PROPORTIONELLA SAMBAND

Innehållets behandling och elevernas lärande

Joakim Magnusson

INSTITUTIONEN FÖR DIDAKTIK OCH PEDAGOGISK PROFESSION

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Proportionella samband

Proportionella samband

Innehållets behandling och elevernas lärande

Joakim Magnusson

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Licentiatuppsats i pedagogiskt arbete vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Utbildningsvetenskapliga fakulteten, Göteborgs universitet

Licentiatuppsatsen finns i fulltext i GUPEA – Göteborgs universitets publikationer – elektroniskt arkiv, i samlingen "Licentiatuppsatser/ Institutionen för didaktik och pedagogisk profession" http://hdl.handle.net/2077/37219

Denna licentiatuppsats har genomförts inom ramen för Forskarskolan Learning Study – undervisningsutvecklande ämnesdidaktisk forskning. Forskarskolan, som leder fram till en licentiatexamen, är ett samarbete mellan Högskolan för lärande och kommunikation, Högskolan i Jönköping (värdhögskola), Göteborgs universitet samt Stockholms universitet och finansieras av Vetenskapsrådet (projektnummer 2011-5273) inom ramen för regeringens satsning på att forskarutbilda lärare.

Omslag, foto: Klara Toräng

Sammanfattning

Titel:	Proportionella samband – Innehållets behandling och elevernas lärande
Författare:	Joakim Magnusson
Språk:	Svenska med en engelsk sammanfattning
GUPEA:	http://hdl.handle.net/2077/37219
Nyckelord:	storhet, förhållande, sammansatt storhet, par av storhetsvärden, proportion, proportionalitet, statisk proportion och dynamisk proportionalitet, variationsteori, learning study

Syftet med denna studie är att undersöka på vilka sätt elever utvecklar sin förmåga att resonera proportionellt. Elevers förändrade förståelse för proportionella samband undersöks i relation till innehållets behandling under lektioner. Detta görs med utgångspunkt i kartläggning av elevers svårigheter att förstå proportionella samband och resultat från tidigare forskning. De innehållsmässiga svårigheter för lärande, som lyfts fram i tidigare resultat och som undersöks i denna studie, testas för att se huruvida de är kritiska även för de i studien deltagande eleverna, samt på vilket sätt innehållets behandling i undervisningen kan anpassas för att överbrygga dessa svårigheter.

Den empiriska studien består av 10 videoinspelade lektioner där totalt tre klasser med 62 elever i årskurs 8 och 9 och tre lärare deltog.

Att identifiera aspekter av innehållet som tycks kritiska för elever att uppfatta för att förstå detta innehåll på ett mer utvecklat sätt är av avgörande intresse inom variationsteorin, det teoretiska ramverk som används i denna studie. Den metodologiska utgångspunkten är learning study, vilket är en iterativ process där det innehåll som ska behandlas under lektionen eller lektionerna planeras, filmas och analyseras gemensamt av forskare och lärare.

Resultaten från denna studie visar att följande aspekter är kritiska för eleverna att urskilja: skillnad mellan multiplikativa och additiva samband, att det finns två förhållanden att beakta (inom och mellan) i en proportion samt att kunna urskilja aspekter (t.ex. proportionalitetskonstanten) vilka är relaterade till tre problemlösningsstrategier: statisk, dynamisk och uppbyggnads-strategi. Genom att separera och variera dessa aspekter mot en invariant bakgrund underlättas urskiljningen av dessa för eleverna. Ett annat resultat är att i vilken ordning och med vilka värden som aspekterna separeras och varieras är avgörande för om lärande ska kunna möjliggöras.

Summary

Title:	Proportional reasoning – The relation between instruction and students learning
Author:	Joakim Magnusson
Language:	Swedish with an English summary
GUPEA:	http://hdl.handle.net/2077/37219
Keywords:	Proportional reasoning, multiplicative structure, composed unit, intensive quantity, static proportionality, dynamic proportionality

The aim of this study is to investigate in what ways students develop their abilities in proportional reasoning. This is done in relation to difficulties previously found in research. Students' changed ways of discerning the object of learning in relation to how the content is handled during lessons is studied. The study explores aspects critical for knowledge development amongst the participating students in this iterative intervention.

The study comprises 10 video-recorded lessons in 3 different classes. Altogether 62 students, in the age of 13-15 years, and three teachers have participated in the study.

Based on the theoretical framework of this study, variation theory, the main interest is to identify aspects of the content in the lessons that offer learning possibilities for the students to discern the content in a more powerful or developed way. The methodological approach is learning study, a cyclic and iterative process, in which a lesson is planned, video-recorded and analysed by researchers and teachers afterwards.

The results from this study show which aspects are critical to discern; to separate multiplicative structures from additive and to distinguish between the ratio within and the ratio between. Furthermore they highlight aspects related to three different problem-solving strategies: static, dynamic and finally building up strategy. It is suggested that these aspects of the content need to be separated from the whole and emphasised during teaching in order to enable the students to discern them. The results also indicate that the order, in which aspects of the content are handled during the lessons, is significant as well as which aspects of the content vary and which are kept invariant during teaching.

Förord

Jag har arbetat som lärare i 20 års tid vilket inneburit daglig kontakt med ett stort antal människor. Skillnaden är stor jämfört med att skriva denna uppsats som i mångt och mycket har varit ett ensamarbete. Detta gäller dock främst själva skrivprocessen. I övrigt betraktar jag detta arbete som ett synnerligen komplext och givande lagarbete. Nu står dock bara mitt namn på framsidan så jag vill därför tacka alla inblandade. Först och främst de fantastiska lärarna med de pseudonyma smeknamnen Braxen, Pennan och Gasellen samt alla elever som deltog i studien. Utan er hade det absolut inte blivit någon studie. Utan min handledare Mona Holmqvist och biträdande handledare Johan Häggström hade denna uppsats förmodligen aldrig blivit klar. Jag betraktar er som lysande ledstjärnor på vägen. Tack även till alla forskarkollegor och granskare; Constanta Olteanu, Lisa Björklund Boistrup och Inger Eriksson, inom den nationella forskarskolan för learning study. Dessutom till alla andra kollegor både i skolan och på universitetet, inte minst Lotta Funnemark för hjälp med korrekturläsning. Ett särskilt tack vill jag rikta till min strålande vapendragare Tuula Maunula som uppmanade mig att söka till denna utbildning och som varit ett oskattbart stöd på vägen. Avslutningsvis vill jag tacka mina älskade; Gabriella, Hannes, Klara och Joel för att ni med gränslöst tålamod låtit mig göra något jag är väldigt bra på, koppla bort omvärlden och försvinna in i min egen lilla skrivbubbla vid matbordet därhemma. En härlig plats att bubbla i, fylld av liv och rörelse.

Innehåll

1. Inledning

Hur elever uppfattar proportionella samband och vilka svårigheter de har med att lösa proportionella problem är väl beskrivet i tidigare forskning. Likaså finns rikligt med förslag på uppgifter för att diagnostisera dessa svårigheter (Misailidou & Williams, 2003) samt analyser av läromedel och på vilket sätt dessa läromedel lyfter fram proportionella beräkningsstrategier (Lundberg, 2011). Den här studien har en annan utgångspunkt. Fokus ligger på elevernas erfarande av innehållet, på *relationen*[1] mellan den lärande och det som ska läras, istället för på innehållet i sig. Utgångspunkten är att om vi avser att lära någon något måste utgå från vad personen i fråga kan avseende det specifika innehåll som behandlas. Det är i skillnaden mellan det elever kan respektive det de anses behöva kunna som det framkommer *vad* som är avgörande för fortsatt lärande. Genom att studera elevernas innehållsrelaterade kunskapsutveckling i klassrummet ges möjligheter att identifiera tidigare ej beskrivna svårigheter med att förstå detta innehåll. Även när denna grundläggande kunskap finns kvarstår dock frågan om *hur* innehållet i undervisningen kan behandlas för att lärande ska möjliggöras. I detta arbete är det relationen mellan innehållets behandling och elevernas förmåga att resonera proportionellt som studeras. Förhoppningen är att studien ska bli ett kunskapsbidrag till hur innehållets behandling i undervisning kan hjälpa eleverna att utveckla sitt kunnande av proportionella samband.

Proportionella samband är ett erkänt svårt och komplext matematiskt innehåll att undervisa om (Lobato, Orrill, Druken, & Jacobson, 2011). Behärskandet av desamma bör enligt Vergnaud (1988) och Lamon (2007) betraktas som en grundläggande kunskap eftersom vardagen och de flesta arbeten är fyllda av problem av proportionell karaktär. Inom matematiska områden som geometri, algebra och funktioner är förståelse för proportionella samband central. Detta avspeglas i naturvetenskapliga- och tekniska områden där begrepp som procent, andel, förhållande, hastighet, likformighet, densitet, skala, räta linjens funktion med mera behandlas (Karplus, Pulos, & Stage,

[1] I detta arbete används den vardagliga betydelsen av begreppet relation vilket innebär en logisk eller fysisk association. Begreppet relation är inom matematiken förknippat med att vissa kriterier uppfylls (se Kiselman och Mouwitz, 2008). I samband med litteraturgenomgång förekommer begreppet i matematisk betydelse då andra forskare använder sig av det och ska då tolkas som sådant.

1983b; Vergnaud, 1988). Proportionalitet kan betraktas som ett tröskelbegrepp vilket Pettersson (2008) beskriver som en portal till ett tidigare onåbart och i början problematiskt sätt att betrakta någonting på. Procentuella beräkningar (till exempel reapris, skatt och moms) är även de relaterade till begreppet. Det tycks således finnas fog för att elever i skolan ges möjligheten att utveckla sin förmåga att resonera proportionellt. Proportionalitet och proportionella samband är även begrepp som återfinns i det centrala innehållet i Lgr 11. Att möjligheterna till att förbättra elevernas resultat fortfarande är stora går att utläsa i TIMMS 2007 (Skolverket, 2008) där det uppmärksammas att drygt hälften av eleverna i årskurs 8 har svårt för uppgifter som behandlar proportionella samband.

Trots att mycket forskning under de senaste årtiondena bedrivits inom området brottas forskningen fortfarande med frågeställningar kring det komplexa lärande som utveckling av god förståelse för rationella tal och proportionella samband innebär.

> Of all the topics in the school curriculum, fractions, ratios, and proportions arguably hold the distinction of being the most protracted in terms of development, the most difficult to teach, the most mathematically complex, the most cognitively challenging, the most essential to success in higher mathematics and science, and one of the most compelling research sites. (Lamon, 2007, s.629)

Enligt Lamon (2007) finns det ett behov av ny forskning som återupptar det arbete som tidigare generationer påbörjat, eftersom det idag har utvecklats nya pedagogiska förhållningssätt och metoder för att angripa problematiken. I Sverige är det över 30 år sedan Leif Lybeck (1981) genomförde den senaste större studien av hur elever identifierar och resonerar kring proportionella samband, ett arbete som denna studie tar avstamp ifrån. De proportionella samband och elevresonemang som beskrivs i Lybecks studie återspeglas i Lamons (2007) beskrivning över vad det innebär det att ”resonera proportionellt”. Lamon (ibid.) menar att en person som kan resonera proportionellt kan framföra argument som ger stöd för proportionella samband (structural relationships) mellan fyra värden där kvoten är konstant men värdena samvarierar $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$. Med andra ord innebär detta att personen i fråga kan urskilja ett multiplikativt förhållande mellan två värden och att personen med utgångspunkt från detta förhållande kan skapa eller identifiera samma förhållande hos två andra värden.

> I propose that proportional reasoning means supplying reasons in support of claims made about the structural relationships among four quantities (say a, b, c, d) in a context simultaneously involving covariance of quantities and invariance of ratios or products; this would consist of the ability to discern a multiplicative relationship between two quantities as well as the ability to extend the same relationship to other pairs of quantities. (Lamon, 2007, p. 638)

I detta arbete används Lamons definition av ”proportionellt resonemang” och nedanstående är ett exempel på konstruktion av en uppgift som avser att undersöka den kunskap Lamon beskriver. Uppgiften är hämtad från TIMMS 2007 (Skolverket, 2008) och undersöker om elever kan urskilja relationerna mellan olika kvantiteter. För att välja det rätta svarsalternativet B (se Figur 1) krävs det att eleven kan jämföra förhållanden, och urskilja de proportionella sambanden (4:3) mellan klass 1 och 3.

Klass	Pojkar	Flickor
1	12	9
2	14	11
3	16	12
4	18	15

Tabellen här visar antalet pojkar och flickor i fyra klasser. I vilka två klasser är förhållandet mellan antalet pojkar och antalet flickor lika?

A) 1 och 2 *B) 1 och 3* *C) 2 och 3* *D) 2 och 4*

Figur 1. TIMMS, 2007 (Skolverket, 2008, p. 22)

Enligt rapporten från TIMMS, där kvantitativa jämförelser görs mellan länder, väljer 32,0 % av eleverna ifrån Sverige det rätta alternativet (B), vilket kan jämföras med 51,5 % av eleverna i de övriga 16 deltagande länderna. Det ställs ingen följdfråga där eleverna ombeds beskriva hur de uppfattar förhållandet varvid kvalitativa jämförelser av hur de uppfattar begreppet förhållande kan vara svåra att identifiera. Det är troligen inte avsikten med storskaliga studier som TIMMS, men i detta arbete är det kvalitativa perspektivet av primärt intresse. En elev som väljer det rätta alternativet (B) kan göra det på felaktiga grunder. Eleven kan tolka ett förhållande som lika antal, att antalet flickor i klass 1 (12 st.) är lika många som antalet pojkar i klass 3 (12 st.). Detta svar kan tyda på att eleven väljer rätt alternativ på helt andra grunder än att eleven förstår proportionella samband. Olika sätt som elever på detta sätt kan resonera på ett matematiskt icke korrekt sätt är dokumenterat i tidigare forskning (se Hart, 1981; Karplus et al., 1983b). Det kan även vara så att eleverna i uppgiften ovan ser lika förhållande som lika tal eftersom alternativ B är det enda alternativ där ett tal (12) förekommer mer än en gång. En tänkbar förklaring hos elever som väljer alternativ D kan vara att det är 4 pojkar och 4 flickor fler i klass 4 än i klass 2 alternativt att det är en differens på 3 mellan pojkar och flickor i båda fallen. Dessa svar indikerar att elever ser en additiv förändring mellan talen snarare än ett multiplikativt samband. Dessa elever har eventuellt inte urskilt de multiplikativa samband mellan värden som Lamons definition belyser. Uppgiftens konstruktion tycks problematisk på så vis att alla de möjliga tolkningar elever kan göra inte beaktas då svar endast markeras. Forskningen om hur eleverna uppfattar proportionella samband är omfattande men det finns betydligt färre studier om hur undervisning kan hjälpa eleverna att utveckla sin förståelse. I detta arbete studeras med hjälp av forskningsmodellen learning study elevers lärande i relation till innehållets behandling i undervisningen.

Forskning drivs enligt Stenhouse (1981) av ett självkritiskt, systematiskt och undersökande förhållningsätt i syfte att förstå. Vägen som väljs och de kunskapsanspråk som görs kring det som funnits kan däremot variera. Förståelse för undervisning och lärande har de senaste decennierna präglats av ett ökat intresse för klassrumsbaserad forskning där även lärarna i olika utsträckning involveras. Detta kan ses som en reaktion mot att forskning om undervisning och lärande i allt för liten utsträckning beaktar de frågor och problem som lärare brottas med i sin dagliga verksamhet (Carlgren, 2012). Pring (2004) poängterar vikten av att bedriva praktiknära forskning kring lärande om läraryrket i förlängningen ska kunna betraktas som en forskningsbaserad profession. Lärare måste involveras så att de frågeställningar som forskningen baseras på utgår från deras behov. Detta kan till exempel innebära att de själva ges möjligheten att ansvara för att, i den praktik de verkar, insamla data med vars hjälp de kan söka svar på dessa frågor (ibid.). I dag är det, enligt Carlgren (2012), viktigt att lärande och undervisning kring specifika lärandeobjekt transformeras till forskningsobjekt, då lärares huvudsakliga uppgift är att utforma en undervisning som möjliggör lärande av något specifikt vilket hon jämför med klinisk forskning i medicin. Detta kräver att lärarna är delaktiga i att formulera forskningsfrågorna och i att designa samt analysera undervisningen med avseende på ett specifikt innehåll, varvid också lärares ”tysta kunskap” (se Polanyi, 1963) kan synliggöras. Elliot (2012) menar att modellen learning study har skapat de av Stenhouse beskrivna nödvändiga förutsättningarna för att lärare systematiskt och kumulativt ska kunna producera pedagogisk kunskap. Learning study, som är den ansats som används för datainsamlingen i detta arbete, är tillsammans med till exempel design experiment, aktionsforskning och lesson study exempel på ansatser som strävar efter att verka praktikutvecklande och som i olika utsträckning involverar lärare. De har flera likheter såsom att de är iterativa och praktikinriktade men de skiljer sig även beträffande till exempel kunskapsanspråk och i vissa metodologiska avseenden. Learning study, en i sammanhanget relativt ny forskningsansats, används i detta arbete i relation till en specifik teori om lärande, variationsteorin, för att utforska lärandets betingelser exemplifierat av elevers förmåga att resonera proportionellt. Inom variationsteorin, och även i detta arbete är begreppet *kritiska aspekter*[2] centralt. Kritiska aspekter är de aspekter av ett innehåll som eleverna behöver urskilja för att utveckla en viss förmåga eller en viss kunskap. I föreliggande studie används även begreppet *hypotetiskt kritiska aspekter* (Olteanu & Olteanu, 2013) för att beskriva de innehållsmässiga aspekter som enligt tidigare forskning anses betydelsefulla för elevers förståelse av proportionella samband. Distinktionen mellan kritiska aspekter och hypotetiskt kritiska aspekter grundas i att det är i mötet mellan den lärande och det som ska läras som *vad* som är kritiskt, framkommer. Det är endast de aspekter av innehållet som eleverna ännu inte urskilt, men behöver urskilja för att utveckla sitt kunnande, som benämns *kritiska* aspekter. De utgör skillnaden mellan det eleverna redan kan respektive behöver kunna för att förstå något på ett specifikt sätt. De *hypotetiskt* kritiska aspekterna är sådana innehållsmässiga aspekter som tidigare forskning kommit fram till men som ännu inte prövats i denna studies elevgrupp. Studien tar avstamp i tidigare forskning och de däri beskrivna svårigheter elever haft med att förstå proportionella samband vilka lyfts fram och prövas i detta arbetes empiriska del.

[2] Begreppen kritiska aspekter och hypotetiskt kritiska aspekter beskrivs ytterligare i teorikapitel 4.1.2.

1.1. Syfte och frågeställningar

Syftet med detta arbete är att undersöka vilka aspekter av proportionella samband som tycks vara kritiska och därmed behöver synliggöras i undervisning för att skapa möjligheter för de deltagande eleverna att utveckla kunskap om proportionella samband. Skillnader mellan *vilka* aspekter som erbjuds och *hur* dessa synliggörs i de olika klasserna undersöks i relation till elevernas lärande.

Forskningsfrågorna är:

- På vilket sätt är den problematik i elevernas förståelse av proportionella samband som framkommit i tidigare forskning relaterad till kritiska aspekter som identifieras i denna studie?
- Vad i innehållets behandling i lektionerna tycks vara avgörande för elevers olika erfarande av proportionella samband?
- Hur förändras elevernas erfarande av proportionella samband efter undervisning och vilka är skillnaderna mellan klasserna?

2. Forskningsöversikt av elevers proportionella resonemang

Forskningsöversiktens huvudfokus är att med hjälp av tidigare forskning skapa en bild över hur elever uppfattar proportionella samband, undantaget mer formella algebraiska beräkningar som till exempel korsvis multiplikation. I kapitlet definieras ett stort antal begrepp som används vid analys och planering av den empiriska studien. Begreppen speglar samtidigt komplexiteten i utvecklandet av förmågan att kunna resonera proportionellt. Forskningsöversikten avslutas med en genomförd pilotstudie i linje med intentionerna i detta arbetes huvudstudie.

Urvalet begränsades först och främst till ämnesdidaktik i relation till undervisning och elevers olika sätt att uppfatta proportionella samband. Den primära utgångspunkten för sökning av relevanta vetenskapliga arbeten var Göteborgs universitetsbiblioteks elektroniska söksidor. Sökord som inledningsvis användes var engelska begrepp såsom ratio, proportion, proportional, proportionality, proportional reasoning/relationship, multiplicative structure och motsvarande begrepp på svenska[3]. Med hjälp av dessa söksidor kunde artiklar med vetenskapligt genomförda studier med avseende på det specifika innehållet identifieras. På nationellt centrum för matematik (NCM) i Göteborg gick ett stort antal av de böcker som hittades vid sökning i bibliotekskatalog att finna. Efter genomläsning av detta första urval bidrog referenslistor ur dessa artiklar och böcker till att ytterligare relevant litteratur kunde identifieras varav en hel del publicerades i slutet på förra seklet.

De analyser om proportionalitet som gjordes under 70- och 80 talet fokuserade främst elevers hanterande av formella algebraiska beräkningar, vilket även avspeglas i det språkbruk som användes vid sammanställning och presentation av dessa analyser (Kaput & West, 1994). I västvärlden har vi enligt Lamon (2007) haft en tradition, som en rest från den industrialiserade eran, att i undervisningen fokusera på att utveckla elevernas beräkningsstrategier, till exempel i form av algoritmer. Enligt Bentley och Bentley (2011) är det främst

[3] Motsvarande sökord på svenska är förhållande, proportion, proportionell, proportionella, multiplikativa vilka sökts enskilt eller i kombination med resonemang och samband/relation.

procedurella lösningar till uppgifter som presenteras i svenska textböcker, det vill säga att det med hjälp av ett antal exempel visas hur uppgifter ska lösas. Begreppsmodeller som behandlar begreppet proportionalitet verkar däremot vara en bristvara. Bentley menar att det på många skolor i Sverige och andra länder tillämpas en formelmodell som kan lösa problemställningar men som inte bidrar till att eleven behöver förstå vad proportionalitet innebär. Beskrivningen verkar således överensstämma väl med det resonemang som förs av både Kaput och West (1994) samt Lamon (2007).

Vid proportionellt resonemang görs multiplikativa jämförelser av relationell karaktär. Detta resonemang skiljer sig från ett additivt på så vis att jämförelser av värden där görs i termer av summa eller differens (Hilton, Hilton, Dole, & Goos, 2013). Proportionellt resonemang kräver enligt Lesh, Post, and Behr (1988) en känsla för samvariation och multipla jämförelser. De resultat som Johansson and Lybeck (1978) presenterade för över 30 år sedan, beträffande hur elever resonerar proportionellt, kopplas i detta kapitel samman med senare forskning för att ge en bild av utvecklingen inom forskningsfältet.

2.1. Innebörd av proportionellt resonemang

Lamon (2007) menar att forskare då de använder sig av begreppet att ”resonera proportionellt” (proportional reasoning) ofta likställer det med förmågan att förstå sig på rationella tal. Detta har i förlängningen inneburit att det inom proportionalitetsområdet främst arbetas med problemformuleringar som liknar de som traditionellt används vid jämförelser av tal i bråkform och ekvationslösningar.

Den ena typen av problem går under benämningen *saknat värde* (missing value problem) vilket innebär att tre av fyra värden i proportionen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ är kända.

Problem som kan ta sig uttryck enligt följande:

> John makes lemonade concentrate by using 3 spoonfuls of sugar and 12 spoonfuls of lemonjuice. How much lemon juice would Mary need with 5 spoonfuls of sugar to make her concentrate taste just like John’s? (Karplus, Pulos, & Stage, 1983a, p. 53)

Den andra varianten av problem benämns som *jämförande problem* (comparsion problem) där samtliga värden i proportionen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ är kända. Målet är att i denna typ av uppgift kunna jämföra och se om förhållandet mellan $\frac{a}{b}$ är större än, mindre än, eller lika med $\frac{c}{d}$.

Problem av detta slag kan se ut enligt följande.

> John makes lemonade concentrate by using 3 spoonfuls of sugar and 12 spoonfuls of lemon juice. Mary makes concentrate by using 5 spoonfuls of sugar and 20 spoonfuls of lemonjuice. Whose lemonade concentrate is sweeter, John´s or Marys or do they taste the same (Karplus et al., 1983a, pp. 53-54)

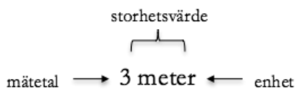
Lamon (2007) menar att det är möjligt att förståelse för rationella tal är en nödvändig förutsättning för att kunna urskilja de strukturella relationerna i problem av dessa slag men pekar också på att detta inte räcker för att en person ska anses kunna resonera proportionellt. Hon efterfrågar att personen även i bekanta kontexter bör kunna förklara och motivera varför relationen mellan olika storhetsvärden[4] är proportionella.

Proportionalitetsbegreppet är enligt Lamon (2007) betydligt vidare än definitionen av förmågan att resonera proportionellt. Med avsikt att visa på sådant som i denna studie inte beaktas presenteras nedan ett antal punkter som Lamon (2007) anser ryms inom proportionalitetsbegreppet.

Proportionalitetsbegreppet innefattar även att eleven ska[5]:

- kunna använda proportionalitet som en matematisk modell för att organisera verklighetsnära kontexter
- kunna urskilja situationer där proportionalitet är en lämplig matematisk modell att använda och när det inte är det
- kunna använda sig av funktioner för att förklara samvariation mellan två storhetsvärden.

[4] Storhetsvärde: (synonym: mätvärde) det värde som en storhet antar vilket kan uttryckas som ett mätetal och dess enhet (ur Kiselman & Mouwitz, 2008)



Figur 2. exempel. storhet: längd [figur är konstruerad av författaren]

[5] Ett urval av punkter relaterade till grundskolan ur Lamon, 2007, s. 639 har här gjorts och översatts av författaren.

- kunna förklara skillnaden mellan funktioner av formen $y = k \cdot x$, från $y = k \cdot x + m,$ där y i den sistnämnda inte är proportionell mot x $(m \neq 0)$
- veta att grafen till en direkt proportionell situation ($y = k \cdot x$) är en rät linje som går igenom origo samt att $y = k \cdot x + m$ inte gör det $(m \neq 0)$
- kunna särskilja olika typer av proportionella samband såsom direkt proportionalitet ($y = k \cdot x$), omvänd proportionalitet ($y = \frac{k}{x}$) samt exponentiella förhållanden ($y = k \cdot x^2 eller\ y = k \cdot x^3$)
- veta att *k* är det konstanta förhållandet mellan två storhetsvärden (quantities) i en direkt proportionell situation.

Moseley (2005) menar att elevers lärande av förhållande och proportionalitet gynnas av en tidig introduktion på så vis att jämförelser av perspektivet del-del då även möjliggörs. Elever som enbart arbetar med tal i bråkform fokuserar de numeriska värdena snarare än de relationer som dessa värden representerar. Införandet av ett nytt perspektiv kan därmed ställas mot det del-helhet perspektiv som tal i bråkform representerar. Detta utgör en jämförelse som annars riskerar att tas för givet[6] (ibid.). Vikten av att identifiera hur eleverna resonerar proportionellt och vilka svårigheter de har med olika sorters problem, både additiva och multiplikativa, har poängterats av flera forskare (se Bright, Joyner, & Wallis, 2003; Misailidou & Williams, 2003; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005). Forskning om proportionellt resonemang där kontextens betydelse parallellt problematiseras har varit svårare att finna. I många studier beskrivs hur elever uppfattar förhållande och utför beräkningar (se Karplus et al., 1983a; Vergnaud, 1988) men inte i relation till avgränsningar i termer av komplicerade kontexter som densitet, tryck eller värme.

2.2. Multiplikativa- och additiva samband

En grundproblematik avseende förståelse av proportionella samband tycks vara att eleverna ser sambanden som additiva när de bör förstås som multiplikativa. Ett matematiskt förhållande kan till exempel ses som ett multiplikativt samband mellan två tal eller två storhetsvärden där, beroende på vilka stor-

[6] Som exempel kan en juiceblandning med 2 delar juicekoncentrat och 5 delar vatten som tal i bråkform uttryckas i termer av del-hel, $\frac{2}{7} + \frac{5}{7}$, medan det i termer av förhållande och del-del utrycks 2:5. Detta beskrivs av Bentley (2011).

heter som behandlas, tre olika fall kan uppstå. Förhållande mellan tal, förhållande mellan lika storheter eller förhållandet mellan olika storheter. Algebraiskt kan ett förhållande utryckas som att talen a och b förhåller sig som $a:b$ $\left(\frac{a}{b}\right)$ eller omvänt[7] $b:a$ $\left(\frac{b}{a}\right)$. De tre olika fallen illustreras nedan med hjälp utav talen 6 och 4. Förhållandet är, beroende på vilket perspektiv som väljs, antingen 3:2 eller 2:3.

exempel 1: talen 6 och 4, inga storheter jämförs

exempel 2: storhetsvärdena 6 m och 4 m, lika storhet jämförs (längd)

exempel 3: storhetsvärdena 6 m och 4 s, olika storheter jämförs (längd och tid)

En multiplikativ jämförelse av två tal skiljer sig från en additiv jämförelse. Om det ena talet är 4 och det andra är 6 så är skillnaden 2. Detta gäller även då lika storhet jämförs som i exempel 2 ovan där en längd jämförs med en annan längd. I det tredje exemplet däremot, då storheterna skiljer sig åt, går det inte att göra additiva jämförelser, eftersom att det inte går att addera tid och längd. Multiplikativa jämförelser är emellertid möjliga i samtliga exempel men i det tredje exemplet bildas nya storheter, hastighet eller omvänt tid per längd. I exempel 2 och 3 formeras, vid multiplikativa jämförelser, något som i detta arbete benämns som en *sammansatt storhet* [författarens översättning, på engelska är benämningen *intensive quantity* (Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992; Kaput & West, 1994)]. Inom begreppet ryms även jämförelser av antal, där resonemang kan föras i termer av att antal inte är att betrakta som en storhet. Däremot har antal alltid en enhet. Det är alltid något som räknas till exempel barn, bussar, poliser eller kronor. Vad gäller antal kan lika enhet vara: kronor per kronor, personer per personer och så vidare. Olika enheter kan vara: äpplen per barn eller kronor per banan och så vidare. Inom en sammansatt storhet görs jämförelser därför av storhetsvärden med olika eller lika enheter. "Stycken" kan betraktas som en generell enhet när det är antal som har räknats. En sammansatt storhet, där olika eller lika storheter jämförs, har varit ett centralt begrepp vid utformning av undervisning i denna studie.

Inom fysiken används härledd storhet (Strömdahl, 1998), ett begrepp som till viss del överensstämmer med sammansatt storhet. Begreppet innefattar

[7] I detta arbete används omvänt förhållande i samband med tal i bråkform. Till exempel att det omvända förhållandet till $\frac{3}{2}$ är $\frac{2}{3}$.

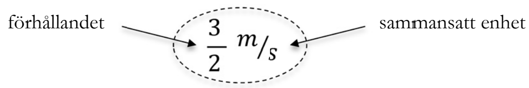
dock multiplicerade storheter såsom till exempel acceleration (m/s^2) vilka inte är linjärt proportionella. Det görs inga jämförelser av antal varför detta begrepp inte används i detta arbete. Enligt Howe, Nunes och Bryant (2011) kan begreppet sammansatt storhet (intensive quantity, se även kapitel 2.4.4) utgöra en enande faktor mellan naturvetenskapliga områden såsom till exempel densitet, hastighet och temperatur, områden vilka oftast behandlas separat. Inom dessa områden förblir skillnaden mellan de ingående storhetsvärdena och en sammansatt storhet ofta outtalad. Detta kan enligt författarna ta sig uttryck på så vis att eleverna bortser från en av variablerna. På vilket sätt detta görs framgår dock inte.

Ett annat begrepp som används i detta arbete är *par av storhetsvärden* [författarens översättning, på engelska är benämningen *composed unit*[8]]. Lamon (1993) påpekar att det vid proportionella jämförelser är användbart att betrakta ett förhållande som ett par av storhetsvärden (se Lamon, 1993, 1996; Lobato, Ellis, & Charles, 2010) då det är grunden för att i förlängningen kunna urskilja ett förhållande från de specifika värden som det i en given situation är uppbyggt av. Till skillnad från en sammansatt storhet, vilket kan ses som ett paraplybegrepp för proportionella jämförelser med hjälp av lika- eller olika storheter (enheter), är begreppet par av storhetsvärden mer specifik. En sammansatt storhet till exempel hastighet (m/s) kopplas med hjälp av begreppet par av storhetsvärden till jämförelser av specifika storhetsvärden till exempel 12 meter och 4 sekunder eller 3 apelsiner och 6 kronor.

> Research in proportional reasoning, for example, indicates that one of the most salient differences between proportional reasoners and nonproportional reasoners is that the proportional reasoners are adept at building and using composite extensive units and that they make decisions about which unit to use when choices are available, choosing more composite units when they are more efficient than using singleton units (Lamon, 1996, s.170-171).

---

[8] En direkt översättning av composed unit blir snarast sammansatt enhet. Då begreppet enhet på svenska är mångtydigt valdes detta alternativ bort. En sammansatt enhet kan i detta arbete snarare betraktas som den enhet som uppstår, då två olika storheter beaktas, om förhållande och enheter separeras.



Figur 3. Beskrivning av sammansatt enhet, [figuren är konstruerad av författaren]

2.2.1. Proportion och proportionalitet

Med avsikt att ytterligare belysa begreppen sammansatt storhet och par av storhetsvärden följer två illustrerade[9] sammanfattningar (Figur 4, 5). Därefter definieras begreppen proportion och proportionalitet följt av en beskrivning som förklarar på vilket sätt dessa begrepp hänger samman.

Sammansatt storhet: Paraplybegrepp för att beskriva kombinationen av två storheter (enheter) till exempel hastighet, volym per tid, densitet och pris per antal [författarens definition]

storhet $\rightarrow$

storhet $\rightarrow$

$$\overbrace{\frac{\text{längd}\ (m)}{\text{tid}\ (s)}}^{\text{sammansatt storhet}}$$

Figur 4. Exempel på en sammansatt storhet, hastighet.

Par av storhetsvärden: En kombination av två storhetsvärden.

storhetsvärde $\rightarrow$

storhetsvärde $\rightarrow$

$$\overbrace{\frac{3\ m}{2\ s}}^{\text{par av storhetsvärden}}$$

Figur 5. Exempel på par av storhetsvärde.

En proportion är en likhet mellan två förhållanden (Lobato et al., 2010). I en proportion är förhållandet mellan två storhetsvärden konstant då mätetalen hos korresponderande storhetsvärden förändras [författarens översättning ur Lobato et al., 2010, s.12].

$$\overbrace{\frac{3\ m}{2\ s} = \frac{9\ m}{6\ s}}^{\text{proportion}}$$

Figur 6. Exempel på proportion.

[9] Samtliga illustrerade figurer i detta arbete är konstruerade av författaren.

Ett mer generellt exempel på proportion/er är följande:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

Figur 7. Algebraisk beskrivning av proportion

En proportion uppfyller olika egenskaper och i Figur 8 ges en samlad bild av dessa egenskaper. Dessa egenskaper förekommer i matematikdidaktisk forskning och knyter an till olika förklaringar av elevers svårigheter med begreppet proportion samt i elevers användningar av olika problemlösnings-strategier. Fokus i detta arbete är inte en fördjupad granskning av matematiska definitioner utan att knyta an till den didaktiska delen.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \qquad \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c} \longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Figur 8. Olika egenskaper hos en proportion

Lobato (2013) beskriver den matematiska modellen för direkt proportionalitet som en linjär funktion där $y = k \cdot x$ där y är en konstant multipel av x och k är proportionalitetskonstant[10]. Ett annat sätt att beskriva det är att två storheter är proportionella då de varierar på ett sådant sätt att förhållandet är konstant vilket kan skrivas som $\frac{y}{x} = k$. En indirekt proportionalitet är $y = \frac{x}{k}$.

[10] Proportionalitetskonstant kan uttryckas dels som tal i bråkform till exempel $\frac{3}{4}$ eller i decimalform 0,75.

Proportion och proportionalitet är kopplade till varandra. En proportionalitet kan skrivas som en proportion genom omskrivning på så vis att en proportionalitet kan skrivas som två ekvivalenta förhållanden enligt följande.

$$\left.\begin{array}{l} y = k \cdot x \quad \leftrightarrow \quad \dfrac{y}{x} = k \\[2ex] y_1 = k \cdot x_1 \ \leftrightarrow \ \dfrac{y_1}{x_1} = k \end{array}\right\} \quad \text{proportionalitet}$$

$$\downarrow \uparrow$$

$$\left.\dfrac{y}{x} = \dfrac{y_1}{x_1}\right\} \quad \text{proportion}$$

Figur 9. Beskrivning av kopplingen mellan proportionalitet och proportion

Att ordet proportion i detta arbete används och kopplas till proportionella samband beror på att proportionalitet är grundat i proportion vilket exemplet ovan är tänkt att illustrera.

2.2.2. Att kunna skilja på additiva och multiplikativa samband

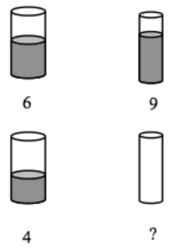
Ovan har en precisering av några av de begrepp (proportionellt resonemang, storhetsvärde, förhållande, sammansatt storhet, par av storhetsvärde, proportion, proportionalitet) som används i detta arbete gjorts. I texten som följer görs en beskrivning av hur elever uppfattar additiva samband snarare än multiplikativa.

Elever resonerar vanligtvis med enskilda storheter (t.ex. enbart längd eller enbart tid) innan jämförelser av storhetsvärden med olika storheter till exempel hastighet görs (Lobato et al., 2010). När elever möter de sistnämnda kan det enligt Lobato et al. (2010) leda till problem, vilket beskrivs med hjälp av nedanstående uppgift:

> Jonathan has walked 5 feet in 4 seconds. How long should Rafael take to walk 15 feet if he walks at the same speed as Jonathan? (Lobato et al., 2010, s.17)

En elev svarar att det tar 14 sekunder för Rafael att gå 15 fot. Elevens resonemang bygger på att 15 fot är 10 fot mer än 5 fot och att 10 sekunder därför ska adderas till 4 sekunder vilket innebär att svaret blir 14 sekunder istället för det korrekta svaret 12 sekunder. Eleven tar hänsyn till både avstånd och tid men resonerar additivt och fokuserar på hur mycket större eller mindre det ena storhetsvärdet är jämfört med det andra. Därmed uppfattas inte det multiplikativa förhållandet mellan talen (ibid.).

Detta additiva sätt att uppfatta samband mellan storhetsvärden beskrivs även av Johansson och Lybeck (1978). De använde sig av ett experiment med fyra stycken mätglas. Mätglasen kallades för de tunna eller de tjocka (se Figur 10) och dess basareor förhöll sig som 3:2. Mätglasen hade linjära skalor utan siffermarkeringar och enhet. När samma volym hade hällts i de båda övre mätglasen, och de hamnat på graderingen 6 respektive 9 (se Figur 10), så fylldes det andra tjocka röret med en mindre mängd till graderingen 4. Försökspersonerna fick därefter frågan hur högt motsvarande volym skulle komma i det tunna röret.



Figur 10. Illustration av mätglas i Johansson och Lybecks studie (1978).

Vissa elever såg additiva samband snarare än proportioner, vilket forskarna beskriver som att de såg det som en addition, eller differens. Eleverna såg till exempel att differensen mellan 6 och 9 i de övre bägarna var 3, överförde denna absoluta ökning till de nedre bägarna och fick då svaret till 7 (4+3) istället för det korrekta svaret 6. Andra elever såg att differensen mellan de tjocka mätglasen var 2 (6 – 4), en skillnad som de använde sig av genom att subtrahera 9 med 2 varvid svaret (också) blev 7 (ibid.). En tänkbar komplikation i detta fall kan vara huruvida elevernas förståelse för volym gjorde det svårt för eleverna att lösa denna uppgift.

I de ovan beskrivna exemplen gjordes jämförelser mellan storhetsvärden men inte den multiplikativa jämförelse som ett förhållande är förknippat med. Enligt Hilton et al. (2013) kopplas just förhållanden samman med jämförelser av storhetsvärden vid proportionellt resonemang. Att elever på detta sätt felaktigt använde sig av additiva metoder för att identifiera proportioner är väl dokumenterat i tidigare forskning (Hart, 1981; Kaput & West, 1994; Karplus et al., 1983b; Lesh et al., 1988; Tourniaire & Pulos, 1985). I senare forskning har dock även det omvända påvisats, att vissa elever använder sig av proportionella metoder för att lösa additiva problem (Modestou & Gagatsis, 2007; Van Dooren, De Bock, Evers, & Verschaffel, 2009). Van Dooren et al. (2009) beskriver detta med hjälp av följande uppgift som användes i deras studie [författarens översättning, s.10].

> Kim och Ellen springer runt en löparbana. De springer lika fort men Ellen startade senare. När Ellen har sprungit 16 varv har Kim sprungit 32 varv. Hur många varv har Kim sprungit när Ellen har sprungit 48 varv

Författarna beskriver ett inkorrekt proportionellt resonemang hos eleverna där det multiplikativa sambandet, dubbelt så mycket (Ellen 16 varv och Kim 32), överförs till den andra jämförelsen. Ellens 48 varv dubbleras och svaret blir att Kim sprungit 96 varv istället för den korrekta additiva skillnaden 60 varv (48+16). Denna typ av felaktiga svar pekar enligt Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock, and Verschaffel (2012) på vilka svårigheter elever har med att separera proportionella situationer från icke proportionella (se även Modestou & Gagatsis, 2007; Van Dooren et al., 2009). Van Dooren et al. (2005) beskriver det som att elever har en tendens att övergeneralisera proportionella metoder. Resultaten från en Belgisk studie av Van Dooren, De Bock, and Verschaffel (2010), där 325 elever i årskurs 3 till 6 deltog, visade att användandet av additiva metoder i proportionella situationer minskade i takt med stigande ålder. Det visade sig dock att även det omvända gällde, att proportionella metoder i ökande utsträckning användes i additiva situationer. Vid en efterföljande studie i Spanien där 755 elever i årskurs 4 – 10 deltog var slutsatsen densamma, vilket enligt forskarna tyder på att detta även gäller högre upp i åldrarna (Fernández et al., 2012). Det fanns dock skillnader mellan länderna vad gäller tidpunkten för övergången mellan additivt och multiplikativt resonemang. Forskarna beskriver det som att denna skillnad beror på att undervisning om proportionalitet introduceras senare i Spanien än i Belgien.

En annan problematik beskrivs av Karplus et al. (1983b) i en studie som undersökte hur 253 elever, 11 eller 13 år gamla resonerade proportionellt kring par av storhetsvärden (pairs of variables). De fann att elever som urskilde additiva samband snarare än multiplikativa främst gjorde det i uppgifter som saknade enheter. Med utgångspunkt från liknande resultat (se Karplus et al., 1983a; Vergnaud, 1988) drog forskarna slutsatsen att eleverna inte använde sig av additiva samband i lika stor utsträckning om enheter användes i uppgiften. Resonemanget kan tyda på att många elever är beroende av att förstå meningen bakom den information de får och inte bara numeriska värden men det kan samtidigt vara så att eleverna vant sig vid vissa mönster i skolmatematiken. Till exempel kan det i uppgifter med enheter oftare vara proportionella jämförelser som efterfrågas medan det i uppgifter med enbart siffervärden är additiva samband som frågas efter. Tourniaire och Pulos (1985) menar att storhetsvärden (quantities) med lika storhet till exempel antal per antal, kan upplevas som svårare. Vad gäller de numeriska värdena så är felaktigt användande av additiva metoder i proportionella situationer vanligare bland elever då andra värden än heltal behandlas (Fernández et al., 2012; Kaput & West, 1994; Tourniaire & Pulos, 1985; Van Dooren et al., 2009). I detta arbete används uppgifter i test och undervisning både med och utan enhet. Elevers eventuella svårigheter i denna studie med att identifiera proportionella samband med avseende på enheter problematiseras i diskussionskapitlet.

2.3. Att välja perspektiv genom att uppfatta ett inom- eller mellan-förhållande

En annan svårighet i förståelsen av proportionella samband består i vilka samband det är som urskiljs eftersom det finns mer än ett samband att förhålla sig till. Då jämförelser görs mellan 4 mätvärden i syfte att avgöra om det är en proportion eller inte finns det alltid två olika förhållanden att beakta. Antingen görs en multiplikativ jämförelse av täljare och nämnare *inom* ett förhållande (within a ratio) - ett samband som överförs och jämförs med ett andra förhållande, täljare/nämnare (se Figur 11 nedan) - eller så görs jämförelser *mellan* två förhållanden (between two ratios) i proportionen fast då med avseende på täljare/täljare respektive nämnare/nämnare (se Figur 12 nedan) (Tourniaire & Pulos, 1985 via; Siegler, 1976, 1978; Case, 1979).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Figur 11. Multiplikativ jämförelse täljare/nämnare i en proportion.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Figur 12. Multiplikativ jämförelse täljare/täljare i en proportion.

Historiskt har begreppen *inom* och *mellan* använts olika inom matematiken och naturvetenskapen med avseende på om samma eller olika enheter behandlas (Freudenthal, 1973, 1978; Karplus et al., 1983b; Lamon, 2007) vilket Lamon (2007) menar kan upplevas som förvirrande. P. W. Thompson (1994) anser att det ur ett lärandeperspektiv är viktigare att fokusera på hur eleverna uppfattar förhållande. Ur ett lärandeperspektiv är detta av intresse men det säger inget om hur de förhållanden som eleverna uppfattar ska kunna beskrivas och kommuniceras mellan forskare och lärare. Lamon (2007) låter förstå att förvirringen kring begreppen inom och mellan lätt kan lösas till exempel genom att i stället tala i termer av inom och mellan system. Ett system kan till exempel vara en behållare där juice i ett visst förhållande blandas. Om behållaren utgör ett system kan jämförelser göras med andra behållare med lika eller olika juicekoncentration varvid resonemang kan föras i termer av inom bägare (system) eller mellan bägare (system). I detta arbete är en sammansatt storhet ett centralt begrepp. En sammansatt storhet kan identifieras *inom* de system som Lamon (2007) beskriver i termer av till exempel vatten per juicekoncentrat i behållaren. Jämförelser av juicekoncentration kan därefter göras *mellan* bägare och den sammansatta storheten (vatten per juice) i de två systemen (bägarna). I Lamon (2007) görs endast jämförelser mellan två ”saker”. I systemet bägare kan även andra ingredienser blandas till exempel vatten, juicekoncentrat, socker och vodka. Då uppstår fler förhållanden att beakta om en proportionell blandning ska göras. I juicebägaren finns nu flera sammansatta storheter (i olika eller samma förhållande).

