att punkten X och linjen A_2A_3 är fixa. Analogt får vi

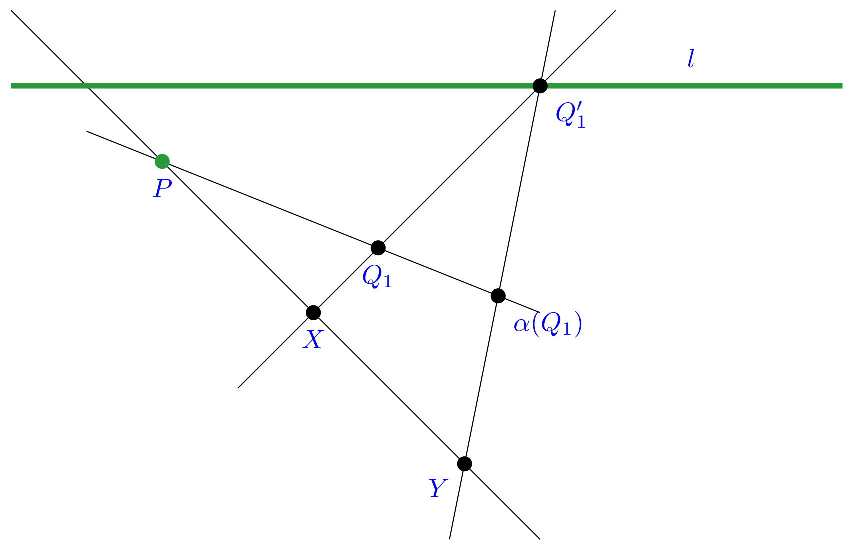
$$\alpha(A_3) = \alpha(A_1Y \cap A_3B_3) = \alpha(A_1Y) \cap \alpha(A_3B_3) = B_1Y \cap A_3B_3 = B_1B_3 \cap A_3B_3 = B_3.$$

Då vi nu har att $\alpha(A_i) = B_i$, och $X, Y \in l$ får vi nu enligt lemma 4.33 att $Z \in l$ och således är planet (P, l)-desargiskt.

För att påvisa den motsatta implikationen antar vi att $\mathbb{P}$ är (P, l)-desargiskt. Tag två godtyckliga punkter X och Y kolinjära med P och som inte ligger på l. Vi vill visa att det finns en (P, l)-kollineation α med egenskapen att $\alpha(X) = Y$. För att göra detta får vi först definiera en avbildning α, vilken avbildar X på Y, och sedan verifiera att det är en kollineation. Då vi vill att l ska vara axeln definierar vi $\alpha(L_i) = L_i$ för alla $L_i \in l$, samt $\alpha(P) = P$ då detta ska vara vårt centrum. För att definiera α för punkter Q_j som ej ligger på l eller på XY, börjar vi med att låta $Q'_j = XQ_j \cap l$. Vi har då att $Q_j = Q'_jX \cap PQ$ och således

$$\alpha(Q_j) = \alpha(Q'_jX \cap PQ_j) = \alpha(Q'_jX) \cap \alpha(PQ_j) = Q'_jY \cap PQ_j, \tag{1}$$

där den sista likheten kommer från att Q'_j ligger på l och är således fix, samt att linjen PQ_j ska vara fix. I figur 31 visas hur Q_1 definieras med hjälp av ekvation (1).

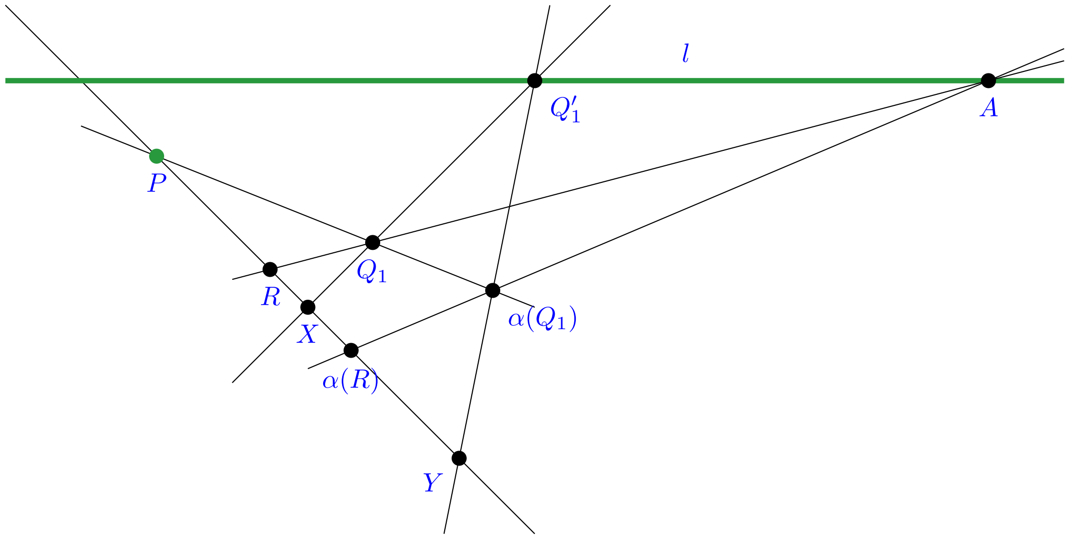


Figur 31

För att definiera $\alpha(R_k)$ för punkterna $R_k \in XY$ kan vi använda någon av de andra punkterna Q_j, säg Q_1, som vi definierat α för. Vi låter $A_k = R_kQ_1 \cap l$, får $R_k = XY \cap A_kQ_1$ och kan således definiera

$$\alpha(R_k) = \alpha(XY) \cap \alpha(A_kQ_1) = XY \cap A_k\alpha(Q_1), \tag{2}$$

där sista likheten kommer från att linjen XY ska vara fix liksom punkten $A_k \in l$. Jämför med ekvation (1). Vår avbildning har nu axeln l och centrumet P. I figur 32 visas hur en punkt $R \in XY$ definieras med hjälp av ekvation (2).



Figur 32

Vi har nu definierat en automorfi α och det återstår att visa (i) att α avbildar kolinjära punkter kolinjärt och (ii) att α är väldefinierad.

(i) För att se att α avbildar kolinjära punkter kolinjärt får vi undersöka punkter som ligger på olika linjer. Vi delar upp denna undersökning i olika fall.

Alla punkter som ligger på l avbildas kolinjärt då l är en axel och punkterna därpå definierades till att avbildas på sig själva.

Två punkter som är kolinjära med P men ej ligger på XY avbildas kolinjärt med P då linjerna genom P är fixa enligt ekvation (1). Även linjen XY har definierats till att vara fix enligt ekvation (2) (dess punkter avbildas på XY), vilket betyder att punkterna därpå förblir kolinjära.

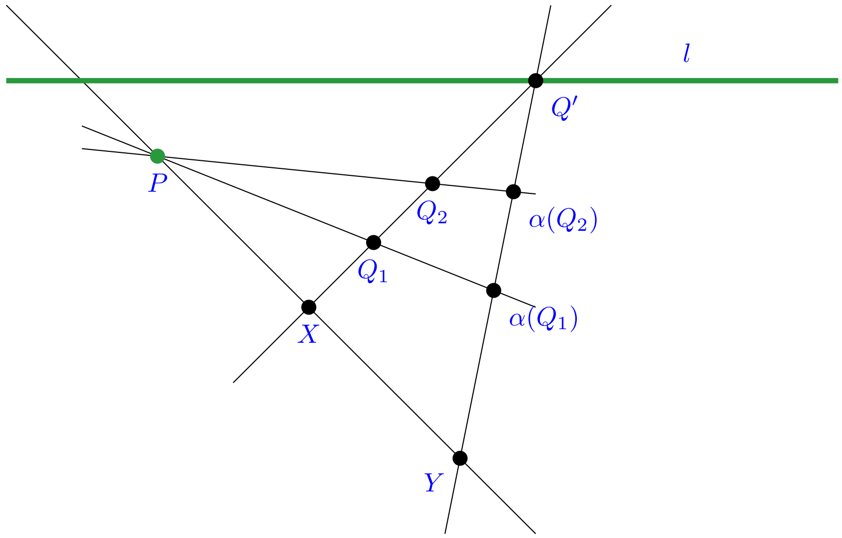
Då två punkter Q_1 och Q_2 är kolinjära med X, men ej ligger på XY, gäller att $XQ_1 \cap l = XQ_2 \cap l := Q'$ och vi har då enligt ekvation (1) att

$$\alpha(Q_1) = \alpha(Q'X \cap PQ_1) = Q'Y \cap PQ_1$$

och

$$\alpha(Q_2) = \alpha(Q'X \cap PQ_2) = Q'Y \cap PQ_2.$$

Från detta ser vi att Y, $\alpha(Q_1)$ och $\alpha(Q_2)$ alla ligger på linjen $Q'Y$, och är således kolinjära (se figur 33).



Figur 33

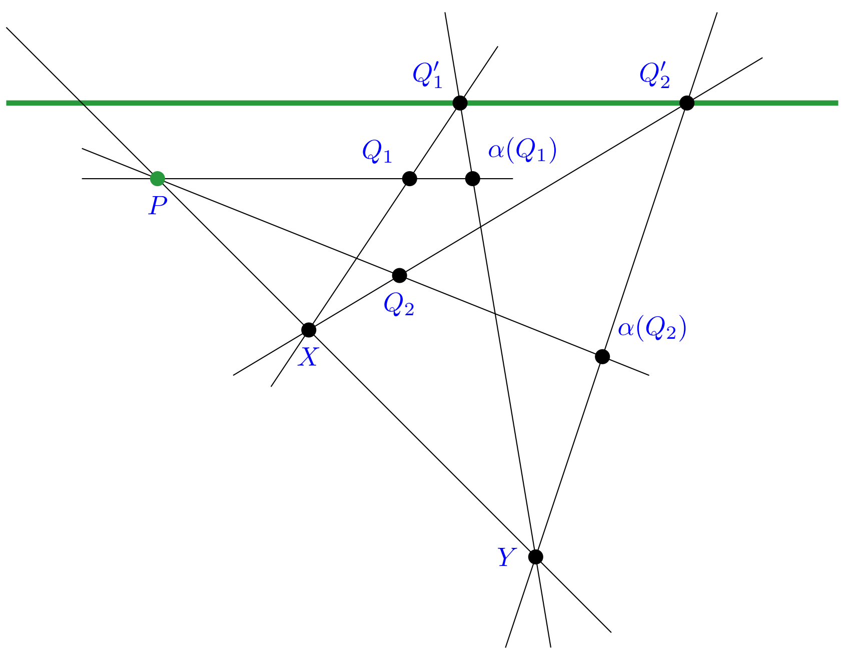
Vi ska nu undersöka fallet då vi har två punkter, Q_1 och Q_2, som varken är kolinjära med X eller P, eller ligger på någon av linjerna l eller XY. Låt $Q_1' = XQ_1 \cap l$ och $Q_2' = XQ_2 \cap l$. Det betyder att $Q_1 = Q_1'X \cap PQ_1$ samt $Q_2 = Q_2'X \cap PQ_2$. Vi har då

$$\alpha(Q_1) = \alpha(Q_1'X \cap PQ_1) = Q_1'Y \cap PQ_1$$

och

$$\alpha(Q_2) = \alpha(Q_2'X \cap PQ_2) = Q_2'Y \cap PQ_2.$$

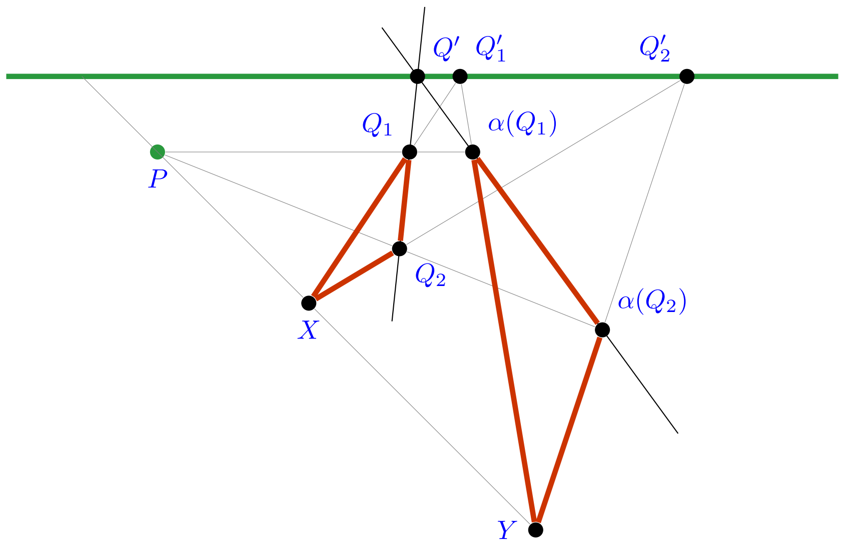
Se figur 34.



Figur 34

Betrakta nu de två trianglarna XQ_1Q_2 och $Y\alpha(Q_1)\alpha(Q_2)$ (se figur 35). Dessa är perspektiva från P då $P \in XY$, $P \in Q_1\alpha(Q_1)$ och $P \in Q_2\alpha(Q_2)$. Vi har även att

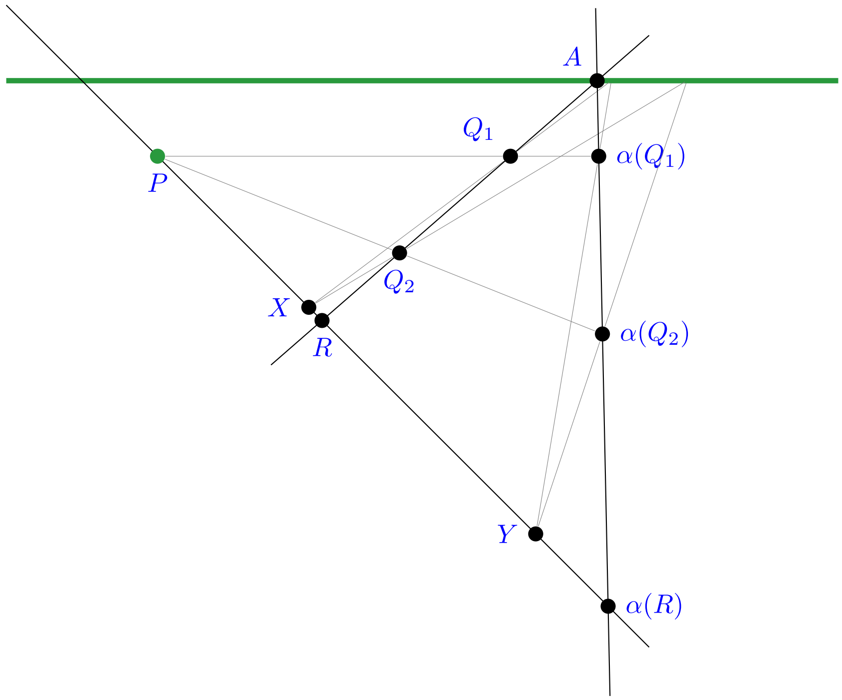
$XQ_1 \cap Y\alpha(Q_1) = Q_1' \in l$ och $XQ_2 \cap Y\alpha(Q_2) = Q_2' \in l$. Då $\mathbb{P}$ är (P,l)-desargiskt måste vi ha att även $Q' := Q_1Q_2 \cap \alpha(Q_1)\alpha(Q_2) \in l$. Då Q' ligger på l är det en fix punkt och vi har att $\alpha(Q') = Q'$. Då vi har att Q_1, Q_2 och Q' är kolinjära, samt att $\alpha(Q_1)$, $\alpha(Q_2)$ och $\alpha(Q') = Q'$ är kolinjära har vi visat att kolinjära punkter alltid förblir kolinjära och vi kan konstatera att vi konstruerat en kollineation.



Figur 35

(ii) För att visa att α är väldefinierad måste vi visa att vårt val av punkten Q_j inte spelar någon roll då vi definierar α för punkter $R_k \in XY$. Låt Q_1 och Q_2 vara två punkter som varken ligger på XY, l, eller är kolinjära med P. Vi har i enlighet med ekvation (1) definierat punkterna $\alpha(Q_1)$ och $\alpha(Q_2)$. Vi delar upp denna undersökning i två fall; fallet då Q_1, Q_2 och en godtycklig punkt $R \in XY$ är kolinjära samt fallet då de inte är kolinjära.

