HUR KAN DUBBELT SÅ LÅNGT BLI FYRA GÅNGER STÖRRE?

Jenny Svanteson Wester

INSTITUTIONEN FÖR DIDAKTIK OCH PEDAGOGISK PROFESSION

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Hur kan dubbelt så långt bli fyra gånger större?

Hur kan dubbelt så långt bli fyra gånger större?

Jenny Svanteson Wester

GÖTEBORGS UNIVERSITET

© JENNY SVANTESON WESTER, 2014

Licentiatuppsats i pedagogiskt arbete vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Utbildningsvetenskapliga fakulteten, Göteborgs universitet

Licentiatuppsatsen finns i fulltext i GUPEA – Göteborgs universitets publikationer – elektroniskt arkiv, i samlingen "Licentiatuppsatser/ Institutionen för didaktik och pedagogisk profession"
http://hdl.handle.net/2077/37230

Denna licentiatuppsats har genomförts inom ramen för Forskarskolan Learning Study – undervisningsutvecklande ämnesdidaktisk forskning. Forskarskolan, som leder fram till en licentiatexamen, är ett samarbete mellan Högskolan för lärande och kommunikation, Högskolan i Jönköping (värdhögskola), Göteborgs universitet samt Stockholms universitet och finansieras av Vetenskapsrådet (projektnummer 2011-5273) inom ramen för regeringens satsning på att forskarutbilda lärare.

Omslag, foto: Martin Wester

Sammanfattning

Titel: Hur kan dubbelt så långt bli fyra gånger större?
Författare: Jenny Svanteson Wester
Språk: Svenska med en engelsk sammanfattning
GUPEA: http://hdl.handle.net/2077/37230
Nyckelord: proportionalitet, linjära samband, ickelinjära samband, geometri, skala, likformighet, student, elev, variationsteori, learning study

Tidigare forskning har visat att majoriteten av 12-16-åriga elever har en tendens att utgå ifrån ett linjärt samband då de löser uppgifter av icke linjär karaktär. Fenomenet, som kallas 'illusionen av linjäritet', kommer av att elever då de ska förstora eller förminska flerdimensionella geometriska figurer intuitivt tenderar att utgå ifrån att, om alla sidor görs dubbelt så långa, då blir även arean dubbelt så stor (De Bock et.al, De Bock et al. 1998; De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002; De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren, & Claes, 2003).

Huvudsyftet med denna studie har varit att undersöka hur innehållets behandling avseende förstoring och förminskning av geometriska figurer i relation till begreppet skala kan bidra till att utveckla elevernas förmåga att urskilja det linjärt proportionella – och det icke linjärt proportionella sambandet simultant.

Forskningsansatsen utgörs av en learning study som genom dess iterativa process, erbjuder ett empiriskt material som kan bidra till en djupare förståelse för relationen undervisning kontra lärande avseende det aktuella ämnesinnehållet. Learning study har en teoretisk utgångspunkt, vilket för den här studien är ett variationsteoretiskt perspektiv Marton (2014). Genom den iterativa processen, där resultaten från den första cykeln ligger till grund för utformningen av nästa, fanns möjlighet till ökad kunskap kring det komplexa lärandeobjektet; förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer utifrån begreppet skala. Studien genomfördes på en grundskola och innefattade totalt 45 elever i åldern 14-15 år samt tre lärare.

Resultatet av studien beskriver på vilket sätt innehållets behandling i klassrummet, med fokus på iscensatta mönster av variation, påverkade elevernas lärande. Analysen är baserad på de videoinspelade lektionerna, transkriptionen av konversationen mellan läraren och eleverna samt elevernas

resultat på för- och eftertesten. Den största kvalitativa skillnaden avseende elevernas lärande är i vilken utsträckning eleverna har lyckats urskilja längdförändringen och areaförändringen simultant i samma figur när de förstorar tvådimensionella geometriska figurer. Resultatet visar hur elevernas lärande ökar markant under den tredje cykeln, vilket indikerar att innehållets behandling i denna cykel var mer effektiv. Aktiviteterna under tredje cykeln genomfördes mer avsiktligt systematiskt, både vad gäller i vilken ordning de kritiska aspekterna belystes samt hur relationen mellan aspekterna var explicit problematiserade vid upprepade tillfällen under lektionen. Ett annat intressant resultat var att lärarna uppmuntrade eleverna att kommunicera om innehållet och genom att göra det fick lärare och elever möjlighet att gemensamt iscensätta mönster av variation där elevernas missuppfattningar eller sätt att se på innehållet kunde bli, inte bara visualiserat utan också problematiserat, vilket ledde till att de kritiska aspekterna explicit kunde bli urskilda. Eleverna fick också möjlighet att motivera sina svar samt att mer explicit uttrycka vad de hade urskilt.

Summary

Title: How can twice as long be four times bigger?
Author: Jenny Svanteson Wester
Language: Swedish with a Summary in English
GUPEA: http://hdl.handle.net/2077/37230
Keywords: proportionality, linear model, non-linear model, geometry, scale factor, similarity, student, pupil, the theory of variation, learning study

Previous research has show that a large majority of 12- to 16-year old students have a tendency to improperly apply the linear model when solving non-linear problems about the relation between lengths and area of enlarged and reduced plane geometric figures (De Bock et al., 1998). A major deficiency associated with the passage from one-dimensional to two-dimensional units is linked to 'the illusion of linearity', an explicit belief in a linear relation between lengths and areas of similarly enlarged or reduced figures. The main aim of this study was to investigate whether it could contribute to students' deeper understanding of scaling of two-dimensional geometric figures when they were given the opportunity to simultaneously discern aspects related to linear and quadratical scaling.

A Learning Study approach was adopted to improve instruction and the students' learning outcomes. The interest was to, based on a perspective of Variation Theory, study how mathematical content was treated regarding the offered aspects of the object of learning and to what extent the instruction was powerful in helping the students to overcome the "illusion of linearity" and develop their understanding of the object of learning. In total 45 students, aged 14-15 years and three teachers participated.

The results of the study describe in what way the differences in treatment of the content handled in the classroom affect the students' learning. The analysis is based on the videotaped lessons, the transcription of the conversations between the teacher and the students, and the students' results at pre and post-tests. The major qualitative difference in student learning is to what extent the students managed to discern the differences in change of length and area in the same figure simultaneously when scaling two-dimensional geometric figures.

The results show how the students' learning outcome increased during the third cycle, which suggests that the handling of the content in this cycle was more powerful. The activities that took place during the third cycle was more intentionally systematic, both regarding in what order the critical aspects were highlighted, and how the relationship between them was explicitly problematized in several occasions. Another interesting finding is that the teachers encouraged the students to communicate about the content and by doing so the teachers and students were given an opportunity to jointly enact patterns of variation where students' misconceptions, or way of looking at the content, could be, not only visualized, but also problematized and the critical aspects could explicitly be discerned. The students also got the opportunity to more explicitly express what they had discerned and were able to justify their answers more distinctly.

Förord

Nu närmar jag mig slutet av processen. Det är mitt namn som står längst fram på denna licentiatuppsats och jag tar fullt ansvar för allt som är skrivet. Men att skapa denna text är inte på något sätt ett enmansjobb, även om jag många gånger känt mig ensam och instängd i min skrivar-och tänkarbubbla, utan snarare resultatet av ett samarbete mellan mig och flera andra. Jag tänkte därför använda mitt förord till att tacka er som stått vid min sida under resans gång.

Jag vill börja med att tacka Siw Wallin och min rektor Srdjan Muratovic. Siw, du var den som lyfte fram forskarutbildningen som en möjlig väg för mig att få utvecklas vidare i min lärargärning och Srdjan, du var den som slutligen gav mig möjlighet att genomföra utbildningen. Ni såg mitt brinnande intresse och gav mig möjlighet att få fördjupa mig i undervisningens komplexitet. Tuula Maunula, även du har ett finger med i spelet, som genom din erfarenhet visat på vilken ny och spännande och intressant värld som öppnar sig under en forskarutbildning. Tack!

Min huvudhandledare, Mona Holmqvist Olander, ett stort tack till dig. Du har varit den som stått vid min sida genom hela processen och tydligt visat att du trott på mig även i de stunder då jag tyckt att det varit tufft. Ett stort tack även till min biträdande handledare, Cecilia Kilhamn för dina värdefulla synpunkter och givande diskussioner avseende det matematiska innehållet. Camilla Björklund, stort tack för din noggranna genomläsning inför min examination. Inom den nationella forskarskolan för learning study har jag haft förmånen att i slutskedet av processen få Lisa Björklund Boistrup, Angelika Kullberg och Ingrid Carlgren som kritiska granskare av min text. Ni var en trio som kompletterade varandra väl och gav mig värdefull kritik inför slutspurten med min text. Ett tack även till mina kollegor inom både forskarskolan och universitet.

Sist, men absolut inte minst, ett varmt tack till mina lärarkollegor och deras elever. Martin, Christina och Mattias, ni har tillsammans med era elever, givit mig förutsättningarna för denna studie. Dessutom ett särskilt tack till dig Mattias för all hjälp med film-och bildhantering.

Avslutningsvis vill jag även tacka min underbara familj, Martin, Svante och Elna. Ni har sett till att jag inte har svävat iväg alltför långt och stannat alltför länge i min skrivar- och tänkarbubbla. Och Mamma, tack för alla middagar som stått på bordet då tiden varit knapp.

Jenny Svanteson Wester
Göteborg, oktober 2014

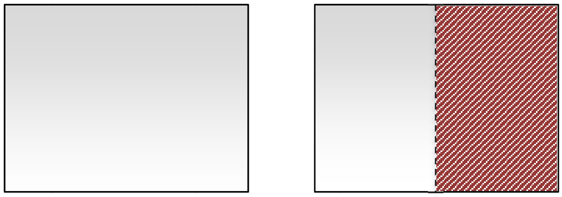
Innehåll

KAPITEL 1: INLEDNING

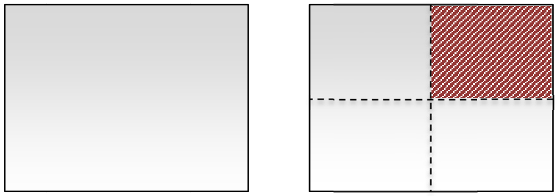
Den forskning som presenteras i den här avhandlingen är ett exempel på forskning i forskarens egen praktik och kan därmed beskrivas som praxisutvecklande forskning. Det fenomen som studeras är ett genuint problem så till vida att de deltagande lärarna själva upplevt det som ett problem och därför vill studera det aktuella fenomenet. Att det finns risker med att forska i sin egen praktik bör man vara väl medveten om. Både forskare och lärare kan ha förutfattade meningar och ta saker för givet när det gäller, som i det här fallet, elevernas kunnande och agerande. En strategi för att handskas med detta dilemma kan, uttrycker Nilsson, (2005) vara att låta det gå en tid mellan datainsamling och analys för att under denna tidsperiod förhoppningsvis skapa en distans till materialet. På så vis möjliggörs att lärarperspektivet och forskningsperspektivet kan komplettera varandra på ett tillfredställande sätt.

Grunden till huvudstudien i den här avhandlingen utgörs av en tidigare genomförd learning study på en grundskola i Göteborg inom det avgränsade innehållet proportionalitet, med fokus på begreppet skala. I denna studie, liksom i flertalet learning studies hittills, var variationsteorin den teori om lärande som användes. I ett variationsteoretiskt perspektiv ses lärande som en förändring i sätt att se på något och vad det innebär att kunna ett specifikt innehåll (Marton & Booth, 1997). Forskningsintresset är att bidra med ytterligare kunskap avseende undervisning av detta matematiska ämnesinnehåll. Mot bakgrund av den tidigare studien definieras ett nytt och mer avgränsat matematiskt innehåll, ett s.k. lärandeobjekt. De kritiska aspekter som identifierades under den tidigare genomförda studien, d.v.s. det som eleverna måste urskilja för att det avsedda lärandet ska ske ingår initialt i föreliggande studie, men här som presumtiva kritiska aspekter. Runesson och Kullberg (2010) argumenterar för att lärarna, när de har bättre förståelse för vad som kan vara kritiskt i ett innehåll, inte bara kan använda detta utan även kan hitta och synliggöra nya kritiska aspekter. Lärare som tar över kritiska aspekter får en riktning eller vägledning för planerandet och antagandet för hur innehållet ska behandlas under lektionerna, men inte en explicit lektionsplanering att följa, istället ges lärare möjlighet att lägga till nya och unika dimensioner av variation (Runesson & Gustavsson, 2012). En learning study kan således ses som en modell vilken kan bidra med en delad kunskapsproduktion, ett kunskapssystem likt den som förs fram av Morris och Hiebert (2011), d.v.s. som ett system för att lösa den stora variation som finns i undervisningskvaliteter från en skola till en annan.

Föreliggande studie har delvis sin utgångspunkt i två sekvenser ur den under läsåret 2010/2011 genomförda learning studien. Den första av dessa två sekvenser utspelar sig under första cykeln i studien. Eleverna får i uppgift att avgöra i vilken skala ett gem är avbildat i. Avbilden får de på ett papper och originalet är ett verkligt gem. Eleverna visste inte längden på gemet och de hade heller inte tillgång till linjal. Två olika elevsvar lyfts vid redovisningen av uppgiften under lektionen. En grupp elever svarar att gemet har blivit förstorat tre gånger och att skalan är 3:1. Den andra gruppen elever svarar att gemet hade förstorats nio gånger och visar tydligt hur de resonerat genom att lägga det lilla gemet på det på pappret avbildade gemet och genom detta illustrera att det precis *får plats* nio små gem i det stora gemet och att skalan i avbildningen istället borde vara 9:1 Eleverna öppnade under den här sekvensen upp en ny dimension av variation avseende skala, d.v.s. att skalan kan fokusera längder eller areor och dess förändringar. Inför cykel två och tre reviderade lärarna lektionsplaneringen och gjorde en helt ny planering för att skapa möjligheter för eleverna att separera längdförändring från areaförändring vid förstoring och förminskning av rektanglar utifrån en given längdskala, vilket de anade kunde vara en kritisk aspekt för det aktuella lärandeobjektet. Under lektion tre inträffar en liknande situation. En elevgrupp har fått i uppgift att förminska ett A4-papper i skala 1:2. Eleverna i gruppen är dock inte överens och då de ska redovisa, visar de upp två olika svar samtidigt och följande diskussion förs i klassen där Magnus grupp visar upp sina båda förslag då A4-pappret ska förminskas i skala 1:2;



Figur 1. Förminskning skala 1:2. Förslag 1.



Figur 2. Förminskning skala 1:2. Förslag 2

Excerpt 1

L: Titta på de här två olika svaren. Den här var skala 1:2 då skulle ju… egentligen varje sida vara hälften sa du va, Magnus? Är alla sidorna, har vi minskat den [pekar på höjden på A4 -pappret] med hälften och den [bredden på A4] med hälften?

E (Tina): Nä

E (Magnus): Ja, kolla. [visar upp sitt A4, vilket är förslag nr. 1]

L: Ja, där är ditt papper, visa upp det lite så vi ser

E (Magnus): Ja, nu är den så [viker pappret på mitten] kolla nu blev den hälften [pekar på höjden].

L: Ja, och blev den hälften på andra, andra ledden också?

E (Magnus): Ja

L: Jaa…

E (Magnus): **Ja** [med eftertryck] Detta är… detta är hela, och om du gör den så [viker pappret på mitten] så blir den hälften.

L: Ja, den här sidan [pekar på höjden] har blivit hälften va?

E (Magnus): Ja

L: Men när vi tittar, om vi tänker oss ett helt papper. Lyssna nu allihop, för nu blir det, nu är det lite kritiskt. När vi tänker oss ett helt papper så sa vi att det var både längden och bredden som skulle bli hälften […].

E (Tina): [i samma grupp som Magnus] Men men hallå här borta. Kan jag få den lite [hon får A4-pappret och visar upp det] Vi testade också att göra den i fyra delar och ett tag så tyckte vi att det var rätt och sen så ändrade vi till det här. Vi hade två stycken svar. Vi har två stycken svar.

E (Magnus): Ja, men

L: Ni hade två stycken svar. Ni har det här svaret också [ringar in den markerade fjärdedelen av A4-pappret på tavlan, förslag nr.2]

E (Magnus): Men jag är inte med på det svaret.

L: Du är inte med på det svaret?

E (Magnus): Nej!

L: Du vill ha det första?

E (Magnus): Japp!

L: Ska vi jämföra dem lite grann?

Utifrån de här två sekvenserna kan slutsatsen dras att eleverna måste ges möjlighet att urskilja både längdförändringen och areaförändringen, d.v.s. de måste kunna separera längd från area då de ska hantera skala vid två-dimensionella geometriska figurer. Båda sekvenserna visar att eleverna tycks ha arean i förgrunden då de ställs inför en två-dimensionell figur, vilket medför att hanteringen av begreppet skala blir problematisk. Lärarna tycks även ha tagit för givet att eleverna vet att det är längdskalan som är i fokus. Andra sekvensen tycks vara mer komplex då den även visar att en elev, Magnus, eventuellt inte har separerat längderna, d.v.s. inte urskilt längder i de två dimensionerna. Det kan också ses som att eleven Magnus tycks utgå ifrån att ett linjärt samband råder även för areans förändring, d.v.s. då längderna blir hälften så långa blir även arean hälften så stor. Inga av dessa tolkningar var något som explicit undersöktes i studien, istället kommer de att ligga som grund för den föreliggande studien genom att verka som presumtiva kritiska aspekter. I dessa två sekvenser identifieras tre av de presumtiva kritiska aspekterna; urskilja längder ur en geometrisk figur, urskilja längdförändring samt urskilja areaförändring vid förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer vid given skala.

En granskning av tidigare forskning inom det ovan beskrivna matematikdidaktiska ämnesinnehållet visar att det finns flera spontana tillämpningar av proportionalitet och där det mest systematiskt undersökta området gällande felaktig tillämpning av proportionella resonemang troligen härstammar från just geometrin. I en serie experimentella studier har t.ex. De Bock, Verschaffel, och Janssens, (1998) visat att det finns en utbredd och stark tendens bland 12-16 åriga elever att tro att om en figurs längder förlängs x gånger, förstoras även area och volym x gånger vilket betyder att vid en förstoring i skala 2:1, tar eleverna för givet att då en sidas längd fördubblas, fördubblas även arean och volymen. Elever tycks, likt det ovan givna exemplet, använda linjära samband okritiskt då de ska förstora eller förminska areor och volymer, vilket ställer till problem. Fenomenet kallas 'illusionen av linjäritet', vilket kommer av att elever då de ska förstora eller förminska flerdimensionella geometriska figurer intuitivt utgår ifrån att om alla sidor görs dubbelt så långa blir även arean och volymen dubbelt så stor (De Bock et.al, De Bock et al. 1998; De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2002; De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren, & Claes, 2003). Det mest kända och ofta citerade exemplet på förekomsten av 'illusionen av linjäritet' är Platons dialog med Meno (De Bock et al. 2003), där Meno, när han ombeds att rita en kvadrat som har dubbelt så stor area jämfört med en redan given kvadrat, föreslår inledningsvis att fördubbla sidorna av den ursprungliga kvadraten och visar spontant idén om linjär proportionalitet mellan längdförändring och areaförändring, men ändrar sitt svar när Sokrates hjälper honom att analysera hans inkorrekta svar genom att konfrontera honom med en ritning.

Relationen mellan undervisning och lärande syns inte i tidigare forskning när det gäller fenomenet 'illusionen av linjäritet'. Istället riktas ett fokus på uppgifternas karaktär, elevernas svårigheter och de missuppfattningar eleverna tycks ha samt de lösningsstrategier de ger uttryck för. Utifrån det här fenomenet, med hänvisning till både den tidigare genomförda studien och tidigare forskning avseende elevernas förståelse av det specifika matematiska ämnesinnehållet riktar sig min nyfikenhet mot att undersöka förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer utifrån begreppet skala i ett undervisningsperspektiv avseende innehållets behandling och undervisningens design. Med ett tydligt fokus på undervisningen och hur det aktuella ämnesinnehållet behandlas syftar forskningsfrågorna att föra forskningen vidare.

Forskningen avser att ge ett ämnesdidaktiskt bidrag avseende relationen undervisning och lärande med fokus på hur innehållets behandling påverkar elevernas förståelse av förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer. Utifrån detta intresse kan learning study som forskningsansats, genom dess iterativa process, generera ett empiriskt material som kan ge en djupare förståelse för relationen undervisning – lärande avseende det aktuella ämnesinnehållet. Learning study har en teoretisk utgångspunkt, vilket för den här studien är ett variationsteoretiskt perspektiv Marton (2014). Teorin, som är innehållsriktad, utgår från antaganden som är användbara för att uppfylla studiens syfte och ger redskap för en djupanalys av undervisningsmoment. Genom en iterativ process, där resultaten från den första cykeln ligger till grund för utformningen av nästa, finns möjlighet till ökad kunskap kring det komplexa lärandeobjektet; förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer utifrån begreppet skala.

Problemformulering

Proportionalitet är ett komplicerat begrepp där det handlar om att studera regelbundenheter i problemsituationer och sedan kunna beskriva dessa. Lamon (2007) framhåller att det troligtvis är områdets komplexitet och avsaknad av förbättrade resultat som inneburit att forskningen inte ökat i den utsträckning som är önskvärd. Även om kunskapsbasen om området "illusionen av linjära samband" ökar finns det utifrån tidigare forskning behov av studier som inte bara ytterligare förklarar detta fenomen utan som även utgår från elevernas svårigheter och söker vägar att genom undervisningen komma förbi illusionen d.v.s. relationen mellan elevernas uppfattning och på vilket sätt undervisningen kan bidra till att utveckla deras förståelse.

Utgångspunkten för den föreliggande studien är att eleverna, genom en undervisning som bygger på variationsteoretiska antaganden, kan erbjudas att erfara både det linjärt proportionella och det icke linjärt proportionella sambandet mellan två likformiga men olika stora geometriska figurer på ett systematiskt sätt, då förstoring och förminskning av två-dimensionella figurer behandlas. Om ett mönster av variation är effektivt eller inte beror enligt Lo (2012) i förlängningen på om lämpliga undervisningsstrategier används så att elever upplever mönstret som det var tänkt. Med andra ord måste lärarna uppmärksamma både vad-aspekten och hur-aspekten, d.v.s. vad eleverna erbjuds erfara. Lo och Marton (2012) betonar vikten av att eleverna, då de ska lära sig något nytt, först måste få en överblick över det som ska läras. Eleverna skaffar sig på så vis en överblick av helheten utifrån vilken de har möjlighet att urskilja vad som är kritiskt. Det som urskiljs måste kopplas till tidigare kunskaper för att på så vis bilda en ny helhet. Om en elev ska urskilja ett linjärt samband mellan likformiga två-dimensionella geometriska figurer, d.v.s. längdernas förändring, borde rimligen eleven samtidigt vara medveten om vad det icke-linjära sambandet, d.v.s. areans förändring mellan dessa båda är. Marton och Booth (2000) uttrycker det som att eleverna måste ha ett samtidigt medvetande om särskilda aspekter av fenomenet eller ett samtidigt medvetande om andra aspekter eller om fler aspekter eller färre aspekter av samma fenomen. Medvetenhet om en enda aspekt kan inte existera utan en medvetenhet om skillnaderna mellan aspekterna. Eleverna måste utifrån detta resonemang ges möjlighet att erfara en variation, först då blir det ett meningsskapande för just den personen.

> There can be no discernment without experienced difference, and there can be no experienced difference without a *simultaneous* experience of at least two things that differ. (Lo, 2012, s. 84)

I kontrast till den stora mängd litteratur som finns om elevers utveckling av proportionella resonemang är det dock jämförelsevis få studier gjorda för att undersöka lärares förståelse av området (Lobato, Orrill, Druken & Jaocobson, 2011). Många lärare tycks vara ovetande om vilka svårigheter elever har inom området.

Syfte

Syftet med studien är att studera undervisningen och beskriva hur innehållets behandling, avseende förstoring och förminskning av geometriska figurer i relation till begreppet skala, utifrån design grundad på ett variationsteoretiskt perspektiv påverkar elevernas lärande. Studien avser att bidra med ämnesdidaktisk kunskap om hur elevers förmåga att urskilja det linjärt proportionella - och det icke-linjärt proportionella sambandet - mellan likformiga två-dimensionella geometriska figurer kan utvecklas och vad som krävs för att en sådan utveckling ska ske.

Forskningsobjekt samt forskningsfrågor

Fokus i analysen av lektionerna kommer att riktas mot de olika mönster av variation som uppstår under lektionerna samt att koppla detta till elevernas lärande och på vilket sätt lärandet skiljer sig åt utifrån dessa olika mönster av variation. Genom att utveckla förmågan att urskilja det linjära sambandet och det icke-linjära sambandet är hypotesen att elevernas förmåga att handskas med skala vid en förstoring eller förminskning av geometriska figurer ges möjlighet att utvecklas, vilket även testas inom studiens ram.

Studien kommer att besvara följande forskningsfrågor:

- Vad behöver eleven urskilja för att se både det linjära och det icke linjära sambandet vid förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer och utifrån det hantera skalan korrekt?
- På vilket sätt påverkar innehållets behandling elevernas lärande?
- Hur förändras elevernas uttryckta förståelse utifrån skillnader i innehållets behandling i undervisningen?

Avhandlingens disposition

Licentiatavhandlingen består av 7 kapitel. Det första kapitlet omfattar en inledning tillsammans med problemformulering, syfte och forskningsfrågor. I kapitel 2 presenteras den bakgrund utifrån vilken studien ska förstås. Därefter följer en beskrivning av det teoretiska perspektivet på lärande som utgör licentiatavhandlingens teoretiska ramverk; det variationsteoretiska perspektivet på lärande. I samma kapitel, det tredje, redogörs också för tidigare forskning som är av särskilt intresse för studiens ämnesinnehåll. Metodavsnittet återfinns i det fjärde kapitlet, där främst learning study diskuteras. I kapitel 6 redogörs för studiens resultat och analys. I det sjunde och sista kapitlet förs en diskussion där studiens resultat relateras till forskningsfrågorna och till tidigare genomförd forskning inom det aktuella området. Där återfinns även en metoddiskussion samt implikationer på fortsatt forskning.

Språkbruk

Begreppen linjärt proportionellt samband och icke-linjärt proportionellt samband kommer i texten som följer även uttryckas som längdförändring respektive areaförändring då det stämmer bättre överens med skolmatematikens språkbruk för elever i motsvarande ålder.

KAPITEL 2: BAKGRUND

Elevers förmåga att lösa problem som involverar begreppen längd, area och volym har studerats utförligt utifrån perspektivet pseudo-proportionella fenomen, d.v.s. elevers tendens att förutsätta ett linjärt proportionellt samband i en situation där icke-linjärt proportionellt samband råder (De Bock et al., 1998; De Bock et al. 2002; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2009; Gagatsis, Modestou, Elia & Spanoudis 2009; Paic-Antunovic & Vlahovic-Stetic, 2011; Van Dooren, De Bock, Hessels, Jenssens & Werschaffel, 2004a; Van Dooren, De Bock, Hessels, Jenssens & Werschaffel, 2004b; Vergnaud, 1988). Dessa studier refererar till att elever tenderar att spontant och okritiskt använda ett linjärt samband då de förstorar och förminskar två- och tredimensionella geometriska figurer. Insatser som syftar till att eliminera dessa tendenser har gjorts, men forskningen visar att fenomenet fortlever och återkommer, oberoende av elevernas ålder. Gagatsis et. al. (2009) har visat att då 15- och 16-åriga elever erbjuds lösa uppgifter av blandad karaktär, d.v.s. pseudo-proportionella-, vanliga- och ovanliga problem inom geometri, visar resultatet att de äldre eleverna, även om de hade liknande prestation i poäng som de yngre eleverna på de olika uppgifterna, svarade på de givna problemen på ett annat sätt. Detta resulterar i olika nivåer av geometrisk problemlösning och tyder på utveckling, vilket forskarna menar ger stöd för tanken att undervisning, men även mognad kan ha en roll i att utveckla förståelse för olika geometriska problemlösningsuppgifter. Undervisningen tycks dock inte vara i fokus i studien utan istället är det karaktären på uppgifterna som lyfts fram och hur eleverna löser dessa. Studiens fokus riktas mot den tydliga variationen mellan uppgifternas karaktär (pseudo-proportionella, vanliga, och ovanliga problemuppgifter) och därmed elevernas olika angreppssätt för att lösa uppgifterna och inte explicit mot elevernas olika lösningar inom en och samma uppgiftstyp.

Nedan visas de olika uppgiftskaraktärerna;

> Mr. Ben emptied all the water of an open cubic tank, in order to paint it. If he needs 10L of paint to paint the bottom of the tank, how much paint will he need for the entire tank? (Usual – U1)
>
> George measured the surface of his classroom floor and found that its area is 25m^2. The gym's floor has double the dimensions of the classroom. What is the area of the gym's floor? (Pseudo-proportional – Pa1)
>
> A classroom has two rectangular blackboards joined together with a common width. The first blackboard's perimeter is 30m and the second one's 20m. C. How many meters of ribbon are needed in order to frame both blackboards together? (Unusual – Un1)
>
> (Gagatsis et. al 2009, s. 15)

Uppgifterna som används i studierna och som eleverna arbetar med handlar inte uttryckligen om att de ska urskilja skalan vid förstoringar och förminskningar, utan istället ska de räkna ut areor och volymer då längder blir t.ex. dubbelt så långa.

> The majority of students used the proportional model in a spontaneous, almost intuitive way being unaware of their model choice, while others were really convinced that linear functions are applicable "everywhere", and therefore deliberately chose a linear method. (Van Dooren et al, 2004a. s. 488)

Resultatet visar att en majoritet av eleverna har en tendens att använda linjära samband inkorrekt d.v.s. eleverna urskiljer inte ett icke-linjärt samband utan de behandlar relationen mellan längd och area eller mellan längd och volym som linjärt istället för kvadratiskt eller kubiskt. Även med betydande support så som bilder, meta-resonemang och autentiska problem visade endast ett fåtal elever att de behärskade båda sambanden (Van Dooren et al, 2004a).

Flera studier har visat att eleverna lyckas väl med att lösa problem där uppgiften är att räkna ut förstoring och förminskning där det finns ett tydligt linjärt samband. Eleverna lyckas betydligt sämre när de löser problem där uppgiften är att räkna ut förstoring och förminskning där förändringen inte är linjär, utan kvadratisk eller kubisk. Studierna visar också att dimensionen av figuren är avgörande, att det är just övergången från en-dimensionell figur till fler-dimensionell figur som ställer till problem, inte figurens form. Eleverna behandlar både två- och tre-dimensionella figurer inkorrekt (De Bock et al.

1998; De Bock et al. 2002; Modestou, Gagatsis & Pitta-Pantazi, 2004; Van Dooren et al., 2004a).

Van Dooren et al (2004a) poängterar att eleverna behöver utveckla en djup konceptuell förståelse av proportionella samband och situationer. Kunskapsförvärvandet hindras av att tidigare kunskaper inte är förenliga med det nya. Eleverna är oftast omedvetna om att de kan testa sina kunskaper, förutsättningar och tankar hypotetiskt, istället behandlar de dem som fakta och kunskaperna blir inte sammanhängande, vilket kan relateras till vad Lo (2012) uttrycker om lärande;

> There must be a whole to which the parts belong before the parts can make sense to us. We cannot learn mere details without knowing what they are details of. When a whole does not exist, learning will not be successful (Lo, 2012, s. 26).

Resultaten av TIMMS 2007 visar att eleverna i sydostasiatiska länder får en mer konceptuellt inriktad matematikundervisning, vilket gör att deras kunskaper inom t.ex. området proportionalitet och geometri visar ett mer sammanhängande mönster. De svenska elevernas resultat visar mer av ”öar” av konkreta lösningar och mer procedurell kunskap än konceptuell kunskap, vilket yttrar sig som att eleverna kan lösa uppgifter de är vana vid, men har svårigheter att använda sina kunskaper i nya situationer. De sydostasiatiska eleverna får en mer målmedveten träning i att använda sin kunskap i nya obekanta sammanhang (Bentley, 2008). Kinnard och Kozulin (2008) menar även de, att lärandet inte kan vara meningsfullt om det stannar kvar som lösryckta färdigheter eller kunskapsfragment. Flexibelt tänkande uppnås då man skapar generaliserade strukturer för kognitiva lösningar av ett brett urval uppgifter. Ett ensamt begrepp utvecklas oftast inte i isolering utan det krävs en relation med andra begrepp.

> Att ge eleverna matematikuppgifter och sedan rätta resultaten är inte att skapa en lärandeverksamhet. En sådan ska innehålla orientering i det framlagda materialet, omvandling av det presenterade materialet till ett problem, planering av problemlösningsprocessen, reflektion över valet av strategi samt självvärdering. Alla de nämnda elementen gäller generellt för alla lärandeverksamheter, men bör i varje ämne avpassas efter vad som är utmärkande för begreppsförståelsen inom det givna kunskapsområdet. (Kinnard & Kozulin, 2008, s. 31)

Boaler (2002) framhåller att den konceptuella förståelsen är en förutsättning för att eleverna ska ha utvecklade matematikkunskaper och användbara förmågor även då de befinner sig utanför matematikklassrummet. Även Lamon (2007) för fram den konceptuella förståelsen och menar att erövra goda kunskaper i just proportionellt tänkande är en förutsättning för vidare lyckade studier i matematik. Van Dooren et al (2004a) uttrycker att just linjära samband kan vara ett sådant fenomen där det tycks vara svårt för eleverna att utveckla sin konceptuella förståelse. Istället fortsätter eleverna konsekvent att utgå ifrån att om en figur förstoras x gånger, ökar dess area eller volym också x gånger, vilket tyder på att eleverna utgår ifrån att det är ett linjärt samband mellan ökningen av längd och yta respektive längd och volym. Följande exempel från Van Dooren et al (2004a) visar på svårigheten för eleverna att urskilja det linjära- och det icke-linjära sambandet inom och mellan geometriska figurer och samtidigt erövra en konceptuell förståelse för fenomenet. En elev räcker i slutet av lektionen upp handen och ställer följande fråga;

> I really do understand now why the area of a square increases 9 times if the sides are tripled in length, since the enlargement of the area goes in two dimensions. But suddenly I start to wonder why this does **not** hold for the perimeter. The perimeter also increases in two directions, doesn´t it? (Van Dooren et al, 2004a, s. 496)

En undersökning som visar att elevers förhållningssätt och attityd till att lösa problem med linjära- och icke-linjära samband kan ha att göra med elevernas förståelse av proportionalitet är Paic-Antunovic och Vlahovic-Stetics studie från 2011. De baserar sin undersökning på tidigare studier av fenomenet ”illusionen av linjäritet” vid förstoring och förminskning av geometriska figurer (De Bock et.al 1998; Van Dooren et al 2004a). I undersökningen ingår 121 stycken 16-åriga kroatiska elever vilka delas in i två grupper, en experimentgrupp och en kontrollgrupp. Båda grupperna får först sex stycken uppgifter där två av dem innehåller ett linjärt proportionellt samband och de övriga fyra består av problem med ett icke-linjärt samband. Experimentgruppen får sedan till skillnad från kontrollgruppen respons på sina svar och lösningar och får möjlighet att diskutera sina strategier och jämföra dessa med korrekta lösningar. Därefter får de lösa uppgifterna igen. Syftet med jämförelsen var att eleverna skulle få syn på att alla uppgifter inte innehåller ett linjärt samband. De blev dock inte undervisade om skillnaden mellan linjära- och icke-linjära samband och inte heller vilka uppgifter som innehöll vad. De fick endast jämföra sina egna lösningar med de korrekta lösningarna. I nästa steg i undersökningen, två dagar senare får båda grupperna ånyo sex uppgifter enligt ovan. Här kan man se att de elever som ingick i experimentgruppen till skillnad från de i kontrollgruppen lyckades avsevärt bättre när det gällde uppgifterna med de icke-linjära sambanden. I uppgifterna med ett linjärt samband var resultatet det omvända. Liknande resultat finns i De Bock et al (1998) och Van Dooren et al (2004a) d.v.s. att när man går in och stödjer eleverna i uppgifterna med icke-linjära samband blir det en försämring när det kommer till elevresultaten i de uppgifterna där linjära samband är i fokus. Slutsatsen de drar är att den feedback de givit eleverna resulterat i att "illusionen av linjäritet" minskar något men att den däremot inte lyckats få eleverna att se skillnad på dessa två problem och inte heller att de ökat förmågan att förstå vilken matematik som ligger till grund. Bentleys studie från 2008 visar att det är viktigt att i tidiga skolår utveckla en förståelse för proportionalitet. Eleverna bör utveckla en djup förståelse och kunna berätta hur de tänker och hur de räknar. Resultaten i Bentleys studie (2008) pekar på att för att eleverna ska kunna utveckla sin begreppsförståelse effektivt behövs att lärare känner till vanliga missuppfattningar och både kan använda dem och förebygga dem i undervisningen för att därigenom utveckla undervisningen. En slutsats man kan dra utifrån både Paic-Antunovic och Vlahovic-Stetics och Bentleys studier är att undervisningen bör ge eleverna möjlighet att utveckla sitt eget tänkande, samt möjlighet att tolka och värdera både sina egna och andras tankar, lösningar och svar. Enligt Dewey (2004) bör själva tänkandet vara i förgrunden och ses som viktigare än det rätta svaret. Lärarens uppgift är inte att tala om hur det ska vara eller förmedla hur en lösning ska vara, utan istället ska de påverka eleverna så att de själva skapar sitt lärande och vågar ställa frågor som gör att de närmar sig en form av konceptuell förståelse (Baumert, 2010; Boaler, 2002; Dewey, 2004). De efterfrågar en attitydförändring hos eleverna som även Paic-Antunovic och Vlahovic-Stetic (2011) gör i sina studier. Lärares främsta uppgift blir således att ge eleverna möjligheter att få syn på något på ett nytt sätt. Genom att belysa flera tankar kring samma fenomen erbjuder man eleverna en större möjlighet att utveckla lärande. Kunskapen får inte bli tyst och oformulerad utan den måste ständigt prövas och värderas (Marton & Booth, 1997). Lo (2012) uttrycker det som att lärare ska utnyttja elevers olika sätt att förstå lärandeobjektet som en resurs på ett sådant sätt att andra elever kan uppleva en variation av förståelse av samma lärandeobjekt och bli 'exposed to more powerful ways of seeing' (Lo, 2012 s.106).