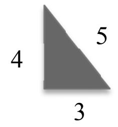
En människokropp med alla dess inre och yttre förhållanden kan ses som ett annat exempel på ett system, med mängder av tänkbara sammansatta storheter i specifika förhållanden: benets längd per armens längd, röda blodkroppar per liter blod och så vidare. Sammansatta storheter ur vilket ett oändligt antal par av storhetsvärden i proportion kan skapas i respektive förhållande. Att tala i termer av system och förhållanden inom och mellan dessa i relation till de begrepp som används i denna studie tycks lämpligt. Då jämförelser av enbart två enheter eller storheter görs, vilket ofta är fallet i funktionssamband (såsom till exempel densitet, hastighet och andra inom naturvetenskapen härledda storheter) är det inte nödvändigt att tala i termer av system. I dessa fall räcker det att beskriva inom- och mellan-förhållandet i en sammansatt storhet. Vid användning av begreppet densitet görs till exempel bara jämförelser mellan volym och vikt vilket kan göras genom att resonera i termer av förhållandet, *inom* ett par av storhetsvärden eller *mellan* två par av storhetsvärden i denna sammansatta storhet. Begreppen inom och mellan används därför i detta arbete i relation till vilket förhållande som i det specifika fallet kan hittas: *i* ett par av storhetsvärden, *i* en sammansatt storhet, *i* ett system av sammansatta storheter. Detta exemplifieras med hjälp av två exempel.

I en situation där en elev ska hitta en hastighet motsvarande 6 m på 4 s kan det vara lämpligt att betrakta meter per sekund som en sammansatt storhet *inom* vilket funktionssambandet hastighet med hjälp av förhållandet *inom* par av storhetsvärden återfinns. För att hitta en proportionell hastighet kan inom förhållandet, i detta fall 3:2, användas på så vis att sträckan alltid ska vara 1,5 gånger större än tiden. I detta fall identifieras proportionalitetskonstanten. Alternativt så bestäms ett nytt förhållande *mellan* par av storhetsvärden till exempel 1:20. Ett förhållande med vars hjälp en proportion kan skapas $\left(t.ex. \frac{6\,m}{4\,s} = \frac{20 \cdot 6\,m}{20 \cdot 4\,s} = \frac{120\,m}{80\,s}\right)$.

Handlar det däremot om att skapa en likformig triangel kan triangeln betraktas som ett system *inom* vilket jämförelser av längder kan göras. I en rätvinklig triangel går det, beroende på var man mäter, att hitta mängder av sammansatta storheter i specifika förhållanden. Om enbart sidornas längd jämförs till exempel 3, 4 och 5 (se Figur 13 nedan) finns tre sammansatta storheter (bas/höjd, bas/hypotenusa och höjd/hypotenusa) i tre förhållanden och tre omvända förhållanden: 3:4 (4:3), 4:5 (5:4) och 3:5 (5:3). Med hjälp av förhållandena *inom* detta system kan ett oändligt antal par av storhetsvärden i samma förhållanden skapas. Om basen i en annan likformig triangel ska vara till exempel 60 kan höjd och hypotenusa hittas genom att utnyttja förhållandet *inom* systemet enligt följande.

Förhållandet bas/höjd används vid beräkning.
$$Höjd = \frac{4}{3} \cdot 60 = 80 \; (alternativt\; 4 \cdot \frac{60}{3})$$

Förhållandet bas/hypotenusa används vid beräkning.
$$Hypotenusa = \frac{5}{3} \cdot 60 = 100 \; (alternativt\; 5 \cdot \frac{60}{3})$$

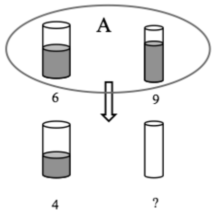


Figur 13. Exempel på ett system, en rätvinklig triangel ur vilken sammansatta storheter kan identifieras.

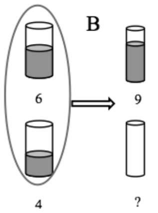
Proportioner skapas med hjälp av förhållanden inom systemet likformig triangel. Om det däremot ska skapas en likformig triangel i ett annat specifikt förhållande till exempel en förstoring av triangeln i skala 100:1 används inte förhållandena inom systemet utan de specifika värdena multipliceras med 100. Ett förhållande *mellan* system och sammansatta storheter skapas.

Vilket system eller sammansatt storhet som väljs bör kopplas till vilken proportionalitetskonstant (k-värde) som i det specifika innehållet bedöms vara av intresse för eleverna att urskilja. Enligt Lamon (2007) är begreppet ”slipery” då det byter skepnad i varierande kontexter och representationsformer. Vanligtvis är k-värdet inte synligt i den kontext där den spelar roll utan snarare ett strukturellt element som ligger dolt under de synliga detaljerna. Då en karta läses är *k*-värdet skalan, om figurer förminskas eller förstoras är det en skalfaktor eller om till exempel ränta eller skattesats diskuteras kan den ta sig uttryck i form av procent (ibid.). Detta kan tolkas som exempel på att det kan vara lämpligt att fundera över vilken proportionalitetskonstant som eleverna i en undervisningssituation bör ges möjligheten att lära sig att se.

I det tidigare beskrivna experimentet med mätglasen använde sig Johansson och Lybeck (1978) både av de tidigare nämnda begreppen inom/mellan och proportionalitetskonstant. Elevsvaren delades in i två huvudkategorier (A och B) som Johansson och Lybeck (1978) menade visade på två olika tankeriktningar hos eleverna. Dessa benämndes olika funktionsaspekter, och syftade på de variabler eleverna använde sig av och med vars hjälp de sedan utförde en beräkning. Kategori A bestod av svar som visade att eleverna använde sig av förhållandet mellan de båda övre mätglasen, mätglas som var av olika slag (se Figur 14 nedan). Detta förhållande överfördes efteråt till de båda andra mätglasen. I kategori B placerades svar som pekade mot att eleverna istället såg förhållandet inom mätglas av samma sort och sedan utnyttjade detta förhållande i beräkningen av det andra mätglasets volym (se Figur 15 nedan).



Figur 14. Elever som använde förhållande mellan olika bägare vid beräkning placerades i kategori A. En kategori som representerar en tankeriktning (funktionsaspekt).



Figur 15. Elever som använde förhållande mellan lika bägare vid beräkning placerades i kategori B. En kategori som representerar en annan tankeriktning (funktionsaspekt).

Johansson och Lybeck (ibid) menar att det ur metodisk synpunkt är viktigt att eleverna upptäcker funktionsaspekten i kategori A (förhållandet), eftersom dessa variabler är mer relevanta. Om eleven väljer att använda denna relation kan eleven upptäcka en generell proportionalitetskonstant $(\mathrm{y} = k \cdot \mathrm{x})$. Detta är något som elevsvaren i kategori B, som behandlar förhållandet inom mätglas av samma slag, inte ger uttryck för eftersom att det, enligt Johansson och Lybeck (1978) inte finns någon generell direkt proportionalitet. Detta beskrivs i termer av att eleverna i kategori B visserligen använder sig av ett funktionstänkande men att det inte går att finna någon generell konstant varför detta slags funktionstänkande inte leder till den eftersträvade begreppsbildningen.

> Poängen med våra kategorier A och B är att relationstänkandet i A kan ges den form som ligger till grund för införandet av sådana fysikaliska begrepp som är kopplade till varandra genom proportionalitetssamband $(y = k \cdot x)$. Om eleven väljer att utnyttja detta relationstänkande kan han upptäcka en generell konstant. Väljer eleven däremot ett relationstänkande som i B hittar han inte en generell konstant utan måste hela tiden plocka fram nya "konstanter". Sättet att kvantifiera kan vara detsamma i A och B, men i A får eleven bara en obekant (y) under det att eleven i B varje gång får två obekanta ("k" och "y") (Johansson & Lybeck, 1978, s.124)

Vad som tas för givet i denna situation är att författarna menar att proportionalitetskonstanten enbart går att finna i funktionsaspekt A och inte i B. Den finns i båda men speglar olika aspekter om hänsyn tas till: samma volym i olika bägare där volymen är invariant men bottenytan varierar (A), olika volym i lika bägare där volymen varierar men bottenytan är konstant (B). Författarna menar att funktionstänkandet i kategori A är fruktbart vid kvantifiering (beräkning) då den enkelhet som direkt proportionalitet leder till är av grundläggande betydelse vid naturvetenskaplig begreppsbildning. Det kan mycket väl vara sant på samma vis som att proportionalitetkonstanten mellan tid och längd vid diskussioner om hastighet ofta är av större intresse att uppfatta än den mellan samma storheter. Ett resonemang om *varför* funktionssambandet A är fruktbart vid beräkning av naturvetenskapliga begrepp saknas dock. Citatet ovan pekar mot att det vid val av funktionsaspekt (i detta arbete sammansatt storhet) och de par av storhetsvärden som däri ingår är värt att fundera över om det i den sammansatta storheten finns en proportionalitetskonstant som i förlängningen kan vara lämplig att urskilja. Sambanden och att det i funktionsaspekt A enbart blir en obekant (y) men i B två (k och x) problematiseras i detta arbetes diskussionskapitel (kap. 7.2.3).

2.4. Elevers beräkningsstrategier för att lösa proportionella problem

Efter att ha lyft fram problematiken i de sätt elever uppfattar proportionella samband riktas fokus i detta avsnitt mot de strategier elever använder för att beräkna med hjälp av sambanden. Strategierna utgår från de sätt eleverna erfar sambanden och kan därför ses som ett uttryck för detta erfarande. Koellner - Clark och Lesh (2003) beskriver olika utvecklingsfaser vad gäller proportionellt resonemang som en elev går igenom då den löser ett problem. För det första; hur problemet tolkas av eleven till exempel om eleven uppfattar alla bärande delar av problemet och relevant data, för det andra; om elever uppfattar kvalitativa samband såsom den tidigare beskrivna skillnaden mellan multiplikativa och additiva samband. Även om eleven uppfattar allt detta är det ändå inte säkert att den kan lösa problemet på grund av beräkningssvårigheter (ibid). I tidigare forskning finns många beskrivningar av hur elever kvantifierar och använder olika strategier för att identifiera proportionella samband. I detta avsnitt beskrivs hur det i huvudsak sker på tre skilda sätt: genom att additivt upprepa eller dela par av storhetsvärden; genom att göra multiplikativa jämförelser mellan par av storhetsvärden eller att med hjälp av multiplikativa jämförelser inom ett par av storhetsvärden skapa eller identifiera proportioner (se Koellner-Clark & Lesh, 2003). Det finns för- och nackdelar med samtliga av nämnda strategier och det går inte att säga att den ena är mer lämplig än den andra, utan de kan vara olika lämpliga att använda i olika kontexter eller med olika numeriska värden. Begreppet strategi kan upplevas som något statiskt som upprepas mekaniskt. Johansson och Lybeck (1978) benämner de olika strategier som eleverna använder sig av för kvantifieringsaspekten. I detta arbete ses de olika strategierna som multipla och olika sätt att med hjälp av de fyra räknesätten relatera proportionella värden till varandra men de benämns i detta arbete som beräkningsstrategier.

2.4.1. Uppbyggnadsstrategi

Ett elementärt förfarande vid jämförelser av förhållanden har av Hart (1981) benämnts *uppbyggnadsstrategi* [författarens översättning, på engelska är benämningen building up strategy]. Tourniaire och Pulos (1985) beskriver detta förfarande som att en relation etableras mellan värden inom ett förhållande (ratio), en relation som sedan additivt utökas till ett annat förhållande. Med den terminologi som används i detta arbete kan det beskrivas i termer av att etablera ett par av storhetsvärden och additivt utöka detta par av storhetsvärden till en proportion. Som exempel använder sig Tourniaire och Pulos (1985) av följande frågeställning; Om 2 godisbitar kostar 8 kr vad kostar då 6 godisbitar? En elev som använder sig av ovan nämnda uppbyggnadsstrategi kan då föreslå att 4 bitar kostar 16 kr och att 6 bitar kostar 24 kr. Med den terminologi som Lamon (2007) använder sig av kan detta ses som ett exempel på när par av storhetsvärden (composed units) adderas enligt följande $\frac{8\,kr + 8\,kr + 8\,kr}{2\,godis + 2\,godis + 2\,godis} = \frac{24\,kr}{6\,godis}$ vilket av Lamon (1999) beskrivs i termer av att ha en förmåga att hantera två talserier parallellt. Algebraiskt kan detta uttryckas som att en proportion identifieras enligt följande.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

Figur 16. Algebraisk beskrivning av uppbyggnadsstrategi

Viktigt att poängtera är att detta inte är samma sak som att addera tal i bråkform med olika nämnare.

Lamon (2007) menar att uppbyggnadsstrategi är en primitiv men användbar strategi i vissa situationer. Eleven kan urskilja mönster och upprepa detta för att hitta specifika värden men hon påpekar samtidigt att det inte kan betraktas som proportionellt resonemang eftersom proportionalitetskonstanten mellan två storheter inte beaktas. Lobato et al. (2010) anser att en uppbyggnadsstrategi är en elementär men ändå fundamental förmåga som är viktig för att kunna resonera proportionellt. Fortsättningsvis benämns denna strategi i samband med att andra beräkningsstrategier presenterats som *uppbyggnadsproportion/strategi*.

2.4.2. Multiplikativ lösningsstrategi

Att skilja på uppbyggnadsstrategi och multiplikativa strategier vid proportionellt resonemang finns beskrivna i flera forskningsstudier (se Hart, 1981; Johansson & Lybeck, 1978; Lobato et al., 2010; Vergnaud, 1988). Vid multiplikativa strategier urskiljs ett förhållande som sedan kan användas för att skapa eller jämföra proportioner. I det ena fallet, vilket exemplifieras i detta avsnitt, urskiljs och används förhållandet *mellan* par av storhetsvärden[11] vid beräkningar. Strategin kan exemplifieras med hjälp av Lobato et als. (2010) beskrivning av hur elever i deras studie gjorde för att skapa en hastighet som är samma som 10 m på 4 s. En elev upprepade längden och tiden och konstaterade att 30 m på 12 s är samma hastighet. Såsom det beskrivs kan eleven ha urskilt förhållandet på två olika sätt.

Exempel 1. $10\ m\ på\ 4\ s + 10\ m\ på\ 4\ s + 10\ m\ på\ 4\ s = 30\ m\ på\ 12\ s$

Exempel 2. $\frac{3 \cdot 10\ m}{3 \cdot 4\ s} = \frac{30\ m}{12\ s}$

En elev som använder sig av strategin i det övre exemplet ser förmodligen 10 m på 4 s som ett par av storhetsvärden där hela enheten adderas i syfte att hitta ett annat sätt att representera samma hastighet. Detta utgör ytterligare ett exempel på en uppbyggnadsstrategi. Däremot behöver en elev som använder sig av strategin i det undre exemplet inte nödvändigtvis se 10 meter per 4

[11] ”De gamla grekerna” behandlade inte sammansatta storheter där olika storheter ingick såsom hastighet (m/s). De använde sig bara av förhållandet mellan samma storhet vid proportionella problem (J. Thompson, 1996).

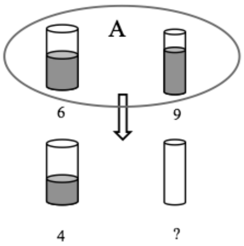
sekunder som en sammansatt storhet utan bestämmer ett förhållande mellan storhetsvärdena i täljare – täljare och nämnare – nämnare vilka faktoriseras separat i syfte att hitta proportioner. Det undre exemplet (ex.2) är ett exempel på en multiplikativ strategi. Kombinationer av dessa båda strategier är också möjliga. Hur lång tid tar det till exempel för personen som rör sig 10 m på 4 s att, med samma hastighet, förflytta sig 25 m? En möjlig lösning är att multiplicera 10 m och 4 s med 2 och därefter addera en halv ursprunglig sammansatt storhet, det vill säga en kombination av uppbyggnads- och multiplikativ strategi.

Exempel 3. $\frac{2 \cdot 10\ m + 10\ m/2}{2 \cdot 4\ s + 4\ s/2} = \frac{25\ m}{10\ s}$

2.4.3. Multiplikativ lösningsstrategi med hjälp av ett direkt förhållande

I den tredje strategin utnyttjas ett direkt förhållande. Johansson och Lybeck (1978) uttrycker ett direkt förhållande antingen i termer av; decimalform till exempel 1,5 (invers 0.66…), eller som ett tal i sin enklaste bråkform till exempel $\frac{3}{2}$ (invers eller omvänt $\frac{2}{3}$). Ett direkt förhållande talar om hur stor del det ena storhetsvärdet jämfört med *en* hel enhet av det andra storhetsvärdet är. Den beräkningsstrategi där ett direkt förhållande används beskrivs nu med hjälp av ett exempel ur Johansson och Lybecks (1978) studie, en strategi Kaput and West (1994) benämner *the unit factor strategy* där unit factor är en *rate* (förändringsfaktor). En elev som urskilde det direkta förhållandet mellan volymen i bägare av 2 olika slag (kategori A, se Figur 17 nedan)[12] använde sig av multiplikation eller division för att hitta kvoten. Förhållandet användes därefter för att hitta en proportion och den okända höjden i mätglaset. Ett resonemang som kan sammanfattas enligt följande:

[12] I detta arbete är denna kategori samma som att urskilja förhållandet *inom* ett par av storhetsvärden (*inom* systemet olika bägare). Det förhållande där den proportionalitetskonstant som i det specifika fallet är av intresse att studera står att finna.



Figur 17. Förhållande olika bägare.

$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ $eller$ $1{,}5$ ger $1{,}5 \cdot 4 = 6$ eller algebraiskt som $\frac{y}{x} = 1{,}5$ ger $y = 1{,}5 \cdot x$

alternativt

$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ger $\frac{3}{2} \cdot 4 = 6$ eller algebraiskt som $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ ger $y = \frac{3}{2} \cdot x$

Ett annat alternativ som beskrivs är elever som använde sig av det direkt omvända förhållandet.

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ger $\frac{4}{2/3} = 6$ eller algebraiskt som $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ger $x = \frac{2}{3} \cdot y$

I dessa exempel lyckades eleverna hitta det saknade värdet men forskarna visar och belyser med exempel att det inte nödvändigtvis räcker med att identifiera det direkta förhållandet för att lösa problemet. Risken finns att därefter multiplicera eller dividera felaktigt. Denna metod benämner forskarna direkt proportionalitet. Lamon (1999) menar att denna metod vilken hon beskriver som att ”att räkna till en” sällan leder till någon god förståelse för proportionalitet eftersom eleverna oftast bara lär sig en metod för att lösa uppgiften, det vill säga en procedurell snarare än en konceptuell kunskap. Metoden kan också leda till svårigheter då delningen inte går jämt upp och där många decimaler måste hanteras. Enligt Lundberg (2011), som studerat vilka olika typer av proportionella uppgifter som förekommer i svenska läromedel, tycks denna metod vara vanligt förekommande i de exempel på lösningar som där ges. I de nationella proven på gymnasieskolan förordas ofta denna lösningsstrategi. Strategin benämns inte sällan ”vägen över ett”(ibid.).

Kilborn (1990) låter förstå att det vid division kan vara lämpligt att resonera i termer av innehålls och delningsdivision. Delningsdivision exemplifieras med att det är enkelt att förstå att om 2 personer ska dela på 800 kr så får personerna 400 kr var. Om däremot 800 kr ska fördelas på 200 personer är det enklare att se det som en innehållsdivision och hur många gånger 200 innehålls i 800 (ibid.). Ett liknande resonemang förs av Ball (1990) men då i relation till svårigheter att förstå att en kvot, då nämnaren är mellan noll och ett, blir större än täljaren. Framförallt tyder deras studie på att så är fallet om inte koppling kan göras till hur många gånger nämnaren innehålls i täljaren, det vill säga innehållsdivision. I denna studie införs och används begreppen *plats* och *dela* i undervisningen vilka har en liknande men till vissa delar annan innebörd än innehålls och delningsdivision. Detta problematiseras i diskusionsdelen (kap. 7.2.4).

2.4.4. Statisk proportion och dynamisk proportionalitet

De tre strategier som ovan presenterats relateras i detta avsnitt till begreppen inom- och mellan-förhållande. Statisk proportionalitet och dynamisk proportionalitet (Miyakawa & Winsløw, 2009) är två nya begrepp vilka definieras i texten som följer och som kopplas till de ovan nämnda multiplikativa strategierna. Statisk proportionalitet knyts till begreppet proportion och i detta arbete används därför begreppen statisk proportion och dynamisk proportionalitet. Detta resonemang utvecklas senare i detta avsnitt. I efterföljande avsnitt görs även en avslutande sammanfattning av de begrepp som i detta kapitel presenterats och som används i denna studie.

Det engelska begreppet *rate*[13] kan enligt Lobato et al. (2010) ses som ett oändligt antal ekvivalenta förhållanden (ratios[14]) eller par av storhetsvärden (composed units). Om en elev inte kan urskilja proportionalitetskonstant är det inte möjligt för denna elev att upptäcka att det går att skapa oändligt antal proportioner. Även om eleven uppfattar det generella samband som proportionalitetskonstanten representerar är det ändå inte säkert att eleven kan omsätta detta förhållande till andra par av storhetsvärden i proportion med de

[13] Thompson (1994) förespråkar denna definition av rate mot den mer konventionella där rate innebär en jämförelse av två mängder med olika enheter (t.ex. m/s eller liter/krona) och ratio en jämförelse av mängder med samma enhet (t.ex. kr/kr). Enligt den senare definition baseras skillnaden mellan ratio och rate snarare på uppgiften och storheterna i sig än på hur eleverna uppfattar situationen (ibid.)

[14] En ratio kan enligt Lobato et al. (2010) antingen ses som en multiplikativ jämförelse av två storhetsvärden (förhållande) eller som en sammanslagning av två storhetsvärden i en composed unit (sammansatt storhet). Med utgångspunkt från Lobato et als. (ibid.) resonemang kan det engelska begreppet rate ses som en proportionalitetskonstant eller en förändringsfaktor.

ursprungliga värdena. Till detta krävs det någon slags beräkning. Miyakawa och Winslöw (2009) belyser beräkningar av olika slag då de särskiljer proportionalitetsbegreppet i statisk och dynamisk proportionalitet. Dynamisk proportionalitet definieras via det generella matematiska sambandet $y = k \cdot x$ där k är konstant, en konstant som ofta benämns som en förändringsfaktor. Detta resonemang överensstämmer med Lobato et als. (2010) ovan beskrivna definition av det engelska begreppet *rate*. Statisk proportionalitet kan istället ses som par av storhetsvärden av ändlig karaktär vilka kan illustreras i form av till exempel en värdetabell. Ur ett didaktiskt perspektiv beskrivs dynamisk proportionalitet som mer avancerad än den statiska eftersom det krävs att det proportionella sambandet uppfattas på ett mer generellt sätt (Miyakawa & Winsløw, 2009). Däremot beskriver de även det omvända, att statisk proportionalitet ur ett matematiskt perspektiv kan ses som mer allmängiltigt då par av storhetsvärden och proportioner beaktas. Vid statiskt proportionell beräkning görs jämförelser av 4 storhetsvärden vilket inte är fallet med dynamisk proportionalitet där enbart jämförelser av två storhetsvärden görs (ibid.) I detta arbete förordas och används det didaktiska perspektivet och föregående definition av statisk proportionalitet. Då statisk proportionalitet behandlar proportioner snarare än proportionalitet benämns fortsättningsvis statisk proportionalitet som *statisk proportion* i detta arbete.

Kaput & West (1994) beskriver skillnaden mellan statisk proportion och dynamisk proportionalitet på ett liknande sätt som Miyakawa och Winslöws (2009) didaktiska perspektiv men med en annan terminologi. Sammansatta storheter (t.ex. hastighet eller densitet), som de benämner som intensive quantities, kan betraktas på två fundamentalt olika sätt. Antingen kan de ses som particular intensive quantities (par av storhetsvärden) vilket är fallet då till exempel specifika värden i en värdetabell eller en uppgift studeras. Men de kan också ses som *rate intensive* quantities vilket innebär att proportionalitet uppfattas som ett linjärt funktionellt samband på det sätt som Karplus et al. (1983b) definierar det. De menar att förmågan att resonera proportionellt kännetecknas av behärskande av att…

> […] reasoning in a system of two variables between which there exists a linear functional relationship. (Karplus et al., 1983b, p. 219)

Kaput och West (1994) anser att elever måste ges möjligheten att i undervisningen genomgå en serie mentala operationer där par av storhetsvärden (particular intensive quantities) behandlas innan de kan generalisera detta resonemang och bygga upp sina kognitiva strukturer[15] så att den mer abstrakta förmågan som behandlar dynamisk proportionalitet (rate intensive quantities) nås.

> After all, one must experience more than one particular instance before those instances can possibly be experienced as sharing anything. (Kaput & West, 1994, p. 241)

Citatet pekar mot vikten av att först statiskt urskilja flera par av storhetsvärden i proportion till varandra, till exempel i form av en värdetabell, innan urskiljning av den dynamiska proportionaliteten är möjlig. Resonemanget överensstämmer med Singh (2000) som menar att elever, för att utveckla sin förståelse för proportionalitet, i undervisningen bör få erfara flera förhållanden samtidigt. Värt att notera är att statisk proportion och dynamisk proportionalitet i detta arbete alltid relateras till begreppen par av storhetsvärden/sammansatt storhet och förhållandet inom och mellan. Vid dynamisk proportionalitet görs, med hjälp av proportionalitetskonstant[16], jämförelser *inom* par av storhetsvärden *i* en sammansatt storhet. Vid statisk proportion görs istället jämförelser med hjälp av statiskt förhållande *mellan* par av storhetsvärden. En statisk (multiplikativ) strategi. Så är fallet i samtliga exempel i detta arbete men eftersom dynamisk proportionalitet är avhängigt vilken proportionalitetskonstant som i det specifika fallet anses vara av primärt intresse för eleverna att urskilja kan dynamisk proportionalitet även vara förknippat med mellanförhållandet och statisk proportion med inom-förhållandet. Val av perspektiv avgör. Ett alternativt perspektiv beskrivs av Svanteson Wester (2014) i en studie där skala och två dimensionella figurer fokuseras. Uppbyggnadsstrategin (addera, subtrahera par av storhetsvärden) är också av statisk karaktär eftersom att proportionalitetskonstanten inte heller här används. Vikten av att använda och relatera dessa begrepp till varandra problematiseras i diskussionskapitlet (kap. 7.2.5).

I detta kapitel har i tidigare forskning beskrivna svårigheter elever har med att resonera proportionellt presenterats. Ett flertal studier beskriver hur det med hjälp av intervjuer, diagnoser före eller under lektioner går att identifiera dessa svårigheter (se Clark, Berenson, & Cavey, 2003; Fernández et al., 2012; Hilton et al., 2013; Kaput & West, 1994; Van Dooren et al., 2010; Vergnaud,

---

[15] Beskrivningen tyder på underliggande teoretiska antaganden om lärande av konstruktivistisk karaktär.

[16] Ett direkt förhållande av dynamisk karaktär

1988). I tidigare forskning beskrivs även ett stort antal uppgifter konstruerade i syfte att erbjuda eleverna möjligheter att utveckla sin förmåga att resonera proportionellt (se Howe et al., 2011; Koellner-Clark & Lesh, 2003). Däremot är det inte så vanligt med studier som belyser på vilket sätt de ovan beskrivna specifika svårigheterna kan kopplas och i undervisningen synliggöras i relation till innehållets behandling på lektionerna (se Lamon, 2007; Lobato et al., 2010).

2.5. En sammanfattning av begrepp ur forskningsöversikten

De begrepp (kursiverat) som i denna studie används vid analys och beskrivning av den empiriska studien sammanfattas här. Ett multiplikativt samband, ett *förhållande*, kan identifieras mellan mätetal eller *storhetsvärden* (mätetal med enhet) med samma eller olika enhet till exempel 6 m och 4 s eller 6 m och 4 m. En *sammansatt storhet* [författarens översättning av intensive quantity] används i detta arbete som ett paraplybegrepp för jämförelser av storheter (även antal) där storhetsvärden med samma eller olika enhet ingår till exempel m per s eller m per m. Det engelska begreppet composed unit har i detta arbete översatts till *ett par av storhetsvärden*. Ett par av storhetsvärden är specifika värden inom en sammansatt storhet till exempel 12 m per 4 s. Vid jämförelser av fyra storhetsvärden vilka kan vara i *proportion* till varandra finns det alltid två förhållanden att beakta. I detta arbete benämns de som *inom-* och *mellan*-förhållande. Inom-förhållande, går att finna *i* ett par av storhetsvärden (t.ex. 70 cm/90 cm), *i* en sammansatt storhet (t.ex. armlängd/benlängd), *i* ett *system* (t.ex. en person) och mellan-förhållandet *mellan*: par av storhetsvärden, sammansatt storhet, system (mellan personer). Exempel på sammansatta storheter är funktionssamband såsom hastighet, densitet och system av sammansatta storheter: recept, ritning, klassrum och så vidare. Vilket system eller sammansatt storhet som väljs beror på vilken eller vilka proportionalitetskonstant/er som i en given kontext är av intresse att uppfatta. De beskrivningar av hur elever uppfattar proportionella samband och kvantifierar problem av karaktären jämförande eller saknat värde, som identifierats i forskningsöversikten, pekar på i huvudsak tre skilda sätt:

- *uppbyggnadsproportion*- strategi av statisk karaktär där par av storhetsvärden adderas eller subtraheras

- *statisk proportion* - det multiplikativa sambandet (förhållandet) mellan sammansatta storheter uppfattas/etableras och används vid beräkning
- *dynamisk proportionalitet* - förhållandet inom sammansatt storhet, det direkta förhållandet, motsvarande proportionalitetskonstant, uppfattas/etableras och används vid beräkning

Förmågan att urskilja proportionella samband är till sin karaktär flexibel. Det innebär att utifrån givna ramar, såsom kontext och numeriska värden, kunna anpassa sitt sätt att angripa proportionella problem på.

3. Elevers förståelse av proportionella samband – en förstudie

Innan detta arbetes studie iscensattes genomfördes en fenomenografiskt inspirerad förstudie (Magnusson, 2012) där åtta slumpvis utvalda[17] elever i årskurs 8 intervjuades. Dessa elever gick på en annan skola än den där studien sedan genomfördes. Avsikten med denna förstudie var att identifiera och analysera kvalitativa skillnader av hur eleverna i samma ålder som i huvudstudien tycktes uppfatta och resonera kring fenomenet proportionella samband. Beslutet att välja andra elever än de i som ingår i studien grundades i att förstudiens design i sig innebar ett lärtillfälle, vilket i så fall skulle påverka möjligheten att studera på vilket sätt de genomförda lektionerna bidrar till elevernas utvecklade förståelse av proportionella samband. Uppgifterna som användes var liknande de som därefter, i reviderad form, ingick i huvudstudiens lektioner, vilket innebar att analysen av förstudiens resultat även bidrog till utformningen av lektionsuppgifternas design i huvudstudien.

Det innehåll som resonemanget kretsade kring var ett recept där eleverna fick i uppgift att anpassa ett grundrecept för ett visst antal personer till ett proportionellt recept för ett annat antal personer. Hur många personer recepten var avsedda för var inte explicit angivna. Intentionen var att eleverna skulle ges möjlighet att uttrycka hur de uppfattar proportionella samband genom att omvandla recepten, inte att relatera dem till antalet personer de var avsedda för.

3.1. Utformande av förstudie

Vid konstruktion av uppgifter stod valet mellan ett flertal varianter av recept. Till slut valdes följande två frågeställningar ut:

[17] Var tredje elev på klasslista valdes ut och intervjuades enskilt av mig.

Jossan och Johan ska baka pinnbröd men de har inte fått med all information i receptet. Hjälp dem att fylla i det som saknas. Varje kolumn motsvarar ett recept för ett visst antal personer.

Salt	1,5 tsk	1 tsk	2 tsk
Mjöl		2 dl	
Vatten		3 dl	

Figur 18. Förhållandet mellan de 3 recepten är 3:2:4. Inom receptet är det 1:2:3

Med avsikt att försöka se om det var någon skillnad mellan att se proportioner från det omvända perspektivet (3:2 jämfört med 2:3) ändrades receptet (Figur 19) och delades ut som en ny uppgift under intervjun så att eleverna istället fick utgå från det vänstra receptet (7,5 dl) och visa vattenmängden i de två andra recepten.

Salt	1,5 tsk	1 tsk	2 tsk
Mjöl		2 dl	
Vatten	7,5 dl		

Figur 19. Mängden vatten varieras och utgår från det vänstra receptet i den andra frågeställningen

3.2. Förstudiens genomförande

Efter 8 intervjuer bedömdes det att mättnad avseende kvalitativt skilda uppfattningar uppnåtts, då inga nya aspekter framkom. Fortsättningsvis benämns eleverna som E1 till och med E8 och intervjuare med I.

De uttryckta uppfattningarna (benämns fortsättningsvis i termer av kategorier) som framkom i studien var följande.

A. Urskiljer förhållanden som multiplikativa samband, oavsett riktning (både via direkt och omvänt förhållande), samt jämför samma ingredienser (t.ex. salt) mellan två recept för olika antal personer och olika ingredienser (t.ex. salt och mjöl) inom ett recept.

B1. Urskiljer förhållanden ur samma ingredienser (t.ex. salt) som multiplikativa samband mellan två recept för olika antal personer.

B2. Urskiljer förhållanden ur olika ingredienser (t.ex. salt och mjöl) som multiplikativa samband inom ett recept för samma antal personer.

C1. Urskiljer förhållanden ur samma ingredienser (t.ex. salt) som additiva samband mellan två recept för olika antal personer.

C2. Urskiljer förhållanden ur olika ingredienser (t.ex. salt och mjöl) som additiva samband inom ett recept för samma antal personer.

D. Urskiljer förhållanden med samma enheter men inte olika eftersom mängden inte separeras från enheten

Kategori A

Denna kategori är den mest utvecklade av de kategorier som framkom eftersom eleverna gav uttryck för att kunna använda sig av olika strategier och förhållanden för att hitta proportionella värden. Eleverna urskilde proportioner med hjälp av horisontella förhållanden *mellan* recepten som i frågeställningen är 3:2:4 och som i texten som följer, för att förenkla beskrivningen, benämns som recept för 3 personer, 2 personer och slutligen 4 personer. Dessutom kunde elever i denna kategori se proportioner med hjälp av det lodräta förhållandet *inom* de tre recepten som är i förhållandet 1:2:3, vilket är en fördel om de "kör fast" och till att börja med inte lyckas se sambandet åt det ena eller andra hållet. I denna kategori kunde eleven även få syn på det inversa förhållandet i den avslutande frågeställningen där perspektivet växlade från att utgå från receptet för 2 personer till att utgå från receptet för 3 personer.

Elev 8 såg och förklarade sambandet mellan den vänstra och mittersta spalten genom att konstatera att allt i vänstra spalten skulle vara 50 procent mer (3:2) samt att allt i den högra spalten var dubbelt så mycket som det i den mittersta spalten. Eleven urskilde förhållandet horisontellt *mellan* recepten genom att titta på hur mängden salt förändrades.

Salt	**1,5 tsk**	**1 tsk**	**2 tsk**
Mjöl	3 dl	**2 dl**	4 dl
Vatten	4,5 dl	**3 dl**	6 dl

Figur 20. Normal text visar vad E8 skrev i den första frågeställningen. Fet text är sådan information som var given i uppgiften.

Excerpt 1:

I: Kan du stanna upp där och förklara hur du tänker?

E8: Det är ju en tesked av det [pekar på saltet] så det är dubbelt så mycket här [pekar på 2 tsk salt i det högra receptet]. Dubbelt så mycket av det [pekar på 2 dl mjöl i mittenreceptet] är ju 4 dl [pekar på mjöl i "dubbelreceptet"] och det där är ju noll komma fem eller 50 procent mer [pekar på 1,5 tsk och 1tsk salt] alltså, det borde bli 3 dl det var 2 dl [förklarar varför hon skrev 3 dl mjöl] så då borde det vara 4,5 dl vatten [skriver i det vänstra receptet]

Eleven ombads förklara om den kunde hitta denna information lodrätt inom receptet och E8 förklarade då att förhållandet mellan saltet och mjölet var det dubbla samt det tredubbla mellan saltet och mjölet.

Med avsikt att försöka se om det var någon skillnad för eleverna att se proportioner från perspektivet 2:3 jämfört med 3:2 ändrades receptet så att eleverna istället fick utgå från det vänstra receptet (7,5 dl) och visa vattenmängden i de två andra.

Salt	**1,5 tsk**	**1 tsk**	**2 tsk**
Mjöl		**2 dl**	
Vatten	**7,5 dl**		

Figur 21. Den andra frågeställningen

Elev 8 skrev nästan direkt det korrekta svaret 5 dl i mittenreceptet och 10 dl i det högra. Eleven såg att 7,5 dl, liksom alla andra ingredienser i det vänstra receptet, var 50 procent mer än i det mittersta. Hon plockade därför bort den "halva som lagts på" vilket hon uttryckte skulle vara 2,5 dl.

Excerpt 2:

I: Hur kom du fram till femman?

E8: … den, det var… jag tog den [pekar på 7,5 dl] det är 50 procent mer än den [pekar på mittenreceptet] så då tar jag bort det som blir då ifall du lägger på det plus hälften, alltså minus 2,5 [pekar på 7,5 dl] då blir det 5 dl.

Denna elev gav uttryck för att ha urskilt alla aspekter i kategori A. Elev 7 kunde också se de horisontella och lodräta förhållandena i receptet. Eleven som tidigare hade förklarat att då man går från förhållandet 3:2 så lägger man bara på hälften av det man har i mittenreceptet fick däremot problem då perspektivet byttes till förhållandet 2:3 i den andra frågeställningen. Nu skulle eleven utgå från 7,5 dl vatten i den vänstra kolumnen och tala om hur mycket vatten det då skulle vara i mittenkolumnen. Ett sätt att angripa problemet kräver urskiljning av att 7,5 dl vatten kan delas i 3 lika stora delar och att en sådan del kan tas bort (alternativt att det är 2,5 gånger så mycket vatten som mjöl). Men elevens strategi att dela mängden på hälften som fungerade med utgångspunkt från receptet i mittenkolumnen fungerade inte längre.

Excerpt 3:

E7: Om jag utgår från den [pekar på 7,5 dl], hälften av det är ju 3,5 plus 0,25…det är mycket siffror att hålla reda på… då blir ju hälften 3,75 dl.

Eleven insåg en stund senare, då hen funderade över hur mycket vatten det skulle vara i det högra receptet för fyra personer, att svaret 3,75 dl inte kunde stämma. Då eleven skrev ner mängden 7,5 dl (se Figur 22) gav eleven uttryck för att se att det blir samma mängd som i receptet för 3 personer. Eleven försökte men visste inte hur det därefter skulle vara möjligt att gå vidare för att hitta förhållandet.

Salt	**1,5 tsk**	**1 tsk**	**2 tsk**
Mjöl	3 dl	**2 dl**	4 dl
Vatten	**7,5 dl**	3,75 dl	7,5 dl

Figur 22. De mängder vatten som E7 skrev. Fet text är information som var given i uppgiften.

Excerpt 4:

E7: Här är sambandet också det samma så det ökar dubbelt [jämför receptet för 2 pers. och 4 pers.] det blir bara det här då dubbla 3,75…vänta lite nu, nu måste jag tänka lite här… nej den kan jag inte.

I: […]Säg vad som ställde till det för dig?

E7: Jag tänkte fel jag tänkte hälften av den måste vara det [pekar på 7,5 dl och 3,75 dl] men då blir ju det här också 7,5 dl [pekar på receptet för 4 pers.] så det kan ju inte riktigt stämma.

Denna elev fick som synes svårigheter då perspektivet byttes från ett k-värde större än 1 $\left(\frac{3}{2}\ eller\ 1{,}5\right)$ till ett k-värde mindre än 1 $\left(\frac{2}{3}\ eller\ 0{,}66\ldots\right)$. En majoritet av eleverna hade svårt för detta byte av perspektiv. Elev 7 kunde inte se alla de aspekter som innefattas i kategori A men de överensstämmer med dem som utmärker kategori B.

Kategori B

I denna kategori urskildes antingen (B1) (det horisontella förhållandet *mellan* recepten som i frågeställningen är i förhållandet 3:2:4) *och/eller* (B2) (de lodräta förhållandena *inom* de tre recepten som är i förhållandet 1:2:3). Elev 7 ovan urskilde både B1 och B2 men i och med att eleven inte kunde byta perspektiv på förhållandet så urskildes inte samtliga aspekter i kategori A.

En majoritet av eleverna såg det horisontella förhållandet vilket tidigare exemplifierats (Excerpt1). Elev 4 urskilde aspekterna i kategori B2 det vill säga det lodräta förhållandet inom recepten medan eleven inte ger uttryck för att se det horisontella förhållandet mellan recepten (B1). Eleven hade å andra sidan inte behovet av att göra det eftersom det lodräta förhållandet redan urskilts.

Salt	**1,5 tsk**	**1 tsk**	**2 tsk**
Mjöl	3 dl	**2 dl**	4 dl
Vatten	4,5 dl	**3 dl**	6 dl

Figur 23. Visar vad elev 4 skrev till den första frågeställningen.

> Excerpt 5:
>
> I: Vad var det som fick dig att bestämma dig för att det ska vara 3 dl [mjöl]?
>
> E4: Ja eftersom det där är en halv mer än det där [pekar på 1,5 tsk salt och 1 tsk salt] så om man dubblar det [pekar på 1 tsk salt] så blir det 2 [2 dl mjöl] och om man dubblar det [pekar på 1,5 tsk salt] så blir det 3. [3 dl mjöl].

E2 var den som tydligast och oftast växlade mellan kategori B1 och B2 men eleven ger i sina förklaringar uttryck för att även röra sig mellan kategori B och C. I kategori B urskiljs den multiplikativa aspekten hos proportionerna medan elever i kategori C, som rent kvalitativt är på en lägre nivå, inte uppfattade multiplikativa förhållanden. I stället uppfattade de additiva mönster som inte är proportionella. Efter en stunds funderande valde E2 att skriva 3 dl mjöl i den vänstra kolumnen (se Figur 24), vilket var den korrekta mängden men eleven sa samtidigt att det kan vara 2,5 dl. När eleven ombads utveckla svaret gav eleven uttryck för att det kunde vara 2,5 dl mjöl på grund av att det var en halv tesked mer salt i det receptet än i mittenreceptet (jämför horisontellt) vilket fick eleven att se det som att en halv deciliter mjöl också skulle adderas. När eleven fick det till att bli 3 dl så jämförde eleven förhållandet mellan 1 tsk salt och 2 dl mjöl i mittenreceptet (lodrätt) och påpekade att det var det dubbla förhållandet och att det då borde vara 3dl eftersom det var dubbelt så mycket som 1,5 tsk.

Salt	**1,5 tsk**	**1 tsk**	**2 tsk**
Mjöl	3 dl (2,5 dl)	**2 dl**	4 dl
Vatten	4,5 dl (3,5 dl)	**3 dl**	5 dl (6 dl)

Figur 24. Visar vad elev 2 skrev till den första frågeställningen.

Excerpt 6:

E2: Det kan antingen vara 2,5 eller 3 dl

I: När du funderar mellan 3 dl och 2,5 dl kan du förklara hur du tänker då?

E2: Dom här [pekar på 1 tsk salt och 2 dl mjöl], 1 plus 1 blir 2 men 1 gånger 2 blir också 2 så om man gångrar den [pekar på 1,5 tsk] med 2 så blir det 3 men om man bara plussar på en halv så blir det 2,5 dl.

Eleven pendlade genom hela intervjun mellan den multiplikativa aspekten och additiva mönster och eleven tycktes brottas med att uppfatta frågeställningen på ett konsekvent sätt. Bland annat återvände eleven vid ett flertal tillfällen till tidigare givna förslag och ändrade det eleven då skrivit.

Excerpt 7:

I: Ta dem där borta istället [pekar på den högra kolumnen].

E2: [skriver 4 dl mjöl] Dubbelt [pekar på den multiplikativa skillnaden mellan 1 tsk salt och 2 tsk salt]

E2: Jag tror det ska vara 3 här då [går återigen tillbaks till mjölrutan och suddar ut 2,5 dl som hon precis skrev och går tillbaks till det ursprungliga korrekta 3 dl]

E2: [Återvänder till den högra kolumnen och skriver 5 dl vatten]

I: Vill du förklara den också?

E2: Okej, 1 tesked [salt] motsvarar 2 teskedar, när man ska ha typ… det här är ju dubbel sats [pekar på högra kolumnen] när man ska ha och baka bröd, då är det bara att dubbla… men här är det 1 dl skillnad [pekar på additiva skillnaden lodrätt i mittenkolumnen mellan 2 dl mjöl och 3 dl vatten] så det tog jag där också [pekar på det högra receptet och 1 dl skillnad mellan 4 dl mjöl och 5 dl vatten som hon skrivit]

I: Så i och med att det var 1 dl skillnad där [pekar på 2 dl och 3 dl i mitten kolumnen] så tog du det där [pekar på 4dl och 5dl i högra kolumnen], men hur tänkte du när du skrev 4 dl.

E2: Alltså dubbel sats men jag kom på att det ska var 6 dl där [ändrar 5 dl till det korrekta 6 dl]

Kategori C

Den enda egentliga skillnaden mellan kategori B och C var att elever i denna kategori såg additiva mönster snarare än förhållanden. Rent kvalitativt är däremot denna skillnad direkt avgörande för förståelsen av proportionella samband. Ett flertal elever urskilde additiva mönster mellan det mittersta och det vänstra receptet, medan de såg det proportionella förhållandet mellan det mittersta receptet och det högra, ”det dubbla” som flera uttryckte det. De pendlade så att säga mellan kategori B och C.

E1 såg däremot enbart det additiva sambandet mellan recepten. Eleven såg att det var en halv tesked mer i det vänstra receptet och adderade då en halv dl mjöl och vatten i rutorna nedanför. Eleven såg även att det är 1 tsk mer salt i det högra receptet jämfört med det mittersta och adderade därför 1 dl mjöl och 1 dl vatten i det högra receptet.

Salt	**1,5 tsk**	**1 tsk**	**2 tsk**
Mjöl	2,5 dl	**2 dl**	3 dl
Vatten	3,5 dl	**3 dl**	4 dl

Figur 25. Visar vad elev 1 skrev till den första frågeställningen.

Excerpt 8:

I: Kan du skriva och förklara vad du tycker att det ska stå i rutorna?

E1: Där tycker jag 2,5 … dl [mjöl] och där är det 3,5 [vatten]

I: Kan du förklara hur du tänker när du skriver?

E1: Där är ju 1,5 och där är ju 1 [salt] så det borde bli mer så då lägger jag till 5.

Eleven jämförde samma aspekter (t.ex. salt) som additiva samband mellan två recept, vilket innebar att eleven urskilde de aspekter som är karakteristiska för kategori C1. Däremot gav eleven inte uttryck för att kunna urskilja olika aspekter (t.ex. salt och mjöl) som additiva samband inom ett recept för samma antal personer. Detta innebär att eleven inte urskilde de aspekter som är karakteristiska för kategori C2. Det gjorde däremot elev E2 som uppfattade lodrät skillnad och adderade 1,5 tsk salt med ett för att få 2,5 dl mjöl i rutan under.