Vi börjar med att undersöka fallet då de tre punkterna är kolinjära. Dra till minnes att vi har definierat $A = RQ_1 \cap l$ och $\alpha(R) = XY \cap A\alpha(Q_1)$ i enlighet med ekvation (2). Men då R, Q_1, Q_2 och A är kolinjära har vi enligt del (i) i beviset att $\alpha(R)$, $\alpha(Q_1)$, $\alpha(Q_2)$ och A är kolinjära. Alltså är $A\alpha(Q_1) = A\alpha(Q_2)$ och således är $XY \cap A\alpha(Q_1) = XY \cap A\alpha(Q_2)$. Q_1 och Q_2 definierar följdaktligen samma avbildning av R. Se figur 36.



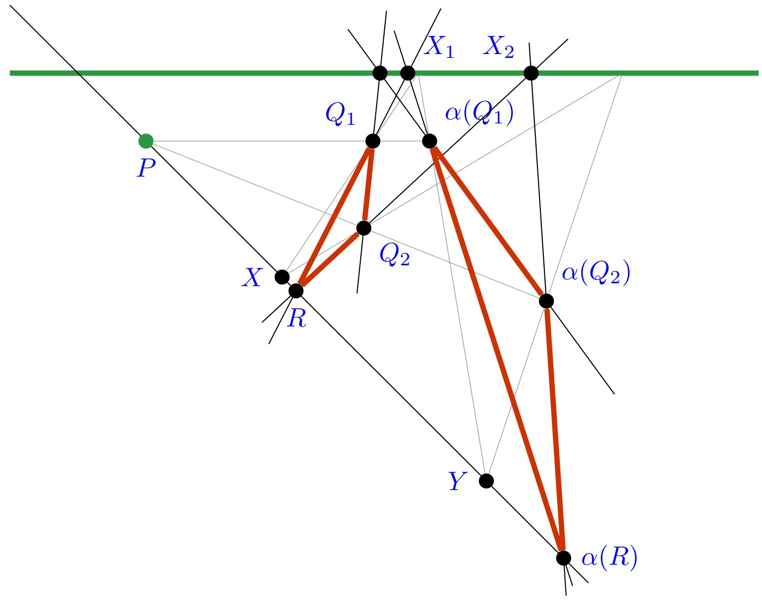
Figur 36

Vi undersöker nu fallet då Q_1 och Q_2 inte är kolinjära med R. Låt oss först definiera $X_1 = RQ_1 \cap l$ och $X_2 = RQ_2 \cap l$.Vi har då att $R = XY \cap X_1Q_1$ och således är

$$\alpha(R) = XY \cap X_1\alpha(Q_1). \tag{3}$$

Vi har även att $R = XY \cap X_2Q_2$ och vi vill därmed visa att $\alpha(R) = XY \cap X_2\alpha(Q_2)$.

Studera trianglarna RQ_1Q_2 och $\alpha(R)\alpha(Q_1)\alpha(Q_2)$ (se figur 37). Dessa är i centralt perspektiv från P. Vi ser att $X_1 \in RQ_1$ enligt definitionen av X_1 samt att $X_1 \in \alpha(R)\alpha(Q)$ enligt ekvation (3). Följaktligen har vi att $RQ_1 \cap \alpha(R)\alpha(Q_1) = X_1 \in l$. Vi har även enligt (i) att $Q_1Q_2 \cap \alpha(Q_1)\alpha(Q_2) \in l$. Då trianglarna är perspektiva från P och $\mathbb{P}$ är (P, l)-desargiskt måste punkten $RQ_2 \cap \alpha(R)\alpha(Q_2)$ ligga på l. Vi vet redan att $X_2 \in RQ_2$ och $X_2 \in l$, alltså får vi att $X_2 = RQ_2 \cap \alpha(R)\alpha(Q_2)$. Med detta vet vi att X_2, $\alpha(R)$ och $\alpha(Q_2)$ är kolinjära och, då denna linjen är skild från XY, har vi att $\alpha(R) = XY \cap X_2\alpha(Q_2)$, vilket var vårt önskade resultat. Vi kan konstatera att $\alpha(R)$ är samma punkt oberoende av vilken referenspunkt Q_j vi använder, och α är således väldefinierad.



Figur 37

□

Definition 4.35. Ett projektivt plan $\mathbb{P}$ sägs vara *desargiskt* om två trianglar är perspektiva från någon linje $l \in \mathbb{P}$ så fort de är perspektiva från någon punkt $P \in \mathbb{P}$.

Denna definition av desargiskt leder till följande sats.

Sats 4.36. *Ett projektivt plan är desargiskt om och endast om det är* (P, l)*-desargiskt för alla par* P *och* l*.*

5 Konstruktion av projektiva plan

5.1 Projektiva plan över kroppar

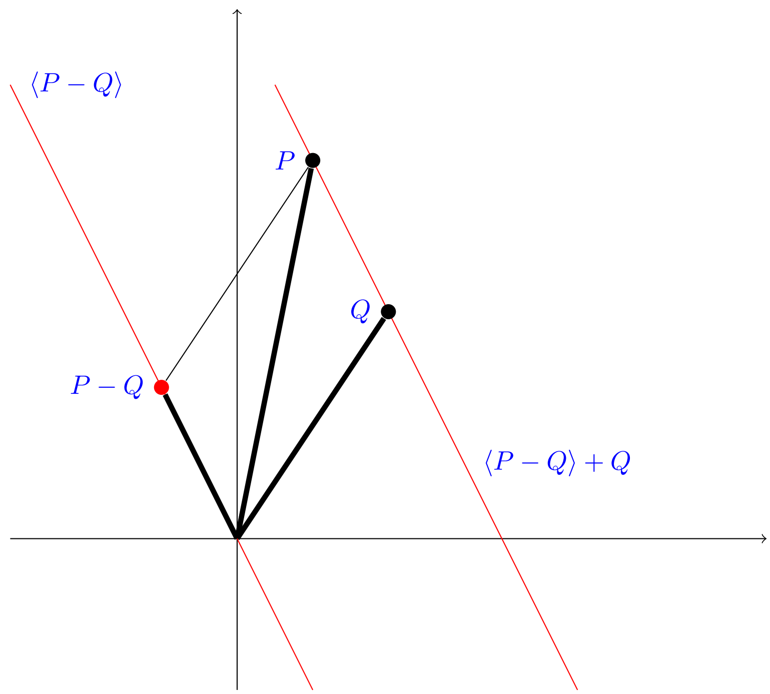
I detta avsnitt ska vi visa hur man kan konstruera projektiva plan ur kroppar. Vi börjar med att konstruera affina plan. Detta delkapitel baserar sig mest på [LMB].

Sats 5.1. *Låt $\mathcal{F}$ vara en kropp och $\mathcal{V}$ vara ett 2-dimensionellt vektorrum över denna. Då definierar vi systemet $\mathbb{A}$ som följande:*

- *punkterna i $\mathbb{A}$ är elementen i $\mathcal{V}$,*
- *linjerna i $\mathbb{A}$ är de (högra) sidoklasserna av 1-dimensionella delrum i $\mathcal{V}$, det vill säga att om u är ett 1-dimensionellt delrum så anger $u + V$ linjer i $\mathbb{A}$.*

Då är $\mathbb{A}$ ett affint plan.

Bevis. Låt P och Q vara två punkter i $\mathbb{A}$ respektive element i $\mathcal{V}$. Då gäller att $P, Q \in \langle P - Q\rangle + Q$, där $\langle P - Q\rangle$ anger det delrum som spänns av vektorn $P - Q$ (se figur 38).



Figur 38

Vi har alltså då att det finns en linje som binder samman dessa punkter. Notera att $\langle P - Q\rangle + Q = \langle P - Q\rangle + P$. Vi behöver visa att denna linje är entydig. Låt $u + X$ vara en linje sådan att $P, Q \in u + X$. Då sidoklasser enligt sats 2.16 och 2.15 bildar en partition, måste detta implicera att $u + X = u + P = u + Q$. Då u är ett delrum gäller att $P - Q \in u$, alltså $u = \langle P - Q\rangle$. Således är $\langle P - Q\rangle + Q$ den entydiga linjen som förbinder P och Q.

Ett 1-dimensionellt delrum har minst två element, alltså är en linje incident med minst två punkter.

Då $\mathcal{V}$ är 2-dimensionellt finns det två vektorer V och W som är linjärt oberoende. Det är då klart att 0, V och W inte är kolinjära och alltså finns det tre icke-kolinjära punkter.

Låt $u + U$ vara en linje och P vara en punkt sådan att $P \notin u + U$. Låt $w + W$ vara någon linje genom P. Antag $w \neq u$. Då gäller att $u + w$ spänner hela vektorrummet $\mathcal{V}$. Vi kan då uttrycka U som en linjärkombination av två element ur u respektive w: $U = U_1 + W_1$. Även W kan uttryckas som en linjärkombination av två element ur u respektive w: $W = U_2 + W_2$. Då gäller:

$$U_2 + W_1 = U_2 + U - U_1 = U_2 - U_1 + U \in u + U$$

och

$$U_2 + W_1 = W - W_2 + W_1 = W_1 + W_2 + W \in w + W,$$

vilket implicerar att $(u+U) \cap (w+W) \neq \emptyset$. Alltså är $w = u$ ett nödvändigt villkor för att dessa linjer ska vara parallella. $P \in w + W = u + W$ implicerar att $u + W = u + P$, således är $u + P$ den unika linjen som går genom P som inte skär $u + U$. $\square$

Låter vi $\mathcal{F}$ vara $\mathbb{Z}_2$ respektive $\mathbb{Z}_3$ får vi de två minsta affina planen, se exempel 3.4 och 3.28. Vi vill nu kunna göra en motsvarande konstruktion av projektiva plan.

Sats 5.2. *Låt $\mathcal{F}$ vara en kropp och $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ vara ett 3-dimensionellt vektorrum över denna. Då definierar vi systemet $\mathbb{P}$ som följande:*

- *punkterna i $\mathbb{P}$ är de 1-dimensionella delrummen av $\mathcal{V}$,*
- *linjerna i $\mathbb{P}$ är de 2-dimensionella delrummen i $\mathcal{V}$,*

med $P \in l$ om det 1-dimensionella delrum som motsvarar P är en delmängd av det 2-dimensionella delrum som motsvarar l. Då är $\mathbb{P}$ ett projektivt plan.

Bevis. Låt $\langle \{X_1, \ldots, X_n\} \rangle$ beteckna delrummet som spänns av vektorerna $X_1, \ldots, X_n$. Låt $\langle V \rangle$ och $\langle W \rangle$ vara två 1-dimensionella delrum av $\mathcal{V}$, sådana att V och W är linjärt oberoende. Då gäller att $\langle V \rangle, \langle W \rangle \in \langle \{V, W\} \rangle$, där $\langle \{V, W\} \rangle$ är ett 2-dimensionellt delrum av $\mathcal{V}$. Samt så måste alla 2-dimensionella delrum som innehåller $\langle V \rangle$ och $\langle W \rangle$ innehålla $\langle \{V, W\} \rangle$. Således är detta den unika linjen genom de godtyckliga punkterna $\langle V \rangle$ och $\langle W \rangle$.

En linje är incident med minst två punkter ty ett 2-dimensionellt rum har två linjärt oberoende vektorer som bas.

Då $\mathcal{V}$ är ett 3-dimensionellt vektorrum, finns det tre linjärt oberoende vektorer U_1, U_2, U_3 i $\mathcal{V}$. Då är inga tre av punkterna $\langle U_1 \rangle, \langle U_2 \rangle, \langle U_3 \rangle$ och $\langle \{U_1 + U_2 + U_3\} \rangle$ kolinjära.

Låt l och m vara två distinkta 2-dimensionella delrum till $\mathcal{V}$ (det vill säga linjer i $\mathbb{P}$). Då är $dim(l \cap m) = 1$. Alltså definierar dessa linjerna en unik punkt. $\square$

Vi har alltså att det 3-dimensionella rummet $\mathcal{V}(\mathcal{F})$, där $\mathcal{F}$ är en kropp, är ett projektivt plan, med punkter som ges av de 1-dimensionella delrummen och linjer som ges av de 2-dimensionella delrummen. Vi kommer i fortsättningen att beteckna ett sådant plan med $\mathbb{P}(\mathcal{F})$.

Exempel 5.3. Vi ser på hur vi kan konstruera ett projektivt plan ur $\mathbb{Z}_2$. De 1-dimensionella delrummen i $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_2)$ är linjer genom origo, och ges således av ekvationerna $\mathbf{0} + t\mathbf{v}$, där $\mathbf{v} \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$. Vi har nu fått sju punkter, vilket vittnar om att det projektiva planet vi fått i själva verket är Fano-planet. Jämför denna konstruktion av Fano-planet med figur 14 från exempel 3.23.

Vi har alltså sett att det projektiva planet definierat med hjälp av $\mathbb{Z}_2$ är av ordning 2. Motsvarande gäller för $\mathbb{P}(\mathcal{F})$, där $\mathcal{F}$ är en kropp. Då vi enligt sats 2.18 vet att det finns kroppar av primtalspotensordning leder detta fram till följande resultat.

Korollarium 5.4. *För varje tal $n = p^m$, där p är något primtal och m är något heltal, existerar det ett projektivt plan av ordning n.*

Definition 5.5. Ett projektivt plan $\mathbb{P}(\mathcal{F})$, där $\mathcal{F}$ är en kropp av primtalspotensordning p^m, kallas för ett *kroppsplan.* Är det ett ändligt plan säger vi att det är ett *Galoisplan* av ordning p^m.

Vi ser nu närmre på punkterna och linjerna i ett kroppsplan $\mathbb{P}(\mathcal{F})$. Punkterna ges av kolonnvektorer med tre element, men dessa kommer ibland att betecknas med $\boldsymbol{x} = (x : y : z)$. Notera att $\boldsymbol{x}$ och $\alpha\boldsymbol{x}$ (vi betecknar multiplikation i $\mathcal{F}$ med hjälp av vanlig juxtaposition), där $\alpha \in \mathcal{F}$, båda betecknar samma punkt då det fortfarande är samma endimensionella delrum. Vi har att en punkt $\boldsymbol{z}$ ligger på linjen $\langle \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \rangle$ om och endast om $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ för några $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$. Alltså är punkterna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ och $\boldsymbol{z}$ kolinjära om och endast om ekvationssystemet

$$[\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{z}]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

har någon icke-trivial lösning för $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}$, det vill säga då matrisen $[\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{z}]$ är singulär. Vi formulerar detta som en sats:

Sats 5.6. *Givet ett Galoisplan $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ har vi att tre punkter $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ och $\boldsymbol{z}$ är kolinjära om och endast om matrisen $[\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{z}]$ är singulär.*

Givet en linje genom två punkter $\boldsymbol{a} = (a_1 : a_2 : a_3)$ och $\boldsymbol{b} = (b_1 : b_2 : b_3)$ har vi att en godtycklig punkt $\boldsymbol{x} = (x : y : z)$ alltså ligger på linjen om och endast om

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & x\\ a_2 & b_2 & y\\ a_3 & b_3 & z\end{vmatrix}&=0 && \iff\\ a_1\begin{vmatrix}b_2 & y\\ b_3 & z\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & x\\ b_3 & z\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & x\\ b_2 & y\end{vmatrix}&=0 && \iff\\ a_1(b_2z-b_3y)-a_2(b_1z-b_3x)+a_3(b_1y-b_2x)&=0 && \iff\\ \alpha x+\beta y+\gamma z&=0,\end{aligned}$$

för några $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}$, inte alla noll. En linje består således av alla punkter $\boldsymbol{x} = (x : y : z)$ sådana att $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Vi låter en sådan linje betecknas $\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Vi kan nu definiera kollineationer på Galoisplan. Låt A vara en icke-singulär 3×3-matris, vars element ligger i kroppen $\mathcal{F}$. Vi har då att avbildningen $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ är en surjektiv avbildning av punkter till punkter. För att se hur linjer avbildas noterar vi att en linjes ekvation kan skrivas $\boldsymbol{\alpha}^T(A^{-1}A)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\alpha}^T A^{-1})(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ och vi ser alltså att punkten $A\boldsymbol{x} := \boldsymbol{y}$ kommer att ligga på linjen $\boldsymbol{\alpha}^T A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. En linje $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ avbildas således på linjen $\boldsymbol{\alpha}^T A^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Vi vill nu undersöka kollineationen $\mathcal{A}$ som bestäms av matrisen

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

där $\alpha \neq 0$. Det gäller då att en punkt avbildas som $\boldsymbol{x} = (x : y : z) \to (\alpha x : y : z)$. Speciellt har vi att punkten $P_1 = (1 : 0 : 0)$ är fix (kom ihåg att $\boldsymbol{x}$ och $\alpha\boldsymbol{x}$ representerar samma punkt). För att se att P_1 är centrumet till $\mathcal{A}$ så visar vi att P_1, $\boldsymbol{x}$ och $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ är kolinjära, för någon punkt $\boldsymbol{x} = (x : y : z)$. Vi har att

$$\begin{vmatrix}1 & x & \alpha x\\ 0 & y & y\\ 0 & z & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & y\\ z & z\end{vmatrix}=0,$$

vilket enligt sats 5.6 ger oss att P_1, $\boldsymbol{x}$ och $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ är kolinjära. Vi har även att alla punkter $\boldsymbol{x} = (x : y : z)$ på linjen $[1 \quad 0 \quad 0]\ \boldsymbol{x} = 0$, vilken vi benämner l_1, är fixa, då dessa ges av

$$\begin{aligned}[1 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}&=0 && \Rightarrow\\ x&=0 && \Rightarrow\\ \boldsymbol{x}&=\begin{bmatrix}0\\y\\z\end{bmatrix},\end{aligned}$$

varifrån vi ser att $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Således har vi att $\mathcal{A}$ är en (P_1, l_1)-kollineation. Notera att $P_1 \neq l_1$.