KAPITEL 3: TEORETISKA UTGÅNGSPUNKTER

Avhandlingen syftar att studera lärandet utifrån den lärandes perspektiv av ett avgränsat innehåll. Studien utgår från det fenomenografiska och variationsteoretiska forskningsparadigmet. Det teoretiska ramverket som här använts har prövats och tolkats som användbart för analysering av undervisning och lärande i klassrummet. (Häggström, 2008; Runesson, 1999; Olteanu, 2007; Marton & Pang, 2006; Kullberg, 2010; Wallerstedt, 2011). Den har potential att säga något relevant om relationen mellan undervisning och lärande då innehållsliga dimensioner av undervisningen studeras (Runesson, 1999).

Lärande innebär en förmåga att urskilja skillnader och likheter, vilket förutsätter en erfaren variation och kan ses som en förändring hos den lärandes förmåga att se någonting på ett nytt sätt. Variationsteorin blir här ett analytiskt verktyg för att beskriva, förstå och utforma lärandet (Marton &Tsui, 2004).

Från fenomenografi till variationsteori

Hur kan vi förbereda för det okända genom det vi vet? Enligt Marton och Booth (1997), är det viktigaste målet för undervisning att utveckla den lärandes förmåga att på ett kraftfullt sätt behärska nya situationer. Men hur kan man förbättra möjligheterna för att lära? Vad behövs för att någon ska lära sig? Vad är nödvändigt för att den lärande ska utveckla vissa förmågor på ett särskilt sätt? Genom att utveckla sin förståelse för fenomenografin och variationsteorin skulle man kunna komma närmare möjliga svar då det där handlar om att medvetet skapa situationer som främjar lärande.

Uppfattning – ett centralt begrepp inom fenomenografin

Fenomenografin är en kvalitativt inriktad empirisk forskningsansats som vuxit fram vid institutionen för pedagogik vid Göteborgs universitet under 70-talet och som studerar frågor kring kvalitativt skilda sätt att uppfatta samma fenomen. Ansatsen ger forskaren möjlighet att studera ett fenomen både i djup och i detalj. Ontologin inom både fenomenografin och variationsteorin utgår ifrån att människors olika sätt att se på världen är icke-dualistiskt, vilket betyder att det inte görs någon skillnad mellan uppfattningen och det uppfattade, de är inte åtskiljbara. Grundfrågan är densamma för de båda; på vilka olika sätt kan något uppfattas? Synsättet innebär att en uppfattning av något inte ligger i individen och inte heller i omvärlden, man delar alltså inte upp fenomen dualistiskt utan en uppfattning ses här som en sammansmältning mellan den lärande och ett objekt eller ett fenomen. Den är således inte av psykologisk karaktär, utan ses istället som en personlig relation mellan individ och omvärld. Utifrån individens förmåga att urskilja, uppmärksamma och erfara fenomen i omvärlden skapas en personlig helhet. Helheten kan dock aldrig beskrivas fullständigt utan det är de kvalitativt skilda sätt att uppfatta ett fenomen som beskrivs.

Skillnaden i uppfattningar beror på att individerna fokuserar på olika aspekter eller att några aspekter inte fokuseras alls. Individen ses som bärare av olika sätt att uppleva fenomen och som bärare av fragment av olika sätt att uppleva just det fenomenet (Marton & Booth, 1997). Den traditionella fenomenografiska forskningen syftar till att utforska just de kvalitativt skilda sätt som människor förstår ett särskilt fenomen i dess omvärld.

En uppfattning karaktäriseras av att bestå av såväl en referentiell aspekt, d.v.s. ett individuellt objekts specifika betydelse så som det urskiljs och uppmärksammas av betraktaren och av en strukturell aspekt, d.v.s. den kombination av egenskaper som betraktaren urskiljer och fokuserar på hos objektet (Marton & Pong, 2005). Uppfattning har inom den fenomenografiska forskningen definierats på olika sätt, bland annat som ”sätt att uppleva något”, ”sätt att se på något”, ”sätt att ta till sig eller greppa något” eller ”sätt att förstå något”. Det finns tydliga kvalitativa skillnader mellan dessa definitioner, men samtliga kan sägas vara relevanta för beskrivningen. Även om ingen av dem erbjuder en komplett definition av begreppet uppfattning ur ett fenomenografiskt perspektiv, så kan man se det som att de samtliga kompletterar helhetsbilden i viss utsträckning (Marton & Pong, 2005). En uppfattning utgör således en personlig relation mellan individ och omvärld och beskriver en helhet utifrån individens förmåga att urskilja, uppmärksamma och erfara omvärlden. För att förstå hur någon hanterar ett problem eller ser på ett fenomen måste vi alltså först förstå hur de uppfattar problemen eller fenomenet. Marton och Booth (1997), uttrycker att uppfattningen även är beroende av riktad uppmärksamhet och av någon grad av medvetande. Det finns en verklighet men den verklighetens betydelse konstitueras genom betraktarens beskrivelse av den. Man kan alltså inte skilja beskrivaren från det beskrivna. Den oreflekterade erfarenheten ligger således inom fenomenografins intressesfär.

Fenomenografins utveckling

Ur fenomenografin utvecklades en gren som av flera forskare har nämnts som den 'nya' fenomenografin (Pang, 2003; Runesson & Kullberg, 2010). Den 'nya' fenomenografin innebär enligt Pang (2003), att uppfattningar av något är uppdelat i termer av kritiska aspekter av fenomenet, uttryckt som det som kan urskiljas och fokuseras av den lärande i samtidighet. Pang (2003) framhåller att det innebär en ändring i den ursprungliga betoningen av fenomenografin från metodologisk till en teoretisk angelägenhet, alltså att den teoretiska grunden utvecklas.

Pang (2003) redogör för en, av flertalet gjorda studier, inom denna nya forskningsinriktning. Han lyfter fram empiriska studier där svenska universitetsstudenter studerats utifrån hur de lärde sig genom att läsa akademiska texter. Han visar att poängen med studierna var att empiriskt utreda följande två frågor; Varför lär sig vissa människor bättre än andra? Och varför är vissa människor bättre på att lära sig än andra? När de utforskade den första frågan fann de ett begränsat antal distinkt skilda sätt att förstå den för studien aktuella lästa texten. De olika uppfattningarna visades i form av hierarkiskt ordnade beskrivningskategorier. Svaret på den andra frågan fann man i det starka förhållandet mellan studenternas olika förståelse av texten och deras skilda sätt att läsa. De kvalitativa skillnaderna i utfallsrummet av lärande såg man var tätt sammankopplat till variationen kring inställningen till lärande som var anammat av de lärande. Studierna kring studenternas skillnader i lärande och sätt att uppfatta texten var av vikt för fenomenografins utveckling mot en distinkt forskningsansats. Den "nya" fenomenografin fick som syfte att beskriva kvalitativa skillnader i de sätt som människor gör mening av olika sorters fenomen i världen runt omkring dem. Pang (2003) poängterar dock att för att kunna beskriva den här variationen, är det viktigt att förstå vad det betyder att uppfatta ett fenomen på ett speciellt sätt. Han betonar att fenomenografins utveckling ligger i att tidigare ha beskrivit olika sätt att uppfatta olika fenomen till att nu besvara frågor som; vad är att uppfatta något? Och vad är skillnaden mellan två olika sätt att uppfatta samma sak? Fokus har flyttats från hur man lär till vad lärande innebär i förhållande till ett innehåll.

Variationsteorin

Även Runesson och Kullberg (2010) resonerar kring utvecklingen av fenomenografins teoretiska riktning och att grundtanken vid variationsteorins uppkomst var att den även skulle ha en praktisk innebörd för lärande och undervisning. Utgångspunkten för teorins utveckling var att det inte finns någon uppfattning om det inte finns något att uppfatta, alltså inget kan läras om det inte finns något att lära. Variationsteorins ontologiska antagande innebär att det bara finns en värld och det är den värld vi erfar, ett s.k. icke-dualistiskt antagande som förklarar förhållandet mellan människa och omvärld som odelbart. Det är ett och måste också beskrivas som ett (Marton & Booth, 1997). Verkligheten konstitueras genom betraktaren och man kan inte skilja den som beskriver verkligheten från beskrivningen. Teorin är på så vis enligt Carlgren och Marton (2000) ett icke-dualistiskt sätt att förstå relationen mellan människa och omvärld och kan uttryckas som att det vi erfar är en del av det som kan erfaras, alltså en relation mellan helheten och dess delar.

Skillnaden mellan att förstå och att inte förstå något eller skillnader i hur vi erfar olika fenomen kan ses som skillnader i förmågan att samtidigt kunna urskilja särskilda delar av fenomenet. Hur något uppfattas är beroende av sättet att urskilja delar från helheten och att relatera dessa delar till varandra och till helheten (Runesson, 1999; Lo, 2012). Innebörden av att erfara är enligt Marton och Booth (1997), att vissa aspekter av fenomenet blir urskilt på ett speciellt sätt. Det som ska läras, lärandeobjektet måste skiljas från den omgivande kontexten och delar av lärandeobjektets aspekter måste urskiljas och relateras till varandra och helheten.

Lärandet kan enligt Marton, (2014) innebära att urskilja särskilda aspekter av ett fenomen, men lärandet kan även innebära att lära sig att utföra vissa saker, genom att lära sig att urskilja särskilda aspekter av dessa handlingar. Exempel på det förstnämnda kan vara att urskilja särskilda aspekter för att lära sig vad en spårvagn är eller vad ett tåg är. Det sistnämnda lärandet kan innebära att urskilja aspekter av handlingar så som att hoppa ett snyggt högt höjdhopp eller att lära sig att knåda en deg

Att lära innebär en förändring i erfarandet p.g.a. att fler aspekter urskiljs, att fler aspekter urskiljs samtidigt eller att en relation mellan redan urskilda aspekter urskiljs. Men en förändring i lärandet kan också ha att göra med hur man urskilt ett fenomen ur sitt sammanhang, d.v.s. vad som utgör bakgrund och vad som fokuseras (Runesson, 1999). Människor har en tendens att lägga märke till saker som sticker ut d.v.s. saker tenderar att sticka ut när de ändras eller varierar mot en fast bakgrund eller när något är oförändrat mot en bakgrund som ändras. T.ex. att det blir lättare för oss att lägga märke till tomaterna på en planta då de är mogna jämfört med när de är gröna och omogna. Tomaterna urskiljs mot samma bakgrund först då de ändrar färg mot de gröna bladen d.v.s. de varierar sin färg i förhållande till bakgrunden som är invariant.

För att urskilja en ny aspekt måste denna utgöra en dimension av variation. Olteanu (2007) resonerar kring dimensioner av variation som att de korresponderar till aspekter på följande vis; ”En förutsättning för att urskilja vissa aspekter är att skapa en potentiell variation i erfarandet. […] Eftersom urskiljning förutsätter variation i olika aspekter kan erfarande beskrivas som mönster av dimensioner av variation” (s.74). Att erfara en variation av en specifik aspekt betyder således att erfara en skillnad i den dimensionen av variation och att öppna en dimension av variation betyder att en aspekt av lärandeobjektet öppnas för den lärande. Då lärande ses som ett erfarande, vilket här definieras som en förmåga att samtidigt kunna urskilja vissa aspekter av ett specifikt fenomen mot bakgrund av en erfaren variation, blir lärandet just den förändring som sker i sättet att samtidigt urskilja dessa aspekter (Marton, 2014; Häggström, 2008; Runesson, 1999). Det är alltså av stor vikt att man får möjlighet att urskilja innehåll och struktur på samma gång för att underlätta lärande. Genom att den lärande urskiljer nya aspekter av ett fenomen, genom samtidig variation av dessa aspekter, bildas en ny förståelse för fenomenet som utvecklar den lärandes förståelse på såväl kort som lång sikt (Holmqvist, Gustavsson & Wernberg, 2007). Lo (2012) sammanfattar att urskiljning, samtidighet och variation hänger ihop och menar att först då vi är medvetna om skillnader som vi har möjlighet att urskilja likhet.

Undervisning ur ett variationsteoretiskt perspektiv

Variationsteorin har använts i en serie studier för att analysera klassrumsundervisning med fokus på; vad som är möjligt att lära, vad som faktiskt lärdes och hur lärande kan förbättras. Variationsteorin används för att analysera lärande i olika kontexter, även utanför skolans miljö (Holmqvist, 2004), men främst för studier av det avsiktliga lärandet i undervisningssituationer i skolan och syftar till att utveckla lärande och den lärandes förmåga att hantera nya situationer (Marton & Booth, 1997; Runesson, 1999; Marton & Tsui, 2004; Lo, 2012).

Det viktigaste målet för undervisning är, enligt Marton (2014) att utveckla elevernas förmåga att behärska nya situationer på ett kraftfullt sätt. Variationsteorin syftar till att utveckla elevernas förmåga att göra just detta. Det är eleven själv som lär och lärarens uppgift är att skapa förutsättningar för lärandet genom att identifiera de kritiska aspekter som är aktuella för ett specifikt lärandeobjekt i en specifik elevgrupp. Kritiska aspekter, samt dimensionen av variation av dessa, ligger som grund för lärandet inom teorin. Lärandets vara i undervisningen kan således förstås genom att studera vilka aspekter av lärandeobjektet som samtidigt blir fokuserade och huruvida dessa utgör dimensioner av variation.

När olika dimensioner av variation öppnas upp i undervisningssituationer skapas en mängd variationer mot vilka elevers och lärares medvetande riktas samtidigt som det konstitueras en potentiell innebörd av lärandeobjektet. Denna rymd av variationer bestämmer den innebörd eller den mening som är möjlig för eleverna att erfara. Att studera undervisning ur ett variationsteoretiskt perspektiv, menar Runesson (1999), är att studera undervisningen i termer av en potentiell erfaren rymd av variation där elevers och lärares medvetande riktas mot ett specifikt lärandeobjekt. Variationsrymden konstitueras olika beroende på hur aspekterna av lärandeobjektet lyfts fram och problematiseras och genom att olika dimensioner av variation öppnas. Beskaffenheten hos den rymd av variation som konstitueras i undervisningen kan således betraktas vara kritisk för elevernas lärande. Runesson poängterar dock att en rymd variationer konstitueras, vilken undervisningsmetod som än används. Dock poängteras att en rymd av variationer

Lärandeobjektets karaktär

Läraren har en avsikt, ett planerat lärande där meningen är att eleverna ska utveckla en specifik förståelse, ett avsett lärandeobjekt. Läraren ställer sig frågor som, vad innebär det att kunna detta specifika innehåll? Vad är det man kan när man kan detta? Och vilka aspekter av innehållet måste urskiljas för att möjliggöra detta lärande? Lärandeobjektet är centralt inom variationsteorin och innefattar de kunskaper och förmågor som därvid ska läras. Lärandeobjektet har dessutom tre analytiska uppdelningar; det avsedda, det iscensatta och det erfarna (Marton & Tsui, 2004; Gustavsson, 2008; Lo, 2012). Det avsedda lärandeobjektet är det som definieras av läraren d.v.s. det som läraren vill att eleverna ska lära sig baserat på lärarens kunskap om elevernas lärande. Det iscensatta lärandeobjektet möter eleverna i undervisningen, vilket betyder att det är det lärandeobjekt som träder fram för eleverna i undervisningssituationen i klassrummet. Det iscensatta lärandeobjektet behöver inte vara samma lärandeobjekt som det avsedda lärandeobjektet. Den interaktion som skapas i klassrummet kring innehållet kan ses som komplex och resulterar i att det är lärare och elever tillsammans som konstituerar det iscensatta lärandeobjektet. Det erfarna lärandeobjektet blir det som den enskilda eleven lär utifrån hur innehållet har behandlats i undervisningen. Eleverna har dock ofta en förförståelse eller en tidigare erfarenhet av innehållet med sig in i undervisningssituationen, men även, som Häggström (2008) uttrycker det, sin 'dagsform'. Detta påverkar givetvis också vad eleverna faktiskt lär och hur det erfarna lärandeobjektet således gestaltas. Lärandeobjektets påvisade förändring har studerats närmare av Wernberg (2009) och resulterat i att lärandeobjektet kan ses som dynamiskt. Den variation som iscensätts betyder inte, enligt Runesson (1999) att eleverna faktiskt erfar denna variation utan endast att de ges möjlighet att erfara lärandeobjektet på ett visst sätt. På vilket sätt läraren interagerar med innehållet och eleverna avseende vilka aspekter som elevernas medvetenhet riktas mot och huruvida dessa dimensioner av variation ser ut att vara avgörande för elevernas lärande.

Runesson och Kullberg (2010) betonar att teorin används som verktyg för att analysera läranderummet, den rymd av variation som skapas och utifrån denna beskriva vad som gjordes möjligt att lära och vad eleverna faktiskt lärde sig. De ger ett exempel på ett avsett lärandeobjekt; att förstå de fem första talen, vilket innebär att en samtidig urskiljning av en kombination av aspekter måste möjliggöras för att det önskvärda lärandet ska ske. Det betyder att eleverna måste förstå att tal har två olika karaktärsdrag i form av kardinaltal och ordningstal. Tar man talet fem, så representerar det ett värde i båda dimensionerna. Kardinaltalet fem representerar dimensionen fem som en mängd av till exempel apelsiner i en fruktskål. Om apelsinerna i stället läggs på rad efter varandra kan dimensionen av ordningstal bli synligt och också variera. Här kan apelsinerna uppfattas som att de har sitt ordningsvärde. Om den femte apelsinens ordningsvärde ska vara möjligt att uppfatta måste man vara medveten om att det finns fyra apelsiner före den femte. Man måste alltså vara medveten om andra ordningstal för att uppfatta ett särskilt ordningstals position.

Lärandeobjektet kan även ses som ett direkt eller indirekt lärandeobjekt (Lo, 2012). Det direkta lärandeobjektet refererar vanligtvis till innehållet och innefattar där vid specifika aspekter som ska urskiljas. Det indirekta lärandeobjektet refererar istället till en generell förmåga som eleven ska utveckla med hjälp av innehållet.

När lärare undervisar och interagerar med elever och diskuterar lärandeobjektet med dem, kommer de att öka sin egen förståelse av lärandeobjektet, d.v.s. de kommer att se lärandeobjektet grundat på elevers reaktioner och utvecklar därmed en fördjupad förståelse för hur elever kan uppfatta innehållet. Läraren försöker iscensätta ett planerat och medvetet lärandeobjekt, men med en vetskap om att det är just dynamiskt och således kan ändras under lärprocessen. De kan inte bara ha fokus på det som eleverna försöker lära sig utan också på vilket sätt som eleverna försöker övervinna eller bemästra vad de försöker att lära sig (Marton & Tsui, 2004).

> What is of importance for the students, however, is not so much how the teacher intends the object of learning to come to the fore, but how the teacher structures the conditions of learning so that it is possible for the object of learning to come to the learner’s awareness. What the students encounter is the enacted object of learning and it is possible to learn in the actual setting. (Tsui et al. 2004, s. 4)

Ett annat sätt att titta på strukturen av lärandeobjektet, menar Lo (2012), är att titta på relationen mellan aspekten och helheten och relationen mellan aspekter, vilket ger oss abstrakta begrepp. Med utgångspunkt i att erfara en brun tax skulle denna struktur beskrivas som att färg, djur och hundras är aspekter. Om aspekten djur öppnas upp genom dimensioner av variation är det möjligt att urskilja hund som ett värde av denna dimension eller som ett drag av denna aspekt. Vidare kan aspekten färg öppnas upp som en dimension av variation och brun kan urskiljas som ett värde i denna dimension eller som ett drag av aspekten. Tax blir således ett värde i dimensionen av variation avseende hundras. Sammanfattningsvis, för att erfara denna hund krävs en simultan urskiljning av dessa tre värden eller drag.

Relevansstruktur

Det sätt på vilket en elev responderar på en lärandesituation beror på hur hon eller han ser på situationen, d.v.s. vilken relevans eleven ser i objektet, en s.k. relevansstruktur (Lo, 2012) av lärandesituationen. Lo (2012) poängterar att lärare bör lägga vikt vid att bygga en relevansstruktur mellan eleverna och lärandeobjektet och hänvisar till Marton och Booth (1997).

> When people find them selves in a particular situation, they may, influenced by their past experience, focus on certain features of the situation that they feel are more relevant to them, and they may see the situation in a particular way. The situation has a certain 'relevance structure' for them, which means what the situation calls for and what it demands from their experience. (Marton & Booth, 1997, s.143)

Lärande sker när vi erfar något på ett nytt och meningsfullt sätt, så att den nya kunskap som förvärvats kan appliceras på ett lämpligt sätt i nya situationer och kan på så vis användas för att kunna förklara nya fenomen (Lo, 2012). Utifrån ett icke-dualistiskt synsätt förstås lärandeobjektets behandling av hur lärare och elever uppfattar lärandeobjektet, vilket innebär att läraren måste inta elevens perspektiv i lärsituation och skapa en intern relation till samma lärandeobjekt, först då kan lärare och elever mötas i ett gemensamt lärandeobjekt, vilket resulterar i att alla i klassrummet är involverade i samma lärandeobjekt men till viss del förstå det på olika sätt.

Urskiljning och kritiska aspekter

Varje förmåga, varje prestation kan ses som ett mycket komplext fenomen. Eleverna ska göra eller behärska flera saker på samma gång. En eller några av dessa saker är kritiska, när man jämför de elever som kan med de som ännu inte kan. Att lära något, menar Marton (2014) är att behärska vad som är kritiskt och kunna urskilja det som är nödvändigt. De aspekter som eleven måste ha vetskap om, men ännu inte har förmågan att inneha, är de aspekter som är kritiska för just denna elev. När elever ska lösa en uppgift, kan en del elever notera vissa aspekter och andra elever noterar andra aspekter. Eleverna behöver utifrån det här resonemanget lära sig att kunna urskilja kritiska aspekter i den aktuella uppgiften, men de kan vara svåra att upptäcka. Alla kritiska aspekter kan inte fastställas i förväg, de måste sökas efter under tiden man undersöker elevernas förståelse av lärandeobjektet. Lärandet innebär att kunna urskilja allt fler av dessa aspekter och fokusera på dem samtidigt för att skapa en helhetsbild av fenomenet.

När lärarna har formulerat ett lärandeobjekt, identifierar de vad som kan tänkas vara kritiskt för att kunna lära det som avses. Detta sker innan de beslutar hur de ska undervisa om lärandeobjektet. Lärarna försöker upptäcka skillnader i de sätt som elever erfar eller tänker om det som de förväntas lära sig. Ur dessa skillnader kan lärarna identifiera presumtiva kritiska aspekter för lärandet d.v.s. de aspekter som eleverna ännu inte tycks ha urskilt, men behöver urskilja för att utveckla sin kunskap. Det finns flera olika metoder för att ta reda på s.k. presumtiva kritiska aspekter. Exempel på metoder enligt Lo (2012) är; att ta reda på vad tidigare forskning visar, lärarnas erfarenheter från undervisning av samma ämnesinnehåll, screeningintervjuer samt att designa test och analysera elevernas svar på dessa. Under lektionerna kan sedan ytterligare kritiska aspekter identifieras då möjlighet ges att noggrant lyssna till elevernas sätt att se på lärandeobjektet ges. Det finns två viktiga anledningar till att göra detta. Å ena sidan för att underlätta lärarnas förståelse av lärandeobjektet, men å andra sidan även för att hjälpa lärarna att handskas med elevernas individuella skillnader. Med andra ord kan lärarna försöka arrangera för och använda individuella skillnader genom att fokusera på elevernas olika perspektiv och ta dessa som utgångspunkt snarare än att förutsätta skillnader i förmåga. Även lärare och elever kan se lärandeobjektet olika, vilket kan bero på att läraren själv inte upplever att en viss aspekt kan vara kritisk för förståelsen av lärandeobjektet, utan tar istället denna aspekt för given (Lo et al. 2005).

För att urskilja kritiska aspekter av ett innehåll i nya situationer, eller att urskilja nyligen förgivet tagna aspekter i kända situationer, måste eleverna erfara särskilda mönster av variation och invarians av just dessa aspekter, vilket är en nödvändighet för lärande. Det är lärarens ansvar att skapa lärandesituationer som möjliggör urskiljning av de aktuella aspekterna (Lo, 2012; Lo et al. 2005). Lo (2012) menar att en del kritiska aspekter inte kommer fram genom lärarnas samarbete om lärandeobjektet och inte heller under förtest eller intervjuer med eleverna utan blir avtäckta först när elever interagerar med lärandeobjektet under lektionen. Lo et.al. (2005) jämför med en detektiv som söker alla bevis som samlats ihop från ett brott. Några bevisdelar är kritiska, andra är bara distraktorer. Detektiven tittar troligtvis på alla bevisdelar under lång tid utan att förstå vad de försöker säga. När stunden kommer då detektiven ser alla bevisdelar samtidigt, d.v.s. att relationen mellan alla delar blir tydligare, kommer detektiven förstå vad som hände på ett nytt sätt och kan lösa brottet. Kanske har detektiven inte sett ett drag som varit avgörande för att lösa fallet, och först när detta kritiska drag urskilts finns lösningen. Marton och Tsui (2004) lyfter fram denna samtidighet som en synkron simultanitet vilket innebär att alla kritiska aspekter samvarierar. Upplevelsen av en synkron simultanitet förutsätter en diakron simultanitet, vilket betyder att de kritiska aspekterna, innan de kan samvariera måste ha varierat var och en för sig. Såväl diakron simultanitet som synkron simultanitet betraktas som funktion av urskiljning.

Marton och Booth (1997) resonerar också om den betydelsefulla interaktionen i klassrummet och uttrycker att kritiska aspekter är just kritiska för att elever har problem med dem och att ett lärandeobjekts kritiska aspekter alltid behöver bestämmas empiriskt. De menar att lärarna måste fråga eleverna 'hur deras erfarenhet ser ut, se vad de gör, observera vad de lär sig och vad som gör att de lär sig' vilket betyder att lärarna bör ge eleverna möjlighet att förklara sina tankar under lektionen och lyssna noga på deras åsikter. För att kunna arrangera för dessa individuella skillnader borde lärarna enligt Lo et al. (2005) välja ut ett värdigt lärandeobjekt, identifiera variationer i elevernas förståelse av det planerade lärandeobjektet och finna de tillhörande kritiska aspekterna och planera lärandesituationer som hjälper eleverna att fokusera på de kritiska aspekterna genom att skapa lämpliga mönster av variation.

Mönster av variation

Utifrån det variationsteoretiska perspektivet görs urskiljning och fokusering efter ett strukturerat och genomtänkt mönster. Lärande rör sig från en odifferentierad och knapp integrerad förståelse av det hela till ökad differentiering och integration av helheten och dess delar. Genom lärande blir helheten mer distinkt och dess delar kan urskiljas och förstås och passa in vilket gör del-del relationen och del-helhets relationen mer tydlig. Utifrån det här resonemanget lyfter Lo (2012) lärarens betydelse av att ha förmågan att strukturera undervisningen på ett sådant sätt så att innehållets struktur kommer fram genom tydliga del-del- och del-helhets-relationer. Här ser hon skapandet av mönster av variation som en del av denna struktur. Om det förväntade lärandet kan åstadkommas hänger på om mönstret av variation kan erfaras och urskiljas av eleven. Det mönster av variation som Lo (2012) för fram innefattas av tre begrepp; *kontrast, generalisering* och *fusion*. För att strukturera en undervisningssekvens rekommenderar Lo (2012) att lärandet bör börja i en form av fusion. Denna initiala fusion, har Marton (2014) valt att kalla den odifferentierade helheten, och utgörs av förståelsen av det problem som eleven ställs inför. I detta möte görs det inte möjligt att urskilja de kritiska aspekterna eller dragen av det som ska läras, men eleven skapar däremot en relevans-struktur, en upplevelse av den odelade helheten från vilka de kritiska aspekterna eller dragen kan urskiljas. Genom kontrastering kan eleven sedan urskilja ett specifikt fenomen, begrepp eller aspekt och separera det från dess kontext och andra fenomen, begrepp och aspekter. Eleven kan urskilja kritiska aspekter eller drag av ett lärandeobjekt lättare om det ges möjlighet att kontrastera det med andra objekt. Kontrastering kan även ses då elever, genom lärarens iscensättning, erfar en variation mellan sin tidigare kunskap och det nya sättet att se samma sak. Men, menar Lo (2012), det krävs av läraren att ha förmågan att lyfta upp dessa olika sätt att se på något till elevernas fokala medvetenhet i samtidighet d.v.s. läraren måste skapa ett effektivt mönster av variation som möjliggör en kontrastering. När en lärare vill öppna upp en dimension av variation avseende 'geometriska figurer' kan han eller hon kontrastera en triangel med en rektangel. Triangeln kan här sägas bli ett värde i denna dimension av variation. Triangeln är underordnad 'geometriska figurer'. Genom att kontrastera trianglar med figurer som inte är trianglar kan kritiska drag av triangeln bli synliga t.ex. antal sidor, vilket kan separeras ut.

Mönstret generalisering utnyttjas då aspekten eller draget i fråga redan har urskilts, oftast genom en kontrast. Eleverna kan sedan lära av likhet, genom att titta på fler trianglar, olika sorters trianglar och de aspekter som varierar, vilket kommer att hjälpa elever att utveckla sin konceptuella förståelse för vad en triangel är. Det betyder att elever kommer att ha förmågan att separera ut aspekter, storlek på vinklar och sidors längder, som en dimension av variation av trianglar, vilket betyder att eleven kan separera det som är kritiskt från det som inte är kritiskt. När en elev blir medveten om ett värde genom att kontrastera det med ett annat värde kan vi också säga att det värdet har blivit separerat från objektet och en dimension av variation har öppnats upp. Efter det att man på sätt och vis har plockat isär helheten måste man plocka ihop den igen. Denna slutliga fusion är möjlig då fokus är på den samtida variationen av två eller fler aspekter. När två kritiska aspekter varierar samtidigt och alla andra hålls konstanta resulterar det i en samtidig variation av dessa två aspekter. Ett sådant mönster kan hjälpa elever att urskilja relationen mellan två dimensioner av variation, vilket är ett exempel på en fusion. Även om mönstret av variation är detsamma kommer olika lärande att frambringas, vilket kan bero på att den faktiska urskiljningens erfarande hos varje elev, alltså vad de har fokuserat på är olika (Lo, 2012). Det iscensatta mönstret av variation kan, vilket tidigare har nämnts, skilja sig ifrån vad som var förväntat. I vissa fall kan läraren missa att öppna upp en dimension av variation som skulle ha gjort det möjligt för eleven att urskilja kritiska aspekter, i andra lektioner öppnar eleverna upp dimensioner av variation som de inte var förmodade att göra, men som varit kritiska för utvecklingen av lärandet (Marton & Pang, 2013).

Lo (2012) uttrycker att det måste finnas en helhet till vilken delarna tillhör, dessförinnan kan man inte göra bruk av delarna. Vi kan helt enkelt inte lära fler detaljer utan att veta vad de är detaljer av. Vad eleverna lär och förstår i en lärandesituation är beroende av deras förmåga att förstå presentationen eller iscensättandet av mönster av variation. Om läraren medvetet kan systematisera presentationen av mönstren av variation så att möjligheten att de kritiska aspekterna kan bli explicit urskilda samt kopplade till helheten, bidrar det till att eleverna lär mer effektivt (Marton & Tsui, 2004).

För mycket variation

Variationen bör inte vara för stor, eftersom effekterna av variation då kan komma att motverkas. Om balansen mellan för mycket variation och för lite variation resonerar Holmqvist (2004) om, vilket Wernberg (2009) sedan byggt vidare på och konkretiserar effekterna av för mycket variation genom följande exempel där en person är ute och springer. Personen är ute och springer en vindstilla dag och förnimmer troligtvis inte luften mot sin kropp. Men, en blåsig dag känner hon av luften mot sin kropp. Det har då uppstått en variation i luften som gör att hon blir medveten om luften på ett nytt sätt än den dagen då det var vindstilla. När hon nästa gång är ute och springer en blåsig dag har hon samtidigt ont i knät. Då kommer hon troligtvis inte känna att det blåser, då smärtan i knät kommer vara i förgrunden d.v.s. det hon lägger märke till. Här finns då en brist på konstanta faktorer. Variationen finns i både luften och det smärtande knäet vilket gör att den avgränsande variationen i form av luften inte uppfattas likadant som när det endast var den faktorn som varierade.

Forskningsöversikt av studiens innehållsmässiga fokus: linjära och icke-linjära samband

Proportionalitet kan definieras på flera sätt. Inledningsvis ges här en kortfattad överblick över skillnaden mellan vad som är proportionella samband och vad som inte är proportionella samband. Föreliggande studies intresse finns bland de proportionella sambanden i figurens grå fält.

Tabell 1. Överblick över proportionella och icke proportionella samband.

	Proportionella samband	Icke-proportionella samband
Linjära samband	y=k·x Samband vars graf är en rät linje genom origo. För studien hittar vi här det linjära sambandet; längdskalan	y=k·x+m Samband som inte skär origo.
Icke-linjära samband	y=k· x^2 y=k· x^3 Samband vars graf är en kurva genom origo. För studien hittar vi här det kvadratiska sambandet.	y=k· x^2+m y=k· x^3+m Samband som inte skär origo.

I det för studien aktuella lärandeobjektet; förmågan att förstora och förminska två-dimensionella geometriska figurer och utifrån det hantera längdskalan, möter geometrin proportionalitetsbegreppet. Lamon (1993) har identifierat fyra proportionella problemtyper där den fjärde av dem, förstoring och förminskning av geometriska figurer, faller inom den föreliggande studiens intresse.