I följande utdrag ur intervjun förklarar E1 varför hen skrev 3 dl mjöl och 4 dl vatten i "det dubbla" receptet. Även i detta fall tycks eleven urskilja den additiva skillnaden mellan recepten (kategori C) och eftersom skillnaden mellan 1 tsk salt och 2 tsk är 1 adderar E1 även mjölet och vattnet med 1.

Excerpt 9:

E1: Där är det 1 tsk salt och där är det 2 tsk. Då måste jag lägga till lite mer där också [pekar på mjölet och vattnet]

Kategori D

För elev 4 var enheterna bekymmersamma. Eleven utgick helt korrekt från 1,5 tsk och multiplicerade 1,5, med utgångspunkt från det lodräta förhållandet i det mittersta receptet, med 3. Då eleven skrivit 4,5 utan enhet sa eleven samtidigt att det inte kunde stämma utan att det borde bli 4,5 teskedar, inte 4,5 deciliter, eftersom utgångsvärdet är tesked.

Excerpt 10:

E4: Fast om man gångrar 1,5 <u>tesked</u> med tre så blir det ju inte 4,5 <u>deciliter</u>.

3.3. Diskussion av förstudiens utformning och resultat

Eleverna gav under intervjuerna uttryck för att se strukturella förhållanden inom recepten på ett sådant sätt som finns beskriven i litteraturen. De multiplikativa strukturerna (inom och mellan) samt omvänt förhållande kommer till uttryck i kategori A och B och de elever som inte såg multiplikativa utan additiva samband kommer till uttryck i kategori C. I den genomförda forskningsöversikten har det inte återfunnits någon beskrivning som liknar det sätt som elev 4 i kategori D såg på förhållandet mellan storhetsvärdena. Denna elev urskilde de numeriska förhållandena men gav inte uttryck för att dessa förhållanden är enhetslösa.

Det finns en del att säga om utformningen av själva frågeställningen. Om denna intervju gjorts i ett senare skede av forskningsprocessen, hade eventuellt valet blivit att också ange hur många personer de olika recepten var ämnade för. Det kan vara så att uppgiften är allt för matematisk till sin karaktär vilket innebär att eleverna hade urskilt förhållandena på ett annat sätt vid en annorlunda utformning. Å andra sidan hade problemet med att hantera storhetsvärden som inte är hela (till exempel 1,5 tsk) då inte synliggjorts på samma sätt. Oavsett vilket går det att se att en del elever med denna problemformulering såg till exempel additiva samband snarare än multiplikativa förhållanden och att andra som kunde se det multiplikativa förhållandet inte gav uttryck för att se det omvända förhållandet.

De ovan nämnda kategorierna skapades innan såväl den teoretiska forskningsgenomgången och den empiriska studien som ligger till grund för detta arbetes resultat genomförts. Beskrivningen av det perspektiv eleverna väljer att utgå ifrån kan i efterhand, när kunskap erhållits genom de efterföljande studierna, även göras i termer av inom eller mellan system och vad som är att betrakta som en sammansatt storheter. En precisering av vilket system som beaktas med avseende på inom och mellan behöver dock göras. Det ena alternativet är att betrakta recept för olika antal personer som ett system i förhållandet 3:2:4 eller med omvänt perspektiv 4:2:3. Det andra alternativet är grundreceptet och dess olika ingredienser i förhållandet 1:2:3 eller 3:2:1. Ett resonemang om lämpligt val av perspektiv följer nedan.

Med utgångspunkt från förhållandet för grundreceptet kan blandningar för ett oändligt antal personer göras. Om däremot förhållandet ändras mellan ingredienserna blir det ett annat recept som till exempel blir vattnigare eller saltare. Om förhållandet mellan ingredienserna är givet går det att blanda en smet för olika antal personer utan recept. Om däremot enbart förhållandet mellan olika volymer, det vill säga recept för olika antal personer, av grundreceptet är givet måste det även anges hur mycket det ska vara av varje ingrediens. Valet av system att utgå ifrån blir därför i detta fall grundreceptet och dess olika ingredienser. I detta fall beskrivs därför hur eleverna gav uttryck för att uppfatta förhållanden i termer av *inom* systemet grundrecept och dess ingredienser till exempel salt och mjöl och *mellan* grundreceptet för olika antal personer, till exempel mängden mjöl.

	3 pers.	*2 pers.*	
1 del salt			
2 delar mjöl			

Figur 26: Olika sätt att urskilja ett förhållande

I förstudien belyses skillnaden mellan att urskilja additiva och multiplikativa samband och om eleverna ger uttryck för att urskilja förhållanden och dess omvända förhållanden, till exempel att gå mellan recept för olika antal personer i förhållandet 3:2 eller 2:3. Däremot görs inga distinktioner i de kategorier som beskriver kvalitativa skillnader i elevernas sätt att betrakta fenomenet på beträffande de multiplikativa sambanden mellan storhetsvärdena. Det som behöver beaktas är huruvida eleverna urskiljer ett direkt förhållande inom eller mellan systemet och på vilket sätt de använder det för att jämföra eller skapa ett par av storhetsvärden i proportion till varandra, det vill säga dynamisk proportionalitet, samt om de urskiljer statisk (multiplikativ) proportion eller statisk uppbyggnadsproportion. De tidigare beskrivna kategorierna, som skapades innan forskningsgenomgången genomförts, kopplas därför i efterhand även till de olika sätt som eleverna ger uttryck för att urskilja proportionalitet:

a. urskiljer proportioner flexibelt, statiskt och dynamiskt via det direkta och det direkt omvända förhållandet inom och mellan systemet
b. urskiljer proportioner antingen statiskt eller dynamiskt (inom eller mellan systemet)
c. urskiljer proportioner med hjälp av uppbyggnadsproportion (upprepande eller minskande)
d. urskiljer förhållanden med samma enheter men inte olika eftersom mängden inte separeras från enheten
e. urskiljer additiva samband istället för multiplikativa

Dessa kategorier behandlar i större utsträckning hur eleverna urskiljer de multiplikativa strukturella förhållandena inom eller mellan två par av storhetsvärden, det vill säga proportioner, än de kategorier som skapades initialt. Kategorierna ligger även till grund för de hypotetiskt kritiska aspekter som detta lektionsdesignen utgår ifrån och som presenteras senare i kapitel 6.1.1.

4. Teoretisk utgångspunkt

Vid analys av lektioner kan man studera undervisning ur flera olika perspektiv. I detta arbete fokuseras hur innehållets behandling under lektionerna tycks påverka elevers förmåga att resonera proportionellt, det vill säga ett dubbelriktat fokus som studerar både innehållet i mötet med den lärande respektive den lärande i mötet med innehållet. För att veta på vilka sätt undervisningen kan utformas är det av avgörande intresse att försöka identifiera vad som kan vara kritiskt, eller avgörande, för elevernas förståelse. Det som studeras är vilka aspekter av innehållet som bör beaktas i undervisningen så att elever kan uppfatta detta innehåll på ett mer komplext och kraftfullt sätt. Utgångspunkten för denna analys är en innehållsfokuserad teori om lärande, variationsteorin.

4.1. Variationsteorin

Den fenomenografiska traditionen, ur vilken variationsteorin utvecklats (Pang, 2003), strävar mot att försöka förstå, beskriva och analysera människors varierande uppfattningar av specifika fenomen i vår omvärld (Marton, 1981). Olika aspekter eller särdrag av det fenomen eller objekt vi betraktar kan eller kan inte, enligt Marton och Booth (1997), urskiljas av den som betraktar fenomenet vid ett och samma tillfälle. Detta innebär i förlängningen att olika personer bildar sig olika uppfattningar av fenomenet i fråga. Det är därför snarare en regel än ett undantag att en person vid en given situation inte samtidigt lyckas erfara och fokusera på alla, om ett specifikt sätt förordas, relevanta aspekter av ett fenomen. Istället blir vi medvetna om dessa aspekter i sekvenser, genom att urskilja dem en efter en, vilket i förlängningen innebär att vissa sätt att erfara ett fenomen är mer komplexa och avancerade än andra (ibid).

Att lära sig eller erfara något på ett nytt sätt är ur ett fenomenografiskt perspektivs ontologiska grund icke-dualistiskt. Lärande är inte fysiskt eller psykiskt betingat eftersom själva lärandet varken finns i subjektet eller objektet, det vill säga varken i personen eller i världen den studerar. Lärande uppstår i relationen dem emellan (Marton & Booth, 1997). Betydelsen av till exempel ett matematiskt problem av proportionell karaktär finns således varken i problemet i sig eller i huvudet på den som uppmärksammar problemet utan mötet dem emellan. Följaktligen räcker det inte med att beskriva personen eller fenomenet då det är den inbördes relation som är av intresse att studera.

4.1.1. Lärandeobjekt

Variationsteorin (Marton & Booth, 1997) utgår från att lärandet alltid riktar sig mot något, det har alltid ett objekt, ett *lärandeobjekt*. För att lära sig något krävs det att personen i fråga betraktar ett fenomen på ett kvalitativt annorlunda sätt än tidigare, lärande innebär att ha lärt sig om personen är…

> …capable of being simultaneously and focally aware of other aspects or more aspects of a phenomenon than was previously the case (Marton & Booth, 1997, p. 142)

Lärandeobjektet kan delas upp i ett direkt och ett indirekt lärandeobjekt. Det indirekta behandlar en förmåga, det den som lär sig ska kunna göra med detta innehåll. Det direkta pekar mot vad den som lär sig ska kunna erfara för att betrakta lärandeobjektet på ett mer komplext sätt (Lo, 2012). Då lärare ska bestämma sig för vilket lärandeobjekt som ska behandlas under en lektion är det viktigt att ta hänsyn till det sammanhang som detta lärandeobjekt befinner sig i. Detta benämns dess externa horisont där lärandeobjektet i fråga relateras till sin omgivande kontext, ett system av lärandeobjekt (Lo, 2012). För att uppfatta lärandeobjektet på ett specifikt sätt måste det skiljas från den omgivande kontexten utan att denna relation går förlorad. Individen måste urskilja fenomenets mening, den referentiella aspekten. Vid meningsskapande behöver samtidigt fenomenets strukturella aspekter uppfattas. Det krävs både mening och struktur (Marton & Booth, 1997).

Chik, Lo, and Pong (2005) beskriver lärandeobjekts karaktär i tre skilda faser.

- Det *intentionella* lärandeobjektet, det som läraren med utgångspunkt från målen planerat att eleverna ska kunna erfara.
- Det *iscensatta* lärandeobjektet, det eleverna ges möjligheten att urskilja under lektionen, vilket inte nödvändigtvis beroende på den dynamiska klassrumssituationen är detsamma som läraren avsett, det intentionella lärandeobjektet.

- Det *erfarna* lärandeobjektet, vad eleverna faktiskt lärde sig, speglar de enskilda elevernas upplevelse av lärandeobjektet efter lärsituationen. En situation kan upplevas på olika sätt av eleverna, vilket innebär att det erfarna lärandeobjektet kommer att vara olika för de olika eleverna även om de deltagit i samma undervisningstillfälle.

För att den som lär ska förstå det som eleverna ska lära sig måste lärandeobjektet utforskas på djupet i syfte att förstå de svårigheter som eleverna kan tänkas ha med att förstå detta innehåll. De frågeställningar som behöver besvaras är: Vad innebär det att förstå? Vad måste tidigare ha lärts för att förstå? Vad måste eleverna få syn på för att fördjupa sin förståelse? Dessa frågor försöker lärare besvara i syfte att identifiera vad elever ännu inte urskilt, det vill säga vad som kan vara kritiskt för förståelsen av lärandeobjektet. Det är det som med variationsteoretisk terminologi benämns som lärandeobjektets kritiska aspekter (Runesson & Gustafsson, 2012). Ur ett variationsteoretiskt perspektiv är dessa aspekter förknippade med ett innehåll.

Det bör poängteras att det i en undervisningssituation finns mängder av andra faktorer som, i större utsträckning än hur innehållet behandlas på lektionerna, kan påverka elevernas möjligheter att lära. Basala behov såsom sömn, mat och en känsla av tillhörighet i den klass elever går i kan också ses som faktorer som är nödvändiga för att kunna lära sig något. Hur viktiga dessa och andra faktorer än må vara studeras dessa inte i detta arbete utan fokus ligger på kritiska aspekter av lärandeobjektet i mötet mellan innehållet och de deltagande elevernas uppfattning av detta innehåll. Hur begreppet kritiska aspekter används i detta arbete preciseras och definieras i texten som följer nedan.

4.1.2. Kritiska aspekter

Ett innehåll, eller lärandeobjekt, består av en varierande mängd aspekter beroende på vilket det specifika innehållet är. Den som ska lära något om något har vanligtvis urskilt en del aspekter av detta innehåll, och lärandet kan beskrivas som processen när den lärande urskiljer fler aspekter av innehållet. Om något lärs av någon urskils nya aspekter, alternativt att den inbördes relationen mellan tidigare erfarna aspekter uppfattas på ett annat sätt. (Pang & Lo, 2012). Begreppet *kritiska* pekar mot att det är aspekter som ännu inte urskilts men behöver urskiljas av den lärande för att få fördjupad kunskap av ett specifikt innehåll. I en undervisningssituation innebär det att aspekter som betraktas som nödvändiga att erfara, för att förstå ett fenomen på ett visst sätt, enbart är kritiska för dem som ännu inte lyckats urskilja dessa. I denna studie är det till exempel nödvändigt att kunna göra en multiplikativ jämförelse av två tal för att i förlängningen kunna lösa proportionella problem. Det finns dock även andra irrelevanta aspekter som Marton (2014) menar att den som lär behöver urskilja (uppmärksamma) för att därefter kunna bortse ifrån. Ett exempel på en sådan aspekt i denna studie är ett additivt samband mellan två tal. Denna aspekt är till skillnad från multiplikativa samband inte kritisk för förståelsen av proportionella samband men elever som uppfattar additiva samband måste, vid proportionella jämförelser, kunna bortse ifrån denna aspekt för att kunna urskilja det multiplikativa sambandet. Marton (2014) menar att aspekter kan vara kritiska antingen så till vida att de bör tas i beaktande eller att de inte bör tas i beaktande, det vill säga bortses från, då något specifikt ska läras.

En elevs respons på en viss undervisningssituation är beroende av hur eleven erfar situationen, vilken mening den har för eleven. Ett sätt att skapa mening är att utgå ifrån och använda sig av elevernas uppfattningar i undervisningen (Lo, 2012). Att som lärare försöka skapa sig en bild över kritiska aspekter som eleverna kan tänkas behöva kunna urskilja, eller bortse ifrån, för att förstå det som avsetts är en utmaning. Aspekter som läraren inte lyckats identifiera är oftast de som förhindrar elevernas utvecklade lärande. Att aspekter inte identifierats och därmed inte uppfattas som kritiska för förståelsen kan i sin tur bero på att läraren tar dessa aspekter för givna och därför inte erbjuder dem i undervisningssituationen (Chik et al., 2005). Å andra sidan kan aspekter som hypotetiskt anses vara kritiska för lärandet visa sig vara urskilda av den lärande och därmed inte kritiska för att utveckla för den elevens lärande. Lärandeobjekt som ska läras innehåller en mängd olika aspekter som i mötet med den lärande kan bli urskilda. De aspekter som den lärande inte urskiljer i mötet med innehållet blir därmed kritiska att urskilja för att utveckla lärandet. Lärarens uppgift blir att i undervisningssituationen synliggöra de kritiska aspekterna för de elever som ska undervisas.

4.1.3. Variationsmönster

Genom att designa en undervisningssituation där eleverna erbjuds att erfara nya aspekter av innehållet bildas mönster av på vilket sätt aspekterna relateras till varandra. De aspekter som lyfts fram i förgrunden erfars mot bakgrund av andra aspekter av innehållet.

Medvetenhet innefattar alla våra upplevelser av vår omvärld, men vårt medvetande kan struktureras och särskiljas genom att vi fokuserar på något specifikt medan annat förblir i bakgrunden. Med andra ord så är det möjligt att urskilja något då vissa värden av aspekter hos det betraktade varierar medan andra är konstanta (Runesson, 2006). Ur ett variationsteoretiskt perspektiv krävs det en variation för att vi ska kunna uppfatta något. En aspekt kan betraktas som en dimension av variation som kan synliggöras (öppnas upp) på så vis att den, med hjälp av specifika värden av aspekten kan separeras, och varieras (Lo, 2012). Om alla människor till exempel talat i precis samma tonläge hade det varit svårt att urskilja vem som tilltalade oss. Ur aspekten tonläge kan dimensioner av variation skapas där olika tonlägen utgör olika värden ur denna dimension. Det kan även vara svårt att urskilja en ny aspekt om den ständigt är närvarande. Ofta lägger vi till exempel inte märke till att ett ventilationssystem är på förrän det stängs av (Marton & Pong, 2005), vilket snarast kan ses som ett exempel på att de flesta sinnesintryck vi hela tiden möter hamnar i bakgrunden och inte medvetet fokuseras. Denna kunskap kan lärare i termer av variationsmönster använda sig av då de vill synliggöra de aspekter som tros vara kritiska för eleverna att kunna urskilja för att förstå lärandeobjektet på det sätt som lärarna avser. (Runesson & Gustafsson, 2012).

Marton och Tsui (2004) visar upp fyra variationsmönster som de i sina studier har identifierat och benämnt kontrastering, generalisering, separering och fusion. I Lo och Marton (2011) används inte längre separation utan detta ses som resultat av variationsmönstren kontrast och generalisering. För att urskilja en specifik aspekt av ett fenomen behöver aspekten varieras medan andra aspekter förblir konstanta och utgör en invariant bakgrund mot det som varierar. Därmed kan en specifik aspekt av lärandeobjektet separeras. De tre nuvarande variationsmönstren exemplifieras enligt följande:

> *Kontrastering:* Att visa vad något är genom att visa vad det inte är. För att förstå vad antal är till exempel *tre* så måste personen även förstå vad som inte är tre, till exempel *två* och *fyra*. Aspekten antal separeras och varieras från värdena (två, tre och fyra).

> *Generalisering:* Om personen med hjälp av en kontrastering lyckats erfara vad antal och *tre* är behövs, för att till fullo förstå, en variation av tre föremål, till exempel tre bilar, tre äpplen, tre apor och så vidare. Aspekten olika föremål separeras och varieras mot en konstant bakgrund (antalet).
>
> *Fusion:* Om det finns flera kritiska aspekter den som ska lära sig måste ta hänsyn till för att förstå lärandeobjektet på ett kvalitativt bättre sätt, måste dessa aspekter efter det att de separat erfarits kunna uppfattas simultant av den som ska lära sig. Aspekten antal och aspekten föremål separeras och varieras simultant, till exempel fyra bilar, sju apor och fyrahundratvå äpplen.

Marton och Tsui, (2004) menar att det i det dagliga livet inte är så vanligt att endast en aspekt av ett fenomen varierar men att systematisk variation av ett fenomens kritiska aspekter är mer effektivt[18] än att aspekterna som de vanligtvis gör i det vanliga livet varieras osystematiskt. Lo och Marton (2011) poängterar vikten av att börja med att låta den som ska lära sig något få en överblick över det de ska lära sig. Den samlade grupp av strukturella aspekter som en individ vid denna inledande överblick samtidigt lyckas erfara kring ett specifikt fenomen utgör den övergripande meningen för individen och den referentiella aspekten det vill säga *vad* individen erfar (Marton & Booth, 1997). Om intentionerna finns att lära individen att efter undervisning uppfatta något annorlunda är det både individers erfarande av strukturella och referentiella aspekter som är av intresse att studera.

> This encounter does not make it possible for them to discern the critical features, but creates a "relevance structure", an experience of the undivided whole from which the critical features are subsequently discerned. (Lo & Marton, 2011, p. 11)

Efter denna inledande överblick kan dimensioner av variation skapas där kritiska aspekter med hjälp av kontrast separeras ur det hela, vilket möjliggör dess urskiljning, och där generalisering bidrar till att särskilja kritiska aspekter från aspekter att bortse ifrån. När kritiska aspekter urskilts är de inte längre kritiska för eleverna, vilket de eventuellt var vid den inledande överblicken. Vid fusion sker samtidig variation av flera tidigare urskilda aspekter, en erfarenhet av den helhet utifrån vilken betraktaren skapar en mening, en ny relevans struktur. Möjligheten ges att simultant se alla aspekter i relation till varandra och helheten.

[18] Att fenomenet erfars på ett nytt och kvalitativt annorlunda sätt

Det teoretiska ramverket i den här studien har använts som ett verktyg för att analysera skärningspunkten mellan innehållets strukturer och den lärandes förståelse av dessa strukturer. Genom den iterativa forskningsprocessen har aspekter kritiska för att förstå innehållet mejslats ut i relation till elevernas uttryckta förståelse av innehållet, där de aspekter som eleverna ännu inte urskilt har lyfts fram mot bakgrund av lärandeobjektets redan urskilda aspekter. Målet är att utveckla såväl förståelsen av vad som krävs för att förstå proportionella samband som att förstå lärandets betingelser avseende det avgränsade innehållet.

5. Den empiriska studien

Studien genomfördes under perioden november 2012 till och med maj 2013 på en F – 9 skola i södra Sverige med 33 elever i två klasser i årskurs 8 och 29 elever i en klass i årskurs 9. Som utgångspunkt för diskussion av studiens lärandeobjekt användes dels resultaten från tidigare presenterad forskning samt den genomförda förstudien. På grund av det komplexa matematiska innehållet beslutade forskarlaget, de tre deltagande lärarna och jag, oss för att i varje klass behandla innehållet under mer än en lektion.

5.1. Learning study som forskningsmetod

Learning study, vilket är den metod som används i detta arbete, befinner sig inom den kunskapsgenererande inriktningen som kännetecknade den tidiga utvecklingen av aktionsforskningen (Elliott, 1991; Stenhouse, 1981) och beskrivs ofta som en hybrid (Marton & Pang, 2006; Runesson, 2008) mellan lesson study (Fernandez, Cannon, & Chokshi, 2003; Stiegler & Hiebert, 1999) och design experiment (Brown, 1992; Cobb, Confrey, Lehrer, & Schauble, 2003; Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004). Learning study modellen utvecklades i Hong Kong i början av 2000 talet (Chik et al., 2005; Marton & Tsui, 2004) och introducerades i Sverige 2003 där det sedan dess har genomförts ett stort antal studier (se Holmqvist, 2006; Kullberg, 2010; Wernberg, 2009). Learning study har inspirerats av den Japanska undervisningstraditionen att med hjälp av lesson study systematiskt och djupgående analysera och undersöka den egna undervisningen. Likheter tar sig även uttryck i termer av kollektiv utforskning, analys, revidering och reflektion kring eventuellt lärande. För att studien inte ska bli allt för tids- och resurskrävande begränsas studien till en eller flera lektioner i en serie där något specifikt, ett avgränsat lärandeobjekt, utforskas. Lärandeobjekten väljs ut av en grupp lärare som funnit det särskilt problematiskt att undervisa om detta specifika innehåll för att fördjupa förståelsen av lärandets betingelser för detta innehåll i relation till en specifik grupp elever.

Om utforskandet av ett lärandeobjekts behandling i klassrummet är ett drag som vid utvecklandet av learning study anammades från lesson study är utvecklingen och användandet av en teori det som snarast förknippas med design experiment, det andra ben varpå learning study vilar. Både design experiment och learning study använder sig av teorier, såväl allmänna lärande teorier som ämnesspecifika i syfte att formulera hypoteser kring hur en praktik kan förbättras. Hypoteser som revideras och förfinas i iterativa processer utifrån vilka teorier utvecklas och beskrivs i relation till praktiken (Elliot, 2012). Det beskrivs att båda ansatserna grundar sin design i en lärandeteori (Carlgren, 2012). I design experiment är lärande kopplat till lärprocessen där många aspekter i undervisningen under en längre tidsperiod beaktas.

I den här studien har learning study använts eftersom studie såväl utgår från teoretiska antaganden som ett kollektivt samarbete med verksamma lärare. I studien är det lärandeobjektets beskaffenhet och innehållets behandling i relation till den lärande samt vilket lärande som möjliggörs som är studiens fokus. I enlighet med learning study-processen används muntliga och/eller skriftliga utsagor från eleverna i syfte att göra jämförelser av hur eleverna uppfattar lärandeobjekt vid skilda tillfällen, före och efter undervisning. Lektionen eller lektionerna analyseras i ljuset av det iscensatta lärandeobjektet, och mönster av variation och invarians av lärandeobjektets aspekter undersöks för att se vad som tycks vara avgörande för elevernas lärande (Marton & Pang, 2006). Resultaten av analys från den första lektionen eller serien av lektioner används för att revidera lektionsplanen. Lektionen eller lektionerna genomförs därefter systematiskt i en ny klass i en iterativ process 3-4 gånger (ibid.). Avslutningsvis analyseras lärandeobjektets behandling i tre faser (det intentionella, iscensatta och erfarna lärandeobjektet) i de olika klasserna för att se på vilket sätt skillnaderna påverkar elevernas lärande.

En learning study-process utgår från ett teoretiskt antagande om lärande, i denna studie variationsteorin, där förändringar mellan lektioner och lektionsplaneringar systematiskt analyseras och beskrivs med hjälp av denna teoris antaganden. Därmed beskrivs forskningen vara både praxis- och teoriutvecklande eftersom de teoretiska antagandena prövas i praktiken i syfte att utveckla denna. Det finns både fördelar och nackdelar med ett sådant upplägg. En fördel, förutom det primära att basera undervisningen på teorin, är att det som sker på lektionerna kan diskuteras och beskrivas inom lärargruppen och kommuniceras till andra som också är insatta i denna teori. Samtidigt blir styrkan en svaghet då andra som inte behärskar denna begreppsapparat får svårt att ta del av de lärdomar som gjorts under studien. Terminologin är inte heller till hjälp vad gäller det specifika matematiska innehållet. Den används snarare i relation till hur lärandeobjektet behandlas och analyseras i undervisningen. Av den anledningen behövs såväl god teoretisk förståelse av lärandets betingelser som av det specifika innehåll som studeras, vilket beaktats i den teoretiska genomgången ovan.

Forskningsprocessen i den föreliggande studien har skett i följande iterativa steg:

Tabell 1. Översiktlig beskrivning av empirisk studie, Vecka 1 är start, inte kalendervecka.

Klass 1 (år 8, n = 14)	**Klass 2 (år 9, n = 29)**	**Klass 3 (år 8, n = 19)**
Introduktionsmöte (v.1, tors.) Resultat från tidigare forskning och förstudie med avseende på aktuellt innehåll presenteras och diskuteras.	Planeringsmöte 4 (v.11, tors.) Planering av lektionsserie 2	Planeringsmöte 6 (v.17, tors.) Planering av lektionsserie 3
Planeringsmöte 1 (v.5, mån.) Utformande och avgränsning av lärandeobjekt	För-intervju (v.13, mån.)	Planeringsmöte 7 (v.18, tors.) Fortsatt planering av lektionsserie 3
Planeringsmöte 2 (v.6, mån.) Planera lektionsserie 1 Identifiera hypotetiska kritiska aspekter att beakta i undervisningen Utformning av förtest	Förtest 2 (v.13, tis.)	För-intervju (v.19, mån.)
Förtest 1 + för-intervju (v.6, tis.)	Planeringsmöte 5 (v.13, tors.) Fortsatt planering av lektionsserie 2	Lektion 3.1 (v.20, mån.) Förtest 3 + mini-test (1 uppgift)
Planeringsmöte 3 (v.6, tors.) Fortsatt planering av lektionsserie 1 Utformning av förtest	Lektion 2.1 (v.14, mån.) Mini-förtest (1 uppgift)	Lektion 3.2 (v.20, fre.)
Lektion 1.1 (v.7, mån.) Kompletterande frågor till förtest 1 + Mini-förtest (1uppgift)	Lektion 2.2 (v.14, tors.) Mini-eftertest (1 uppgift)	Lektion 3.3 (v.21, mån.)
Lektion 1.2 (v.7, mån.) Mini-eftertest (1 uppgift)	Lektion 2.3 (v.15, mån.) Eftertest 2 (v.15, tis.)	Lektion 3.4 (v.21, ons.) Eftertest 3 (v.21, tors.)
Lektion 1.3 (v.7, ons.) Eftertest 1	Efter-intervju (v.15, ons.)	Efter-intervju (v.22, mån.)
efter-intervju (v.7, tors.)	Analys av lektionsserie 2 och testresultat (v.15, tors.)	Analys av lektionsserie 3 och testresultat (v.22, tors.)
Analys av lektionsserie 1 och testresultat (v.8, tors.)		

Studien utformades kring ett innehåll som behandlades under tre lektioner vardera i klass 1 och 2, och fyra lektioner i klass 3, det vill säga totalt 10 lektionstillfällen. Den genomsnittliga lektionstiden under de tio lektionerna var ungefär en timme. Totalt genomfördes 10 gemensamma möten med lärargruppen, 31 elevintervjuer och 13 utvärderingar av elevernas utryckta förståelse vilket ger totalt 223 skriftliga tester.

Tabell 2. Summering av tillfällen då jag deltog i olika lektioner och samtal på skolan och i de olika klasserna.

	Klass 1	Klass 2	Klass 3
Lärarlagsmöte	4	3	3
Antal lektioner	3	3	4
Antal intervjuer	4 elever före (4 efter)	7 elever före (6 efter)	6 elever före (4 efter)
Antal tester	5 x 11 elever = 55 tester	4 x 25 elever = 100 tester	4 x 17 elever = 68 tester

5.1.1. Deltagare och urval

Valet av skola begränsades av att de lärare som skulle ingå i studien skulle ha tidigare erfarenheter av att delta i en learning study och därmed viss förståelse för variationsteorins antaganden. Anledningen till detta var studiens utgångspunkt att, utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv på lärande, se på vilket sätt ett innehålls behandling kunde påverka elevernas förståelse. Om lärare utan tidigare erfarenheter av learning study och variationsteorin deltagit bedömdes risken vara stor att de ämnesteoretiska diskussionerna på grund av lärandeobjektets (se nedan kap. 5.1.3) komplexitet skulle hamna i förgrund och de mer generella teoretiska antagandena om lärandets betingelser i bakgrund. En balans bedömdes som väsentlig, eftersom det är relationen mellan innehållets beskaffenhet och elevernas förståelse av detta som ska studeras. Vikten av en tydlig förankring i teori för samtliga deltagare i en learning study finns beskrivet av Adamson och Walker (2011). De beskriver hur konflikter uppstår mellan forskare och lärare på grund av stora skillnader i kunskaper om den teori som används. Urvalet begränsades i denna studie därför till lärare med kunskaper av det teoretiska ramverket. Vidare begränsades urvalet ytterligare genom att lärarna skulle undervisa i matematik på högstadiet och att de frivilligt valde att delta i studien. Kriterierna uppfylldes vid två skolor varav en, efter klartecken om tidskompensation från skolledningen, valdes ut. Tidsaspekten har visat sig vara en faktor viktig för studiers genomförande i tidigare utvärderingar (Olteanu & Lennerstad, 2011). De tre lärarna som deltog i studien hade, då studien startade, mellan 13 och 19 års lärarerfarenhet och var utbildade grundskolelärare med inriktning 4 – 9. Två undervisade i matematik och NO och en i matematik och idrott. Samtliga hade deltagit i ett flertal learning study projekt varav två även som handledare. Det bör nämnas att lärarna innan de beslutade att delta blev informerade om vilket innehåll som skulle behandlas under studien. Lärandeobjektet bör vara något som lärarna uppfattar vara komplicerat att undervisa om och som de av erfarenhet vet att deras elever har svårt för att lära sig. Eftersom jag själv är lärare och har funnit detta område svårt att undervisa om skedde urvalet av mig. Det är därför också detta innehåll som jag i forskarutbildning fördjupat mig i, ett innehåll som inte nödvändigtvis var i linje med de deltagande lärarnas behov vid tidpunkten för studien. Det visade sig dock att detta innehåll var något som de alla kände ett behov av att fördjupa sig i, vilket bidrog till att de valde att delta i studien.

I studien deltog totalt 62 elever. En elev valde att inte delta i studien. Eleven var dock, efter samråd med hemmet, med på lektionerna men spelades inte in. Antalet elever som gjorde för- och eftertest samt deltog på lektionerna är på grund av sjukdom, ledighet eller annat inte detsamma som det totala antalet elever i någon klass. Med tanke på att lektionsserien sträckte sig över en längre tid var detta inte oväntat. I klass ett deltog 11 av 14 elever, i klass två 25 av 29 och i klass tre 17 av 19.

Enligt Vetenskapsrådets riktlinjer för god forskningssed (2011), handlar forskning om att på ett rimligt sätt väga nyttan av forskningen mot eventuella skadliga konsekvenser. Olika intressen måste vägas mot varandra. Att bli filmad kan ses som ett intrång i den personliga integriteten. Även om deltagarna i denna studie gett sitt medgivande till att bli filmade har inga bilder av elever använts i texten. I excerpt framgår det inte vilken elev som yttrar sig. Då det är innehållets behandling som är av intresse att studera i mötet med lärande är det inte intressant att precisera vilken elev som säger vad, utan försöka analysera vad det uttryckta erfarandet har för betydelse för förståelsen av innehållet.

5.1.2. Planerings- och analysmöten

Efter det inledande introduktionsmötet, där resultat från tidigare forskning presenterades och diskuterades inom forskarlaget, följde ytterligare nio gemensamma möten där ljudupptagning gjordes av vad som sades. Dessa möten var förlagda på skolan efter avlutad undervisning och varade mellan 1,5 och 2 timmar. Lärandeobjektet och dess hypotetiska (förmodade) kritiska aspekter preciserades vid de första planeringstillfällena. Med utgångspunkt i detta konstruerades för- och eftertest samt planering av den efterföljande lektionsserien. Samtliga lärare var ansvariga för detta arbete, men genomförandet av undervisningen gjordes av en av lärarna per lektion. Det innebär att lärare 1 ansvarade för lektion 1A, 1B och 1C, medan lärare 2 ansvarade för lektion 2A, 2B och 2C och lärare 3 lektion 3A, 3B, 3C och 3D. Efter varje avslutad lektionsserie följde ett analysmöte där de filmade lektionerna, i kombination med resultat från för- och eftertest samt de intervjuer som gjorts av ett antal elever före och efter undervisning, analyserades gemensamt av oss all. Som grund för denna analys var det iscensatta lärandeobjektet och vilka innehållsliga dimensioner av variation av innehållets aspekter som öppnades eller togs för givet under lektionerna. Under dessa möten flöt till viss del analys och planering in i vartannat. Inför analysmötena avgränsades lektionssekvenser som bedömdes vara av särskilt intresse för att förstå elevernas erfarande av innehållet. Denna avgränsning gjordes av mig genom den analys jag, med utgångspunkt från diskussion med den lärare som deltagit i den lektionsserie som implementerats, gjorde inför mötena med lärargruppen. Dessa sekvenser diskuterades med de i studien deltagande lärarna. Efter varje lektion hade jag och undervisande läraren en diskussion under ca en halvtimmes tid om upplevelser under lektionen och eventuella aspekter att ytterligare belysa under nästa lektion.

5.1.3. Lärandeobjekt

Det indirekta lärandeobjektet (den förmåga som eleverna förväntas utveckla) i den genomförda studien beslutades vara att kunna argumentera och resonera proportionellt i varierande kontexter och sammanhang. Det direkta lärandeobjektet var att kunna identifiera de strukturella sambanden mellan fyra värden i ett sammanhang där värdena varierar men kvoten är konstant (proportionalitetskonstant).

Med avsikt att avgränsa studien behandlades två typer av problem:

> *Saknat värde problem* vilket innebär att tre av fyra värden i proportionen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ är kända. Målet är att identifiera den okända.
>
> *Jämförande problem* där samtliga värden i proportionen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ är kända. Målet var att kunna jämföra och se om förhållandet $\frac{a}{b}$ är lika med $\frac{c}{d}$. För att ytterligare avgränsa lärandeobjektet behövs i detta arbete inte kunna avgöra om $\frac{a}{b}$ är större eller mindre än $\frac{c}{d}$.

Forskarlaget enades om att det direkta lärandeobjektet var rimligt att behandla under en tidsrymd av tre lektioner. Lärandeobjektet ansågs även vara en viktig grund för andra framtida lärandeobjekt, som till exempel funktioner och procentuella beräkningar med hjälp av förändringsfaktor.

5.1.4. För- och efterintervjuer

Inför varje lektionsserie intervjuades en fjärdedel av eleverna i varje klass där samma uppgift som i förstudien utgjorde en grund för intervjun. Dessa intervjuer filmades med hjälp av en kamera på stativ vilken var riktad med fokus på det som eleverna skrev på uppgifter. Samma elever intervjuades efter lektionsserien. Dessa intervjuer användes som underlag vid efterföljande planeringsmöten med avsikt att designa lektioner för att kritiska aspekter som eleverna behöver urskilja lyfts fram. Genom att belysa skillnader i hur eleverna uppfattade lärandeobjektet tas hänsyn till dessa i undervisningen. Att andelen elever var just en fjärdedel beror på att det då bedömdes vara möjligt att hinna analysera dessa intervjuer innan genomförande av nästa lektionsserie.

5.1.5. För- och eftertest

De tester som användes i detta arbete var utformade av mig i samråd med andra forskare och de lärare som deltog i denna studie. För- och eftertesterna har använts som hjälp för att analysera om eleverna genom undervisningen lyckats urskilja aspekter av lärandeobjektet som bidrar till komplexare förståelse av densamma. Morris och Hiebert (2011) beskriver att små och avgränsade men ofta förekommande för- och eftertest kan bidra till att utveckla undervisningen genom att effekten av en gradvis förändrad undervisning kan följas kontinuerligt. Resultaten av analysen av för- och eftertest låg även till grund för revidering av efterföljande lektionsserie. Att på förhand, kvalitativt, med hjälp av tester försöka identifiera vilka kritiska aspekter eleverna har eller inte har urskilt är en utmaning. Ofta framkommer nya aspekter under studiens gång varvid för- och eftertest skulle bli mer precisa om de justerats. Samtidigt försvåras då jämförelser mellan grupperna, vilket minskar validiteten. Frågorna på för- och eftertest var i denna studie desamma men siffervärden ändrades i vissa uppgifter för att svaren inte skulle vara identiska (se bilaga 1). Då nya värden valdes togs i största möjliga mån hänsyn till att svårighetsgraden på uppgiften inte skulle förändras. De värden som användes i för- och eftertest var även valda med hänsyn till att eleverna skulle kunna visa att de kunde resonera proportionellt och inte fastna i beräkningar som de eventuellt inte klarade av. Miniräknare användes inte av eleverna i studien på grund av att forskarlaget ansåg att det skulle kunna bidra till att eleverna låste sig vid att jämföra förhållanden på ett specifikt sätt genom att de till exempel relativt enkelt med hjälp av miniräknaren tog reda på det direkta förhållandet genom att genomföra en matematiks beräkning. I samtliga klasser fanns dock elever som ännu inte hade automatiserat multiplikationstabellerna och därför fick alla elever tillgång till en ”lathund” (multiplikationstabeller från 1-10) under test och lektioner. Eleverna testades inför den första lektionen, och testades efter den sista lektionen i varje lektionsserie. Inför den första lektionen i klass 1 prövades ett större antal frågor ut än vad som sedan användes i de efterföljande lektionerna. I varje klass användes även ett mindre test (i fortsättningen benämnt minitest) där en till två frågor genomfördes i direkt anslutning till och direkt efter en lektion. Testerna kan bidra till att peka mot om eleverna lyckats eller inte lyckats med att urskilja just de kritiska aspekter som skulle synliggöras under den aktuella lektionen.

I studiens resultat jämförs elevers svar på 5 uppgifter som testades i alla klasser vilka benämns A – E. I klass 1 och 2 fanns ytterligare en uppgift i för- och eftertest som var konstruerad med avsikt att se om eleverna kunde använda olika beräkningsstrategier. Denna uppgift ströks dock i efterhand av två skäl, dels att det var svårt att urskilja elevers olika sätt att lösa uppgifterna på dels att den av forskarlaget inte upplevdes fånga elevers förmåga att byta beräkningsstrategi, vilket den var avsedd att testa (se bilaga 2). I klass 3 tillkom istället en uppgift som utformades och användes som minitest-uppgift i klass 2. Inte heller denna uppgift analyserades eftersom den visade sig pröva elevers förmåga att storleksordna förhållande vilket låg utanför detta arbetes ramar (se bilaga 3). I klass 1 genomfördes ett mini-eftertest efter den andra lektionen (samma dag med kort rast emellan) Det gjorde den även i klass 2 men denna uppgift ströks som nämnts. I klass 3 gjordes mini-för- och eftertest i direkt anslutning till den första lektionen.

5.1.6. Videoinspelade lektioner

Med avsikt att analysera vilka möjligheter till lärande som erbjöds under lektionerna filmades arbetet under lektionerna. En fördel med detta var att forskarlaget därmed tillsammans kunde analysera det som skedde under lektionerna. I denna studie användes en kamera som i första hand följde läraren vid helklassdiskussioner men som vid gruppdiskussioner förflyttades mellan olika elevgrupper för att försöka fånga den innehållsliga interaktionen då eleverna löste uppgifter. Det kan vara en fördel att ha flera kameror i klassrummet risken finns att viktiga skeenden i klassrummet hamnar utanför datamaterialet. Genom att kamerorna inte var uppställda på stativ utan hanterades av forskaren som följde innehållets behandling, vilket är studiens fokus, blir det som sker i övrigt inte lika avgörande för studiens resultat. Att ha ytterligare en fast kamera i klassrummet hade varit bra att ha, utifall den ordinarie kameran hade slutat fungera.

5.2. Analys

Det filmade materialet har i relation till resultat på för- och eftertest analyserats i olika steg. Efter varje lektionsserie (tre eller fyra lektioner i samma grupp elever) analyserades lektionerna med avsikt att identifiera när under lektionerna dimensioner av variation öppnades eller stängdes, det vill säga specifika tillfällen så kritiska aspekter av innehållet kontrasterades eller generaliserades. Denna analys låg till grund för förändringar inför nästkommande lektionsserie. Rent konkret gick detta arbete till enligt följande: ett första urval gjordes av mig i samråd med den lärare som deltog på lektionerna med utgångspunkt från våra gemensamma upplevelser av lektionerna. Hela det filmade materialet från respektive lektionsserie studerades därefter av mig där valda moment identifierades. Dessa kompletterades med andra moment där jag bedömde att innehållet behandlades på ett sådant sätt att det tycktes möjliggöras eller inte möjliggöras lärande under lektionerna. Valda tillfällen studerades och analyserades därefter av forskalaget där diskussionerna ibland medförde att ytterligare moment och andra tillfällen ur det filmade materialet analyserades. Vid en andra analys, vilken gjordes efter det att learning study avslutats, studerades de 10 filmade lektionerna i kombination med anteckningar av mig i sin helhet, där en utförlig indelning av de ingående momenten i de olika lektionsserierna gjordes. Detta gjordes i syfte att skapa en överblick av det filmade materialet och transkribera moment, både tidigare identifierade och nya, där lärande eventuellt möjliggjordes eller inte möjliggjordes. Analysen syftade till att, ur dessa moment, försöka identifiera och beskriva de specifika tillfällen då dimensioner av variation av innehållsliga aspekter som med lärares eller elevers hjälp öppnades eller stängdes, det vill säga om lärande tycktes möjliggöras eller inte. Jämförelser gjordes därefter såväl mellan olika lektioner i samma klass och samma lektioner i olika klasser i relation till hur innehållet behandlades. Analysen kopplades även till elevernas resultat på för- och eftertest med avsikt att se om det möjliggjorda lärandet uttrycks i testresultaten, det vill säga om det iscensatta lärandeobjektet gick att relatera till elevernas erfarna lärandeobjekt.

Transkript

I resultatdelen förekommer transkript av lektioner i vilka det beskrivs vilken klass, lektion och moment som behandlas. Alla elever och lärare är beskrivna med pseudonymer. För att veta vilken lektion och moment som avses används följande beteckning, lek. 1.2 – M3, där *lek. 1* står för första lektionsserie (och klass), 2 för andra lektionen och *M3* för tredje momentet. I nästkommande kapitel 5.4 beskrivs samtliga lektionsmoment.

Vid beskrivningar i klassrum och i transskript används följande

L:	lärare
E:	elev (ibland med pseudonym initial första bokstav t.ex. J för Johanna)
…	paus
(…)	ljud ej möjligt att höra
[…]	text borttaget
[text]	beskrivning av händelse, eller författares kommentar

Vid transkribering har det som sägs anpassats för skrift på så vis att ovidkommande upprepningar, talspråksuttryck som till exempel öhhh, hmm, och liknande har plockats bort. Detta har gjorts i syfte att göra det lättare att fokusera innehållets behandling i de olika momenten.

5.3. Metodologiska hänsynstaganden

Syftet med denna studie är att studera innehållsliga aspekter som tycks vara avgörande, det vill säga kritiska, att i undervisningen synliggöra för att erbjuda eleverna möjligheter att utveckla kunskap om proportionella samband. Val av metod har gjorts med utgångspunkt från forskningsfrågorna och det sätt som studien är tänkt att implementeras och frågan är om val av teori (variationsteorin) och metod (learning study) i detta fall är lämpligt?

5.3.1. Giltighet och trovärdighet

Shadish, Cook och Campbell (2002) beskriver att en viktig aspekt vid val av metod är att beakta metodens kapacitet att bidra med precisa svar på en avgränsad frågeställning. Då det i denna studie var svar på frågor relaterade till innehållets behandling i relation till den lärandes erfarande av innehållet som eftersöktes bedömdes variationsteori och det innehållsliga fokus denna teori är förknippat med vara ett lämpligt val. Studien kan anses vara av kvasi experimentell karaktär (Shadish et al., 2002) till exempel genom att kvalitativa analyser av lektioner och tester gjordes i relation till kvantitativa jämförelser av grupper, samt att inget slumpmässigt urval gjordes av de elever som deltog i studien. Cohen, Manion och Morrison (2011) beskriver att en studies interna validitet, dess giltighet, i kvalitativa studier, är kontextbunden. Djuplodande beskrivningar görs, enligt författarna, i syfte att förstå hur andra ser på världen i naturliga sammanhang där forskare är en del av den beforskade praktiken (ibid.). Att försöka identifiera kritiska aspekter vilket, var centralt i detta arbete, kan ses som *ett* sätt att försöka förstå hur andra ser på världen.