Sats 5.7. *$\mathbb{P}(\mathcal{F})$ är (P_1, l_1)-transitivt.*

Bevis. Idén i beviset är att utnyttja sats 4.22 och således behöver vi bara visa att givet en punkt $\boldsymbol{q} \neq P_1, \boldsymbol{q} \notin l_1$, så finns det till varje punkt $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{q}P_1, \boldsymbol{r} \neq P_1, \boldsymbol{r} \notin l_1$ en (P_1, l_1)-kollineation $\mathcal{K}$ sådan att $\mathcal{K}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}$. Vi låter $\boldsymbol{q} = (1 : 0 : 1)$ och således utgörs linjen $\boldsymbol{q}P_1$ av alla punkter $(x : y : z)$ sådana att $0x + 1y + 0z = 0$, det vill säga av alla punkter på formen $(x : 0 : z)$, där $(x, z) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \setminus \{0, 0\}$. Då alla kollineationer på formen $\mathcal{A}$ kommer att vara (P_1, l_1)-kollineationer, elementet α får vara vilket som helst i $\mathcal{F} \setminus \{0\}$, och $(\alpha x : 0 : z)$ och $\beta(\alpha x : 0 : z)$ representerar samma punkt för $\alpha, \beta \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$, har vi att det finns en (P_1, l_1)-kollineation som avbildar $\boldsymbol{q}$ på $(x : 0 : z)$ för alla punkter $(x : 0 : z)$, där $(x, z) \neq (1, 0)$ och därmed är beviset klart. □

Vi låter nu $\mathcal{B}$ vara den kollineation som bestäms av matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

där $\beta \in \mathcal{F}$. En punkt $\boldsymbol{x} = (x : y : z)$ avbildas då på $(x + \beta y : y : z)$ och speciellt gäller att P_1 är centrum även till denna kollineationen, då

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x + \beta y \\ 0 & y & y \\ 0 & z & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y \\ z & z \end{vmatrix} = 0.$$

Punkterna $\boldsymbol{x} = (x : y : z)$ på linjen $[0 \quad 1 \quad 0]\ \boldsymbol{x} = 0$, vilken vi benämner l_2, är fixa då dessa ges av

$$\begin{aligned} [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= 0 && \Rightarrow \\ y &= 0 && \Rightarrow \\ \boldsymbol{x} &= \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

och vi för punkter på denna formen får

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}.$$

Således är $\mathcal{B}$ en (P_1, l_2)-kollineation. Notera att $P_1 \in l_2$.

Sats 5.8. *$\mathbb{P}(\mathcal{F})$ är (P_1, l_2)-transitivt.*

Bevis. Idén i beviset är igen att utnyttja sats 4.22. Vi behöver alltså bara visa att givet en punkt $\boldsymbol{q} \neq P_1, \boldsymbol{q} \notin l_1$, så finns det till varje $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{q}P_1, \boldsymbol{r} \neq P_1, \boldsymbol{r} \notin l_1$ en (P_1, l_2)-kollineation $\mathcal{K}$ sådan att $\mathcal{K}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{r}$. Vi låter $\boldsymbol{q} = (0 : 1 : 0)$ och således utgörs linjen $\boldsymbol{q}P_1$ av alla punkter $(x : y : z)$ där $0x + 0y + 1z = 0$, det vill säga av alla punkter på formen $(x : y : 0)$, där $x, y \in \mathcal{F}$. Då alla kollineationer på formen $\mathcal{B}$ kommer att vara (P_1, l_2)-kollineationer, elementet β får vara vilket som helst i $\mathcal{F}$, och $(x + \beta y : y : 0)$ och $\gamma(x + \beta y : y : 0)$ representerar samma punkt för $\beta, \gamma \in \mathcal{F}, \gamma \neq 0$, har vi att det finns en (P_1, l_2)-kollineation som avbildar $\boldsymbol{q}$ på $(x : y : 0)$ för alla punkter $(x : y : 0)$ där $(x, y) \neq (1, 0)$ och därmed är beviset klart. □

Sats 5.9. *Låt P och l vara en punkt och en linje i $\mathbb{P}(\mathcal{F})$.*

(i) Om $P \notin l$ så finns det en kollineation $\mathcal{K}$ sådan att $\mathcal{K}(P) = P_1$ och $\mathcal{K}(l) = l_1$

(ii) Om $P \in l$ så finns det en kollineation $\mathcal{K}$ sådan att $\mathcal{K}(P) = P_1$ och $\mathcal{K}(l) = l_2$.

Bevis. (i) Vi låter $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ och väljer två punkter $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$ och $R = (r_1 : r_2 : r_3)$ på linjen l. Vi konstruerar nu en matris K^{-1} genom

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{bmatrix}.$$

Då P, Q och R enligt förutsättningar inte är kolinjära, gäller enligt sats 5.6 att K^{-1} är icke-singulär och därmed inverterbar. Det är således rimligt att betrakta $K = (K^{-1})^{-1}$. Vi låter nu vår kollineation $\mathcal{K}$ ges av matrisen K. Vi har då att P avbildas på P_1, ty

$$K^{-1}P_1 = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = P.$$

Vi har att linjen genom Q och R avbildas på linjen l_1, då

$$K^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = Q, \text{ och}$$
$$K^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = R,$$

där både punkten $(0 : 1 : 0)$ och $(0 : 0 : 1)$ ligger på l_1, då denna ges av ekvationen $[1 \quad 0 \quad 0]\ \boldsymbol{x} = 0$.

(ii) Då $P \in l$, låter vi igen $P = (p_1 : p_2 : p_3)$. Vi väljer nu en punkt $Q = (q_1 : q_2 : q_3) \in l$ och en punkt $R = (r_1 : r_2 : r_3) \notin l$. Vi bildar matrisen

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} p_1 & r_1 & q_1 \\ p_2 & r_2 & q_2 \\ p_3 & r_3 & q_3 \end{bmatrix}.$$

Då dessa tre punkter inte är kolinjära får vi igen enligt sats 5.6 att K^{-1} är icke-singulär, och således kan vi låta kollineationen $\mathcal{K}$ bestämmas av $K = (K^{-1})^{-1}$. Vi har enligt samma resonemang som förut att P avbildas på P_1. Vi vet dessutom sedan innan att $P_1 \in l_2$. Vi har nu att Q avbildas på punkten $(0 : 0 : 1) \in l_2$, då

$$K^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & r_1 & q_1 \\ p_2 & r_2 & q_2 \\ p_3 & r_3 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = Q.$$

Således avbildas P på P_1 och l på l_2 och beviset är därmed klart.

□

Vi är nu redo att bevisa ena implikationen i den fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri:

Sats 5.10. *Om $\mathbb{P}$ är ett Galoisplan så är det desargiskt.*

Bevis. Vi vet enligt sats 5.7 och sats 5.8 att ett Galoisplan $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ alltid är (P_1, l_1)- respektive (P_1, l_2)-transitivt. Då vi enligt sats 5.9 har att det för alla par av punkter P och linjer l finns en kollineation som avbildar P på P_1 och l på l_1 eller l_2, och inversen till denna är en kollineation enligt sats 4.3, så får vi enligt sats 4.21 att $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ är (P, l)-transitivt för alla par av punkter P och linjer l. Sats 4.34 och sats 4.36 ger oss nu att $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ är desargiskt. □

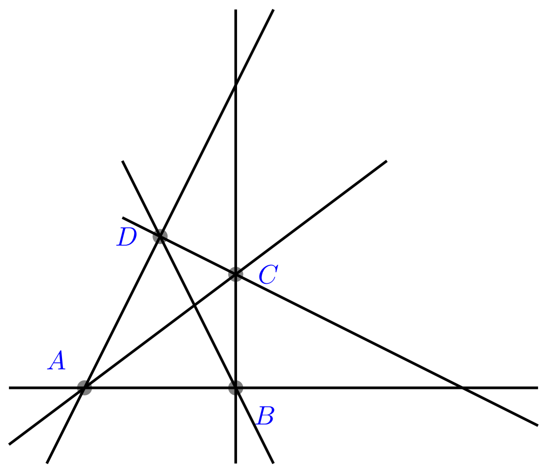
5.2 Galoisplan av ordning 3

Vi ska i detta avsnittet redogöra för en allmän metod att konstruera ett projektivt plan (eller delplan) givet fyra punkter, samt konstruera ett projektivt plan av ordning 3. Delkapitlet baserar sig på källan [RK]. Vi börjar med att redogöra för metoden *fyrhörningskomplettering* och låter då först $ABCD$ vara en fyrhörning.

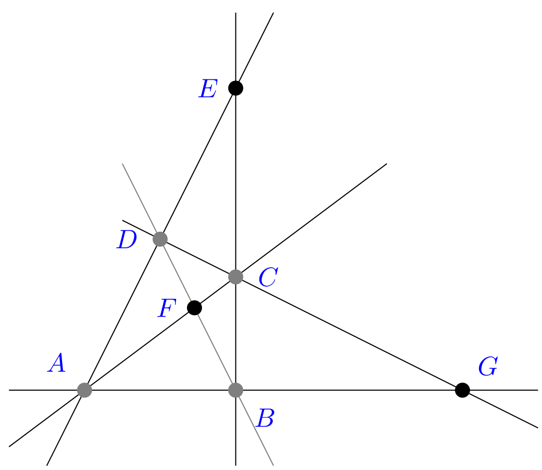
1) Lägg först till de sex linjer som förbinder punkterna (se figur 39).

2) Lägg till de tre skärningspunkter som inte redan finns med i systemet (se figur 40).

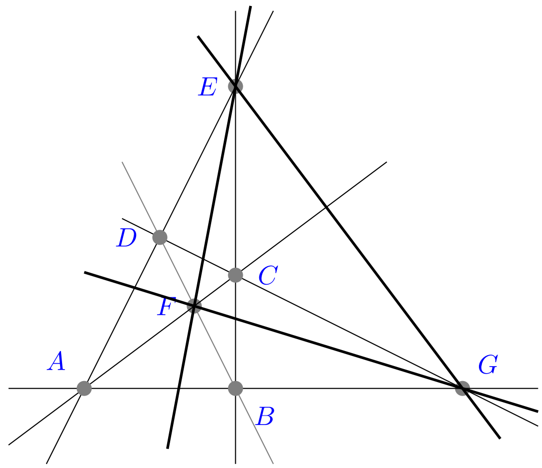
3) Lägg till den eller de linjer som förbinder de tre nya punkterna (se figur 41).



Figur 39: Linjerna som förbinder punkterna i fyrhörningen läggs till.



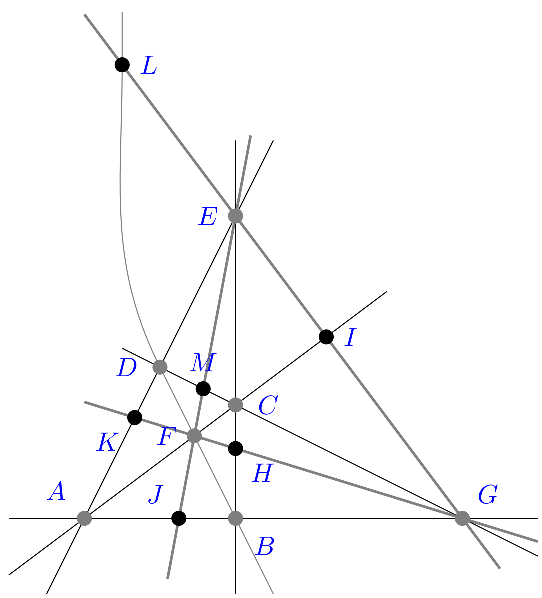
Figur 40: Skärningspunkterna läggs till.



Figur 41: Den eller de linjer som förbinder resterande punkter läggs till.

Notera att om E, F och G var kolinjära och vi endast lade till en linje i sista steget, så har vi hittills konstruerat Fano-planet. Befinner vi oss i ett plan av större ordning kan vi fortsätta processen genom att upprepa det tillvägagångssätt som redogjorts för. Om ordningen på planet är ändlig kommer processen att sluta efter ändligt många iterationer. Det resulterande planet kommer då utgöra antingen ett äkta delplan eller hela planet som vi började med.

Då vårt mål nu är att konstruera ett projektivt plan av ordning 3 antar vi att E, F och G inte är kolinjära. Vi kan då lägga till de sex skärningspunkterna $H = BC \cap FG$, $I = CA \cap GE$, $J = AB \cap EF$, $K = AD \cap FG$, $L = BD \cap GE$ och $M = CD \cap EF$.



Figur 42

Vi ser nu att vi har 13 punkter och 9 linjer. Varje linje innehåller fyra punkter och genom varje punkt går det fyra eller färre linjer. Då $ABCD$ är en fyrhörning och punkterna i diagonaltriangeln E, F, och G inte är kolinjära i ett plan som är av högre ordning än 2, måste dessa punkter och linjer vara distinkta och således ingå i ett projektivt plan av högre ordning.

Man kan dock fortfarande fråga sig om det inte finns ett projektivt plan av ordning 3 som innehåller Fano-planet som delplan. Återerinra då att en av våra slutsatser från Brucks sats (sats 3.26) var att Fano-planet inte kan vara ett delplan till ett projektivt plan av ordning 3.

Enligt sats 3.21 ska det finnas 13 punkter respektive linjer i ett plan av ordning 3. Vi kan alltså konstatera att vi behöver införa fyra linjer för att det (möjligtvis) ska vara ett projektivt plan. Enligt definition 3.20 samt vårt påpekade efter sats 3.19, har vi också att det genom varje punkt ska gå fyra linjer.

Vi kan först notera att punkterna I och B måste sammanbindas med en linje. Då två linjer måste skära varandra i någon punkt för att uppfylla axiomen för projektiva plan, måste denna linje BI innehålla någon punkt från linjen $ADEK$ samt från $EFJM$. Vi vet också att två punkter endast får ligga på en gemensam linje. Då B redan är kolinjär med A, D samt E, får vi att K måste vara den punkt från linjen $ADEK$ som ligger på BI. Vi har också att B är kolinjär med E, F respektive J, vilket leder till att M måste ligga på BI. Vi har således att det måste finnas en linje $BIKM$ i vårt plan för att det ska vara projektivt.

Nu ser vi att punkterna I och J måste sammanbindas av en linje IJ. Genom samma resonemang som förut vet vi att IJ måste vara incident med $ADEK$ samt $BCEH$. Vi har att I redan är kolinjär med A, E respektive K, vilket ger oss att $D \in IJ$. Vi har också att I redan är kolinjär med B, C respektive E, vilket leder till att $H \in IJ$. Vi har nu lagt till en andra linje $DHIJ$.

För att lägga till den tredje linjen noterar vi att A och M måste definiera en linje AM. På samma sätt som ovan har vi att AM måste vara incident med $BCEH$ samt $EGIL$. A är redan kolinjär med E, L samt B, alltså måste $H \in AM$. Vi har också att A är kolinjär med E, I respektive G, vilket implicerar att L måste ligga på linjen. Den tredje linjen som vi lägger till är således $AHLM$.