Elevers förmåga att lösa problem som involverar begreppen längd, area och volym har studerats utförligt utifrån perspektivet pseudo-proportionella fenomen. Resultaten visar att elever har en stark tendens att använda linjära samband okritiskt, d.v.s. de tenderar att övergeneralisera vad de erfarit som 'sant' vid linjära samband och låter detta gälla även vid icke-linjära samband. Det mest kända exemplet av elevers inkorrekta användning av linjära samband sägs vara då de använder sig av linjära samband då de löser problem som involverar relationen mellan längder och area och/eller volym vid förstoring eller förminskning av likformiga figurer (De Bock et al. 1998). Denna inkorrekta användning av linjäritet vid icke-linjära situationer refereras ofta till som 'illusionen av linjäritet'. Liksom begreppet linjäritet har många ansikten, har även dess inkorrekta användning många ansikten. 'Illusionen av linjäritet' är utbredd bland elever i många olika åldrar och inom flera områden inom matematiken (De Bock et al, 2002). Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock och Verschaffel (2009) menar att då elever har haft begränsad tillgång till de strategier som behövs för att förstora och förminska figurer och tyda skalenliga ritningar finns möjlighet att missförstånd uppstår.

Det finns omfattande forskning kring fenomenet "illusionen om linjäritet". I kommande avsnitt belyses fenomenet främst utifrån det för studien aktuella geometriområdet; förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer samt de svårigheter som elever tycks ha. Först redogörs för det matematiska innehållet avseende linjära- och icke-linjära samband och hur det förhåller sig till proportionalitet, därefter beskrivs området utifrån ett didaktiskt perspektiv.

Det matematiska innehållet avseende 'illusionen om linjäritet'

Proportionalitet ses som en hörnsten i en stor mängd olika områden. Inom matematikämnet förekommer det i många sammanhang och kan således ses som en central matematisk princip (Lamon, 2007). I Lgr 11 (Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011) återfinns proportionalitet som ett centralt innehåll genom hela grundskolan där exempel på områden är; proportionella samband, däribland dubbelt och hälften, sambandet mellan proportionalitet och procent samt skala och dess användning, både i vardagliga situationer och vid avbildning av flerdimensionella figurer.

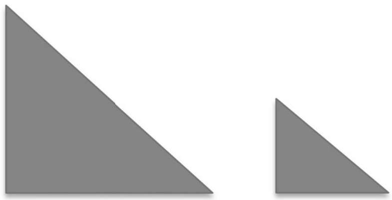
Ett vanligt sätt att presentera proportionalitet i matematiken är genom att visa på två huvudkategorier av proportionella problem (Miyakawa & Winslöw, 2009), vilket är en beskrivning av begreppet som också är relevant för den här studien; en statisk del och en dynamisk del. Den statiska delen ses som mer generell och innefattar ett ändligt antal parvis sammanhängande värden för två storheter med en konstant kvot vilket kan uttryckas $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. Den andra delen, en dynamisk proportionalitet mellan två variabler definierar ett generellt samband, en s.k. linjär relation, där a_1=k·a och k är proportionalitetskonstanten. Här ses ett ömsesidigt beroende vilket kan uppfattas som ett mer avancerat förhållande än den statiska proportionaliteten.

Proportionell avbild och skala

Begreppet skala har med proportionell avbildning att göra och är ett exempel på ett proportionellt samband. Skala, vilket det undervisas om i samband med kartor och konstruktioner är synonymt med den proportionerliga längdskalan och visar på det linjära förhållandet mellan längd hos två objekt (Bentley, 2008). Två olika beteckningssätt används. Om skalning avser en förstoring av ett objekt i verkligheten så skrivs det genom att man anger antalet gånger som förstoringen görs. Denna modell används ofta i likformighetsproblem inom geometrin och innebär att avbildningen är sådan att avståndet mellan två godtyckliga punkter multipliceras med en konstant. I det andra beteckningssättet används det gamla divisionstecknet t.ex. 1:3, vilket betyder att ett avstånd på ritningen är tre gånger så långt i verkligheten. Bentley (2008) uttrycker definitionen av skala som att;

> If the scaling is seen as magnifying an object it could be described by the number of times the object is magnified. (Bentley, 2008, s.42)

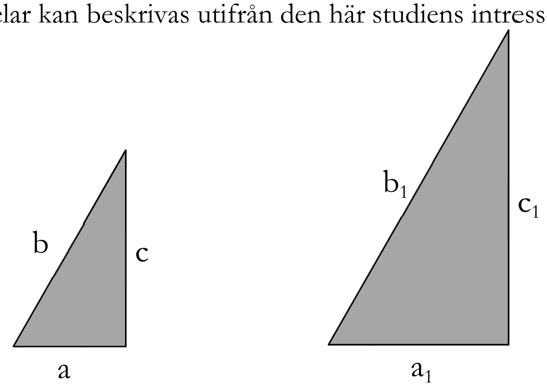
Uttrycket kan dock visa sig problematiskt, då det kan tas för givet att det är längder som är i fokus, även då det uttrycks 'the number of times the object is magnified' då det handlar om två- och tredimensionella geometriska figurer. Hur kan 'object' tolkas i detta fall? Definitionen kan uppfattas som oklar då 'object' kan tolkas som att det avser alla geometriska objekt i en eller flera dimensioner eller enbart geometriska objekt i en dimension, d.v.s. sträckor. Skalor brukar höra till kartor och ritningar men kan med fördel även användas vid förstoring och förminskning av figurer. Då arean förändras vid en förstoring eller förminskning kan man även tala om en areaskala, vilket är det samma som längdskalan i kvadrat. Om en skala på en karta eller ritning är 1:1000 betyder det att 1 mm på kartan motsvarar 1000 mm i verkligheten d.v.s. verkligheten har blivit förminskad 1000 gånger. Detta sätt att förminska verkligheten gäller alla delar av kartan och har därför skett proportionellt. På en ritning kan avbildningen även gälla en förstoring då skalan t.ex. kan vara 2:1, vilket innebär att ett mått i verkligheten har förstorats och blivit dubbelt så långt. Samma samband gäller för hela ritningen och skalan uttrycker därmed ett proportionellt samband (Bentley & Bentley, 2011). Om två trianglar är likformiga innebär det att förhållandet mellan korresponderande sidor i trianglarna är desamma.



Figur 3. Likformiga trianglar

Längden på sträckorna i den större triangeln är dubbelt så långa som motsvarande sträckor i den mindre triangeln. Detta förhållande gäller samtliga sidor i respektive triangel och är därför ett proportionellt samband (Bentley & Bentley, 2011), en s.k. statisk proportionalitet. En statisk proportionalitet beskriver förhållandena mellan sträckor inom figuren och att dessa förhållanden bibehålls vid en förstoring eller förminskning av figuren. En proportionell skalförändring, en s.k. dynamisk proportionalitet, beskriver förhållandena mellan motsvarande sträckor i de två figurerna, d.v.s. att om en sida är dubbelt så lång som en annan i ursprungsfiguren, så kommer det vara så även i den avbildade figuren. Detta förhållande anger också längdskalan.

Statisk och dynamisk proportionalitet blir således två sätt att se på de två olika aspekterna av en förstoring. Men hjälp av figur 4 illustreras hur dessa två delar kan beskrivas utifrån den här studiens intresse.



Figur 4. Trianglar som tillsammans med formlerna nedan åskådliggör statisk respektive dynamisk proportionalitet.

Statisk proportionalitet, vilket i studien hör samman med proportionell avbildning, en likformighet, innebär att alla förhållanden inom figurerna bibehålls och kan beskrivas enligt följande;

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$$

Den dynamiska proportionaliteten innebär att proportionalitet ses som en linjär relation, d.v.s. förhållandet är detsamma mellan figurerna, vilket i studien kan relateras till hanteringen av skalbegreppet där k är proportionalitetskonstanten och utgör skalfaktorn.

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

och

a_1=k·a
b_1=k·b
c_1=k·c

När man undersöker två förhållanden, eller när man löser situationer som innehåller direkt proportionalitet, kan man tänka sig dem som antingen ”inom förhållande” eller ”mellan förhållande” (*within ratio* eller *between ratio*) (Lamon, 2007; Vergnaud, 1988). Ett förhållande mellan två storheter i samma inramning eller figur är ett ”inom förhållande” t.ex. förhållandet mellan längd och bredd i en rektangel, inom kontexten av rektangeln. För alla likformiga rektanglar är det korresponderande ”inom förhållandet” samma. Ett ”mellan förhållande” är ett förhållande av två korresponderande storheter i olika figurer. I rektangeluppgiften är förhållandet mellan längd på en rektangel och längden på en annan likformig rektangel ett ”mellan förhållande”. Mellan två likformiga rektanglar är alla ”mellan förhållande” samma. Men ”mellan-förhållanden” för varje enskilt par av likformiga rektanglar kommer att vara olika. Ett alternativt perspektiv, då geometriska figurer inte är i fokus, beskrivs i Magnusson (2014). Där används begreppen dynamisk proportion och statisk proportionalitet. Enligt Magnusson görs, vid en statisk proportion, en jämförelse utifrån ett statiskt förhållande mellan par av storhetsvärden och vid en dynamisk proportionalitet görs jämförelser inom par av storhetsvärden.

En sammanfattning av hur dessa begrepp förhåller sig till varandra då en geometrisk figur förstoras ses i tabell 2. Bild som åskådliggör innehållet kan ses i figur 4.

Tabell 2. En sammanfattning av hur begreppen förhåller sig till varandra vid förstoring av en geometrisk figur.

Proportionalitets-aspekt	Statisk proportionalitet	Dynamisk proportionalitet
Förhållande (ratio)	within / inom figuren	between / mellan figurerna
Aspekt av förstoringen	likformighet	skala
Matematisk beteckning. Se figur 4.	$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$	$a_1 = k \cdot a$ där k är skalfaktorn

Ett matematikdidaktiskt perspektiv

Geometri kan sägas utgöra grunden för att utveckla förståelse av det flerdimensionella rummet då det är den del inom matematiken som behandlar rummets natur genom att belysa figurens form, storlek och egenskaper (Kilpatrick, 2001). De flesta elever har intuitiva föreställningar om grundläggande geometriska begrepp resonerar Nilsson, (2005) och menar att geometrin kan ses som ett verktyg för att förstå och beskriva världen vi lever i, men just därför blir den också den mest intuitiva delen av matematiken. Ett exempel på detta är just ”illusionen av linjäritet”.

Proportionell avbildning

Modestou, Elia, Gagatsis och Spanoudis (2009) uttrycker att geometri har varit ett privilegierat område bland forskare inom matematikutbildning. Sambandet mellan proportionellt resonemang och det geometriska begreppet likformighet ses här som intressant. Lika figurer tillhandahåller en visuell representation av proportioner och proportionellt tänkande och stödjer förståelsen av likformighet. När likformighet diskuteras måste förhållandet i figurerna bli utforskat. För att förvärva förmågan att resonera proportionerligt inom det aktuella området behöver eleverna ha goda geometrikunskaper menar Gagatsis, Sriraman, Elia och Modestou (2006). Van Hieles (1986) nivåer av tänkande korresponderar med nivåer eller faser i lärandeprocessen, vilket betyder att en elev har nått en högre nivå av tänkande då det nya sättet att tänka blir möjligt att tillämpa på nya objekt eller nya situationer. Läraren skapar lämpliga situationer som underlättar elevernas utveckling av tänkande på en högre nivå. Gagatsis et. al (2006) studie visar att barn inte initialt är kompetenta att känna igen delar och egenskaper av kända geometriska figurer. Yngre barn förstår en figur som en hel och inte som en summa av dess delar och identifierar figurer i enlighet med deras utseende. De befinner sig på en visuell nivå. Barn som är på denna nivå har inte förmågan att identifiera de flesta vanliga figurer eller göra urskiljningar bland figurerna, t.ex. inkludera begreppet kvadrat i begreppet rektangel. Nästa nivå är en beskrivande nivå. Här är inte längre figuren bedömd av utseende utan snarare genom sina egenskaper. På nivå tre finns den informella härledningen och figurens egenskaper är mer logiskt ordnade, t.ex. kan barn formulera definitioner för kvadrat och rektangel och använda dem för att förklara förhållanden som varför alla kvadrater är rektanglar. Oavsett till vilken nivå individen har kommit måste individen, då ett nytt moment introduceras börja om på nivå ett igen. T.ex. om individen förstår en kvadrats egenskaper, men ska förstå vad en kub är för något behöver individen gå tillbaka till nivå ett igen, för just den här förståelsen. Ett syfte i Gagatsis et al. (2006) studie var att undersöka de strategier yngre elever antar när de ska konstruera förstoringar av plana geometriska figurer i en växande serie. Från undersökningen kunde de dra några användbara implikationer för undervisning av geometri. Resultaten indikerar att förmågan att identifiera geometriska figurer inte är direkt relaterad till förmågan att konstruera och transformera geometriska figurer. De menar att undervisning som riktar sig mot att övergripande utveckla elevers geometriska kunnande behöver stödja båda dessa förmågor, genom att ombesörja aktiviteter där inte bara igenkännande av geometriska figurer är i fokus, utan även aktiviteter där konstruktion och transformation av figurer är i förgrunden, d.v.s. eleverna ska både känna igen dem och kunna förändra dem. Resonemanget ger tyngd åt betydelsen av elevernas konstruktioner av geometriska figurer vid förstoring och förminskning av tvådimensionella figurer. Eleverna ges då möjlighet att under processen göra jämförelser mellan längdförändringar och areaförändringar och skapar på så vis ytterligare mening. Att utgå ifrån ett pappersark, som kan vikas eller klippas, framhålls som givande vid konstruktioner av geometriska figurer (Row, 1958; Watson & Mason, 2005).

Linjära och icke-linjära samband

På senare år har forskningen om elevernas benägenhet att hantera icke-linjära problem som om de vore linjära, som t.ex. vid förstoringar och förminskningar av ytor, ökat markant (De Bock et al. 2002; Gagatsis et al., 2009; Modestou & Gagatsis 2006; Modestou et al., 2004; Paic-Antunovic & Vlahovic-Stetic 2011; Van Doreen et. al 2004a, Van Doreen, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel 2005). Att eleverna har bristande kunskaper i geometri kan vara en av anledningarna till att eleverna har svårigheter att skilja linjära samband från icke-linjära samband menar De Bock et al. (2002) och att illusionen av linjäritet inte är ett resultat av ett särskilt experiment utan att det är ett återkommande fenomen som ser ut att vara universellt och resistent mot olika former av stöd som syftar till att övervinna fenomenet. De Bock et al. (2002) problematiserar området ytterligare genom att peka på att linjär proportionalitet tycks vara djupt rotat i elevernas intuitiva kunskap och används spontant och okritiskt, vilket gör det linjära tillvägagångssättet på så vis ganska normalt och icke ifrågasättande och till en stor del även otillgängligt för reflektion. Eleverna tycks vara nästan okänsliga för olika typer av hjälp och systematisk stödundervisning har endast en begränsad positiv effekt (Van Dooren et al, 2004a).

Hilton, Hilton, Dole och Goos (2013) tittar närmare på resultat som rör just förståelsen av begreppet skala och visar ytterligare forskning som befäster att eleverna har svårigheter att separera linjära samband med de icke-linjära sambanden. Uppgiften som testades på elever i åldrarna 10-16 år handlade om att urskilja en fjärils areaförändring då längd och bredd fördubblades. Färre än 10 % av eleverna, oavsett ålder, kunde besvara frågan korrekt. Det var heller ingen markant skillnad i resultat mellan de yngre och de äldre eleverna. Mellan 60-78% av de deltagande eleverna svarade att arean också blir dubbelt så stor då längderna blir dubbelt så långa. Majoriteten av eleverna gjorde en felaktig bedömning, vilket skulle kunna tyda på att de inte kan separera de linjära sambanden från de icke-linjära sambanden mellan två likformiga figurer.

Modestou et al. (2009) genomförde en undersökning där de skapade situationer för eleverna där den spontana och okritiska användningen av den linjära modellen skulle kunna ifrågasättas av eleverna. Resultatet visade att användningen av den linjära modellen var stark bland en signifikant stor del av eleverna, vilket i sin tur motverkade enstaka motsägelser för en etablering av en ny förståelse. I resultaten visar de att det finns en avsikt med att ta hand om det epistemologiska hindret av linjäritet d.v.s. vad som är svårt och även den illusion som den genererar, vilket Modestou et al. (2009) menar endast kan göras med hjälp av en genomtänkt didaktisk situation. Situationen bör, enligt Modestou et al. skapas på ett sådant sätt att påståendet eller striden om linjäritet kommer att dyka upp spontant som ett nödvändigt verktyg som lösning till problemet. I Modestou et al. (2004) visade det sig att den typ av uppgifter som eleverna fick arbeta med kunde spela en roll, om än liten. Eleverna, 12-13-åriga cypriotiska barn, fick arbeta aktivt med bilder av två- och tre-dimensionella figurer. Resultatet blev aningen bättre men problemet kvarstod eftersom eleverna har svårt att upptäcka den gemensamma icke-linjära egenskapen av två- och tre-dimensionella figurer och därför hanterar de situationen på annat sätt än det matematiskt korrekta. Här lyfter Modestou et al. (2004) fram att det är den kognitiva faktorn som förhindrar elever från att urskilja de gemensamma icke-linjära egenskaperna av två-och tre-dimensionella figurer. Således anser även Modestou et al. (2004) att ett mer systematiskt didaktiskt ingripande rörande den icke-linjära naturen av geometriska objekt och uppgifter borde undersökas och utvecklas vidare. Att göra ett s.k. systematiskt didaktiskt ingripande skulle kunna innebära att man tar ett avstamp i det som Lo (2012) lyfter fram; att det är av vikt att inte bara studera hur man ska undervisa och göra lektionsplaneringar och undervisningsmaterial, utan också förstå vilka möjligheter som öppnats upp för elevers lärande och vad eleven verkligen lärt sig.

Att resonera kring proportionalitet

Proportionellt resonemang är en del av det relativt vida proportionalitets-området och grundläggande i förståelsen av matematiska begrepp och kan på så vis sägas utgöra en stomme till vidare studier i matematik (Lamon, 2007). Proportionella resonemang tillämpas i en bred omfattning av vardagslivet som t.ex. förstoring och förminskning, läsa av skalenliga kartor, dubblera recept, räkna ut ”bästa dealen” och dela lika (Dole, 2010). Autentiska kontexter, vilka är familjära för elever i vardagslivet, är viktiga för utvecklingen av proportionella resonemang. Lamon (2007) menar att just ett känt innehåll förefaller vara lämpligt initialt i undervisningen, men att förmågan att använda proportionella resonemang i icke kända innehåll också ser ut att vara en signifikant indikator för att senare kunna generalisera proportionella resonemang.

Proportionellt resonemang är svårt att definiera i en eller två meningar. Det är inte något du kan eller inte kan, utan det bör istället ses som både en kvalitativ och en kvantitativ process. Uppskattningsvis är det fler än hälften av alla vuxna som inte haft möjlighet att utveckla förmågan till proportionellt tänkande, vilket betyder att vi inte kan tillägna oss förmågan att resonera proportionellt genom att bara bli äldre utan att det helt enkelt krävs undervisning (Lamon, 2007). Genom detta ställningstagande gör Lamon (2007) klart att proportionella resonemang inte utvecklas genom naturliga kulturella processer. Lamons (2007) forskning visar att undervisning har effekt. Hon menar dock att eleverna kan behöva så mycket som tre år, men oftast mer för att få möjlighet att utveckla proportionellt tänkande kring t.ex. multiplikativa situationer för att sedan på ett adekvat sätt utveckla sin förmåga och skicklighet att resonera proportionellt. Förhastat användande av regler uppmuntrar eleverna att applicera regler utan att tänka, vilket då skulle hämma utvecklingen av förmågan att resonera proportionellt. Detta skulle kunna sammanfattas som att en elev som kan lösa uppgifter där proportionella samband efterfrågas genom algoritm inte nödvändigtvis kan mobilisera proportionellt resonemang i situationen.

Lamon (2007) pekar på några karaktärer av proportionellt resonemang. Hon menar att en person som har förmågan att resonera proportionellt förstår relationer där två storheter förändras tillsammans och kan utifrån det se hur förändringen i den ena stämmer överens med förändringen i den andra. Vidare kan man känna igen proportionella relationer som skilda från icke-proportionella relationer, vilket kan innebära att eleverna förstår innebörden av proportionell avbildning, men även att de förstår skillnaden mellan den linjära- och den icke-linjära proportionaliteten mellan två likformiga geometriska figurer. Ett proportionellt tänkande utvecklar även en stor mängd olika sorters strategier för att lösa proportioner eller jämföra förhållanden, där de flesta är baserade på informella strategier snarare än ålagda förutbestämda algoritmer.

Ur ett lärandeperspektiv är det av betydelse att fokusera på hur eleverna uppfattar förhållandet inom respektive mellan figurer. Ett proportionellt tänkande utvecklas genom aktiviteter som involverar jämförelser av förhållanden i en vid mängd problembaserade områden och situationer där tillflykt till regler eller formella tillvägagångssätt inte blir i fokus. Jämförelser av förhållanden formar en viktig kategori av uppgifter för eleverna för att på så vis utveckla förmågan att resonera proportionellt (Lamon 2007). En avsevärd mängd forskning har undersökt proportionalitet som också inbegripit elevers fel och strategier när de försöker lösa problem (Vergnaud, 1988).

Vi vet förhållandevis lite om lärares ”content knowledge” (innehållsliga kunskap). De resultat som finns, påpekar Lobato et al (2011) visar att lärare saknar en djup förståelse av proportionellt resonemang samt att de använder sig av procedurellt räknande, som t.ex. korsvis multiplikation (Lobato et al 2011). Dole, Clarke, Wright, Hilton och Roche (2008) har i sin studie lyft upp betydelsen av lärarnas kunskap om innehållet de förväntas undervisa om. I studien intresserade sig forskarna för lärarnas förståelse av begreppet proportionella resonemang och hur detta gestaltades i, och relaterades till lärarnas klassrumspraktik. Lärarna i studien fick med hjälp av ett uppbyggt program träna sig på att reflektera över elevernas svar. Resultatet i studien visade att lärarna utvecklade förmågan att diskutera elevers proportionella resonemang. Dole et al (2008) uttrycker att resultatet var likt det av Watson, Beswick, Caney och Skalicky, (2006) funna, vilka rapporterade att lärarna visade en större användning av ett mer specifikt språk när de talade om elevernas lärande efter studien jämfört med innan studien.

Det är rimligt att tänka sig att även lärare själva behöver bli medvetna om sina strategier och vad de tar för givet kring elevernas förståelse av begreppet proportionalitet när de planerar sin undervisning. Lo (2012) uttrycker att det som inte så lätt urskiljs av lärare, brukar också vara det som blir de största hindren för elevers lärande. Det tycks vara svårt för lärare att urskilja de aspekter som blir utmanande för elever om de inte själva har problem att urskilja dessa aspekter, d.v.s. lärarna har svårt att se vad som skulle kunna vara hinder för elevernas lärande. Om lärare är ovetande om att de ignorerar dessa aspekter kommer det resultera i ett *”knowledge gap”* .

> […]it will result in a knowledge gap in the lesson that they may not notice[…] (Lo, 2012, s. 28)

KAPITEL 4: METODOLOGISKA ANTAGANDEN

I detta kapitel diskuteras praxisnära forskning med en fokus på learning study, vilket är den metod som används i studien.

Praxisnära forskning

Undervisningen ska vila på vetenskaplig grund, men flera rapporter visar att det är svårt att implementera bl.a. den ämnesdidaktiska forskningen i undervisningen (Skolverket, 2012). Utbildningsforskning har genomförts med ett avstånd från skolvardagen och gapet har varit tydligt mellan teori och praktik. Carlgren (2011) antyder att den akademiska forskningen inte fullt ut är användbar för lärare i undervisningen och menar att forskningsfrågorna inte är relaterade till lärarnas undervisningsuppdrag. För att kunna hantera och utveckla det pedagogiska uppdraget krävs en forskningsmiljö som har god kontakt med praktiken.

Intresset för klassrumsforskning som involverar lärare har dock ökat under senare år. Aspekter som tycks vara centrala i frågan avseende framtidens skolforskning är, vem som utför forskningen och varifrån frågorna som man vill forska kring uppstår. Utvecklingen av skolans pedagogiska verksamhet har inte varit särskilt forskningsanknuten och därmed uppstår ett gap mellan teori och praktik. Nu syns dock ett behov av att istället utöka och utveckla forskningsansatser som talar mer direkt till lärarna och de problem de hanterar i sin skolvardag; forskning med ett inifrån-perspektiv där ansatserna är utformade för att användas vid praxisnära forskning i skolan (Carlgren, 2012). Grundargumentet för att placera lärare i hjärtat av utbildningsforskningens process sägs vara enkelt. Stenhouse (1981) betonar att läraren har ansvaret i klassrummet och att denna miljö borde vara det ideala laboratoriet för att testa utbildningsteoretiska antaganden. Forskare borde, om intresset ligger i att observera naturliga situationer, se att lärarna är utmärkta potentiella observatörer i klassrummen. Han menar att oavsett vilken utgångspunkt vi tar som forskare, så borde vi finna det svårt att förneka att lärare är omgivna av rika forskningsmöjligheter. Lärare har skäl att forska och forskarna har anledning att väcka denna potential hos lärarna. Men det krävs ett samarbete mellan forskare och lärare, annars kan inte forskningen bli användbar eller nyttiggörande och det är forskarna som bör närma sig lärarna i större utsträckning än vad som görs idag.

Metodologisk utgångspunkt

Eftersom detta arbete studerar på vilket sätt antaganden, som tidigare forskningsresultat lyft fram, påverkar elevers lärande har en metod valts som använder klassrummet som forskningsmiljö. Metoden benämns learning study och kan ses som en form av aktionsforskning (Elliot, 2012) som både liknar processen i lesson study (Lewis, 2000) och Design Experiment (Cobb, Confrey, Lehrer & Schauble 2003). En likhet mellan de tre är att alla är iterativa och involverar en lärargrupp som arbetar kring ett gemensamt problem där syftet är att förbättra undervisningen. Dock skiljer sig Design Experiment ifrån de övriga två genom att där är det i huvudsak forskaren som har ansvar och styr över processen samt att undersökningen innefattar flera variabler. Ytterligare en grundläggande skillnad mellan forskningsansatserna är förhållningssättet till de deltagande lärarna. Då lärarna både i lesson study och learning study ges möjlighet att beforska sin egen praktik och den egna tysta kunskapen kan man å andra sidan se lärarna i ett Design Experiment mer som utövare eller iscensättare av en externt planerad undervisningsdesign (Carlgren, 2012).

Forskningsaspekten i en learning study indikerar att forskare är involverade och att designen av lektioner grundar sig på en lärandeteori. På så vis kan learning study göra anspråk på att vara en utvecklingsmodell som samtidigt är en modell för forskning (Marton & Pang, 2006), vilket innebär att det är en modell där forskare och lärare tillsammans analyserar, utvärderar och diskuterar lektionsupplägg och undervisning kopplat till elevernas lärande. Samtidigt har forskaren sina forskningsfrågor och lärarna sina frågor. En learning study kan ge svar på relationen undervisning och lärande inom ett specifikt ämnesområde, men den kan också ge svar på själva innebörden av detta specifika ämnesområde, lärandeobjektet eller en undervisning-lärande-sekvens. På så sätt kan learning study ses som en praktikutvecklande forskningsmodell med stora möjligheter att utveckla kunskap som kan hjälpa lärare som forskare (Carlgren, 2011).

Learning study är en universitetsbaserad forskning transformerad till skolvärlden, men kan också ses som en skolbaserad aktivitet där skolan kan ses som laboratoriet. I denna diskussion framhålls att learning study har genomgått en utveckling och kan sägas bestå av flera generationer där den första av dem innebar att variationsteorin testades och att generationen därpå var mer fokuserad på utvecklandet av relationen mellan undervisning och lärande med hjälp av variationsteorin. Det som diskuteras och är i fokus nu är vilken kunskap som förs vidare från en learning study (Carlgren, 2012). Runesson och Gustafsson (2012) diskuterar på vilket sätt learning study skall kunna bidra med en delad kunskapsproduktion som ett system för att lösa den stora variation som finns i undervisningskvalitéer från en skola till en annan, likt den som förs fram av Morris och Hiebert (2011) och Lewis (2000). De visar genom studier hur en kunskapsproduktion, sprungen ur en kontext kommuniceras, delas och överförs i en ny klassrumskontext. Även Holmqvist et al. (2010) undersöker hur en lektionsdesign, skapad i en kultur och kommuniceras till en annan kultur, kan användas och utvecklas vidare. En viktig aspekt i resonemanget tycks vara att kunna se lärarna som både kunskapskonsumenter och kunskapsproducenter.

Utvecklingen av learning study gör att den hamnar i ett nytt ljus och eventuellt skulle fungera inom ett kliniskt forskningsperspektiv. Carlgren (2012) uttrycker att behovet av upprättandet och ökning av klinisk utbildningsforskning är enorm och frågar sig i vilken riktning learning study kan utvecklas som en viktig ansats för klinisk ämnesdidaktisk forskning. Hon uttrycker att resultaten från lesson study i Japan är viktiga för att utveckla lärarprofessionell kunskap och menar utifrån dessa att en viktig aspekt för learning study är möjligheten att teoretiskt beskriva resultat av den specifika process som sker angående lärandeobjektets beskaffenheter inom olika ämnesområden. Genom ett stringent ämnesinnehållsfokus är learning study en god kandidat till en ansats för utvecklandet av en utbildningsklinisk forskningstradition. Styrkan ligger i den systematiska analysen av lärande i relation till lärandeobjektet och upprättandet av kunskap i utvecklandet av designen och resultatet kommer troligtvis bli mer hållbart än vad som normalt är fallet i utbildningsforskning.

Learning study-modellen

Learning study är ett teoribaserat undervisningsexperiment där det tillhörande teoretiska ramverket oftast är variationsteorin. Teorin förväntas användas som ett verktyg och som en resurs vid designen, men även som ett verktyg för lärarna i interaktionen med eleverna, då som ett stöd för att strukturera och använda elevers inspel kring innehållet (Marton & Pang, 2006). Ett fokus riktas mot, utifrån det variationsteoretiska perspektivet, vad som krävs för att eleverna i en aktuell elevgrupp skall utveckla sin förståelse för ett specifikt lärandeobjekt, vilket görs genom att studera hur de kritiska aspekterna kommer till uttryck under en lektion genom det mönster av variation som konstitueras beroende på vilka aspekter som varierar och vilka som hålls invarianta (Lo et al. 2005). Varje learning study är baserad på en lärandeteori och den teorin ska testas. Learning study blir på så vis en bro mellan teori och praktik och mellan grundforskning och utvecklingsarbete (Pang & Marton, 2003).

Kollegialt lärande

Lärare med olika undervisningserfarenhet kan genom sitt deltagande i en learning study lära med och av varandra genom att observera sig själva och varandra när de undervisar om samma innehåll. Erfarna lärare har ofta kunskap om både lärandeobjekt och de svårigheter elever kan tänkas ha i relation till objektet, men denna kunskap har inte alltid lyfts fram och reflekterats och blivit delad med andra lärare (Lo et al. 2005). Runesson, Kullberg och Maunula (2011) lyfter fram att lärare genom deltagande i en learning study får möjlighet att tala om lärande och undervisning och relationen dem emellan. Lo et al. (2005) vill lyfta fram att just learning study kan ses som ett kraftfullt verktyg för lärare att reflektera och dela kunskap. Avsikten med en learning study menar de är att lärarna själva ska stå för lektionsdesignen och på så vis blir det en modell för att skapa möjligheter för lärare att utveckla sin profession.

I en learning study träffas en grupp lärare för att utforska ett särskilt lärandeobjekt vilket betyder att de ska fördjupa sin kunskap om vad som krävs för att lära detta. Ett lärandeobjekt kan vara en särskild insikt, förmåga eller ett kunnande som eleven förväntas utveckla under lektionen eller under en sekvens av lektionen. På så vis blir en learning study både innehålls- och lärandeorienterad (Runesson et al 2011). Det övergripande syftet med en learning study är att öka elevernas lärande och för att detta ska vara möjligt, menar Runesson et.al. (2011) lär lärarna samtidigt om det lärande eller den förmåga som de vill att eleverna ska utveckla. Lärarna fördjupar sin kunskap att undervisa för att utveckla förståelse hos eleverna och inte för att eleverna bara ska komma fram till rätt svar. De menar att lärarna själva, t.ex. för att undervisa om räkneoperationen -5-(-3)= grundligt, måste utforska vad som krävs för att göra denna räkneoperation. De studerar vilka elevernas svårigheter är, på vilket sätt de kan överbryggas och vad det är de behöver synliggöra i undervisningen för att eleverna ska utvecklas. Elevens perspektiv är centralt och lärarens förståelse av elevens sätt att förstå innehållet antas bli avgörande för elevernas möjligheter att lära.

Learning study-cykeln

En learning study är en process, vilken följer ett visst antal steg. Lo et al. (2005) och Pang och Marton (2003) sammanfattar learning study-cykeln enligt följande;

1. Lärare och forskare träffas för att samtala om studiens teoretiska perspektiv och val av lärandeobjekt.
2. De diskuterar sitt valda lärandeobjekt på djupet och vaskar utifrån egna erfarenheter och ämnesdidaktiska studier fram möjliga kritiska aspekter. En vidare utforskning av kritiska aspekter görs genom att alla elever gör ett förtest samt att ett antal elever eventuellt intervjuas för att på så vis få fram ytterligare aspekter.
3. Lärarna planerar första lektionen tillsammans utifrån de kritiska aspekterna och variationsteorin. Den planerade lektionen genomförs i en elevgrupp av en av de deltagande lärarna. Lektionen videofilmas. Eleverna gör ett eftertest.
4. Den inspelade lektionen analyseras gemensamt av lärargruppen tillsammans med resultatet från förtest och eftertest. Lektionen analyseras med fokus på hur lärandeobjektet har behandlats under lektionen. Utifrån analysen omarbetas lektionsplaneringen. Samma eller en annan lärare i lärargruppen genomför nästa lektion. Därefter upprepas processen igen. Vanligtvis genomförs minst tre planerade lektioner i en learning study-cykel.
5. Därefter sker en dokumentation där syfte, process och resultat beskrivs. Dokumentationen kan sedan ligga som grund för en presentation av studien till andra kollegor. Feedback på studien tas med till nästa studie.

Med hjälp av cykeln har lärare och forskare möjlighet att observera undervisning av samma innehåll. Innehållet är konstant, men sättet olika lärare behandlar innehållet är olika och elevernas lärande blir olika (Lo et. al. 2005).

För- och eftertest

Ur ett analysperspektiv kan learning study bidra med möjlighet att jämföra hur samma aspekter behandlas i de olika lektionerna. De tillhörande för- och efter-testen analyseras för att få syn på elevernas lärande i relation till hur aspekterna behandlades, m.a.o. hur dimensioner av variation öppnas eller stängs under lektionerna och hur detta speglas i elevernas lärande. Testen används för att kunna jämföra elevernas lärande i de olika grupperna och studera på vilket sätt elevernas lärande ändras när lektionsdesignen ändras. Testerna kan vara ett sätt att både kunna mäta vad de lärt sig, men också att analysera elevernas svar i relation till lektionsinnehållet. Kullberg (2010) resonerar kring problemet med förtestsuppgifter;

> It should be recognized that students' ability to understand different tasks and their skills in writing and articulating their answers are different and that this could have an impact on the result. Students' motivation in taking the test can also differ between students and classes. (Kullberg, 2010, s. 83)

Kullberg (2010) menar på att man ändå kan utläsa intressant information i dessa elevers test då flera elever trots svårigheter ändrar eller utvecklar sina svar i en specifik fråga mellan förtest och eftertest, vilket i så fall kan bli en indikator på vad som var möjligt för dem att urskilja.

Lektionsuppgifter

Avgörande för att designa en lektion som utvecklar elevernas lärande är att just det som avses att utveckla kan ringas in och studeras genom cykeln. Ett sätt att skapa förutsättningar för eleverna att urskilja det de ännu inte urskilt är att konstruera uppgifter som används under lektionen i syfte att erbjuda eleverna att urskilja dem. Att konstruera lektionsuppgifter genom vilka eleverna utvecklar en djupare förståelse för det specifika fenomenet kan vara svårt. Marton och Tsui (2004) menar att uppgifternas mening och upplägg under lektionen tycks vara avgörande för hur elevernas lärande utvecklas. Watson och Mason (2006) talar om att använda variation som ett verktyg för att utforma uppgifter och belyser lärarnas roll i denna process. Lärargruppen bör konstruera uppgifter där variation och förändring ingår på ett sådant sätt att reflektion kring elevsvaren leder till ytterligare förfining och precision av uppgiften. Processen att skapa optimala uppgifter där det explicitgörs för eleverna vad det är som varierar, d.v.s. ett synliggörande av de kritiska aspekterna (Mason, 2011), ser de att lärare med fördel kan göra tillsammans och menar att dessa optimalt designade uppgifter inte går att finna i matematikböckerna. I en learning study ges denna möjlighet genom dess iterativa modell och lärarnas kollaborativa arbete. Lo (2012) poängterar att det för närvarande i skolan är för mycket betoning på att använda exempeluppgifter som visar på likheter. Det är fastställt, menar hon, att när elever kan urskilja likheter mellan exemplen kan det resultera i att de drar slutsatser och sluter sig till regler, vilket inte gagnar en djupare förståelse. Istället bör lärare undervisa ett innehåll på djupet genom att ta fram många olika exempel där samma koncept arbetas med. Medvetenheten om en aspekt menar hon kan inte existera utan medvetenhet av variation.