Cohen et al. (2011) påpekar att validiteten hos påståenden och slutsatser om orsak och verkan aldrig kan vara sanna utan ungefärliga. Begreppet validitet är förknippat med egenskaperna hos en sådan slutsats. Validitet är inte en metod eller en design i sig. Begreppet validitet är istället relaterat till sanningshalten i de kunskapsanspråk som görs där validiteten är att betrakta som god om de empiriska resultaten, tidigare forskning och den eller de teorier som används är i linje med dessa anspråk (ibid.). De kausala beskrivningar och påståenden som i detta arbete görs om att det är innehållets behandling som är orsak till eventuell effekt ska betraktas i ljuset av detta resonemang. Inom det valda teoretiska ramverket, variationsteorin, menas att en av de viktigaste faktorerna för elevers lärande är hur aspekter av innehållet behandlas i undervisning relaterat till elevernas erfarande av det avgränsade innehållet. För att studera detta har learning study använts som modell för datainsamling och systematiska studier av skilda sätt att behandla samma innehåll. Modellen har använts i ett stort antal klassrumsstudier (se Chik et al., 2005; Marton & Pang, 2006; Marton & Tsui, 2004) där relationen mellan innehållets behandling och elevers lärande har studerats. Samtidigt finns det i varje klassrumsstudie, liksom i denna, ett stort antal parametrar som kan variera och påverka de kausala anspråk som görs till exempel: klasstorlek, elevers ålder, lärare och antal lektioner. Detta problematiseras, med avseende på denna studie, inte här utan i metoddiskussionen som följer efter det att studiens resultat presenterats.

Shadish et al. (2002) beskriver att den teoretiska begreppsapparaten måste gå att operationalisera i studien samt att begreppsvaliditeten, det vill säga begreppens giltighet, stärks av detaljerade beskrivningar över hur denna implementering kommit till uttryck. I detta arbete används data som underlag för analys (excerpt, exempel på elevlösningar, resultat från test och beskrivningar av lektionsmoment) i syfte att försöka ge en så trovärdig bild som möjligt av det intentionella, iscensatta och erfarna lärandeobjektet i studien. Resultatbeskrivningar görs utifrån de teoretiska utgångspunkterna kombineras med de i detta arbete preciserade matematiska begrepp som i tidigare forskning funnits vara relevanta för det specifika innehållet.

Forskaren strävar i en learning study efter att, ur elevens perspektiv, göra en analys av vilket lärande som möjliggörs under lektionerna (Runesson, 2006). Det finns aspekter som kan tas för givet och som förblir osynliga vid analysen (Häggström, 2012) vilket påverkar trovärdigheten för de slutsatser som dras. Men det är samtidigt villkoret för denna ansats att försöka grunda dessa antaganden i teorin, i detta arbete variationsteorin där förståelse, som Evers och Wu (2006) beskriver det, skapas då forskarlaget så att säga vandrar mellan teori och empiri. Shavelson, Phillips, Towne och Feuer (2003) ifrågasätter om det överhuvudtaget kan göras några kunskapsanspråk med det rika antal parametrar som finns att beakta i klassrummet (med syftning på design experiment) och att risken dessutom är stor att det ur den stora mängden data kan hitta alternativa förklaringar till den förändrade praktiken. Trovärdigheten i denna studie kan utifrån ovanstående resonemang stärkas av att det här inte rör som om ett stort antal parametrar i klassrummet utan att en tydlig avgränsning skett mot att studera relationen mellan skilda sätt att behandla samma innehåll och elevernas erfarande av detta innehåll.

5.3.2. Reliabilitet vid analys av resultat och lektioner

För att öka validiteten i analysen av resultaten från elevernas för- och eftertest och de filmade lektionerna har interbedömarreliabilitet eftersträvats genom att en forskarkollega analyserade valda sekvenser av materialet. Jämförelser gjordes därefter av om båda uppfattade det som om lärande av något specifikt möjliggjorts eller inte möjliggjorts. Detta gjordes dock även vid varje analystillfälle under studiens gång då forskarlaget tillsammans analyserade filmade sekvenser. Åkerlind (2012) benämner detta som en dialogic reliability check och poängterar att denna diskussion ska fortgå till dess att överenskommelse nåtts. Hon beskriver även en annan variant, coder reliability check, då två forskare oberoende av varandra analyserar och kategoriserar det transkriberade materialet. På grund av det omfattande materialet från lektionerna har sekvenser där dimensioner av variation öppnas eller stängs valts ut. Detta innebär att det görs ett urval där moment som kan vara av intresse riskerar att förbises. Ett antal excerpt i kombination med illustrerande figurer och exempel på elevlösningar från test används i resultatdelen i syfte att ge läsaren möjligheten att kunna skapa sig en bild över hur lärandeobjektet behandlats i undervisningen.

5.3.3. Forskarens roll

Skillnaden mellan att forska eller inte är inte avhängigt av var personen befinner sig, på universitetet eller i skolan. De lärare som deltar i studien, även jag i egenskap såväl som forskare från universitet som lärare i skolan, är alla lärare i grunden men i learning study processen är alla också forskare om än med olika roller. Min roll är att säkerställa att studiens vetenskapliga kvalitet uppnås och att den praktikutveckling som sker är vetenskapligt grundad. Det innebär att jag har ett större ansvar för att analysera och tolka materialet, vilket också är relaterat till den mertid jag har till förfogande jämfört med lärarnas tidsaspekt. Tiden används för djupare analys av lektioner, elevresultat och tidigare forskning. Det är en lärare och inte en forskare som agerar i klassrummet på de lektioner som ingår i studien, eftersom det är lärarnas naturliga roll, men samtidigt är det viktigt att betona att det inte är lärarna som studeras utan elevers lärande i relation till hur innehållet behandlas på lektionerna. Läraren blir en viktig faktor i detta arbete, men samtidigt är lektionsdesignen utformad av hela forskargruppen gemensamt. Jag är, i min forskarroll, därför inte en passiv betraktare vid planeringen av lektionerna. I denna studie är det däremot jag som har ansvar för att analysera och skriva fram resultat, som ska kommuniceras med lärarna, och forska vidare kring det som framkommit i studien.

5.3.4. Generaliserbarhet

Hiebert, Gallimore och Stiegler (2002) anser att lärares kunskaper lämpligast presenteras med hjälp av en teori som exemplifieras med hjälp av exempel från undervisningen. De poängterar vikten av att lärare måste våga låta andra se och utvärdera de resultat som framkommit i den egna verksamheten i syfte att säkerställa kvalitén. En lösning är att låta experter granska kvalitén på resultaten innan de delas med andra, en annan att låta andra lärare testa de framtagna teorierna i andra kontexter. Detta arbete granskas kontinuerligt i olika steg av vetenskapssamhället, men det är därmed långt ifrån säkert att det även kommer att kvalitetsgranskas av andra lärare i andra kontexter. Om det nu ändå görs, så har vi i dag inte något system liknande det som används i Japan där forskningslektioner studeras och analyseras på ett liknande sätt som inom akademin men av lärare från hela landet (Lewis, 2000).

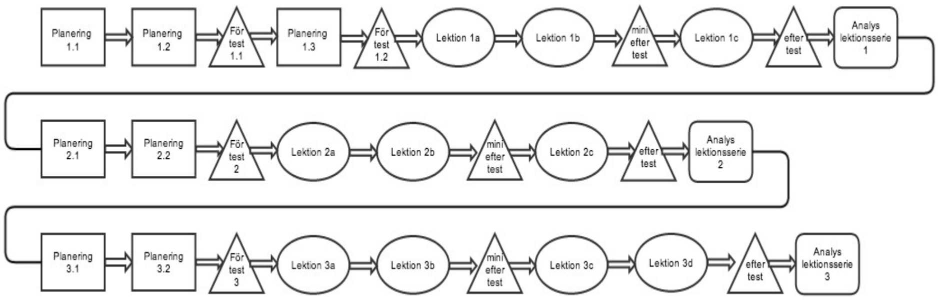
Larsson (2009) beskriver att olika forskningsansatser har olika sorters problem vad gäller generaliseringsanspråk. De är avhängiga vilka kunskapsanspråk som görs och vilka problem och frågeställningar som beaktas. Han menar att det ibland inte är meningsfullt att tala i termer av generalisering såsom vid studier av någon specifik person eller studier som syftar mot att underminera ”universella sanningar”. Utöver dessa exempel är det enligt honom svårt att inte göra anspråk på att i kvalitativa studier generalisera. I annat fall skulle kvalitativa studier vara ointressanta eftersom de slutsatser som dras inte är giltiga annat än i det specifika fallet vid en specifik tidpunkt. Larsson beskriver att ett sätt att generalisera är att maximera variationen inom gruppen. Detta exemplifieras med hjälp av den fenomenografiska forskningsansatsen där det strävas efter att identifiera och beskriva kvalitativa skillnader i hur människor uppfattar ett specifikt fenomen. Ett problem som Larsson beskriver kvarstår dock då det för den skull inte alls är säkert att detta speglar alla tänkbara kategorier av uppfattningar som någon strävar efter att identifiera. Ett annat sätt att generalisera är enligt Larsson (2009) via context similarity. Fokus flyttas då från att det är forskarens ansvar att påvisa om ett forskningsarbete går att generalisera eller ej till den som läser. Med hjälp av Guba och Lincoln (1994) beskrivs att det oftast är den som läser som är mest lämpad att avgöra om de förhållanden som beskrivs i forskningsrapporten överensstämmer med en annan av läsaren given kontext. Forskarens roll flyttas då mot att med hjälp av noggrann beskrivning kommunicera studien på ett sådant sätt att andra kan bedöma om de resultat som framkommit är användbara i andra kontexter. Det problematiseras att den noggrannhet vari studien beskrivs kan variera varvid även de som uppfattar kontexten som lika kan variera. Utifrån detta resonemang går det att tänka sig att de variationsmönster som i denna studie skapas i syfte att urskilja kritiska aspekter av lärandeobjektet av andra kan uppfattas som generaliserbara till andra kontexter och sammanhang. Att denna analys baseras på en teori kan betraktas som en styrka då ett resultat är ”djuplodande” beskrivningar av innehållets behandling vilka kan skrivas fram med hjälp av denna teoris terminologi. Beskrivningar som kan användas och prövas i andra kontexter och andra sammanhang i syfte att uppnå extern validitet.

5.3.5. Etiska överväganden

Vid genomförandet av denna studie har Vetenskapsrådets (2011) rekommendationer följts. Deltagande både vad gäller elever och lärare utgick från frivillig basis där information gavs om att det när som helst under studiens gång gick att välja att inte längre vara med. Inför studien skickade jag ut information (se bilaga 4) om studiens syfte till vårdnadshavare och elever där bland annat frivillighet och integritet poängterades. För deltagande elev krävdes skriftligt godkännande av vårdnadshavare. I informationen till hemmet fanns även kontaktuppgifter till mig. Elever äldre än 15 år kunde själva få fatta beslut om att delta, vilket styrktes av skriftligt godkännande. Vid filmning i klassrummet var kameran främst riktad mot lärare men vid svep över klassrummet och elevdiskussioner fanns elever med på bild. Vid filmning av elevers diskussioner har ett respektfullt agerande eftersträvats på så vis att inte eleverna varit i fokus utan elevernas dialog i relation till det material och uppgifter de arbetade med. Vid testsituationer poängterades att tester skulle avidentifieras och att elevernas resultat, vid diskussioner i forskarlaget på grund av avidentifikation, därigenom inte kunde användas för individuell bedömning eller betygssättning. Ett antal elever intervjuades inför och efter varje lektionsserie. Inför dessa tillfällen fick dessa elever en muntlig förfrågan där det poängterades att de trots att de valt att delta i studien kunde välja att inte bli intervjuade. Totalt valde tre elever att inte delta i intervju.

5.4. Övergripande beskrivning av lektionerna

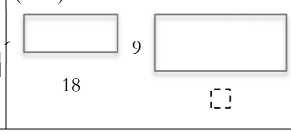
Texten som följer är en sammanfattning ämnad att skapa en överblick över lektionsmomenten i de tre lektionsserierna. De förändringar som gjorts mellan dessa lektionsserier har grundats i analys av föregående lektionsseries intentionella, iscensatta och erfarna lärandeobjekt. Lärandeobjektets olika faser redovisas i det efterföljande resultatkapitlet eftersom revideringarna i sig är ett resultat av den fördjupade förståelsen av innehållets behandling. Innan de ingående lektionsmomenten presenteras placeras lektionerna in i sitt sammanhang (Figur 27 nedan), denna studies cykler.



Figur 27. Översiktlig beskrivning över ingående moment i denna learning study.

I grova drag följer lektionerna lärandeobjektet enligt följande: Under första lektionen behandlades i samtliga klasser (lek.1.1, 2.1, 3.1) aspekter av lärandeobjektet där proportionella strukturer mellan fyra storhetsvärden beaktades. Under den andra och tredje lektionen fortsatte urskiljning av aspekter ur lärandeobjektet men fokus flyttades alltmer över mot vilka beräkningsstrategier som eleverna använde sig av för att lösa proportionella problem. Även i den första lektionen gjordes det till exempel beräkningar som kräver någon slags strategi från elevernas sida, men dessa var tänkta att vara i bakgrunden. Upplägget på lektionerna i de tre klasserna var av liknande karaktär på så vis att helklassdiskussionerna varvades med par- eller gruppdiskussioner. Då eleverna arbetade i par eller gruppvis gavs eleverna uppgifter att arbeta med, antingen via utdelade instruktioner i pappersform eller via skriftliga instruktioner på tavlan. Elevernas arbeten följdes oftast upp av helklassdiskussion där olika sätt att lösa uppgifterna fokuserades av lärare och elever.

I figuren nedan görs en översiktlig beskrivning av de ingående momenten i den första lektionsserien. I momenten anges inom parantes om innehållet behandlats i helklass (H) eller i par/grupp (G).

<table>
<tr><td colspan="3">Lektion 1.1</td></tr>
<tr><td>Moment 1</td><td>Moment 2</td><td>Moment 3</td></tr>
<tr>
<td>Jämförelse av storhetsvärden. Samma storhet 6 m, 3 m och olika storhet 6 m, 2 s.
(H/G/H)</td>
<td>Andra enheter (storheter) kr, kg, liter, introduceras i relation till begreppet förhållande. (H)</td>
<td>Uppgift av karaktären saknat värde. En pool fylls med jämn hastighet. (G/H)
<table>
<tr><td>tid (s)</td><td>volym (l)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
</table>
Fler värden i samma förhållande efterfrågas och fylls i lodrät.</td>
</tr>
<tr><td>Moment 4</td><td>Moment 5</td><td></td></tr>
<tr>
<td>Fler värden i det vågräta förhållandet från pooluppgiften efterfrågas (G/H)
<table>
<tr><td>tid (s)</td><td>vol A</td><td>Vol B</td><td>Vol C</td><td>Vol D</td><td>vol E</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td><td>7,5</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>11</td><td>18</td></tr>
</table></td>
<td>Lodräta och vågräta förhållandet jämförs. (uppgift i moment 3)
(H)</td>
<td></td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Lektion 1.2</td></tr>
<tr><td>Moment 6/7</td><td>Moment 8</td><td>Moment 9</td></tr>
<tr>
<td>Problem av karaktären saknat värde. Eleverna får i uppgift att försöka hitta ett okänt tal med hjälp av förhållanden mellan de andra talen. (G/H)
<table>
<tr><td>6</td><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td>9</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>9</td><td>6</td></tr>
<tr><td>12</td><td></td></tr>
</table></td>
<td>Problem av karaktären saknat värde. Okänd sträcka hos likformiga rektanglar ska hittas (G/H)

</td>
<td>Oklarheter från moment 3 kring varför en sammansatt storhet som stämmer med både inom- (1:3) och mellan-förhållandet (1:2) ej går att skapa diskuteras. (H)
<table>
<tr><td>tid (s)</td><td>volym (l)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>6</td><td>18</td></tr>
<tr><td>?</td><td>?</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Lektion 1.3</td></tr>
<tr><td>Moment 10</td><td>Moment 11/12</td><td>Moment 14/15</td></tr>
<tr>
<td>Diskussion om förhållandet mellan flickor och pojkar i klassen.
Diskussion om hur många flickor och pojkar som måste komma till klassen för att förhållandet ska kvarstå. (G/H)</td>
<td>Gruppuppgift där 3 olika uppgifter delas ut. Samtliga av karaktären saknat värde. (se bilaga 5)

Uppgifterna diskuteras därefter i helklass</td>
<td>Ny gruppuppgift där elevernas egna lösningar på en uppgift på förtest ska sorteras utifrån lösningsstrategi. (se bilaga 6)

Sortering av elevlösningar i kategorier på tavlan i helklass.</td>
</tr>
</table>

Figur 28. Moment i den första lektionsserien.

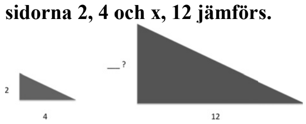
Vid en första anblick kan den andra lektionsserien te sig snarlik den första. Flera uppgifter kvarstår men flera av dem har, utifrån analys av den första lektionsserien, till viss del omarbetats. Förändringar av uppgifter jämfört med klass 1 är markerat med fetstil. Markerat är antingen del av moment eller hela moment. En förändring var till exempel att det i lektionen för eleverna i den andra klassen till skillnad från lektionen för eleverna i den första klassen inledningsvis inte gjordes jämförelser av olika sammansatta storheter utan enbart av siffervärden.

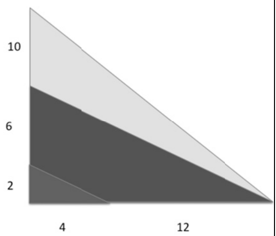
<table>
<tr><td colspan="3">Lektion 2.1</td></tr>
<tr><td>Moment 1</td><td>Moment 2</td><td>Moment 3</td></tr>
<tr>
<td>Jämförelse av tal (H/G/H)
a) additiv och multiplikativ jämförelse av talen 6, 2
b) jämförelse av talen 9, 6</td>
<td>Hur skapas nya tal med samma förhållande som $\frac{9}{6}$?
(G/H)</td>
<td>Jämförelse av storhetsvärden.
a) samma storhet 6m, 2m
b) olika storhet 6m, 2s
(G/H)</td>
</tr>
<tr><td>Moment 4</td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td>Bestämma antal pojkar och flickor i samma förhållande...
(H/G/H)
a) i förhållandet 3:1
b) i förhållandet 5:4</td>
<td></td><td></td>
</tr>
<tr><td colspan="3">Lektion 2.2</td></tr>
<tr><td>Moment 5</td><td>Moment 6</td><td>Moment 7</td></tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>18</td><td>20</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td><td>18</td><td>21</td><td>24</td><td>27</td><td>30</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td><td>24</td><td>28</td><td>32</td><td>36</td><td>40</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td><td>35</td><td>40</td><td>45</td><td>50</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>12</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td><td>36</td><td>42</td><td>48</td><td>54</td><td>60</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>14</td><td>21</td><td>28</td><td>35</td><td>42</td><td>49</td><td>56</td><td>63</td><td>70</td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td><td>16</td><td>24</td><td>32</td><td>40</td><td>48</td><td>56</td><td>64</td><td>72</td><td>80</td></tr>
<tr><td>9</td><td>9</td><td>18</td><td>27</td><td>36</td><td>45</td><td>54</td><td>63</td><td>72</td><td>81</td><td>90</td></tr>
<tr><td>10</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td><td>100</td></tr>
</table>
Multiplikationstabell visas av lärare som hjälpmedel att utifrån två givna värden hitta två värden i proportion till dessa. (H)
</td>
<td>Helklassdiskussion om vad förhållandet mellan pojkar och flickor i klassen är?</td>
<td>
Problem av jämförande karaktär. Hitta klasser med samma förhållande mellan pojkar och flickor (G/H)
<table>
<tr><td></td><td>Pojkar</td><td>Flickor</td></tr>
<tr><td>Klass 1</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Klass 2</td><td>24</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Klass 3</td><td>30</td><td>10</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td>Pojkar</td><td>Flickor</td></tr>
<tr><td>Klass 1</td><td>15</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Klass 2</td><td>18</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Klass 3</td><td>12</td><td>10</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td>Pojkar</td><td>Flickor</td></tr>
<tr><td>Klass 1</td><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Klass 2</td><td>12</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Klass 3</td><td>18</td><td>12</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr><td>Moment 8</td><td>Moment 9</td><td></td></tr>
<tr>
<td>
Problem av karaktären saknat värde. Kranar som rinner i jämn hastighet (G)
<table>
<tr><td>Tid (s)</td><td>Volym (l)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Tid (s)</td><td>Volym (l)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>15</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Tid (s)</td><td>Volym (l)</td></tr>
<tr><td>8</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>30</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Tid (s)</td><td>Volym (l)</td></tr>
<tr><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>15</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Tid (s)</td><td>Volym (l)</td></tr>
<tr><td>16</td><td>12</td></tr>
<tr><td>12</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Helklassdiskussion av uppgift i moment 8.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Lektion 2.3</td></tr>
<tr><td>Moment 10</td><td>Moment 11/12</td><td></td></tr>
<tr><td>Läraren återkopplar till förra lektionen och uppgifterna med kranarna i moment 8. Efterfrågar olika strategier för att lösa problem av karaktären saknat värde. (G/H)</td><td>3 gruppuppgifter delas ut. Samma som i lektion 1.3 (moment 11/12) (se bilaga 5) Följs av diskussion i helklass. (G/H)</td><td></td></tr>
</table>

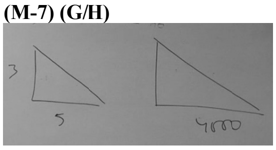
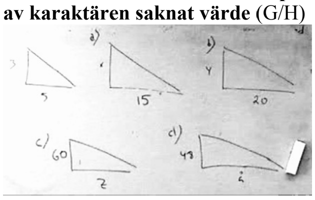
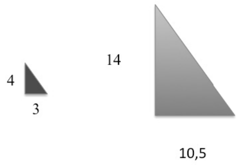
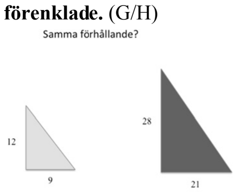
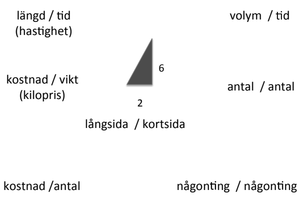
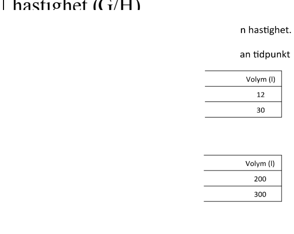
Figur 29. Moment i den andra lektionsserien. Förändringar av uppgifter jämfört med klass 1 markerat med fetstil. Markerat är antingen del av moment eller hela moment.

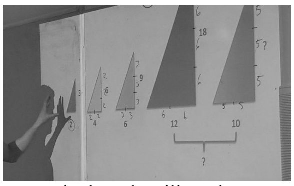
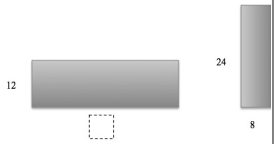
Inför den tredje lektionsserien skedde större omarbetningar av lektionsdesignen där ett flertal uppgifter tillfördes. Efter tre lektioner hade inte hela det planerade innehållet behandlats varför beslut om ytterligare en lektion fattades. Skillnader mellan lektionsserie 2 och 3 har även i texten som följer markerats med fetstil.

<table>
<tr><td colspan="3">Lektion 3.1</td></tr>
<tr><td>Moment 1</td><td>Moment 2</td><td>Moment 3</td></tr>
<tr><td>Jämförelse av tal
a) additiv och multiplikativ jämförelse av talen 6, 2
b) jämförelse av talen 9, 6
(H/G/H)</td><td>Parvisa jämförelser av sträckor i samma förhållande (inom)
a) i förhållandet 1:3
b) i förhållandet 3:4
c) i olika förhållande
(H/G/H)</td><td>Att en proportion har två förhållanden (inom och mellan) att beakta introduceras med hjälp av likformiga trianglar med sidorna 2, 3 och 6, 9 jämförs
(H/G/H)</td></tr>
<tr><td>Moment 4</td><td>Moment 5</td><td>Moment 6/7</td></tr>
<tr><td>Uppgift av karaktären saknat värde. Likformiga trianglar med sidorna 2, 4 och x, 12 jämförs.


Skillnad mellan 2 beräkningsstrategier belyses
(G/H)</td><td>Svaret 10 som tyder på urskiljning av additiv skillnad i föregående uppgift resoneras. Illustreras med ej likformig triangel vilken eleverna uppmanas göra likformig. (G/H)

</td><td>Två likformiga trianglar jämförs i syfte att synliggöra beräkningsstrategier. Plats och dela strategi. (H/G)


Generaliseras med andra värden och problem av karaktären saknat värde.</td></tr>
</table>

Lektion 3.2		
Moment 8	**Moment 9**	**Moment 10**
Helklassdiskussion och fortsättning på föregående lektion. Dela och platsstrategi.	**Demonstration. Två gummiband sträcks ut av lärare i syfte att synliggöra oändligt antal par av sammansatta storheter i ett förhållande (H)**	**Återkoppling till avslutande problem från förra lektionen (M-7) (G/H)** 
Moment 11	**Moment 12**	**Moment 13/14**
Generaliseras med andra exempel av karaktären saknat värde (G/H) 	**Dela och plats strategi generaliseras med ett annat exempel** (G/H) 	**Ny jämförelse mellan likformiga trianglar där inget av förhållandena är det mest förenklade.** (G/H)  Fler uppgifter av samma karaktär ges som gruppuppgift. (G/H)
Lektion 3.3		
Moment 15	Moment 16	Moment 17
Andra sammansatta storheter än bas/höjd i likformiga figurer introduceras (G/H) 	Problem av jämförande karaktär. a) Helklassdiskussion om förhållandet mellan flickor och pojkar i klassen. b) Gruppuppgift där jämförelser av förhållandet mellan flickor och pojkar i olika klasser och skolor görs. Samma uppgift som i lektion 2.2-M7. Klasser i skolor jämförs.	Problem av karaktären saknat värde. Kranar som rinner i jämn hastighet (G/H)  M8 **Ytterligare en ruta med högre värden.**

Lektion 3.4		
Moment 18	Moment 19	Moment 20
Problem av karaktären saknat värde. Hitta enklare förhållande fokuseras och illustreras med hjälp av likformiga trianglar. (H)  Exemplet kopplas till storheten hastighet och en värdetabell med samma mätvärden som trianglarna ovan	3 gruppuppgifter (se appendix 5) delas ut där uppgift b och c är identiska med uppgifterna i lektion 2.3.M-11/12 men **där a uppgiften modifierats enligt följande.**  	Avslutande helklassdiskussion av de 3 uppgifterna.

Figur 30. Moment i den tredje lektionsserien. Förändringar av uppgifter jämfört med klass 2 är markerat med fetstil.

Den tredje lektionsserien skilde sig markant från de tidigare. Under de två första lektionerna i den tredje lektionsserien arbetade eleverna enbart med längder och likformiga figurer. Det är först vid den tredje lektionen (lek 3.3-M15) som andra sammansatta storheter introducerades. Introduktion av sammansatta storheter med olika, eller samma enheter gjordes under den första lektionen i de andra klasserna. En slutlig stor förändring var att det tillkom ytterligare en lektion vilket innebar att den tredje klassen hade fyra lektioner istället för tre vilket de andra klasserna hade. Detta ska fortsättningsvis beaktas vid jämförelser av den tredje klassens och de två andra klassernas resultat på för- och eftertest. Den extra lektionen problematiseras i metoddiskussion (kap 7.1)

6. Studiens resultat

Detta kapitel inleds med en beskrivning av hypotetiskt kritiska aspekter och följs av en beskrivning över vad de enskilda för- och eftertest-uppgifter som används i samtliga klasser avsåg att pröva. Avsikten med dessa uppgifter som helhet var att försöka skapa en bild av lärandeobjektets beskaffenhet, dess aspekter att beakta i undervisningen, men de användes även som indikatorer för undervisningens eventuella effekt. Jämförelser av resultat på uppgiftsnivå följer därpå, där likheter och skillnader i resultat inom och mellan klasser redovisas i relation till resultat på för- och eftertest. Detta följs av ett avsnitt där det med utgångspunkt från forskningsfråga 1 preciseras vilka, i tidigare forskning identifierade, aspekter av proportionella samband som tycks vara kritiska för eleverna i de klasser som deltar i studien att urskilja. Vad skillnader mellan klassers resultat kan tänkas bero på, med avseende på innehållets behandling av lärandeobjektets kritiska aspekter, redogörs det för i den efterföljande analysen (kap 6.2). I det avsnittet jämförs och beskrivs undervisningsmoment i de olika klasserna med avsikt att söka svar på forskningsfråga 2. Även om analysen skett kronologiskt redovisas studiens resultat inte kronologiskt i termer av den första, andra, och tredje lektionsserien. I stället följer analysen aspekter av lärandeobjektet som framkommit vara kritiska för eleverna att kunna urskilja. Beslut vari förändringar mellan lektionsserierna grundas kopplas i analysen (kap 6.2) till elevresultat på specifika för- och eftertest uppgifter. De uppgifter som lyfts fram är de som anses beakta den aspekt som analyserats. Avslutningsvis sammanfattas studiens resultat i termer av vad denna studies resultat, beträffande elevers lärande av proportionella samband, tillför tidigare forskning inom området.

6.1. Fastställande av kritiska aspekter

I detta avsnitt beskrivs resultat som svarar mot den första forskningsfrågan:

- På vilket sätt är den problematik i elevernas förståelse av proportionella samband som framkommit i tidigare forskning relaterad till kritiska aspekter som identifieras i denna studie?

Detta undersöks i föreliggande kapitel genom att de aspekter framlyfta från tidigare forskning testats i klassrummet med tre olika elevgrupper. Med hjälp av elevernas svar på test-uppgifter motsvarande den typ utav problem som beaktas i detta arbete analyseras på vilket sätt elevernas erfarande överensstämmer eller inte överensstämmer med tidigare forsknings resultat. För att kunna studera detta har ett antal test-uppgifter konstruerats av forskarlaget som beaktar de svårigheter tidigare studier lyft fram.

6.1.1. Konstruktion av test-uppgifter i relation till hypotetiskt kritiska aspekter

Då lärandeobjektet preciserats identifierades med utgångspunkt från tidigare forskning, detta arbetes förstudie i andra elevgrupper, inledande elevintervjuer i de aktuella elevgrupperna och forskarlagets tidigare erfarenheter ett antal hypotetiskt kritiska aspekter. Dessa beskrivs nedan i kombination med ett illustrerande exempel och en hänvisning till i vilket kapitel de i forskningsöversikten presenterats. Det resulterade i förmågan att kunna urskilja:

- skillnad mellan additiv och multiplikativ jämförelse av två mätvärden (kap 2.2)
  ex. jämförelse av talen 6 och 2, additiv skillnad 4, multiplikativ 3 gånger större eller 1 tredjedel

- att multiplikativ jämförelse av olika storhet är möjlig men inte additiv (kap 2.2)
  ex. storhetsvärdena 6 m och 4 s, olika storheter jämförs

- att det är möjligt att skapa oändligt antal par av storhetsvärden i proportion (kap 2.4.2)
  ex. hastighet $\frac{3m}{2s} = \frac{75m}{50s} = \frac{3 \cdot x\ m}{2 \cdot x\ s}$

- förhållande inom och mellan sammansatt storhet (kap 2.3)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Utöver ovanstående aspekter beskrivs i forskningsöversikten (kap 2.4) olika beräkningsstrategier som elever använder sig av för att lösa proportionella problem. I studiens resultat relateras dessa strategier till proportionella uppgifter av karaktären saknat värde och jämförande karaktär (se kap. 2.1), den typ av proportionella problem som beaktas i detta arbete. Hypotetiskt kritiska beräkningsaspekter identifierade i tidigare forskning är att kunna urskilja:

- statisk proportion (förhållande mellan sammansatta storheter används vid beräkning, se kap. 2.4.2 och 2.4.4)

  ex. $\frac{3 \cdot 9\ m}{3 \cdot 6\ s} = \frac{27\ m}{18\ s}$

- dynamisk proportionalitet (förhållande inom sammansatt storhet används vid beräkning, se kap. 2.4.3 och 2.4.4)

  ex. $Hur\ långt\ hinner\ en\ person\ som\ går\ 3m\ på\ 2s\ på\ 18\ sekunder?$
  $1{,}5m/s = \frac{3m}{2s} = \frac{X}{18s}\ \ ger\ 1{,}5 \cdot 18 = 27\ alternativt\ \frac{3}{2} \cdot 18 = 27$

- uppbyggnadsproportion (par av storhetsvärden adderas eller subtraheras, se kap. 2.4.1)

  ex. $\frac{9\ kr + 9\ kr + 9\ kr}{6\ godis + 6\ godis + 6\ godis} = \frac{27\ kr}{18\ godis}$

Dessa hypotetiskt kritiska aspekter, eftersträvas att eleverna ska erbjudas att erfara så att de efter undervisning ska kunna resonera och argumentera flexibelt kring proportionella samband. Med avsikt att se om dessa aspekter var kritiska, det vill säga avgörande för att eleverna skulle utveckla sitt lärande, i dessa klasser utformades ett antal frågor som avsåg att testa detta. Utgångspunkten för detta arbete var uppgifter identifierade i tidigare forskning vilka studerades och modifierades (uppgift C, D och E nedan) i kombination med egenhändigt konstruerade uppgifter (A och B) baserade på forskarlagets tidigare erfarenheter och i relation till de teoretiska utgångspunkterna.

Inför den första lektionserien prövades fler frågor ut än de som redovisas, men vissa valdes bort då de inte i önskvärd utsträckning lyckades fånga de aspekter som bedömdes vara kritiska. I en av uppgifterna gick till exempel inte att se om eleverna kunde byta perspektiv, vilket uppgiften avsåg att testa, och välja ett förmodat enklare förhållande. Den första klassens elevresultat på förtest analyserades av forskarlaget i samband med att den slutgiltiga planeringen av lektionsserie 1 gjordes. I varje klass genomfördes i direkt anslutning till den första lektionen ett minitest i syfte att försöka utläsa om urskiljning av någon aspekt möjliggjorts och erfarits av eleverna i mitten eller i slutet av lektionsserien. Varje uppgift är konstruerad med avsikt att försöka identifiera någon specifik aspekt. Fem av de uppgifter som användes i för- och eftertest i samtliga klasser presenteras.

Uppgift A, av karaktären saknat värde, (se nedan) undersökte i vilken utsträckning olika beräkningsstrategier användes i klasserna. Den avsåg även att pröva i vilken utsträckning eleverna klarade av att hantera olika storheter.

Uppgift A

Ove går 6 meter på 4 sekunder. Hur lång tid tar det för Gun att gå 15 meter om hon går i samma hastighet som Ove. (Visa på något sätt hur du löser uppgiften)

Då de siffervärden som användes i uppgift A är låga beslutades att nedanstående uppgift B skulle ha två värden större än 100. Anledningen till detta var att se om elever kunde uppfatta proportioner med värden större än 100. Uppgiften skiljer sig även från uppgift A på så vis att den är av jämförande karaktär. I denna uppgift är det till skillnad från uppgift E (se nedan) inte någon fördel att göra denna jämförelse med hjälp av ett direkt förhållande.

Uppgift B

300 g dillchips kostar 24 kr. 200 g potatischips kostar 18 kr. Vilken påse ska du välja om du vill ha mest chips för pengarna? (Visa på något sätt hur du löser uppgiften)

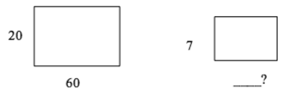
Uppgift C[19] hade för avsikt att se om eleverna kunde uppfatta de hypotetiskt kritiska aspekternas olika perspektiv, förhållandet inom (vilket i uppgiften är förhållandet höjd/bas i rektanglarna) eller mellan systemen (rektanglarna). Deluppgift a) är konstruerad så att förhållandet inom den sammansatta storheten (20:30) kan uppfattas som lättare att identifiera än förhållandet mellan (20:7). I deluppgift b) är det tvärtom förhållandet mellan de sammansatta storheterna (1:3) som troligen ses som lättare att identifiera än inom förhållandet (8:10).

[19] Uppgiften är inspirerad av Kaput and West (1994), s. 269.

Uppgift C

I en klass arbetade man med likformig förstoring och förminskning. Det betyder att alla längder i en figur ska förminskas eller förstoras lika mycket. Vid ett tillfälle utgick man ifrån en rektangel med sidorna 20 cm och 60 cm. En elev ritade då den högra figuren. Skriv in rätt längd på långsidan.

a)

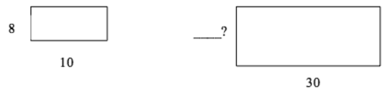


O.b.s. Ej i skala. Det går inte att mäta eller jämföra längder i figurerna

Visa på något sätt hur du löser uppgiften.

Vid ett annat tillfälle utgick man ifrån en rektangel med sidorna 8 cm och 10 cm. En elev ritade då figuren till höger. Skriv in rätt längd på kortsidan.

b)



Visa på något sätt hur du löser uppgiften

Med uppgift D[20] undersöktes om eleverna med utgångspunkt från ett förhållande kunde uppfatta proportioner. Till denna uppgift krävs ingen förklaring men de 3 felaktiga alternativen är inte slumpvis valda. Hos alternativet 15 barn och 14 vuxna är skillnaden mellan talen ett, vilket är samma additiva skillnad som i förhållandet 5:4. Alternativet 8 barn och 10 vuxna är det omvända förhållandet. I alternativet 15 barn och 6 vuxna är skillnaden mellan barn och vuxna nio, vilket är detsamma som summan av talen i förhållandet 5:4.

Uppgift D

I en buss är förhållandet mellan barn och vuxna 5:4

Ringa in alla alternativ som du tycker stämmer för hur många barn och vuxna det kan vara i bussen?

15 barn och 14 vuxna　　10 barn och 8 vuxna　　8 barn och 10 vuxna

15 barn och 6 vuxna　　20 barn och 16 vuxna

I uppgift E[21] är inte enheten angiven vilket i tidigare forskning beskrivs som problematiskt. Uppgiften är av jämförande karaktär och förhållandet outtalad. Syftet är att se hur jämförelser av samma/olika förhållande görs. Ett ytterligare svarsalternativ lades till (E) med avsikt att minska risken för att rätt alternativ väljs på grund av slump. Eleverna ombads även till skillnad från den ursprungliga uppgiften att motivera sitt val och de beskrivningar eleverna i

[20] Uppgiften är inspirerad av TIMMS 2007 (Skolverket, 2008, s. 16).
[21] Uppgiften är hämtad ur TIMMS 2007 (Skolverket, 2008, s.22).

denna studie gjorde tyder på att de inte valde slumpmässigt och att det ytterligare svarsalternativet därför var onödigt.

Uppgift E

5. **Tabellen nedanför visar antalet sålda Iphones och Androider i fyra affärer.**

Affär	*Iphone*	*Android*
1	*12*	*9*
2	*14*	*11*
3	*16*	*12*
4	*18*	*15*

I vilka två affärer är förhållandet mellan antalet Iphones och antalet Androider lika? (Ringa in ditt svar)

A) 1 och 2 B) 1 och 3 C) 2 och 3 D) 2 och 4 E) 1 och 4

Förklara på något sätt hur du kom fram till ditt svar

Dessa frågor beskrivs framöver i termer av uppgift A-E men kopplas när det anses lämpligt till en fotnot där en kort beskrivning av uppgiften ges.

6.1.2. Resultat av tester

Testerna är konstruerade i syfte att försöka identifiera på vilka skilda sätt elever urskiljer proportionella samband före och efter undervisning. Att tala i termer av rätt och fel svar, summera resultat på uppgifter och göra jämförelser mellan klasser på test som helhet är möjligt och görs, men utgör den mindre intressanta delen av resultatet. En summering innebär att uppgifterna viktas lika, vilket kan bli missvisande eftersom en del av dem har krav på motivering och andra inte. Till exempel krävs i uppgift D ingen förklaring, vilket innebär att kvalitativa skillnader i mindre utsträckning synliggörs i denna uppgift än i övriga frågor. Den kvantitativa sammanställningen säger därför inget om *vad* eleverna lärt sig, bara i vilken utsträckning de besvarat uppgifterna korrekt eller inte, motiverat eller slumpartat. Jag har valt att på uppgiftsnivå redovisa resultat som pekar på stora resultatskillnader mellan för- och eftertest både inom och mellan klasser. Dessa siffror säger inte heller något om vad denna skillnad kan tänkas bero på, vilket är ambitionen med arbete. Därför har i den efterföljande analysdelen (kap 6.2) gjorts en koppling mellan skillnader på för- och eftertest på enskilda uppgifter och innehållets behandling med avseende på de specifika aspekter som uppgifterna är ämnade att testa. Frågorna är konstruerade med avsikt att försöka identifiera förändrat lärande avseende en specifik aspekt av lärandeobjektet. Resultatet av analysen kopplas till hur denna aspekt behandlats i undervisningssituationen. Denna koppling, att det är just innehållets behandling som är orsak till eventuell effekt, problematiseras i metoddiskussion.

På eftertesterna löste och motiverade närmare tre fjärdedelar av eleverna i klass 2 och 3 uppgift E[22] korrekt på eftertest (se tabell 3 nedan). I dessa klasser var skillnaden stor jämfört med förtesterna, där endast ett fåtal elever löste uppgiften korrekt. Vad gäller uppgift C[23] löste cirka en fjärdedel av eleverna i klass 3 denna uppgift på förtest och tre fjärdedelar på eftertest, en skillnad som motsvarade halva klassen. Skillnaden mellan för- och eftertest var stor även i klass 2 och något mindre i klass 1 där dock en något större andel av eleverna löste uppgiften på förtest. Detta innebar att andelen elever som löste uppgift C på eftertest var ungefär densamma, lite mer än hälften, i klass 1 och 2. Jämfört med uppgift E kunde en större andel elever i samtliga klasser besvara uppgift C korrekt redan på förtest. Skillnad i antal elever som på eftertest jämfört med förtest valde de båda rätta alternativen i uppgift D[24] var stor där cirka tre fjärdedelar av eleverna i samtliga klasser valde korrekta alternativ på eftertest. På uppgift A[25] i den andra klassen var förändringen nästan obefintlig och på uppgift B[26] besvarade fyra elever färre än på förtest uppgiften korrekt. I den tredje klassen besvarade nästan alla elever uppgift A korrekt på eftertest att jämföra med cirka tre fjärdedelar på förtest medan skillnaden vad gäller uppgift B var marginell men inte negativ vilket den var i klass 2. Samtidigt kan det beaktas att antalet elever som redan på förtest besvarade denna uppgift korrekt i klass 3 var stort. I tabell 3 har ett antal värden markerats med fetstil. Dessa pekar mot intressanta skillnader mellan för- och eftertest, inom eller mellan klasser, skillnader som kommer att diskuteras i relation till innehållets behandling under lektionerna (kap 6.2).

---

22 Uppgift E där jämförelser görs av förhållande mellan olika mobiler i olika affärer. Konstruerad med avsikt att se om eleverna kan uppfatta ett direkt förhållande utifrån vilket jämförelser av proportioner görs.

23 Uppgift C där saknat värde hos likformig rektangel eftersöks. Konstruerad med avsikt att se om eleverna uppfattar olika perspektiv, förhållandet inom eller mellan par av storhetsvärden.

24 Uppgift D där andra förslag på antal barn och vuxna i förhållandet 5:4 ska ges. Konstruerad med avsikt att se om eleverna med utgångspunkt från ett direkt förhållande uppfattar proportioner.

25 Uppgift A där saknat värde hos proportionell hastighet efterfrågas. Konstruerad med avsikt att identifiera i vilken utsträckning olika lösningsstrategier används i klasserna.

26 Uppgift B där jämförpris på chips efterfrågas. Konstruerad med avsikt att se om eleverna kan göra proportionella jämförelser mellan 4 värden, varav 2 är större än 100.

Tabell 3. Antal elever som svarade rätt på uppgifter i för- och eftertest.

Uppgift	**Klass 1 (n:11)**		**Klass 2 (n:25)**		**Klass 3 (n:17)**	
	Förtest	**Eftertest**	**Förtest**	**Eftertest**	**Förtest**	**Eftertest**
A	10	-[27]	**16**	**17**	**12**	**16**
B	4	8	**15**	**11**	**12**	**14**
C	5	7	6	15	**5**	**13**
D	3	8	10	21	8	13
E	**1**	**4**	**1**	**19**	**3**	**15**

6.1.3. Kritiska aspekter

Innan en analys görs av de moment som kan ha påverkat elevernas möjligheter att lära, följer en beskrivning över vilka aspekter som funnits kritiska i relation till ovanstående tabell. Av primärt intresse var om de tidigare beskrivna *hypotetiskt* kritiska aspekterna verkligen var kritiska för eleverna i de undersökta klasserna och om det i så fall tycktes speglas i testresultat. Om aspekter var kritiska eller inte kritiska var avhängigt om eleverna gav uttryck för att ha erfarit eller inte erfarit dessa aspekter. Att få syn på vilka de kritiska aspekterna är blir avgörande för huruvida läraren lyckas utveckla elevernas lärande eller inte.

Multiplikativa samband

En aspekt som var kritisk i dessa klasser var att urskilja skillnaden mellan additiva och multiplikativa samband. Att elever felaktigt uppfattar additiva samband istället för multiplikativa är väldokumenterat i tidigare forskning. I uppgift C där eleverna skulle jämföra likformiga figurer och särskilt E där proportioner mellan affärer skulle identifieras uppfattade ett stort antal elever i samtliga klasser additiva snarare än multiplikativa samband på förtest. Det gjorde de inte i lika stor utsträckning på eftertest. Dessa frågor testade även andra aspekter såsom beräkningsaspekter och inom- och mellan-förhållande varför beskrivningar av hur denna aspekt tog sig uttryck i elevers lösningar på test redovisas i nästa kapitel där elevers förståelse i relation till innehållets behandling beaktas (kap 6.2).

[27] Det gjordes ingen eftertest på uppgift A klass 1 då elevsvaren i uppgiften användes under lektionen med avsikt att visa på olika lösningsstrategier i klassen. Beslutet grundades i att 10 av 11 elever löste uppgiften på förtest.

Förhållande inom och mellan sammansatta storheter

En andra kritisk aspekt i dessa klasser var att kunna urskilja och skilja på förhållande inom och mellan sammansatt storhet. Att detta tycktes svårt går att förstå i uppgift C, (en uppgift där saknat värde hos likformig triangel eftersöks) är ämnad att testa just denna aspekt. På förtestet gav elever i samtliga klasser uttryck för att vid jämförelser av likformiga figurer, i denna uppgift rektanglar, inte kunna växla perspektiv och använda sig av, det förmodat, enklaste av två förhållanden. Detta går inte att utläsa genom att i tabell 3 ovan enbart notera antal elever som besvarat uppgiften korrekt på eftertest, varför det gjorts en analys av elevlösningar som lyfter fram huruvida eleverna använt sig av det ena eller andra förhållandet för att identifiera de saknade värdena i uppgiften. Vad som studeras vid jämförelser av för- och eftertesterna är om eleverna i dessa klasser byter förhållande till ett enklare eller om de löser uppgiften med hjälp av det avsedda, men eventuellt svårare, förhållandet. Denna analys presenteras i relation undervisningen i nästa kapitel (6.2).