Då vi ska lägga till den sista linjen räcker det att leta efter punkter som bara ligger på tre linjer. De enda punkterna som uppfyller detta är C, J, K och L, vilka då får utgöra planets trettonde linje. Vi ser också att inga två av dessa punkter är kolinjära med varandra sedan tidigare.

Vi är nu klara med att konstruera ett plan av ordning 3. Notera att varje steg av denna konstruktion gjordes utan några val mellan alternativa definitioner. Detta leder fram till följade sats.

Sats 5.11. *Det finns ett projektivt plan av ordning 3 och alla plan av ordning 3 är isomorfa.*

Vi får följande incidensmatris för Galoisplanet av ordning 3:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M \end{matrix} \\
\begin{matrix} AFCI \\ AJGB \\ AKDE \\ KFHG \\ JFME \\ BHCE \\ BFDL \\ DMCG \\ LEIG \\ CJKL \\ AHLM \\ DHIJ \\ BIKM \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Ur denna matris kan vi bekräfta att axiomen för de projektiva planen håller. Vi har redan sett att det finns fyra icke-kolinjära punkter i planet samt så vet vi att en linje innehåller minst två punkter. För att se att exakt en linje förbinder två punkter väljer vi de två kolonner som motsvarar punkterna och ser att det finns en och endast en rad där båda kolonner har ettor. För att se att två linjer skär varandra i exakt en punkt väljer vi de två rader som motsvarar linjerna och ser att det finns en och endast en kolonn där båda raderna har ettor.

5.3 Minikvaternionplanet Ω

Målet med denna sektion är att konstruera det projektiva planet Ω utifrån vår närkropp minikvaternionsystemet $\mathcal{M}$ (se avsnitt 2.3), samt undersöka detta. Vi börjar med att betrakta de 81 punkterna i mängden $\{(x,y); x,y \in \mathcal{M}\}$ samt linjerna som ges av

$$\begin{aligned} y &= x \times \mu + \kappa, && (\mu, \kappa \in \mathcal{M}), \\ x &= \lambda, && (\lambda \in \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Vi får 90 linjer då det finns nio stycken på formen $x = \lambda$ och 81 stycken på formen $y = x \times \mu + \kappa$. Hädanefter kommer vi att beteckna multiplikationen $\times$ med vanlig juxtaposition.

Sats 5.12. *För punkterna och linjerna definierade ovan gäller att*

(i) givet två distinkta punkter så finns det en och endast en linje som går genom båda dessa, och

(ii) givet en linje l och en punkt $P \notin l$ så existerar det en unik linje $m \neq l$ sådan att $P \in m$ och $l \cap m = \emptyset$.

Bevis. (i) Låt $P_1 = (x_1, y_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2)$ vara våra givna punkter. Vi börjar med att anta att $x_1 = x_2$. Då har vi att linjen $x = x_1$ går genom båda punkterna. En linje på formen $y = x\mu + \kappa$ kan inte sammanbinda punkterna då ett x-värde (x_1) genererar ett entydigt y-värde, men våra punkter har två olika y-värden. Således är $x = x_1$ den unika linjen genom P_1 och P_2.

Antag nu istället att $x_1 \neq x_2$. Punkterna P_1 och P_2 ligger då på en linje $y = x\mu + \kappa$ om och endast om $y_1 = x_1\mu + \kappa$ *och* $y_2 = x_2\mu + \kappa$. Detta leder oss till

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= x_1\mu + \kappa - x_2\mu - \kappa && \iff \text{(kommutativ addition)} \\ y_1 - y_2 &= x_1\mu - x_2\mu && \iff \text{(högerdistibutivitet)} \\ y_1 - y_2 &= (x_1 - x_2)\mu && \iff \\ \mu &= (x_1 - x_2)^{-1}(y_1 - y_2), \end{aligned}$$

och vi ser således att μ är entydigt bestämt av punkterna P_1 och P_2. Vi har även att

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\mu + \kappa && \iff \\ \kappa &= x_1\mu - y_1 && \iff \\ \kappa &= x_1(x_1 - x_2)^{-1}(y_1 - y_2) - y_1, \end{aligned}$$

vilket visar att även κ är entydigt bestämd. Vi har även att det inte kan gå någon linje på formen $x = \lambda$ genom både P_1 och P_2 då dessa har olika x-värden. Således är det klart att alla par av punkter binds samman av exakt en linje.

(ii) Låt punkten P ges av $P = (p, q)$. Om linjen l är på formen $y = x\mu + \kappa$, och P inte ligger på denna, så måste det gälla att $q - p\mu \neq \kappa$. Vi låter då linjen m vara $y = x\mu + (q - p\mu)$. Vi har då att l och m inte skär varandra i någon punkt ty $x\mu + (q - p\mu) = x\mu + \kappa$ leder till att $q - p\mu = \kappa$, vilket strider mot vårt val av P. Denna linjen är unik då en linje på formen $x = \lambda$ alltid skär $y = x\mu + \kappa$ och då även en linje på formen $y = x\mu_2 + \kappa_2$ skär den förre om $\mu \neq \mu_2$.

Om linjen l är på formen $x = \lambda$ så låter vi linjen m vara $x = p$. Linjerna skär inte varandra då $p \neq \lambda$ (detta följer av att $P \notin l$). Denna linjen är unik då alla linjer på formen $y = x\mu + \kappa$ skär $x = \lambda$ i någon punkt.

□

Det finns tio parallellklasser i detta system; en klass för varje $\mu \in \mathcal{M}$ (vilket blir nio stycken) för linjerna på formen $y = x\mu + \kappa$, samt en för linjerna på formen $x = \lambda$. Vi lägger nu till en punkt (μ) för varje parallellklass bestående av linjerna $y = x\mu + \kappa$, incident med alla linjer däri, samt en punkt Y för parallellklassen $x = \lambda$, incident med alla linjer på den formen. Vi lägger även till en linje l_∞ som går genom dessa punkter. Således har vi fått ett projektivt plan av ordning 9, det så kallade minikvaternionplanet, som betecknas med Ω.

Det är viktigt att påpeka att vi nu konstruerat minikvaternionplanet utifrån en *närkropp*, som inte var en kropp. Detta betyder att det existerar projektiva plan som inte är kroppsplan.

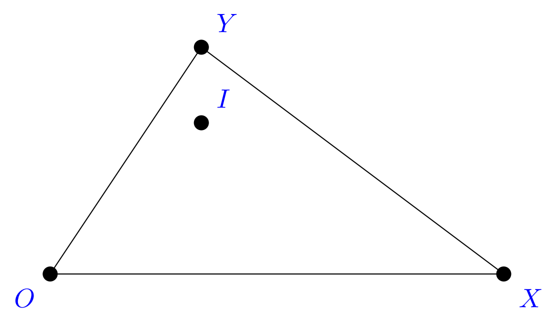
6 Koordinatisering av projektiva plan

I detta kapitel utgår vi från ett givet projektivt plan och visar hur man kan ge det koordinater från elementen i en mängd R. Metoden vi använder här kommer från [HP] och är inte den enda metoden som används i detta sammanhang. Efter presentationen av koordinatiseringsmetoden kommer vi introducera den nödvändiga teoretiska ramen för att visa att ett ändligt desargiskt projektivt plan ger upphov till en ändlig kropp, det vill säga en Galoiskropp.

6.1 Introduktion av koordinater

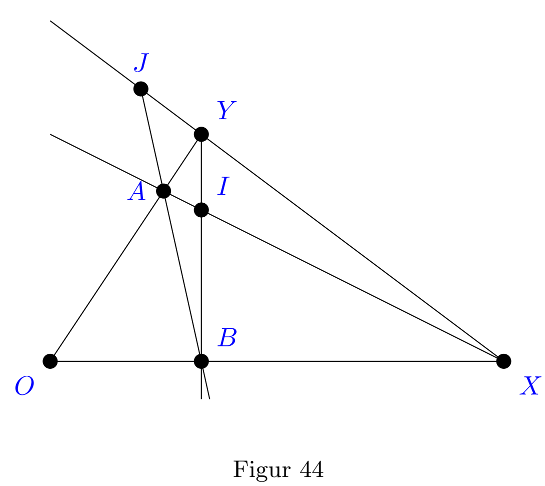
Vi har tidigare sett hur man axiomatiskt kan konstruera ett projektivt plan från en mängd punkter och linjer. Nu kommer vi att göra tvärtom. Vi utgår alltså från att vi har ett projektivt plan och introducerar en metod för att koordinatisera planet.

Låt $\mathbb{P}$ vara ett ändligt projektivt plan. Enligt lemma 3.14 innehåller $\mathbb{P}$ en fyrsiding. Låt O, X, Y och I vara hörnpunkterna i denna. Då bildar punkterna O, X och Y en triangel och vi har figur 43.



Figur 43

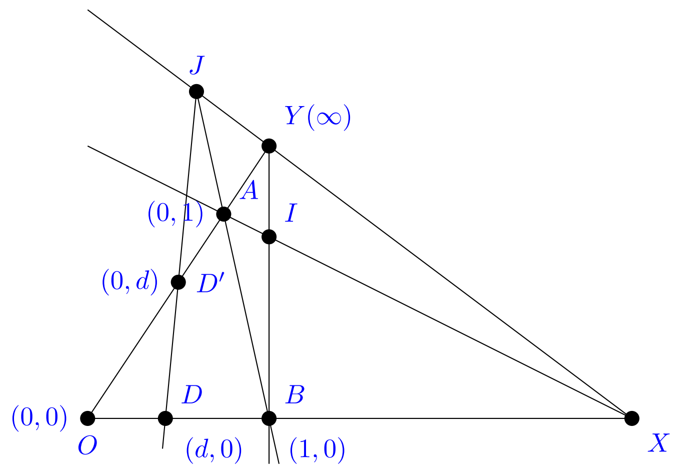
Nu definierar vi linjerna $l_1 := OY$, $l_2 := OX$ och $l_\infty := XY$. Vi har då det projektiva planet $\mathbb{P}^{l_\infty}$. Genom att komplettera figuren med de linjer som fattas kan vi identifiera ytterligare tre punkter, nämligen $A = XI \cap l_1$, $B = YI \cap l_2$ och $J = AB \cap l_\infty$. Vi kan då komplettera figuren ovan så att vi får följande figur:



Figur 44

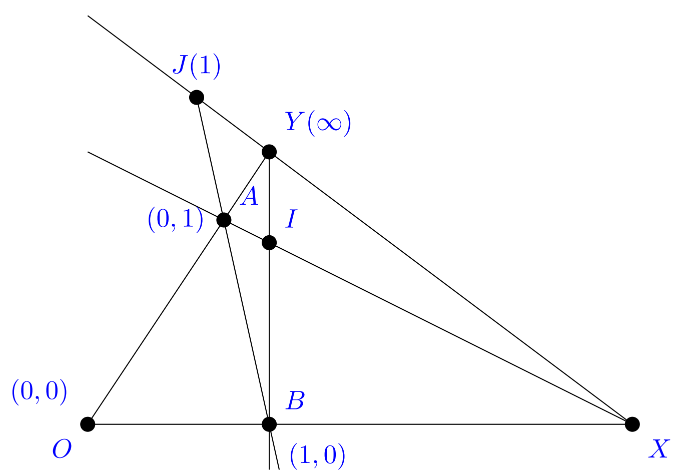
Låt nu R vara en mängd av symboler sådan att $0 \in R$, $1 \in R$, $\infty \notin R$ och $0 \neq 1$. Då kan vi med hjälp av elementen i R och den extra symbolen "(∞)" ge koordinater till planet i figur 44.

Vi börjar med att tilldela linjen l_1 godtyckliga punkter ur R. Således sätter vi $O := (0)$ och $A := (1)$ och tilldelar de andra punkterna på l_1 godtyckliga $c \in R$, det vill säga $c \in R$ betecknar punkten $C \in l_1$. Vi har nu något som är analogt med den välbekanta y-axel i ett koordinatsystem i det euklidiska planet. För att konstruera motsvarande x-axel går vi till väga på samma sätt. Vi tilldelar $0 \in R$ till punkten O och $1 \in R$ till punkten B. Vi har då att $O = (0, 0)$ och $B = (1, 0)$. För de andra punkterna på l_2 har vi att om $D \in l_2$ så att $D \neq X$ och om $D' = JD \cap l_1$ så sätter vi $D' = (0, d)$ och $D = (d, 0)$ där $d \in R$. Vi illustrera detta med följande figur:



Figur 45

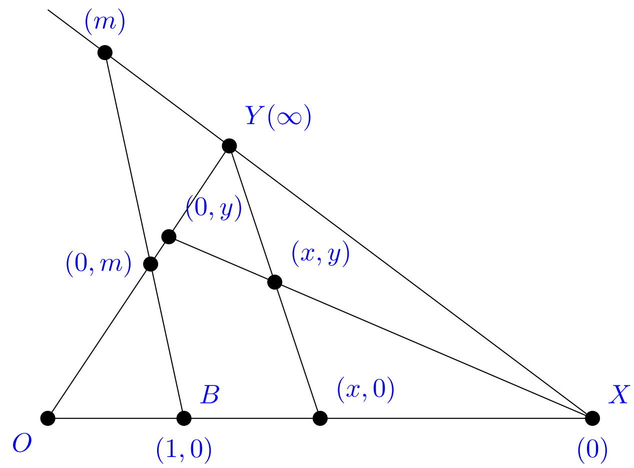
Vi har nu för alla punkter på $M \in L_\infty$ sådana att $M \neq Y$ att om linjen som förbinder M med $(1, 0)$ korsar l_1 i $(0, m)$ så tilldelar vi M koordinaten (m). Detta innebär att vi då tilldelar J koordinaten (1).



Figur 46

Anm. Observera att vi i figur 46 inte ritat in alla linjerna i det projektiva planet. Figuren tjänar som ett exempel, varför vi utelämnar exempelvis linjen JI.

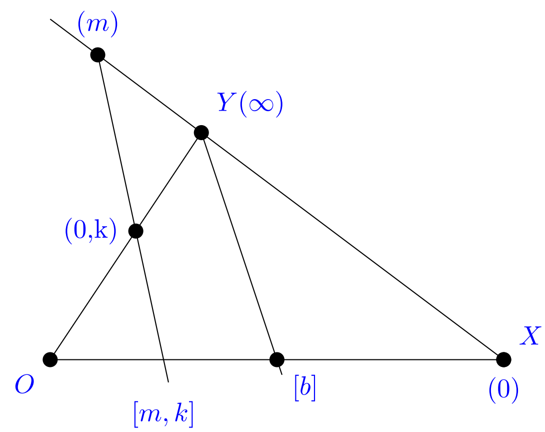
Vidare har vi för alla punkter $E \notin l_\infty$, sådana att om $XE \cap l_1 = (0, y)$ och $YE \cap l_2 = (x, 0)$ så tilldelar vi E koordinaten (x, y) där $x, y \in R$. Slutligen sätter vi $X := (0)$ och $Y := (\infty)$ och på detta sätt har vi tilldelat unika koordinter (x, y), där $x, y \in R$, till alla punkter i $\mathbb{P}^{l_\infty}$. Följande figur illustrerar metoden för att koordinatisera punkterna i $\mathbb{P}$:



Figur 47

Vi har nu tilldelat koordinater till alla punkter i $\mathbb{P}^{l_\infty}$ och från diskussionen ovan framgår det att tilldelningen endast beror på punkterna O, X, Y och I samt det sätt på vilket vi tilldelade element ur R till punkter på $l_1 \setminus Y$. Eftersom alla projektiva plan innehåller en fyrhörning vars hörn kan definieras vara just dessa punkter, gäller denna tilldelning av koordinater till punkter alla projektiva plan. Speciellt gäller det då alla ändliga projektiva plan.

Innan vi kan börja införa algebraiska begrepp och operationer ska vi även tilldela koordinater till linjerna i ett projektivt plan $\mathbb{P}$. Om $l \in \mathbb{P}$ är en godtycklig linje sådan att $l \cap \ l_\infty = (m)$ och $l \cap l_1 = (0,k)$ så sätter vi $l := [m,k]$. Om $Y \in l$ men $l \neq l_\infty$ så sätter vi $l := [k]$ där $k \in R$ bestäms av $l \cap l_2 = (k,0)$. Slutligen låter vi $l_\infty := [\infty]$. På detta sätt har även alla linjer i ett projektiv plan $\mathbb{P}$ tilldelats unika koordinater, vilket illustreras av figuren nedan.