Trovärdighet

Kvalitet på en studie kräver validitet och reliabilitet. Eftersom arbetet syftar till att studera undervisning är det nödvändigt att analysera undervisning så som den bedrivs i klassrummet. Kunskapen som genereras genom de data som insamlas under de genomförda lärstudierna bygger på en djupanalys av vilket lärande som görs möjligt utifrån hur innehållet struktureras och behandlas i undervisningen. Hur väl empiri, analys och slutsatser hänger ihop är av betydelse samt att en tydlig beskrivning av studien är genomförd (Kvale, 1997).

Det kan vara problematiskt att ge nyanserade bilder av det fenomen som studeras och samtidigt ge läsaren en struktur för att skapa förståelse avseende det man vill förmedla. Detta har hanterats genom att resultatavsnittet inledningsvis ger läsaren en sammanfattande överblick över studiens resultat avseende elevernas lärande och det lärande som konstituerades i de tre cyklerna. Därefter redogörs för resultatet indelat i två delar, där den första delen utgörs av en rik beskrivning av vilka mönster av variation som iscensattes under cyklerna samt på vilket sätt dessa skapades, öppnades eller slöts. Beskrivningen berikas av flertalet citat från lektionerna. I denna del beskrivs en relativt innehållsrik bild av lärandeobjektet tolkat utifrån elevernas perspektiv. Den andra delen av resultatet består av analys av elevernas lärande genom att spegla resultat på för- och efter-test samt det fördröjda eftertestet till de mönster av variation som iscensattes under lektionerna.

Reliabilitet i en studie handlar om noggrannhet, vilket syftar på att forskaren ska vara så noggrann som möjligt i insamlandet av data (Stenhouse, 1991). Data kan bestå av t.ex. videoinspelningar, test och intervjuer vilka kan bidra till djupa beskrivningar och analyser. Upprepade analyser av både lektioner och elevernas lärande ses som en nödvändighet för att kunna ge djupare analys och en större noggrannhet i utsagorna. Intentionen i den här studien är att ge läsaren många excerpt för att på så vis kunna presentera en så fullständig bild som möjligt över hur innehållet behandlats i klassrummet i förhållande till vilka mönster av variation som iscensattes. Analysen av lektionerna som helhet bidrar, presenterad tillsammans med utdrag av belysande undervisningsmoment eller situationer, också till en ökad trovärdighet.

Även om forskaren arbetat självständigt, har olika delar av data och analyser diskuterats med kollegor för att validera tolkningar. För att öka tillförlitligheten och ge en god inblick i det empiriska materialet och analysen ingår många utdrag ur empiriska data i resultatdelen av avhandlingen. På så vis kan studien sägas vara mer transparant. Ett mål med studien är att erbjuda resultat som ger upphov till diskussioner mellan lärare som undervisar i matematik och som kan inspirera dem vidare i sitt arbete.

Forskningsetik

Studien har genomförts i enlighet med Vetenskapsrådets (2011) forskningsetiska principer. Forskarens relation till de deltagande lärarna i en studie är en viktig etisk fråga (Kvale, 1997). I den här studien kan förhållandet mellan lärarna och forskare beskrivas som både vänner och kollegor där förståelse av situationen kan ses som ömsesidig avseende att båda parter kan lära av den andre. Rektor för skolan gav sitt medgivande till studiens genomförande och alla de tillfrågade lärarna var positiva till att delta. De såg alla ett deltagande i studien som en möjlighet att öka sin egen professionella utveckling. Även eleverna har deltagit frivilligt i studien. Elevernas vårdnadshavare fick innan studiens genomförande hemskickat ett information- och samtyckesbrev för påskrift, se bilaga 1. Det insamlade datamaterialet har förvarats så att obehöriga inte haft tillgång till det.

Alla deltagarna, både lärare och elever, är anonyma genom att deras namn har ändrats i resultatredovisningen. Personen, vars ansikte är med på aktiviteten 'fotografiet' är tillfrågad och har givit sitt godkännande till att fotografiet av honom finns med i detta arbete.

Forskaren förklarade för eleverna vad forskningen handlade om och varför just de kunde hjälpa till genom att de skulle försöka förklara hur de löste uppgifterna de fick. Syftet med den informationen var att eleverna skulle förstå att de inte skulle fokusera på rätt eller fel svar utan istället berätta hur de tänkte och resonerade när de löste uppgifterna och försöka förklara detta för forskaren. Samtliga intervjuer transkriberades ordagrant en vecka efter att de genomförts.

Som en forskande lärare har jag insett mina dubbla roller och har därvid haft ambitionen att vara involverad i aktiviteterna som en 'insider' inledningsvis, men att jag därefter har strävat efter att reflektera och analysera med ett utifrånperspektiv (Larsson, 1994).

KAPITEL 5: DEN EMPIRISKA STUDIEN

Syftet med denna learning study är att genom den iterativa processen finna ett kraftfullt sätt för att hjälpa elever att handskas med ett relativt svårt och komplext lärandeobjekt; att utveckla förmågan att förstora och förminska två-dimensionella geometriska figurer och därigenom hantera begreppet skala korrekt. Studien fokuserar på innehållets behandling i klassrummet, avseende de mönster av variation som iscensätts och hur de påverkar elevernas lärande. För- och eftertest användes för att leta efter skillnader i elevernas förståelse i förhållande till hur innehållet behandlats under respektive cykel. Studiens utgångspunkt är att ämnesinnehållets behandling under lektionerna, inklusive elevens och lärarens handlande och inspel, konstituerar lektionens läranderum vilket i nästa steg avgör vad som är möjligt för elever att lära i förhållande till det avgränsade lärandeobjektet.

Studiens genomförande och design

Denna studie består av tre cykler, vilka innehåller två lektioner vardera i samma elevgrupp, d.v.s. totalt sex videoinspelade lektioner med för och eftertest och även ett fördröjt eftertest i tre olika elevgrupper samt möten med forskare och lärargruppen där emellan. En screening har genomförts i årskurs sex och i årskurs nio, d.v.s. i andra men närliggande årskurser än där forskningslektionerna kommer att genomföras. Skälet är att screeningen i sig kan innebära en lärsituation och då avsikten är att utprova de för förtestets kommande frågeställningarna valdes andra elever än de som sedan ska ingå i studien. Screeningen ligger till grund för en utvecklad förståelse av de skilda sätt elever kan erfara lärandeobjektet och vilka svårigheter som tycks finnas kvar i de senare skolåren. Resultaten av screeningen ligger även till grund för utformningen av testerna. Förtestet i elevgrupperna som deltog i studien genomfördes lektionen innan första forskningslektionen i serien och efter-testet genomfördes under lektionen efter sista d.v.s. andra forskningslektionen. Det fördröjda eftertestet genomfördes cirka fem veckor efter forskningslektionernas genomförande. De videoinspelade lektionerna används i syfte att analysera och revidera lektionerna ytterligare. Varje elevgrupp deltar i två på varandra följande lektioner dag ett och dag två, vilket betyder att studien innehåller sammanlagt sex lektioner, två i vardera totalt tre elevgrupper.

Tabell 3. Studiens genomförande – en översikt över studiens design

Screening elevintervjuer. 12 elever i åk 6 och 12 elever i åk 9	**Fortlöpande februari-mars.**
Cykel 1 i årskurs 8, elevgrupp 1	**4 och 5 mars**
Lärare Maria	
Förtest	4 mars
Lektion 1a ca 45 minuter. Transkriberad kommunikation.	4 mars
Lektion 1b ca 70 minuter. Transkriberad kommunikation.	5 mars
Eftertest	5 mars
Fördröjt eftertest.	5 april
Videoinspelade gruppdiskussioner under lektionerna	
17 elever deltog i alla moment	
Cykel 2 i årskurs 8, elevgrupp 2	**11 och 12 april**
Lärare Anne	
Förtest	11 april
Lektion 2a ca 60 minuter. Transkriberad kommunikation.	11april
Lektion 2b ca 70 minuter. Transkriberad kommunikation.	12 april
Eftertest	12 april
Fördröjt eftertest	14 maj
Videoinspelade gruppdiskussioner under lektionerna	
17 elever deltog i alla moment	
Cykel 3 i årskurs 8, elevgrupp 3	**7 och 8 maj**
Lärare Maria	
Förtest	7 maj
Lektion 3a ca 60 minuter. Transkriberad kommunikation.	7 maj
Lektion 3b ca 70 minuter. Transkriberad kommunikation.	8 maj
Eftertest	8 maj
Fördröjt eftertest	10 juni
Videoinspelade gruppdiskussioner under lektionerna	
11 elever deltog i alla moment	

Urval och deltagande

Studien har genomförts i årskurs 8 under en vårtermin mellan mars och maj månad. Eleverna kommer från samma skola och var 62 stycken initialt då studien startade, men då endast de elever som deltagit i samtliga moment, d.v.s. förtest, de två forskningslektionerna, eftertest och fördröjt eftertest kan ingå i data-materialet, kommer totalt 45 stycken elever vara inberäknade i studien. Elevgrupperna, vilka var tre stycken till antalet utgjordes av ordinarie klasser i årskurs åtta. Då de tre klasserna är de enda i årskurs åtta på den aktuella skolan har inte något särskilt urval bland klasserna gjorts utan detta skedde ändamålsenligt. Vilken av de tre klasserna som fick de första, de andra respektive de två sista lektionerna fanns det ingen planerad tanke med utan det var schemapositioner som fick avgöra vilken ordning klasserna deltog i lektionerna. Skolan där studien är genomförd har elever från olika socioekonomisk bakgrund samt att drygt 30 % av eleverna har annat modersmål än svenska. Det som skiljer de tre elevgrupperna åt är att i elevgrupp 1 har endast en av de 17 eleverna annat modersmål än svenska. I de övriga två elevgrupperna är det sex av 17 respektive fyra av 11 elever som har annat modersmål. Tidigare forskning visar att de svårigheter eleverna har då de handskas med linjära och ickelinjära samband mellan geometriska figurer finns utbrett bland alla elever mellan 12-16 år, där av var alltså val av årskurs för studien av mindre betydelse.

Tabell 4. Studiens elevgrupper avseende kön och etnisk bakgrund

n=45	**Elevgrupp 1 (n=17)**	**Elevgrupp 2 (n=17)**	**Elevgrupp 3 (n=11)**
Flickor	8	6	6
Pojkar	9	11	5
Annat modersmål än svenska	1	6	4

Ett urval av de deltagande lärarna kan göras på olika sätt. Här har gjorts ett positivt och ett subjektivt urval av deltagare, vilket innebär att de deltagande lärarna handplockats utifrån att just dessa lärare ska kunna ge bästa informationen. De tre lärarna som deltar i studien har alla deltagit i flertalet learning studies tidigare och alla tre använder även variationsteorin i sitt dagliga arbete, vilket kan bidra positivt i utformning av undervisningen och lektionsdesignen, men även i analys av både lärandeobjektets gestaltning och elevernas lärande. Två av de tre lärarna, lärare 1 och 2 (se tabell 5), deltog också i den tidigare genomförda studien vars resultat delvis ligger till grund för denna studie. Att lärarna som deltog i den föreliggande studien har stor erfarenhet av learning study och använder variationsteorin i sitt dagliga arbete har troligtvis bidragit till att gruppen delar ett ’gemensamt språk’. Våra möten fick troligtvis ett tydligare fokus på analys och vidareutveckling av lektions-innehållet, vilket är i linje med studiens intentioner – att fördjupa kunskapen om betingelser för lärande av förstoring och förminskning av geometriska figurer i relation till begreppet skala.

Tabell 5. De deltagande lärarnas ålder, utbildning och yrkeserfarenhet.

	Ålder	Utbildning	Yrkeserfarenhet
Lärare 1 (Marcus)	35	Grundskolelärare 1-9 Ma/IH	Sju år
Lärare 2 (Anne)	43	Grundskolelärare 4-9 Ma/NO	13 år
Lärare 3 (Maria)	45	Grundskolelärare 4-9 Ma/NO	18 år

De deltagande lärarna har mellan sju och 18 års yrkeserfarenhet. En av lärarna (Marcus) blev pappa precis veckan innan han skulle genomföra den tredje cykeln. Lärargruppen valde dock att inte flytta fram den tredje cykeln utan istället fick den lärare som hade det första lektionsparet även ha det tredje lektionsparet. Den tänkta läraren för lektionerna i den tredje cykeln har dock deltagit i samtliga planeringsmöten. Lärarna i studien har tidigare varit kollegor till forskaren och gemensamt med denna deltagit i samma learning studies vid andra tillfällen. Forskningsstudien skulle kunna ses som ett fortsatt samarbete i gruppen. I texten uttrycks gruppen som 'lärargruppen' i vilken även jag som forskare ingår.

Lärargruppens planeringsmöten

Studien inleddes med fyra planeringsmöten inför den första cykeln. Under dessa möten definierades, utifrån lärarnas tidigare erfarenheter och screeningintervjuerna det intentionella lärandeobjektet samt de presumtiva kritiska aspekterna. De efterföljande mötena ägnades åt hur dessa aspekter genom mönster av variation skulle kunna urskiljas av eleverna på ett sådant sätt att elevernas förståelse av lärandeobjektet ökar. Parallellt med detta arbetade lärargruppen fram frågor till för- och eftertest. Möten med lärarna skedde vid tre till fyra tillfällen á en och en halv timma till två timmar inför varje cykel. Dessa möten videofilmades i princip i sin helhet med avsikt att kunna ge support till analys av lektionerna. Lektionerna planerades gemensamt under dessa möten. Då den totala mötestiden för lärargruppen var för knapp för att vi gemensamt skulle kunna titta på och analysera de inspelade lektionerna i sin helhet genomförde forskaren en egen första analys av både lektionen och elevernas svar på förtest och eftertest. Utifrån denna första analys diskuterade lärargruppen de kritiska aspekterna och hur de genom ytterligare mönster av variation eller genom förfiningar av de redan presenterade mönstren skulle ge eleverna större möjlighet att explicit urskilja de kritiska aspekterna och öka sitt lärande kring lärandeobjektet.

Tabell 6 Studiens genomförande – en överblick över studiens design samt tillhörande planeringsmöten.

Cykel 1 i årskurs 8, elevgrupp 1 - Undervisande lärare: Maria	
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	29 januari
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	4 februari
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	18 februari
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	25 februari
Förtest	4 mars
Lektion 1a ca 45 minuter. Transkriberad kommunikation.	4 mars
Analys och planeringsmöte 30 minuter	4 mars
Lektion 1b ca 70 minuter. Transkriberad kommunikation.	5 mars
Eftertest	5 mars
Fördröjt eftertest.	5 april
Videoinspelade gruppdiskussioner under lektionerna	
17 elever deltog i alla moment	
Cykel 2 i årskurs 8, elevgrupp 2 - Undervisande lärare: Anne	
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	12 mars
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	26 mars
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	8 april
Förtest	11 april
Lektion 2a ca 60 minuter. Transkriberad kommunikation.	11april
Analys och planeringsmöte 30 minuter	11 april
Lektion 2b ca 70 minuter. Transkriberad kommunikation.	12 april
Eftertest	12 april
Fördröjt eftertest	14 maj
Videoinspelade gruppdiskussioner under lektionerna	
17 elever deltog i alla moment	
Cykel 3 i årskurs 8, elevgrupp 3 - Undervisande lärare: Maria	
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	23 april
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	30 april
Lärargruppens planeringsmöte 90 min	6 maj
Förtest	7 maj
Lektion 3a ca 60 minuter. Transkriberad kommunikation.	7 maj
Analys och planeringsmöte 30 minuter	7 maj
Lektion 3b ca 70 minuter. Transkriberad kommunikation.	8 maj
Eftertest	8 maj
Lärargruppens möte. Sammanfattning	13 maj
Fördröjt eftertest	10 juni
Videoinspelade gruppdiskussioner under lektionerna	
11 elever deltog i alla moment	

Videoinspelning av lektionerna

Alla lektioner har spelats in i sin helhet med hjälp av videokamera. Kameran var placerad mitt i klassrummet med fokus på läraren och whiteboardtavlan. Detta främst för att studien riktas mot innehållets behandling, vilket innebär att det är betydelsefullt att dokumentera vad som skrivs på tavlan, men även att få med lärarens och elevernas röster. Under den stund då eleverna arbetade i grupp med en uppgift flyttades kameran mellan dessa grupper för att på så vis kunna fånga elevdiskussionerna då de löste gruppuppgifterna. Vid två tillfällen hade lärargruppen tillgång till ytterligare en kamera, men då det endast var en person som filmade, fångades ändå inte fler gruppdiskussioner än de som fokuserades genom kameran.

Läraren som höll lektionen rörde sig mellan elevgrupperna under gruppdiskussionerna och kunde på så vis fånga upp ytterligare intressanta aspekter eller delar av diskussioner rörande innehållet. Dessa blev av naturliga skäl inte videoinspelade då en annan grupp filmades vid just det tillfället. Däremot kunde läraren använda innehåll från dessa diskussioner vid senare tillfällen i helklassdiskussioner. Detta genomförande gällde under alla sex lektionerna. Även om det inte är möjligt att fånga all komplexitet kring det matematiska innehållet i klassrummet vid grupparbete har intentionen varit att belysa utdrag ur denna komplexitet.

Diskussionerna i helklass har i sin helhet dokumenterats genom videoinspelning. Oavsett hur många kameror man har i klassrummet är det svårt att få en helt rättvis bild av vad som händer i klassrummet då lärandeobjektet behandlas, d.v.s. täcka allt som sker i det s.k. läranderummet.

Studiens innehållsliga avgränsning - lärandeobjektet

I en learning study ska behovet av att utveckla kunskap vara utgångspunkten och i det här fallet avser studien att utveckla elevernas förståelse avseende förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer i förhållande till skala. Arbetet i skolan är reglerat utifrån kursplaner i Lgr 11 och i denna beskrivs det aktuella ämnesinnehållet, vilket också kan ses som studiens direkta lärandeobjekt;

> "Avbildning och konstruktion av geometriska figurer. Skala vid förminskning och förstoring av två- och tredimensionella objekt" (Skolverket, 2011, s 66)

vilket sedan avgränsats av lärargruppen och därmed uttrycks som ett indirekt lärandeobjekt; *Förmågan att förstora och förminska två-dimensionella geometriska figurer och utifrån det hantera längdskalan.*

Screening

För att studera de uppfattningar eleverna har med sig i lärandesituationen av innehållet och testa ett antal frågeställningars konstruktion genomfördes en s.k. screening, vilket i det här fallet avser en initial bedömning av elevernas kunskaper. Screeningen har dock genomförts i andra men närliggande årskurser än där forskningslektionerna genomfördes. En screening kan innebära att en lärsituation skapas vilket kunde undvikas genom detta upplägg. Dessutom visade tidigare forskning (De Bock et al 1998; De Bock et al. 2002; De Bock et al. 2003) att en majoritet av elever i åldersspannet 12-16 år har en felaktig användning av proportionella samband och detta oavsett om de var 12 år eller 16 år. Screeningen syftade till att identifiera skilda sätt att förstå innehållet på och genom att använda ett större urval än de i studien ingående deltagarna ökar möjligheten att erhålla ett så varierat underlag som möjligt. Intervjufrågorna formulerades utifrån de medverkande lärarnas erfarenheter från den tidigare genomförda lärstudien samt vad tidigare forskning lyft fram som elevernas svårigheter inom det aktuella matematiska innehållet. Under intervjuerna ställdes även frågor för att se hur eleverna resonerade när både längdförändringar och areaförändringar var i fokus. Varje intervju varade mellan 10 och 30 minuter, beroende på hur pratsamma eleverna var.

Den intervjuade eleven och forskaren satt själva i ett litet grupprum. Vid sidan av stod en videokamera på stativ. Hela intervjun videofilmades. Videofilmen användes för att i efterhand kunna analysera elevernas resonemang och svar med avsikt att finna kritiska aspekter av det valda lärandeobjektet. Eleverna i årskurs sex kände inte intervjuaren, men intervjuaren hade däremot undervisat eleverna i årskurs nio i matematik och de naturvetenskapliga ämnena då eleverna gick i årskurs 7. Samtliga elever i årskurs sex som blev tillfrågade visade sig positiva till att delta i intervjun. En elev av de tillfrågade i årskurs nio ville inte vara med.

Resultaten visade att majoriteten av eleverna, oavsett ålder, förstod det som att om längderna blir dubbelt så långa så blir även arean dubbelt så stor vid en förstoring oavsett vilken av figurerna, rektangel, triangel eller cirkel som fokuserades. Denna vetskap ledde till diskussioner om att inte avgränsa lärandeobjektet så som vi tänkt från början; *Förmågan att kunna urskilja det linjära sambandet och därmed längdskalan mellan likformiga två-dimensionella objekt.* Vi valde istället att utvidga lärandeobjektet så att även de icke-linjära relationerna skulle urskiljas. Dessa två relationer tycktes vara starkt sammankopplade. Att det inte bara var under screeningen som detta uppkom fick vi bevisat då eleverna som deltog i forskningslektionerna redan i början av varje cykel, där endast de linjära relationerna var i fokus, frågade efter de icke-linjära d.v.s. riktade fokus mot areaförändringarna.

Lärandeobjektets presumtiva kritiska aspekter

I detta avsnitt görs en beskrivning över vad eleverna behövde urskilja för att erfara och utveckla förmågan att förstora och förminska två-dimensionella geometriska figurer och utifrån det hantera längdskalan. Underlaget för identifiering av de presumtiva kritiska aspekterna bestod av lärarnas erfarenheter av en tidigare genomförd learning study och resultatet från genomförda screeningintervjuer samt de svårigheter som tidigare forskning visar att elever i åldrarna 12-16 år har då de ska förstora och förminska fler-dimensionella geometriska figurer. Dessutom innebär för- och eftertestsresultat samt analys av undervisningen att lärargruppen ges möjligheter att identifiera ytterligare aspekter som kan vara kritiska, vilket visas i enlighet med ett kumulativt mönster i tabell 7 på sidan 71.

Förutom att urskilja den linjära- och den icke-linjära relationen, d.v.s. längdförändring och areaförändring mellan likformiga två-dimensionella geometriska figurer, och förstå skillnaden dem emellan, upptäcktes ytterligare två kritiska aspekter under screeningen; eleverna måste förstå innebörden av en korrekt proportionell avbildning, d.v.s. likformighet, vilket innebar att eleverna även måste urskilja vad som är längder i en geometrisk figur och hur dessa förändras då figuren skalenligt förstoras eller förminskas.

Sammanfattningsvis utgick studien från nedanstående presumtiva kritiska aspekter;

- Förstå avbildning som likformighet
- Urskilja längder ur de geometriska figurerna.
- Urskilja den längdförändring som sker mellan de geometriska figurerna.
- Urskilja den areaförändring som sker mellan de geometriska figurerna.

Då varje cykels för- respektive eftertest samt lektionspar också innebar en möjlighet för synliggörande av nya kritiska aspekter kan det övergripande underlaget för synliggörande av kritiska aspekter ses utifrån ett kumulativt mönster.

Tabell 7. Underlag för de kritiska aspekternas identifiering enligt ett kumulativt mönster.

Cykel 1	**Lektion 1a och 1b**	Presumtiva kritiska aspekter från tidigare genomförda learning study Elevuppfattningar ang. begreppet skala och flerdimensionella figurer Screeningintervjuer Förtest cykel 1
Cykel 2	**Lektion 2a och 2b**	Presumtiva kritiska aspekter från tidigare genomförda learning study Elevuppfattningar ang. begreppet skala och flerdimensionella figurer Screeningintervjuer Innehållets behandling under cykel 1 För- och eftertestresultat från cykel 1 Förtest cykel 2
Cykel 3	**Lektion 3a och 3b**	Presumtiva kritiska aspekter från tidigare genomförda learning study Elevuppfattningar ang. begreppet skala och flerdimensionella figurer Screeningintervjuer Innehållets behandling under cykel 1 För- och eftertestresultat från cykel 1 Innehållets behandling under cykel 2 För- och eftertestresultat från cykel 2 Förtest cykel 3

Förtest och eftertest

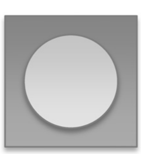
I studien fanns förtest, eftertest och fördröjt eftertest, se bilaga 2. Testet tog ungefär 30 minuter att genomföra. De elever som behövde, fick mer tid. Det var ingen undervisning mer än forskningslektionerna som berörde det aktuella lärandeobjektet. För att undvika diskussion om huruvida elevernas uttryckta förståelse på eftertestet härstammar från forskningslektionerna eller från tiden mellan forskningslektionerna och testet har både för- och eftertest genomförts i direkt anslutning till forskningslektionerna. Det fördröjda eftertestet genomfördes cirka fem veckor efter forskningslektionerna, och här har eleverna dock haft möjlighet att fördjupa sin förståelse med hjälp av de möjligheter de erbjudits efter forskningslektionerna. Två elever fick göra sitt fördröjda eftertest några dagar efter övriga i klassen då de var sjuka den aktuella dagen. Alla tre testen såg likadana ut genom hela studien för alla klasser. I samtliga uppgifter krävdes och efterfrågades av eleverna att de skulle kunna urskilja längder och längders förändring i relation till skala, men i olika kontexter, detta för att det inte endast skulle vara ett sätt eller en kontext som skulle bli avgörande. Dessa uppgifter krävde att eleverna kunde hålla areaförändringen i bakgrunden. I två uppgifter efterfrågades även areaförändringen i relation till en given längdförändring eller given skala. Dessa två uppgifter krävde att eleverna kunde hantera längdförändring och areaförändring simultant. Samma förmåga testades alltså i olika uppgifter. Några uppgifter krävde av eleven en noggrann genomläsning, vilket eventuellt kunde försvåra uppgiften för några elever.

För- och eftertest-uppgifter

Analysen bygger på ett samlat resultat på uppgiftsnivå av de nio testfrågorna 2b, 2c, 3, 4, 5, 8a, 8b, 9a och 9b, vilka beskrivs i detta avsnitt. Anledningen till att just dessa frågor valts från testen är att de visade sig vara de mest relevanta avseende elevresultat, med anledning av att de bäst speglar huruvida eleverna har erfarit lärandeobjektet så som avsett.

Vad är avbildning och vad är inte avbildning? Testuppgift 2b och 2c

Testuppgifterna 2b och 2c kopplades till den del av innehållet som behandlar skillnaden mellan vad som är en avbildning och vad är inte avbildning. Uppgiften ska indikera om eleverna har erövrat förmågan att urskilja längder och längdförändringar då en två-dimensionell figur, innehållande ett motiv, ska avbildas efter given skala och huruvida de lyckas hålla areaförändringen i bakgrunden, då den inte efterfrågas i uppgifterna. Figuren de utgick ifrån, se figur 5 är en kvadrat där en cirkel fanns inskriven och skulle ses som en helhet som skulle förstoras i skala 4:1.



Figur 5. Figur till testuppgift 2b och 2c.

I uppgifterna fick eleverna flera alternativ och de skulle avgöra och motivera varför de föreslagna bilderna var avbilder eller inte. Båda uppgifterna 2b och 2c var uppbyggda på samma sätt.

Förstoring av olika geometriska figurer - testuppgift 3, 4 och 5

Testfrågorna efterfrågade elevernas förmåga att konstruera en korrekt avbildning av olika geometriska figurer i relation till den givna skalan, d.v.s. eleverna skulle ha längder och dess förändringar i förgrunden och låta arean, som visserligen också förändrades, men inte efterfrågades, ligga i bakgrunden. Förmågan att kunna bortse ifrån en aspekt kräver dock att man redan har urskilt den. De tre uppgifterna innebar att eleverna skulle förstora en given triangel och en given cirkel i skala 4:1 samt att göra en förstoring av en given kvadrat i skala 2:1. Det fanns inga mått att tillgå. Att just skala 2:1 valdes för kvadraten beror på att den kan ge information om huruvida eleverna har ett samtidigt fokus på korrekt avbildning då de antingen har längdförändringen eller areaförändringen i förgrunden.

Simultan urskiljning - Testuppgift 8a och 8b och 9a och 9b

Dessa två uppgifter, uppdelade i en a del och en b del, kan ses som relativt utmanande uppgifter för eleverna.

Uppgift 8: Martin ska göra en målning av Mollymus som är 48 cm lång på sin dotters vägg. Han utgår i från ett vykort där han har en bild på Mollymus som är 12 cm. Han har förstorat bilden.

a) I vilken skala har han gjort förstoringen?

b) Hur många gånger större yta har Mollymus-målningen på väggen än Mollymus-bilden på vykortet?

Hur löser du problemet?

Förklara hur du resonerar.

Figur 6. Testuppgift 8

Uppgift 9: Stina har ett staket runt sitt kvadratiska trädgårdsland. Stinas bror Olle har också ett staket runt sitt kvadratiska trädgårdsland. Olles trädgårdsland är större än Stinas och han behöver ett staket som är dubbelt så långt.
a) Hur många gånger större är ytan på Olles land jämfört med Stinas land?
b) Olles trädgårdsland är en förstoring av Stinas trädgårdsland. I vilken skala är förstoringen gjord?

Förklara hur du resonerar

Figur 7: Testuppgift 9.

För att kunna svara på dessa frågor korrekt krävs att eleverna kan urskilja längdförändring och areaförändring simultant då dessa båda aspekter efterfrågas.

Uppgift 8 innehåller en bildillustration i form av en oregelbunden figur, d.v.s. inte en geometrisk figur, men den består också av givna mått, d.v.s. eleverna har specifika mått att arbeta med. De har en längd på både originalbilden och avbilden. Lärargruppen valde att ha med en uppgift som denna då de ville se om eleverna kunde transformera sin kunskap vidare.

Uppgift 9 saknar bildillustration, vilket innebar att eleverna inte har en given bild att utgå ifrån, vilket de har haft i alla övriga testuppgifter. Här får de nu själva konstruera bilder.

Lärargruppens intentioner avseende lektionsdesignen

Lärargruppens intentioner avseende studiens lektionsdesign tar sitt avstamp i en problemorienterad inriktning där elevers egna begrepp om och sätt att tänka om avbildningar av geometriska figurer görs till undervisningssituationens innehåll. Eleverna bör, enligt lärargruppen först konfronteras med helheten, en förstoring eller förminskning av en geometrisk figur, för att sedan via kritiska aspekter bryta ner helheten till mindre delar för att på så vis öka förståelsen om den s.k. helheten. Lärargruppen lade därför stor vikt vid den inledande aktiviteten som de kallade ’introduktionsuppgiften’ i vilken de ville visa på den helhet till vilka delarna tillhör, med uppfattningen av att man inte kan lära fler detaljer utan att veta vad de är detaljer av (Marton, 2014). Lärargruppen var överens om att starta lektionen i en s.k. odelad helhet för att genom denna kunna separera ut lärandeobjektet tydligt för eleverna. För att eleverna skulle erfara innebörden av lärandeobjektet utgick lärargruppen ifrån att de genom lektionsdesignen måste skapa möjlighet för eleverna att urskilja aspekterna men även förstå dess relation.

Utifrån resonemanget att man inte kan lära fler detaljer utan att veta vad de är detaljer av drog lärargruppen slutsatsen att eleverna systematiskt borde erfara möjligheten att bryta ner mönstret av linjäritet och bli medvetna om den samtidiga flerdimensionella effekten då längder ändras, vilket betyder att längder, sätt att uttrycka längder (olika drag av aspekten längd), längdskala och geometriska figurer bör varieras i undervisningen. Eleverna behöver således urskilja vad det är som är ett linjärt samband mellan förstorade och förminskade två-dimensionella figurer, d.v.s. vad den linjära skalfaktorn bygger på även i situationer där det också finns ett icke-linjärt samband. Lärargruppen utgick initialt ifrån att det icke-linjära sambandet, d.v.s. areans förändring skulle fokuseras först efter det att det linjära sambandet hade behandlats.

Introduktionsuppgiftens relevans

Alla tre cyklerna startade med samma aktivitet vilken bestod av två delar, del A och del B, och föregås av att en avgränsning har gjorts där det förutsatts att eleverna hade kunskap kring hur man uttrycker skala matematiskt korrekt. Lärargruppen utgick ifrån att det är relevant att rikta engagemanget i denna första aktivitet mot de kvalitativt skilda sätt att tänka kring innehållet som fanns och därigenom utveckla en disposition mot att differentiera linjära och icke-linjära samband istället för att ha fokus mot ett rätt svar. På så vis såg lärargruppen att eleverna gavs möjlighet till mer uppmärksamhet till sitt initierande angreppssätt till problemsituationen och utifrån det kan de sedan erbjudas att urskilja de relevanta aspekterna rörande innehållet – vad som ska läras.

Lärargruppen utgick ifrån att aktiviteten kunde bidra till att den undervisande läraren får möjlighet att använda variation för att hjälpa eleverna att kontrastera intuitiva sätt att se, med vad som verkligen händer.

Elevernas sätt att se kan på så vis komma i förgrunden i deras medvetande och lärargruppen såg fördelaktigt på att det ges tillfälle att öppna upp dimensioner av variation vad gäller olika innehållsliga uppfattningar. Lärargruppen såg på så vis en potential i att kunna använda sig av elevernas varierande sätt att se på innehållet. De var medvetna om att elever i motsvarande ålder inte urskiljer en explicit skillnad mellan längdernas förändring och areans förändring vid förstoring och förminskning av tvådimensionella figurer utan de kan uppfatta att längderna och arean förändras på samma sätt, d.v.s. att om längderna fördubblas, så fördubblas även arean eller så svarar de intuitivt och det går inte att följa någon logik. Med denna design utgick lärargruppen ifrån att eleverna kunde engageras i undervisningen på ett sådant sätt att de bidrog till att gestalta lärandeobjektet och därmed till läranderummets beskaffenhet.

De uppgifter som därefter följde hade som syfte att introducera kontraster för att föra fram elevgruppens olika sätt att se och det nya sättet att se, det avsedda i förgrunden, så att eleverna skulle kunna fokusera på dessa två samtidigt. I denna första aktivitet var ett av målen att eleverna skulle få en relevansstruktur till lärandeobjektet, men även att elever och lärargruppen skulle få en första delad gemensam grund i relation till lärandeobjektet för att sedan kunna gå vidare och skapa ytterligare mening åt lärandeobjektet. De mönster av variation som planerades att iscensättas under introduktionsuppgiften var tänkta att ge eleverna möjlighet att urskilja längder samt dess förändring vid avbildning och utifrån det hantera skala.

En översikt av lektionernas aktiviteter

Lärargruppen designade tillsammans de aktiviteter som lektionen byggdes upp kring samt de mönster av variation som genom dessa aktiviteter skulle iscensättas. Aktiviteterna är ordnade i tabellform utifrån under vilka lektioner de genomfördes. De aktiviteter som ingår i resultatredovisningen är de som visat sig vara avgörande för studiens resultat.