Beräkningsaspekter

Resultaten på förtestet visar att framförallt två av tre beräkningsaspekter; statisk proportion och dynamisk proportionalitet, var kritiska för eleverna i dessa klasser att urskilja. Utan dessa strategier tycktes elever ha svårt för att lösa uppgifter av jämförande karaktär och saknat värde. Vid dynamisk proportionalitet används inom-förhållandet (proportionalitetskonstanten) då en proportion ska skapas eller identifieras. Till detta krävs det någon slags jämförelse eller beräkning med hjälp av värden. Inom-förhållandet och jämförelse eller beräkning med hjälp av värden kan ses som underliggande kritiska aspekter till denna beräkningsstrategi. På liknande sätt är mellanförhållandet och den jämförelse eller beräkning med hjälp av värden som görs underliggande kritiska aspekter till beräkningsstrategin statisk proportion.

Uppbyggnadsstrategin syntes många elever i klasserna använda, trots att den har begräsningar. I uppgift A, där en proportionell hastighet ska identifieras, använder sig cirka hälften av de elever som löser uppgiften på förtest av uppbyggnadsstrategi. Strategin tycks däremot inte räcka till för att lösa uppgift E, ett problem av jämförande karaktär där som tidigare nämnts proportionella jämförelser görs mellan affärer. Uppgift E var testets svåraste, en uppgift som endast någon eller några elever i varje klass på förtest kunde förklara. Till denna uppgift och uppgift B (chipsuppgiften) krävs det att man har uppfattat och kan använda sig av statisk proportion och dynamisk proportionalitet. Inför denna studie beslutade sig forskarlaget för att även uppbyggnadsstrategin skulle beaktas i undervisningen. Anledningen till detta var att det inte ur resultaten på test gick att utläsa om en övervägande del av eleverna verkligen kunde använda sig av denna strategi, en strategi som innebär att de aspekter som urskiljs är:

- att storhetsvärden kan bilda par av storhetsvärden
- att storhetsvärden kan uppfattas som parallella talserier vilka kan hanteras parallellt och adderas och subtraheras

Strategin beskrivs i tidigare forskning som primitiv på så vis att proportionalitetskonstanten inte beaktas, men användandet av den visar på vilket sätt eleverna erfar proportionella samband.

En aspekt som inför studien ansågs hypotetiskt kritisk var:

> att kunna urskilja att multiplikativa jämförelser mellan olika storheter (t.ex. längd och tid) är möjliga men att inte additiva jämförelser är det

Det fanns dock inget i förtest som indikerade att detta var problematiskt. Eleverna blandade inte, utom i enstaka fall, ihop storheter vid beräkningar varpå denna aspekt inte ansågs vara kritisk i dessa klasser. Detta resultat skiljer sig således från den tidigare forskningen.

En annan hypotetiskt kritisk aspekt var:

> att kunna urskilja att det är möjligt att skapa oändligt antal par av storhetsvärden i proportion till varandra inom en sammansatt storhet

Denna aspekt betraktades efter studiens genomförande som ett led i att med hjälp av par av storhetsvärden kunna generalisera förhållande inom ett system, till exempel hastighet eller likformiga figurer. Hur denna aspekt behandlades i undervisning beskrivs i samband med att de kritiska aspekterna förhållande inom och mellan system (sammansatta storheter) analyseras i efterföljande kapitel (6.2).

6.2. Elevers utryckta förståelse i relation till innehållets behandling

Den andra forskningsfrågan beaktar *vad i innehållets behandling i lektionerna tycks vara avgörande för elevers olika erfarande av proportionella samband.* På vilka sätt kritiska aspekter behandlas och hur elevers förståelse påverkas och kan relateras till denna innehållsliga behandling under lektionerna är frågor som i detta avsnitt analyseras och beskrivs. Detta görs i relation till den tredje forskningsfrågan som beaktar *hur elevernas erfarande av proportionella samband förändras efter undervisning och vilka skillnaderna är mellan klasserna*. Strukturen på analysen följer de, i ovanstående avsnitt identifierade, kritiska aspekterna vilka nu är något färre än de hypotetiskt kritiska. Först behandlas följande kritiska aspekter av lärandeobjektet, att kunna urskilja:

- skillnad mellan additiv och multiplikativ jämförelse av två mätvärden
  ex. jämförelse av talen 6 och 2, additiv skillnad 4, multiplikativ 3 gånger större eller 1 tredjedel

- förhållande inom och mellan sammansatt storhet
  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Vad gäller beräkningsaspekter kopplas dessa till de två olika typer av problem som beaktas i denna studie: proportionella problem av jämförande karaktär och saknat värde. Att detta görs beror på att de olika strategierna används på olika sätt i dessa olika problemtyper. Följande beräkningsaspekter analyseras i detta kapitel i relation till elevers lärande och innehållets behandling. Att kunna urskilja:

- statisk proportion (förhållande mellan sammansatta storheter används vid beräkning)
  ex. $\frac{3 \cdot 9\ m}{3 \cdot 6\ s} = \frac{27\ m}{18\ s}$
- dynamisk proportionalitet (förhållande inom sammansatt storhet används vid beräkning)
  ex. *Hur långt hinner en person som går* $3m$ *på* $2s$ *på* 18 *sekunder*?
  $1{,}5\ m/s = \frac{3\ m}{2\ s} = \frac{X}{18\ s}$ $ger\ 1{,}5 \cdot 18 = 27\ alternativt\ \frac{3}{2} \cdot 18 = 27$
- uppbyggnadsproportion (par av storhetsvärden adderas eller subtraheras)
  ex. $\frac{9\ kr + 9\ kr + 9\ kr}{6\ godis + 6\ godis + 6\ godis} = \frac{27\ kr}{18\ godis}$

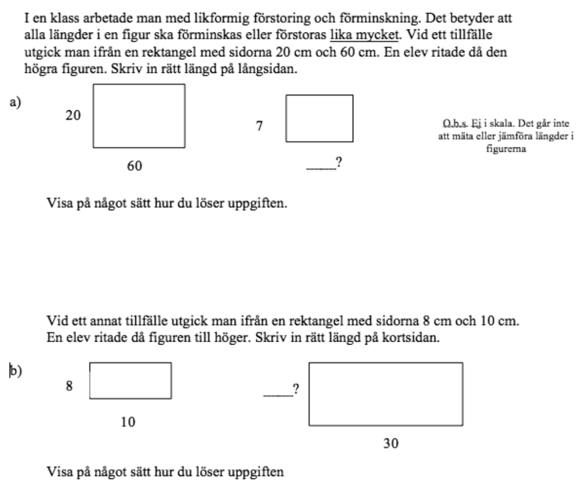
Efter denna inledande strukturella beskrivning beskrivs i avsnittet som följer hur aspekterna multiplikativa och additiva samband i relation till elevernas lärande behandlats i undervisning.

6.2.1. Urskilja skillnad mellan multiplikativa och additiva samband

I detta avsnitt problematiseras den kritiska aspekten att kunna separera de multiplikativa sambanden från additiva samband. Först ges ytterligare belägg för att aspekten tycktes vara kritisk hos eleverna, därefter beskrivs på vilka olika sätt aspekten behandlades i de olika klasserna och avslutningsvis analyseras elevers förståelse av aspekten i relation till innehållets behandling under lektionerna i de olika klasserna. Rubriceringen är om inget annat anges densamma för alla de aspekter som i resultatdelen fortsättningsvis presenteras.

Separation av multiplikativt samband från additiva samband som kritisk aspekt

Elever gav under lektioner, tester och intervjuer uttryck för att uppfatta additiva samband snarare än multiplikativa. Hur detta tog sig uttryck beskrivs nu med hjälp av exempel på elevlösningar från förtest uppgift C (se Figur 31 nedan), en uppgift där många elever urskilde additiva samband snarare än multiplikativa. I uppgiften efterfrågades saknat värde hos en likformig rektangel.

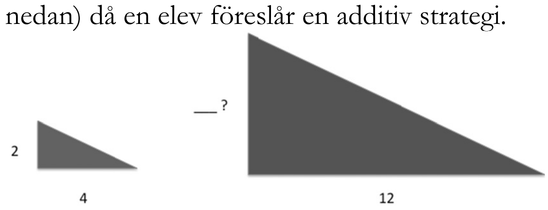


Figur 31. Uppgift C deluppgift a och b

På förtestet var det en majoritet av eleverna i samtliga klasser som antingen inte svarade eller gjorde en additiv jämförelse på minst en av de två uppgifterna i uppgift C. Ett förekommande svar var 47 på deluppgift a). Svaret tyder på att elever urskilde den additiva skillnaden mellan 20 och 60. Denna var en skillnad som överfördes till den andra rektangeln där 7 adderades med 40 varvid svaret blev 47. På liknande sätt överfördes på deluppgift b) skillnaden mellan 8 och 10 till den andra rektangeln där elever istället tog bort 2 från 30 och fick svaret till 28. Det fanns andra varianter där till exempel den additiva skillnaden mellan 10 och 30 uppfattades, vilket blev tjugo, en skillnad som adderades med 8 varvid svaret återigen blev 28. Då elever i samtliga klasser på ett flertal uppgifter resonerade i termer av additiv skillnad snarare än multiplikativa samband verkade det som att många elever ännu inte uppfattade skillnaden mellan additivt och multiplikativt samband, alternativt att de inte förstod vad som menas med likformiga. Ett perspektivbyte från additiva till multiplikativa samband behövde göras under lektionen. Att kunna separera additivt från multiplikativt samband tycktes således även i dessa klasser vara kritisk för att kunna utveckla förståelse för proportionella samband.

Behandling av multiplikativt samband i undervisning

Eftersom denna aspekt var kritisk för elever i klasserna beaktades den vid i planeringen inför samtliga lektionsserier. Vid det allra första lektionsplaneringstillfället fattades beslut om att under lektionerna aktivt söka efter och försöka utmana elevers additiva uppfattningar för att skapa ett perspektivbyte till ett multiplikativt samband. Detta exemplifieras med hjälp av en lektionssekvens hämtad ur den första lektionen i den tredje klassen (lek 3.1 – M4). Eleverna hade tidigare beskrivit olika sätt att med hjälp av multiplikativa samband bestämma varför höjden i en likformig triangel är 6 (se Figur 32 nedan) då en elev föreslår en additiv strategi.



Figur 32. Uppgift såsom den visas på tavlan i lek.3.1- M4.

Excerpt 11

L: Några fler förslag? David.

D: Där kan man tänka att 4 plus 2 blir 6 [summerar sidorna i lilla triangeln]

L: Ja

D: Kan man tänka att de två alltid blir den höga…? [syftar på att det okända värdet i det här fallet blir 6]

L: Vad…?

D: Det är en intressant tanke…

L Det är en intressant tanke… vi testar. Vi provar med… jag hittar på en ny då. [Ritar en triangel med höjden 3 och basen 4 och en större triangel med basen 12 och höjden okänd]

L: Vad ska det så här då?

D: Nej det går inte… [3+4 blir 7 men höjden ska vara 9]

L: Det ska bli 9 där va? Så att 3 plus 4 det blir ju inte 9. Så det var liksom slumpen här då. David är du med på det?

Eleven såg ett additivt samband som råkade stämma i just detta exempel. Sambandet testades och kontrasterades med hjälp av ett exempel där summan inte blev lika med det saknade värdet. Elevens förslag var för övrigt ett värde (summera sidorna) av aspekten additivt samband som inte beaktades i de andra klasserna.

Redan vid planeringen av den första lektionsserien bestämdes att förslag om ej fungerade strategier med additiva förslag inledningsvis, i samtliga klasser, skulle ges av läraren när dessa inte gavs som förslag från eleverna för att synliggöra skillnaden mellan additivt och multiplikativt samband. I den direkt efterföljande sekvensen ur momentet ovan gjordes en sådan planerad kontrastering med hjälp av samma uppgift (se Figur 32 ovan). En additiv skillnad kontrasterades mot ett multiplikativt samband men med ett annat värde och en annan jämförelse. Nu föreslog läraren istället att den additiva skillnaden mellan två storhetsvärden kunde användas för att bestämma det saknade värdet, vilket kan jämföras med det tidigare beskrivna elevförlaget där två storhetsvärden summerades.

Excerpt 12.

L: Hur skulle man kunnat få det här svaret till 10? [...] Fundera 20 sekunder med kompisen

[...]

L: Har ni tänkt? Viktor?

V: Nej jag får bara svaret till 6.

L: Ja, det är väl i och för sig bra men hade ni gjort det här i förmiddags så hade garanterat fem, sex, sju stycken fått det här till 10 och varför då, vem vill svara? Esbjörn?

E: För att de tänker att fyra minus två är två och då tar de minus två… [12 – 2 = 10]

L: Det var det som jag började med. Vi tänker förhållande nu, vi tänker inte bara skillnad. Hur många gånger eller hur stor del.

I denna episod bildades ett nytt variationsmönster (VM) där uppgiften var konstant men svaret och förklaringen till det felaktiga svaret varierade. En ny kontrastering gjordes av additivt och multiplikativt samband men samtidigt skedde en generalisering av felaktiga additiva svar.

Ett sista exempel ges nu från lek.1.1 – M5 i syfte att belysa hur elevernas skilda uppfattningar av aspekterna additiv och multiplikativ jämförelse kom till uttryck, utmanades och eventuellt förändrades under lektionen. Eleverna skulle gruppvis försöka hitta och förklara saknade värden i en uppgift där en pool fylls i en jämn hastighet. Vid den efterföljande helklassdiskussionen föreslogs en additiv lösning.

Tid (sekunder)	Volym (liter)
3	9
6	**12**

Figur 33. 12 fylls i av läraren på tavlan i lek.1.1-M5.

Excerpt 13

L: Om jag skriver 12 här [skriver 12 i den tomma rutan]. Här skiljer det 6 [pekar på 3 och 9] och det gör det här med [pekar på 6 och 12]. Det ser väl bra ut?

E1: Haha det gör det visst [eleven som läraren hört resonemanget från]

E2: Nej inte om det fylls i jämn takt

E1: Fast det stämmer ju!

E2: Det är dubbelt så stort

E4: 9 är inte dubbelt så stort som 3

E3: Nej det är det inte

E4: Det där är fel

E2: Det ska vara 18 där istället.

[…]

L: Varför funkar inte detta då? Stina?

E2: (bryter in emellan) För att det fylls i en jämn takt.

S: För att man ska multiplicera med tre hela tiden.

Även i detta moment möjliggörs urskiljning av aspekten multiplikativt samband genom att påvisa vad det inte är, det vill säga inte ett additivt samband. Eventuellt försvåras urskiljning av att det i detta moment simultant diskuterades förhållande inom och mellan sammansatt storhet, i detta fall volym per tid.

Elevernas förändrade förståelse av multiplikativa samband i relation till innehållets behandling

Eleverna i samtliga klasser gav i eftertest uttryck för att i större utsträckning än på förtest urskilja multiplikativa samband. Ett exempel är uppgift C (saknat värde hos likformig rektangel eftersöks) där andelen elever som löste uppgifterna ökade i de 3 klasserna. I klass ett gjorde närmare hälften av eleverna, 5 av 11, additiva jämförelser på någon av uppgifterna i förtesterna, vilket kan jämföras med 3 på eftertesterna. I klass två var antalet elever som uppfattade additiva samband 8 av 25 på förtest och noll på eftertest. 10 elever svarade dock fel eller inte alls på en eller båda deluppgifterna. I klass tre var motsvarande siffra 6 av 17 på förtesterna och noll på eftertesterna. I denna klass svarade 4 elever fel eller inte alls på en eller båda deluppgifter. I tabell 4 nedan visas antalet elever som förklarar båda de saknade värdena i uppgifterna på för och eftertest.

Tabell 4. Antal elever som förklarar båda de saknade värdena i uppgift C

	Förtest	Eftertest
Klass 1 (n:11)	5	7
Klass 2 (n:25)	6	15
Klass 3 (n:17)	5	13

Dessa resultat indikerar att kontrastering av additivt och multiplikativt samband tycks bidra till att utveckla elevers förståelse av skillnaden mellan dessa aspekter. Det gjordes i samtliga klasser fler kontrasteringar av dessa aspekter. Nedanstående tabell visar det totala antalet svar i uppgift C, D och E där lösningarna tyder på att elever uppfattade additivt istället för multiplikativt samband.

Tabell 5. Det totala antalet svar per uppgift där additivt samband ges som förklaring. Siffror inom parantes på E anger antal elever som felaktigt urskiljer lika antal som förhållande.

	Uppgift C		**Uppgift D**		**Uppgift E**	
	Förtest	**Eftertest**	**Förtest**	**Eftertest**	**Förtest**	**Eftertest**
Klass 1 (n:11)	5	3	5	0	5	2 (2)
Klass 2 (n:25)	8	0	5	2	11 (3)	1 (2)
Klass 3 (n:17)	4	0	4	1	8 (3)	0

I klass 1, där additiva felaktiga svar efter undervisning är störst, försvåras troligen urskiljning av aspekten multiplikativa samband av att andra aspekter, såsom enheter och inom- och mellan-förhållande, varierar simultant.

6.2.2. Urskilja förhållanden inom och mellan sammansatta storheter

I denna studie har forskarlaget valt att fokusera vikten av att kunna urskilja att det alltid, jämförelser av fyra storhetsvärden i en proportion finns två förhållanden att beakta. Om de ingående värdena i det ena förhållandet är svåra att hantera går det därigenom att byta perspektiv och angripa problemet med hjälp av det andra förhållandet. Uppgift C (rektangel uppgiften, se Figur 31 i föregående kapitel) konstruerades primärt med avsikt att försöka identifiera om detta var något som eleverna i dessa klasser hade svårt för.

Förhållande inom och mellan som kritisk aspekt

I tabellen nedan redovisas antal elever som uppfattar båda eller ett av de saknade värdena i uppgift C. De som lyckades lösa en av uppgifterna löste nästan uteslutande deluppgift b (se Figur 31). Om detta beror på att det är lättare att urskilja förhållandet i läsriktningen, eller om det är lättare att se att 30 är 3 gånger så stort som 10 än att se att 60 är 3 gånger så stort som 20, eller att 7 är det enda ojämna talet är oklart. Additiva samband gavs oftast som förklaring vid felaktigt svar.

Tabell 6. Antal elev i klasserna som på förtest uppfattar båda eller ett av de saknade värdena på uppgift C.

	Förtest	
	Uppfattar 2	**Uppfattar 1**
Klass 1 (n:11)	5	5
Klass 2 (n:25)	6	6
Klass 3 (n:17)	5	9

Det tycks som denna aspekt var kritisk för ett flertal elever i klasserna då det endast var ungefär en fjärdedel av eleverna i klass 2 och 3 och något mindre än hälften av eleverna i klass 1 som på förtest uppfattar båda förhållandena. För att visa hur uppgifter designats och förändrats under studien med avseende på i vilken utsträckning urskiljning av förhållanden inom och mellan sammansatta storheter möjliggjorts beskrivs ett moment från klass 1 där detta synliggörs.

Behandling av förhållande inom och mellan i undervisning

Lektion 1.2 (M6) började med problem av karaktären saknat värde (se Figur 34 nedan), där varje ruta var tänkt att representera en kran som rinner i en jämn hastighet. Eleverna fick i uppgift att försöka hitta ett okänt tal med hjälp av förhållanden mellan de tre andra talen. Uppgiften var konstruerad för att göra det möjligt att urskilja att det fanns 2 förhållanden (inom och mellan) att använda sig av för att hitta det okända värdet. De två förhållandena beskrevs i denna uppgift och under lektionen i termer av det lodräta och det horisontella förhållandet. Siffrorna och förhållandena var konstanta i ruta A och B men varierade lodrätt och horisontellt. Tanken bakom designen av uppgiften var att eleverna skulle kunna urskilja att det horisontella förhållandet 2:3 går att finna på 3 skilda sätt. I ruta A horisontellt, B lodrätt och C som omvänt förhållande. På grund av att enheterna sekunder och liter glömdes bort och inte skrevs på tavlan ovanför respektive kolumn gjorde eleverna inledningsvis främst additiva jämförelser. Efter en stund informerades klassen om att den ena kolumnen är sekunder och den andra liter samt att de inte skulle göra additiva jämförelser utan leta efter förhållandet, kvoten. Med hjälp av enheterna började eleverna göra multiplikativa jämförelser.

A

6	9
10	

B

6	10
9	

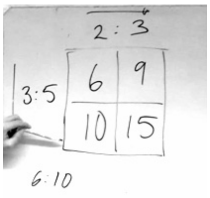
C

9	6
12	

1. Hitta det okända talet
2. Skriv vilka förhållanden som gäller

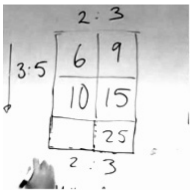
Figur 34. Uppgiften som eleverna i klass 1 fick se den på tavlan. (A, B, C har lagts till för att underlätta läsning)

Elever föreslog vid den efterföljande diskussionen att det i uppgift A gick att använda sig av både det horisontella förhållandet 2:3 och det vågräta 3:5.



Figur 35. Talet 15 fylldes i som förslag och diskuterades i relation till lodrät och horisontellt förhållande.

Planerat var att uppgift A-C skulle diskuteras simultant i förhoppning att elever då skulle kunna urskilja att förhållandet 2:3 (invariant) fanns i alla rutor och att det ibland kan vara en fördel att byta perspektiv, att leta efter det andra förhållandet om storhetsvärdena i det ena förhållandet var svåra att hantera. Istället lades det till två rutor lodrät i ruta A och eleverna uppmanades att hitta andra tal som stämde med *båda dessa* förhållanden. Ett problem uppstod därigenom där läraren i stunden hade svårt att identifiera vad detta berodde på. Det går inte att hitta andra tal som passar in på *båda* dessa förhållanden (2:3 och 3:5) utan ett av förhållandena måste väljas som utgångspunkt, i detta fall kan 2:3 vara lämpligt eftersom det är i det förhållandet som vattnet rinner, två sekunder för tre liter. För att lösa problemet kan det andra förhållandet väljas om värdena där är enklare att hantera, men proportionalitetskonstanten det dynamiska förhållandet mellan tid och volym utnyttjas i så fall inte. Detta gör det svårt att erfara det generella funktionssambandet i den sammansatta storheten volymflöde (volym som passerar en gränsyta per tidsenhet). Ett samband som om det urskiljs kan bidra till komplexare förståelse.

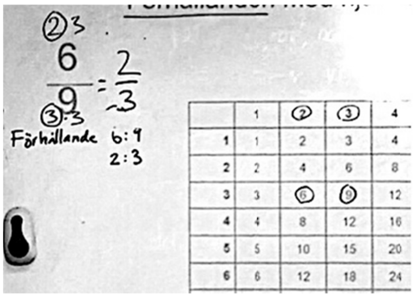


Figur 36. Klassen hade svårt att enas om vad det skulle stå i den tomma rutan då 25 föreslagits i den högra rutan.

I planeringen av den andra lektionsserien uppmärksammades vikten av att simultant visa alla uppgifter i momentet på tavlan i syfte att belysa att det finns två förhållanden att beakta (se Figur 37 nedan). Liknande, men något modifierad uppgift som i klass 1 användes under lektion 2.2-M8. Förhållandet 2:3 var i de 4 första exemplen (läsriktning) invariant. Till skillnad från den första lektionen möjliggjordes simultan urskiljning av samma förhållande i två perspektiv i och med att alla uppgifter visades på tavlan. I den efterföljande diskussionen i helklass fokuserades detta genom att det på tavlan visades att förhållande 2:3 gick att hitta både lodrätt och vågrätt.

Figur 37. Tavlan i klass 2 efter diskussion om olika förhållanden att använda sig av för att hitta saknat värde. Förhållandet 2:3 markerat vid 4 av 5 tabeller.

I den första klassen kämpade eleverna med att hitta ett förhållande med vars hjälp de kunde hitta det saknade värdet men så tycktes inte vara fallet i klass 2. Att eleverna i klass 2 inte hade svårt för att hitta ett förenklat förhållande berodde främst på vad som skede i momentet före (lek 2.2-M5). I detta moment visades en multiplikationstabell på tavlan där det påpekades att det gick att ta denna till hjälp om gånger-tabellerna upplevs som svåra. Med hjälp av multiplikationstabellen demonstrerades hur förhållanden som är proportionella med 6:9 kunde hittas. I treans tabell markerades 6 och 9 varpå det visades att dess förenklade värde, 2:3 kunde ses, högst upp i kolumnerna (se Figur 38 nedan). Detta generaliserades genom att det med hjälp av tabellen visades hur ett förenklat förhållande till 15 pojkar och 12 flickor kunde identifieras (se Figur 39 nedan). Fokus i lektionen flyttades därmed från den konceptuella nivån till den procedurella, och erfarandet av en proportionalitetskonstant försvårades. Eleverna gavs snarast möjligheten att urskilja en metod att använda sig av för att lösa problemet än att urskilja vad som faktiskt sker med de ingående värdena då ett direkt förhållande skapas.

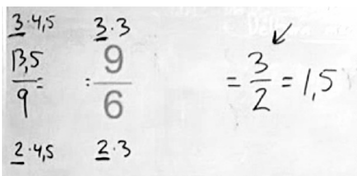


Figur 38. Det direkta förhållandet 2:3 eftersöks

Figur 39. Det direkta förhållandet 4:5 eftersöks.

I den efterföljande, tidigare beskrivna, uppgiften med kranar som rinner i en jämn hastighet hittade eleverna nu med hjälp av multiplikationstabellen relativt lätt ett förhållande att använda sig av för att hitta det saknade värdet.

Introduktionen av denna metod bidrog till att eleverna på ett enkelt sätt kunde hitta ett förenklat direkt förhållande. Däremot begränsas de värden utifrån vilka jämförelser kan göras till de som går att finna i multiplikationstabellen, vilket gick tvärt emot den planerade intentionen på lektionen innan. Under den första lektionen i klass 2 (lek.2.1-M2) gjordes ett planerat försök att synliggöra att det utifrån ett givet förhållande finns ett oändligt antal par av tal i proportion till detta förhållande Eleverna uppmanades att ge förslag på förhållande som är samma[28] som $\frac{9}{6}$. En elevgrupp föreslog tre ”tvådjedelar” vilket de sa var samma som en och en halv. En av eleverna förklarade att de delat täljare och nämnare med 3. En annan elev sa att det alltid går att multiplicera täljare och nämnare med lika mycket. Ytterligare en elev föreslog därefter 13,5 niondelar men eleven tillade samtidigt att han inte förstod varför det skulle bli det men att de diskuterat det i gruppen. Efter lite diskussion förklarades indirekt vad en proportionalitetskonstant är, det vill säga att om talen är i förhållandet $\frac{3}{2}$ så är täljaren alltid en halv gång så stor som nämnaren och eftersom 13,5 är en halv nia större än 9 så är de i samma förhållande. Om ett värde förändras sker även en förändring av det andra värdet i relation till ändringen i det första värdet. På tavlan skrevs att 13,5 är uppbyggt av 3 stycken 4,5-or och 9 av två stycken 4,5-or, vilket även visades för $\frac{9}{6}$ där 9 består av 3 stycken 3-or och 6 av 2 stycken 3-or (se Figur 40 nedan)



Figur 40. Det som stod på tavlan efter ovanstående diskussion.

[28] Då det inte finns någon enhet betraktas täljare och nämnare i följande beskrivning som en sammansatt storhet där kvoten *inom* par av tal (inte par av storhetsvärden eftersom det inte finns någon enhet) är proportionalitetskonstant. Jämförelser av förhållandet *mellan* två par av tal (kvoter) görs *mellan* täljare-täljare och nämnare-nämnare

Resonemanget pendlade mellan att beakta förhållandet inom och mellan par av tal. Tanken med momentet var att möjliggöra urskiljning av att det finns ett oändligt antal par av storhetsvärden i förhållandet 3:2 (eller med denna proportionalitetskonstant) men resonemanget kretsade främst kring två olika sätt att beräkna en proportion på, beräknings-aspekter. Det nämndes att täljaren skulle vara en halv gång större än nämnaren men det generaliserades inte med hjälp av andra exempel. Även i de efterföljande exemplen från detta moment förblev oändlighetsaspekten till viss del outtalad.

Förhållandet 3:2 kontrasterades med en icke proportionell additiv metod på så vis att täljare och nämnare i $\frac{9}{6}$ adderades med 3, varpå $\frac{12}{9}$ skrevs på tavlan med förslaget att de då var i samma förhållande.

> Excerpt 14:
>
> L: Det borde stämma va? Johan.
>
> J: Det är ganska lätt att se att det inte stämmer för 6 är ju två tredjedelar av 9 men hälften av 9 är 4,5 och då ska man ta det tre gånger och så ska det bli tolv och det blir det inte.
>
> L: Nej, vi hade ju deras förlag där innan, vilket tal var det som skulle stå där uppe om det skulle stämma?
>
> E: 13,5

Ett nytt förhållande (4:3) infördes i episoden ovan då förslaget $\frac{12}{9}$ skrevs, vilket kan bidra till att hjälpa eleverna att urskilja vad förhållandet 3:2 är genom att visa vad det inte är. Johans svar indikerar att han har uppfattat att täljaren hela tiden ska vara en del större än nämnaren, ett konstant förhållande, men förhållandet 3:2 generaliserades inte med hjälp av andra exempel. Istället efterfrågades vad $\frac{12}{9}$ är i för förhållande och hur det kan skrivas på ett enklare sätt.

> Excerpt 15:
>
> E: Fyra tredjedelar
>
> L: Jag skriver det här [skriver $\frac{4}{3}$]. Hur fick du fram det?
>
> E: Delade med tre

L: Du delade båda med 3 [skriver $\frac{12/3}{9/3}$]. Alltså är förhållandet mellan talen olika [skriver $\frac{4}{3} = 1{,}33\ldots$] här är talet [pekar på 4an] 0,33 gånger större eller 33 % större men här [pekar på 3an i $\frac{3}{2} = 1{,}5$] är talet en halv gånger större eller 50 % större än det [pekar på tvåan].

Det skulle kunna ses som att försök gjordes att generalisera oändlighets-aspekten genom att eleverna ombads hitta andra värden som också var i förhållandet $\frac{12}{9}$. Diskussionen kretsade dock snarare vid jämförelser av de båda förhållandena i dess enklaste form (att $\frac{12}{9} = 1{,}33 \ldots \neq \frac{9}{6} = 1{,}5$), där jämförelser i beräkningsform med decimalform introducerades, 1,5 jämfört med 1,33... I direkt anslutning till detta ställdes frågan (se excerpt 16 nedan) om det går att skriva talen på oändligt många sätt och få samma kvot varpå en elev föreslog en strategi som baserades på det direkta förhållandet, kvoten (1,5:1). Svaret tolkades som att täljare och nämnare kan multipliceras med samma tal, vilket som helst och att det därigenom skapas en proportion. Detta uttryck visar att aspekten proportionalitetskontant inte urskilts. Det visar i stället en strategi där förhållandet *mellan* par av tal används och där proportionalitetskonstanten med avseende på täljare och nämnare inte synliggörs.

Excerpt 16:

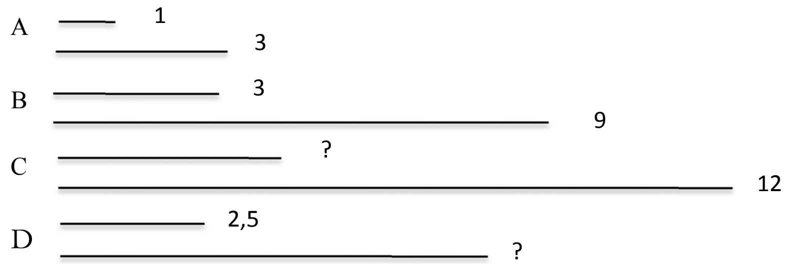
L: Skulle vi kunna skriva talen på oändligt många sätt och få samma kvot?

E: Det är egentligen bara att ta något tal och ha som bas och ta det gånger 1,5.

L: Precis, det är bara att ta och multiplicera med samma tal här [pekar på täljaren 12 och nämnaren 9] så får vi nya tal här.

I episoden ovan synliggjordes en problematik som forskarlaget under de två första lektionsserierna brottades med, att i stunden kunna avgöra vilket förhållande som avses. Aspekterna, inom- och mellan-förhållandet, separerades och varierades i ovanstående moment simultant *innan* *<u>en</u>* av aspekterna först separerats och med hjälp kontrastering och generalisering gjorts möjlig att urskilja. Då båda aspekterna samvarierar, vilket ovanstående moment är tänkt att belysa, försvåras urskiljning på grund av att allt för mycket varierar och proportionalitetskonstanten urskils inte.

Detta beaktades vid planeringen av den tredje lektionsserien. Liksom i klass 2 gjordes i det allra första momentet (lek 3.1a – M1) enbart jämförelser mellan tal. Multiplikativa och additiva samband mellan talen 6 och 2 kontrasterades först varpå förhållandet 3:1 kontrasterades mot omvända förhållandet 1:3. Jämförelser gjordes därefter med talen 9 och 6 där multiplikativa samband och omvänt förhållande generaliserades. Till det efterföljande momentet (lek 3.1a – M2) utformades däremot en ny uppgift där oändlighetsaspekten, med hjälp av uppgiftens design (se Figur 41 nedan), styrdes mot att inledningsvis fokusera på förhållandet *inom* en sammansatt storhet och att det finns ett oändligt antal par av storhetsvärden i detta förhållande. Detta illustrerades med hjälp av sträckor, inte bara tal, vilket var fallet i den andra klassen. Sträckorna liknades vid två olika långa gummiband. Gummiband användes och sträcktes ut så att förhållandet kvarstod och jämfördes avseende längd vid olika tillfällen. Den fråga som ställdes i samband med uppgiften var hur sträckorna (parvis) förhåller sig till varandra samt hur långa sträckorna i de två sista jämförelserna (C och D, se Figur 41 nedan) var om de också var i förhållandet 1:3. Endast ett par visades från början (A) varefter tavlan fylldes på med par efterhand. Eleverna uppmanades ge fler förslag på par av storhetsvärden[29] som var i förhållandet 1:3 varpå en elev efter det att ett antal förslag getts konstaterade att det fanns *hur många som helst*. Till skillnad från klass 2 gjordes multiplikativa jämförelser mellan två storhetsvärden i taget istället för fyra. På så vis blev det möjligt att urskilja proportionalitetskonstanten, det vill säga hur många gånger den första sträckan fick plats i den andra. Inledningsvis separerades inte förhållandet *mellan* två par av storhetsvärden simultant med *inom* förhållandet vilket gjordes i klass 1 och 2. Till exempel fokuserades inte att förhållandet mellan par A och C är 1:4 $\left(\frac{1}{3} = \frac{4}{12}\right)$. Detta förhållande kan förväxlas med proportionalitetskonstanten och därmed innebära svårigheter för eleverna att se skillnaden mellan proportion och proportionalitet.



Figur 41. Uppgift 1 i lek.3.1-M2, de långa sträckorna delades efterhand som de visades in i tre lika stora delar.

---

29 Även om enbart tal visas är det i detta exempel, till skillnad från i klass 2 där täljare och nämnare jämfördes storhetsvärden som jämförs. Talen som skrivs representerar längder.

I uppgiften generaliseras samma förhållande (1:3). Delens längd, om den första sträckan betraktas som en del[30], *inom* varje par är invariant. Längd och antalet delar som de båda olika sträckorna består av varierar. Parvis *mellan* till exempel par A och B så är det totala antalet delar invariant medan längder och delarnas längd i de olika paren varierar.

Tabell 7. Variant och invariant i variationsmönster (VM) 1 i uppgift 1.

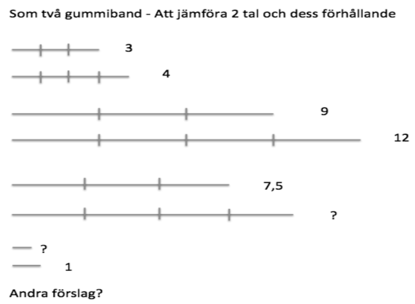
	Längd	Antal delar	Delens längd	Förhållande
Inom par	v	v	i	i
Mellan par	v	i	v	i

Då elever korrekt föreslog att längden i exempel D (se Figur 41 ovan) skulle vara 7,5 frågade läraren varför det inte kunde stå 10. Med hjälp av detta förslag öppnas en ny dimension av variation. Förhållandet 1:3 kontrasterades mot 1:4 vilket innebar att aspekten oändligt antal förhållande med hjälp av förslaget separerades och varierades.

Tabell 8. Variant och invariant i VM 2 i uppgift 1.

	Längd	Antal delar	Delens längd	Förhållande
Inom par	v	v	i	i
Mellan par	v	v	i	v

Oändlighetsaspekten av *inom* förhållandet generaliserades därefter med hjälp av en ny uppgift av identisk karaktär (se Figur 42 nedan) med nya längder, nu i förhållandet 3:4. I det sista paret generaliserades förhållandet 3:4 med ett värde mindre än ett.



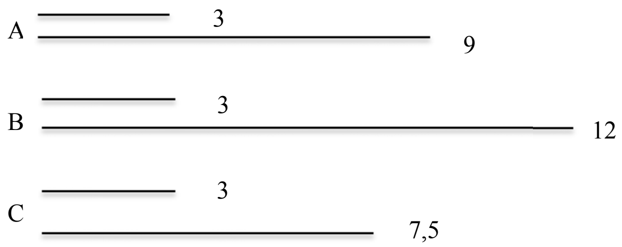
Figur 42. Uppgift 2 i lek.3.1-M2. PP bild av det som eleverna såg då samtliga längder parvis diskuterats. Delning av sträckorna gjordes parvis efterhand som paren visades.

[30] En del kan även ses som längden 1.

Tabell 9. Variant och invariant i VM 1 i uppgift 2.

	Längd	Antal delar	Delens längd	Förhållande
Inom par	v	v	i	i
Mellan par	v	i	v	i

Aspekten oändligt antal förhållande generaliserades sedan med en ny uppgift (kontrasterades tidigare se Tabell 8 ovan).

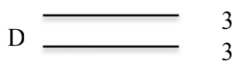


Figur 43. Uppgift 3 i lek.3.1-M2, de långa sträckorna delades efterhand i olika antal delar.

Tabell 10. Variant och invariant i VM 1 i uppgift 3.

	Längd	Antal delar	Delens längd	Förhållande
Inom par	v	v	i	i
Mellan par	v	v	i	v

Då par D visades (se Figur 44 nedan) bildades ytterligare ett variationsmönster. Allt är invariant inom paret medan det vid jämförelser mellan paren ovan endast är delens längd som är invariant.

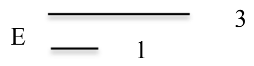


Figur 44. Uppgift 3 i lek.3.1-M2.

Tabell 11. Variant och invariant i VM 2 i uppgift 3.

	Längd	Antal delar	Delens längd	Förhållande
Inom par	i	i	i	i
Mellan par	v	v	i	v

Avslutningsvis kontrasterades omvänt förhållande med hjälp av det sista längd-paret som visades, då jämförelser med förhållandet i par A gjordes.

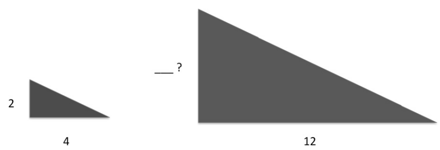


Figur 45. Uppgift 3 i lek.3.1-M2

Tabell 12. Variant och invariant i VM 3 i uppgift 3.

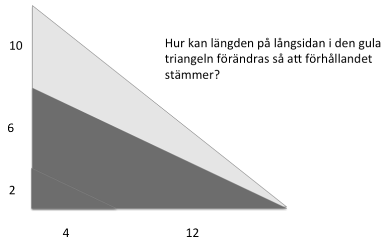
	Längd	Antal delar	Delens längd	Förhållande
Inom par	v	v	i	i
Mellan par	v	v	i	v

I klass 3 har det fram tills nu gjorts jämförelser av två storhetsvärden i taget. Nu introducerades (lek.3.1-M-3) med hjälp av en uppgift av karaktären saknat värde och två likformiga trianglar (två system) jämförelser av förhållande *inom* par av storhetsvärden (inom system) i relation till förhållandet *mellan* par av storhetsvärden (mellan två system) (se Figur 46 nedan) Denna typ av uppgift kan i sig leda till andra samband än det som är relaterat till proportionalitets-konstanten.



Figur 46. Uppgift där jämförelser av 4 värden gjordes

Två olika elevförlag gavs till varför det okända värdet var 6. En förklaring var att sidorna i den stora triangeln ska vara 3 gånger längre än sidorna i den lilla triangeln och en annan förklaring var att basen i triangeln är dubbelt så stor som höjden. Till skillnad från momentet innan med de parvisa längderna gjordes nu jämförelser av värden med hjälp av två förhållanden parallellt. En tidigare beskriven kontrastering av additivt och multiplikativt samband (se kap 6.2.1) gjordes därefter genom att läraren föreslog att längden på höjden skulle vara 10. En gul icke likformig triangel med basen 12 och höjden 10 visades, i relation till de tidigare visade trianglarna (se Figur 47 nedan), varpå eleverna fick i uppgift att bestämma hur lång basen då behövde vara för att den stora gula triangeln skulle vara likformig med den gula respektive den röda triangeln. Förslag gavs vilka pekade mot att elever uppfattade och använde sig av förhållandet inom triangeln (höjd/bas, 1:2). En elev föreslog att basen skulle vara dubbelt så lång som höjden 10 det vill säga 20. Ett annat förslag tydde på att eleven uppfattade förhållandet mellan den lilla (röda) triangelns och den stora (gula) triangelns sidolängder (1:5). Eleven sa att den gula triangelns höjd är 5 gånger större än den lilla röda triangelns höjd 2 varför den lilla triangelns bas 4 kan multipliceras med 5 för att bestämma den stora gula triangelns bas till 20.



Figur 47. Uppgift där den stora triangeln skulle göras likformig.

Till skillnad från i klass 1 och 2 bidrog ovan beskrivna design utav uppgifter till att jämförelser av två värden och *ett* förhållande (inom) i den tredje klassen beaktades innan jämförelser av fyra värden och två förhållande gjordes. Med andra ord, dimensioner av variation skapades med hjälp av parvisa längder *innan* mellan-förhållandet simultant beaktades. Detta möjliggör att eleverna kan urskilja proportionalitetskonstanten på ett tidigt stadium. Den simultana introduktionen av inom- och mellan-förhållanden gjordes med hjälp av uppgiften ovan (Figur 46) och jämförelser av likformiga trianglar. Dessa aspekter behandlades och generaliseras därefter simultant, med hjälp av andra likformiga trianglar och allt mer komplexa värden, under de två första lektionerna i klass 3. Detta gjordes dock i relation till beräkningsstrategier vilket inte beskrivs här utan i kap 6.2.3.

Elevernas förändrade förståelse av förhållande inom och mellan i relation till innehållets behandling

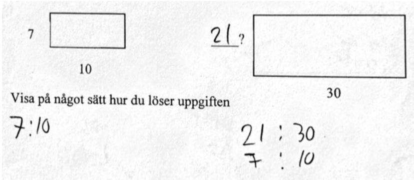
I klass 3 bidrog de förändrade variationsmönstren till att inom- och mellan-aspekterna inledningsvis inte samvarierade vilket innebar att dimensioner av variation vad gäller inom-aspekten och att det i denna finns ett oändligt antal förhållande och att det i varje förhållande finns ett oändligt antal par av storhetsvärden kunde öppnas grundat i samma proportionalitetskonstant. I de båda andra klasserna varierade inom- och mellan-förhållandet i kombination med beräkningsstrategier vilket tros ha försvårat urskiljning av dessa aspekter och att inom-förhållandet är förknippat med proportionalitetskonstant. Detta avspeglas i elevernas resultat där tre fjärdedelar av eleverna i den tredje klassen uppfattade båda de saknade värdena i uppgift C på eftertest. Detta kan jämföras med cirka en fjärdedel på förtest. Även i klass 2 är skillnaden mellan antalet elever som löser uppgift C på för- och eftertest stor. Med avseende på innehållets behandling kan dock orsaken till de förbättrade resultaten i dessa klasser ha olika grund, vilket nu analyseras.

Tabell 13. Antal elever som förklarar båda eller ett av de saknade värdena i uppgift C

	Förtest		**Mini eftertest**		**Eftertest**	
	Förklarar 2	**Förklarar 1**	**Förklarar 2**	**Förklarar 1**	**Förklarar 2**	**Förklarar 1**
Klass 1 (n:11)	5	5			7	2
Klass 2 (n:25)	6	6			15	7
Klass 3 (n:17)	5	9	13	3	13*	2*

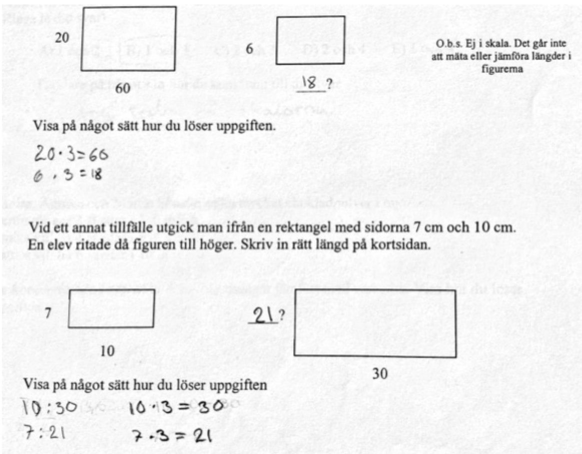
(*klass 3 har haft fyra lektionstillfällen i stället för tre)

Vad som inte går att utläsa ur tabell 13 är antalet elever som i lösningarna visade att de bytte perspektiv och växlade mellan förhållandet inom och mellan par av sammansatta storheter. Att kunna byta perspektiv och därigenom kunna välja ett enklare förhållande när så är möjligt var ett av de mål som forskarlaget ansåg innefattades i förmågan att kunna resonera proportionellt. Uppgift C (se Figur 49) var konstruerad för att testa om eleverna kunde byta perspektiv. Den ena deluppgiften hade ett förmodat enklare inom-förhållande och ett svårare mellan-förhållande, medan det var tvärtom på den andra deluppgiften, vilket ledde eleverna i olika riktningar. Analys av lösningarna visar att 7 av de 15 elever som löste båda uppgifterna i klass 2 använde inom förhållandet på bägge. Det vill säga att de inte bytte perspektiv och valde ett enklare förhållande när så var möjligt. En elev skrev *”Jag vet inte annat än att jag kollade på lathunden (multiplikationstabell) på 7:ans och 10:ans och såg vad som skulle passa in”* (skrev det korrekta svaret 21). En annan elev redovisade lösning enligt Figur 48 nedan på uppgift C alternativ b. Elevens lösning tyder på att hen inte bytte perspektiv och använde sig av det ”enklare” förhållandet 1:3 mellan rektanglarna utan det ”svårare” förhållandet 7:10.



Figur 48. Elevlösning från eftertest i klass 2 uppgift C alternativ b.