Figur 48

Denna diskussion har alltså lett oss fram till följande:

Definition 6.1. I ett (ändligt) projektivt plan har vi att (x,y), (x) och (∞) betecknar en *punkts* koordinater medan $[a,b]$, $[a]$ och $[\infty]$ betecknar en *linjes* koordinater, där a, b, x, y är element i en ring R sådan att $0, 1 \in R$, $0 \neq 1$ medan $\infty \notin R$.

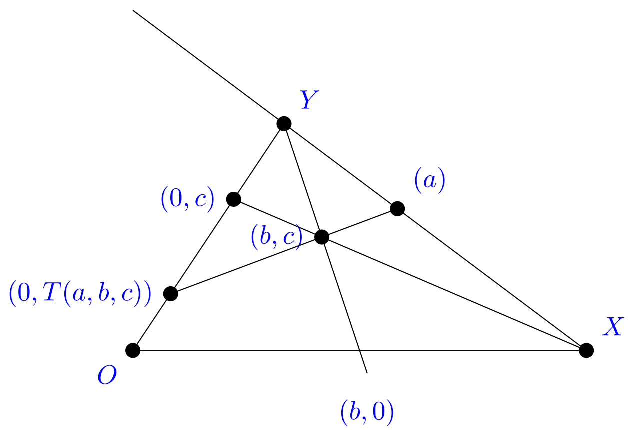
Denna tilldelning av koordinater för punkter och linjer i projektiva plan betyder att vi kan definiera algebraiska metoder för att undersöka strukturen av ett projektivt plan.

6.2 Algebraiska operatorer

Utrustade med koordinater för vårt givna projektiva plan kan vi då definiera en ternär operator.

Definition 6.2. Låt R vara en godtycklig mängd. Vi definierar operatorn T som $T : R^3 \to R$, $T(a, b, c) = k$ där $a, b, c, k \in R$. Då sägs (R, T) vara en *ternär ring.*

Om $\mathbb{P}$ är ett projektivt plan till vilket vi har tilldelat koordinater från en mängd R enligt beskrivningen i föregående avsnitt, så kan vi från incidensrelationerna i $\mathbb{P}$ göra följande definition: om $a, b, c \in R$ så är $T(a, b, c) = k$ om och endast om $(b, c) \in [a, k]$. Vi har då att $(0, k)$ ligger på skärningen mellan l_1 och linjen som förbinder (a) med (b, c), vilket innebär att T är entydigt bestämd och därmed väldefinierad.



Figur 49

Med denna definition av (R, T) har vi då följande resultat:

Sats 6.3. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett projektivt plan vars koordinater givits från en mängd R sådan att $0 \in R$, $1 \in R$ och $0 \neq 1$. Om $T : R^3 \to R$ enligt $T(a, b, c) = k$ om och endast om $(b, c) \in [a, k]$ så har T följande egenskaper:*

(A) För alla $a, b, c \in R$ gäller det att $T(a, 0, c) = T(0, b, c) = c$.

(B) För alla $a \in R$ gäller det att $T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a$.

(C) Om $a, b, c, d \in R$ och $a \neq c$ så finns ett unikt $x \in R$ sådant att $T(x, a, b) = T(x, c, d)$.

(D) Om $a, b, c \in R$ så finns ett unikt $x \in R$ sådant att $T(a, b, x) = c$.

(E) Om $a, b, c, d \in R$ och $a \neq c$ så finns ett unikt ordnat par $(x, y) \in R$ sådant att $T(a, x, y) = b$ och $T(c, x, y) = d$.

Bevis. (A) Antag att $T(a, 0, c) = k$. Då har vi att $(0, c) \in [a, k]$, det vill säga $(0, c)$ ligger på linjen som binder samman (a) med $(0, k)$. Men enligt definitionen av projektiva plan kan denna linje bara korsa l_1 i en unik punkt. Alltså är $(0, c) = (0, k)$, det vill säga att $c = k$ och $T(a, 0, c) = c$.

Antag att $T(0, b, c) = k$. Då har vi att (b, c) ligger på linjen som förbinder (0) med $(0, k)$. Men (b, c) ligger i snittet mellan linjerna som förbinder (0) med $(0, c)$ och (∞) med (b, c). Enligt definitionen av projektiva plan består snittet av två linjer av en unik punkt, vilket ger att linjen som förbinder (0) med (b, c) måste korsa l_1 i en unik punkt, varför vi då har att $c = k$, det vill säga $(0, c) = (0, k)$ och $T(0, b, c) = c$. Alltså har vi att $T(a, 0, c) = T(0, b, c) = c$, för alla $a, b, c \in R$.

(B) Antag att $T(a,1,0) = k$. Då har vi att $(1,0) \in [a,k]$, det vill säga $(1,0)$ är incident med linjen som förbinder (a) med $(0,k)$. Men (a) är snittet av l_∞ med linjen som förbinder $(1,0)$ och $(0,a)$. Eftersom linjen som förbinder $(1,0)$ med (a) korsar l_1 i en unik punkt har vi att $(0,k) = (0,a)$, det vill säga att $k = a$ så att $T(a,1,0) = a$.

Antag att $T(1,a,0) = k$. Då är $(a,0)$ incident med linjen som förbinder (1) med $(0,k)$. Men $(a,0)$ är snittet av l_2 med linjen som förbinder (1) med $(0,a)$. Därför har vi att $(0,a) = (0,k)$ och $T(1,a,0) = a$. Alltså har vi att $T(a,1,0) = T(1,a,0) = a$ gäller för alla $a \in R$.

(C) Låt $a,b,c,d \in R$ så att $a \neq c$. Då finns en unik linje som förbinder (a,b) med (c,d). Eftersom $a \neq c$ så kommer denna linje inte att passera genom (∞), varför linjen då kommer att korsa l_∞ i en unik punkt (m), där $m \in R$. Om denna linje även korsar l_1 i $(0,k)$ så har vi att $T(m,a,b) = T(m,c,d) = k$. Eftersom (m) är unik så finns då ett unikt $x \in R$ sådant att $T(x,a,b) = T(x,c,d)$.

(D) Vi har att $T(a,b,x) = c$ om och endast om (b,x) är på linjen som förbinder (a) med $(0,c)$. Men för alla $x \in R$ är (b,x) på linjen som förbinder (∞) med $(b,0)$. Dessa två linjer är incidenta i en unik punkt, varför det då måste finnas ett unikt $x \in R$ så att $T(a,b,x) = d$.

(E) Vi har att $T(a,x,y) = b$ om och endast om $(b,x) \in [a,b]$, och $T(c,x,y) = d$ om och endast om $(x,y) \in [c,d]$. Men $[a,b] \cap [c,d]$ består av en unik punkt som inte ligger på l_∞ eftersom $a \neq c$. Därför finns det ett unikt ordnat par $x,y \in R$ sådant att $T(a,x,y) = b$ och $T(c,x,y) = d$.

$\square$

Denna sats ger följande definiton:

Definition 6.4. En ternär ring (R,T) som uppfyller alla villkoren i sats 6.3 sägs vara en *planär ternär ring*, som även förkortas till *PTR*.

Följande sats bestämmer incidensrelationerna av ett projektivt plan $\mathbb{P}$ i termer av koordinater ur R tillsammans med den ternära operatorn T.

Sats 6.5. *Låt (R,T) vara en PTR. Då är $\mathbb{P}$ ett projektivt plan om punkterna i $\mathbb{P}$ är ordnade par (x,y), där $x,y \in R$, tillsammans med element som har formen (x) och (∞), där $x \in R$ och $\infty \notin R$. Linjer representeras då av ordnade par $[m,k]$, där $m,k \in R$, tillsammans med element på formen $[m]$ och $[\infty]$ där $m \in R$ och $\infty \notin R$. Incidens definieras då enligt*

(i) $(x,y) \in [m,k] \Leftrightarrow T(m,x,y) = k$,

(ii) $(x,y) \in [k] \Leftrightarrow x = k$,

(iii) $(x) \in [m,k] \Leftrightarrow x = m$,

(iv) $(x) \in [\infty]$*, för alla* $x \in R$ *och* $(\infty) \in [k]$*, för alla* $k \in R$,

(v) $(\infty) \in [\infty]$.

Anm. Vi observerar att incidensrelationen i 6.3 respekterar koordinatiseringsprocessen vi beskrev i föregående kapitel.

Bevis. Vi börjar med att visa att två godtyckliga punkter är incidenta med en unik linje. (C) i sats 6.3 ger att det för alla $b,d \in R$ finns ett unikt $m \in R$ sådant att $T(m,a,b) = T(m,c,d)$. Om $a \neq c$ ligger då punkterna (a,b) och (c,d) på linjen $[m, T(m,a,b)]$. Enligt (ii) har vi att (a,b) och (a,d) ligger på linjen $[a]$. Så om (a,c) och (a,d) ligger på $[m,k]$, så har vi att $T(m,a,b) = k = T(m,a,d)$. Men detta är en motsägelse till sats 6.3 (D). Således har vi visat att två godtyckliga distinkta punkter på formen (a,b), där $a,b \in R$, förbinds av en unik linje l sådan att $l \neq [\infty]$.

Låt $(m) \in [\infty]$ där $(m) \neq (\infty)$ och låt $(a,b) \notin [\infty]$. Alla linjer genom (m) är antigen $[\infty]$ eller så kan de skrivas som $[m,k]$ för något $k \in R$. Linjen $[m,k]$ passerar genom (a,b) om och endast om $T(m,a,b) = k$. Eftersom T är en ternär operator är den entydigt bestämd av m, a och b, så då är $[m, T(m,a,b)]$ den unika linjen i $\mathbb{P}$ som innehåller (m) och (a,b). Men eftersom det för alla linjer $l \neq [\infty]$ sådana att $(\infty) \in l$ gäller att $l = [k]$, där $k \in R$, har vi att den unika linjen i $\mathbb{P}$ som förbinder (∞) och (a,b) är $[a]$. Vidare har vi att punkterna (m_1) och (m_2) är incidenta med $[\infty]$ eftersom bara punkter på $[\infty]$ skrivs som (m), $m \in R$. Därmed har vi visat att två godtyckliga distinkta punkter i $\mathbb{P}$ är incidenta med en unik linje.

För att visa att två linjer är incidenta med en unik punkt betraktar vi de två linjerna $[m_1, k_1]$ och $[m_2, k_2]$. Om $m_1 \neq m_2$ har vi enligt 6.3 (E) att det finns ett unikt ordnat par (a,b), där $a, b \in R$, sådant att $T(m_1, a, b) = k_1$ och $T(m_2, a, b) = k_2$. Detta innebär att $(a,b) \in [m_1, k_1]$ och $(a,b) \in [m_2, k_2]$. Om istället $m_1 = m_2$ så är $(m_1) \in [m_1, k_1]$ och $(m_1) \in [m_2, k_2]$, vilket innebär att alla par av distinkta linjer är incidenta med en punkt.

Enligt koordinatiseringsmetoden vi beskrivit ovan har vi att alla linjer $[m,k]$ korsar $[\infty]$ i punkten (m), så för att visa att linjer av typen $[m,k]$ även korsar alla andra linjer i $\mathbb{P}$ behöver vi endast betrakta snittet $[m,k] \cap [h]$ där $h \neq m$. Vi har att $[m,k] \cap [h] = (h, h')$ där existensen av h' garanteras av 6.3 (D), och h' fås med hjälp av $T(m,h,h') = k$. Men eftersom alla par av linjer $[m_1]$, $[m_2]$ är incidenta med (∞) har vi att alla par av godtyckliga, distinkta linjer i $\mathbb{P}$ är incidenta med en unik punkt i $\mathbb{P}$.

För att slutföra beviset behöver vi visa att det finns en icke-degenererad fyrhörning i $\mathbb{P}$. Låt $A = (0)$, $B = (\infty)$, $C = (0,0)$ och $D = (1,1)$. Då är $AB = [\infty]$, $BC = [0]$ och $CA = [0,0]$. Alltså är $ABCD$ en icke-degenererad fyrhörning.

Vi har således visat att $\mathbb{P}$ i sats 6.5 uppfyller axiomen i definitionen av projektiva plan och därmed är ett projektivt plan. $\square$

6.3 Planära ternära ringars algebraiska egenskaper

För att kunna uppnå målet med detta kapitel ska vi utforska de planära ternära ringarna. Vi börjar med att göra följande definition:

Definition 6.6. En mängd $G \neq \emptyset$ tillsammans med en binär operation $\cdot$ sägs vara en *loop* om:

(i) $a \cdot x = b$ har en entydig lösning i x för alla $a, b \in R$,

(ii) $y \cdot a = b$ har en entydig lösning i y för alla $a, b \in R$, och

(iii) det finns ett element $e \in G$ sådant att $e \cdot x = x \cdot e = x$ för alla $x \in G$. Detta element kallas för *identitetselementet* till G.

Följande exempel är taget från vanliga euklidiska kroppsplan.

Exempel 6.7. Givet en lutning a och ett nollställe $(b, 0)$ har vi för den välkända linjens ekvation $y = kx + m$ att

$$0 = ab + m \Leftrightarrow m = -ab.$$

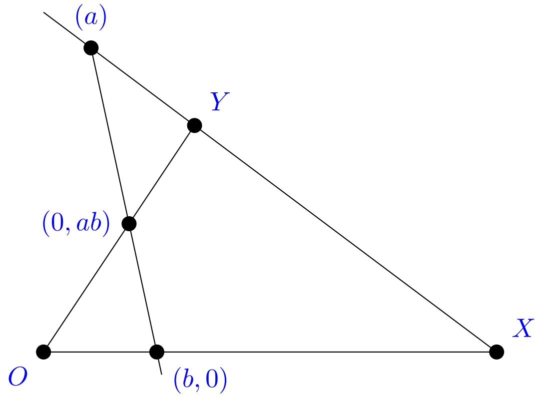
Givet en lutning $k = 1$ och en godtycklig punkt (a,b) så har vi för $y = kx + m$ att

$$b = 1 \cdot a + m \Leftrightarrow m = b - a.$$

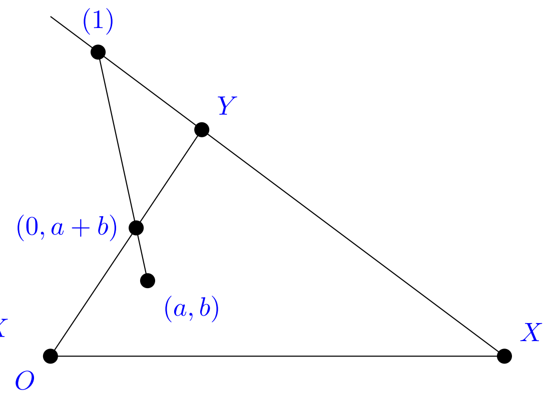
Med exempel 6.7 som motiverande exempel kan vi nu att lägga till de binära operationerna addition och multiplikation till en PTR på ett sådant sätt att $(R, +)$ och $(R^*, \cdot)$, där $R^* = R \setminus \{0\}$, är loopar. Detta gör vi genom följande

Definition 6.8. Låt (R, T) vara en PTR. Då definieras additonen som $a + b := T(1, a, b)$ och multiplikationen som $a \cdot b := ab := T(a, b, 0)$.

Eftersom T är en ternär operator är både $a+b$ och ab entydigt bestämda. Följande figurer illustrerar multiplikationen och additionen:



Figur 50: Multiplikation i det projektiva planet.



Figur 51: Addition i det projektiva planet.

Denna definition av addition och multiplikation är alltså inte slumpmässig, utan är gjord för att stämma överrens med addition och multiplikation i kroppsplan som har ett Cartesiskt koordinatsystem. Med denna multiplikation och addition har vi följande resultat:

Sats 6.9. *Om* (R, T) *är en PTR så är* $(R, +)$ *och* $(R^*, \cdot)$*, där* $R^* = R \setminus \{0\}$*, loopar med* 0 *respektive* 1 *som identitetselement.*

Bevis. (i) Addition:

För alla $a \in R$ gäller det att $0 + a = T(1, 0, a) = a$ och $a + 0 = T(1, a, 0) = a$ enligt sats 6.3 (A), (B). Alltså är 0 identitetselementet för $(R, +)$.