Tabell 8. Studiens planerade aktiviteter – en översikt

Cykel 1	Cykel 2	Cykel 3
Lektion 1a (45 minuter)	**Lektion 2a (60 minuter)**	**Lektion 3a (60 minuter)**
Fotografiet (introduktionsuppgift A)	Fotografiet (introduktionsuppgift A)	Fotografiet (introduktionsuppgift A)
Plustecknet (introduktionsuppgift B)	Plustecknet (introduktionsuppgift B)	Plustecknet (introduktionsuppgift B)
	Kvadrat. Förstoring och förminskning	Kvadrat. Förstoring och förminskning
		Cirkel. Förstoring och förminskning
A4-papper. Förminskning 1:2 och 1:4	A4-papper. Förminskning 1:2 och 1:4	A4-papper. Förminskning 1:2 och 1:4
		Rektangel. Förstoring med och utan mått.
Lektion 1b (70 minuter)	**Lektion 2b (70 minuter)**	**Lektion 3b (70 minuter)**
	Diagonalen.	
A4-papper. Förminskning 1:3	A4-papper. Förminskning 1:3	A4-papper. Förminskning 1:3
Pizza	Pizza	Pizza
Dockhus	Dockhus (Tidsbrist, dockhuset blev ej avslutad)	Dockhus (Tidsbrist, dockhuset blev ej avslutad)

Analys av data

Analysen av data har skett i två steg. Den första delen av analysen har skett i samband med genomförandet av cykel 1 till 3. Detta har inneburit att lärargruppen inför och mellan cyklernas lektionspar analyserat undervisningen och elevernas testresultat för att utifrån denna kunna utveckla mönstren av variation ytterligare samt skapa nya aktiviteter för att genom detta möjliggöra ett ökat lärande hos eleverna. Andra delen av analysen har genomförts av forskaren och kan ses som en djupanalys av materialet vilket inneburit att de videoinspelade lektionerna har tittats på och lyssnats till upprepade gånger och också jämförts med elevernas uttryckta förståelse på eftertesten. För att få distans till materialet har denna analys skett tre månader efter lärargruppens analys. Analysen har kopplats till studiens frågeställningar, vilka i det här skedet har fördjupats och har en mer variationsteoretisk riktning;

- Vad behöver eleven urskilja för att se både det linjära och det icke-linjära sambandet, vid förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer och utifrån det hantera skalan korrekt?

- På vilket sätt kan innehållets behandling i form av olika mönster av variation av innehållets kritiska aspekter bidra till att elevernas förståelse av förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer ökar?
- Hur förändras elevernas uttryckta förståelse av lärandeobjektet utifrån hur innehållet har behandlats i undervisningen?

Utifrån empirisk data – de videoinspelade lektionerna, den transkriberade kommunikationen under lektionerna samt resultat från för- och eftertest samt fördröjt eftertest – har studiens forskningsfrågor besvarats. Det empiriska materialet utgörs av text i form av utsagor vilka ska tillskrivas en innebörd. Innebörden konstitueras mellan forskaren och datamaterialet, vilket kräver upprepad läsning av hela det transkriberade materialet samt elevernas resultat på för- och eftertest för att på så vis få en helhetsbild. Ur de transkriberade lektionsinspelningarna har innehållsmässigt avgränsade dialoger, där undervisningsinnehållet behandlas på ett sätt som bedömts ha relevans för forskningsfrågorna, särskilt analyserats.

Analysen fokuserade hur innehållet behandlats under lektionerna med en tyngd på det iscensatta lärandeobjektet. Det iscensatta lärandeobjektet är forskarens beskrivning av vad eleverna möter under lektionerna, vilket i den här studien innebar att innehållets behandling beskrevs och analyserades utifrån vilka mönster av variation som iscensattes och därmed vilka kritiska aspekter som synliggjordes och vilka dimensioner av variation som öppnades upp i relation till lärandeobjektet. Analysen av innehållets behandling kopplades sedan vidare till elevernas uttryckta lärande, vilket möjliggjordes genom analys av svar i de förtest respektive eftertest som eleverna genomförde under studien. Fokus var att peka på avgörande moment för elevernas lärande, d.v.s. de iscensatta mönstren av variation som tycktes visa att eleverna gavs större möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna. Detta betydde att även då beskrivningen av de iscensatta mönstren av variation är forskarens, är analysen gjord med ett elevperspektiv i just dessa lektioner och med ett intresse som riktades mot, vad det var i lektionerna som utvecklade det lärande som eleverna uttryckte i testen. Resultatet av analysen resulterade i en beskrivning av elevernas lärande både på en individuell nivå och kollektiv nivå.

Analysenheten i studien blev således lektionerna och hur de kritiska aspekterna genom mönster av variation gavs möjlighet att urskiljas, vilket kan sägas vara en mikroanalys av hur innehållet behandlades och hur det kunde förstås av eleverna. Analysverktyget är variationsteorin, vilken har beskrivits tidigare. Jämförelsen mellan olika mönster av variation har främst gjorts av forskaren, men även till viss del av lärargruppen under planeringsmöten mellan forskningslektionerna, vilket innebär att betydande stor del av analysen är gjord i efterhand utifrån empirin. Forskaren har pendlat mellan empiri och teori för att fördjupa förståelsen för det fenomen som studerats, vilket innebar att utgångspunkten togs i det oförklarliga och att med hjälp av empiri och teori kunna söka sig fram till ny kunskap om och svar på de forskningsfrågor som är i studiens intresse. Analysen av studien har kontinuerligt presenterats och diskuterats i forskningssammanhang på seminarier med andra forskare.

Genom att tillhandahålla omfattande beskrivningar av hur det specifika matematikinnehållet behandlades under de olika lektionerna, tillsammans med direkta citat från transkriptioner, har en ambition varit att göra redovisningen så tydlig som möjligt, för att läsaren ska kunna bedöma trovärdigheten. Upplägget syftar till att ge en god inblick i det empiriska materialet.

Studien gör inga anspråk på att ge en fullständig bild över de variationer som förekommer under lektionerna utan har begränsats till att beskriva den variation i form av iscensatta mönster av variation som befunnits vara mest avgörande för elevernas lärande när det gäller förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer i relation till begreppet skala.

All videoinspelad data har transkriberats ordagrant. Transkriptionen var till hjälp vid analys. Lärarmötena har inte transkriberats. Elevernas och lärarnas namn har ändrats under transkriptionen och är i texten fingerade. De excerpt som används följer följande struktur.

Tabell 9. Studiens formalia

L:	läraren
E (elevens namn):	elev
…	En paus p.g.a. tvekan eller eftertanke
[…]	Betyder att citatet är nedkortat utan att innebörden har ändrats eller att prat som inte är väsentligt för den aktuella analysen eller som är svårt att identifiera har tagits bort.
[pekar på bild två]	Beskrivning av vad som görs då det förtydligar analys eller excerpt
större	Ord skrivna med fet stil betyder att de har betonats starkt av personen som uttalar det.

KAPITEL 6: STUDIENS RESULTAT

I detta avsnitt redovisas resultatet av den analys som genomförts av det datamaterial som samlats in under studien. Det matematiska innehållet i de sex lektioner som analyseras utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv handlar om förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer i förhållande till begreppet skala. Syftet med studien är att studera undervisningen och beskriva hur innehållets behandling i relation till begreppet skala utifrån design grundad på ett variationsteoretiskt perspektiv påverkar elevernas lärande.

Först presenteras den förtestsanalys, vilken genomförts på uppgiftsnivå, där det går att utläsa att de sedan tidigare uttalade presumtiva kritiska aspekterna urskiljs även i de för studien aktuella elevgrupperna. Dessa är: *urskilja längder och dess förändring, urskilja areaförändringen samt förstå innebörden av korrekt proportionell avbildning och utifrån detta hantera längdskalan korrekt.* Därefter presenteras i tabellform en övergripande sammanställning över de tre cyklernas elevgruppsresultat på alla de tre ingående testerna. Innan analysen av forskningslektionerna beskrivs redovisas lärargruppens övergripande lektionsdesign utifrån de presumtiva kritiska aspekterna och de aktiviteter som syns som en röd tråd genom designen. Analysen av cyklernas respektive två forskningslektioner redovisas i kronologisk ordning. Till denna del kopplas också relationen undervisning och lärande i form av elevernas uppvisade eftertestresultat i förhållande till hur innehållet behandlats under lektionernas aktiviteter avseende iscensatta mönster av variation. En översikt ges också av de läranderum som konstitueras genom lektionernas aktiviteter i respektive cykel och om de möjliggör att lärandeobjektets olika kritiska aspekter lyfts fram eller problematiseras för att åstadkomma den tänkta urskiljningen.

Förtestsanalys

Förtestsanalysen indikerar att majoriteten av eleverna i samtliga tre elevgrupper visar en påtaglig 'illusion av linjäritet'. Den visar samtidigt att 75-80% av eleverna har arean i förgrunden då de ska förminska eller förstora två-dimensionella figurer utifrån en given skala, vilket betyder att de i sina testsvar uttrycker att då längderna i en figur blir dubbelt så långa alternativt fyra gånger så långa blir även arean dubbelt så stor respektive fyra gånger så stor.

Först följer en tabell som visar ett övergripande testresultat för de tre elevgrupperna avseende förtestet. Resultatet visar att elevernas förståelse av lärandeobjektet som helhet inte är tillfredställande. Enligt testet, den tolkning och analys som där görs av elevernas svar tycks grupperna initialt vara nästan likvärdiga avseende förståelsen av det avsedda lärandeobjektet. Elevgrupp 3 indikerar dock ett något lägre resultat.

Tabell 10. Förtestresultat där maxpoängen är 9.

	Medelvärde	**Standardavvikelse**
Cykel 1 (n=17)	2,4	4,7
Cykel 2 (n=17)	2,6	4,7
Cykel 3 (n=11)	1,8	5,9

Förtestsanalysen görs dock på uppgiftsnivå, då det är elevernas urskiljningar av lärandeobjektet som är i fokus. Följande tabell visar elevgruppsresultat på uppgiftsnivå, vilken följs av en analys med fokus på vad eleverna har urskilt.

Tabell 11. Resultat av förtestanalys på uppgiftsnivå. Tabellen visar antal rätta svar och antal elever som inte gav något svar alls.

Uppgift	Cykel 1 n=17	Ej svar	Cykel 2 n=17	Ej svar	Cykel 3 n=11	Ej svar
2b Avbildning	2	5	5	1	1	5
2c Avbildning	6	5	4	5	4	6
3. Förstora en triangel i skala 4:1.	5	4	4	3	1	6
4. Förstora en cirkel i skala 4:1.	4	3	3	4	1	6
5. Förstora en kvadrat i skala 2:1.	5	1	4	1	1	6
8a Urskilja längder och längdförändring	7	5	12	2	4	5
8b Urskilja areaförändring	1	7	1	7	0	5
9a Urskilja areaförändring	5	6	2	6	3	6
9b Urskilja längder och längdförändring	6	7	8	7	1	7

Vad är avbildning och vad är inte avbildning? Testuppgift 2b och 2c

Både uppgift 2b och 2c innebär att eleverna ska urskilja längder, längdförändring, både vad gäller cirkeln och kvadraten. Figuren de utgår ifrån är en kvadrat där en cirkel finns inskriven. Kvadraten och cirkeln ska ses som en helhet, vilken ska förstoras i skala 4:1. Eleverna får flera alternativa bilder utifrån vilka de ska resonera om huruvida dessa är korrekta avbilder eller inte.

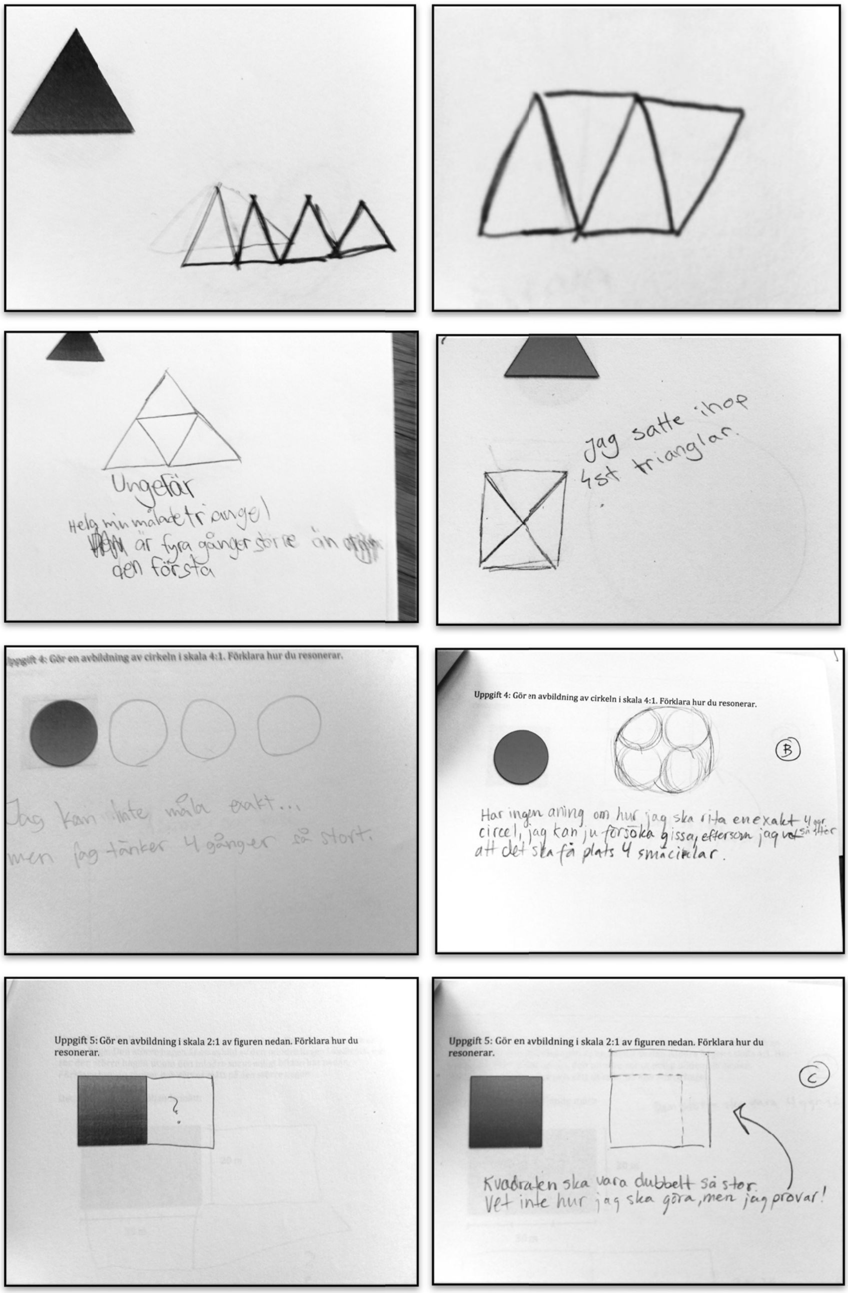
Figur 8. Bild till testuppgift 2b och 2c.

Elevernas uttryckta förståelse på dessa förtest-frågor visar att det finns skillnader mellan deras förståelse av proportionell avbildning. Resultatet visar att när de ska avgöra huruvida figuren ovan, figur 9 blir korrekt avbildad, har de olika delar av figuren i förgrunden. I båda uppgifterna kryssar en majoritet av eleverna för en figur där arean har förstorats fyra gånger då de ställs inför att figuren ska förstoras i skala 4:1, oavsett om cirkeln inuti har förstorats eller inte, d.v.s. har följt med i förstoringen. Detta indikerar att eleverna varken erfar skala korrekt eller innebörden av en korrekt avbildning.

Förstoring av olika geometriska figurer - Testuppgift 3, 4 och 5

På förtestet hade majoriteten av eleverna, utifrån hur lärargruppen ställde frågorna, fokus på arean, då de skulle förstora de olika geometriska figurerna. Flertalet av dessa elever hade inte heller ett samtidigt fokus på likformigheten och konstruerade därav figurer som fick en helt annan form än ursprungsfiguren, men med en area som var fyra respektive två gånger större. Nedan följer exempel på elevernas konstruktioner från förtestet. Genom dessa figurer visas bl.a. att eleverna inte har likformigheten i fokus utan endast att figurens yta ska bli fyra gånger större respektive dubbelt så stor vid skala 4:1 och skala 2:1. Några elever fokuserar dock likformighet, men utgår ifrån att det är arean som ska förstoras fyra resp. två gånger och ritar fyra former som tillsammans bildar en ny större figur av samma form, eller gör kvadratens yta dubbelt så stor. Om det hade varit area-skala som var i fokus hade svaret dock varit rätt. Resultatet i elevgrupp 3 indikerar att de har en mer bristfällig förståelse för lärandeobjektet än de övriga två elevgrupperna.

Följande bilder illustrerar elevernas förförståelse.



Figur 9. Utdrag ur elevresultat i förtestet

Simultan urskiljning - Testuppgift 8 och 9

De två uppgifterna är olika till sin karaktär. Uppgift 8 innehåller, vilket tidigare nämnts, en oregelbunden figur men den består också av givna mått, d.v.s. eleverna har specifika mått att arbeta med. De har en höjd både på originalbilden och avbilden. Uppgift 9 innehåller inga givna mått och heller ingen illustration. Tittar man på förtestresultatet i uppgift 8a, där det frågas efter vilken skala bilden kommer bli avbildad i, är det en stor andel av eleverna i alla tre elevgrupperna som klarar av att lösa den uppgiften. De räknar helt enkelt ut hur många gånger längden av den kortare Molly–mus får plats i längden av den större Molly-mus. Att därifrån fokusera på areaförändringen tycks vara mycket svårare. De två vanligaste svaren på uppgift 8b under förtesten var att arean antingen blev fyra gånger större eller att uppgiften inte gick att lösa då det fattades ett mått, bredden på Molly-mus. Det första svaret tyder på att eleverna innehar en 'illusion om linjäritet'. Uppgift 9 utgår ifrån ett sammanhang där längderna i en kvadratisk trädgård ska dubblas och utifrån detta ska eleverna avgöra skalan i förstoringen av trädgården samt den areaförändring som blir en följd därav. Resultaten visar att det i den här uppgiften finns en större spridning av elevsvaren jämfört med uppgift 8. I uppgift 9 uttryckte en tredjedel respektive nästan hälften av eleverna i cykel 1 respektive cykel 2 att då längderna fördubblas har en förstoring i skala 2:1 gjorts. Överlag lyckas eleverna bättre då de ska urskilja längder och dess förändring än då det är areaförändringen som efterfrågas. Men i elevgrupp tre syns ett motsatt resultat. Tittar man närmare på denna grupps resultat visar det sig att en avsevärt större del av elever i den gruppen inte svarar överhuvudtaget. En elev urskiljer dock både längdförändring och areaförändring korrekt. En annan elev ritar upp en bild på trädgården och fördubblar därefter alla längder, vilket resulterar i en area som blir fyra gånger större, vilket eleven också svarar. Därefter drar eleven slutsatsen att skalan i avbildningen borde vara 4:1. Den här elevens svar indikerar att först hölls längderna och dess förändring i förgrunden, därefter byttes fokus till areaförändring, men då skalan skulle anges behöll eleven sitt fokus på arean, vilket resulterade i att svaret blev inkorrekt. I denna uppgift visar en övervägande del av eleverna inget konsekvent urskiljande d.v.s. de varierar osystematiskt sina urskiljningar och varierar sitt fokus inkonsekvent mellan längdförändring och areaförändring. 'Illusionen av linjäritet' finns inte explicit här, utan elevsvaren tycks bero på vad de har i förgrunden då de tar sig an uppgiften.

De presumtiva kritiska aspekterna i förhållande till förtestsanalysen

Genom elevernas svar på förtestsuppgifterna stärks samtliga presumtiva kritiska aspekter, vilka var identifierade genom lärargruppens tidigare erfarenheter, tillsammans med deras analys av screeningintervjuerna, och resultat från den tidigare forskningen. Då förtesten görs i direkt anslutning till forskningslektionerna används inte dessa resultat inledningsvis utan först efter det att första lektionen i cykel 1 har genomförts och därefter utifrån det kumulativa mönster som redovisats i tabell 7.

Lektionsdesignen utifrån de presumtiva kritiska aspekterna

Inför cykel 1 planerades av lärargruppen tre aktiviteter utifrån lärandeobjektets presumtiva kritiska aspekter; förstå innebörden av avbildning som likformighet, vilket innefattar en urskiljning av längder och längdernas förändring, samt då lärandeobjektet även innebär en hantering av skala urskiljning av areaförändring. Dessa utgjorde initialt en grund till forskningslektionerna 1a och 1b, men visade sig givande och behölls således genom både cykel 2 och 3. Två av aktiviteterna var tudelade, vilket i det här fallet betyder att de utgjorde en generalisering.

Lärargruppen enades om att genom de inledande aktiviteterna öppna upp för variation avseende de kritiska aspekterna; urskilja längder i de geometriska figurerna samt längders förändring vid avbildning utifrån en given skala. Därefter skulle lektionsaktiviteterna rikta elevernas medvetande mot hela lärandeobjektet, d.v.s. att även den kritiska aspekten areaförändring skulle fokuseras och behandlas simultant med längdförändring. Under cykel 2 identifierades ytterligare en kritisk aspekt, den femte, vilken sedan belystes under cykel 3.

Följande tre aktiviteter låg som grund för den ovan beskrivna gemensamma progressionen i alla tre cyklerna. De mönster av variation som iscensätts genom dessa skulle kunna förfinas mellan cyklerna samtidigt som det också gavs möjlighet att skapa nya aktiviteter inför varje cykel, vilka lades till dessa gemensamma. De tre aktiviteterna beskrivs övergripande här för att de är gemensamma för alla tre cyklerna. I den empiriska lektionsanalysen som följer beskrivs dock de nytillkomna aktiviteterna mer ingående.

Introduktionsaktivitetens två delar

Introduktionsaktiviteten, vilken var indelad i två delar skulle inleda alla tre cyklerna. Del A belyste aspekterna; att urskilja längder och längdernas förändring vid en förstoring i relation till aspekten avbildning och del B av introduktionsaktiviteten behandlade samma urskiljning men även i relation till en given skala. Det inledande mönstret av variation var en form av kontrastering, och meningen var att eleverna skulle notera skillnader och likheter. Del A skulle i alla tre cyklerna inledas med en helklassdiskussion, där eleverna skulle, genom de kontrasteringar som iscensätts, ges möjlighet att få syn på vad som är en avbildning och vad som inte är en avbildning, d.v.s. att både kunna urskilja längder och dess förändring i en figur vid en förstoring. Det betyder att bas och höjd ska separeras ifrån varandra, samtidigt som arean ska hållas i bakgrunden. Figuren är ett fotografi i form av en rektangel.

Del B av introduktionsaktiviteten kan ses som en generalisering och är lik del A avseende att även den är uppbyggd kring en originalbild formad som en rektangel, men till skillnad från den tidigare har den nu ett plustecken inuti. Uppgiften inbegrep, förutom de kritiska aspekterna från första delen, även begreppet skala i relation till aspekten avbildning. Undervisningen kring den andra del-aktiviteten var tänkt att bestå både av helklassdiskussioner samt gruppdiskussioner där gruppdiskussionernas innehåll skulle ligga som grund för helklassdiskussionerna, d.v.s. grupperna skall redovisa sina svar och lösningar och det ska göras möjligt att göra innehållsliga kontrasteringar. Genom dessa kontrasteringar var det meningen att eleverna skulle notera skillnader istället för likheter. Uppgiften iscensätts sekventiellt i alla tre cyklerna, d.v.s. bilderna visas en i taget. Dock finns de föregående bilderna kvar och därav möjlighet att göra kontrasteringar mellan bilderna allt efter som. Bildserien utökas för varje cykel med ytterligare en bild. Det planerades inte för några moment då eleverna skulle arbeta individuellt.

Rektangel A4-papper – förminskning

I den här aktiviteten skulle alla de presumtiva kritiska aspekterna fokuseras och innehållet behandlas som en fusion. Aktiviteten skulle inledas som en gruppuppgift där elevgrupperna skulle förminska ett A4-papper i given skala, d.v.s. göra en skalenlig avbildning. Aktiviteten innehåller två delar och är tänkt att fungera som en generalisering utifrån att eleverna först möter skala 1:2 och 1:4, och därefter skala 1:3 under den andra lektionen i respektive lektionspar. Rektangeln förblir konstant, men skalan blir ny, d.v.s. längdförändringen varierar. Aktiviteten var tänkt att ge eleverna möjlighet att separera längd från area, d.v.s. urskilja längder, längdernas förändring och areaförändring vid korrekt avbildning samt dess relation, vid given skala.

I första delen, vilken genomförs under lektionerna 1a, 2a och 3a får alla elevgrupper två A4-papper per grupp. Hälften av respektive lektions elevgrupper får skala 1:2 och den andra hälften får skala 1:4. Ett papper är en s.k. originalbild och det andra ska de använda för att göra en skalenlig avbildning. Skalan de ska använda finns angiven på pappret. Den andra delen av aktiviteten som genomförs under lektionerna 1b, 2b och 3b innebär att alla elevgrupper får två A4-papper där ett fungerar som originalbild och det andra ska förminskas i skala 1:3. Vid varje lektion kan några av elevgruppernas diskussioner följas med hjälp av videokameran.

Pizza-uppgiften

I den här aktiviteten är det en cirkel som ska förminskas. Eleverna arbetar i grupp och för att lösa uppgiften de blir tilldelade måste de urskilja längd, längdförändring och areaförändring simultant, vilket betyder att även denna aktivitet är tänkt att ses som en fusion.

Eleverna fick följande uppgift

Pizzauppgiften.
Kalle och Pelle har gått till pizzerian för att äta. De är hungriga och vill ha så mycket pizza som möjligt. De funderar på om de ska ta varsin barnpizza eller om de ska dela på en familjepizza för att få så mycket pizza som möjligt. En pizza från barnmenyn är **likformig** med familjepizzan men **förminskad** i **skala 1:2.**
Vilket alternativ är det bästa om killarna ska få så mycket pizza som möjligt? Eller spelar det ingen roll?

Förklara hur du resonerar.

Den variation som skapas i den här aktiviteten, genom att jämföra elevernas lösningar, är tänkt att möjliggöra urskiljning av de kritiska aspekterna. Kontrasten mellan elevsvaren lyfter inte bara fram att det kan finnas olika typer av lösningar, utan visar även på olika aspekter i relation till lärandeobjektet. När olika lösningssätt blir synliggjorda, då uppgiften hålls konstant, öppnas för en variation, men utan att 'rätt svar' är i förgrunden. Elevgruppernas lösningar ska redovisas på tavlan och hur de angripit uppgiften sätts i fokus och prövas. Spontana mönster av variation kan skapas utifrån elevernas olika lösningar, svar och argument, d.v.s. mönster som inte är planerade av lärargruppen utan iscensätts på grund av elevernas uttryck. Så som innehållet ges möjlighet att behandlas här, är det inte det lösningssätt som leder fram till rätt svar som fokuseras, utan det är variationen av sätt och urskiljningar som leder fram till rätt svar som ges möjlighet att lyftas fram och kontrasteras för att hitta likheter och skillnader. Att veta varför rätt svar är rätt blir viktigare än att bara komma fram till vad som är 'rätt svar'. Lärargruppens intention var i den här aktiviteten att olika lösningssätt kan fokuseras, samtidigt som de olika aspekterna urskiljs genom att bl.a. uppmuntra eleverna att förklara sitt lösningssätt och tala om vad de har fokuserat. Dock var lärargruppen varse att då uppgiften var att välja så mycket pizza som möjligt kunde det fresta eleverna att fokusera areaförändringen, d.v.s. att de sätter areaförändringen i förgrunden och att de inte separerar längd från area.

Elevgruppernas samlade resultat på testerna

Analysen bygger på ett samlat resultat av de redan beskrivna testfrågorna 2b, 2c, 3, 4, 5, 8a, 8b, 9a och 9b. Anledningen till att just dessa frågor valts från testet är att de visade sig vara de mest relevanta huruvida eleverna har erfarit lärandeobjektet. Från den första till den tredje cykeln kan positiva skillnader i elevgruppernas lärande identifieras. Samtliga resultat per gruppnivå ökar mellan för- och eftertest och bibehålls i stor utsträckning även till det fördröjda eftertestet. Den tydligaste och mest positiva förändringen nåddes efter cykel 3, där man i tabellen kan se att medelvärdet för den elevgruppen ligger högst. Som tabellen också visar är det denna elevgrupp som inte bara har det högsta medelvärdet utan också den elevgrupp som utvecklat sitt lärande mest mellan för- och eftertest

Tabell 12. Sammanställning av elevgruppsresultat avseende medelvärde och standardavvikelse där maxpoängen är 9.

	Förtest		**Eftertest**		**Fördröjt eftertest**	
	Medelvärde	St.avvikelse	Medelvärde	St.avvikelse	Medelvärde	St.avvikelse
Cykel 1 (n=17)	2,4	4,7	(+2,2) 4,6	8,6	(+0,1) 4,7	8,1
Cykel 2 (n=17)	2,6	4,7	(+3,9) 6,5	4,1	(-0,3) 6,2	3,8
Cykel 3 (n=11)	1,8	5,9	(+5,3) 7,1	5,5	(-0,2) 6,8	4,5

Testresultatet visar övergripande att om eleverna endast kan urskilja enskilda kritiska aspekter individuellt, men missar urskiljningen av dessa vid iscensättningen av en fusion då en samtidig urskiljning av alla de kritiska aspekterna och relationen dem emellan sker, resulterar det i att de inte kommer förstå lärandeobjektet så som önskvärt, och kommer troligtvis inte heller att kunna applicera sådan kunskap för att lösa nya problem. Om eleverna ska öka sin förståelse kring det specifika lärandeobjektet ser ut att handla om huruvida läraren möjliggör en sådan fusion för eleverna. Empiriska jämförelser på uppgiftsnivå av de tre cyklerna följer i nästa avsnitt. Syftet är att beskriva de mönster av variation som iscensätts samt peka på vad som tycktes vara avgörande för elevernas lärande.

Analys av studiens tre cykler

Strukturen på analysen följer de tre cyklerna kronologiskt där fokus riktas mot hur de kritiska aspekterna problematiseras genom de mönster av variation som iscensätts utifrån de aktiviteter som planerats av lärargruppen. Först redovisas en kort beskrivning av aktiviteten, därefter följer utdrag från hur interaktionen mellan innehåll, lärare och elev fortskred under lektionerna och på så vis kan läsaren få inblick i hur dessa mönster av variation utvecklades av lärare och elever tillsammans. De iscensatta mönstren av variation visas i tabeller i slutet av varje aktivitet på ett sätt så att det ska gå att följa progressionen av mönstren.

Rikligt med excerpt återfinns från lektionerna för att åskådliggöra hur innehållet behandlades och vilka mönster av variation som iscensätts.

Resultat av analys av lektionsparet i cykel 1

Fotografiet - Introduktionsuppgift del A

Fotografierna visas i sekvenser under lektionen, d.v.s. att eleverna fick diskutera varje bild för sig i relation till originalbilden, men då inga bilder tas bort då en ny visas får eleverna i slutet av uppgiften se alla bilderna samtidigt. Läraren talade inte om hur relationen förhöll sig mellan längders förändring och korrekt matematisk avbildning, utan istället gav läraren eleverna möjligheter att själva kunna dra relevanta slutsatser genom flertalet problematiserande frågor. Eleverna ska här ges möjlighet att separera bas och höjd samt urskilja den relation som krävs dem emellan för att de ska vara en korrekt avbildning.

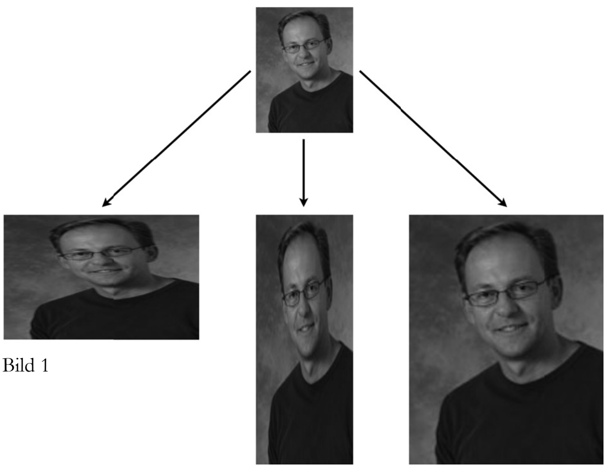


Bild 1

Bild 2

Bild 3

Figur 10. Bild till introduktionsuppgiften del A.

Läraren visar bild 1.

Excerpt 2

L: Vi tar ett exempel.

L: Är den här bilden en avbildning av Tom? [Pekar på exempelbild 1]

E (flera): Ja.

L: Ja säger du Anna, varför det? Varför är det en avbild, tycker du?

E: (Anna): Man ser ju att det är han.

Ovanstående utdrag kan indikera att eleverna intuitivt uppfattar att en avbildning är att man kan se vad det föreställer. Eleverna urskiljer inte relationen mellan längdernas förändring, d.v.s. innebörden av likformighet.

Excerpt 3

L: Då menar ni att den här är utdragen [Pekar på basen i bild ett]. Den har blivit längre här på något vis.

En kontrastering görs mellan basens förändring och höjdens förändring mellan originalbilden och bild 1. Därefter visar läraren bild 2.

Excerpt 4

L: Vad säger ni om den här då? [Klickar fram bild 2] Är det en avbild av det fotot?

E (Josephine): Den är bara utdragen så nu.

L: Ja, nu är den så här i stället, nu är den längre, den har dragits ut. [Pekar på höjden]

L: Har den dragits ut? [Pekar på bredden]

E (Beata): Den är utdragen på längden men inte på bredden.

L: Så nu är den sidan utdragen och innan den sidan utdragen. [Pekar]

L: Men tycker ni att båda är avbildningar eller?

E (Josephine): Ja, det är ju samma.

Eleverna ges möjlighet att urskilja relationen mellan basens och höjdens längdförändringar vid korrekt avbildning. En elev visar att hon uppfattar både bild 1 och 2 som korrekta avbildningar av originalbilden, vilket dock inte kommenteras av läraren som istället visar bild 3, den korrekta avbildningen.

Excerpt 5

L: Vad säger ni om den här då? [Klickar på bild 3]

E (Beata): En förstoring.

L: Den är förstorad? Men den var inte förstorad eller? [Pekar på bild 2]

E (Beata): Alltså de har ju tagit bort en del av bilden.

L: Ja, men hela Tom är ju med.

L: Och hela Tom är ju med här också [Pekar på bild 1]

L: Alva?

E (Alva): Båda har dragit ut på längden och bredden.

[…..]

L: Det är bara **en** bild som är en avbildning, men det som är viktigt här, Jocke började dra i något om längderna.

L: Det är om vi gör en avbildning och förstorar den. Då måste vi förstora både den längden och den längden och det har vi gjort här [pekar på bild 3]

[…]

L: Då finns det ett till viktigt ord här och det är att 'det ska vara likadant', det var ju du inne på Felix, eller hur?

E (Felix): Mm

L: Likformigt kan man prata om.

Motivet, d.v.s. bilden inuti rektangeln, belyses inte. Det görs en kontrast mellan den korrekta avbildningen och de två föregående förslagen bl.a. genom att använda ett tidigare påstående från en elev, dock ett felaktigt sådant, angående begreppet avbild i förhållande till innebörden av förstoring.

Trots att både elever och lärare pratar i termer av att bilden ska vara *likadan*, öppnas inte den dimensionen av variation explicit, d.v.s. motivets längder fokuseras inte.

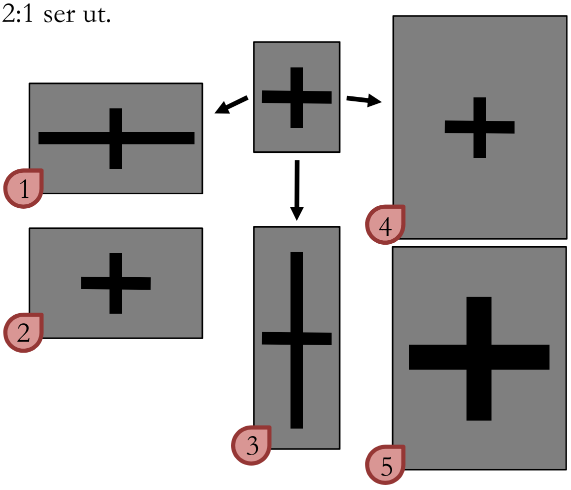
Här nedan följer en övergripande sammanfattning över de mönster av variation som användes av läraren för att möjliggöra för eleverna att erfara innebörden av likformighet och dess betydelse vid avbildning. Beteckningen 'v' står för att aspekten varierades och beteckningen 'i' för att aspekten hölls invariant.