Att eleverna i klass 2 inte bytte perspektiv kan bero på att de inte hade något behov av att leta efter ett enklare förhållande, eftersom värden i proportion mot förhållande till 7:10 enkelt gick att finna i multiplikationstabellen. En metod som eleverna lärde sig att använda under lektionerna. Alla elever som löste båda uppgifterna (13 av 17) i klass 3 bytte däremot perspektiv och valde det enklare förhållandet (1:3). Ett exempel på hur detta tar sig uttryck visas i Figur 49 nedan. Byter perspektiv gjorde eleverna i klass 3 även på det mini-test som gjordes efter den första lektionen av fyra. Detta kan tyda på att dessa elever i klass 3 urskilde att det finns två förhållanden att beakta redan under den första lektionen



Figur 49. Exempel på elevlösning i klass 3 där förhållandet inom rektangel (alternativ a) och mellan rektangel (alternativ b) används.

Det bör poängteras att jämförelser med utgångspunkt från en enstaka uppgift inte är särskilt trovärdiga. Återkoppling till denna aspekt och dessa resultat görs därför i relation till beräkningsaspekter och att perspektivbyte tycks väsentligt för att statisk och dynamisk proportionalitet ska kunna urskiljas vilket beskrivs i nästkommande kapitel.

6.2.3. Beräkningsstrategi vid problem av karaktären *saknat värde* - statisk proportion och dynamisk proportionalitet

I resterande del av resultatkapitlet analyseras hur beräkningsaspekterna behandlats i undervisningen i relation till elevers lärande. De kritiska aspekter som fokuseras är statisk och dynamisk proportionalitet. I detta avsnitt beskrivs hur dessa aspekter behandlats med avseende på problem av karaktären saknat värde. I avsnittet som följer görs en liknande beskrivning fast då i relation till problem av jämförande karaktär. Den tredje kritiska beräkningsaspekten (uppbyggnadsproportion) beskrivs sist. Denna aspekt togs till stora delar för givet under lektionerna i samtliga klasser.

Statisk proportion och dynamisk proportionalitet som en kritisk aspekt - problem av karaktären saknat värde

I de tester som gjordes i dessa klasser var uppgift A och C av karaktären saknat värde, det vill säga att tre värden i en proportion är givna och ett okänt efterfrågas. I detta avsnitt beskrivs dock även hur problem av jämförande karaktär behandlades i undervisningen men begränsas till problem där jämförelser av fyra värden görs. Uppgift B är ett problem av jämförande karaktär där just jämförelser av fyra värden görs varför valet blir att även redovisa resultat på för- och eftertest från denna uppgift i detta avsnitt.

Lärandeobjektet i detta arbete var att eleverna skulle utveckla sin förståelse av proportionella samband, att flexibelt kunna relatera olika värden till varandra oavsett vilket värde som saknas. Ur den variation av lösningar som gavs på uppgift A (se nedan) i förtest går det att se att elever i samtliga klasser använde sig av vitt skilda beräkningsstrategier. Deras förståelse av sambanden ger avtryck i de sätt de tillämpar i beräkningen av uppgifterna, vilket innebär att även denna del blir viktig för analysarbetet.

Exempel på detta visas nedan.

> <u>Uppgift A</u>
> Ove går 6 meter på 4 sekunder. Hur lång tid tar det för Gun att gå 15 meter om hon går i samma hastighet som Ove? (Visa på något sätt hur du löser uppgiften)

I det första exemplet använde sig en elev av statisk proportion.

$6 \cdot 2{,}5 = 15$ meter
$4 \cdot 2{,}5 = 10$ sek

Figur 50. Elevlösning förtest klass 1.

Om hastighet betraktas som en sammansatt storhet är det inte säkert att eleven i ovanstående exempel urskilt inom-förhållandet. Att proportionalitetskonstanten (3:2) mellan meter och sekunder identifierats ger eleven i exemplet nedan däremot uttryck för.

$\frac{6}{4} = 1{,}5$ 1,5m -> 1 sek $1{,}5 \cdot 10 = 15$ $1 \cdot 10 = 10$ 15m -> 10 sek

Figur 51. Elevlösning förtest klass 2

Följande elev använde det omvända förhållandet 2:3, även om det redovisade svaret inte är så tydligt. Detta är ett exempel på dynamisk proportionalitet.

15 = 10 tiden är 2/3 av meterna

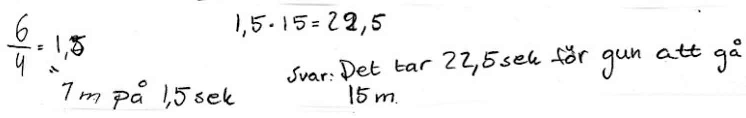
Figur 52. Elevlösning förtest klass 1

Även i följande exempel användes det direkta förhållandet 1,5:1 men det är för den skull inte säkert att eleven uppfattat att antalet meter alltid är 1,5 gånger mer än antalet sekunder. Det kan vara så att proportionen identifieras med hjälp av det statiska förhållandet i flera steg. Först genom att dela meter och sekunder med fyra och därefter multiplicera desamma med 10.

$\frac{6m}{4} = \frac{4sek}{4} \rightarrow 1{,}5m = 1$ sek
$1{,}5m \cdot 10 = 1sek \cdot 10 \rightarrow \boxed{15m = 10sek}$

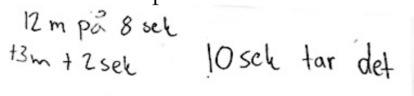
Figur 53. Elevlösning förtest klass 2

I exemplet nedan använde sig eleven av det direkta förhållandet inom den sammansatta storheten (m/s) men ”vänder på” storheterna så att det blir 1m på 1,5s istället för 1s på 1,5m.


$\frac{6}{4} = 1,5$
1 m på 1,5 sek
1,5 · 15 = 22,5
Svar: Det tar 22,5 sek för gun att gå 15 m.

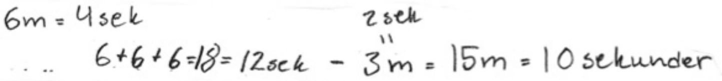
Figur 54. Elevlösning förtest klass 1

Ett i förtest vanligt förekommande sätt att lösa denna uppgift var att identifiera en proportion genom att addera eller dela upp par av storhetsvärden, uppbyggnadsproportion. Strategin kan trots att den beskrivs som mindre avancerad än statisk proportion och dynamisk proportionalitet vid vissa tillfällen och uppgifter, vara väl så funktionell. Vid uppbyggnadsproportion krävs att eleven kan hantera två talserier parallellt och i det första exemplet nedan har eleven först dubblerat och halverat 6 m på 4 s och därefter summerat respektive storhet.


12 m på 8 sek
+3m + 2 sek
10 sek tar det

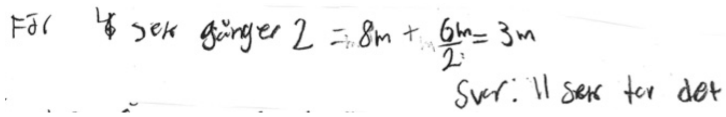
Figur 55. Elevlösning förtest klass 1

En annan elev tog reda på vad tre par av storhetsvärden är och tar därefter bort en halv sådan. Resonemanget är möjligt att följa även om likhetstecken och enheterna inte behandlas på ett matematiskt vedertaget sätt.


6m = 4 sek
6+6+6=18 = 12 sek − 3m = 15m = 10 sekunder
2 sek

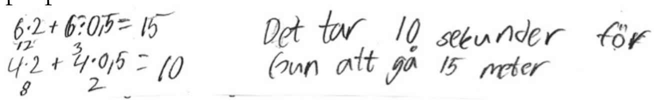
Figur 56. Elevlösning förtest klass 1

I följande exempel, där sekunder och meter återigen blandas i samma uträkning, blir det däremot problematiskt. Eleven verkar uppfatta att det behövs 2,5 par av storhetsvärden. Tiden dubblas men eleven skriver 8 m och lägger till halva längden (8+3) istället för att lägga till halva tiden (8 s + 2 s). Det tycks som att eleven försöker använda sig av två talserier parallellt men blandar ihop storheterna.



Figur 57. Elevlösning förtest klass 1

Det finns även andra varianter där statisk proportion och uppbyggnadsproportion blandas.



Figur 58. Elevlösning förtest klass .2

I tabell 14 nedan visas elevers resultat på för- och eftertest på uppgift A (där saknat värde hos proportionell hastighet efterfrågas), B (där jämförpris på chips efterfrågas) och C (där saknat värde hos likformig rektangel eftersöks). Uppgift C har tidigare beskrivits i relation till förhållanden inom och mellan. I detta avsnitt görs främst jämförelser mellan klass 2 och 3. Att detta görs är för att klassernas resultat på förtestets uppgift A och B är relativt lika såtillvida att mer än hälften av eleverna löser dessa uppgifter. Så är inte fallet efter undervisning då fler elever i den tredje klassen, om än bara ett fåtal fler, löser dessa uppgifter på eftertest. I klass 2 är det istället ett något färre antal elever som löser uppgift B på eftertest. Vad denna skillnad kan tänkas bero på, med avseende på om innehållet behandlats olika i dessa klasser, analyseras i följande avsnitt.

Tabell 14. För- och eftertest resultat på uppgift A och B. I tabellen visas antal elever som löser uppgift A och B på förtest.

	uppgift A		uppgift B		uppgift C	
	Förtest	**Eftertest**	**Förtest**	**Eftertest**	**Förtest**	**Eftertest**
Klass 1 (n:11)	10	--- [31]	4	8	5	7
Klass 2 (n:25)	**16**	**17**	**15**	**11**	6	15
Klass 3 (n:17)	**12**	**16**	**12**	**14**	**5**	**13**

Behandling av statisk proportion och dynamisk proportionalitet i undervisning - problem av karaktären saknat värde

I studiens två första cykler (klass 1 och 2) uppstod hela tiden situationer där lärare och elever vid förklaringar kring de uppgifter som gavs tycktes ha svårt att urskilja relationen mellan vilket förhållande och vilken beräkningsstrategi som användes och uttrycktes under lektionerna. Med avsikt att belysa detta beskrivs ett sådant tillfälle från den andra lektionsserien (lek.2.2-M8).

I helklass diskuterades en uppgift av karaktären saknat värde där det med utgångspunkt från en kran som rinner i en jämn hastighet och en given tid och volym[32] (2sekunder och 3 liter) skulle förklaras hur lång tid det gått då 15 liter passerat genom kranen (se Figur 59). En elev gav följande förlag till lösning.

Tid (s)	Volym (l)
2	3
	15

Figur 59. Uppgift i klass 2 där ett saknat storhetsvärde efterfrågades

Excerpt 17:

E: Jag tog 15 delat på 3 och får 5 och sen tog jag 2 gånger 5 och det blir 10.

L: Du ser hur många gånger 3an får plats i 15, att förhållandet är 1 till 5

[31] Det gjordes ingen eftertest på uppgift A klass 1 då elevsvaren i uppgiften användes under lektionen med avsikt att visa på olika lösningsstrategier i klassen. Beslutet grundades i att 10 av 11 elever löste uppgiften på förtest.

[32] Den sammansatta storheten är i detta fall tid och volym där inom inom-förhållandet, proportionalitetskonstanten, återfinns. Under lektionen används termen horisontellt förhållande för inom-förhållande och lodrät för mellan-förhållandet.

Det är inte alls säkert att eleven såg det statiska (mellan) förhållandet såsom det tolkades. Förslaget tyder på att eleven uppfattade det direkta (inom) förhållandet (proportionalitetskonstanten) 2:3 där 15 är tre delar och det okända talet två sådana delar, 15/3 = 5 och 2·5 = 10.

En annan elev sa att hon använder sig av förhållandet 2:3 och att 10 är 2 tredjedelar av 15. Detta svar tolkades, vilket skrevs på tavlan, att det går att se att 2·5=10 och att 3·5 =15, varpå det påpekades att eleven utnyttjat förhållandet åt båda hållen. Även i denna situation påstås att eleven ser och använder sig av det lodräta statiska (mellan) förhållandet 1:5 vilket förmodligen inte är fallet.

I följande exempel där elever i en grupp innan helklassgenomgången diskuterade hur en uppgift med komplexare värden löses (se Figur 60) är det tydligt att den förklarande eleven använder sig av förhållandet inom den sammansatta storheten (tid: volym).

Tid (s)	Volym (l)
8	12
	30

Figur 60. Uppgift i klass 2

Excerpt 18:

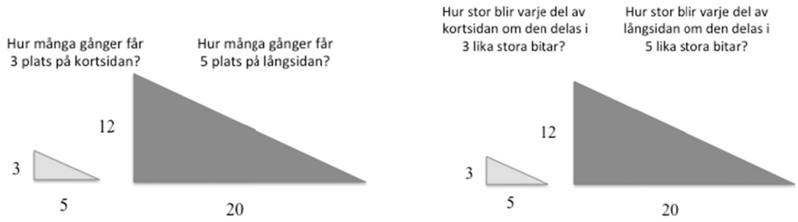
E: 4 plus 4 är lika med 8 och 4 plus 4 plus 4 är lika med 12 (skriver 4+4+4 samtidigt). Sen tar man bort en fyra, en tredjedel tar man bort och då blir det 8 kvar. Då ska man ta bort en tredjedel där ifrån (pekar på 30) och då blir det 20 (som är det saknade värdet)

E2: Ahaa…

Till skillnad från de första lektionsserierna innebar de förändringar av lektionerna som gjordes av forskarlaget inför den tredje lektionsserien att eleverna i denna tredje klass i högre utsträckning gavs möjligheten att uppfatta skillnaden mellan statisk proportion och dynamisk proportionalitet. I följande avsnitt beskrivs denna förändring och hur statisk proportion och dynamisk proportionalitet behandlades i klass 3.

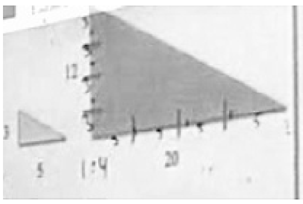
Vid en elevintervju efter lektionsserie två synliggjorde en elev en aspekt som bidrog till att utveckla planeringen inför lektionsserie 3. Aspekten som eleven benämnde som det ”magiska talet” kopplar samman två av de beräkningsstrategier statisk proportion och dynamisk proportionalitet som elever ger uttryck för men visar också vad som skiljer dem åt. Detta var ett samband som forskarlaget aldrig tidigare hade reflekterat över. På vilket sätt det magiska talet bidrar till att synliggöra statisk proportion och dynamisk proportionalitet beskrivs med hjälp av episoder ur den tredje lektionsserien. Vid planering bestämdes att de två strategierna i undervisningen skulle benämnas plats- och dela-strategi. Dessa begrepp är relaterade till delbarhet där platsstrategin beaktar förhållandet *mellan* sammansatta storheter (system) och hur många gånger ett tal *får plats* i ett annat, det statiska förhållandet. Delastrategin utnyttjar det direkta förhållandet *inom* en sammansatt storhet i ett system, det dynamiska där proportionalitetskonstanten/erna som, i det specifika fallet, bedöms vara av intresse är möjlig att uppfatta. Detta förhållande används för att *dela* par av storhetsvärden i ett annat system i syfte att hitta en obekant eller jämföra om två par av storhetsvärden är en proportion. I avsnittet som följer beskrivs detta ”magiska tal” och hur det bidrar till möjliggörande av simultan urskiljning av två beräkningsstrategier, statisk proportion och dynamisk proportionalitet.

På lektion 3.1 (M-6) introducerades en frågeställning som var ämnad att möjliggöra urskiljning av de båda strategierna. Eleverna skulle avgöra om den lilla och den stora triangeln i uppgiften var likformiga eller inte (se Figur 61 nedan). Då det i en likformig triangel finns mängder av förhållanden är det vid beskrivning av uppgiften och de förhållanden som eleverna använder sig av lämpligt att betrakta varje triangel som ett system av sammansatta storheter, till exempel höjd per bas, hypotenusa per bas eller vinkel A per vinkel B. Jämförelser av de sammansatta storheterna och dess förhållanden *inom* systemet är möjligt. Till varje förhållande kan det skapas ett oändligt antal par av storhetsvärden i samma förhållande. Om en annan triangel skapas konstrueras ett annat system, varvid jämförelser av sammansatta storheter kan göras *mellan* system (trianglar). I denna uppgift är det dock enbart den sammansatta storheten höjd och bas, inom eller mellan trianglarna, som jämförs, Det som med hjälp av frågeställningarna varierar är det förhållande och den strategi som används för att lösa uppgiften. Invariant är storhetsvärden och trianglar.



Figur 61. Uppgift utformad för att synliggöra statisk proportion och dynamisk proportionalitet.

Med avsikt att besvara den första frågan i uppgiften hur många gånger den lilla triangelns sidor får plats i den stora triangelns gjorde elever jämförelser mellan höjd$_1$/höjd$_2$ och bas$_1$/bas$_2$. Eleverna beskrev att de hittade förhållandet 1:4 genom att de såg hur många gånger 5 fick plats i 20 samt hur många gånger 3 fick plats i 12. Platsstrategin illustrerades genom att läraren ritade in hur många gånger 5 respektive 3 rymdes i den stora triangelns sidor varpå det konstaterades att det var 4 i båda fallen (se Figur 62). Diskussioner i klassen mellan elever och lärare fördes om vad detta innebar för formen på triangeln varvid det fastställdes att triangeln var förstorad eller likformig. Kontrastering av likformig/icke likformig figur gjordes därefter via frågan om vad som hänt om den långa basen istället varit 22 varpå det konstaterades att trianglarna inte längre varit likformiga eftersom att det då skulle få plats mer än fyra femmor i basen. Proportionerna skulle därmed inte vara densamma. Frågan om det fanns något annat sätt att bestämma om de är likformiga eller inte ställdes därpå varvid en elev föreslog att det går att dela 20 med 5.



Figur 62. Indelning av bas och höjd i 4 lika delar som svar på hur många gånger 5 och 3 får plats

Excerpt 19:

[…]

L: […] hur stor blir varje del då… Markus?

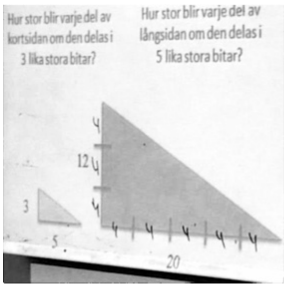
E3: fyra.

L: Fyra, ja precis, jag tror att jag får ta och ta fram, fuskbiten [klickar fram bild som visar att basen delas i 5 bitar där varje del är 4 lång]. Kolla här, det var det här jag var ute efter. Skillnaden är att här kollade vi på få platstanken [pekar på Figur 62] så blir det en, två, tre, fyra. Den här får plats [markerar lilla triangelns bas] fyra gånger, skalan blir 1:4 när man jämför dem. I det här fallet [pekar på Figur 63] så tänker man, i stället så delar jag upp den i 5 bitar och då blir varje bit 4 [skriver 4 på varje del av den indelade sträckan] och på samma sätt på höjden. Vi tar 12 och så delar vi det på 3, tre bitar och varje bit blir 4 [skriver 4 på varje del]. Vad ska vi kalla denna tanken för. Karoline?

[…]

E4: Dela upp den i delar

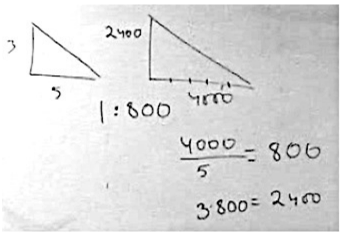
L: Ja, dela, delat kan vi väl kalla den.



Figur 63. Då höjd och bas delats i 3 respektive 5 delar skrivs bitarnas längd 4 vid respektive del.

I momentet beskrevs och synliggjordes de två strategierna, plats och dela, *simultant* på tavlan och då uppgiften i övrigt var konstant möjliggjordes urskiljning av det som varierade, de två olika sätten att lösa uppgiften på. Det magiska tal som en elev påvisade är i detta exempel 4. En fyra som antingen beskriver hur många gånger det ena talet får plats i det andra (förhållandet mellan system) eller hur stor varje del blir om det ena talet delas med det andra.

Med avsikt att generalisera plats- och delningsstrategi gavs ett nytt exempel där 2 likformiga trianglar ritades på tavlan. Förhållandet inom triangeln (den sammansatta storheten höjd/bas) och värdena i den första triangeln var konstanta i förhållande till förra uppgiften (3:5). Varierade gjorde, problemtyp som nu var av karaktären saknat värde, samt längderna i den andra triangeln där höjden nu var okänd (markerad med x) och långsidan som var 4000 (se Figur 64 nedan). En elev beskrev att hon använde sig av delastrategi (inom förhållandet) enligt följande. 4000/5 = 800 och sedan 3·800 = 2400. Eleven fick frågan vad det var hon tagit reda på då varpå hon svarade, vad *en* del är. Svaret tolkades som *"Precis förhållandet mellan de här två* (pekar på 5 och 4000) varpå 1:800 skrevs på tavlan. Vilket förhållande som eleven beaktade togs i denna episod för givet. Det tolkades som platsstrategi där *mellan* förhållandet utnyttjades. Elevens resonemang tyder snarast på att hon uppfattat förhållandet 3:5 *inom* den lilla triangeln, ett förhållande som hon sedan överför till den andra triangeln och att 800 är storleken på delen i triangeln då 4000 delas med 5, inte förhållandet *mellan* 5 och 4000 som det tolkas. Eleven sa därefter att hon tog 3 gånger 800 för att få fram måttet på höjden. Nu beskrevs det däremot som att hon tagit reda på vad en del är (vilket på tavlan illustrerades genom att längden 4000 delades i fem lika stora delar) och att hon sedan tagit 3 sådana delar för att få reda på det okända talet 2 400 (vilket skrevs på tavlan, se Figur 64 nedan), det vill säga att eleven använde sig av en delastrategi. Även i denna tredje lektion tycks det således som att det för läraren är svårt att i stunden uppfatta och resonera utifrån elevers uttryckta uppfattningar.

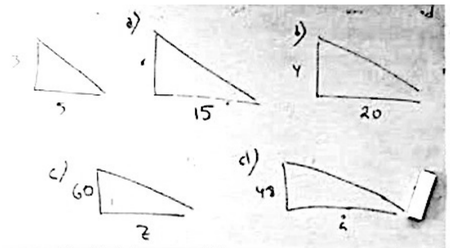


Figur 64. Plats- och delatanke generaliserades med värden större än 1000 under lek.3.2.-M10.

Efter denna episod efterfrågades hur lösningen skulle ha se ut om platsstrategin (statisk proportion) istället hade använts, hur många femmor det skulle få plats i 4000 varpå en elev svarade att det skulle få plats 800.

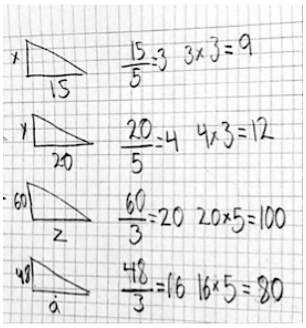
I denna episod framträder det magiska talet, ett tal som i detta exempel är 800. Den första eleven använder delastrategin (dynamisk proportionalitet) där förhållandet *inom* den sammansatta storheten i triangeln används (3:5 i detta exempel) och där storleken på delen 800 föreslås. Vid platsstrategin som den andra eleven exemplifierar utgör talet förhållandet *mellan* de sammansatta storheterna (1:800). I ovanstående exempel blev dock inte detta så tydligt som avsett eftersom den första elevens förslag, att delen är 800, inledningsvis tolkades som förhållandet mellan 5 och 4 000 (1:800) snarare än delen, en femtedel av 4 000 vilket är samma som den andra elevens förslag.

Skapandet av likformiga trianglar i förhållandet 3:5 generaliserades (lek.3.2-M11), med fler trianglar (se Figur 65 nedan). Utgångsförhållandet var fortsatt konstant men nu varierade även det okända värdet mellan bas och höjd i de olika trianglarna.



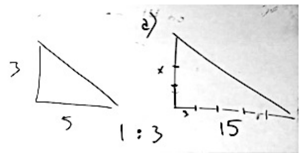
Figur 65. Uppgift där längder på likformiga trianglar i förhållandet 3:5 skulle identifieras.

I deluppgift c och d var basen istället för höjden okänd vilket nedanstående elevgrupps lösning visar att de tycks beakta. Lösningen visar att de använder det omvända förhållandet 5:3 vilket kommer till uttryck på så vis att sidan i triangeln nu delas i tre istället för fem bitar.



Figur 66. En elevgrupps lösning på uppgift i lek.3.2-M11

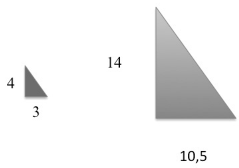
Eleverna beskrev i helklass hur de olika uppgifterna kunde lösas med hjälp av de olika strategierna. Vid genomgång av uppgift A framträdde det ”magiska talet” (3 i detta fall) på tavlan, även om sambandet förblir outtalat. I Figur 67 nedan är längden på delen **3** skriven under den stora triangelns bas och även förhållandet mellan sidorna1:**3.**



Figur 67. Det som står på tavlan då deluppgift a diskuterats under lek.3.2-M11

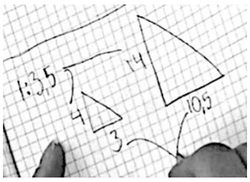
Trianglarna (se Figur 65) i ovan beskrivna moment jämfördes med utgångsförhållandet 3:5 *inom* den sammansatta storheten (höjd:bas). Proportionalitetskonstanten (3:5) var invariant, medan förhållandet *mellan* triangeln (ett system) med sidorna 3 och 5 och de andra trianglarna (andra system) varierade där a)1:3 b) 1:4 c) 1:20 d) 1:16.

Urskiljande av plats- och delastrategier generaliserades därefter med hjälp av ett annat direkt förhållande (4:3). En proportionell jämförelse där det "magiska talet" inte är ett heltal. Problemet var återigen av jämförande karaktär där plats- och delastrategi efterfrågades.



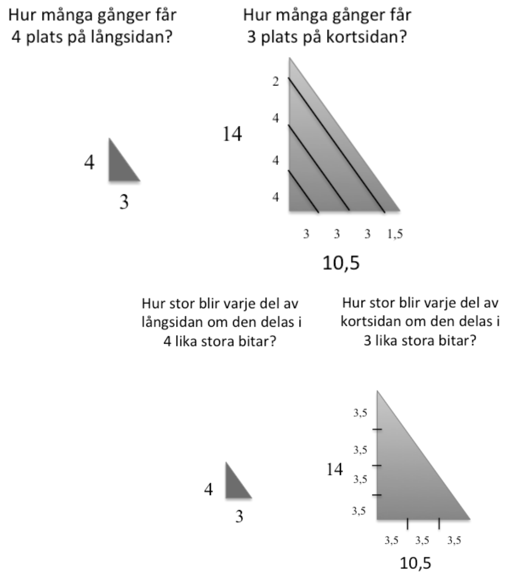
Figur 68. Uppgift där plats och dela strategi inte "går jämt upp" i lek.3.2-M12

Den elevgrupp som filmades använde sig av platsstrategi, där det statiska förhållandet används vid beräkning, och kontrollerade hur många gånger sidorna i den lilla triangeln fick plats i den stora vilket de fick till 3,5 varpå de skrev att förhållandet mellan sidorna är 1:3,5.



Figur 69. Det statiska förhållandet identifierades med hjälp av platstanke.

I den efterföljande diskussionen ställdes de båda strategierna återigen mot varandra där platstanken som eleverna i den filmade sekvensen använde sig av ställdes mot delningstanken som andra använde sig av.



Figur 70. Plats- och delastrategi illustrerades på tavlan.

Det ”magiska talet” är i detta exempel 3,5. Det kommer i platsstrategin till utryck i form av hur många gånger 3 respektive 4 får plats i de andra sidorna vilket algebraiskt kan uttryckas som $3 \cdot x = 10{,}5$ och $4 \cdot x = 14$. I delastrategin delas antingen 14 med 4 eller 10,5 med 3 där varje bit blir 3,5. Algebraiskt uttryckt $\frac{14}{4} = x$ och $\frac{10{,}5}{3} = x$.

Elevernas förändrade förståelse av statisk proportion och dynamisk proportionalitet i relation till innehållets behandling - problem av karaktären saknat värde

På eftertest var det inte fler utan färre (15 av 25 på förtest och 11 av 25 på eftertest) elever i klass 2 som kunde lösa och förklara uppgift B[33]. Analys av resultat och lektionsmoment pekar mot att detta beror på att eleverna har svårt att urskilja proportion med andra värden än de som finns i multiplikationstabellen. De tycks snarare urskilja multiplikativa mönster i tabellen. .

[33] Uppgift där jämförpris på chips efterfrågas. Konstrueras med avsikt att se om eleverna kan göra proportionella jämförelser av 4 värden.

Två av storhetsvärdena i eftertest uppgift B, 300 g och 200 g finns inte i multitabellen vilket i och för sig de två andra storhetsvärdena 18 kr och 14 kr gör. Det blir dock inte lättare att lösa uppgiften om eleven med hjälp av dessa värden via tvåans gånger-tabell identifierar det direkta förhållandet 9:7. Ett stort antal elever ritade på eftertest (12st i uppgift A, 10st i uppgift B) till skillnad mot förtest (inga elever) rutor eller tabeller som påminner om multiplikationstabellen där värden fylldes i som svar (se Figur 72 nedan).

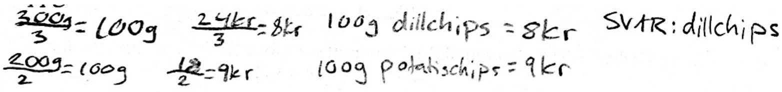
Den tredje klassen förbättrade vid jämförelse med förtest sina resultat på uppgift A (saknat värde hos proportionell hastighet efterfrågas) och B (jämförpris på chips efterfrågas). Skillnaden på uppgift A var liten men det är samtidigt svårt att uppnå en stor effekt då andelen elever som på förtest besvarar uppgiften korrekt var hög.

Tabell 15. För- och eftertest-resultat på uppgift A och B i klass 2 och 3.

	uppgift A		uppgift B	
	Förtest	**Eftertest**	**Förtest**	**Eftertest**
Klass 2 (n:25)	16	17	15	11
Klass 3 (n:17)	12	16	12	14

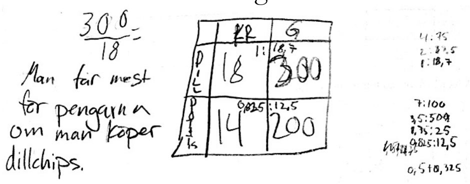
I den tredje klassen möjliggjordes urskiljning av att det till en sammansatt storhet i ett givet förhållande finns ett stort antal proportioner vilket möjliggör urskiljning av generellt funktionssamband, proportionalitetskonstant. Generaliseringar gjordes både via statisk proportion (mellan) och dynamisk proportionalitet (inom) med värden som sträcker sig från decimaltal mindre än 1 till 10 000 tal. Detta kan vara en bidragande orsak till elevernas vid jämförelse med eleverna i klass 2 förbättrade sina resultat på båda dessa uppgifter.

Avslutningsvis följer två exempel på lösningar från för- och eftertest på uppgift B. De har valts som exempel för att visa på kvalitativa skillnader av elevlösningar. De felaktiga lösningarna är inte representativa utan avser endast att spegla att det iscensatta lärandeobjektet i undervisningen kan ha bidragit till att elever urskilt aspekter som i det ena fallet bidrar och i det andra fallet inte bidrar till att utveckla elevers förmåga att resonera proportionellt. Först ges ett exempel på hur svaren skiljer sig hos en elev från den andra klassen som på förtest kunde lösa uppgiften men inte på eftertest. Eleven skapade på förtest två proportioner, där vikten var lika, utifrån vilka jämförelser kunde göras.



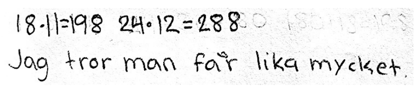
Figur 71. Elevlösning från förtest på uppgift B i klass 2.

Den enda skillnaden på eftertest-uppgiften var att priset på dillchips och potatischips hade ändrats till 18 kr respektive 14 kr. Eleven tyck nu brottas med att försöka hitta hur mycket chips det blir för 1 kr. Eleven verkar ha övergivit ett funktionellt sätt att lösa problemet på mot en metod som i denna uppgift inte fungerar. I exemplet syns även tidigare nämnda ruta eller tabell som frekvent används i lösningar i klass 2.



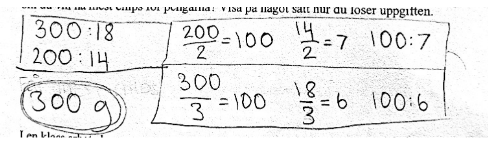
Figur 72. Samma elevs lösning i eftertest på uppgift B

I det andra exemplet tycks eleven i klass 3 på förtest inte uppfatta hur jämförelsepris kan skapas. Priset 18 kr och 14 kr multipliceras med talen 11 och 12. I uppgiften finns förutom priset storhetsvärdena 200 g och 300 g. Hur värdena 11 och 12 urskils är oklart.



Figur 73. Elevlösning från förtest på uppgift B i klass 3

På eftertest indikerar lösningen att storheterna vikt och pris relateras till förhållande.



Figur 74. Samma elevs lösning i eftertest på uppgift B

Detta svar är relativt representativt för de elever som löste denna uppgift på eftertest.

6.2.4. Beräkningsstrategi vid problem av *jämförande karaktär* - statisk proportion och dynamisk proportionalitet

Strukturen på detta avsnitt är detsamma som i föregående, hur statisk proportion och dynamisk proportionalitet behandlades i undervisningen i relation till elevers förståelse. Detta görs dock i relation till problem av jämförande karaktär där fler än fyra värden och värden av komplexare karaktär jämförs. I föregående avsnitt motsvarade två av de värden som jämfördes ett direkt förhållande till exempel 3:4 eller 3:5. Då inget av de par av storhetsvärden som jämförs motsvarar ett direkt förhållande är jämförelser oftast svårare att göra.

Statisk proportion och dynamisk proportionalitet som en kritisk aspekt - problem av jämförande karaktär

Förtest-resultaten indikerade att eleverna hade svårt för att jämföra flera par av storhetsvärden med samma eller olika förhållanden. För att kunna jämföra förhållanden behöver par av storhetsvärden ofta förenklas så att jämförelser av proportionalitetskonstanter möjliggörs. Om till exempel 15 m på 12 s ska jämföras med ett proportionellt förhållande kan det vara lämpligt att hitta proportionalitetskonstanten (via det direkta förhållandet), det vill säga att se att förhållandet är 5:4. Det behövs däremot inte i uppgift i D[34] på förtest. Där uttrycks det direkta förhållandet (5:4) mellan barn och vuxna i uppgiftens frågeställning. Ett förhållande utifrån vilket samma förhållande ur 5 alternativ ska identifieras. Det finns två korrekta alternativ (10 barn och 8 vuxna samt 20 barn och 16 vuxna). En majoritet av eleverna i studien, som valde ett felaktigt svar, valde 15 barn och 14 vuxna. Då svar på denna uppgift inte behövde motiveras går det enbart att spekulera kring varför detta val görs: att det är det enda exemplet med en skillnad på ett mellan talen, att 5 respektive 4 adderas med 10, eller att det är det enda förslaget som innehåller siffrorna 5 och 4. Många skrev att de inte visste vad ordet förhållande var eller att 5:4 var ett okänt begrepp. I tabell 16 nedan visas antal elever som på förtest och eftertest uppfattade båda eller en av två korrekta proportioner i uppgift D. Det positiva resultatet i klass 2 kan vara ett uttryck för att deras användning av multiplikationstabellen styrde dem mot en strategi att hitta samband inom ett förhål-

---

[34] Uppgift där andra förslag på antal barn och vuxna i förhållandet 5:4 ska ges. Konstruerad med avsikt att se om eleverna med utgångspunkt från ett förhållande kan hitta par av storhetsvärden i proportion.

lande innan de jämför mellan-förhållanden, och därmed fokuserade båda. Det är dock troligare att eleverna inte hittade ett samband inom ett förhållande utan att de bara uppfattade en metod att skriva ett förhållande i sin enklaste form på. Ett direkt förhållande utifrån vilket jämförelser görs.

Tabell 16. Antal elever som på förtest uppfattade båda eller ett av de proportionella förhållandena i uppgift D.

	Förtest		**Eftertest**	
	Uppfattar 2	**Uppfattar 1**	**Uppfattar 2**	**Uppfattar 1**
Klass 1 (n:11)	3	3	8	3
Klass 2 (n:25)	10	5	21	1
Klass 3 (n:17)	8	5	13	3

Uppgift E[35] är mer komplex på så vis att det inte finns något direkt förhållande att utgå ifrån och att det vid jämförelser därigenom är lämpligt att först förenkla de ingående värdena. Det var även den uppgift som eleverna i samtliga klasser hade svårast för att lösa på förtest.

Tabell 17. Antal elever som på förtest förklarar det rätta B alternativet i uppgift E

	Förtest	**Eftertest**
Klass 1 (n:11)	1	4
Klass 2 (n:25)	1	19
Klass 3 (n:17)	3	15

I anslutning till denna uppgift ombads eleverna motivera sitt val där det framkom att elever i stor utsträckning i samtliga klasser, tittade på additiva skillnader mellan eller inom affärer. De vanligaste felaktiga svaren i klasserna var alternativ A och E. De som valde A förklarade att det var två mobiler mer av vardera sorten i affär 2 jämfört med affär 1 (se Figur 75 nedan) eller att antalet iPhones var tre mer än antalet androider inom respektive affär (av samma anledning valdes för övrigt alternativ E), en additiv jämförelse. Även de som valde det rätta B alternativet kunde motivera sitt val på felaktiga grunder, att

[35] Uppgift där jämförelser görs av förhållande mellan 2 olika mobiler i olika affärer. Konstruerad med avsikt att se om eleverna kan uppfatta ett direkt förhållande utifrån vilket jämförelser av par av storhetsvärden görs

det är 12 iPhones och 12 androider i de olika affärerna. Detta gjordes av 3 elever i klass 2 och 3 elever i klass 3.

5. Tabellen nedanför visar antalet sålda Iphones och Androider i fyra affärer.

Affär	*Iphone*	*Android*
1	*12*	*9*
2	*14*	*11*
3	*16*	*12*
4	*18*	*15*

I vilka två affärer är förhållandet mellan antalet Iphones och antalet Androider lika? (Ringa in ditt svar)

A) 1 och 2 B) 1 och 3 C) 2 och 3 D) 2 och 4 E) 1 och 4

Förklara på något sätt hur du kom fram till ditt svar

Figur 75. Uppgift E i förtest.

Som synes tycks det som att elever hade svårt för denna typ av uppgift. Jämförelser görs i avsnittet som följer mellan framförallt klass 2 och 3 där närmare tre fjärdedelar av eleverna i båda dessa klasser på eftertest besvarade uppgift E korrekt. Detta kan jämföras med klassernas resultat på förtest där endast 1 elev i klass 2 och 3 elever i klass 3 klarade av att lösa uppgiften. Vad denna positiva skillnad i resultat kan tänkas bero på med hänsyn till innehållets behandling analyseras härefter.

Behandling av statisk och dynamisk proportionalitet i undervisning - problem av jämförande karaktär

Vid planering av den första lektionsserien beaktades problem av jämförande karaktär på så vis att det bestämdes att jämförelser av förhållandet mellan flickor och pojkar i klassen skulle göras. (lek.1.3-M16). Vid den efterföljande lektions- och resultatanalysen, mellan lektionsserie 1 och 2, visade det sig dock att en majoritet av eleverna i klassen fortfarande inte kunde lösa uppgift E (förtest 1 av 11 elever, eftertest 4 av 11 elever). I uppgiften krävs det flera jämförelser av lika och olika förhållanden för att uppgiften ska kunna lösas. Eleverna gavs möjligheten att urskilja att förhållandet i klassen den dagen var 8:5 samt till viss del hur proportion i förhållande (16:10) kunde skapas men enbart med hjälp av uppbyggnadsstrategi genom att addera 8 pojkar och 5 flickor. Jämförelser av olika förhållanden gjordes inte.

Med utgångspunkt från denna analys reviderades lektionsserie 2 (lek.2.2-M6). På lektionen fördes ett liknande resonemang om förhållande mellan flickor och pojkar i klassen. Resonemanget kopplades till en arbetsuppgift (användes även i lek 3.3-M16) där jämförelser mellan olika skolor och klasser gjordes. Avsikten var att eleverna skulle ges möjligheten att erfara proportionella jämförelser av flera par av storhetsvärden med lika och olika förhållanden.

Jämför förhållanden i klasser

	Pojkar	Flickor
Klass 1	15	5
Klass 2	24	6
Klass 3	30	10

	Pojkar	Flickor
Klass 1	15	12
Klass 2	18	15
Klass 3	12	10

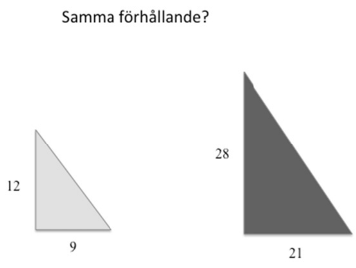
	Pojkar	Flickor
Klass 1	6	4
Klass 2	12	9
Klass 3	18	12

- Hur ser förhållandet ut mellan flickor och pojkar i klasserna?
- Finns det någon annan klass med samma förhållande?
- Ändra värden i den felaktiga klassen så att förhållandet stämmer.

Figur 76. Gruppuppgift i lektionsserie 2.

Eleverna hittade, oftast med hjälp av den tidigare introducerade multiplikationstabellen, förhållandet i dess mest förenklade form, det direkta, utifrån vilka jämförelser gjordes. Detta tros vara en anledning till att eleverna i denna klass lyckades så bra med att besvara ovan redovisade uppgifter (se tabell 16 och 17). Problematisering av detta görs i nästkommande avsnitt. Det påpekades vid den efterföljande helklassdiskussionen att det verkade ha gått relativt snabbt att komma fram till en lösning. Den sammansatta storheten i denna uppgift är förhållandet pojkar och flickor och eleverna gav bara förslag på jämförelser inom detta förhållande. Inga förslag pekar på att de använde sig av förhållandet mellan den sammansatta storheten (pojke/pojke och flicka/flicka). I klass 1 och 3 i den vänstra skolan (se Figur 76 ovan) går det till exempel relativt enkelt att se att mellan-förhållandet är 1:2.

I klass 3 var tanken istället att med hjälp av plats- eller delastrategi, vilket klassen arbetade med tidigare under lektionen, (lek.3.1-M6, se kap 6.2.3) försöka visualisera vad som egentligen sker då ett enklare förhållande att jämföra med skapas (lek.3.2-M13). Det ena paret av storhetsvärden som eleverna i klass 3 arbetat med hade fram till nu haft värden motsvarande ett direkt förhållande som utgångspunkt. Att göra jämförelser då värdena inte är det kan vara svårare. I klass 2 var det i detta läge multiplikationstabellen infördes och användes som hjälp för att hitta ett direkt förhållande. Återigen användes likformiga trianglar (se Figur 77) och eleverna uppmanades att försöka se och förklara om de är det eller ej. Det förslag som planerats behövde dock inte framföras utan kom som förslag från en elev.



Figur 77. Uppgift där eleverna i klass 3 skulle avgöra om trianglar med komplexare värden är likformiga eller ej.

Excerpt 20:

L: På den här typen av uppgifter kan man göra på massa olika sätt, Martina.

M: 28 delat på 7 […] och 21 delat på 7

L: 21 delat med 7 (skriver 28/7 och 21/7 på tavlan) ok vad gör du då?

M: Jag vill få förhållandet så litet som möjligt.

L: vad blir det då?

M: 4 till 3

L: ok

På tavlan delade läraren höjden i 4 bitar och basen i 3, där längden 7 skrevs vid varje bit varvid det konstaterades att förhållandet mellan höjd och bas är 4:3 vilket skrevs. Eleven fortsatte därefter…

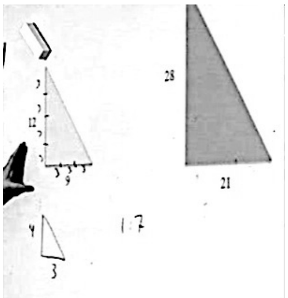
Excerpt 21.

M: På den andra då så delade jag med 3

L: 9 delat med 3 och 12 delat med 3 (säger och skriver samtidigt)

M: Då blir det 4 och 3

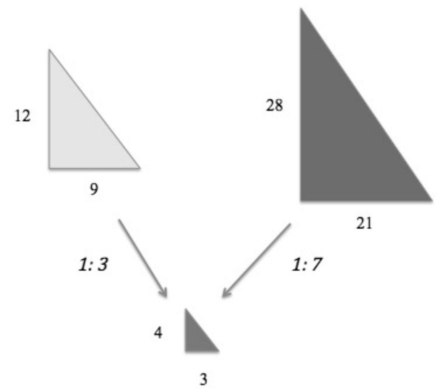
Den mindre triangelns sidor delades i 4 respektive 3 bitar. Siffran 3 skrevs vid varje bit varvid det konstaterades att förhållandet även i detta fall var 4:3. En elev undrade hur den andra eleven kunde veta vad hon skulle dela med och hon svarade att hon tänkte att talen fanns i samma gånger-tabell. Med utgångspunkt från elevens förslag ritades en ny likformig triangel med höjden 4 och basen 3 (se Figur 78). Inom-förhållandet var konstant (proportionalitets-konstant) i alla de tre trianglarna. Med den lilla triangeln som utgångspunkt diskuterades vad som varierade, att längderna i den stora triangeln är sju gånger större än i den minsta triangeln, ett förhållande som skrevs på tavlan (1:7). Förhållandet mellan den minsta och mellanstora triangeln (1:3) proble-matiserades däremot inte. En elev beskrev sedan hur de i elevens grupp med hjälp av plats-tanke (statisk proportionalitet) kunde se att den mellersta och största triangeln var likformiga.



Figur 78. Jämförelse via direkt förhållande

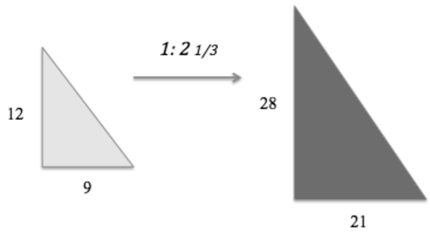
> Excerpt 22:
>
> E: Vi tänkte få plats […] så såg vi att 12 fick plats två och en tredjedel (i 28) […] och så gjorde vi samma där nere hur många gånger 9 får plats i 21 och det var också två och en tredjedel.

Två olika vägar att avgöra om trianglarnas sidor är proportionella eller inte framträder ur exemplen ovan. Den första eleven uppfattade med hjälp av det statiska förhållandet 1:7 det dynamiska (direkta) inom-förhållandet (4:3) genom att eleven delar höjd och bas i den stora tringeln, 28 respektive 21 med 7. Med hjälp av det statiska förhållandet möjliggjordes urskiljning av proport-ionalitetskonstant. På samma sätt identifierades detta dynamiska inom-förhål-lande ur den mellanstora (gula) triangelns längder med hjälp av det statiska förhållandet 1:3, ett förhållande utifrån vilket proportionella jämförelser gjordes.