Ekvationen $a + x = b$ har en entydig lösning för x ty $T(1, a, x) = b$ har en entydig lösning för x enligt sats 6.3(D). Ekvationen $x + a = b$ har en entydig lösning för x om och endast om T(1,a,x)=b har en entydig lösning för x. Från sats 6.3(E) har vi att det finns ett unikt ordnat par (x, y) sådant att $T(1, x, y) = b$ och $T(0, x, y) = a$. Men sats 6.3$(A) \Rightarrow T(0, x, y) = a$ har lösningen $y = a$. Alltså finns det ett unikt x sådant att $T(1, x, a) = b$. Därmed är $(R, +)$ en loop.

(ii) Multiplikation:

Anta $xy = 0$ och $y \neq 0$. Betrakta ekvationen $T(u, y, 0) = T(u, 0, 0)$. Enligt sats 6.3 (C) finns det en entydig lösning för u. Eftersom $u = 0$ är en lösning måste den enda lösningen till $T(u, y, 0) = T(u, 0, 0)$ vara $u = 0$. Men $xy = 0$ leder till att $T(x, y, 0) = 0$ och $T(x, 0, 0) = 0$. Alltså är $x = 0$, vilket visar att R^* är sluten under multiplikation.

Ekvationen $ax = b$ har en entydig lösning för x om och endast om $T(a, x, 0) = b$ har en entydig lösning för x. Sats 6.3 (E) ger att det finns ett unikt ordnat par (x, y) sådant att $T(a, x, y) = b$ och $T(0, x, y) = 0$. Eftersom $T(0, x, y) = 0$ leder till att $y = 0$ så har $T(a, x, 0) = b$ en entydig lösning för x.

Ekvationen $xa = b$ har en entydig lösning för x om och endast om $T(x, u, 0) = b$ har en entydig lösning för x. Enligt sats 6.3 (C) har $T(x, a, 0) = T(x, 0, b)$ en entydig lösning för x eftersom $a \neq 0$ och enligt 6.3 (A) är $T(x, 0, b) = b$ för alla $x \in R$. Detta ger att $T(x, a, 0) = b$ har en entydig lösning i x. Alltså är $(R^*, \cdot)$ en loop.

□

Följande egenskap är viktig och behövs för att vi ska kunna bevisa den fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri.

Definition 6.10. En planär ternär ring (R, T) sägs vara *linjär* om $T(a, b, c) = ab + c$ för alla $a, b, c \in R$.

Genom följande exempel illustrerar vi att ett desargiskt plan över en godtycklig skevkropp K kan koordinatiseras av en linjär planär ternär ring (K, T). Om det desargiska planet är ändligt så finns det ett ändligt antal linjer och punkter, varför det då omedelbart följer att skevkroppen är ändlig. Men enligt Wedderburns lilla sats är så alla ändliga skevkroppar ändliga kroppar och då följer det att exemplet även gäller för kroppsplan som ju är föremålet för detta arbete.

Exempel 6.11. Betrakta ett desargiskt projektivt plan $\mathbb{P}$ vars punkter är ordnade tripplar $(x, y, z) \in K^3$ där $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ för alla $x, y, z \in K$ med $(x, y, z) = (xk, yk, zk)$ och $K \ni k \neq 0$. Linjerna är ordnade tripplar $[l, m, n] \neq [0, 0, 0]$ där $l, m, n \in K$ med $[l, m, n] = [kl, km, kn]$ och $k \neq 0$. Incidensrelationen ges av $(x, y, z) \in [l, m, n]$ om och endast om $lx + my + nz = 0$. Vi inför beteckningen att om (x, y) och (m, n) är punkter i $\mathbb{P}$ så är $(x, y)(m, n)$ linjen som förbinder (x, y) med (m, n), där $x, y, m, n \in K$.

Låt punkterna i det desargiska projektiva planat vara givna av

$$\begin{aligned} [\infty] &= [0, 0, 1], \\ (\infty) &= (0, 1, 0), \\ (0) &= (1, 0, 0), \\ (0, 0) &= (0, 0, 1), \\ (1, 1) &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Vi låter $k \in K$ vara elementen i den planära ternära ringen och låter alla $k \in K$ representera punkterna $(0, k, 1)$. För punkten $(1, 0)$ har vi att $(1, 0) = (0, 0)(0) \cap (1, 1)(\infty)$, vilket innebär att det är punkten $(1, 0, 1)$, ty $(1, 0, 1) = [0, 1, 0] \cap [-1, 0, 1]$. Vidare har vi att $(1) = [\infty] \cap (1, 0)(0, 1)$, det vill säga att $(1) = (1, -1, 0)$, där $(1, -1, 0) = [0, 0, 1] \cap [-1, -1, 1]$. Nu ger liknande argumentation att $(a, 0) = (a, 0, 1)$ eftersom $(a, 0)$ är kolinjär med $(0, a)$ och (1). Således har vi då att $(a, b) = (a, b, 1)$. På samma sätt är $(m) = (1, -m, 0)$. Dualitetsprincipen ger nu att $[m, k] = [1, 0, k]$.

Härnäst ska vi bestämma den ternära operationen T. Låt $\oplus$ vara den additiva operationen för (K, T) och $\odot$ vara den multiplikativa operationen för (K, T). Då har vi för alla $a, b \in K$ att $a \oplus b = T(1, a, b)$. Från definitionen av T i sats 6.3 har vi att $T(1, a, b) = k$ om och endast om $(a, b) \in [1, k]$, det vill säga att $T(1, a, b) = k$ om och endast om $(a, b, 1) \in [1, 1, -k]$. Detta ger nu att $a + b - k = 0$ så att $a + b = k$, vilket alltså visar att $\oplus$ är detsamma som additionen för skevkroppen K.

För $\odot$ har vi nu att $a \odot b = T(a, b, 0)$ för alla $a, b \in K$. Från definitionen av T i sats 6.3 har vi att $T(a, b, 0) = k$ om och endast om $(b, 0) \in [a, k]$, det vill säga att $T(a, b, 0) = k$ om och endast om $(b, 0, 1) \in [a, 1, -k]$. Då har vi att $ab + 0 \cdot 1 - k = 0$, så att $ab = k$. Detta visar att $\odot$ är detsamma som multiplikationen för skevkroppen K.

Slutligen ska vi bestämma $T(m, x, y)$. Från definitionen av T i 6.3 har vi att $T(m, x, y) = k$ om och endast om $(x, y) \in [m, k]$. Detta ger nu att $mx + y - k = 0$ så att $mx + y = k$. Då har vi att $T(m, x, y) = mx + y$, det vill säga $T(m, x, y) = m \odot x \oplus y$, vilket visar att (K, T) är linjär enligt definition 6.10.

Exemplet visar alltså att ett ändligt projektivt plan kan koordinatiseras av en linjär PTR. Följande sats ger de nödvändiga och tillräckliga villkoren för att en PTR som koordinatiserar ett projektivt plan $\mathbb{P}$ ska vara linjär.

Sats 6.12. *Antag att (R, T) är en PTR. Då är (R, T) linjär om och endast om två trianglar, perspektiva från (∞) och sådana att*

- *båda har något hörn på $[0]$ och*

- *de två paren av sidor som innehåller punkter från $[0]$ möts på $[\infty]$,*

har egenskapen att en av de tre sidorna passerar genom (0) om och endast om sista sidan passerar genom (0).

Bevis. Låt $A_1B_1C_1$ och $A_2B_2C_2$ vara de två trianglarna i hypotesen sådana att A_1A_2 är linjen $x = 0$, B_1B_2 är $x = u$ och C_1C_2 är $x = v$. Låt $C_3 = A_1B_1 \cap A_2B_2$ vara (m), $B_3 = C_1A_1 \cap C_2A_2$ vara (n) och låt $B_1C_1 \cap [\infty]$ vara (0). Vidare har vi att $A_1 = (0, a)$, $A_2 = (0, d)$, $B_1 = (u, b)$ och $B_2 = (u, c)$. Nu har vi att $C_1 = (v, b)$ ty $C_1 = C_1C_2 \cap (0)B_1$. Om vi låter $C_2 = (v, f)$ har vi att konfigurationen i satsen implicerar att $v = f$.

(i) Antag att (R,T) är linjär. Eftersom A_1, B_1 och C_3 är kolinjära så är $mu+b=a$ och eftersom A_1, C_1 och B_3 är kolinjära så är $nv+b=a$. Men eftersom $(R,+)$ är en loop så har ekvationen $x+b=a$ en entydig lösning, så alltså är $mu=nv$. På samma sätt har vi att $mu+c=nv+f=d$, ty A_2, B_2 och C_3 är kolinjära. Men $nv=mu \Rightarrow mu+c=mu+f=d \Rightarrow c=f$ ty $(R,+)$ är en loop.

(ii) Antag att $c=f$. Med samma mängd av kolinjära punkter som i (i) har vi att

$$T(m,u,b)=T(u,v,b)=a \tag{4}$$

och

$$T(m,u,c)=T(n,v,c)=d. \tag{5}$$

Ekvationerna 4 och 5 måste hålla för godtyckliga m, u, b, n och c. Om vi i 5 låter $c=0$ och $n=1$ har vi att $mu=v=d$. Insättning i 4 ger att $T(m,u,b)=T(1,v,b)=v+b=mu+b$, det vill säga att (R,T) är linjär.

Därmed är beviset klart. □

6.4 Den additiva och multiplikativa egenskapen hos (R,T)

Härnäst ska vi undersöka den additiva strukturen och den multiplikativa strukturen av en linjär PTR. Vi vill utveckla ett teoretiskt ramverk som vi sedan använder i beviset av fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri. Vi börjar med att undersöka den additiva strukturen.

Sats 6.13. *(R,T) är en linjär PTR med associativ addition om och endast om $\mathbb{P}$ är $((\infty),[\infty])$-transitiv.*

Bevis. $(\Rightarrow)$: Antag att (R,T) är linjär med associativ addition. Om A och B är två distinkta punkter kolinjära med (∞), men ej incidenta med $[\infty]$, behöver vi konstruera en $((\infty),[\infty])$-elation $\alpha:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ sådan att $\alpha(A)=B$. Detta gör vi genom att välja en kollineation för $\mathbb{P}^{[\infty]}$ som fixerar alla linjer incidenta med (∞) och permuterar alla punkterna i $\mathbb{P}^{[\infty]}$ så att, $\alpha(A)=B$. Observera att α då kommer att permutera alla punkter i $\mathbb{P}$ som inte är incidenta med $[\infty]$, vilket kommer att göra $[\infty]$ till axeln i vår axiala kollineation. Och eftersom α fixerar alla linjer incidenta med (∞) har vi att denna punkt blir centrum för α.

Låt därför $A=(u,v)$. Då är $B=(u,w)$ för något $w\in R$ ty (∞), A och B är kolinjära. Nu har vi att det finns ett unikt $a\in R$ sådant att $w=v+a$ och $B=(u,v+a)$ ty $(R,+)$ är en loop. Så vi kan definiera en avbildning $\alpha_a:\mathbb{P}^{[\infty]}\to\mathbb{P}^{[\infty]}$ där $(x,y)\mapsto(x,y+z)$, $[m,k]\mapsto[m,k+a]$ och $[k]\mapsto[k]$. Vi ser att α_a är en injektiv avbildning som avbildar punkter i $\mathbb{P}^{[\infty]}$ på punkter i $\mathbb{P}^{[\infty]}$, och linjer i $\mathbb{P}^{[\infty]}$ på linjer i $\mathbb{P}^{[\infty]}$. Vi har även att α_a fixerar alla linjer på formen $[k]$, $k\in R$, och att $\alpha_a(A)=B$.

Nu har vi att om α_a är en kollineation av $\mathbb{P}^{[\infty]}$ så är α_a en kollineation av $\mathbb{P}$. Så för att bevisa satsen i denna riktningen behöver vi bara visa att α_a är en kollineation av $\mathbb{P}^{[\infty]}$. Detta är dock ekvivalent med att bevisa att α_a bevarar incidensrelationen.

Från definitionen av T i 6.3 har vi för $x,y,m,k\in R$ att $T(m,x,y)=k$ om och endast om $(x,y)\in[m,k]$, vilket är ekvivalent med att $mx+y=k$, eftersom (R,T) enligt antagande är linjär. Men då är $\alpha_a((x,y))\in\alpha_a([m,k])$ om och endast om $mx+(y+a)=k+a$. Eftersom additionen är associativ enligt antagande har vi således att $mx+(y+a)=(mx+y)+a$ och därför är $mx+(y+a)=k+a$ om och endast om $mx+y=k$. Vidare har vi att $(x,y)\in[k]$ om och endast om $x=k$, vilket ger att $\alpha_a((x,y))\in\alpha_a([k])$.

Detta visar att α_a är en kollineation av $\mathbb{P}^{[\infty]}$ och därmed även av $\mathbb{P}$. Denna kollineations centrum är (∞) och dess axel är $[\infty]$ och därmed har vi visat att $\mathbb{P}$ är $((\infty),[\infty])$-transitiv.

$(\Leftarrow)$: Antag att $\mathbb{P}$ är $((\infty),[\infty])$-transitiv. Då är $\mathbb{P}$ $((\infty),[\infty])$-desargiskt enligt sats 4.34. Sats 6.12 ger då att (R,T) är linjär. Då finns det för alla punkter $(0,a)\in[0]$ en $((\infty),[\infty])$-elation som avbildar $(0,0)$ på $(0,a)$. Vi låter θ_a beteckna denna elation. Då har vi för alla punkter (x,y) att $\theta_a((x,y))=(x,u)$ för något $u\in R$ sådant att u endast beror på y och a. Detta ger då att $\theta_a((x,y))=(x,\alpha_a(y))$, där $\alpha_a:R\to R$ är injektiv och $\alpha_a(0)=a$.

Vi har således att $\theta_a : R \to R$, $(x, y) \mapsto (x, \alpha_a(y))$, $(m) \mapsto (m)$ och $(\infty) \mapsto (\infty)$, vilket då är en fullständig beskrivning av verkan av α_a på punkterna i $\mathbb{P}$. Verkan av θ_a på linjerna i $\mathbb{P}$ ges av $\theta_a([m, k]) = [m, \alpha_a(k)]$, $[k] \mapsto [k]$ och $[\infty] \mapsto [\infty]$ eftersom $\theta_a((m)) = (m)$ och $\alpha_a((0, k)) = (0, \alpha_a(k))$.

Eftersom (R, T) är linjär och eftersom α_a bevarar incidensrelationen har vi att $mx+y = k$ om och endast om $mx + \alpha_a(y) = \alpha_a([k])$, det vill säga om och endast om

$$mx + \alpha_a(y) = \alpha_a(mx + y) \tag{6}$$

för alla $m, x, y \in R$. Med $y = 0$ och $m = 1$ har vi därför att

$$x + \alpha_a(0) = \alpha_a(x) = x + a. \tag{7}$$

Insättning av $\alpha_a(x) = x + a$ i 6 tillsammans med $m = 1$ ger att $x + (y + a) = (x + y) + a$ för alla $x, y, a \in R$, det vill säga att (R, T) har en associativ addition. Därmed har vi visat att (R, T) är linjär med associativ addition, vilket fullbordar beviset. □

Linjära planära ternära ringar med associativ addition är viktiga för vårt ändamål. Därför får de ett eget namn.

Definition 6.14. En *cartesisk grupp* är en linjär planär ternär ring vars addition är associativ.

Sats 6.15. *Låt (R, T) vara en cartesisk grupp. Då gäller det att (R, T) är vänsterdistributiv, det vill säga att $a(b + c) = ab + ac$ för alla $a, b, c \in R$, om och endast om $\mathbb{P}$ är $((\infty), [\infty])$-transitiv.*

Bevis. $(\Rightarrow)$: Antag att den vänsterdistributiva lagen håller för (R, T). Vi behöver konstruera en $((\infty), [\infty])$-elation som avbildar $(0, 0)$ på $(a, 0)$ för varje $a \in R$. Precis som i beviset för sats 6.13 behöver vi endast betrakta en lämplig kollineation av det affina planet $\mathbb{P}^{[\infty]}$. Vi definierar således $\alpha_a : \mathbb{P}^{[\infty]} \to \mathbb{P}^{[\infty]}$ genom $\alpha_a((x, y)) = (a + x, y)$, $[m, k] \mapsto [m, ma + k]$ och $[k] \mapsto [a + k]$. Denna konstruktion av α_a ger då att ingen av punkterna i $\mathbb{P}^{[\infty]}$ fixeras medan varje linje genom (0) fixeras. Precis som i beviset av 6.13 behöver vi nu bara visa att α_a bevarar incidensrelationen.