Tabell 13. Sammanfattning av de iscensatta mönstren av variation i introduktionsuppgiften del A i cykel 1

Moment	Bas	Höjd	Motiv	Area	Urskiljning
Bild1. Bas fördubblas.	v	i	Fokuseras inte	Fokuseras inte	Separera bas och höjd och urskilja dess förändring.
Bild 2. Höjd fördubblas.	i	v	Fokuseras inte	Fokuseras inte	Separera bas och höjd och urskilja dess förändring.
Bild 3. Korrekt avbildning.	v	v	Fokuseras inte	Fokuseras inte	Separera bas och höjd och urskilja dess förändring och relation vid en avbildning (förstoring).

Plustecknet - Introduktionsuppgift del B

Mer ingående information avseende aktivitetens design kan läsas på s. 88. Denna deluppgift i likhet med den föregående startas upp med en originalbild vars form är en rektangels, men nu med ett inskrivet plustecken. Meningen är att det ska göras möjligt för eleverna att urskilja längder och längdernas förändring i relation till avbildning och en given skala. Eleverna får, som en första deluppgift diskutera i grupp, hur en förstoring av originalbilden i skala 2:1 ser ut.



Figur 11. Bild till introduktionsuppgiften del B, cykel 1

Efter gruppdiskussionerna kontrasterar läraren elevgruppernas svar med sina färdiga förslag; bild 1 t.o.m. bild 5 (se bild ovan), huruvida de kan vara en avbild i skala 2:1 eller inte. Eleverna få här kontrastera sina slutsatser från gruppdiskussionerna med de bilder läraren visar upp. De planerade mönstren av variation som läraren visar upp är dock i förgrunden och det är utifrån dessa som helklassdiskussionen förs. Eleverna gör jämförelser mellan de olika alternativa bilderna för att urskilja vilken som är korrekt och varför. Kontraster görs mellan inkorrekta avbildningar och den korrekta avbilden. De ges möjlighet att separera bas och höjd samt se dess relation vid den givna skalan. De ges även möjlighet att urskilja motivets, själva plustecknets längder. Läraren startar, efter att ha gått runt och lyssnat på elevgrupperna, en helklassdiskussion.

> <u>Excerpt 6</u>
>
> L: Jätteintressanta frågor när jag går runt och lyssnar här. Det har varit frågor som 'vad händer, den ska ju bli dubbelt så stor', säger ni. Dubbelt så stor, vad kommer den dubbelt ifrån, vad har den att göra med det här på något sätt. [pekar på 2:1, som är skrivet på tavlan]
>
> […]
>
> L: Frågan är bara vad vi vill ska vara dubbelt så stort? För det är massa olika saker, åtminstone tre olika saker som skulle kunna vara dubbelt så stort. [visar bild 1]
>
> […]
>
> E (Saga): Alltså, jag tänkte nog, borde inte arean bli dubbelt så stor också då? Om man tar, längden blir dubbelt så stor och bredden också blir dubbelt så stor?
>
> L: Det ser ut som det, att det får plats två sådana där i ja. [Pekar på bild 1.]
>
> […]
>
> L: Men vad är det som ska dubblas?

I utdraget ovan lyfter en elev upp aspekten, areans förändring vid förstoring i skala 2:1. Läraren väljer i det här läget, trots elevens inspel att fortsätta ha längdernas förändring i förgrunden och låter areans förändring ligga kvar i bakgrunden och går vidare genom att visa bild 2.

Läraren uppmanar eleverna att söka efter likheter och skillnader mellan bild 1 och 2. Meningen är att eleverna här ska ges möjlighet att urskilja motivets längder. Gemensamt mellan bilderna är att endast basen har fördubblats.

Excerpt 7

E (Nils): Jag bara undrar, borde inte korset också bli lite tjockare?

L: Menar du den? [pekar på bild 1] Menar du längre eller tjockare?

E (Nils): Tjockare.

L: Tack Nils.

Läraren öppnar inte dimensionen motivets längder explicit i denna sekvens utan återkommer till denna först efter att alla bilder har fokuserats.

I nästa sekvens lyfts återigen aspekten längd, genom att en elev belyser motivets längder. Dessutom återkommer areaförändringen.

Excerpt 8

L: Vi pratar om avbildning och förstoring eller förminskning. Och vad var det som var dubbelt? [pekar på texten 2:1 på tavlan] Jo, det är längderna, eller som Nils var inne på, då borde allting bli tjockare dessutom.

L: Vad säger ni om den här då? Jämför den här. [Visar bild 5 tillsammans med tidigare bilder]

E (Teo): Den är rätt.

L: Varför det?

E (Teo): Alla sidor har dubblats.

L: Jo, men det hade de gjort där också [pekar på bild 4]

E (Teo): Nej, inte korset. Korset har också längder.

[…]

L: Saga, hade en jättebra tanke som jag vil lyfta med er. Du sa att om nu längderna eller omkretsen blir dubbelt så stor, blir inte arean dubbelt så stor då?

L: Vi tar och jämför de två. [pekar på originalbild och bild 5]

L: Är det dubbelt så stor area som den här? [pekar]

L: Vad tänker du Nils?

E (Nils): Att den är fyra gånger.

L: Kan det vara rimligt? Ska vi kolla om det får plats fyra sådana här då?

[…]

L: Märker ni något skumt att fast vi dubblerar längderna så blir inte arean dubbelt så stor. Den blir fyra gånger så stor.

Ovanstående utdrag visar att eleverna ges möjlighet att separera längder ifrån area. En kontrast görs mellan rektangelns omgivande längder och längder inuti rektangeln, d.v.s. motivets längder. Elevernas tidigare inspel används också för att kunna göra en kontrastering mellan längdförändring och areaförändring.

Här nedan följer en övergripande sammanfattning över de mönster av variation som användes av läraren för att möjliggöra för eleverna att erfara innebörden av likformighet och dess betydelse vid avbildning vid en given skala.

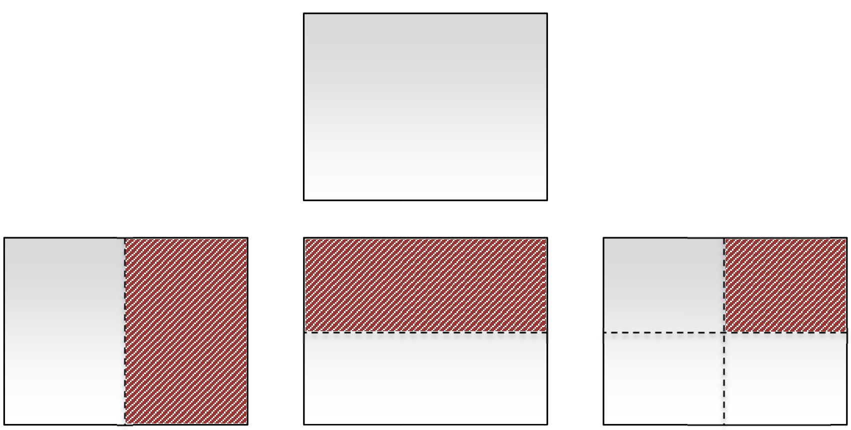
Tabell 14. Sammanställning av de iscensatta mönstren av variation i introduktionsuppgiften del B i cykel 1

Moment	**Bas**	**Höjd**	**Motiv**	**Area**	**Urskiljning**
Bild 1. Basen dubblas. Motivet förändras.	v	i	v	Lyfts av en elev, men fokuseras inte.	Urskilja längder och dess förändring. (Separera bas och höjd.)
Bild 2. Basen dubblas.	v	i	i	Fokuseras inte	Se ovan
Bild 3. Höjden dubblas. Motivet förändras.	i	v	v	Fokuseras inte	Se ovan
Bild 4. Basen och höjden dubblas. Motivet är invariant.	v	v	i	Fokuseras inte	Se ovan
Bild 5. Basen och höjden dubblas. Motivets alla längder dubblas. En korrekt avbildning.	v	v	v	v	Urskilja längdförändring i relation till avbildning samt areaförändringen i relation till korrekt avbildning.

Rektangel A4-papper – förminskning

Nästföljande aktivitet är tvådelad. Mer information angående aktivitetens upplägg finns att läsa på s. 88. Det är flera mönster av variation som iscensätts genom denna tvådelade aktivitet. Aktiviteten innebär en fusion, vilket betyder att alla kritiska aspekter ska ges möjlighet att urskiljas; längder, längdförändring, areaförändring och korrekt avbildning. Aktiviteten innehåller även kontrasteringar och generaliseringar. Här skapas spontana mönster av variation utifrån elevernas svar och argument. Kontrasteringar görs mellan elevgruppernas svar och lösningar då dessa redovisas på tavlan och eleverna uppmanas att tala om vad de har urskilt, vilket sedan fokuseras och prövas. En planerad generalisering sker då rektangeln hålls konstant genom den tudelade aktiviteten, men där längdförändringar varierar genom de olika skalorna eleverna erbjuds, från skala 1:2, 1:4 i den första delen och skala 1:3 i den andra delen.

Aktiviteten iscensätts genom att elevgrupperna har fått sina uppgifter och instruktioner över vad som förväntas av dem. Hälften av grupperna i klassrummet har fått uppgiften att förminska A4-pappret i skala 1:2 och den andra hälften i skala 1:4. Läraren betonar under arbetets gång att hon vill att de ska berätta hur de löst uppgiften. Hur de löst uppgiften ska de sedan redovisa i helklass. Första gruppen som kommer fram till tavlan har två olika lösningar med sig, då de ska förminska sitt papper i skala 1:2, vilket läraren uppmärksammar och senare utnyttjar för att på så vis genom kontrastering få eleverna att urskilja det hon planerat att de skulle urskilja; längder, längdförändring och areaförändring i avbildningen.



Figur 12. Aktiviteten 'A4-pappret' i skala 1:2 i cykel 1

Läraren väljer att inte diskutera varje lösning för sig, utan väntar tills alla lösningar är uppe på tavlan och ber därefter eleverna att jämföra dem.

Excerpt 9

L: Ser ni här. Vi har alltså den, den och den.

L: Var jättegärna med här nu med kommentarer. Vilken av dem stämmer? Vilken liksom, hur var det, vad var det egentligen som skulle vara dubbelt eller hälften?

[Flera elever hörs och vill vara med.]

L: Men jag börjar med Fanny, du hade en tanke Fanny, vad tänkte du?

E (Fanny): Måste ju dela båda längderna med två.

L: Båda längderna?

E (Fanny): Ja.

[Läraren visar på bilden på tavlan.]

E (Fanny): Ja, deras grupp har ju bara delat ena sidan.

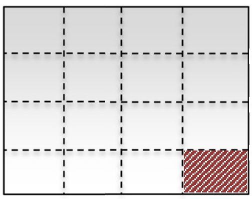
[Läraren pekar på tavlan].

L: Ja, de tog den sidan och vek så.

E (Fanny): De ska dela andra sidan också.

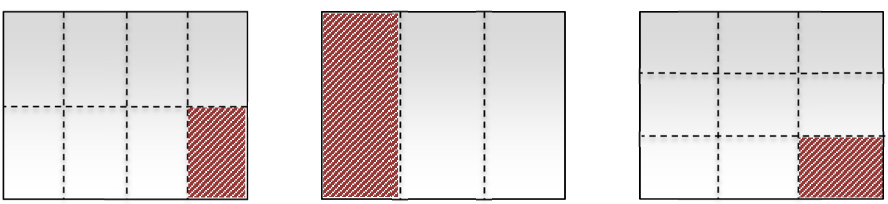
En kontrastering görs mellan de tre olika svaren för att eleverna på så vis ska få möjlighet att urskilja längder och dess förändring. Under detta moment pratar läraren om vikningar, hon vill veta hur eleverna vikt pappret. Det blir inte explicit att det handlar om att urskilja och dela längderna. Några av eleverna däremot pratar om att dela längderna, men läraren uppmärksammar inte detta utan fortsätter att prata vikningar, så som i utdraget ovan då Fanny ska tala om hur hon resonerar. I det här fallet sammanfaller antalet vikningar med antal gånger en sida ska delas. För att förminska A4-pappret i skala 1:2 innebär att de kommer att vika pappret två gånger. De elever som endast halverat en av sidorna kan ha haft areaförändringen i förgrunden, d.v.s. att det är arean som ska halveras. Eleven Fanny drar dock slutsatsen att eleverna som delat pappret i två lika stora delar endast har delat papprets ena sida med två, vilket skulle kunna tolkas som att Fanny själv har urskilt längder, något som också utdraget ovan indikerar.

I lektion 1a görs i den här aktiviteten inte explicit vad avbildning i skala 1:2 innebär, varken då det gäller att urskilja längdernas förändring, areaförändringen eller relationen dem emellan. Vikningarna kommer i förgrunden och det blir svårt att separera längd från area. Härefter är det de elevgrupper som skulle förminska pappret i skala 1:4 som ska redovisa sina lösningar. Alla grupper redovisar en korrekt avbildning. Eleverna pratar dock om hur de **vikt** pappret. I förhållande till momentet innan får eleverna en större möjlighet att beskriva hur de tänkt. Men även här kan eleverna vika pappret fyra gånger för att få rätt svar.



Figur 13. Elevlösning till 'A4-pappret' i skala 1:4 i cykel 1

Att eleverna har fokus på själva vikningen av pappret syns även i nästa del av uppgiften, den som iscensätts under lektion 1b, vilket kan ses som en generalisering avseende den tidigare A4-uppgiften. Lektion 1b behandlar istället skala 1:3, men figuren i fråga hålls konstant, genom rektangeln. En dimension av variation avseende lösningsstrategier öppnas upp. Att förminska A4-pappret i skala 1:3 kan innebära tre olika saker: tre vikningar, tre gånger så liten area eller tre gånger så korta längder.



Figur 14. Elevlösning till 'A4-pappret' i skala 1:3 i cykel 1

Den första lösningen är gjord av den grupp som läraren inte uppmärksammade då de var framme vid tavlan och redovisade. De två eleverna som var framme vid tavlan var inte överens om hur de såg på sitt svar och inte heller på sin lösning. Denna grupp som vikt pappret tre gånger fick inte möjlighet att sätta ord på hur de tänkt. De visar att de tror att vika tre gånger är det rätta, men blir förbryllade över att figuren som kommer fram inte är rätt. Efter mycket diskussion släpper läraren den här elevgruppens felaktiga lösning då hon inte tycks förstå hur de tänkt och går vidare.

I det här momentet görs det inte möjligt för eleverna att separera längder från area och inte heller längdförändring från areaförändring.

Här nedan följer en övergripande sammanfattning över de mönster av variation som användes av läraren för att möjliggöra för eleverna att erfara innebörden av förminskning av en rektangel vid flera olika givna skalor.

Tabell 15. Sammanfattning av de iscensatta mönstren av variation i aktiviteten 'A4-pappret' i cykel 1

Moment	Längdförändringar	Area	Urskiljning
Förminskning av en rektangel i skala 1:2 och 1:4	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring i relation till den givna skalan.
Förminskning av en rektangel i skala 1:3	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring i relation till den givna skalan.

Pizza – förstoring och förminskning av cirkel

Den sista aktiviteten i cykel 1 innebär att en i sammanhanget helt ny geometrisk figur blir en del av innehållet. Mer information avseende aktivitetens design kan läsas på s. 89. Aktiviteten är en gruppuppgift där eleverna i denna nya figur ska ges möjlighet att urskilja längder, samt längdförändringar och areaförändringar då figuren ska förstoras respektive förminskas.

Pizzauppgiften.
Kalle och Pelle har gått till pizzerian för att äta. De är hungriga och vill ha så mycket pizza som möjligt. De funderar på om de ska ta varsin barnpizza eller om de ska dela på en familjepizza för att få så mycket pizza som möjligt. En pizza från barnmenyn är **likformig** med familjepizzan men **förminskad** i **skala 1:2.**
Vilket alternativ är det bästa om killarna ska få så mycket pizza som möjligt? Eller spelar det ingen roll?

Förklara hur du resonerar.

Spontana mönster av variation skapas utifrån elevernas olika lösningar, lösningsstrategier och argument. De olika lösningsstrategierna är tänkta att fokuseras samtidigt som de olika aspekterna urskiljs.

> Excerpt 10
>
> E (Gustav): Då får man dubbelt så mycket om man tar familjepizzan.
>
> L: Hur?
>
> E (Joakim): Men det ska ju inte vara att man delar, det är ju skala, eller det är ju inte riktigt samma sak.

Att dela en yta, men samtidigt fokusera längdförändringar och förstå hur detta förhåller sig till skalan tycks vara svårt att erfara för eleverna när det gäller den geometriska figuren cirkeln. Ovanstående utdrag kan indikera att flera elever har svårt att separera längder från area samt relatera detta till skala.

Flera elevgrupper visar genom sina lösningsförslag att de inte har separerat längd från area och inte heller att de explicit urskilt längdförändring och areaförändring i förhållande till den givna skalan.

> Excerpt 11
>
> E (Alma): Och i fall man viker först så, sen så - då hade man den.
>
> L: Cirkelpapper och vikt?
>
> E (Alma): Ja, hade inte det fungerat?
>
> L: Vad säger ni hade det fungerat?
>
> E (Teo): Det blir inte likvärdigt. Det blir fortfarande en fjärdedel, men det blir en.
>
> L: Ja, just det den blir inte likformig.
>
> […]
>
> L: Jag sa till er att ert resonemang stämmer, men det måste vara en cirkelformad pizza. Men en fjärdedel har ni rätt i.

En elevgrupp, vilket visas i ovanstående utdrag, gör en generalisering från A4-aktiviteten, där det återigen syns att vikningar delvis var i förgrunden under den aktiviteten. Eleverna tänker sig att pizzan ses som ett cirkelformat papper som viks så att rätt storlek fås fram. Denna elevgrupp separerar inte heller längder från area. Inte några av de presumtiva kritiska aspekterna; längd, längdförändring och areaförändring öppnas upp explicit under denna aktivitet.

Här nedan följer en övergripande sammanfattning över de mönster av variation som användes av läraren för att möjliggöra för eleverna att erfara innebörden av förminskning av en cirkel vid en given, men sedan tidigare känd skala.

Tabell 16. Det övergripande mönstret av variation avseende en generalisering från föregående aktivitet i cykel 1.

Moment	Geometrisk form	Längdförändring	Urskiljning
Förminska en cirkel i skala 1:2.	v	i	Längder

I aktiviteten 'pizza' fick alla elevgrupper samma uppgift. De olika elevgruppernas lösningssätt varierades och uppgiften kunde ses som konstant.

Tabell 17. Det övergripande mönstret av variation för aktiviteten 'Pizza' del 1 i cykel 1.

Moment	Lösningssätt	Uppgiften	Urskiljning
Förminska en cirkel i skala 1:2.	v	i	Olika lösningssätt kan ge ett 'rätt svar'.

Genom uppgiftens utformning som en fusion iscensattes mönster av variation där både längder och area varierade.

Tabell 18. Det övergripande mönstret av variation för aktiviteten 'Pizza' del 2 i cykel 1

Moment	Längder	Area	Urskiljning
Förminska en cirkel i skala 1:2.	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring

Analys av lektionernas möjliggörande av elevernas kunnande i cykel 1

Hur kan elevernas lärande förstås i skillnaderna i elevresultat på eftertestsuppgifterna i ljuset av hur innehållet behandlades i de båda lektionerna? Resultatredovisningen är uppdelad i tre delar, där den första delen riktar sig mot elevresultat i testuppgifter 2b och 2c där längder och längdförändringar i relation till avbildning och en given skala fokuseras. Areaförändringen förväntas hållas i bakgrunden då den inte explicit efterfrågas. Även andra delen, uppgift 3, 4 och 5, fokuserar urskiljning av längder och längdförändring vid given skala, men den geometriska figuren som ska förstoras varieras. Tredje och sista delen, uppgift 8 och 9 testar huruvida eleverna kan ha både längdförändring och areaförändring i förgrunden, d.v.s. en simultan urskiljning efterfrågas.

I tabell 19 här nedan, visas elevgruppsresultat på de nio frågorna på för- och eftertest samt i det fördröjda eftertestet.

Tabell 19. Sammanställning av elevgruppsresultat på uppgiftsnivå i cykel 1

Uppgift	**Förtest n=17**	**Ej svar**	**Eftertest n=17**	**Ej svar**	**Fördröjt eftertest n=17**	**Ej svar**
2b. Avbildning	2	5	10	0	10	0
2c. Avbildning	6	5	13	0	14	0
3. Förstora en triangel i skala 4:1.	5	4	10	0	10	0
4. Förstora en cirkel i skala 4:1.	4	3	6	0	8	0
5. Förstora en kvadrat i skala 2:1.	5	1	9	0	10	0
8a Urskilja längdförändring	7	5	11	2	10	6
8b Urskilja areaförändring	1	7	1	9	2	7
9a Urskilja areaförändring	5	6	6	5	5	3
9b Urskilja längdförändring	6	6	11	4	11	3

Vad är avbildning och vad är inte avbildning? Testuppgift 2b och 2c

Resultatet i cykel 1 tyder på en ofullständig förståelse av vad en avbildning innebär, vilket antyder att det förväntade lärandet under introduktionsaktiviteten i cykel 1, då längder och längders förändring behandlats i förhållande till avbildning och skala, inte har uppnåtts. Drygt en tredjedel av eleverna i gruppen visar genom sina eftertestsvar att de troligtvis fortfarande har arean i förgrunden då de ska förstora den givna bilden i skala 4:1, vilket betyder att de gör arean fyra gånger större. De har inte givits möjlighet att under lektionen urskilja längder och dess förändring vid en given skala. Däremot är det två tredjedelar av eleverna som har urskilt innebörden av avbildning. Den sista tredjedelen elever har inte motivets längder i förgrunden utan visar genom sina svar att de endast har urskilt formens, i det här fallet, kvadratens ytterlängder och att det är dessa som ska bli fyra gånger så långa. Drygt hälften av eleverna har urskilt både formens (kvadraten) längder och motivets längder i relation till den givna skalan, d.v.s. de ger uttryck för att förstå den statiska proportionaliteten. Den övriga halvan av elevgruppen visar att de fortfarande har problem med att hålla längdförändringen i förgrunden genom att de inte verkar separera längdförändringen från areaförändringen utan de anger att en bild vars yta har blivit fyra gånger större är den korrekta avbildningen vid skala 4:1. De visar på så vis att de fokuserar areaförändringen, d.v.s. de har areaförändringen i förgrunden då de löser uppgiften.

En elev har motiverat sitt svar *'För nu får kvadraten plats fyra gånger i bredden och längden. Cirkeln är också rätt i förstoring'.* Det är en motivering som inte talar för en explicit urskiljning av längder, utan att det är former som jämförs med längder. Med hänvisning till hur innehållet behandlades under lektionerna i cykel 1 blev inte separation av längder från ytor så explicit, utan läraren uttryckte att det *'får plats mindre former i större former'.* Avbildningen blir inte heller separerad från ursprungsfiguren utan den kan uppfattas som en del av ursprungsfiguren. Under lektionens aktivitet, då A4-papper användes och skulle delas i rutor för att åskådliggöra förminskningen, kom inte längder och längdförändringar i fokus utan det var istället antal vikningar och antal rutor eller former som var i fokus. Även denna aktivitets iscensättning kan ha påverkat elevernas svar på dessa testuppgifter. Motivets längder behandlas inte i introduktionsuppgift del A utan endast i del B. Eleverna har överlag givit knapphändiga motiveringar till sina svar.

Förstoring av olika geometriska figurer - testuppgift 3, 4 och 5

Lektionerna i cykel 1 har behandlat förstoring av rektangeln och cirkeln, men inte triangeln, vilket betyder att eleverna endast kunde lösa testuppgift 3 genom att använda tidigare kunskaper eller inneha förmåga att omvandla kunskap som de erfarit under studiens lektioner till användbar kunskap i för dem denna nya situation. Under cykel 1, där det inte gjordes möjligt att iscensatta flera eller explicita mönster av variation för att varken urskilja längder och dess förändring eller för att urskilja areaförändring, kan man se att endast en tredjedel av eleverna har erfarit förmågan att urskilja längder i alla dessa tre figurer, då de ska göra en skalenlig förstoring. Flera elever skriver fortfarande bara att figuren ska bli fyra gånger större respektive två gånger så stor, men de uttrycker inte **vad** som ska bli större. Cirkeln ser ut att vara ett problem för eleverna. De svarar visserligen på den frågan under eftertestet, men antingen har de gjort arean fyra gånger så stor eller så har de bara skrivit att cirkeln ska bli fyra gånger större utan att tala om vad som ska bli fyra gånger större. Till uppgiften där triangeln ska förstoras ritar drygt hälften av eleverna en korrekt förstoring. Bland de övriga åtta eleverna ritar sex stycken en större triangel, men de talar inte om vad det är som blivit fyra gånger större. En av dessa åtta elever uttrycker tydligt att det är arean som ska göras fyra gånger större. En elev har inte fokuserat likformighetsaspekten och sätter ihop en bild där fyra trianglar hänger ihop och bildar en helt annan form. Samma analys kan dras utifrån elevresultaten när det gäller kvadraten. Majoriteten av de elever som inte gör en korrekt förstoring har här bara skrivit att kvadraten ska bli dubbelt så stor.

Simultan urskiljning - Testuppgift 8 och 9

I dessa uppgifter efterfrågas att eleverna både kan hålla längdförändring och areaförändring i förgrunden simultant. Dessa båda aspekter efterfrågas i en och samma uppgift.

Två tredjedelar av eleverna löste 8a korrekt. Här fick eleverna siffror att utgå ifrån och överlag visar det sig att eleverna behärskar denna uppgift bra i alla tre elevgrupperna. Men betyder det att de urskiljer vad som krävs för att inneha en djupare förståelse av lärandeobjektet? Endast en av dessa elever löste även uppgiften 8b korrekt och det var samma elev som också kunde lösa uppgiften på förtestet. Hela nio elever lämnade blankt svar på uppgiften. Övriga svar från elevgruppen var att arean blev antingen fyra gånger större, vilket uttrycktes av två elever, eller att arean blev åtta gånger större. Att en elev svarade att arean blev åtta gånger större kan visa att aspekten som dök upp under cykel 2 i studien, och som handlade om att urskilja relationen mellan längdförändringen och areaförändringen, är av betydelse för elevernas förståelse. Detta var ett svar som lärargruppen dock inte uppmärksammade vid analys av eftertestet i cykel 1 som en möjlig kritisk aspekt. Tre elever uttryckte att de inte kunde lösa uppgiften 8b då det endast fanns **en** längd på Molly-mus. Eleverna uttryckte att de saknade bredden. I uppgift 9 skiljer sig inte innehållet markant från vad som har behandlats under lektionerna, d.v.s. längdförändring i bemärkelsen dubbla längder och en efterfrågad areaförändring, mer än att det inte fanns bilder att utgå ifrån i testuppgiften. Den utgår i stället från en kontext där eleverna själva får skapa eventuella bilder då de löser uppgiften. På eftertestet svarar över hälften av eleverna att det medför att förstoringen blir i skala 2:1. Men av dessa elever är det endast hälften som också kan tala om att det medför att arean blir fyra gånger så stor, d.v.s. hälften av eleverna som urskiljer längdförändringen har trots allt kvar 'illusionen av linjäritet', vilket visas genom deras svar, då de skriver att även arean blir dubbelt så stor då längderna fördubblas. Det har tidigare poängterats att de iscensatta mönstren av variation inte var tillfredställande varken för att urskilja längder och dess förändring eller areaförändring i cykel 1, vilket även elevresultaten bekräftar. I aktiviteten 'rektangel A4-papper', som ska fungera som en fusion, blir det ett fokus på de antal vikningar som görs för att få fram en avbildning. Detta innebär att varken längdförändring eller areaförändring kommer i förgrunden och möjligheten till att separera längder från area, samt att urskilja de kritiska aspekterna, går förlorad.

Lektionsdesignens förändring inför cykel 2

Direkt efter de genomförda lektionerna 1a och 1b, diskuterar läraren och forskaren designen i stora drag. Planeringsmötena som därefter följer innebär att hela lärargruppen analyserar designen och relationen mellan innehållets behandling och elevernas lärande. De aspekter som tolkas att eleverna har urskilt eller inte urskilt blir underlag för hur lärargruppen designar nästkommande lektionspar. Lärargruppen enas om att de avsedda mönstren av variation ska ge eleverna möjlighet att initialt urskilja längder och längders förändring i relation till en korrekt avbildning och en given skala. Det var visserligen intentionen även då lektionsdesignen för cykel 1 planerades, men de mönster av variation som iscensattes visade ingen systematik som underlättade för eleverna, utan snarare motsatsen. Förslaget var att förfina introduktionsuppgiftens avsedda mönster av variation genom att ge eleverna möjlighet att uttrycka **vad** det är de fokuserar i och mellan dessa bilder för att på så vis synliggöra vilka aspekter de urskiljer och inte urskiljer. Därför planerades det för ytterligare två aktiviteter; en där längder och längdförändringar i förhållande till avbildning och skala skulle fokuseras och en där eleverna skulle ges möjlighet att separera längdförändring från areaförändring för att på så vis ges möjlighet att urskilja längder. Lektionsdesignens övergripande mål var att ha ett tydligt fokus på längder och längdförändring och låta areaförändringen ligga i bakgrunden i de första aktiviteterna.

Resultat av analys av lektionsparet i cykel 2

Fotografiet - Introduktionsuppgift del A

Mer information om aktivitetens design finns att läsa på s. 88. Bilderna finns på s. 92 i figur 10. Här erbjuds eleverna, till skillnad från i lektion 1a, alla tre exempelbilderna simultant. Under den här aktiviteten har eleverna jämfört med den första lektionen 1a, ett mer gemensamt fokus på att bilderna inte är likadana, att det är olika former på dem och att det betyder något. Under aktiviteten bjöd läraren in eleverna i en interaktion kring innehållet, d.v.s. läraren talade inte om hur relationen mellan bas och höjd förhöll sig vid en korrekt avbildning, utan istället gav läraren eleverna möjligheter att själva dra relevanta slutsatser. Detta skedde genom att hon ställde flertalet frågor där eleverna fick möjlighet att argumentera för sina svar eller funderingar, vilket innebar att fler dimensioner av variation gavs möjlighet att öppnas upp jämfört med samma aktivitet under lektion 1a.

Läraren börjar med att tala om att alla bilder som visas på tavlan inte är avbildningar av ursprungsbilden på Tom.

<u>Excerpt 12</u>

L: Vi ska prata om avbildning. [Klickar fram alla bilderna på en gång]

L: Vad tror ni, vilket foto här skulle kunna vara en avbild av Tom?

E (Anton): Den till höger.

L: Du tror den. [Pekar på den till höger]. Varför? Vad ser ni där? Eller vad ser ni här och inte där? [Pekar först på bild 1 och 2 och sedan på bild 3]

E (Anton): Den till höger har samma form.

L: Hörde ni? Den till höger har samma form.

L: Har inte den samma form [Pekar på bild 2] som den där? [Pekar på bild 3]

E (?): Nej, den är avlång.

L: Den är avlång.

L: Den då? [Pekar på bild 1]

E (?): Den är bred

L: Den är bred.

L: Vad säger ni? Om ni får välja en av de här som ska vara en avbild, eller två.

E (flera): Den till höger.

Ovanstående utdrag illustrerar några elevers spontana svar på varför bild 3 är en korrekt avbildning och vad det är eleverna fokuserar. Aspekten längdernas förändring fokuseras, men även dess relation vid en korrekt avbildning, vilket i det här fallet är en förstoring. Den korrekta bilden kontrasteras med de felaktiga bilderna avseende elevernas uttryck *'samma form'*. Läraren kontrasterar olika drag av aspekten längd och deras förändring mellan bilderna, i relation till elevernas påståenden. Elevernas förståelse används för att synliggöra aspekter eller drag av lärandeobjektet. Detta sker i situationer då eleverna uppmanas att argumentera för eller förklara vad det är de erfar eller urskiljer.

Därefter belyses även motivets förändring, d.v.s. att alla längder, även de som är inuti fotografiet ska förlängas, vilket inte gjordes i denna aktivitet under lektion 1a.

<u>Excerpt 13</u>

L: Vad är det som är likadant då? Är inte. Vad är det som är inte likadant som den? [Pekar mellan bild 2 och originalbilden]

E (Angela): Alltså, det är ju samma form. Den är samma, ja den är **samma.**

L: Den **är** samma, men vad är det. Jag vill att ni ska hitta…

E (Angela): Den är förstorad. [Avbryter läraren]

L: Ja, den är förstorad men vad är det som är förstorat?

E (Angela): Bilden.

L: Ja. Men den är väl också förstorad? [Pekar på bild 2]

E (Angela): Ja, men inte likadant.

L: Vad är det som skiljer dem åt? Mats?

E (Mats): Den längst till höger är förstorad i samma, i större skala.

L: Varför är inte den det då? [Pekar på bild 2]

L: Vad är det som är fel?

E (Mats): Den där andra, den har andra former.

[fler elever lägger sig i]

L: Andra former. Vad menar du med det?

E (Mats): Den är utdragen typ.

L: Utdragen?

L: Evelina, vad säger du?

E (Evelina): Alltså, den till höger, har man dragit ut både längden och bredden, nej, vad det heter, höjden och bredden, eller längden kanske.

E (?): Höjden och längden.

E (Evelina): Båda.

I ovanstående utdrag öppnar en elev upp en variation kring begreppet 'förstorad', en dimension av variation som även öppnades upp under lektion 1a.

<u>Excerpt 14</u>

L: Här har vi en sträcka [pekar på basen på originalbilden] kolla nu, den sträckan där [pekar på basen på bild tre] ska vara fördubblad då, den är dubbelt så stor där nere. Och så har man då [pekar på höjden på originalbilden] den sidan och [pekar på höjden i bild tre] ska vara dubbelt så stor där.

E (Stefan): fyra stycken får plats.

L: Mm, det återkommer vi till sedan Stefan.

[…]

L: Och så är det en sak till. Det är inte bara den sträckan [Pekar på basen] och den sträckan [Pekar på höjden] utan även det som är inne i bilden behöver förstoras. För om vi gör den här bilden dubbelt så bred och låter ögonen sitta med samma avstånd på Tom, så skulle han se ganska rolig ut. Är ni med? Även själva fotot inne måste bli bredare och högre om man förstorar.

E: Det måste vara så för alla saker.

L: Ja, precis. Det är inte bara formen utanpå.

[…]

> L: Då finns det ett ord för det här och det är att den bilden är likformig [pekar och jämför originalbilden och bild tre]

Under det här momentet gör en elev även ett mycket tyst inspel angående areans förändring. Det uppmärksammas dock inte av läraren. Efter ytterligare en minut, då läraren jämför originalbilden med bild 3, den korrekta avbilden gör en annan elev ett inspel angående areans förändring. Den här gången uppmärksammar läraren inspelet, men väljer att inte fokusera den aspekten just då. I slutet av momentet belyses även motivets förändring, d.v.s. motivets längder.

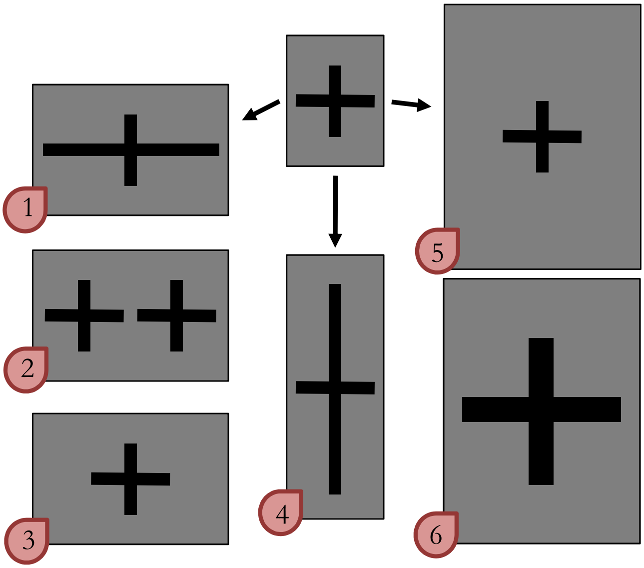
Läraren kontrasterar originalbilden med en av de andra bilderna, vilken också är större till ytan än originalbilden, men inte är en korrekt avbildning. Innebörden av 'förstorad' belyses i relation till uttrycket 'likadant'. Eleverna uppmanas att beskriva vad de menar med likadant och därigenom ges eleverna en möjlighet att urskilja längdförändringen. Begreppet likformighet tydliggörs mer explicit under den här lektionen än i den tidigare, lektion 1a.