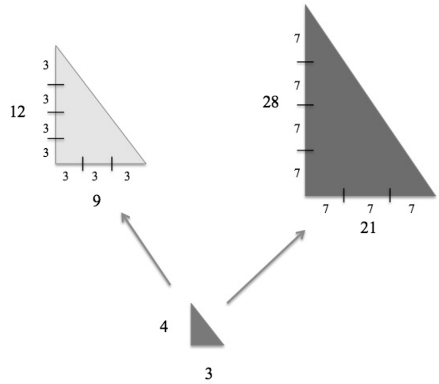
Figur 79. Jämförelse av proportionalitet med hjälp av att skapa ett direkt förhållande.

I det andra elevförslaget användes den tidigare beskrivna platsstrategin (statisk proportionalitet) vilket kräver att eleven kan behärska inte bara hur många hela utan även del av hel det får plats ($1{:}\,2\,\frac{1}{3}$). I detta fall utnyttjades inte inom-förhållandet utan det statiska förhållandet mellan trianglarna (systemen). Exemplet utgör en kontrast mot det föregående förslaget på så vis att det enbart krävs två jämförelser.



Figur 80. Jämförelse med hjälp av statiskt förhållande, platstanke.

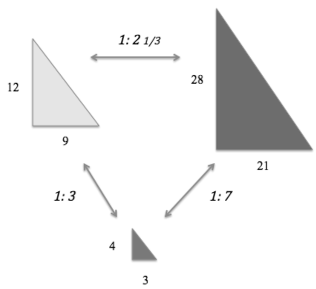
Ett tredje sätt föreslogs avslutningsvis. De båda ursprungliga trianglarnas sidor delades upp i lika stora delar. Höjderna i 4 delar och basen i 3 delar där längden på varje del skrevs. Det konstaterades att höjden i alla trianglar var en del mer än basen och att de alla hade det gemensamt att de var i förhållandet 4:3.



Figur 81. Ett tredje förlag, att jämföra med hjälp av att dela upp sidor i 4 respektive 3 delar.

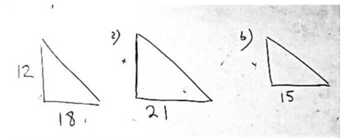
Med hjälp av förslaget synliggjordes att ett direkt förhållande, när det väl är identifierat, kan användas för att med hjälp av delningsstrategi erfara om två par av storhetsvärdena är proportionella eller ej. När förslaget gavs var redan det direkta förhållandet, proportionalitetskonstanten, 4:3 preciserat. Vad som inte synliggjordes var att detta förhållande först måste identifieras, till exempel genom att dela 12 och 9 med 3.

I momentet som helhet gavs möjligheten att urskilja olika vägar att göra proportionella jämförelser. Inom-förhållandet var invariant. Varierade gjorde förhållandet mellan trianglarnas sidor samt vilken strategi, plats (statiskt) eller dela (dynamiskt) som användes vid jämförelser. Det finns flera andra tänkbara lösningar än de ovan beskrivna. Plats- och delningsstrategi är möjlig att använda mellan fyra värden av alla slag men i detta exempel kan det ”magiska talet” två och en tredjedel, mellan den stora och mellanstora triangeln vara svår att urskilja, varför vägen via ett förenklat förhållande kan vara lämpligt.



Figur 82. Olika möjliga vägar att göra proportionella jämförelser på.

Beräknings-aspekterna generaliserades avslutningsvis med hjälp av liknande uppgift av karaktären saknat värde (se Figur 83 nedan). Jämförelser gjordes med utgångspunkt från en triangel med höjden 12 och basen 18. Det direkta inom-förhållandet (2:3) var konstant. Varierade gjorde längder och förhållande mellan trianglarna.



Figur 83. Gruppuppgift i lek.3.3-M14.

Elevernas förändrade förståelse av statisk och dynamisk proportionalitet i relation till innehållets behandling - problem av jämförande karaktär

Vid analys av förtest- och eftertest-resultat från den andra lektionsserien fanns tendenser till en tydlig förbättring vad gäller uppgift E[36]. Nu valde och förklarade 19 av 25 elever i klass 2 rätt alternativ på denna uppgift vilket kan jämföras med 1 på förtest. Även vad gäller uppgift D[37] väljer nu 21 av 25 (10 på förtest) elever de rätta proportionerna. Det tycks således som att eleverna efter undervisning i större utsträckning kunde erfara par av storhetsvärden i proportion. och att elever till skillnad från i den första klassen i högre utsträckning kunde identifiera proportionalitetskonstant och därigenom jämföra olika förhållanden, vilket krävs i uppgift E. Alla de ingående värdena i uppgift D och E går dock att finna i någon av multiplikationstabellerna, vilket tycks göra det enkelt för eleverna att utifrån 2 storhetsvärden hitta ett direkt förhållande i proportion utifrån vilket jämförelser görs. De behöver inte förstå vad som händer då ett direkt förhållande skapas, det gäller bara att kunna läsa av tabellen rätt. Att metoden förefaller ha sina brister speglas framförallt i uppgift B där elever i den andra klassen som tidigare nämnts får problem då de ingående värdena inte finns i någon av multiplikationstabellerna.

---

[36] Uppgift där jämförelser görs av förhållande mellan 2 olika mobiler i olika affärer. Konstruerad med avsikt att se om eleverna kan uppfatta proportionalitetskonstant utifrån vilket jämförelser av par av storhetsvärden görs

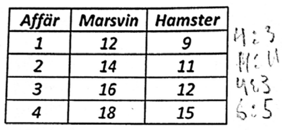
[37] Uppgift där andra förslag ska ges på antal barn och vuxna i förhållandet 5:4. Konstruerades med avsikt att se om eleverna med utgångspunkt från ett förhållande kan hitta proportioner i detta förhållande.

Resultat och analys av lösningar på uppgift E i klass 3 indikerar att många elever efter undervisning, på olika sätt, kunde uppfatta om par av storhetsvärden var proportioner eller inte. På eftertest besvarade 15 (3 på förtest) av de 17 eleverna uppgiften korrekt

Tabell 18. Förtest- och eftertest-resultat på uppgift E.

	Förtest	**Eftertest**
Klass 1 (n:11)	1	4
Klass 2 (n:25)	1	19
Klass 3 (n:17)	3	15

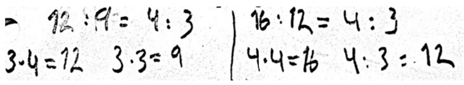
Vid närmare analys av elevlösningarna i klass 2 och 3 framkommer kvalitativa skillnader. I klass 2 motiverade 15 av de 19 som valde det rätta B alternativet sitt beslut med att skriva det direkta förhållandet bredvid respektive affär och förklarade i termer av att värdena fanns i samma gånger-tabell. Någon egentlig förklaring till hur detta förhållande skapades gjordes således inte. Resterande 4 visade på något sätt hur de skapade ett förenklat förhållande att göra jämförelser med.



Affär	Marsvin	Hamster
1	12	9
2	14	11
3	16	12
4	18	15

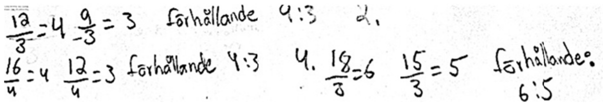
Figur 84. Representativ elevlösning för hur 15 av 19 elever i klass 2 motiverade det rätta B alternativet. På eftertest jämförs i uppgiften djur istället för telefoner, värdena är de samma.

I klass 3 var situationen den omvända. Här visade 12 av de 15 som valt det rätta alternativet hur de gick till väga medan tre skrev upp förhållandet bredvid affären. De som visade gjorde det på i huvudsak 4 skilda sätt, de olika sätten exemplifieras nedan med hjälp av ett representativt elevsvar.
Fyra elever visade med hjälp av multiplikation (två elever i klass 2).



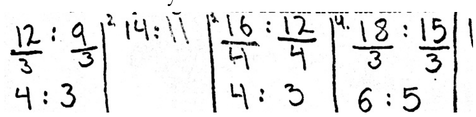
Figur 85.

Tre elever visade med hjälp av delning av de ingående värdena (två elever i klass 2).



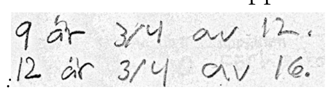
Figur 86.

Tre elever uttryckte värdena som förhållande vilka de delade.



Figur 87.

Om den sammansatta storheten i denna uppgift definieras som marsvin per hamster så ger de tre tidigare svarskategorierna uttryck för att det dynamiska (direkta) förhållandet uppfattades med hjälp av statiskt förhållande. Nedanstående lösning vilket två elever beskrev kan tolkas antingen som att det omvänt direkta förhållandet uppfattas eller del av hel i bråkform.



Figur 88.

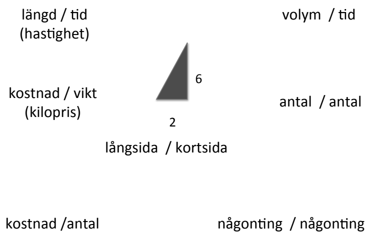
Denna blandning av lösningar kan bero på att eleverna i den tredje klassen i högre utsträckning än i den andra uppfattar *hur* det *på olika sätt* går att skapa ett direkt förhållande att göra jämförelser med. I den andra klassen tycks snarast en metod ha uppfattats.

I klass 2 löste och visade 8 av 25 elever samtliga uppgifter på eftertest korrekt (1 på förtest). I klass 3 var antalet 12 av 17 (1 på förtest). På eftertest var det 2 elever (3 på förtest) i klass 2 och 1 elev (1 på förtest) som inte löste någon uppgift.

6.2.5. Beräkningsstrategin som togs för givet - uppbyggnadsproportion

Uppbyggnadsstrategin bedömdes av forskarlaget vara en elementär utgångspunkt för proportionellt resonemang. Elementär så till vida att två talserier kan hanteras parallellt och att proportioner kan identifieras eller skapas med hjälp av upprepad addition och subtraktion. Trots att detta uppmärksammats vid planering av lektionerna tyder analys av lektioner i samtliga klasser på att denna beräkningsaspekt till stora delar tagits för givet, det vill säga aspekten som behövde erbjudas genom att varieras utifrån en invariant bakgrund erbjöds ej. Vad detta kan ha haft för betydelse för elevernas lärande problematiseras i diskussionsdelen. Här görs en analys av på vilket sätt denna aspekt behandlats eller snarare inte behandlats i undervisning.

Vid planeringen av den tredje lektionsserien bestämdes att proportionella jämförelser inledningsvis skulle göras med utgångspunkt från tidigare beskrivna likformiga figurer och att statisk proportion och dynamisk proportionalitet skulle fokuseras. Det var först i början av den tredje lektionen (lek.3.3-M15) som andra sammansatta storheter än jämförelser av längder, med hjälp av värdena 6 och 2, introducerades.



Figur 89. Förslag på andra sammansatta storheter vilka nämndes och visades på tavlan i klass tre.

Tanken var att i samband med introduktionen av andra sammansatta storheter visa på möjligheten att med hjälp av uppbyggnadsproportion lösa bland annat följande uppgift.

Sudden går 18 m på 12 s
Hur långt hinner han på 10 s?

Tid	längd
1 s	1,5 m
2 s	3 m
4 s	6 m
6 s	9 m
10 s	
12 s	18 m

Figur 90. Värdetabell med saknat värde

De jämförelser som gjordes kretsade dock fortsatt enbart kring proportionalitetskonstanten inom den sammansatta storheten längd/tid (3:2) och förhållandet mellan olika par av storhetsvärden. Dessa diskussioner tycks enbart vara av dynamisk och statisk karaktär.

> Excerpt 23:
>
> L: Ni kanske ser att den här [pekar på 1,5 m] att den är en och en halv gånger större [pekar på alla längder] hela tiden så då måste det bli en och en halv där emellan också [pekar på 10 s och den tomma rutan].
>
> […]
>
> L: Man kanske kan titta 10, 2 till 10 (pekar på 2 s och sedan 10 s) det är 5 gånger, då måste den [pekar på 3 m] vara 5 gånger mer än den [pekar på den tomma rutan]. Man skulle kunna gå från den här också [pekar på 4 s] till 10 men då måste man veta vad 4 gånger 10 blir.

I resonemanget användes inte enheterna och uppbyggnadsproportion vilket hade kunnat bidra till att skapa mening genom att visa och addera sekunder och liter parallellt till exempel att 2 s + 2 s + 2 s + 2 s + 2 s = 10 s och att antalet liter då är 3 l + 3 l…+ 3 l = 15 l. Även om det planerats för så fördes det inte i någon större utsträckning diskussioner av uppbyggnadskaraktär i den andra klassen heller. I den första klassen görs detta i större utsträckning. Analys av lektioner och resultat från denna klass visade dock att de hade fortsatt svårt för att jämföra om par av storhetsvärden är proportioner eller inte. Till lektion 2 och 3 bestämdes därför att inledningsvis snarast fokusera statisk proportion och dynamisk proportionalitet. Det tycks som att lärare och elever i klasserna brottades så mycket med att försöka förstå och beakta detta att uppbyggnadsproportion togs för givet.

6.3. Resultatsammanfattning

Detta kapitel är en sammanfattning av studiens resultat där det första avsnittet syftar till att besvara arbetes första frågeställning, om kritiska aspekter identifierade i tidigare forskning även tycks vara kritiska för elever i dessa klasser. I texten därefter beaktas den andra frågeställningen; hur elevers förståelse för kritiska aspekter framträder i relation till innehållets behandling i undervisning om proportionella samband. Avslutningsvis problematiseras hur elevernas erfarande av proportionella samband förändras i de olika klasserna.

Hur elever uppfattar proportionella samband före studien

Elevers svårigheter med proportionella samband beskrivna i tidigare forskning har prövats i denna studie. Aspekter av proportionella samband som i tidigare resultat beskrivits som problematiska visade sig vara kritiska även bland elever som deltog i denna studie. I studien identifierades följande kritiska aspekter; att elever vid proportionella jämförelser kan uppfatta och skilja på, multiplikativa och additiva samband, inom[38]- och mellan-förhållande samt de tre beräkningsaspekterna; uppbyggnadsproportion, statisk proportion och dynamisk proportionalitet. I detta arbete tycks dessa aspekter vara kritiska i relation till uppgifter av jämförande karaktär och saknat värde.

Hur innehållet behandlas under lektionerna

Under den första lektionscykeln försvårades urskiljning av kritiska aspekter av att flera aspekter varierade simultant. Inledningsvis varierade till exempel både sammansatta storheter som hastighet, volym per tid och jämförpris parallellt med beräkningsstrategier och inom- och mellan-förhållande.

Vid planeringen inför den andra lektionsserien beaktades detta genom att det bestämdes att tal utan enhet inledningsvis skulle användas. Detta gjordes i förhoppning att aspekterna multiplikativa samband och därefter inom- och mellan-förhållande skulle kunna separeras och varieras en i taget innan de simultant varierades i fusion. Återigen hamnade dock samtidigt beräkningsstrategier i fokus vilket tros ha försvårat urskiljning av att det finns många par av storhetsvärden i ett bestämt förhållande (t.ex. 1:3) och aspekterna inom- och mellan. Då beräkningsaspekterna statisk proportion och dynamisk proportionalitet skulle beaktas visades en multiplikationstabell vilken kan ha bidragit till att elever i den andra klassen lärde sig en metod. Metoden hjälpte dem att lösa uppgifter av jämförande karaktär och saknat värde. Metoden har dock brister då den bara tycks fungera i proportionella problem med värden som finns i multiplikationstabellen. Detta tyder på att eleverna förvisso kan skapa ett direkt förhållande motsvarande proportionalitetskonstant men att de inte med hjälp av detta förhållande kan skapa proportioner med andra värden än de som går att finna i multiplikationstabellen. Metoden tycks inte bidra till att ett generellt funktionssamband kan urskiljas. Eleverna tycktes inte heller, på grund av införandet av denna metod, ha behov av att byta perspektiv och

[38] Ur vilket proportionalitetskonstanten i den specifika sammansatta storheten kan urskiljas

använda sig av det förmodat enklaste inom- eller mellan-förhållandet vid arbete med proportionella problem.

Den tredje lektionscykeln skilde sig till stora delar från de andra två. Lärarlaget beslutade att enbart tal, visualiserade med hjälp utav längder, skulle användas då multiplikativa samband och inom-förhållandet beaktades. Inledningsvis gjordes enbart multiplikativa jämförelser av två längder i taget i syfta att eleverna skulle kunna urskilja att det finns ett stort (oändligt) antal förhållanden vilka kan representeras av ett stort (oändligt) antal par av storhetsvärden. När sedan proportionella jämförelser mellan 4 värden gjordes användes likformiga figurer för att synliggöra att det då fanns två förhållanden, inom och mellan, att välja mellan vid beräkning.

Beräkningsaspekterna statisk proportion och dynamisk proportionalitet var i den tredje klassen möjliga att urskilja simultant. En aspekt vilket i denna studie benämnts det ”magiska” talet möjliggjorde urskiljning av vad dessa båda strategier har gemensamt men också vad som skiljer dem åt. I undervisning infördes begrepp relaterade till delbarhet plats (statisk) och dela (dynamisk) i avsikt att eleverna skulle kunna sätta ord på vilket förhållande och vilken slags beräkning som används. I den tredje klassen var det först i den tredje lektionen som andra sammansatta storheter än likformiga figurer introducerades. Därefter arbetade eleverna med uppgifter liknande de som användes i klass 1 och 2 där uppgifter med sammansatta storheter såsom hastighet, volym per tid, jämförpris och antal per antal behandlades.

Hur påverkas elevers förståelse i relation till innehållets behandling i undervisning?

Resultaten pekar mot att eleverna i den tredje klassen var de som efter undervisning i störst utsträckning kunde relatera värden, och göra multiplikativa jämförelser mellan proportionella och icke proportionella värden på ett flexibelt sätt. Elevers lösningar på testuppgifter tyder på att en majoritet av eleverna efter undervisning till exempel kan växla perspektiv och välja ett enklare förhållande att lösa uppgiften med, lösa och förklara hur de löser uppgifter av jämförande karaktär samt att de efter undervisning uppfattar multiplikativa istället för additiva samband i proportionella problem. Att växla perspektiv innebär att inom- förhållandet där den proportionalitetskonstant som är av intresse att i det specifika fallet identifiera har urskilts. Detta kan bidra till att eleverna i den tredje klassen ur den stora mängden par av storhetsvärden som analyseras under lektionerna kan urskilja generella funktionssamband relaterade till de olika inom-förhållandena i problem som diskuteras i klassen. Det finns däremot inte någon specifik uppgift där detta testas vilket innebär att detta får betraktas som just ett antagande.

I den andra klassen kan jämförelser av resultat mellan för- och eftertesterna vid en första anblick tyda på att elever utvecklade sin förmåga att resonera proportionellt. Vid en närmare analys av elevlösningar tycks så vara fallet vad gäller multiplikativa och additiva samband. Däremot förefaller det inte som att elever till exempel växlar perspektiv och väljer ett enklare förhållande när så är möjligt. Förvisso behövs inte detta så länge de finner den rätta lösningen. En del elever klarar inte av att lösa problem av jämförande karaktär med andra värden än de som finns i multiplikationstabellen. Vissa elever tycks ha lärt sig en metod, där de med hjälp av multiplikationstabellen kan lösa vissa proportionella problem.

I den första klassen uppfattade ett större antal elever multiplikativa samband efter undervisning. I denna klass var det dock mindre än hälften av eleverna som klarade av att göra jämförelser mellan flera par av storhetsvärden med samma eller olika förhållande. Att flera aspekter simultant varierade tros vara en bidragande förklaring till att eleverna i denna klass överlag inte förbättrade sina resultat på eftertest i samma utsträckning som i de två andra klasserna.

En beräkningsaspekt som inte behandlades i önskvärd utsträckning under någon lektion är uppbyggnadsstrategin. Denna strategi har i tidigare forskning beskrivits som ett förstadium till proportionell beräkningsstrategi. Att denna strategi inte lyfts fram kan vara en bidragande orsak till att några elever inte tycks utveckla sin förmåga att urskilja den underliggande aspekten att kunna formera ett par av storhetsvärden. Par av storhetsvärden utifrån vilka storhetsvärden i form av talserier parallellt kan hanteras och där proportioner kan skapas eller identifieras med hjälp av att subtraktion och addition.

7. Diskussion

Denna studies kunskapsbidrag är att belysa på vilket sätt skillnader i innehållets behandling av proportionella samband under lektionerna påverkar elevernas möjligheter att utveckla sitt kunnande. Det som lyfts fram i resultatet är vilka aspekter som tycks vara kritiska för elever med förkunskaper motsvarande de klasser som deltagit i studien och vilka dimensioner av variation som behöver öppnas för att synliggörande av innehållet ska kunna möjliggöras. I tidigare forskning har ett stort antal studier presenterats som belyser vilka svårigheter elever har med att uppfatta proportionella samband. I den studie som presenteras i detta arbete studerades på vilket sätt de problem med förståelsen av proportionella samband som lyfts fram i tidigare forskning är synbara i klassrumsstudier där innehållet behandlas.

En aspekt som denna studie funnit, vilken inte framkommit i tidigare forskning, är att elever uppfattar de numeriska förhållandena utan att samtidigt urskilja att dessa förhållanden är enhetslösa, vilket framkom i förstudien[39]. I övrigt finns en överensstämmelse avseende vilka aspekter av innehållet som lyfts fram som problematiska i tidigare studier och vad som faktiskt visade sig vara problematiskt för den föreliggande studiens elever. Detta arbete bidrar därmed både till att lyfta fram nya aspekter av betydelse för lärandet av proportionella samband som med kunskaper om hur tidigare beskrivna svårigheter i undervisningen uppfattas av och kan förstås utifrån de deltagande eleverna i denna studie.

Detta kapitel inleds med en metodologisk diskussion, därefter diskuteras innehållets behandling i de olika klasserna med avseende på betydelsen av i vilken ordning de kritiska aspekterna introduceras. Sedan följer ett avsnitt där de i studiens resultat fokuserade aspekterna diskuteras och problematiseras i relation till, forskningsfrågor, tidigare forskning och variationsteorin. Diskussionsdelen avslutas med avsnitt om terminologi och fortsatt forskning.

[39] Eleven uppfattade att förhållandet mellan salt och vatten i ett recept är 1:3. Multiplicerade mängden salt (1,5 tsk) med 3 för att få mängden vatten, skrev 4,5 men tyckte inte att det var rimligt att därefter skriva dl. (se kap. 3.1.2)

7.1. Metoddiskussion

I detta arbete studeras på vilket sätt innehållets behandling med avseende på proportionella samband utvecklar elevers kunnande inom det avsedda området. I arbetet har resultaten i elevernas förändrade förståelse kopplats till skilda sätt att behandla innehållet i lektionerna. Detta kan problematiseras eftersom det finns andra faktorer som kan vara bidragande orsaker till detta. Den analys som görs i detta arbete bygger på de teoretiska antaganden som görs i det teoretiska ramverket, vilket innebär att andra utgångspunkter förbises. I till exempel design experiment och lesson study studeras även faktorer utöver innehållets behandling och argument kan utifrån deras perspektiv framföras i termer av att elever i den ena eller andra klassen i denna studie inte är lika aktiva eller att relationen mellan lärare och elever i de olika klasserna varierar. Sådana faktorer kan identifieras i form av gester, talutrymme, språkbruk och så vidare i det filmade lektionsmaterialet.

Även om fokus i denna studie har avgränsats till att studera innehållets behandling har det gjorts ett urval av innehållets behandling ur det filmade materialet. Argument kan framföras att det med ett annat urval av innehållets behandling hade gått att kunna påvisa att det finns andra tillfällen där innehållet behandlas på ett sådant sätt att dessa tillfällen är en troligare orsak till elevers lärande än de som valts ut. Även om analys av delar av de filmade lektionerna gjorts i olika konstellationer och i olika forum är det möjligt att en annan tolkning av dessa moment, även med utgångspunkt från det teoretiska ramverk som används i detta arbete, är möjligt. Det kan till exempel vara så att moment där kritiska aspekter beaktas eller inte beaktas tagits för givet. Lektionscyklerna sträcker sig över flera lektioner vilket innebär att det är svårare att identifiera när lärande av något specifikt i termer av en kritisk aspekt är möjlig att urskilja. För att kompensera detta har en så noggrann beskrivning som möjligt av de data som ingår i analysen samt analysarbetet genomförts.

En faktor som var tänkt att hållas konstant i de olika klasserna var just antalet lektioner. I den tredje lektionsserien fattas dock, efter det att tre lektioner genomförts, beslut om att ytterligare en lektion ska genomföras för att pröva en del av de resultat som framkommit i de tidigare lektionerna. Beslutet att i den tredje klassen ha ytterligare en lektion grundades i att eleverna efter tre lektioner på grund av förändrade variationsmönster ännu inte ansågs ha möjliggjorts urskiljning av de hypotetiskt kritiska aspekter som bedömdes relevanta för att uppfatta lärandeobjektet på det sätt som avsågs. Argument kan framföras att det extra lektionstillfället är orsak till elevernas förbättrade resultat på eftertest, vilket i så fall innebär att jämförelser mellan denna klass och de andra två klassernas resultat inte är möjlig. Motargument kan framföras i termer av att lärande, utifrån de teoretiska utgångspunkter som används i detta arbete, betraktas som en skillnad mellan hur en person vid ett tillfälle och ett annat uppfattar ett specifikt fenomen. Lärande är meningsskapande, vilket innebär att en person urskiljer nya aspekter och därigenom skapar ny mening (se Marton & Booth, 1997). Det är inte tiden i sig som är avgörande utan studiet av vad det är som avgör om den lärande kan erfara lärandeobjektet på det sätt som avses efter undervisning. Att eleverna i den tredje klassen haft en lektion mer än eleverna i de två andra klasserna bör dock vid jämförelse av kvantitativa resultat i testerna beaktas. Ett alternativ hade varit att efter den tredje lektionen eftertesta eleverna och göra ett ytterligare test efter den fjärde lektionen. På så vis hade en skillnad i resultat kunnat peka mot vad den extra lektionen haft för effekt avseende skillnad mellan elevernas förståelse efter lektion tre respektive fyra. Å andra sidan kan argument då framföras att denna skillnad snarast beror på att de haft ytterligare ett testtillfälle viket också kan anses vara ett tillfälle att lära. I denna studie användes minitest i syfte att identifiera om lärande av någon specifik aspekt varit möjlig att urskilja under någon specifik lektion. I klass 3 gjordes detta test i samband med den första lektionen och resultaten på den uppgift som användes (C) indikerar att eleverna getts möjligheten att urskilja denna aspekt redan under den första lektionen. Resultaten på denna uppgift var nämligen i stort sett identiska med resultaten efter fyra lektioner. Detta kan tyda på att antalet lektioner, vad gäller denna aspekt, inte haft någon betydelse för elevernas lärande.

En annan faktor att beakta är huruvida de aspekter som anses vara kritiska är det eller ej i de deltagande klasserna. Tidigare forskning har varit ett viktigt stöd i denna studie eftersom de svårigheter som elever har med att uppfatta proportionella samband är väl dokumenterad. Däremot kan man fråga sig på vilket sätt dessa svårigheter yttrar sig och kan överkommas i de klasser som deltagit i denna studie och om innehållets behandling möjliggjort urskiljning av dessa. Ett annat exempel på när en aspekt inte bedömts vara möjlig att urskilja är om andra aspekter simultant varierat och fokuserats istället, vilket ibland har varit svårt att avgöra då flera aspekter, vid proportionella jämförelser av fyra värden, har en tendens att samvariera.

Tester har i detta arbete använts för att försöka avgöra om innehållsliga aspekter identifierade i tidigare forskning tycks kritiska för eleverna i denna studie för att lära. Frågorna är konstruerade av forskarlaget. Dessa frågor är således inte standardiserade och argument kan framföras om dessa frågor verkligen testar de specifika aspekter som påstås. I syfte att försöka säkerställa att de i så stor utsträckning som möjligt gör det har flera personer varit involverade vid utformningen av dessa uppgifter. Samtidigt finns det i dessa uppgifter detaljer som kan styra eleverna mot att svara på ett visst sätt. I uppgift C, där saknat värde hos likformiga figurer efterfrågas, står det i problemformuleringen att *alla längder i en figur ska förminskas eller förstoras lika mycket*. Lika mycket kan av elever tolkas som att elever att det är en additiv skillnad som söks. Ett ordval som kan ha påverkat eleverna att göra additiv jämförelse även om de eventuellt uppfattat ett multiplikativt samband. I uppgift D där val av chipspåse ska göras med utgångspunkt från vilken påse som ger mest chips för pengarna är det möjligt att elever valt den ena sorten därför att de inte gillar den andra sorten. Även om inte svaren indikerar att så är fallet så finns möjligheten, vilket innebär att de eventuellt klarat att lösa uppgiften om det tydligare beskrivits att val inte skulle göras med utgångspunkt från ens egen favoritsmak.

Antalet elever som deltagit i denna studie är förhållandevis få och kritik kan uppstå mot att jämförelser mellan ett så litet antal görs. Antalet elever i de olika klasserna är dessutom olika, vilket innebär att de resultatjämförelser som i detta arbete görs måste beaktas utifrån dessa givna premisser.

Det går inte heller att utesluta att lärande skett vid andra tillfällen än på lektionerna. Resultat på eftertest kan ha påverkats av att elever diskuterat uppgifter på förtest med kamrater eller föräldrar vid andra tillfällen än på lektionerna. De minitest som användes i detta arbete är till viss del ämnade beakta detta. Kritik mot att det är svårt att identifiera när lärande sker i studier som sträcker sig över en längre tidsperiod har riktats mot till exempel design experiment (Shavelson et al., 2003). Liknande kritik kan framföras mot denna studie, då den sträcker sig över en längre tidsperiod, även om kritiken vad gäller design experiment även brukar kombineras med att fokus riktas mot allt som sker. I denna studie begränsas det som studeras till den innehållsliga aspekten och elevernas möte med ett specifikt och avgränsat innehåll.

Som synes finns det i detta arbete ett stort antal andra faktorer som kan anses påverka de kausala effekterna. Förutom ovan nämnda är det olika lärare i varje lektionsserie och eleverna i klass 2 är ett år äldre än eleverna i klass 1 och 3. I varje klass är det dock samma lärare som undervisar alla lektionerna. Det finns inte heller någon kontrollgrupp där ”vanlig” undervisning görs. Det skulle kunna vara möjligt att blanda alla klasser, göra dem lika stora och låta samma lärare undervisa alla grupper i syfte att stärka validiteten, se till exempel Holmqvist (2011). Som motargument kan framföras att förutsättningarna nu i större utsträckning liknar de som eleverna är vana vid vilket kan minska den så kallade Hawthorne effekten (se Cohen et al., 2011) där en grupp som får behandling kan prestera bättre än kontrollgruppen enbart på grund av den ökade uppmärksamhet som den får. I denna studie behandlas samtliga grupper på samma sätt, vilket innebär att de får samma grad av uppmärksamhet, och därmed undviks Hawthorne effekten. I detta fall kan de olika grupperna utgöra kontrollgrupper till varandra, eftersom innehållets behandling skiljer sig åt och kan jämföras mellan grupperna.

7.2. Behandling av de kritiska aspekterna i relation till elevers lärande

Ur tidigare forskning identifierades aspekter som även visade sig vara kritiska för elever som deltog i denna studie. I följande avsnitt diskuteras och problematiseras elevers möjligheter att lära med avseende på hur dessa aspekter behandlades under studiens lektioner. Den andra forskningsfrågan vad som i innehållets behandling som tycks vara avgörande för elevers olika erfarande av proportionella samband vävs i denna diskussion samman med den tredje forskningsfrågan, hur elevernas erfarande av proportionella samband förändras efter undervisning i relation till skillnader mellan klasser.

7.2.1. Betydelsen av att separera aspekter i en specifik ordning.

I den första lektionscykeln samvarierade flera aspekter i de flesta lektionsmomenten. Multiplikativa och additiva samband behandlades till exempel i kombination med olika eller lika storheter såsom längd, tid och vikt. När aspekterna inom- och mellan-förhållandet därefter introducerades samvarierade även beräkningsaspekterna, vilket gjorde det svårt för eleverna att urskilja vare sig inom- och mellan-aspekterna eller beräkningsaspekterna, det vill säga olika sätt att lösa en uppgift av proportionell karaktär på. Lo (2012) beskriver detta i termer av att vi inte har kapaciteten att fokusera på allt samtidigt och att då flera aspekter varierar är svårt att uppfatta något specifikt. Till den andra lektionsserien bestämdes att jämförelser inledningsvis skulle göras med tal utan enhet. Förhoppningen var att eleverna därmed lättare skulle kunna urskilja aspekten multiplikativa och additiva samband. Tal utan enhet användes även vid introduktion av aspekterna inom- och mellan-förhållande men även i denna klass samvarierade och fokuserades beräkningsaspekterna parallellt, vilket försvårade urskiljning. Vad gäller beräkningsaspekterna tycks det som att elever i klass 2, efter undervisning snarast har lärt sig en metod att med hjälp av multiplikationstabellen göra proportionella jämförelser. Med hjälp av metoden kan de lösa vissa uppgifter av den karaktär som finns i test. Metoden är dock bristfällig då den enbart är applicerbar med värden som går att finna som produkter i multiplikationstabellen. Detta innebär att elever efter undervisning har svårt att lösa uppgifter med andra värden. Ur ett variationsteoretiskt perspektiv har ett antal elever inte urskilt *hur* ett direkt förhållande (där proportionalitetskonstanten om det är inom-förhållandet som i det specifika fallet beaktas återfinns) kan skapas. De har snarare urskilt en metod. Analys av resultat tyder inte på att en övervägande del av eleverna i den första och andra klassen, efter undervisning, kunde uppfatta det direkta lärandeobjektet[40] i denna studie.

I den tredje klassen tyder analys av elevlösningar på eftertest att de efter undervisning i större utsträckning än på förtest kan uppfatta proportionella samband. Orsaken till detta tros bero på att de i studien identifierade kritiska aspekterna i denna klass tydligare separeras och varieras en i taget innan fler aspekter, efter hand, samvarierar i en ordning som överensstämmer med den som rekommenderas av Lo och Marton (2011). De beskriver att det är lämpligt att börja med att skapa en överblick av lärandeobjektet utifrån vilket de strukturella aspekter som uppfattas samtidigt skapar dess mening. I detta fall utgör förtest, vilket görs i anslutning till den första lektionen, en slags inledande överblick för eleverna där fokus riktas mot vad som ska läras under lektionerna. Till exempel ställdes frågor om vad ett förhållande är, vilket flera elever på förtest gav uttryck för att inte förstå varvid fokus riktas mot det som i undervisningen ska beaktas. Vid introduktion av förhållande där multiplikativt samband och additivt samband kontrasteras och generaliseras görs bara jämförelser av tal. Därmed blir det mindre som varierar vilket gör det lättare att fokusera förhållandet mellan värden. Karplus et al. (1983b) menar att elever oftast uppfattar additiva samband snarare än multiplikativa om enhet

[40] Att kunna identifiera de strukturella sambanden mellan fyra värden i ett sammanhang där värdena varierar men kvoten är konstant (proportionalitetskonstant).

saknas, vilket tyder på att eleverna är beroende av att förstå meningen bakom den information de får. I detta fall saknas enhet men fokus är riktat mot multiplikativt samband. Det är det som det är *meningen* att elever ska uppfatta och inte i vilka olika kontexter ett förhållande kan uppfattas. Om enheter finns med, till exempel meter och sekunder, kan fokus riktas mot hastighet istället för multiplikativt samband. Att elever i detta fall uppfattar additiv skillnad, på grund av att talen saknar enhet (vilket enligt Karplus et al. (1983b) är vanligare än om talen har enhet, kan ses som en fördel eftersom kontrasterande uppfattningar då kan komma till uttryck och möjliggöra urskiljning av additiv och multiplikativ aspekt. ”Fel” uppfattning möjliggör urskiljning av ”rätt”.

Kontrastering av multiplikativa och additiva samband samt förhållande och omvänt förhållande gjordes i klass 2 och 3 inledningsvis enbart med hjälp av tal (lek.2.1-M1 och lek.3.1-M1).

I klass 3 ritades därefter parvisa längder på tavlan i kombination med tal utan enhet. Med hjälp av denna uppgift separerades, kontrasterades och generaliserades, enbart inom-förhållandet. Även om enheter inte skrevs, vilka enligt Karplus et al. (1983b) tycks bidra till att skapa mening, ritades längder som representerade talen. Längder vilka kan ha bidragit till att eleverna uppfattade att det finns ett stort antal förhållande som vart och ett går att generalisera till ett stort antal par av storhetsvärden i samma förhållande. Först då inom förhållandet på detta vis varit möjligt att urskilja gjordes jämförelser mellan två par av storhetsvärden och två förhållanden. Till detta användes likformiga figurer (trianglar) med ”enkla” värden utan enhet vilket bidrog till att både enheter och beräkningsaspekter hamnade i bakgrund. Att förhållandet inom par av storhetsvärden i undervisningen beaktades innan jämförelser mellan fyra värden, proportioner, (och därigenom två förhållanden) gjordes är en trolig orsak till att elever i klass 3 efter undervisning i högre utsträckning än i klass 1 och 2 kunde byta perspektiv. Beräkningsaspekterna, statisk proportion och dynamisk proportionalitet separeras därefter med hjälp av likformiga trianglar (nu med komplexare värden) och kontrasteras där det i studien identifierade sambandet, vilket benämns det magiska talet, pekar på vad som skiljer men samtidigt förenar de båda strategierna. Detta möjliggör simultan urskiljning av strategierna vilket i dynamisk proportionalitet medför en beräkning med hjälp av inom-förhållandet (proportionalitetskonstant) respektive mellan-förhållandet vid beräkningar av statisk proportion. Först därefter introduceras andra sammansatta storheter till exempel hastighet och pris per vikt. Det iscensatta lärandeobjektet i klass 3 möjliggör urskiljning av en aspekt i taget innan aspekter allt efter hand samvarierar i fusion. Detta är en ordning som är i överensstämmelse med det som Lo och Marton (2011) beskriver som framgångsrik. Detta tros vara en bidragande orsak till att en majoritet av eleverna på eftertest gav uttryck för att uppfatta proportionella samband. Eleverna i den tredje klassen tycks efter undervisning på grund av att proportioner i undervisningen i stor utsträckning görs möjliga att urskilja och generalisera börja kunna urskilja proportionalitetskonstant och proportionalitet. I studien valdes att skära bort olika kontexter för att göra innehållet mer enhetligt med avsikt att lärandeobjektet skulle framträda tydligare för eleverna. Att på detta sätt göra innehållet mer matematisk och numerisk kan ses som att den också blir mer skild från ”verkligheten”. Vi anser dock att detta är nödvändigt om inte allt för mycket inledningsvis ska variera och försvåra urskiljning av det vi avsåg att eleverna skulle lära sig. I slutet på den tredje lektionsserien öppnades möjligheten, då det direkta lärandeobjektet förhoppningsvis erfarits, upp för att proportionella samband går att finna i en stor mängd olika kontexter. Ett annat sätt att utrycka det på är att det direkta lärandeobjektet, vad eleverna ska lära sig, i högre utsträckning relateras till det indirekta, hur de kan använda sig av detta kunnande. Ett kunnande som i förlängningen förhoppningsvis kan relateras till andra lärandeobjekt, dess externa horisont.

Betydelsen av uppgiftens design i relation till i vilken ordning och med vilka värden de introduceras.

Uppgifterna som används under den tredje lektionsserien är designade att möjliggöra urskiljning av ett specifikt innehåll. Ordningen är väsentlig då det till exempel inte är meningsfullt att diskutera olika beräkningsstrategier om elever inte vet vad ett multiplikativt samband är. De ingående värdena i uppgifterna blir även alltmer komplexa efterhand. Våra erfarenheter från denna studie tyder på att de värden som väljs och används då dimensioner av variation (aspekter) ska öppnas upp och synliggöras kan betraktas som kritiska. Då till exempel multiplikativa samband (förhållande) i den tredje klassen skulle generaliseras med hjälp av parvisa jämförelser av längder var det inledande förhållandet 1:3. Flera par av storhetsvärden skapades innan ett nytt ”svårare” förhållande 3:4 introducerades och generaliserades. På liknande sätt används till exempel enkla värden då eleverna skulle ges möjligheten att urskilja beräkningsstrategierna statisk proportion och dynamisk proportionalitet. Att detta gjordes var för att fokus skulle riktas mot det vi avsåg att de skulle urskilja, likheter och skillnader i hur proportioner med hjälp av inom- (proportionalitetskonstant) och mellan-förhållande kan identifieras eller skapas. Till detta krävs någon slags beräkning där enkla värden bidrog till att elever inte inledningsvis fastnade i svårigheter att beräkna.

Även om uppgifterna är ämnade att belysa något specifikt krävs det att läraren är väl medveten om vad detta något är, så att inte andra aspekter simultant behandlas. Våra erfarenheter från denna studie tyder på att detta är mycket svårt och att det krävs gedigna innehållsliga kunskaper för att kunna bemöta och hantera elevers förslag på lösningar på ett korrekt sätt.

7.2.2. Kontrastering av additiva och multiplikativa samband

De olika sätt som elever resonerar och de fel som de vanligtvis gör då de beräknar uppgifter som innehåller proportionella problemställningar är väl beskrivna i tidigare forskning. Förslag på hur innehållets behandling under lektioner kan bidra till att förändra dessa felaktiga uppfattningar beskrivs dock sällan - om alls. Det mest framträdande exemplet på detta är den första av de i studiens resultat fokuserade aspekten att kunna urskilja och skilja på multiplikativa och additiva samband (se Hilton et al., 2013; Sowder et al., 1998; Tourniaire & Pulos, 1985). Ur ett variationsteoretiskt perspektiv lär vi oss genom att en aspekt separeras ur helheten och varierar mot en invariant bakgrund. Detta är en variation som gör det möjligt för oss att urskilja den specifika aspekten, vilket kan innebära att ett ”felaktigt” förslag till lösning på en uppgift ibland kan vara lämpligt att använda som kontrast till ett korrekt. Vad gäller aspekten att kunna urskilja skillnad mellan ett additivt och ett multiplikativt samband gjordes sådana kontraster i samtliga klasser i denna studie. En lärare kontrasterade med hjälp av en uppgift som handlade om en kran som rinner med en jämn hastighet. Läraren påstod att om det efter 3 sekunder har passerat 9 liter genom kranen så måste det efter 6 sekunder måste ha passerat 12 liter. Med hjälp av förlaget kontrasterades multiplikativt samband mot additivt, det korrekta förslaget dubbelt så mycket tid och dubbelt så mycket vatten (alternativt att tid och vatten är i förhållande 1:3) mot den i detta fall felaktiga additiva skillnaden 6. För vissa kan detta uppfattas kontroversiellt. Marton och Booth (1997) beskriver att människors syn på lärande kan delas in i två framträdande kategorier. I den ena kategorin kan lärande uppfattas och med hjälp av uppgifter uttryckas i form av att utöka sina kunskaper genom att tillämpa, återge eller memorera. I den andra kategorin kan lärande istället uppfattas och uttryckas med hjälp av uppgifter i form av att: skapa mening, förstå och därmed uppfatta något specifikt på ett annat sätt än tidigare (ibid.). Om lärande uppfattas som att upprepa eller memorera kan argument framföras för att det inte är lämpligt att påvisa felaktigheter eftersom dessa riskerar att just memoreras och upprepas. Det som görs bör därmed göras korrekt. Vid litteraturgenomgång gick det att finna ett stort antal uppgifter vilka kan vara lämpliga att med hjälp av ”felaktigt” förslag skapa kontrast av aspekten additivt och multiplikativt samband. I de vid forskningsgenomgång identifierade studier där denna aspekt i undervisning beaktas (se Kaput & West, 1994; Lobato et al., 2010) förs inte resonemang i termer av att ”öppet” försöka synliggöra denna skillnad det vill säga att i undervisningen synliggöra de ”felaktigt upplevda” additiva samband som elever ofta uppfattar vid proportionell problemlösning. I en studie av Misailidou och Williams (2003) undersöks vilka typer av uppgifter som är mest lämpade för att diagnostisera om elever uppfattar additiva samband i proportionella problem[41]. Uppgifterna används därefter för att skapa modeller där forskarna studerar om elever med hjälp utav dessa (i intervjuer) utvecklar sin förståelse för proportionellt resonemang, vilket de beskriver att eleverna enbart delvis lyckas med.

> Generally, it seems that in our attempt to design ”models” which support ratio reasoning and the avoidance of additive strategies in particular we succeeded only marginally, […](Misailidou & Williams, 2003, s. 239)

Det tycks som att eleverna själva, med hjälp av uppgiftens konstruktion, ska upptäcka att additiva samband i proportionella problem inte fungerar. I citatet ovan kan ordet *avoidance* tolkas som att additiva uppfattningar med hjälp av uppgiftens konstruktion ska undvikas. Avsaknad av ”felsvar” i undervisningen är förmodligen en spegling av det resonemang som Marton och Booth (1997) för beträffande syn på lärande. Det kan samtidigt vara så att det är andra faktorer som är av intresse att studera.

I en studie av Koellner-Clark och Lesh (2003) tycks till exempel vikten av att elever ges möjligheten att samarbeta och utbyta idéer i relation till det matematiska innehållet som studeras vara av primärt intresse. Den uppgift som studien baseras på, där fotavtryck jämförs, är som författarna beskriver

---

[41] Jämförelser av likformiga figurer liknande uppgift C i detta arbete beskrivs av Misailidou och Williams (2003) som en ur ett diagnostiskt perspektiv lämplig uppgift.

den, unik på så vis att den möjliggör proportionellt resonemang utan givet svar (open-ended), samt att det erbjuder en verklighetsnära (real-life) kontext. I de exempel som ges fokuseras dialog och att läraren genom att lyssna på elevdiskussioner kan få en inblick i vilken matematisk nivå elever befinner sig på. En inblick som, enligt författarna, bidrar till att relevanta frågor kan ställas. Det nämns däremot inte något om vad en relevant fråga är, till exempel hur en elev som ger uttryck för att inte förstå kan bemötas. Även i Koellner-Clark och Lesh (2003) tycks det som att det är uppgiften, i kombination med samarbete som ska bidra till att utveckla elevers förståelse. Lärarens roll i undervisningen synliggörs inte annat än i form av att de ska vara med och försöka lyssna in hur eleverna uppfattar problemet. I en studie av Kullberg (2012) utelämnas medvetet ett antal tidigare identifierade kritiska aspekter i det intentionella lärandeobjektet. Det visade sig dock att dessa aspekter ändå med hjälp av elevinspel framkom i undervisning, vilket innebar att det iscensatta lärandeobjektet blev något annat än det intentionella. Elevers uttryckta uppfattningar i undervisningen beaktades vilket bidrog till att medvetet utelämnade kritiska aspekter ändå blev möjliga att urskilja. Detta innebar en förändring som bidrog till att elevernas resultat i klassen förbättrades. Wernberg (2009) påpekar att en interaktion som pågår i klassrummet kan ha stor påverkan på elevernas resultat där det iscensatta lärandeobjektet kan bli något helt annat än det intentionella. Att inte lyfta och kontrastera elevuppfattningar på grund av rädsla för att de ska ”memoreras” överensstämmer inte, som jag ser det, med den variationsteoretiska synen på hur man lär. Om dessa uppfattningar bidrar till att en för elever kritisk aspekt kan separeras och med hjälp av kontrast varieras bör det göras. Kontrasterande uppfattningar tycks således ur ett lärandeperspektiv bidra med att dels synliggöra en uppfattning (om det är ett elevinspel), men de kan även bidra till att en aspekt separeras och skapar kontrast. I denna studie sker det då ett multiplikativt samband kontrasteras med ett additivt, vilket möjliggör dess urskiljning.