Vi har att (R, T) är linjär ty (R, T) är en cartesisk grupp enligt antagande. Vi har därför att $(x, y) \in [m, k]$ om och endast om $mx + y = k$, samt att $\alpha_a((x, y)) \in \alpha_a([m, k])$ om och endast om $m(a+x)+y = ma+k$. Vänsterdistributiviteten ger nu att $m(a+x) = ma+mx$ så att $m(a+x)+y = ma+mx+y$. Att (R, T) är en cartesisk grupp innebär enligt definition att additionen är associativitet. Alltså får vi att $m(a+x)+y = (ma+mx)+y = ma+(mx+y)$, där $ma + (mx + y) = ma + k$ om och endast om $mx + y = k$. Detta visar att α_a bevarar incidensrelationen och, enligt konstruktionen av α_a, så har vi att $\mathbb{P}$ är $((\infty), [\infty])$-transitiv.

$(\Leftarrow)$: Antag att $\mathbb{P}$ är $((\infty), [\infty])$-transitiv. För att se att den vänsterdistributiva lagen håller för (R, T) använder vi samma tillvägagångssätt som i beviset av sats 6.13. Vi definierar θ_a som en $((\infty), [\infty])$-elation sådan att $\theta_a((0, 0)) = (a, 0)$. Då har vi för alla $x, y \in R$ att $\theta_a((x, y)) = (\alpha_a(x), y)$ där $\alpha_a : R \to R$ är injektiv och $\alpha_a(0) = a$. Detta ger då en fullständig beskrivning av verkan av θ_a på punkterna i $\mathbb{P}^{[\infty]}$.

Låt nu $\theta_a([m, k]) = [m, h]$ för något $h \in R$. För att kunna bestämma verkan av θ_a på linjerna i $\mathbb{P}^{[\infty]}$ behöver vi bestämma h i termer av m, k och a. Eftersom $(0, k) \in [m, k]$ har vi att $\theta_a((0, k)) \in \theta_a([m, k])$, det vill säga att $(a, k) \in [m, h]$. Eftersom (R, T) är en cartesisk grupp så följer det att (R, T) är linjär, vilket leder till att $ma + k = h$ så att $\theta_a([m, k]) = [m, ma + k]$.

Nu har vi att punkten $(x, y) \in [m, k]$ om och endast om $\theta_a((x, y)) \in \theta_a([m, k])$. Men då har vi att $mx + y = k$ om och endast om $m\alpha_a(x) + y = ma + k$. Detta ger att $m\alpha_a(x) + y = ma + (mx + y) = (ma + mx) + y$, där den sista likheten ges av associativiteten för additionen av (R, T). Alltså har vi att

$$m\alpha_a(x) + y = (ma + mx) + y \tag{8}$$

för alla $m, x, y, a \in R$. Om vi låter $m = 1$ och $y = 0$ har vi att 8 blir

$$\alpha_a(x) = a + x. \tag{9}$$

Insättning av 9 i 8 ger

$$m(a+x)+y=(ma+mx)+y. \tag{10}$$

Nu har vi att $t+y=s+y \Leftarrow t=s$ eftersom $(R,+)$ är en loop. Så 10 ger att

$$m(a+x)=ma+mx, \tag{11}$$

det vill säga att (R,T) är vänsterdistributiv. $\square$

Cartesiska grupper som uppfyller sats 6.15 får ett specifikt namn.

Definition 6.16. En gartesisk grupp (R,T) för vilken den vänsterdistributiva lagen håller kallas för *kvasikropp.*

Att $(R,+)$ är en abelsk grupp är en viktig egenskap som vi behöver för att kunna bevisa fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri. För att bevisa att är en $(R,+)$ är en abelsk grupp behöver vi följande lemman.

Lemma 6.17. *$\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp om och endast om $\mathbb{P}$ är $([\infty],[\infty])$-transitivt.*

Bevis. $(\Rightarrow)$: Antag att $\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp. Detta innebär att (R,T) är en kvasikropp, vilket enligt definition innebär att (R,T) är en cartesisk grupp. Då är $\mathbb{P}$ $((0),[\infty])$-transitivt enligt sats 6.15. Att (R,T) är en cartesisk grupp innebär enligt definition att (R,T) är linjär och har associativ multiplikation. Då ger 6.13 att $\mathbb{P}$ även är $((\infty),[\infty])$-transitivt.

Vi har alltså att $\mathbb{P}$ är $((0),[\infty])$-transitivt och $((\infty),[\infty])$-transitivt. Från koordinatiseringsprocessen vi beskrivit tidigare vet vi att $(0)\neq(\infty)$ samt att $(0)\in[\infty]$ och $(\infty)\in[\infty]$. Alltså är $\mathbb{P}$ $([\infty],[\infty])$-transitivt enligt sats 4.22.

$(\Leftarrow)$: Antag att $\mathbb{P}$ är $([\infty],[\infty])$-transitivt. Vi ska se att $\mathbb{P}$ då kan koordinatiseras av en kvasikropp.

Från antagandet följer det att $\mathbb{P}$ är $(P,[\infty])$-transitivt för alla val av $P\in[\infty]$. Då gäller det speciellt att $\mathbb{P}$ är $((0),[\infty])$-transitivt ty $(0)\in[\infty]$. Men då ger sats 6.15 att (R,T) är en cartesisk grupp som uppfyller den vänsterdistributiva lagen, vilket är definitionen av en kvasikropp. Alltså koordinatiseras $\mathbb{P}$ av en kvasikropp. $\square$

Lemma 6.18. *Om $\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp för något val av punkter $X=(0)$ och $Y=(\infty)$, så kan $\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp oavsett val av (0) och (∞) så länge $(0)\in XY$ och $(\infty)\in XY$.*

Bevis. Antag att $\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp för något val av punkter $X=(0)$ och $Y=(\infty)$. Låt $[\infty]=XY$. Vi ska visa att $\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp för alla val av punkter $P\in[\infty]$.

Eftersom $\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp enligt antagande så är $\mathbb{P}$ $([\infty],[\infty])$-transitivt enligt lemma 6.17, det vill säga att $\mathbb{P}$ är $(P,[\infty])$-transitivt för alla val av $P\in[\infty]$. Låt $X',Y'\in[\infty]$ sådana att $X'\neq X$ och $Y'\neq Y$. Detta val av X' och Y' ändrar inte det faktum att $\mathbb{P}$ är $([\infty],[\infty])$-transitivt då $([\infty],[\infty])$-transitivitet innebär $(P,[\infty])$-transitivitet för alla val av $P\in[\infty]$. Alltså kan $\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp oavsett val av $P\in[\infty]$. $\square$

Vi kan nu formulera ett viktigt resultat, som kommer behövas i beviset till fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri:

Sats 6.19. *Om (R,T) är en kvasikropp så är $(R,+)$ abelsk.*

Bevis. Antag att kvasikroppen (R,T) koordinatiserar det projektiva planet $\mathbb{P}$. Lemma 6.17 ger att $\mathbb{P}$ då är $([\infty],[\infty])$-transitivt. Detta innebär att $\mathbb{P}$ är $(P,[\infty])$-transitivt för alla val av $P\in[\infty]$. Eftersom $(\infty)\in[\infty]$ kan vi välja $P=(\infty)$, vilket då innebär att $\mathbb{P}$ är $((\infty),[\infty])$-transitivt.

Lemma 6.18 ger att $\mathbb{P}$ koordinatiseras av en kvasikropp oavsett val av punkter på $[\infty]$. Detta innebär att $[\infty]$ är en axel till flera olika $(P,[\infty])$-elationer, där $P\in[\infty]$. Sats 4.19 ger då att gruppen av $([\infty],[\infty])$-elationer, $\mathcal{G}_{([\infty],[\infty])}$, är abelsk. Speciellt har vi då att delgruppen $\mathcal{G}_{((\infty),[\infty])}$. Men alla kollineationer $\alpha\in\mathcal{G}_{((\infty),[\infty])}$ är någon av avbildningarna i 6.13. Vi påminner läsaren att dessa kollineationer är $\alpha:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ sådan att $\alpha(A)=B$, definierade enligt $\alpha_a:\mathbb{P}^{[\infty]}\to\mathbb{P}^{[\infty]}$ där $(x,y)\mapsto(x,y+z)$, $[m,k]\mapsto[m,k+a]$ och $[k]\mapsto[k]$.

I fallet $[k] \mapsto [k]$ följer satsen trivialt, ty alla $\alpha \in \mathcal{G}_{((\infty),[\infty])}$ lämnar $[k]$ invariant. De andra två fallen kräver, emellertid, mer arbete.

I fallet $(x, y) \mapsto (x, y+z)$ har vi att om $\alpha_a((x, y)) = (x, y+z)$ och $\alpha_b((x, y)) = (x, y+z')$, där $x, y, z, z' \in R$, så är

$$\alpha_a(\alpha_b((x, y))) = \alpha_a((x, y + z')) = (x, (y + z') + z)$$

och

$$\alpha_b(\alpha_a((x, y))) = \alpha_b((x, y + z)) = (x, (y + z) + z')$$

där $(x, (y + z') + z) = (x, y + (z' + z))$ och $(x, (y + z) + z') = (x, y + (z + z'))$ ty additionen är associativ. Eftersom $\mathcal{G}_{((\infty),[\infty])}$ är abelsk har vi att $(x, y + (z' + z)) = (x, y + (z + z'))$. Så $z' + z = z + z'$, det vill säga att additionen är kommutativ.

I fallet $[m, k] \mapsto [m, k+a]$ har vi att om $\alpha_a([m, k]) = [m, k+a]$ och $\alpha_b([m, k]) = [m, k+b]$, där $x, y, a, b \in R$, så är

$$\alpha_a(\alpha_b([m, k])) = \alpha_a([m, k + b]) = [m, (k + a) + b]$$

och

$$\alpha_b(\alpha_a([m, k])) = \alpha_b([m, k + a]) = [m, (k + b) + a].$$

där $[m, (k+a)+b] = [m, k+(a+b)]$ och $[m, (k+b)+a] = [m, k+(b+a)]$ eftersom additionen är associativ. Detta innebär då att $[m, k + (a + b)] = [m, k + (b + a)]$ eftersom $\mathcal{G}_{((\infty),[\infty])}$ är abelsk. Så vi har att $a + b = b + a$, det vill säga att additionen är kommutativ även i detta fall. Detta visar att $(R, +)$ är abelsk. □

Vi har hittills sett hur den additiva strukturen av en PTR, (R, T), hänger ihop med existensen av elationer i $\mathbb{P}$. Härnäst ska vi undersöka den multiplikativa strukturen och se hur denna hänger ihop med existensen av homologier i $\mathbb{P}$.

Sats 6.20. *Låt (R, T) vara en PTR. Då är (R, T) linjär och har associativ multiplikation om och endast om $\mathbb{P}$ är $((0), [0])$-transitiv.*

Bevis. $(\Rightarrow)$: Antag att är (R, T) linjär och har associativ multiplikation. Vi vill konstruera en $((0), [0])$-homologi för alla $a \in R^* := R \setminus \{0\}$ som avbildar $(1, 0)$ på $(a, 0)$. Denna homologi kommer ej ha $[\infty]$ som axel, så vi kommer att visa dess existens genom att beskriva dess verkan på hela $\mathbb{P}$.

Låt därför θ_a vara en $((0), [0])$-homologi definierad enligt

$$\begin{aligned}
&\theta_a((x, y)) = (ax, y),\\
&\theta_a((m) = (ma^{-1}),\\
&\theta_a((\infty)) = (\infty),\\
&\theta_a([\infty]) = [\infty],\\
&\theta_a([k]) = [ak],\\
&\theta_a([m, k]) = [ma^{-1}, k],
\end{aligned}$$

där $t = a^{-1}$ är den unika lösningen av $ta = 1$ i $(R^*, \cdot)$. Från denna konstruktion har vi då att om θ_a är en kollineation så är θ_a en $((0), [0])$-homologi som avbildar $(1, 0)$ på $(a, 0)$. Alltså behöver vi bara visa att θ_a bevarar incidensrelationen för att visa satsen i denna riktningen, vilket vi gör genom att kontrollera definitionerna av incidensrelationen i sats 6.5.

Vi har nu att eftersom (R, T) är linjär enligt antagande så är $(x, y) \in [m, k]$, vilket är ekvivalent med att $mx + y = k$. Då har vi att

$$\theta_a(x, y)) \in \theta_a([m, k]) \Leftrightarrow (ma^{-1})(ax) + y = k \Leftrightarrow (ma^{-1})(ax) + y \Leftrightarrow (ma^{-1})(ax) = mx.$$

Enligt antagande är multiplikationen associativ, varför vi har att

$$(ma^{-1})(ax) = m(a^{-1}a)x = mx.$$

Alltså har vi att $\theta_a((x,y)) \in \theta_a([m,k])$ om och endast om $mx + y = k$.

Från 6.5 (*ii*) har vi att $(x,y) \in [k]$ är ekvivalent med att $x = k$. Men från konstruktionen av θ_a har vi att $\theta_a((x,y)) = (ax, y)$ och $\theta_a([k]) = [ak]$, varför

$$(ax, y) \in [ak] \Leftrightarrow ax = ak \Leftrightarrow x = k,$$

det vill säga $\theta_a((x,y)) \in \theta_a([k])$ är ekvivalent med att $x = k$.

Från 6.5 (*iii*) har vi att $(x) \in [m,k]$ är ekvivalent med att $x = m$. Från konstruktionen av θ_a har vi att $(xa^{-1}) \in [ma^{-1}, k] \Leftrightarrow xa^{-1} = ma^{-1}$ där

$$xa^{-1} = ma^{-1} \Leftrightarrow xa^{-1}a = ma^{-1}a \Leftrightarrow x = m.$$

Alltså har vi att $\theta_a((x)) \in \theta_a([m,k])$ är ekvivalent med att $x = m$.

Från 6.5 (*iv*) har vi att $(x) \in [\infty]$ för alla $x \in R$ och $(\infty) \in [k]$ för alla $k \in R$. Enligt den koordinatiseringsprocess vi tidigare beskrivit, skrivs alla punkter på $[\infty]$ som (x), där $x \in R$, och alla linjer genom (∞) som $[k]$. Vi ser då att θ_a bevarar detta ty $\theta_a((x)) = xa^{-1}$ och $\theta_a([\infty]) = [\infty]$ samt $\theta_a((\infty)) = (\infty)$ och $\theta_a([k]) = [ak]$. Slutligen har vi från 6.5 (*v*) att $(\infty) \in [\infty]$, vilket bevaras av θ_a ty $\theta_a((\infty)) = (\infty)$ och $\theta_a([\infty]) = [\infty]$.

Vi har alltså visat θ_a bevarar incidensrelationen på $\mathbb{P}$, vilket innebär att θ_a är den kollineation vi behöver och alltså är $\mathbb{P}$ $((0),[0])$-transitiv.

$(\Leftarrow)$: Antag nu att $\mathbb{P}$ är $((0),[0])$-transitiv. Låt θ_a vara den $((0),[0])$-homologi som avbildar $(1,0)$ på $(a,0)$. Då bestäms verkan av θ_a på $\mathbb{P}$ genom två permutationer α_a och β_a av R sådana att om $(m) \in [\infty]$ så är $\theta_a((m)) = \alpha_a(m)$ där $\alpha_a(0) = 0$ och $\theta_a((x,0)) = (\beta_a(x), 0)$ för alla $(x,0)$ med $x \in R$. Vidare är $\beta_a(0) = 0$ och $\beta_a(1) = a$. Då har vi att verkan av θ_a på $\mathbb{P}$ av

$$\begin{aligned}
&\theta_a((x,y)) = (\beta_a(x), y),\\
&\theta_a((m) = (\alpha_a(m)),\\
&\theta_a((\infty)) = (\infty),\\
&\theta_a([\infty]) = [\infty],\\
&\theta_a([k]) = [\beta_a(k)],\\
&\theta_a([m,k]) = [\alpha_a(m), k].
\end{aligned}$$

Vi har därför att $T(m,x,y) = T(\alpha_a(m), \beta_a(x), y)$ för alla $m,x,y \in R$. Med $y = 0$ har vi således att

$$mx = \alpha_a(m)\beta_a(x) \tag{12}$$

för alla $m, x \in R$. Om $x = 1$ har vi att $\beta_a(1) = a$ och då har vi från ekvation 12 att

$$m = \alpha_a(m)a. \tag{13}$$

Låt nu $\gamma : R^* \to R^*$ sådant att $\gamma_a(x) = xa$ för alla $x \in R^*$. Då har vi från ekvation 13 att $\alpha_a = \gamma_a^{-1}$ och därför är

$$mx = \gamma_a^{-1}\beta_a(x). \tag{14}$$

Nu låter vi $m = a$ i ekvation 14 och får att $ax = \beta_a(x)$ ty $\gamma_a^{-1} = 1$. Därför har vi att

$$mx = \gamma_a^{-1}(m)(ax). \tag{15}$$

Eftersom γ_a är en permutation av R^* har vi för alla $m \in R$ sådana att $m \neq 0$ att det finns ett unikt $u \in R$ sådant att $m = ua$. Vi observerar här att då $m \in R^*$ är godtyckligt så är även u godtyckligt.