Tabell 20. Sammanfattning av de iscensatta mönstren av variation i introduktionsuppgiften del A i cykel 2

Moment	Bas	Höjd	Motiv	Area	Urskiljning
Bild 1-3. Bas dubblas och höjd dubblas.	v	v	Fokuseras inte	Fokuseras inte	Separera bas och höjd och urskilja dess förändring och relation vid en avbildning
Bild 1-3	v	v	v	Lyfts av en elev, men fokuseras inte.	Separera bas och höjd samt att urskilja dess relation vid en avbildning

Plustecknet - Introduktionsuppgift del B

En bild, nummer 2, har tillkommit i uppgiften jämfört med cykel 1 för att kunna iscensätta ytterligare kontrasteringar och på så vis ytterligare möjliggöra att kunna separera bas från höjd men också för att ge fler möjligheter att kunna öppna fler drag avseende motivets längder och längdförändringar. Upplägget är för övrigt det samma som i den föregående lektionen och mer information angående aktivitetens design kan läsas på s.88.



Figur 15. Introduktionsuppgiften del B i cykel 2

Areans förändring lyftes upp, men problematiserades inte i föregående uppgift. Eleverna visar även i denna uppgift att de vill kontrastera längdförändringen med areaförändringen.

Eleverna ges här liksom i första delen av aktiviteten, rika möjligheter att urskilja längder och dess förändringar vid avbildning. Motfrågor ställs till elevernas argument för att på så vis göra innehållsliga kontrasteringar. Eleverna ges därmed möjlighet att explicit tala om vad de har urskilt. Det första erbjudna mönstret av variation iscensätts genom att eleverna ska tala om huruvida bild 1 är en korrekt avbild eller inte och i så fall varför den är det eller inte är det.

<u>Excerpt 15</u>

L: Är det någon som tänkt så här? [Visar bild ett]

E (flera): Nej!

L: Nej, varför inte det?

E (Mia): För att den är avlång.

E (Johan): Den är bara bredare.

E (Mia): Ja.

L: Och den är inte, vad är den inte då?

E (Mia): Den är inte förstorad [tyst].

L: Vad sa du?

E (Mia):Den är inte utdragen på båda sidorna, eller alla, höjden och längden.

Eleverna ges möjlighet att separera bas och höjd och genom detta urskilja längdförändring. Läraren fortsätter ställa frågor till eleverna för att få syn på vad eleverna urskiljer.

<u>Excerpt 16</u>

L: Får jag höra? Hade ni någonting?

E (Angela): Nej, jag sa bara att krysset, det högra (pekar på originalbilden) är ju, ska ju vara lika, och det är det ju inte på en andra (pekar på bild 1). Även om det ser ganska logiskt ut.

L: Okej, om vi skulle kolla inne i bilden. Och den här menar du på [pekar på bild 1] är inte en avbildning av det där korset? Ser man det? [pekar på originalbilden]

E (Angela): Ja, det ser man.

En elev belyser motivets förändring, och menar att motivet ser logiskt ut, vilket kan tolkas som att elevens innebörd av logiskt i detta fall innebär att hon urskiljer att även motivets längder ska fördubblas då basens längd fördubblas. Aspekten korrekt avbild kommer då i bakgrunden.

Bild 2 visas, vilket är en bild som inte fanns med i cykel 1. Den har samma form som bilden innan, men den innehåller två plustecken bredvid varandra.

<u>Excerpt 17</u>

E (Mia): Nej, det är bara två bilder bredvid varandra.

E (Lisa): Ja.

L: Det är inte heller en avbildning. Okej?

E (Mia): Det är en fördubblad avbildning.

[…]

E (Mia): Man ser ju att det är två sådana som står bredvid varandra, det är ju inte samma form, proportioner på den.

[…]

L: I själva formen så har men gjort den bredare, eller dubbelt så bred som den sträckan [pekar på basen] där, men höjden är oförändrad.

L: Ja [pekar på plustecknet], för att det ska vara en avbildning ska det finnas ett där också.

Fördubblad avbildning, dyker upp som intressant aspekt från en elev. Eleven ställer sitt uttryck ’fördubblad avbildning’ i kontrast med proportionalitet i en korrekt avbildning. Därefter visas bild 3.

<u>Excerpt 18</u>

E (Mia): Det är inte dubbelt så stort där det ska vara.

L: Vad är det som inte ska vara dubbelt så stort?

E (Angela): Omkretsen.

L: Ah, där sa du något nytt. Det har vi inte nämnt förut.

E (Angela): Ja.

L: Men det var bra.

E (Mia): Ja, men alltså, basen har ju fördubblats på de här, men det har ju inte höjden gjort, så om du höjer eller lägger till dubbel höjd på de där, då kan man ju få plats med fyra sådana där.

[…]

L: Jag har fler exempel.

E (Elina): Men måste du fortsätta?

L: Vi hoppar hit då? [Visar bild fem]

E (flera elever): Nej!

E (Max): Det får plats fyra i den.

E (Minna): Men man måste väl fortfarande förlänga korsets…

(Många elevröster hörs)

L: Vänta. Jag vill att en åt gången pratar. Annars blir det så svårt för er att lyssna. Casper, vad säger du?

E (Casper): Korset måste också förstoras för att det ska vara en avbildning.

E (Max): Men det där är väl fyra gånger så stort?

E (Casper): Resten är rätt, förutom korset.

L: Så den här höjden här är fördubblad som du säger.

E (Casper): Och bredden också.

L: Fördubblad.

L: Men

E (Casper): Korset

L: Är inte

E (Casper): Nä. [Bild 6 visas]

E (flera elever): Jaaa!

E (flera elever): Tack.

E (Max): Men den är väl fortfarande fyra gånger så stor?

Ovanstående utdrag visar att det görs kontrasteringar mot de två tidigare bilderna. Ett drag av aspekten längd, i det här fallet omkretsen, lyfts av en elev vilket läraren uppmärksammar utan att problematisera det. En elev lyfter också aspekten areans förändring, vilket läraren inte ger respons på just då och inte heller den aspekten behandlas explicit i denna sekvens. Lite senare dyker dock aspekten upp på nytt då den återigen lyfts av en elev. Elevernas spontana reaktioner tolkas som att majoriteten av eleverna har urskilt vad som krävs för att göra en korrekt avbildning av bilden 'plustecknet'.

Alla bilder finns nu samtidigt på tavlan och elever och lärare fortsätter att resonera kring vilka längder de urskiljer och hur de förhåller sig till den givna skalan.

Excerpt 19

E (Casper): Från taket till korsets början.

L: Här?

E (Karl): Ja. Är det också dubbelt så stort där?

L: Ja. Hörde ni det? Jätteviktigt.

[…]

L: Och, som Angela sa, så galant alldeles nyss. Om den sträckan är fördubblad [pekar på basen] och den sträckan [pekar på höjden] och den fördubblad [pekar på basen] och den fördubblad [pekar på höjden], så är omkretsen också fördubblad.

L: Sedan, det du sa Max ska vi nog återkomma till om en liten stund.

E (Max): Men är det inte så då?

L: Jo.

E (Max): Men vi skulle ju tvådubbla?

L: Ska vi ta det?

E: (Max): Ja

L: Vi kör det.

[…]

L: Men Max vi tar det du sa. Du sa att den här är fyra gånger så stor som den där [pekar mellan bild sex och originalet].

E (Max): Ja, för det får plats fyra stycken sådana.

L: Tänker du längder då eller tänker, hur tänker du?

E (Max): Fyra former liksom.

L: Du tänker area?

E (Max): Ja.

[…]

L: Ska det fördubblas eller göras i skala 2:1, så ska den längden [pekar] bli dubbelt så stor där, den höjden ska bli dubbelt så stor där [pekar] och allting här [visar inuti]. Alla längder ska bli dubbelt så stora.

En elev öppnar upp fler värde ur dimensionen längder då han tar upp längder de inte fokuserat, så som avståndet mellan bildens översta bredd och plustecknets översta del. Även läraren öppnar upp en dimension av variation avseende aspekten längd då omkretsen som en variation på längd lyfts in. Det är visserligen en aspekt som en av eleverna tidigare belyst, men som då inte behandlades. I slutet av momentet lyfts aspekten areaförändring in som en kontrast till skalan 2:1.

I aktiviteten kommer inte areaförändring i förgrunden explicit och det ges därför inte möjlighet att simultant urskilja längdförändring och areaförändring.

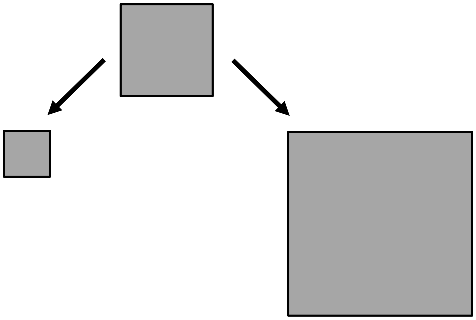
Läraren drar elevernas uppmärksamhet mot längdförändringarna och uttrycker att det är dessa som är viktigast då man räknar med skala. Areaförändringen problematiseras inte, d.v.s. det blir ingen diskussion om varför arean inte blir dubbelt så stor, utan bara att den inte blir det.

Tabell 21. Sammanfattning av de iscensatta mönstren av variation i introduktionsuppgiften del B i cykel 2.

Moment	Bas	Höjd	Motiv	Area	Urskiljning
Bild 1. Basen är fördubblad. Motivet förändras.	v	i	v	Fokuseras inte	Urskilja längder och dess förändring vid avbildning i relation till given skala.
Bild 2. Basen är fördubblad. Motivet är förändrat i förhållande till både originalbild och bild 1.	v	i	v	Fokuseras inte	Se ovan
Bild 3. Basen är fördubblad	v	i	i	Fokuseras inte	Se ovan
Bild 5. Basen och höjden är fördubblade.	v	v	i	Lyfts av en elev, men fokuseras inte.	Se ovan
Bild 6. En korrekt avbild	v	v	v	v	Som ovan samt urskilja att det sker en areaförändring i relation till korrekt avbild.

Rektangel – förstoring och förminskning

Nästa planerade aktivitet fanns inte med under cykel 1. Den kan delvis ses som en generalisering till introduktionsuppgiftens båda delar, då det även nu är en rektangel från vilken de kritiska aspekterna fokuseras. Det som är nytt är att den dessutom innehåller en konstrast mellan förstoring och förminskning. Aktiviteten är tänkt att iscensättas som en fusion då alla de presumtiva kritiska aspekterna efterfrågas. Kvadraterna jämförs med varandra för att på så vis möjliggöra en urskiljning av längder, längdförändringar och areaförändringar. Utifrån vad de urskiljer ska eleverna tala om vilka skalor avbildningarna är gjorda i.



Figur 16. Bild till aktiviteten 'rektangeln' i cykel 2

I det här momentet uppmanar läraren eleverna att jämföra kvadraterna med varandra för att på så vis möjliggöra en urskiljning av längder och dess förändringar samt areaförändringar. Utifrån vad de urskiljer ska eleverna tala om vilka skalor avbildningarna är gjorda i.

Excerpt 20

L: Andreas vad säger du?

E (Andreas): För att det får plats fyra kvadrater där i den där stora.

L: Ja, det får plats fyra kvadrater.

L: Vad är det i så fall för skala?

E (Erik): 1:2

L: Vad jobbigt det blev. Okej, det här är skala 1:2, men det får plats fyra stycken kvadrater av den i den [pekar] Johan?

E (Johan): Som du sa räknar man sträckan, inte längderna eller arean menar jag.

[…]

E (Anna): Men man kan väl räkna så, så går det enklare?

L: Va?

E (Anna): Får man inte räkna så?

L: Jo, fast det är inte skala 1:4.

[…]

L: Visst kan man räkna ut så, men jag tror att rätt många kommer fastna i ett resonemang där man tänker att man skriver att **det här** [pekar på den mindre rektangeln] är skala 1:4 om man tänker area.

Samtidigt som eleverna ska tala om vilken skala den lilla rektangeln är avbildad i lyfts areaförändringen, vilken kontrasteras med 'tvåan' i skala-uttrycket. Dock problematiserades inte areaförändringen.

Eleverna gavs här möjlighet att urskilja areaförändring och genom detta göra en kontrast till längdförändringen. En elev öppnar även upp dimensionen av variation avseende relationen mellan längdförändring och areaförändring genom att fråga om det alltid är så att då längderna blir dubbelt så långa, så innebär det att areaförändringen blir den dubbla längdförändringen. Frågan från eleven är otydlig och även elevens och lärarens resonemang därefter blir otydligt varpå läraren släpper frågan ganska omgående. Den för studien femte kritiska aspekten: 'relationen mellan längdförändring och areaförändring', identifieras dock här men problematiseras inte explicit i denna aktivitet.

Tabell 22. Sammanfattning av de iscensatta mönstren av variation i 'rektangeln' i cykel 2

Moment	Bas	Höjd	Area	Urskiljning
Rektangel, förstoring och förminskning	v	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring samt dess relation till avbildning. Relationen mellan längdförändring och areaförändring lyfts av en elev, men problematiseras inte.

Rektangel A4-papper – förminskning

Nästa aktivitet är även det en fusion. Mer information avseende aktivitetens design kan läsas på s. 88. Läraren introducerar gruppuppgiften på samma sätt som det gjordes i cykel 1, d.v.s. genom att prata om att pappret ska vikas så att önskvärd avbild kan visas upp. Eleverna får gruppvis redogöra för hur de resonerat när de löst uppgiften och läraren framhåller att eleverna inte behöver vara överens inom gruppen utan att flera svar kan redovisas. På så vis ges det möjligheter att genom en kontrast mellan olika svar urskilja de fyra presumtiva kritiska aspekterna, som planerats att vara fokuserade. Under aktivitetens andra del lyfts den femte och också nya aspekten; relationen mellan längdförändring och areaförändring.

Läraren går runt mellan elevgrupperna för att fånga in deras resonemang och få en överblick över hur de går tillväga och vad de tycks urskilja. Redovisningen startar med att en elevgrupp ska redogöra för sin förminskning i skala 1:2.

Excerpt 21

E (Mia): Okej, vi var inte överens.

L: Nej, men det behöver ni inte vara.

E (Mia): Okej

[…]

E (Vera): Vi, en utav oss tyckte den här [visar upp ett alternativ, den korrekta, bilden till höger]

L: Så en del av er har vikt pappret två gånger [ritar upp alternativet på tavlan].

E (Stefan): Men alltså.

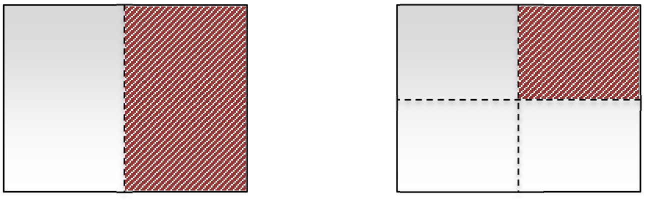
E (Vera): Nej, men jo.

E (Mia): Ja, vi har vikt pappret två gånger.

L: Ja.

E (Mia): Men du har vikt pappret en gång [nickar mot en Stefan].

Ovanstående utdrag visar en grupp där två svar redovisas. Dessa två svar indikerar att eleverna har haft olika aspekter i förgrunden.



Figur 17. Elevsvar i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:2 i cykel 2

Läraren ritar upp de båda alternativen och frågar sedan hur de har tänkt och vill att eleverna ska sätta ord på vad de har urskilt, till skillnad från lektion 1a där eleverna inte i lika stor utsträckning fick möjlighet att uttala sig om vad de urskilt. Där fanns ett större fokus på vikningarna. Trots att läraren även i cykel 2 pratar om att vika pappret, frågas det samtidigt om varför eleverna har vikt som de gör, vilket kan tolkas som att det implicit frågas efter vad det är eleverna har urskilt. Detta gjordes inte i lektion 1a och 1b. Läraren uppmanar eleverna i gruppen att jämföra sina svar.

Excerpt 22

L: Stefan, hur tänkte du, du ville ha den där va? [pekar på bild nr ett]. Hur tänkte du då?

E (Stefan): Det är hälften.

L: Du säger att det är skala 1:2?

E (Stefan): Mm

[…]

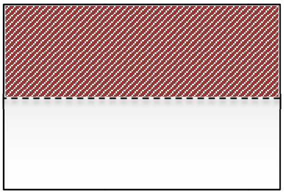
L: Mia, hur tänkte du?

E (Mia): Jo, jag tänkte så här, om man ska dela alla sidor på två, så blir det, där och där [pekar] och då blir det så [visar upp sitt förslag]

E (Mia): Om det ska vara hälften av allting, så blir det så, för de [nickar åt Stefan] har ju bara gjort hälften på, eller på vågräta sidan.

Eleven Mia visar genom sitt svar i ovanstående utdrag att hon har urskilt längder och längdförändringar och att det är det hon har i förgrunden då hon ska förminska pappret. Analysen stärks också då hon kontrasterar sitt svar med Stefans svar, där hon poängterar att han endast har förkortat en dimension av pappret. Mia visar genom sitt påstående att gruppmedlemmarna som visar förminskningen som hälften av arean, glömt att dela ena sidan av rektangeln med två. Stefans svar kan dock tolkas som att han har delat arean i hälften. Kontrastering mellan vad som troligtvis hålls i förgrunden görs implicit. Här finns således en distinktion mellan att å ena sidan ha fokus på areaförändringen och å andra sidan ha fokus på längdförändring, dock enbart avseende en dimension.

Läraren frågar efter ytterligare elevsvar, men det finns inga andra varianter bland grupperna. Läraren gör en kontrastering och frågar specifikt efter om ingen har tänkt så här;



Figur 18. Elevsvar i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:2 i cykel 2, ett icke korrekt svar.

Excerpt 23

E (Mia): Nej, alltså det där hade varit exakt samma sak som den där ovanför, men grejen är att dela i båda delar.

[…]

E (Stefan): Alltså, proportionerna skulle ju bli fel från originalfiguren.

I detta utdrag visar eleverna genom sina uttalanden att det ges möjlighet att urskilja längder, längdförändring och innebörden av avbildning.

En jämförelse kan göras med hur innehållet behandlades i cykel 1, då eleverna i lektion 1b skulle förminska A4-pappret i skala 1:3. Läraren frågade inte i det momentet efter hur eleverna resonerat då en av grupperna redovisar sin lösning där de har delat pappret i tre lika stora delar. Det poängteras endast att alla sidor ska delas i tre delar. I det momentet uppstod en möjlighet att kontrastera elevernas lösningar mer explicit och genom detta urskilja längdförändring och areaförändring simultant. Denna möjlighet togs dock inte till vara i lektion 1b. Vad händer i lektion 2a, då läraren hamnar i samma situation, men nu med skala 1:2 i fokus? Eleven Mia redogör för sin lösning.

Excerpt 24

E (Mia): Om det ska vara hälften av allting, så blir det så.

E (Stefan): Det blir en fjärdedel, de blir inte en halv.

Läraren ger sig inte utan vill verkligen att eleverna ska ges möjlighet att urskilja längdernas förändring och areaförändringen. Eleverna uppmanas att sätta ord på vad de fokuserar.

Excerpt 25

L: Ja, det är en fjärdedel. Vad är det som är en fjärdedel?

E (Mia): Den är delad i fyra bitar.

L: Vad är det som är en fjärdedel?

E (Mia): Det har inget med det här att göra, alltså, vi har ju sagt att det är längd. Vi har delat längderna.

[…]

L: Alice, vad säger du?

E (Alice): Alltså där, där har vi ju delat figuren i hälften, men där har de ju tagit sträckorna i hälften.

[Läraren pekar på bilderna på tavlan]

E (Alice): Och det är ju hälften av arean på den översta och de har ju tagit sträcka och det är ju det man räknar på skala.

L: Så det där är halva arean och det där är halva sträckan eller?

E (Alice): Ja.

[…]

L: Kolla på tavlan. Den sträckan här är hälften av hela. [Pekar på basens längd]. Mia, är den sträckan där hälften av hela?

E (Mia): Ja.

L: Är den sträckan där [pekar på höjden längd] hälften av hela?

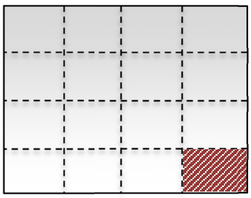
E (Mia): Ja.

L: En halv där och en halv där [pekar]. Då är det skala 1:2, då är det förminskat i skala 1:2 där.

L: Här har vi halva areor [pekar på dessa två bilder]

En kontrast mellan areaförändring och längdförändring iscensätts då eleverna får förklara och argumentera för sina lösningar. Längdförändringen görs explicit, dock inte areaförändring.

Därefter redovisas nästa uppgift, vilken innebär att eleverna ska förminska ett papper i skala 1:4. Uppgiften kan ses som en generalisering, där rektangeln hålls konstant från föregående uppgift, men att längdförändringarna varierar, d.v.s. att skalan förändras. Den elevgrupp som först får visa upp och resonera kring sin lösning visar upp en korrekt förminskning. Eleverna uppmanas att sätta ord på hur de resonerat för att på så vis synliggöra vad som har urskilts.



Figur 19. Elevsvar i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:4 i cykel 2

Excerpt 26

L: Vad är det du har gjort egentligen?

E (Robert): Vikt det fyra gånger.

L: Varför har du vikt det fyra gånger?

E (Robert): För att det ska bli fyra gånger så litet.

Här blev antal vikningar i förgrunden. I ovanstående moment frågar läraren efter varför eleven har vikt fyra gånger och det kan tolkas som att eleverna ges möjlighet att tala om vad de har fokuserat på och läraren å sin sida ges möjlighet att avgöra om eleverna har urskilt aspekterna. Men svaret som eleverna ger visar att det är vikningar de har haft i förgrunden, d.v.s. de ska vika fyra gånger för att förminska pappret i skala 1:4. Läraren fortsätter att fråga efter hur eleverna har vikt pappret för att göra förminskningen.

Excerpt 27

L: Ni hade 1:4, hur hade ni vikt?

E (Vera): Först tänkte vi area, men vi blandade ihop en sak, så ändrade vi oss och gjorde som Mats gjorde.

L: Så ni har bara ett lösningsförslag [...]

E (Mia): Ja, med de ändrade ju sig. Fråga vad de gjorde innan.

Eleverna visar sedan sin alternativa lösning och läraren gör en kontrastering mellan gruppernas olika svar.

Figur 20. Konstrast mellan två elevsvar i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:4 i cykel 2

Excerpt 28

L: Och Mats, den övergav ni sedan, varför gjorde ni det? [pekar på bilden]

E (Vera): Nej, för att jag kände att det blev lite fel också. Alltså jag tänkte area först.

L: Ja, okej.

L: Är det någon som kan förklara skillnaden på de här två? [pekar]

E (Erik): Alltså, om man tittar på originalet, så ser man ju att proportionerna på den nedre [den felaktiga bilden] är ju fel jämförelsevis.

L: Är detta inte en korrekt avbildning? [pekar på den felaktiga bilden till vänster]

E (Erik): Nej.

L: Det är sant, det är ingen avbildning

Härefter visar läraren att alla sträckor ska delas med fyra då det handlar om skala 1:4 och jämför det med den felaktiga bilden och på vilket sätt längderna där har delats samt vad det innebär att göra en korrekt avbildning.

En elev gör en tolkning av det felaktiga svaret, där han lyfter in aspekten relationen mellan längdförändringen och areaförändringen.

Excerpt 29

E (Erik): Eftersom man tänker två upphöjt till två så ska det vara fyra bitar på den skalan 1:2. Men två, men fyra upphöjt till två är ju inte åtta, det är… ju 16 bitar på den med rätt proportioner på. Men det är ju.

E (Vera): Men man ska ju tänka längder.

E (Mia): Ja, men om man gör det.

Här gör troligtvis eleven en generalisering från föregående moment då skala 1:2 behandlades. Läraren går dock in och bryter elevdiskussionen och visar att i den felaktiga förminskningen har de bara delat basen med fyra, inte höjden, den är bara delad på två, vilken han sedan jämför med den korrekta förminskningen samtidigt som han talar om att där är alla sidor delade med fyra. Läraren jämför även med areans förändring, men endast genom att säga att förminskningens area inte är en fjärdedel av ursprungsarean och poängterar sedan att det är *'längderna vi hela tiden ska tänka på'*. Areaförändringen görs inte explicit i det här momentet och inte heller relationen mellan längdförändring och areaförändring. En elev öppnar upp för dimensionen av variation när det gäller just relationen, men läraren lyfter inte den vidare, utan riktar elevernas uppmärksamhet mot längdförändringarna.

Nästa del av A4-uppgiften, som är en generalisering av föregående uppgift, organiseras på samma sätt som under lektionerna 1a, 1b och 2a, men nu med fokus på skala 1:3. En gruppredovisning startas upp.

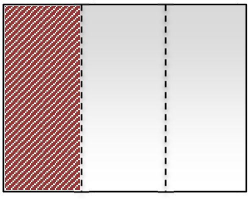
Excerpt 30

L: Pelle, vad kom ni fram till? Hur ser ert A4-papper ut? [Ritar en rektangel på tavlan]

E (Pelle): Man viker det sådär i tre bara.

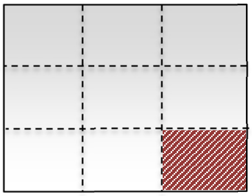
L: Sådär, någonting?

E (Pelle): Ja, exakt.



Figur 21. Elevsvar 1 i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:3 i cykel 2.

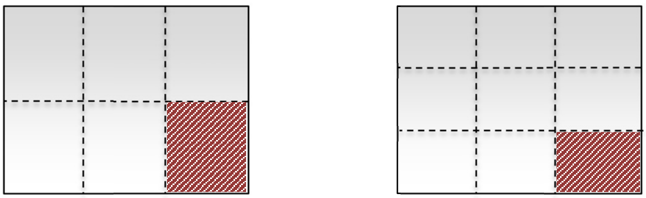
Elevgruppen resonerar om att de inte riktigt är överens om sitt svar och uttrycker att *'höjden har vi inte delat, bara längden'*. Någon kontrastering görs dock inte under denna sekvens och huruvida eleverna endast urskilt längder längs en dimension eller haft areaförändringen i förgrunden då de löst uppgiften problematiseras inte. Nästa grupp redovisar att de gjorde likadant som den föregående gruppen, men att de även delade höjden på tre.



Figur 22 Elevsvar 2 i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:3 i cykel 2

Gruppen som därefter redovisar är samma grupp som under lektion 2a inte var överens när det gällde förminskning i skala 1:2. Se excerpt 21 och 22. De är inte heller överens i den här uppgiften.

> <u>Excerpt 31</u>
>
> E (Mia): Alltså, vi har två svar.
>
> L: Åh, det är samma som i går, får jag höra.
>
> […]
>
> L: Ni har en som är så här [pekar på ett svar som redan finns, d.v.s. den korrekta avbildningen] och så har ni en som är så [ritar en bild]



Figur 23. Kontrastering av två elevsvar i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:3 i cykel 2.

Excerpt 32

E (Mia): Fast det blir fel för då har vi delat den här sidan med tre och den andra med två.

Eleven får förklara varför hon tycker att det blir fel och de båda svaren kontrasteras. Genom elevens resonemang lyfts den femte aspekten; *relationen mellan längdförändring och areaförändring,* då eleven uttrycker att areaförändringen fås fram genom att fördubbla längdförändringen. En elev från föregående lektion (2a) lyfte också denna aspekt under aktiviteten 'rektangeln – förstoring och förminskning', men den behandlades då inte vidare. När eleven utgick ifrån denna uppfattning i förra uppgiften, då skala 1:2 var i fokus, resulterade det i rätt svar, för arean blir en fjärdedel då man delar alla längder med två. I den här uppgiften blir det dock problematiskt, då hon utgår ifrån denna uppfattning, samtidigt som hon poängterar att alla längder ska delas med tre, då skalan är 1:3. Men, den uppfattningen hon ger uttryck för avseende *relationen mellan längdförändring och areaförändring* förblir i förgrunden och hon väljer att svara enligt bilden ovan till vänster.

Excerpt 33

E (Mia): Alltså, jag tyckte att det skulle bli så här, att man delar på mitten, [visar på ett papper hur gårdagens uppgift löstes] så blev det fyra delar. Men när man ska dela den på tre så borde det bli sex delar.

L: Men du var inte nöjd med den?

E (Mia): Jag vet inte.

[…]

E (Mia): Men där har man ju delat båda sidorna med tre.

Läraren pekar på bilden och skriver att avbildningens sidor är en tredjedel av originalbilden. Därefter får den sista gruppen presentera sin lösning, vilket visar sig vara en korrekt avbildning, d.v.s. de har förminskat alla längder till en tredjedel. Det är fortfarande längdförändringar som är förgrunden, vilket blir tydligt då den sista gruppen resonerar om sin lösning.

Excerpt 34

E (Alice): Den ska bli i skala 1:3 och då ska sidorna, vad ska jag säga, bli tre gånger kortare och sedan behövde vi ju få nio bitar också för arean.

L: Okej, ni kom in på det också.

De uttrycker sig om arean, men inte explicit om den förminskade figurens area jämfört med originalbildens area. Areaförändringen uttrycks här som former eller bitar som får plats i en figur. Läraren släpper dock areaförändring, vilket innebär att den aspekten inte görs explicit under det här momentet. I stället fortsätter läraren att ha längdförändringen i förgrunden genom att kontrastera den aktuella uppgiften med en uppgift från lektionen innan, 2a.

<u>Excerpt 35</u>

L: En avbildning. Kommer ni ihåg. Minns ni en avbildning från igår? Vad var det som krävdes för att det skulle kallas en avbildning?

E (Erik): Likformighet

L: Likformighet, och hur kan något vara likformigt?

E (Erik): Så att proportionerna är rätt.

L: Så om man förlänger Toms längd [aktiviteten fotografiet], så måste man förlänga hans bredd också.

E (Erik): Och allting där i också.

[…]

L: Det måste alltså vara proportionellt för att vara likformigt. […] Rätt svar här i skala 1:3 det är alltså den här [pekar på den korrekta avbilden]

Tabell 23. Sammanställning av de övergripande mönstren av variation i aktiviteten 'A4-papper' i cykel 2

Moment	Längdförändringar	Area	Urskiljning
Förminskning av en rektangel i skala 1:2 och 1:4	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring i relation till den givna skalan samt innebörden av avbildning.
Förminskning av en rektangel i skala 1:3	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring i relation till den givna skalan och innebörden av avbildning. En elev lyfter också implicit upp relationen mellan längdförändring och areaförändring, men det är inget som behandlas.

Pizza – förstoring och förminskning av cirkel
Den här aktiviteten introduceras på samma sätt som i cykel 1. Mer information finns att läsa på s. 89.

Följande uppgift fick eleverna.

Pizzauppgiften.
Kalle och Pelle har gått till pizzerian för att äta. De är hungriga och vill ha så mycket pizza som möjligt. De funderar på om de ska ta varsin barnpizza eller om de ska dela på en familjepizza för att få så mycket pizza som möjligt. En pizza från barnmenyn är **likformig** med familjepizzan men **förminskad** i **skala 1:2.**
Vilket alternativ är det bästa om killarna ska få så mycket pizza som möjligt? Eller spelar det ingen roll?

Förklara hur du resonerar.

Eleverna arbetar i grupp och för att lösa uppgiften måste de urskilja alla de presumtiva kritiska aspekterna; längd, längdförändring och areaförändring simultant i relation till en korrekt avbildning. Läraren går runt mellan elevgrupperna och fångar upp frågor, tankar och lösningar.

Elevgrupperna får sedan i tur och ordning redovisa sina lösningsstrategier. Läraren frågar efter vilket alternativ som är det bästa och vill också veta hur de resonerat när de kommit fram till sitt svar.

<u>Excerpt 36</u>

E (Max): Spelar ingen roll.

L: Lika stora?

E (Max): Ja

Den första gruppen visar att de har haft areaförändring i förgrunden då de ska förminska pizzan i skala 1:2 och därefter avgöra om de ska välja två barnpizzor eller en familjepizza för att få så mycket pizza som möjligt. Eleverna i gruppen visar att de har delat familjepizzan i två lika stora delar och sedan gjort om dem till två cirkelformade barnpizzor. En annan elevgrupps svar får utgöra en kontrastering till ovanstående svar.

<u>Excerpt 37</u>

L: Vad säger ni i er grupp?

E (Vera): Vi gjorde så att vi tog familjepizzans diameter.

[…]

E (Vera): Sedan delade vi den i två, så vet vi diametern på barnpizzan. [Läraren ritar upp det eleverna uttrycker]

[…]

E (Vera): Om man ska få så stor pizza som möjligt så spelar arean roll. Vi räknade ut att fyra barnpizzor får plats i en familjepizza.

Utdraget visar att de istället har urskilt längderna och dess förändring då pizzan ska förminskas. I en annan grupp görs en jämförelse med kvadraten som i en tidigare aktivitet skulle förminskas i skala 1:2.

<u>Excerpt 38</u>

E (?): Jo, på kvadraten så skulle det få plats fyra stycken i om det var en sådan, en halv och så då tänkte vi att då skulle det få plats fyra pizzor i den.

[…]

E (?): Alltså, det där var hälften i arean, men det, vi ska inte räkna det, så det här var hälften av diametern [visar upp sin bild]

Den femte och nya aspekten lyfts också, men den problematiseras inte.

<u>Excerpt 39</u>

E (Kasper): Sedan utgick vi också ifrån att, i alla fall är det så när man räknar med kvadrater att arean, eller för vi tänkte mer area på det här eftersom det var en mängd pizza man ville ha och då så blev det ju så att om man, om det är skala 1:2, så får man ju ta den tvåan gånger sig självt där uppe för att få ut den nya arean och då blir den fyra istället för två, ja den blir fyra gånger större än eller fyra gånger mindre menar jag.

Under den här aktiviteten skapas en variation avseende elevgruppernas olika lösningsstrategier. Då dessa olika lösningsstrategier redovisas fokuseras också olika aspekter av lärandeobjektet. På grund av tidsbrist slutför inte läraren den här uppgiften som det var tänkt.

De övergripande mönstren av variation som användes av läraren för att möjliggöra för eleverna att erfara innebörden av förminskning av en cirkel vid en given skala var de samma som i cykel 1. För att se sammanfattningen av dessa se tabell 13, 14 och 15.

Analys av lektionernas möjliggörande av elevernas kunnande i cykel 2

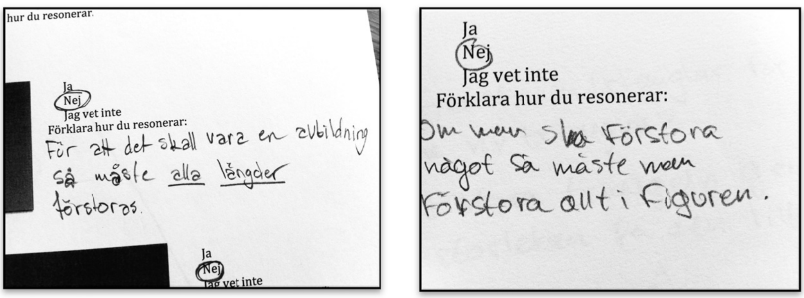
I tabell 24 visas elevgruppens resultat på uppgiftsnivå. Därefter följer en analys över elevernas lärande vilket jämförs med hur innehållet behandlades under lektionerna i cykel 2.

Tabell 24. Sammanställning av elevgruppsresultat på uppgiftsnivå i cykel 2.