> […] teaching them to distinguish between right and wrong concepts should be a teaching focus. (Lo, 2012, s.16)

Det verkar som att elever i samtliga klasser, med hjälp av kontrasteringar där motstridiga elevuppfattningar kommer till uttryck, utvecklade sin förståelse för skillnaden mellan additiva och multiplikativa samband. I klass 3 är det till exempel 11 elever som på någon eller några av tre uppgifter (C,D,E) på förtest ger uttryck för att uppfatta additiva samband, vilket kan jämföras med en elev på eftertest. Resultaten var liknande i den andra klassen medan det i den första klassen var något fler som efter undervisning fortfarande uppfattade additiva samband. Detta tros bero på att andra aspekter varierade simultant, vilket kan ha försvårat urskiljning av de kritiska aspekterna under den lektionen. Lamon (2007) listar ett antal frågor som hon tycker är värda att beakta i fortsatt forskning varav bland annat följande *What mechanisms drive the change from additive to multiplicative reasoning? (Lamon, 2007, s. 662).* Resultaten från denna studie indikerar att kontrastering av dessa additiva- och multiplikativa samband kan vara en möjlig väg att gå för att besvara Lamons frågeställning, framförallt om detta sker med hjälp av att elevers kontrasterande uppfattningar uttrycks i undervisningen.

7.2.3. Att byta perspektiv - förhållande inom och mellan sammansatt storhet

Att resonera proportionellt innebär flexibilitet i sätt att angripa och förklara ett proportionellt problem. I studien var både lärare och jag redan från start överens om att inte försöka lära ut något specifikt sätt att lösa proportionella problem på. Fokus var istället att möjliggöra urskiljning av aspekter som bidrog till elevernas lärande. Analys av elevlösningar på förtest på uppgift A visade att det bland eleverna i klasserna fanns en stor variation beträffande hur de angrep problemet. Det vanligast förekommande sättet var uppbyggnadsproportion, en strategi som i tidigare forskning beskrivs i termer av förstadiet till proportionellt resonemang (Lamon, 2007). För att kunna använda sig av både statisk proportion och dynamisk proportionalitet måste däremot båda de förhållandena (inom och mellan), vilka går att finna i en proportion, kunna uppfattas. I förintervju och förtest var det samtidigt tydligt att elever i dessa klasser tycktes ha svårt för det. Även om detta beaktades vid planeringen redan av den första lektionsserien hade framförallt beräkningsaspekterna en tendens att simultant variera. Begreppen inom och mellan var i detta skede av studien inte tydligt etablerade i forskarlaget på annat vis än att hänsyn togs till att det finns två förhållanden mellan fyra värden. Att precisera vad som är att betrakta som ett inom-förhållande och ett mellan-förhållande har i detta arbete har varit en stor utmaning. Resultaten från denna studie pekar samtidigt mot att detta är av avgörande intresse för att lärare och forskare ska kunna förstå och kommunicera vilket förhållande elever använder sig av. Genom att bestämma vad som är en sammansatt storhet preciseras samtidigt vilken strategi elever använder sig av för att lösa proportionella problem. Dynamisk proportionalitet kopplas till förhållandet *inom* den sammansatta storheten och uppbyggnads och statisk proportion till förhållandet *mellan* sammansatta storheter. Utan denna beskrivning går det inte att avgöra vad som är vad. I Johansson och Lybecks studie där vattenmängd i 4 olika mätglas jämförs påpekas att det vid proportionell kvantifiering med hjälp av förhållandet mellan mätglas av *olika* slag ($funktionssambandet\, y = k \cdot x$) endast är *en* obekant (y) som behöver identifieras. Mellan mätglas av *samma* slag är det däremot enligt författarna två obekanta k och x som behöver identifieras. När val av funktionssamband att beakta väl är gjort (vilket i deras beskrivning är något otydligt se kap 2.3) så har de en poäng med detta resonemang vilket följande avsnitt är ämnat att belysa.

Inom-förhållande går att finna, i ett system (t.ex. likformig triangel), i en sammansatt storhet (t.ex. höjd/bas), i ett par av storhetsvärde (t.ex. 6 cm/4 cm). En barbiedocka kan betraktas som ett annat system. Ett system inom vilket ett stort antal sammansatta storheter i olika förhållanden kan jämföras. Dockans totala längd kan mätas och jämföras med: fot, midjemått, hals och så vidare. Längder vilka i sin tur kan jämföras med varandra och där inbördes förhållanden kan identifieras. Om alla längdförhållanden *inom* detta system är identifierade kan dockan slängas. Det går ändå att med hjälp av dessa förhållanden (proportionalitetskonstanter) återskapa en proportionell docka i vilken storlek som helst enbart genom att bestämma ett av dess nya mått. Detsamma gäller ett annat kroppsligt system till exempel min kropp. I tabell 19 nedan anges några av mina respektive en barbie dockas mått i relation till olika förhållanden som råder inom dessa båda system.

Tabell 19. Längder och förhållanden inom två system, barbiedocka respektive min kropp.

	längd	**halsens längd**	**midjans omkrets**	**fotens längd**
mått på barbie-docka	30 cm	2 cm	8 cm	2 cm
förhållande inom systemet barbie	15	1	4	1
mina mått	180 cm	6 cm	84 cm	26 cm
förhållande inom mitt system	90	3	42	13
förhållande mellan system	1:6	1:3	2:21	1:13

Till skillnad mot om alla förhållanden inom ett system är identifierade (min kropp eller barbiedockans) går det inte att återskapa en likformig modell vare sig av barbiedocka eller min kropp enbart med hjälp av förhållanden *mellan* systemen. Oavsett om alla mellan-förhållanden är identifierade måste längderna i ett system (eller ett i något av dem) vara givet om det ska gå att skapa ett proportionellt system, det vill säga en kopia av mig eller barbiedockan. Det går inte att slänga dockan[42] eftersom att det då inte längre finns några mått att utgå ifrån. Med hjälp av förhållanden inom systemet kan däremot proportionella barbiedockor, med utgångspunkt från en enda given längd, skapas. Låt säga att mina personliga mått används med avseende på förhållandet inom tre sammansatta storheter hos barbiedockan: A) längd/midja, B) längd/fot, C) längd/hals. I tabell 20 går det ur tabellen nedan att utläsa vilken längd en barbiedocka motsvarande originalets i respektive fall skulle få.

Tabell 20. Olika längder som likformiga barbiedockor får med utgångspunkt från 3 olika värden.

	längd	**halsens längd**	**midjans omkrets**	**fotens längd**
mått på barbiedocka	30 cm	2 cm	8 cm	2 cm
förhållande inom systemet barbie	15	1	4	1
A) Längd på barbie med forskarens midjemått	315 cm		84 cm	
B) Längd på barbie med forskarens fot-storlek	390 cm			25 cm
C) Längd på barbie med forskarens längd på hals	90 cm	6 cm		

Som synes är det skönhetsideal som förhållandena inom en barbiedocka representerar något förvrängda då en barbiedocka med mitt midjemått som referensmått skulle vara: 3,15 meter, min fot 3,90 meter och min hals 0,90 meter. Om vi bortser från detta så pekar exemplet ovan på vikten av att precisera vilket system det är intressant att beakta med avseende på de ingående förhållandena. I många fall rör det sig inte om system utan jämförelser inom eller mellan *en* sammansatt storhet vilket är fallet vid jämförelser av densitet, hastighet, jämförpris, volym per tid och så vidare. Val av sammansatt storhet preciserar samtidigt vad som är att betrakta som en uppbyggnads, statisk proportion eller dynamisk proportionell lösningsstrategi. Begrepp som är

[42] Ett annat exempel är en karta där skalan visar på förhållandet mellan systemen karta och verkligheten. För att med hjälp av kartan bestämma ett verkligt mått måste en mätning göras och skalan användas.

avhängiga vad som är att betrakta som en sammansatt storhet och det inom förhållande som detta är förknippat med. I tidigare forskning används begreppen för att beskriva hur elever uppfattar förhållanden (se Johansson & Lybeck, 1978; Karplus et al., 1983b; Lamon, 2007). I detta arbete används de för att precisera det intentionella, iscensatta och erfarna lärandeobjektet. Utan en tydligare precisering av dessa förhållanden i den tredje lektionsserien hade förmodligen inom och mellan-aspekterna, liksom i klass 1 och 2, separerats och varierats simultant med beräkningsaspekterna statisk proportion och dynamisk proportionalitet. En variation som hade försvårat urskiljning av dessa aspekter.

7.2.4. Beräkningsaspekterna och införandet av plats och dela

Det ”magiska tal” som en elev uppfattar är den insikt som i störst utsträckning medverkat till att utveckla lektionsdesignerna i denna studie. Detta förslag bidrog till att det intentionella lärandeobjektet i klass 3 även innefattade variationsmönster ämnade att möjliggöra urskiljning av statisk proportion och dynamisk proportionalitet. Med hjälp av att i undervisning diskutera statisk proportion och dynamisk proportionalitet i termer av plats och dela blev det möjligt att med hjälp av detta ”magiska” tal peka på att det i ena fallet representerar (plats): *förhållandet mellan* par av storhetsvärden (sammansatt storhet) och hur många gånger ett storhetsvärde ryms (får plats) i ett annat, i det andra fallet (dela), hur stor varje *del* blir om ett par av storhetsvärdena delas i bitar motsvarande förhållandet inom par av storhetsvärden (sammansatt storhet). Avsikten med att benämna denna strategi *dela* var att visa att det är av intresse att urskilja hur stor en *del* är. Jämförelser av storhetsvärden kan göras med hjälp av denna del och det dynamiska inom-förhållandet. Begreppet *dela* används således i relation till inom-förhållandet vilket kan tolkas som att detta förhållande enbart går att finna med hjälp av delningsdivision och inte innehållsdivision. De olika tankeinriktningar (Kilborn, 1990), som innehålls- och delningsdivision representerar, är möjliga i både statisk (plats) och dynamisk (dela) proportionalitet. Det ”magiska” talet relaterar sambandet mellan del och mellan-förhållande och distingerar inte innehålls- och delningsdivision. För att undvika denna förväxling kanske det hade varit lämpligare att i studien istället benämna *dela* som *del*, en del som på något sätt ska identifieras och därefter användes vid jämförelse av förhållande mellan två storhetsvärden.

I forskningsöversikten finns resultat av hur elever i intervjuer och undervisning kvantifierar proportionella samband med hjälp av en terminologi som samtidigt beskriver vilket förhållande som används (Johansson & Lybeck, 1978; Lobato et al., 2010; Vergnaud, 1988). I denna studie görs försök att undervisa om dessa beräkningsstrategier. I samtliga klasser har tanken varit att vänta med att fokusera beräkningsaspekterna till dess att aspekterna multiplikativt samband och inom- och mellan-förhållande beaktats. Vad som i detta senare läge av lektionsserien tycks vara av avgörande betydelse är att eleverna inför detta moment lyckats uppfatta de i tidigare undervisning beaktade aspekterna. I detta skede är det flera aspekter som parallellt måste variera. Däremot hålls i framför allt den tredje klassen uppgift, värden och sammansatt storhet konstant med avsikt att enbart dela och plats strategi simultant ska varieras och kontrasteras. Då en uppgift behandlats presenteras en ny uppgift av samma karaktär med nya allt mer komplexa värden i syfte att generalisera dela och plats strategi. Begreppen dela och plats bidrar då till att även eleverna ges möjligheten att sätta ord på vilken strategi de använder sig av.

I detta arbete görs en avgränsning genom att de uppgifter som behandlas enbart är av karaktären saknat värde eller proportionella jämförelser. För att lösa uppgifter av karaktären saknat värde spelar det egentligen ingen roll vilket förhållande som uppfattas och används vid beräkning. Det är svårt att generalisera ett förhållande till ett funktionssamband då bara en jämförelse görs. Vid jämförande problem kan det däremot vara en fördel att uppfatta det dynamiska förhållandet, ett förhållande som har många namn: k-värde, förändringsfaktor, proportionalitetskonstant. I klass två görs detta med hjälp av multiplikationstabellen medan det i klass tre görs i relation till urskiljning av statisk proportion (plats) och dynamisk proportionalitet (dela). I klass 3 möjliggörs detta med hjälp av jämförelser av proportionella par av storhetsvärden, efter det att dela och plats kontrasterats och generaliserats. Till skillnad från tidigare jämförelser motsvarar inget av värdena i dessa par av storhetsvärden ett direkt förhållande. Hur det ur dessa värden på *olika* sätt går att skapa ett direkt förhållande är det som nu fokuseras, ett förhållande med vars hjälp proportionella jämförelser görs. Att elever gör detta finns beskrivet i Lybeck och Johanssons (1978) (se kap 2.4.3) fenomenografiska studie där elevers olika sätt att i en intervjusituation uppfatta proportionella samband beskrivs. I detta arbete görs försök att möjliggöra urskiljning av denna aspekt i undervisningen (vilket även görs av Lybeck (1981) fast då relation till densitet undervisning i fysik på gymnasiet). Elevernas förklaringar på uppgift E i den tredje klassen indikerar att fler elever på olika sätt nu med hjälp av att först skapa ett direkt förhållande kan jämföra och avgöra om par av storhetsvärden står i proportion till varandra eller ej.

I tidigare forskning (Kaput & West, 1994; Karplus et al., 1983b) beskrivs att det krävs att förhållandet inom flera par av storhetsvärden kan uppfattas, vilket fordras i uppgift E, innan det går att uppfatta att detta förhållande är generellt för alla par av storhetsvärden i detta förhållande, ett k-värde eller proportionalitetskonstant. Detta var något som forskarlaget i denna studie strävade efter att eleverna skulle kunna uppfatta trots att det inte kan anses vara en nödvändig kunskap för att förstå och beräkna de uppgifter som behandlas i denna studie. Det fanns inte heller någon specifik uppgift där detta testas. Samtidigt indikerar resultaten att eleverna i den tredje klassen på olika sätt med hjälp av plats och dela ges möjligheten att urskilja ett direkt förhållande utifrån vilket jämförelser av proportioner görs. Dessa jämförelser begränsas inte såsom i den andra klassen till specifika storhetsvärden i multiplikationstabellen. Även om eleverna i den tredje klassen ännu inte uppfattat att förhållandet (proportionalitetskonstanten) inom en sammansatt storhet går att generalisera till ett oändligt antal par av storhetsvärden (vilket inte testas) generaliseras dynamisk proportionalitet med par av storhetsvärden som sträcker sig mellan noll och tusental i undervisningen.

> After all, one must experience more than one particular instance before those instances can possibly be experienced as sharing anything. (Kaput & West, 1994, p. 241)

7.2.5. Elever som inte utvecklar sin förståelse under ektionerna

I samtliga klasser är det några elever som inte ger uttryck för att utveckla sin förståelse av lärandeobjektet. I klasserna var det totalt 11 elever som hade 0-2 rätt av 5 på både för- och eftertest (7 elever i den 2:a klassen och 2 elever i den 1:a respektive den 3:e klassen). Ingen elev hade färre rätt på eftertest men 3 elever besvarade inte någon av frågorna korrekt vare sig på för- eller eftertest. Försök till svar gavs av samtliga elever på någon uppgift. Orsakerna till detta kan variera men de var alla med på lektionerna. Om deras tankar av någon anledning var riktade mot något annat än det matematiska innehållet på lektionerna går inte att avgöra. Om så inte var fallet, utan att de försökte förstå, är det väl värt att fundera över varför de inte ger uttryck för att lära. I tidigare forskning beskrivs uppbyggnadsproportion som ett förstadium till proportionellt resonemang av komplexare karaktär (Lamon, 2007). Urskiljning av uppbyggnadsproportion synliggörs inte strukturerat under någon lektionsserie utan tas för givet på så vis att denna strategi inte kontrasteras vare sig med statisk proportion eller dynamisk proportionalitet. Om en elev inte har lyckats urskilja någon av de sistnämnda strategierna överensstämmer inte diskussioner och uppgifter i undervisningen med den relevansstruktur eller mening som eleven uppfattar. Diskussionerna riskerar på så vis att bli obegripliga, vilket kan leda till att eleven övergår till att tänka på något annat mer meningsfullt.

I samtliga klasser fanns intentionen att försöka synliggöra uppbyggnadsproportion genom att med hjälp av värdetabeller addera ett par av storhetsvärden till exempel 9 m på 4 s tills man hittar en eftersträvad proportion till exempel 27 m på 12 s. Tanken var att denna strategi skulle synliggöras i relation till statisk strategi $\left(\frac{9\,m}{4\,s} = \frac{9\,m \cdot 3}{4\,s \cdot 3} = \frac{27\,m}{12\,s}\right)$ alternativt dynamisk strategi (om tiden är 12 s är längden $\frac{3\,m}{2\,s} \cdot 12$ s = 27 m). Att detta inte görs kan vara en anledning till att vissa elever inte lyckas utveckla sitt kunnande. En annan anledning kan vara att det vid proportionella jämförelser av statisk eller dynamisk karaktär görs multiplikativa jämförelser och att det då är en fördel att behärska gånger-tabellerna. Om så inte är fallet kan det vara svårt att parallellt fokusera problemets karaktär, beräkningsaspekter och resultatet av en multiplikation eller en division. En möjlig, men mindre trolig, anledning kan vara att elever inte förstår det innehåll som behandlas i de olika uppgifterna i studien. Innehållet har valts med hänsyn till att det inte skulle upplevas som okänt och därmed svårt att förstå. Hastighet, likformighet, jämförpris och vattenflöde är innehåll ur vilka exempel på sammansatta storheter som används i detta arbete hämtats. Innehåll som eleverna troligtvis hade erfarenheter av sedan tidigare. Densitet, ohms lag, kraft är exempel på innehåll som troligen hade upplevts som svårare varvid fokus hade riskerat att riktas mot det specifika innehållet i problemet snarare än proportionella samband. Att förmågan att resonera proportionellt kan ses som en portal, ett tröskelbegrepp, vilket av Pettersson (2008) beskrivs vara problematiskt att inledningsvis bemästra tycks resultaten från denna studie peka mot.

7.2.6. De matematiska begreppens betydelse i denna studie

Forskarlagets erfarenheter från denna studie är att en relevant terminologi behövs för att kunna kommunicera och tolka elevers uppfattningar. Under studien ägnades mycket tid åt att försöka precisera olika, framförallt engelska, begrepps betydelse eftersom bristen på relevanta svenska begrepp upplevdes påtaglig. Arbetet med att försöka precisera dessa begrepp har fortsatt efter studiens genomförande. Bristen på oklarheter i hur terminologi definieras med avseende på proportionella samband påpekas av (Lamon, 2007).

> Clearly, our failure to define terms is a deterent failure to progress in the research domain (Lamon, 2007, s.637)

Det tycks av citatet att döma som att det även inom den engelska ämnesdidaktiken finns ett behov av en stringent terminologi. Ett exempel på detta ges i forskningsöversikten ovan beträffande begreppen within och between (se kap. 2.3). Följande engelska begrepp har översatts då inget motsvarande svenskt begrepp har funnits: intensive quantity (sammansatt storhet), composed unit (par av storhetsvärden), within ratios and between ratios (inom- och mellan-förhållande), static and dynamic proportionality (statisk proportion och dynamisk proportionalitet), building up and building down (uppbyggnadsproportion). Dessa begrepp används inte i undervisning utan av forskalaget och mig i detta arbete i syfte att kunna kommunicera innehållets behandling under lektioner i termer av det intentionella, iscensatta och erfarna lärandeobjektet. Nya matematiska begrepp introducerades även för eleverna. Begreppet förhållande verkade vara ett okänt begrepp för de flesta elever i klasserna vilket eleverna påförtestet gav uttryck för då begreppet fanns med i uppgift D och E. Eleverna i denna studie går i år 8 och 9 vilket innebär att det inte kan tyckas som att de i tidig ålder, vilket Moseley (2005) poängterar vikten av, getts möjligheten att utveckla djupare förståelse för begreppen förhållande och proportionalitet. En tidig introduktion som enligt forskaren möjliggör jämförelser av perspektivet del-del och inte bara del-hel vilket är vanligt vid till exempel räkning med tal i bråkform. Resultaten från en studie av Howe et al. (2011) pekar mot vikten av synergi mellan det språk som används i klassen och det eller de begrepp förståelse ska skapas kring. Elever som aldrig tidigare undervisats om förhållanden, tycktes i deras studie bemästra och använda sig av begreppet förhållande relativt snabbt (ibid). I undervisning användes i denna studie framförallt begreppet, förhållande i relation till additivt samband och i den tredje klassen infördes även begreppen ”dela” och ”plats”. Dela och plats kan ha bidragit till att göra det lättare att urskilja de två beräkningsaspekterna statisk proportion och dynamisk proportionalitet. De sistnämnda begreppen var översatta och preciserade i början av studien men det var först vid planeringen av den tredje lektionsserien som de tydligare relaterades till varandra. Under lektioner användes även begrepp som lodrätt och vågrätt förhållande. Dessa begrepp är dock främst lämpade att använda sig av vid proportionella resonemang av uppgifter i form av till exempel en värdetabell. De säger inte heller något om vilken strategi, statisk (plats) eller dynamisk (dela) som används vid beräkning. Detta arbetes innehåll begränsas till proportionellt resonemang i relation till problem av jämförande karaktär och saknat värde, men hänsyn har tagits till att denna terminologi även ska överensstämma med ett utvidgat proportionalitetstänkande till exempel i form räta linjens funktion (ekvation) där förändringsfaktor efterfrågas eller uppgifter av skalär karaktär.

Min förhoppning är att studien kan bidra till fortsatt utveckling av den ämnesdidaktiska begreppsapparaten då denna studies resultat pekar mot att en förfinad terminologi behövs för att i detalj kunna beskriva hur elever uppfattar proportionella samband.

7.3. Fortsatt forskning

De resultat som framkommit i detta arbete bör tolkas med försiktighet, men slutsatsen att det är innehållets behandling som möjliggör elevernas lärande, har stöd i annan forskning. Innehållets behandling har i ett antal studier visat sig vara av avgörande betydelse (Marton & Pang, 2006; Marton & Tsui, 2004), även om andra faktorer också har betydelse för elevernas lärande. Det intressanta i mitt arbete är på vilket sätt de skilda sätt att möjliggöra elevernas lärande i de olika klasserna skiljer sig åt beroende på hur detta innehåll behandlats. Denna skillnad speglas i elevernas resultat inte enbart i termer av rätt och fel svar utan även i hur proportionella samband uttrycks såväl i lektionssammanhanget som i deras lösningar. Som jag ser det borde det finnas ett intresse av, framförallt inom det ämnesdidaktiska fältet, att studera dessa skilda betingelser i större skala, det vill säga i andra klasser och praktiker, för att bygga vidare på och pröva de resultat som presenterats i detta arbete. Genom att studera huruvida innehållets behandling, avseende de aspekter som ansågs vara kritiska för de elever som ingick i denna studie, också är avgörande för andra elever i andra skolkontexter och med andra lärare finns en möjlighet att generalisera resultaten. Avslutningsvis kan jag se några tänkbara förlag på fortsatt forskning. Dessa förslag baseras på de erfarenheter som gjorts i detta arbete.

Ett tänkbart alternativ är som nämnts att testa variationsmönster av liknande karaktär som i denna studies tredje klass i andra sammanhang och andra klasser. Dessa variationsmönster har skapats i syfte att urskilja kritiska aspekter av lärandeobjektet och då de tycks gagna elevernas lärande i den tredje klassen är det rimligt att anta att så även kan vara fallet i andra klasser. Ett annat alternativ är att förfina de resultat som framkom och till exempel studera hur uppbyggnadsaspekten kan påverka elevernas förståelse ytterligare i positiv riktning. Detta är en aspekt som till stora delar togs för givet i den här genomförda studien. Med hjälp av statisk och dynamisk beräkningsaspekt hade det varit möjligt att kontrastera och variera denna aspekt mot en i övrigt invariant bakgrund.

Det skulle även vara intressant att studera urskiljning av multiplikativt samband (förhållande) med hjälp av kontrastering av additivt samband i yngre åldrar, det vill säga studera progressionen i hur elevernas förståelse av innehållet utvecklas över tid. Eventuellt kan detta göras i relation till begrepp som sammansatt storhet och system av sådana. Denna studie genomfördes i år 8 och 9 men om elever ges möjligheten att urskilja och skilja på multiplikativa och additiva samband redan i skolår 2-3 kan det vara rimligt att anta att en studie liknande denna kan göras i år 4-6. En longitudinell studie där elevernas lärande följs i ett längre tidsperspektiv skulle vara intressant att genomföra.

I tidigare forskning beskrivs att elever i problem av proportionell karaktär uppfattar additiva samband och att de i takt med stigande ålder uppfattar additiva problem som proportionella samband (Fernández et al., 2012; Van Dooren et al., 2010). I detta arbete används inte en kombination av proportionella och additiva uppgifter vare sig i undervisning eller test. Det skulle vara intressant att studera huruvida elever med undervisning som enbart fokuserar proportionella samband, men som samtidigt liksom i denna kontrasterar multiplikativa och additiva samband, visar för resultat att inte lösa additiva uppgifter proportionellt. Alternativt skulle en utvidgad studie, där proportionella samband först beaktas på ett liknande sätt som görs i denna studie för att sedan i direkt anslutning till detta bygga på med ytterligare lektioner där uppgifter av additiv och proportionell karaktär blandas.

Det steg som tagits för att förstå lärandets betingelser avseende elevers förståelse av proportionella samband har resulterat i intressanta resultat, men samtidigt väckt nya intressanta forskningsfrågor. Att det finns mer att beforska kan jag med utgångspunkt från de erfarenheter vi gjort i detta arbete därför utan tvekan konstatera.

Referenser

Adamson, B., & Walker, E. (2011). Messy collaboration: Learning from a learning study. *Teaching and Teacher Education, 27*(1), 29-36.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132-144.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New york: Macmillian.

Bentley, P. O., & Bentley, C. (2011). *"Det beror på hur man räknar!": Matematikdidaktik för grundlärare*. Stockholm: Liber.

Bright, G. W., Joyner, J. M., & Wallis, C. (2003). Assessing proportional thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(3), 166-172.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 126-139.

Chik, P. M. P., Lo, M. L., & Pong, W. Y. (2005). *For each and everyone: Catering for individual differences through learning studies*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 297-317.

Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7 ed.). London: Routledge.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological Issues. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Elliot, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 108-125.

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change* (Vol. 49). Philadelphia: Open University Press.

Evers, C. W., & Wu, E. H. (2006). On generalising from Single case Studies: Epistemological reflections. *Journal of Philosophy of Education, 40*(4), 511-526.

Fernandez, C., Cannon, J., & Chokshi, S. (2003). A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19*(2), 171-185.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2012). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education, 27*(3), 421-438.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D.Reidel.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: D. Reidel.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage.

Hart, K. M. (1981). Ratio and Proportion. In K. M. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 88 - 101). London: John Murray.

Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would It look like and how can we get one? *Educational Researcher, 31*(5), 3-15.

Hilton, A., Hilton, G., Dole, S., & Goos, M. (2013). Development and application of a two-tier diagnostic instrument to assess middle-years students' proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 25*(4), 523-545.

Holmqvist, M. (2006). *Lärande i skolan: Learning study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur.

Holmqvist, M. (2011). Teachers' learning in a learning study. *Instructional Science, 39*(4), 497-511.

Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(2), 391-417.

Häggström, J. (2012). *Learning study : en guide*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Johansson, B., & Lybeck, L. (1978). *Proportions- och proportionalitetstänkande hos gymnasieelever, åk 1, N- och T-linjerna*. Mölndal: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet.

Kaput, J., & West, M. M. (1994). Missing value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In I. G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235 -287). New York: State of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983a). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983b). Early adolescents' proportional reasoning on ‘rate’ problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233.

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1: Grundläggande aritmetik*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Kiselman, C. O., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics, 103*(2), 92-98.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned : Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Kullberg, A. (2012). Students’ open dimensions of variation. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 168-181.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41-61.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 170-193.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Malwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Larsson, S. (2009). A pluralist view of generalization in qualitative research. *International Journal of Research & Method in Education, 32*(1), 25-38.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lewis, C. (2000). *Lesson study: The core of Japanese professional development*. New Orleans: ERIC Clearinghouse.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lo, M. L., & Marton, F. (2011). Towards a science of the art of teaching: using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(1), 7-22.

Lobato, J., Ellis, A. B., & Charles, R. I. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lobato, J., Orrill, C., Druken, B., & Jacobson, E. (2011). *Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), New Orleans, LA. hämtad 21 Januari 2014 från http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/products/workshops/AERA2011/Lobato_Orrill_Druken_Erikson_AERA_2011.pdf

Lundberg, A. (2011). *Proportionalitetsbegreppet i den svenska gymnasiematematiken: En studie om läromedel och nationella prov*. Linköping: LiU-Tryck.

Lybeck, L. (1981). *Arkimedes i klassen : En ämnespedagogisk berättelse*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Magnusson, J. (2012). Examinationsuppgift vid högskolan i Jönköping.

Marton, F. (1981). Phenomenography: Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science, 10*(2), 177-200.

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. New York, NY: Routledge.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning sciences, 15*(2), 193-220.

Marton, F., & Pong, W. Y. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher EducationRresearch & Development, 24*(4), 335-348.

Marton, F., & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 335-368.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: An "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 199-218.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology, 27*(1), 75-92.

Morris, A. K., & Hiebert, J. (2011). Creating shared instructional products an alternative approach to improving teaching. *Educational Researcher, 40*(1), 5-14.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 37-69.

Olteanu, C., & Lennerstad, H. (2011). *Lesson study och Learning study samt IKT i matematikundervisningen: en utvärdering av matematiksatsningen*. Stockholm: Skolverket.

Olteanu, C., & Olteanu, L. (2013). Enhancing mathematics communication using critical aspects and dimensions of variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(4), 513-522.

Pang, M. F. (2003). Two faces of variation: on continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research, 47*(2), 145-156.

Pang, M. F., & Lo, M. L. (2012). Learning study: helping teachers to use theory, develop professionally, and produce new knowledge to be shared. *Instructional Science, 40*(3), 589-606.

Pettersson, K. (2008). *Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel*. Göteborg: Matematiska vetenskaper Chalmers Tekniska Högskola.

Polanyi, M. (1963). *Tacit knowledge*: Terry lectures.

Pring, R. (2004). *Philosophy of educational research* (2 ed.). London: Continuum.

Runesson, U. (2006). What is it possible to learn? On variation as a necessary condition for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research, 50*(4), 397-410.

Runesson, U. (2008). Learning to design for learning: The potential of learning study to enhance learning on two levels: teachers' and students' learning. In I. T. W. P. Sullivan (Ed.), *Knowledge and beliefs in mathematics and teaching development*. Rotterdam: Sense Publishers.

Runesson, U., & Gustafsson, G. (2012). Sharing and developing knowledge products from Learning Study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(3), 245-260.

Shadish, W. R., Cook, T. D., & Campbell, D. T. (2002). *Experimental and quasi-experimental designs for generalized causal inference*. New York: Houghton Mifflin Company.

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L., & Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher, 32*(1), 25-28.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(4), 579-599.

Skolverket. (2008). *TIMMS 2007- Uppgifter i matematik, årskurs 8 (rapport 323)*. Stockholm: Skolverket.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 127-155.

Stenhouse, L. (1981). What counts as research? *British Journal of Educational Studies, 29*(2), 103-114.

Stiegler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: The Free Press.

Strömdahl, H. (1998). Fenomen och egenskap: De fysikaliska storheterna i didaktisk belysning. *Pedagogisk Forskning i Sverige, 3*(2), 104-112.

Svanteson Wester, J. (2014) Hur kan dubbelt så långt bli fyra gånger större? Göteborg, Göteborgs universitet. GUPEA: http://hdl.handle.net/2077/37230

Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien*. Lund: Studentlitteratur.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). Albany, NY: SUNY Press.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360-381.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. s.141-161). Hillsdale, N.J: National Council of Teachers of Mathematics.

Vetenskapsrådet. (2011). *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Umeå: Umeå universitet.

Åkerlind, G. S. (2012). Variation and commonality in phenomenographic research methods. *Higher Education Research & Development, 31*(1), 115-127.

Bilagor

Bilaga 1 För- och eftertest uppgifter som används i samtliga klasser.

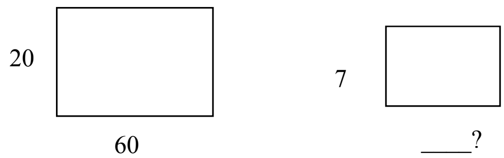
Förtest Namn:

1. Ove går 6 meter på 4 sekunder. Hur lång tid tar det för Gun att gå 15 meter om hon går i samma hastighet som Ove. Förklara på något sätt hur du kom fram till ditt svar.

2. 300 g dillchips kostar 24 kr. 200 g potatischips kostar 18 kr. Vilken påse ska du välja om du vill ha mest chips för pengarna? Visa på något sätt hur du löser uppgiften.

3. I en klass arbetade man med likformig förstoring och förminskning. Det betyder att alla längder i en figur ska förminskas eller förstoras lika mycket. Vid ett tillfälle utgick man ifrån en rektangel med sidorna 20 cm och 60 cm. En elev ritade då den högra figuren. Skriv in rätt längd på långsidan.

a)



O.b.s. Ej i skala. Det går inte att mäta eller jämföra längder i figurerna

Visa på något sätt hur du löser uppgiften.

Vid ett annat tillfälle utgick man ifrån en rektangel med sidorna 8 cm och 10 cm.

En elev ritade då figuren till höger. Skriv in rätt längd på kortsidan.

b)

Visa på något sätt hur du löser uppgiften

4. I en buss är förhållandet mellan barn och vuxna är 5:4

   Ringa in alla alternativ som du tycker stämmer för hur många barn och vuxna det kan vara i bussen?

15 barn och 14 vuxna 10 barn och 8 vuxna 8 barn och 10 vuxna

15 barn och 6 vuxna 20 barn och 16 vuxna

5. Tabellen nedanför visar antalet sålda Iphones och Androider i fyra affärer.

Affär	*Iphone*	*Android*
1	*12*	*9*
2	*14*	*11*
3	*16*	*12*
4	*18*	*15*

I vilka två affärer är förhållandet mellan antalet Iphones och antalet Androider lika? (Ringa in ditt svar)

A) 1 och 2 B) 1 och 3 C) 2 och 3 D) 2 och 4 E) 1 och 4

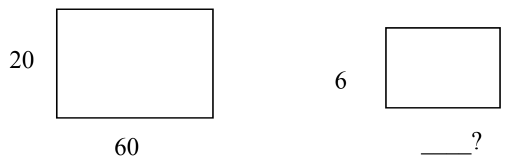
Förklara på något sätt hur du kom fram till ditt svar

Eftertest Namn:

1. Arno går 8 meter på 4 sekunder. Hur lång tid tar det för Marianne att gå 20 meter om hon går i samma hastighet som Arno. Förklara på något sätt hur du kom fram till ditt svar.

2. 300 g dillchips kostar 18 kr. 200 g potatischips kostar 14 kr. Vilken påse ska du välja om du vill ha mest chips för pengarna? Visa på något sätt hur du löser uppgiften.

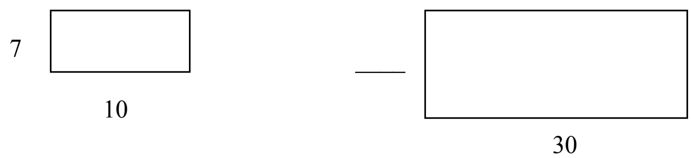
3. I en klass arbetade man med likformig förstoring och förminskning. Det betyder att alla längder i en figur ska förminskas eller förstoras lika mycket. Vid ett tillfälle utgick man ifrån en rektangel med sidorna 20 cm och 60 cm. En elev ritade då den högra figuren. Skriv in rätt längd på långsidan.



O.b.s. Ej i skala. Det går inte att mäta eller jämföra längder i figurerna

Visa på något sätt hur du löser uppgiften.

Vid ett annat tillfälle utgick man ifrån en rektangel med sidorna 7 cm och 10 cm. En elev ritade då figuren till höger. Skriv in rätt längd på kortsidan.



Visa på något sätt hur du löser uppgiften

4. I en buss är förhållandet mellan barn och vuxna är 5:3

   Ringa in alla alternativ som du tycker stämmer för hur många barn och vuxna det kan vara i bussen?

15 barn och 13 vuxna 10 barn och 6 vuxna 6 barn och 10 vuxna

15 barn och 7 vuxna 20 barn och 12 vuxna

5. Tabellen nedanför visar antalet marsvin och hamstrar i fyra djuraffärer.

Affär	*Marsvin*	*Hamster*
1	*12*	*9*
2	*14*	*11*
3	*16*	*12*
4	*18*	*15*

I vilka två affärer är förhållandet mellan antalet marsvin och antalet hamstrar lika?
(Ringa in ditt svar)

A) 1 och 2 B) 1 och 3 C) 2 och 3 D) 2 och 4 E) 1 och 4

Förklara på något sätt hur du kom fram till ditt svar

Bilaga 2 Uppgift som görs i klass 1 och 2 men som stryks då den ej tycks fånga det som avses, om eleverna tycks kunna byta beräkningsstrategi.

I en undersökning jämförs vikten av tre olika chokladkakor genom att man väger 6 bitar (rutor) av varje chokladkaka. Så här blev resultatet:

Choklad A: 6 bitar väger 21 g

Choklad B: 6 bitar väger 24 g

Choklad C: 6 bitar väger 25 g

a) Hur mycket väger 15 bitar av choklad A? Visa på något sätt hur du löser uppgiften.

b) Hur mycket väger 13 bitar av choklad B? Visa på något sätt hur du löser uppgiften.

c) Hur mycket väger 30 bitar av choklad C? Visa på något sätt hur du löser uppgiften.

Bilaga 3 Uppgift som används i klass 2 och 3 men som stryks då den testar storleksordna förhållande, vilket ej beaktas i denna studie.

Mini förtest Namn:

Stina, Putte och Emma blandar olika mycket chokladpulver i mjölken.

Stina rör ner 3 skedar i 2 dl mjölk
Putte vill ha 4 skedar i 3 dl mjölk
Emma vill ha 6 skedar i 4 dl mjölk

Vem får den mest koncentrerade (starkaste) chokladdrycken?

Mini eftertest Namn:

Mattias, Annika och Martin blandar olika mycket chokladpulver i mjölken.
Martin rör ner 3 skedar i 5 dl mjölk
Annika vill ha 4 skedar i 6 dl mjölk
Mattias vill ha 6 skedar i 10 dl mjölk

Vem får den mest koncentrerade (starkaste) chokladdrycken?

Bilaga 4 Tillstånd för deltagande i studie

GÖTEBORGS UNIVERSITET
CENTRUM FÖR UTB.VET. OCH LÄRARFORSKNING

Hej, [redacted]

Jag heter Joakim Magnusson [redacted] men är numera doktorand på Göteborgs universitet där jag arbetar med ett forskningsprojekt, som handlar om matematikundervisning. Du kanske känner till att svensk matematikundervisning debatteras mycket i media och att fokus ligger på att alltför många elever lär sig för lite matematik. För att kunna utveckla matematikundervisningen behöver vi som forskare få veta mer om den och det är i detta sammanhang som jag planerar att filma tre av matematiklektionerna i ditt barns klass. Lektionerna har planerats tillsammans med ditt barns lärare i matematik och ingår i den ordinarie undervisningen. Lärarna har stor erfarenhet av både undervisning och av att tillsammans analysera den egna undervisningen vilket gynnar min studie. Till största delen är det läraren som filmas eftersom det är lärarens behandling av innehållet som är av intresse för studien, men vid gruppdiskussioner och svep med kameran över klassrummet kan ditt barn vara med på film. Några av de elever som vill blir även intervjuade före och efter lektionerna. Lektionerna analyseras för att på sikt kunna bidra med kunskap om vad i undervisning som möjliggör lärande av det specifika innehåll som behandlas på lektionen. När studien är klar kommer den att presenteras i bokform för lärare och forskare i pedagogik. Materialet kan även användas i utbildning av lärare. Varken ditt barns namn eller skola kommer att nämnas och medverkan är frivillig.

Jag hoppas att du och ditt barn ställer dig positiv till att delta i detta forskningsprojekt. Har du frågor eller undrar över något, går det bra att kontakta mig via telefon eller mail.

Vänligen

Joakim Magnusson
doktorand vid Institutionen för didaktik och pedagogisk profession (IDPP), Göteborgs universitet

Telefon: 0708 29 71 18
Mail: joakim.magnusson@gu.se

Mina handledare är:
docent Mona Holmkvist
Fil.dr. Johan Häggström

Elevens namn:________________________________ klass: ____________________

□ Ja, mitt barn får delta i forskningsprojektet. Filmen får användas i forskning och vid utbildning av lärare.

□ Nej, mitt barn deltar inte i forskningsprojektet.

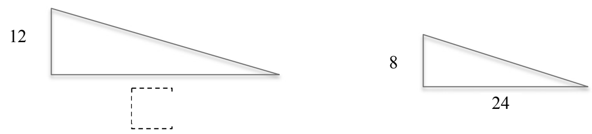
Förälders underskrift:____________________________________

Elevs underskrift:____

Institutionen för didaktik och pedagogisk profession (IDPP)
Box 100, SE 405 30 Göteborg
031 786 0000 (vx)
www.ufl.gu.se

Bilaga 5 Avslutande uppgift i samtliga klasser. I klass 3 är de likformiga trianglarna utbytta mot likformiga rektanglar (se Figur 26, Lektion 3.4-Moment 19)

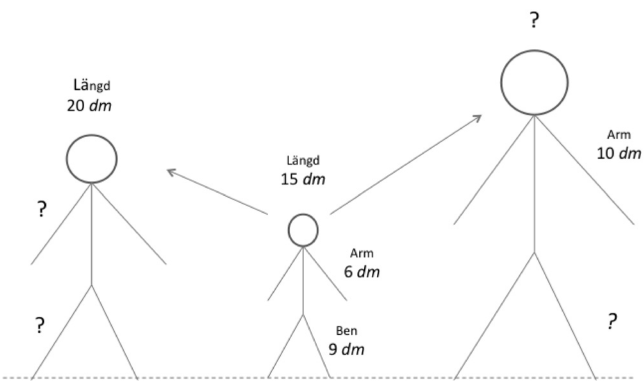
Gruppuppgift - samma förhållande



A) Försök förklara på två olika sätt hur ni bestämmer längden på triangeln.

B) En säck potatis som väger 6 kg kostar 9 kr. Vad kostar en säck med samma sorts potatis som väger 20 kg?
Försök först att lösa uppgiften själv, jämför sedan era olika lösningar

C) Alla längder hos människorna har förstorats lika mycket. Bestäm de okända längderna. Försök förklara på två olika sätt hur ni bestämmer en längd.



Bilaga 6 Avslutande uppgift i klass 1 där eleverna ska försöka gruppera olika beräkningsstrategier

Ove går 6 meter på 4 sekunder. Hur lång tid tar det för Gun att gå 15 meter om hon går i samma hastighet som Ove?

A

$\underset{12}{6 \cdot 2} + \underset{3}{6 \cdot 0,5} = 15$

$\underset{8}{4 \cdot 2} + \underset{2}{4 \cdot 0,5} = 10$

svar 10 sek

B

Tiden är 2/3 av meterna

$\frac{2}{3}$ av 15 är 10 svar: 10 s

C

För $4s \cdot 2 = 8m$ $\frac{6m}{2} = 3m$

svar: 11 s tar det för Gun

D

$6 \cdot 2,5 = 15$ meter

$4 \cdot 2,5 = 10$ sekunder

E

$\frac{6m}{4} = \frac{4sek}{4} \rightarrow 1,5m = 1s$

$1,5m \cdot 10 = 1s \cdot 10 \rightarrow 15m = 10s$

F

12m på 8s + 3m på 2s = 15m på 10s

G

$\frac{6}{4} = 1,5$ = 1m på 1,5 s

$1,5 \cdot 15 = 22,5$

svar Det tar 22,5 s

H

$6 + 6 + \frac{6}{2} = 15$

$4 + 4 + \frac{4}{2} = 10$

Det tar 10 s

I

$3 \cdot 6m = 18m$ $\frac{6m}{2} = 3m$

$3 \cdot 4s = 12s$ $\frac{4s}{2} = 2s$

$18m - 3m = 15m$

$12s - 2s = 10s$

J

$\frac{6m}{2} = 3m$ $\frac{4s}{2} = 2s$

$3m \cdot 5 = 15m$

$2s \cdot 5 = 10s$

PROPORTIONELLA SAMBAND

Innehållets behandling och elevernas lärande

Proportionella samband beskrivs ofta som ett svårt och komplext innehåll att undervisa om. Elevers svårigheter att lösa proportionella problem och hur dessa svårigheter kan diagnostiseras är väl dokumenterat i tidigare forskning. Mindre vanligt är studier som beskriver hur dessa svårigheter kan behandlas i undervisningen så att lärande möjliggörs. Syftet med denna studie är att undersöka vilka aspekter av proportionella samband som tycks vara kritiska för de deltagande eleverna att urskilja för att utveckla kunskap om dessa samband. Skillnader mellan *vilka* aspekter som erbjuds och hur de synliggörs i de klasser som deltog i studien analyseras i relation till elevernas lärande. Empirin baseras på en learning study, där innehållets behandling, med utgångspunkt i variationsteorin, revideras och förfinas i en iterativ process. Resultaten från studien antyder att den ordning och de värden som kritiska aspekter behandlas med under lektionerna är avgörande för att utveckla elevers förståelse av proportionella samband. Något som ytterligare tycks bidra till att elever urskiljer specifika aspekter av innehållet är att elevers kontrasterande uppfattningar uttrycks i undervisningen. Utifrån denna studie är kritiska aspekter av innehållet t.ex. skillnaden mellan additiva och multiplikativa samband och att det i en proportion finns två förhållanden att beakta. I diskussionsdelen förs även resonemang om att studien kan bidra till fortsatt utveckling av den ämnesdidaktiska begreppsapparaten då denna studies resultat pekar mot att en förfinad terminologi behövs för att i detalj kunna beskriva hur elever uppfattar proportionella samband.

Joakim Magnusson delar sin tid mellan att arbeta som ämnesdidaktisk lärarutbildare i matematik vid Göteborgs universitet och som grundskollärare i matematik och NO på en 6 – 9 skola.

GUPEA - Göteborgs universitets publikationer - elektroniskt arkiv:
http://hdl.handle.net/2077/37219