Insättning av $m = ua$ i ekvation 15 ger då

$$(ua)x = \gamma_a^{-1}(ua)(ax) = \gamma_a^{-1}(\gamma_a(u))(ax) = u(ax)$$

för alla $u, a, x \in R^*$. Detta visar alltså att R har en associativ multiplikation.

För att se att (R,T) är linjär observerar vi att för alla $m,a,x,y \in R$ där $a \neq 0$ så är $T(m,x,y) = T(ma^{-1}, ax, y)$. Med $m = a$ har vi att $T(a,x,y) = T(1, ax, y) = ax + y$, det vill säga att (R,T) att är linjär. □

För att kunna bevisa den fundametala satsen för ändlig projektiv geometri behöver vi även visa att (R,T) är högerdistributiv. För att kunna göra det behöver vi emellertid koordinatisera dualplanet $\mathbb{P}^D$. Eftersom detta är av samma ordning kan vi använda R för att kooordinatisera $\mathbb{P}^D$. Vi betecknar punkter i $\mathbb{P}^D$ med $(x,y)'$, $(x)'$ och linjer med $[m,k]'$, $[k]$.

Vi koordinatiserar $\mathbb{P}^D$ genom att låta $(0,0)' = [0,0]$, $(0)' = [0]$, $(\infty)' = [\infty]$ och $(1)' = [1]$, och sedan tilldela element ur R till punkter på $[0,0]'$ så att $(x,0)' = [x,0]$. Från detta har vi då att $(0,0) = [0,0]'$, $(0) = [0]'$, $[x,y] = (x,-y)'$, $(\infty) = [\infty]'$ och $(k) = [k]'$.

Slutligen har vi att $[m,-k] = (m,k)'$. För att se detta resonerar vi som följande. Vi vet att $(m,k)'$ svarar mot mängden av alla linjer incidenta med en punkt i $\mathbb{P}$. Vi behöver finna den punkten. Från diskussionen ovan är punkterna $(d,0)'$ och $(1)'$ i $\mathbb{P}^D$ givna. Vi har att $(1)' = [1]$, vilket innebär att $(1)'$ svarar mot linjen $x = 1$ i $\mathbb{P}$. Punkten $(0,d)'$ fås från linjen som förbinder $(d,0)'$ med $(1)'$ skuret med linjen som förbinder $(0,0)'$ med $(\infty)'$. Då svarar $(0,d)'$ mot linjen $dx + y = 0$ i $\mathbb{P}$. Med $x = 1$ har vi då att $d + y = 0$, det vill säga $y = -d$. Vi har således att den sökta skärningspunkten i $\mathbb{P}$ är $(1,-d)$. Av alla linjer i $\mathbb{P}$ som är incidenta med $(1,-d)$ så måste en vara horisontell. Denna linje har då ekvationen $y = -d$, vilket då ger att $[0,-d] = (0,d)'$. Detta ger då det vi ville, nämligen att $[m,-k] = (m,k)'$

Denna diskussion har gett att (R,T') koordinatiserar $\mathbb{P}^D$ och är därmed en PTR. Detta ger följande relation mellan $\mathbb{P}$ och $\mathbb{P}^D$.

Sats 6.21. *Om (R,T) är en Cartesisk grupp så är (R,T') en Cartesisk grupp.*

Bevis. Antag (R,T) är en Cartesisk grupp. Då uppfyller (R,T) hypotesen i sats 6.12, så (R,T) är linjär. Dualitetsprincipen ger då att (R,T') uppfyller villkoren i sats 6.12. Så (R,T') är linjär.

Beviset är alltså klart om vi kan visa att (R,T') har en associativ addition. För att se att (R,T') har en associativ additon, låt $+$ vara additionen på (R,T) och $\oplus$ vara additionen på (R,T'). Från definitionen av addition har vi att $a + b = T(1,a,b)$ för alla $a,b \in R$. Låt $T'(1,a,b) = k$. Då har vi att

$$\begin{aligned} T'(1,a,b) = k &\Leftrightarrow (a,b)' \in [1,k]' \\ &\Leftrightarrow (1,-k) \in [a,-b]. \end{aligned}$$

Att T är linjär enligt hypotes ger då att

$$\begin{aligned} (1,-k) \in [a,-b] &\Leftrightarrow T(a,1,-k) = -b \\ &\Leftrightarrow a \cdot 1 - k = -b \\ &\Leftrightarrow k = a + b \end{aligned}$$

Alltså har vi för alla $a,b,c \in R$ att associativiteten för (R,T) ger

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \oplus c &= (a + b) \oplus c \\ &= (a + b) + c \\ &= a + (b + c) \\ &= a \oplus (b + c) \\ &= a \oplus (b \oplus c), \end{aligned}$$

det vill säga att $\oplus$ är associativ. □

Följande sats behöver vi för att kunna visa den högerdistributiva egenskapen hos (R,T).

Sats 6.22. *Låt (R,T) vara en kvasikropp. (R,T') uppfyller då den högerdistributiva lagen.*

Bevis. Låt (R,T) vara en kvasikropp som koordinatiserar $\mathbb{P}$ och (R,T') en PTR som koordinatiserar $\mathbb{P}^*$. Låt $+$ och $\cdot$ vara de binära operationerna på (R,T), och $\oplus$ och $\odot$ vara de binära operationerna på (R,T'). Från definitionen av multiplikation har vi att $a \cdot b = T(a,b,0)$. Från definitionen i sats 6.3 av den ternära operatorn har vi att

$$T'(a,b,0) = k \Leftrightarrow (b,0)' \in [a,k]'.$$

Dualt har vi därför att

$$(a, -k) \in [b, 0] \Leftrightarrow T(b, a, -k) = 0.$$

Att T är linjär enligt hypotes ger

$$T(b, a, -k) = 0 \Leftrightarrow b \cdot a - k = 0 \Leftrightarrow k = b \cdot a,$$

vilket då är en formel för $\odot$ i termer av multiplikationen på (R, T).

Från definitionen av addition har vi att $a + b = T(1, a, b)$. Så från definitionen i sats 6.3 av den ternära operatorn har vi att

$$T'(1, a, b) = k \Leftrightarrow (a, b)' \in [1, k]'.$$

Dualt har vi att

$$(1, -k) \in [a, -b] \Leftrightarrow T(a, 1, -k) = -b.$$

Att T är linjär ger oss att

$$T(a, 1, -k) = -b \Leftrightarrow a \cdot 1 - k = b \Leftrightarrow k = a + b,$$

vilket då är en formel för $\oplus$ i termer av additionen på (R, T).

För att visa satsen behöver vi visa att $a \odot c \oplus b \odot c = (a \oplus b) \odot c$. Vi har att

$$\begin{aligned} a \odot c \oplus b \odot c &= b \odot c + a \odot c \\ &= c \cdot b + c \cdot a \\ &= c(a + b) \\ &= (a + b) \odot c \\ &= (a \oplus b) \odot c, \end{aligned}$$

vilket visar att T' är högerdistributiv. □

Sats 6.23. *Antag att (R, T) är en Cartesisk grupp. Då uppfyller (R, T) den högerdistributiva lagen om och endast om $\mathbb{P}$ är $((\infty), [0])$-transitiv.*

Bevis. Om (R, T) är en kvasikropp så ger 6.17 att $\mathbb{P}$ är $([\infty], [\infty])$-transitivt. Men då är $\mathbb{P}^D$ $((\infty)', (\infty)')$-transitivt. Detta ger då att $\mathbb{P}^D$ är $((\infty)', [\infty]')$-transitivt och $((\infty)', [0]')$-transitivt, från vilket påståendet i satsen följer. □

6.5 Ändliga kroppar och ändliga desargiska plan

Utrustade med den nödvändiga teorin är vi nu redo att formulera en viktig egenskap hos desargiska plan. Denna egenskap är den ena halvan av fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri.

Sats 6.24. *Låt $\mathbb{P}$ vara ett ändligt projektivt plan. Om $\mathbb{P}$ är desargiskt så är dess planära ternära ring (R, T) linjär och ger upphov till en Galoiskropp.*

Bevis. Antag att $\mathbb{P}$ är ett ändligt desargiskt projektivt plan. Vi ska visa att den planära ternära ringen (R, T) till $\mathbb{P}$ är linjär och att (R, T) ger upphov till en Galoiskropp.

Eftersom $\mathbb{P}$ är ett projektivt plan innehåller det en fyrsiding enligt lemma 3.14. Låt $\{O, X, Y, I\}$ vara mängden av hörn i en fyrsiding i $\mathbb{P}$. Låt R vara en mängd av symboler sådan att $0 \in R$, $1 \in R$ och $\infty \notin R$. Alltså kan vi nu koordinatisera $\mathbb{P}$ med hjälp av R och $\{O, X, Y, I\}$ enligt diskussionen i början av kapitel 6. Om T är den ternära operatorn definierad i definition 6.2, så har vi från sats 6.3 att koordinatiseringsprocessen ger upphov till en planär ternär ring.

Innan vi går vidare observerar vi att antagandet att $\mathbb{P}$ är desargiskt betyder att $\mathbb{P}$ är (P, l)-desargiskt för alla val av punkter P och linjer l. Men då är $\mathbb{P}$ (P, l)-transitivt för alla val av punkter P och linjer l enligt sats 4.34. Detta är en viktig observation som vi kommer att hänvisa till i resten av beviset.

Vi har nu från sats 6.13 att (R, T) är en linjär PTR ty $\mathbb{P}$ är $((\infty), [\infty])$-transitiv enligt observationen ovan. Det återstår således att visa att (R, T) ger upphov till en kropp. Vi börjar med att visa att (R, T) ger upphov till en ring $(R, +, \cdot)$ med binära operationer.

Låt därför $+$ och $\cdot$ vara den additiva respektive multiplikativa binära operationen definierad i kapitel 6.3. För att se att $(R, +, \cdot)$ är en ring behöver vi visa att $(R, +, \cdot)$ uppfyller villkoren i definitionen av en ring.

Vi har att multiplikationen är associativ enligt sats 6.20 ty $\mathbb{P}$ är $((0), [0])$-transitivt enligt observationen ovan. Enligt sats 6.13 har vi att additionen är associativ, ty $\mathbb{P}$ är $((\infty), [\infty])$-transitiv enligt observationen ovan. Sats 6.15 ger då att (R, T) uppfyller den vänsterdistributiva lagen ty $\mathbb{P}$ är $((0), [\infty])$-transitiv enligt observationen ovan, och sats 6.23 ger att (R, T) uppfyller den högerdistributiva lagen, ty $\mathbb{P}$ är $((\infty), [0])$-transitiv enligt observationen ovan. Detta betyder alltså att multiplikationen är distributiv över additionen. Vi har även att (R, T) är en cartesisk grupp som uppfyller den vänsterdistributiva lagen, det vill säga att (R, T) är en kvasikropp. Sats 6.19 ger då att $(R, +)$ är en abelsk grupp och därmed har vi enligt definition 2.8 att $(R, +, \cdot)$ är en ring.

Vi påstår nu att $(R, +, \cdot)$ är en skevkropp. För att se detta behöver vi visa att $(R^*, \cdot)$, där $R^* := R \setminus \{0\}$, bildar en grupp.

Eftersom (R, T) är en PTR så ger sats 6.9 att $(R^*, \cdot)$ är en loop (se definition 6.6). Att multiplikationen är sluten följer då från villkoren (i) och (ii) i definition 6.6. Vi har tidigare i detta bevis visat att multiplikationen är associativ. Från (iii) i definition 6.6 har vi att det finns ett identitetselement $e \in R^*$ sådant att $x \cdot e = e \cdot x = x$. Slutligen, om vi sätter $b = e$ i (i) och (ii) i definition 6.6, så har vi att varje element i R^* har sitt inversa element i R^*. Enligt definitionen av grupper är $(R^*, \cdot)$ alltså en grupp.

Vi har alltså att $(R, +, \cdot)$ är en ring där $(R^*, \cdot)$ bildar en grupp, det vill säga att $(R, +, \cdot)$ är en skevkropp. Vi påstår att $(R, +, \cdot)$ är en ändlig skevkropp. För att se detta observerar vi att eftersom $\mathbb{P}$ enligt antagande är ett ändligt projektivt plan så består det av ett ändligt antal linjer och punkter. Därmed består R av ett ändligt antal element. Från detta följer det omedelbart att $(R, +, \cdot)$ är en ändlig skevkropp.

Wedderburns lilla sats ger nu att $(R, +, \cdot)$ måste vara en ändlig kropp. Då gäller att $(R, +, \cdot)$ är av primtalspotensordning enligt sats 2.18 och alltså är $(R, +, \cdot)$ en Galoiskropp enligt definitionen av Galoiskroppar.

Därmed har vi visat att om $\mathbb{P}$ är ett ändligt desargiskt projektivt plan så är dess PTR linjär och ger upphov till en Galoiskropp. $\square$

Syftet med detta arbete har varit att bevisa den fundamentala satsen för ändlig projektiva geomtri och vi har nu den teori som behövs för att göra detta. Innan vi gör det vill vi göra läsaren uppmärksam på att det från den fundamentala satsen för ändlig projektiva geometri även följer att minikvaternionsystemet, som vi definierade i kapitel 5.3, inte är desargiskt.

Sats (Fundamentala satsen för ändlig projektiv geometri)**.** *Låt $\mathbb{P}$ vara ett ändligt projektivt plan. Då är $\mathbb{P}$ desargiskt om och endast om det är ett kroppsplan.*

Bevis. Låt $\mathbb{P}$ vara ett ändligt projektivt plan och antag att $\mathbb{P}$ desargiskt. Sats 6.24 ger då att $\mathbb{P}$ ger upphov till en Galoiskropp. Detta ger då att $\mathbb{P}$ är ett kroppsplan. Omvänt, antag istället att $\mathbb{P}$ är ett kroppsplan. Då ger sats 5.10 att $\mathbb{P}$ är desargiskt. $\square$

Med detta bevis har vi således uppnått syftet med detta arbete.

Referenser

[RK] Room, T. G.; Kirkpatrick, P. B. (1971), ”Miniquaternion Geometry”, Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 0-521-07926-8.

[HP] Hughes, D.; Piper, F. (1973), ”Projective Planes”, Springer-Verlag, ISBN 0-387-90044-6.

[AS] Albert, A. A.; Sandler, R. (1968), ”An Introduction to Finite Projective Planes”, New York: Holt, Rinehart and Winston.

[JD] Durbin J. R. (2009), ”Modern Algebra An Introduction - 6-th Edition”. Hoboken NJ. John Wiley and Sons. ISBN 978-0-470-38443-5.

[LMB] Batten, L. M. (1993), ”The Theory of Finite Linear Spaces”, Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-11418-9.

[AC] Conrad, A. (2000), ”Projective Geometry - the Early Years”, Rutgers, tillgänglig på `http://www.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers2000/conrad.html`, besökt 2014-05-17.

[OH] Häggström, O. (År okänt), ”Begränsat perspektiv på vetenskapens begränsningar”, Chalmers, tillgänglig på `http://www.math.chalmers.se/~olleh/ByersBlindSpot.pdf`, besökt 2014-05-17.

[JS] Stevens, J. (2006), ”Euklidisk geometri”, Chalmers, tillgänglig på `http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/LMA100/V06-2B/geom.pdf`, besökt 2014-05-17.

[IE] O'Connor, J. J.; Robertson E. F. (1996) ”Non-Euclidean Geometry”, University of St Andrews, tillgänglig på `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html`, besökt 2014-05-17.

[LAM] Lam, C.W.H. (1991), ”The Search for a Finite Projective Plane of Order 10”, Concordia University, tillgänglig på `http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Lam305-318.pdf`, besökt 2014-05-17.