Uppgift	**Förtest n=17**	**Ej svar**	**Eftertest n=17**	**Ej svar**	**Fördröjt eftertest n=17**	**Ej svar**
2b Avbildning	5	1	14	0	13	0
2c Avbildning	4	5	17	0	17	0
3. Förstora en triangel i skala 4:1.	4	3	14	0	13	0
4. Förstora en cirkel i skala 4:1.	3	4	11	1	11	0
5. Förstora en kvadrat i skala 2:1.	4	1	15	0	13	0
8a Urskilja längd och längdförändring	12	2	16	1	16	1
8b Urskilja areaförändring	1	7	4	4	5	2
9a Urskilja areaförändring	2	6	4	6	5	3
9b Urskilja längd och längdförändring	8	7	16	1	15	2

Vad är avbildning och vad är inte avbildning? Testuppgift 2b och 2c

Innehållet har behandlats mer utförligt i cykel 2 jämfört med cykel 1 avseende längder, längders förändring och innebörden av avbildning. Det ett starkt fokus på längder och dess förändringar genom båda deluppgifterna i introduktionsuppgiften, vilket speglas i elevernas svar då 82 % respektive 100% av eleverna har svarat rätt på de båda testuppgifterna, 2b och 2c. I det första mönstret av variation som iscensätts visas tre bilder samtidigt, vilket kan tänkas erbjuda fler möjligheter till kontrasteringar och urskiljningar av längder och längdernas förändringar. Läraren ger dessutom eleverna motexempel och iscensätter kontrasteringar genom att jämföra deras inspel och påståenden och på så vis används elevernas förståelse för att synliggöra de kritiska aspekterna, men även för att synliggöra nya drag av aspekterna. Resultatet indikerar att eleverna har utvecklat en förståelse avseende urskiljning av motivets längder vid korrekt avbildning. Alla eleverna i gruppen visar, genom uppgift 2c, att de urskiljer motivets längder i relation till en korrekt avbildning. Ingen av eleverna har dock visat explicit att de har arean i förgrunden då de ska avgöra huruvida en bild är förstorad i skala 4:1, d.v.s. 'illusionen av linjäritet' framträder inte bland elevsvaren. Eleverna ger motiveringar till sina svar som antyder att de har separerat längder från yta tillfredställande, t.ex. 'det får plats fyra av den första rektangelns sidor i den stora rektangelns sidor'. De ger uttryck för att det är sidor som jämförs och inte former, vilket var ett vanligare svar i föregående elevgrupp.

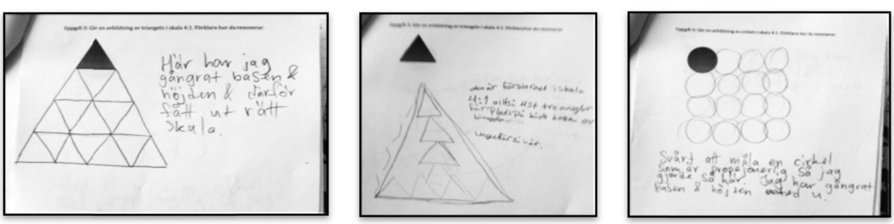


Figur 24. Utdrag ur elevsvar på eftertest i testuppgift 2b och 2c i cykel 2

Förstoring av olika geometriska figurer - testuppgift 3, 4 och 5

Cykelns lektioner har i likhet med cykel 1 behandlat förstoring av rektangeln och cirkeln, men inte triangeln, vilket betyder att eleverna endast kunde lösa testuppgift 3 genom att använda tidigare kunskaper eller inneha förmåga att omvandla kunskap som de erfarit under studiens lektioner till användbar kunskap i för dem denna nya situation.

Tittar man på eftertestresultat för denna elevgrupp, kan man se stora skillnader i svaren jämfört med elevgrupp 1. I elevgrupp 2 är det endast en elev som i alla tre uppgifterna har konstruerat avbilder där areaförändringen varit i fokus. Ett intressant svar som dyker upp hos två av de elever som inte löser cirkel-uppgiften tillfredsställande är att de fokuserar på att arean ska bli åtta gånger så stor då figuren förstoras i skala 4:1. En av dessa elever uttrycker även att den större triangeln ska innehålla åtta stycken mindre trianglar. Denna typ av uttryck syns dock inte i uppgiften om kvadraten. Utifrån hur innehållet behandlades under lektionerna i cykel 2 kan man koppla detta svar till på vilket sätt den nya kritiska aspekten, relationen mellan längdförändring och areaförändring belystes. Aspekten problematiserades aldrig utan den kontrast som uppstod mellan två elevsvar; att areaförändringen antingen blev dubbla längdförändringen respektive att areaförändringen blev kvadraten av längdförändringen utvecklades inte vidare. Att motsvarande förståelse inte går att finna i uppgiften om kvadraten kan dels bero på att de mönster av variation som iscensattes i cykel 2 gav rika möjligheter att urskilja just längder och längdförändringar hos rektanglar. Men mer trolig förklaring kan vara att vid skala 2:1 blir areaförändringen fyra gånger så stor oavsett om svaret grundar sig i uppfattningen att areaförändringen blir dubbla längdförändringen eller att areaförändringen blir kvadraten av längdförändringen. Ytterligare ett svar som dök upp och som kan härledas till hur innehållet behandlades i cykel 2 (och som hade med triangeln och cirkeln att göra) var att eleverna gjorde en generalisering från hur de förstorat rektangeln till hur de resonerade då de skulle förstora triangeln och cirkeln. Eleverna multiplicerade helt enkelt både ’basen och höjden med fyra’, eller uttryckte att de ska få plats fyra former längs basen och fyra former längs höjden, vilket skulle kunna tolkas som om de inte explicit har urskilt längder i varken triangeln eller cirkeln, eller separerat längdförändring från areaförändring. Areaförändringen har också i flertalet aktiviteter uttryckts som förändringar av antalet former som får plats, utan att explicit redogöra för vad som urskilts då detta uttryck använts.



Figur 25. Utdrag ur elevsvar på eftertest testfråga 3, 4 och 5 i cykel 2

När det gäller triangeln blir avbildningen visserligen korrekt, men har eleverna urskilt längder och dess förändring? Avseende cirkeln och denna lösningsstrategi skapas en helt annan form än en cirkel.

Majoriteten av de elever som gör korrekta förstoringar visar att de har urskilt längder av något slag, vilka de tar fasta på, t.ex. så nämns både diameter, radie och omkrets för cirkeln.

Simultan urskiljning - Testuppgift 8a, 8b, 9a och 9b

I elevgrupp 2 är det endast en elev som inte anger en korrekt skala på förstoringen av den oregelbundna figuren i uppgift 8a då eleven väljer att inte ge något svar överhuvudtaget. Att därtill ange hur mycket större arean blir på den oregelbundna figuren i 8b visar sig även för elevgrupp 2 bli svårt. Endast fyra av 17 elever uttrycker rätt svar. En tredjedel av elevgruppen uttrycker att arean blir fyra gånger så stor då längderna blir fyra gånger så långa, vilket är färre än under förtestet då hela nio elever visade att de hade arean i förgrunden. I uppgift 9 frågas det efter vilken skala förstoringen är gjord i då omkretsen dubblas och där svarar alla elever, förutom en som lämnar blankt, att skala 2:1 är korrekt skala. Att därifrån urskilja areans förändring gör endast en fjärdedel av dessa elever. En annan fjärdedel av eleverna lämnar blankt och den sista halvan svarar att även arean blir fördubblad. Det resulterar i att nästan hälften av eleverna i gruppen har kvar ’illusionen av linjäritet’, men de urskiljer längder och bestämmer skala korrekt.

Ingen av eleverna uttryckte i uppgift 8 att areaförändringen blir den dubbla längdförändringen, d.v.s. att ytan på Molly-mus blir åtta gånger större. Den femte aspekten, relationen mellan längdförändring och areaförändring har alltså inte fokuserats av eleverna. Att resultatet ser ut såhär för den andra elevgruppen talar för att de s.k. fusionsuppgifterna inte iscensatte effektiva mönster av variation. Aktiviteterna under lektionerna där innehållet behandlades med fusionsliknande mönster var fler än i cykel 1, men de gav inte en tillfredsställande möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna. De linjära sambanden var starkt i förgrunden under större delen av båda lektionerna. Eleverna gjorde flertalet inspel under flera olika aktiviteter där de visade att de ville lyfta in areaförändringen, men aspekten öppnades inte upp explicit med hjälp av de iscensatta mönstren av variation. Det var endast under aktiviteten ’rektangeln’ och ’A4-uppgiften’ som areaförändringen behandlades explicit. Problematiken avseende den nya kritiska aspekten, ’relationen längdförändring och areaförändring’ åskådliggörs explicit i aktiviteten ’A4-pappret’. Den öppnas dock inte upp för variation och därav har eleverna inte givits möjlighet att erfara lärandeobjektet på ett tillfredsställande sätt. Majoriteten av eleverna visar att de har en ’illusion av linjäritet’ i förgrunden då de svarar att längdernas förändring är de samma som areans förändring, d.v.s. om längderna fördubblas blir även arean fördubblad.

Lektionsdesignens förändring inför cykel 3

Även direkt efter de genomförda lektionerna 2a och 2b, diskuterade läraren och forskaren designen i stora drag. Under de planeringsmöten som därefter följde diskuterade och analyserade hela lärargruppen designen och relationen mellan innehållets behandling och elevernas lärande. De aspekter som tolkades att eleverna har urskilt eller inte urskilt blir liksom efter cykel 1 och 2 underlag för hur lärargruppen designar nästkommande lektionspar. De mönster av variation som iscensattes under första delen av cykeln visade en systematik med ett starkt fokus på att urskilja de kritiska aspekterna; längder och längdförändring i relation till avbildning och en given skala. Elevresultatet indikerade att dessa mönster var effektiva. Lärargruppen beslöt att behålla detta tydliga fokus på aspekterna inledningsvis även i nästa cykel. De plockade dock bort aktiviteten ’diagonalen’, då den ansågs alltför lik de föregående aktiviteterna. I stället antog lärargruppen att det var systematiken i de iscensatta mönstren av variation som var av betydelse för elevernas möjliggörande till urskiljning. Det som fortfarande tycktes vara svårt för eleverna var fusionsuppgifterna, då de simultant skulle urskilja alla de kritiska aspekterna. Här tycktes det dock saknas en medveten struktur.

Lärargruppen planerade för ytterligare några aktiviteter, vilka på ett mer systematisk sätt skulle erbjuda eleverna möjlighet att separera längdförändring från areaförändring. En ’röd tråd’ formulerades för att erbjuda eleverna möjlighet att först urskilja längdförändringen och därefter areaförändringen genom att iscensätta en generalisering där rektangeln utgjorde grund för innehållets behandling. Efter några aktiviteter ersattes rektangeln av en cirkel. Dessutom identifierades en ny aspekt under cykel 2; relationen mellan längdförändring och areaförändring vilken också skulle tas i beaktning. Eftersom det är en funktion av de övriga kritiska aspekterna planerades den att belysas i samband med dessa. Lärargruppen diskuterade även fusionsuppgiften där ett A4-papper användes och menade att redovisningen av denna måste åskådliggöras på ett sådant sätt att längder separeras från area och längdförändring från areaförändring samt att relationen dem emellan synliggörs i och med detta.

Resultat av analys av lektionsparet i cykel 3

Fotografiet - Introduktionsuppgift del A

I den här aktiviteten presenteras bilderna i likhet med lektion 1a sekventiellt, men till skillnad från lektion 1a, och i likhet med lektion 2a, så fokuseras motivets längder samt att areaförändringen lyfts men problematiseras inte. Mer information avseende aktivitetens design kan läsas på s.88.

Originalbilden visas först och därefter de tre exempelbilderna i tur och ordning.

Excerpt 40

L: Vi tar nästa. [Läraren visar bild 3]

L: Vad säger ni om den här bilden? Känns den som en okej avbildning?

E (flera): Ja.

L: Varför säger ni spontant okej så? Julia?

E (Julia): Den är förstorad på alla håll lika mycket.

L: Precis, den är proportionellt förstorad.

[…]

L: Så alla längder har blivit dubbelt så långa. Nu undrar jag, alltså Toms mun här, har den också blivit dubbelt så lång om ni jämför där [pekar], är hans muns avbildning också dubbelt så lång?

E (pojke): Ja

L: Vad tror du Elin?

E (Elin): Ja

L: Alla längder måste bli dubbelt så långa. Om det nu är dubbelt det handlar om här nu. Och är det en avbildning så ska det vara proportionellt, man kan inte bara köra en längd och inte de andra längderna. Så det här var en avbildning [pekar på bild 3] och det var inte någon och det var inte någon [pekar på bild 1 och 2].

Här ges inte eleven, Julia, möjlighet att tala om vad det är hon har urskilt då hon säger att bilden är förstorad på alla håll lika mycket. Läraren talar istället om vad det är de ska urskilja. Liksom i lektion 2a ges eleverna här möjlighet att urskilja aspekterna; längder, längdernas förändring och innebörden i avbildning. I ovanstående utdrag, där bild 3 visas behandlas alla dessa kritiska aspekter.

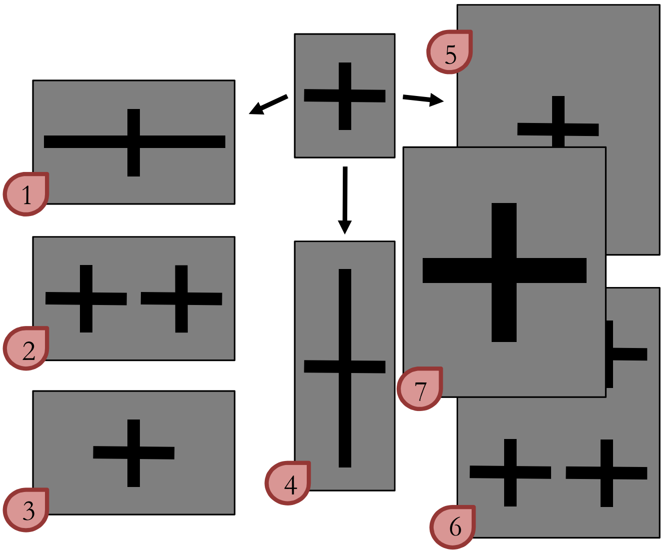
Kontrasteringar där aspekterna, urskilja längder och längdförändringar är i fokus blir dock färre i den här aktiviteten än i motsvarande aktivitet under lektion 2a. Till skillnad från samma aktivitet i lektion 2a ges eleverna här inte heller samma möjlighet att explicit uttrycka vad det är de urskiljer, vilket kan tolkas som att möjliga dimensioner av variation går förlorade.

Tabell 25. Sammanfattning av de iscensatta mönstren av variation i introduktionsuppgiften del A i cykel 3

Moment	**Bas**	**Höjd**	**Motiv**	**Area**	**Urskiljning**
Bild 1 Basen har fördubblats.	v	i	Fokuseras inte.	Fokuseras inte.	Separera bas och höjd samt att urskilja dess relation vid en avbildning.
Bild 2 Höjden har fördubblats.	i	v	Fokuseras inte	Fokuseras inte	Separera bas och höjd samt att urskilja dess relation vid en avbildning
Bild 3 En korrekt avbild.	v	v	v	Lyfts av en elev, men fokuseras inte.	Separera bas och höjd samt att urskilja dess relation vid en avbildning

Plustecknet - Introduktionsuppgift del B

I den här uppgiften har ytterligare en bild, bild 6, lagts till de övriga jämfört med motsvarande aktivitet under cykel 2. Bild 6 innehåller fyra stycken plustecken och avsåg ge möjligheter att skapa en konstrast mellan dubbla längder och en fyra gånger så stor area i förhållande till en korrekt avbildning.



Figur 26. Bild till introduktionsuppgift del B i cykel 3

Eleverna får i likhet med lektion 1a och 2a först diskutera i grupp hur de tycker att en förstoring i skala 2:1 av originalbilden skulle kunna se ut. En helklassdiskussion förs sedan kring hur en korrekt avbildning ska se ut. Eleverna ges här möjlighet att beskriva vad det är de fokuserar vid en korrekt avbildning genom att göra kontrasteringar mellan de icke korrekta avbildningarna och den korrekta avbildningen.

Längder och längdförändringar ges möjlighet att urskiljas och relateras till korrekt avbildning i flera sekvenser under aktiviteten och genom flera mönster av variation. Kontrasteringar görs, bl.a. till föregående deluppgift.

> <u>Excerpt 41</u>
>
> L: Vad säger ni om det här, är det en avbildning? [visar bild två]
>
> E (Helena): Nej, de har lagt ihop två stycken.
>
> L: Får det inte vara två kors då?
>
> E (Helena): Nej, för det är ett kors på denna bilden [pekar på originalbilden].
>
> L: En avbildning är ju proportionellt större. Vi hade ju inte två Tom innan på bilden eller hur, vi hade ju en Tom, hela Toms ansikte, allting var större.

> L: Det är visserligen två kors [pekar på bild två]. Den här tvåan kanske ni tänker har att göra med, hänger ihop med 2:1, men det ska bara vara ett kors, och i det korset ska alla sträckor bli, två gånger så långa.

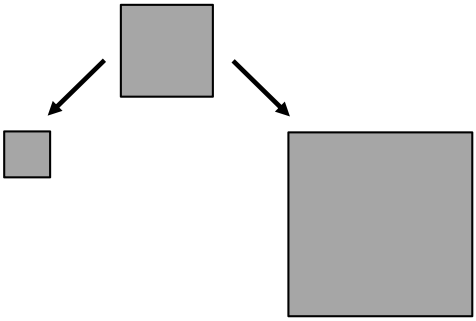
Även i denna cykel visar sig bild 2 öppna upp intressanta dimensioner av variation avseende vad som ska fördubblas vid en korrekt avbildning, vilket ovanstående utdrag visar delar av. När bild 2 visas upp, vilken innehåller två plustecken, görs två kontrasteringar; den första innebär att arean fokuseras genom att föreslå att arean på avbildningen ska bli dubbelt så stor vid skala 2:1. Den andra kontrasteringen innebär att plustecknets antal fokuseras genom att de två plustecknen i bild två kontrasteras med ’tvåan’ i skala-uttrycket, vilket sedan sammanfattningsvis relateras till vad proportionellt innebär. När övriga bilder visas, öppnas det upp fler dimensioner av variation avseende längder. Eleverna tycks, genom sitt sätt att uttrycka sig om bilderna under resterande del av aktiviteten, ha urskilt de aspekter som är av betydelse för att förstå innebörden av en korrekt avbildning. Den nya bilden, bild 6, fyllde därav ingen funktion.

Tabell 26. Sammanfattning av de iscensatta mönstren av variation i introduktionsuppgiften del B i cykel 3

Moment	Bas	Höjd	Motiv	Area	Urskiljning
Bild 1 visas. Basen har fördubblats. Motivet har förändrats.	v	i	v	Fokuseras inte.	Urskilja längder och dess förändring vid avbildning i relation till given skala.
Bild 2 visas. Basen har fördubblats. Motivet har förändrats.	v	i	v	Fokuseras inte	Urskilja längder och dess förändring vid avbildning i relation till given skala.
Bild 3 visas. Basen är fördubblad.	v	i	i	Fokuseras inte.	Urskilja längder och dess förändring vid avbildning i relation till given skala.
Bild 5 och 6 visas på tavlan. Basen och höjden är fördubblade. Motivet är förändrat.	v	v	v	Fokuseras inte	Urskilja längder och dess förändring vid avbildning i relation till given skala.
Bild 7 visas på tavlan. En korrekt avbild	v	v	v	Fokuseras inte	Urskilja längder och dess förändring vid avbildning i relation till given skala.

Rektangel – förstoring och förminskning

Efter introduktionsuppgifterna iscensätts aktiviteter där alla de kritiska aspekterna ska behandlas. Areans förändring har endast lyfts upp kort under ett moment i den tidigare aktiviteten, vilket betyder att den inte har problematiserats. Under cykelns resterande aktiviteter behandlas dock areaförändringen explicit. Kommande aktivitet ses som en generalisering till introduktionsuppgiftens båda delar, men nu utökad, vilket innebär att den dessutom innehåller en kontrastering mellan förstoring och förminskning.



Figur 27. Bild till aktiviteten 'rektangeln' i cykel 3

Under den här aktiviteten behandlas först en förstoring i skala 2:1 och en förminskning i skala 1:2 därefter görs en generalisering till skalorna 1:4 och 4:1.

Hela lärandeobjektet ges möjlighet att erfaras då alla de fyra presumtiva kritiska aspekterna synliggörs. Dessutom problematiseras även den femte och nya aspekten, vilken identifierades under cykel 2. Aspekten areaförändring har tidigare inte problematiserats under cykel 3. Den fokuseras först i denna aktivitet efter att längder och längdförändring varit i fokus genom flertalet mönster av variation tidigare under lektionen. Först fokuseras dock längder och längdernas förändring även i denna aktivitet.

<u>Excerpt 42</u>

L: Det här har jag nu avbildat [pekar på den högra bilden]. Jag har förstorat. Den där tvåan, det här [ringar in 2:1 som står på tavlan] står för skala. Men vad är det skalan innebär i det här fallet? Vad är det tvåan står för, tror ni?

E (?): Hur många gånger större.

L: Just det: Och i det här fallet, när det är skala, är det alltid längder.

Utdraget visar att aspekten längdförändring tas för given då eleven uttrycker *'hur många gånger större'*. Här går en möjlighet förlorad vad gäller att belysa **vad** det är som blir större. Läraren är inte vaksam på vad det är eleven menar som blir större utan öppnar här dimensionen längdförändring och därefter ett drag av aspekten längder. I nästa sekvens lyfter en elev in areaförändringen i relation till längdförändringen. Det görs en kontrastering mellan areaförändring och omkretsens förändring.

Excerpt 43

L: Vänta lite. Elisa säger du att den är fyra gånger så stor?

E (Miranda): Omkretsen?

L: Ja, omkretsen ja.

E (Miranda): Nej, den borde vara två gånger så stor.

L: Vad säger du Axel?

E (Axel): Omkretsen är dubbelt så stor och arean är fyra gånger så stor.

L: Vi ska titta på det.

[…]

L: Vi låter arean hänga i några sekunder. Är ni med på att om längderna blir dubbelt så stora (visar i figuren) så måste omkretsen vara bli dubbelt så stor också. För det här (visar omkretsen) är ju alla längder ihop.

[…]

L: Det handlar hela tiden om längder, men det händer saker med ytan också. Axel du var inne på det. (…) Kan du utveckla din tanke?

E (Axel): Ja du.

L: Borde det inte vara dubbelt så mycket?

E (Axel): Nej.

[…]

L: Så det blir en fyra gånger så stor figur?

E (Axel): Ja.

L: Ytmässigt och arean blir fyra gånger så stor, fast längderna var dubbelt så stora. Så det händer olika saker med längder och areor. Men vi vill att ni ska fokusera på längderna här.

Ovanstående utdrag åskådliggör hur aspekterna, längdförändring och areaförändring systematiskt behandlades, i relation till den givna skalan, genom de mönster av variation som iscensattes. Efter detta belyser en elev relationen mellan längdförändring och areaförändring genom att fråga om arean alltid förändras dubbelt så mycket som längden vid en förstoring. Denna aspekt identifierades som kritisk under cykel 2. Den lyftes då upp vid två tillfällen, men problematiserades inte vid något av dessa. Då aspekten dyker upp för första gången i den här cykeln problematiseras den inte omedelbart, utan först då den lyfts för andra gången.

Excerpt 44

E (Sofia): Så arean blir alltid dubbelt så stor?

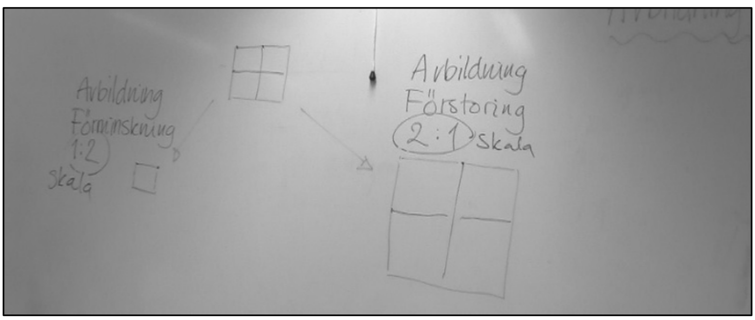
L: Är det alltid dubbelt? Du menar att två plus två är fyra?

E (Sofia): Ja. Eller?

L: Vi kan ha det som en arbetshypotes lite.

'Tvåan' kan här ses som intressant då den ställer till problem för eleverna. Dessa problem resulterar dock i att relationen mellan längdförändring och areaförändring problematiseras, men hur explicit görs det?

Läraren gör sedan en kontrastering mellan den aktuella kvadraten och den förminskade kvadraten, vilken också finns ritad på tavlan. En jämförelse görs mellan längdförändring och areaförändring där skillnaderna kan sägas bli explicitgjorda. Här ges möjlighet att se detta visuellt.



Figur 28. Innehållets behandling under aktiviteten 'rektangeln' i cykel 3.

<u>Excerpt 45</u>

L: Hur mycket större är den arean [pekar på originalbilden och den förminskade bilden] än den arean?

E (Erik): Fyra.

L: Precis, den är den fjärdedel [pekar på förminskningen]. Ja den får plats fyra gånger, fast längderna har halverats, delats på två.

En elev öppnar därefter upp dimensionen av variation avseende längdförändringen. Det iscensätts en generalisering där rektangel hålls konstant men skalorna varierar till 1:4 och 4:1.

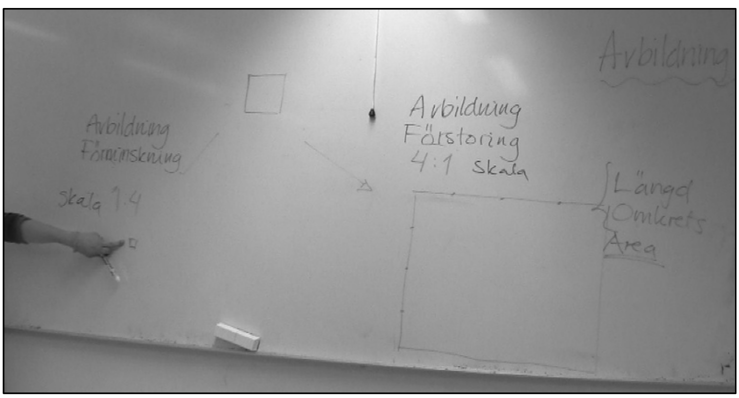
<u>Excerpt 46</u>

E (Johan): Om det är typ fyra gånger… får det plats…?

L: Om det hade varit fyra… skala 1:4?

E (Johan): Ja.

L: Kan vi, jag kan tänka mig göra ett sådant hopp nu, till den skalan. Jag gör det nu. Är det okej?



Figur 29. Innehållets behandling i cykel 3 del 2 under aktiviteten 'rektangeln'

En kontrast görs nu mellan förstoringen och förminskningen med hjälp av skala 1:4 och 4:1. Under den här uppgiften lyfts frågan igen huruvida areaförändringen är dubbelt så stor som längdförändringen, d.v.s. även aspekten relationen mellan längdförändring och areaförändring berörs och problematiseras. Dessutom ges möjlighet att urskilja omkretsen som ett värde av längdförändring.

Excerpt 47

E (Johan): Den är fyra gånger så lång och den är fyra gånger så lång [pekar]

L: Så att längderna, varje sida har blivit fyra gånger så långa. Vad tror ni har hänt med hela omkretsen här? [pekar]

[Flera elever pratar här rakt ut och läraren upprepar vad som sägs.]

L: Fyra gånger så stor? Fyra gånger så lång?

L: Vad har hänt med arean i så fall? Längd och omkrets märker ni, att det händer samma sak. Det blir fyra gånger så stort. [Skriver upp detta på tavlan]

L: Men vad händer med arean?

E (Allan): Åtta

Eleven Allan gör här troligtvis en generalisering från föregående uppgift där relationen mellan längdförändring och areaförändring lyfts, men inte problematiseras, utifrån frågan om areaförändringen alltid är dubbelt så stor som längdförändringen. Ingen notis tas över svaret utan det är ett annat elevinspel som tidigare gjorts som belyses.

Excerpt 48

L: Heli, du har ju varit inne på den här tanken alltså. Du har redan sagt det?

E (Heli): fyra gånger fyra är 16.

L: Fyra **gånger** fyra?

Innan läraren talar om huruvida Helis svar var rätt, eller undersöker Helis svar djupare, kontrasterar läraren svaret med Allans svar som dök upp någon minut tidigare, men inte uppmärksammades just då angående *'vad som händer med arean?'*.

Excerpt 49

L: Du sa tidigare Allan. Blir det dubbelt upp? Är fyra plus fyra åtta? Ja, det är ju åtta. [Pekar på 4:1] Men det är ju inte 16, eller hur? Utan det är fyra **gånger** fyra.

En kontrastering görs därefter mellan förstoringen i skala 4:1 och förminskningen 1:4. Den geometriska figuren är densamma.

I den här aktiviteten belyses de kritiska aspekterna systematiskt samtidigt som de också problematiseras. Det iscensätts kontrasteringar och generaliseringar vilka möjliggör urskiljning av längder och längdförändringar samt areaförändring i relation till korrekt avbildning och en given skala. Då detta görs innebär det också att det ges möjligheter att urskilja relationen mellan längdförändring och areaförändring. Rektangeln är i fokus liksom i de tidigare aktiviteterna. Den systematik av mönster av variation som iscensätts genom denna aktivitet fanns närmelsevis inte i de två tidigare cyklerna.

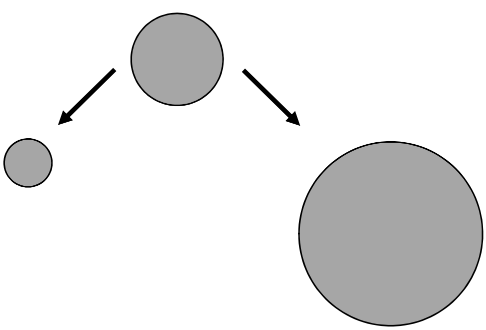
Tabell 27. De övergripande mönstren av variation som iscensattes i aktiviteten 'rektangeln' i cykel 3.

Moment	Bas	Höjd	Area	Urskiljning
Rektangel, förstoring och förminskning	v	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring samt dess relation vid avbildning och given skala.

Cirkeln – förstoring och förminskning

Nästa aktivitet genomfördes vare sig i cykel 1 eller cykel 2. Det är en generalisering till föregående aktivitet. Skalan hålls konstant, i och med att skala 1:2 och 2:1 även fokuserades i den tidigare aktiviteten. Den geometriska formen varieras, från rektangel till cirkel. Det ges möjlighet att urskilja längder i cirkeln samt längdförändringar och areaförändring i förhållande till den givna skalan.

Följande utdrag visar på vilket sätt, genom olika mönster av variation, som aspekterna behandlades och att de på så vis gavs möjlighet att urskiljas.



Figur 30. Bild till aktiviteten 'cirkeln' i cykel 3

Läraren ber eleverna att först fokusera längder i en cirkel.

Excerpt 50

E (Julia): Diametern

L: Diametern. Tack. Den finns. Jättebra.

E (Allan): Radien

L: Radien.

[…]

L: Nu ska ni fundera på, vad betyder den här tvåan egentligen [Pekar på tvåan i 2:1]. Hur stor borde den här cirkeln bli? [Pekar på den till höger] om jag jämför med den? Hur ska det bli om man ska avbilda? Ni får tänka. En cirkel är ju skitkonstig. Det är ju mycket enklare när det är en kvadrat eller rektangel.

E (Lena): En gång längre än vad själva strecket är, större.

L: Menar du en gång, att vi fördubblar det?

E (Lena): Ja.

[…]

E (Lena): Om du ska förminska den, förminskar du den en gång.

[Läraren ritar den förminskade cirkeln på tavlan.]

Eleverna öppnar upp dimensionen av variation avseende längder genom att belysa flera olika drag av aspekten längd i situationen. En kontrast görs även mellan förstoring och förminskning avseende längdernas förändring. Läraren och eleverna resonerar vidare tillsammans kring förstoringen av cirkeln i skala 2:1 och även areaförändringen fokuseras.

Excerpt 51

L: Men vad sjutton har hänt med arean här borta? [pekar på förstoringen] Är den också dubbelt så stor?

[…]

E (Axel): Den har dubblat själva, vad heter det…

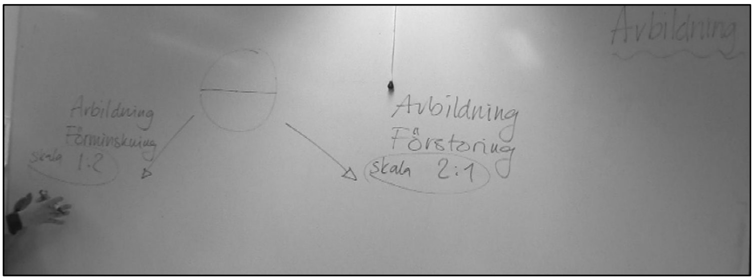
(Elevmummel)

E (Axel): Den har dubblat längderna.

L: Vad tror ni, hur mycket större tror ni arean är?

E (Allan): Fyra gånger

L: Fyra gånger så stor. Precis. Nu handlar inte skalan om arean, men det blir **effekter** på arean. Och jobbar vi med dubbelt så mycket [pekar på 2:1] så blir det fyra gånger så stor area.



Figur 31. Innehållets behandling i cykel 3 under aktiviteten 'cirkeln'

Även i den här aktiviteten iscensätts mönster av variation där alla de kritiska aspekterna, förutom relationen mellan längdförändring och areaförändring, behandlas explicit. Den femte kritiska aspekten belyses implicit i och med att det endast konstateras att *'jobbar vi med dubbelt så mycket, så blir det fyra gånger så stor area'*. Mönstren iscensätts med en systematik liknande den i föregående aktivitet, d.v.s. först ges möjlighet att fokusera längder, därefter längdförändringen och sist areaförändringen i relation till skala 1:2 och 2:1.

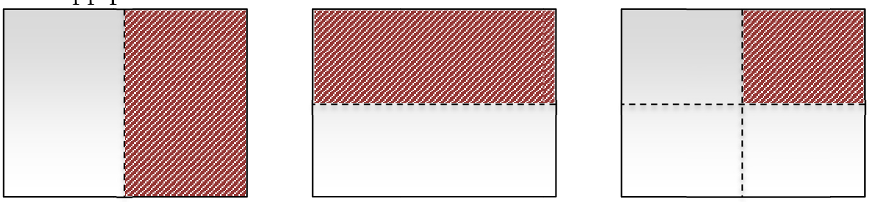
Tabell 28. De övergripande mönstren av variation som iscensattes i aktiviteten 'cirkeln' i cykel 3.

Moment	**Längder**	**Area**	**Urskiljning**
Förstoring och förminskning av en cirkel.	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring vid given skala

Rektangel A4-papper – förminskning

Då den i tredje cykeln tidigare genomförda aktiviteten 'rektangeln' och även till viss del aktiviteten 'cirkeln' behandlat samtliga kritiska aspekter genom ett systematiskt iscensättande av mönster av variation genomförs nästa aktivitet som en fusion. Aktiviteten, 'rektangel A4-papper' genomfördes visserligen i de två tidigare cyklerna, men då de kritiska aspekterna i den här cykeln behandlats mer explicit innan denna aktivitet genomförs kan man här se aktiviteten som en fusion där eleverna ges möjlighet att urskilja alla aspekterna simultant. Aktiviteten organiseras på samma sätt som i de tidigare cyklerna d.v.s. som en gruppaktivitet och startas upp genom att läraren introducerar uppgiften i klassen och visar upp ett A4-papper. Därefter går läraren runt mellan grupperna och lyssnar på elevernas resonemang för att på så vis eventuellt få ta del av vad de urskiljer när de löser uppgiften.

Exempel på lösningar som läraren har sett under elevernas grupparbete ritas upp på tavlan.



Figur 32. Kontrastering av tre elevsvar i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:2 i cykel 3.

Eleverna får ta ställning till de tre lösningsalternativen simultant genom att i helklass diskutera vilken av de tre bilderna som är en korrekt avbildning i skala 1:2 och vilka som inte är korrekta avbildningar enligt skalan. De uppmuntras att tala om varför det inte är en korrekt förminskning.

<u>Excerpt 52</u>

L: Varför är den rätt? [pekar på bilden längst till höger]

E (Tjej): Man har delat både längden och bredden.

[…]

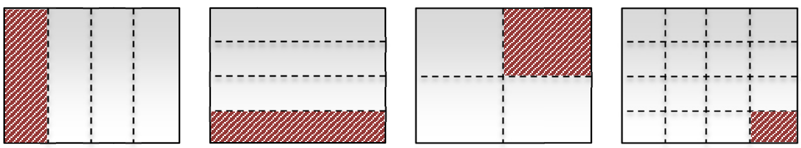
L: Men vad har hänt med arean undrar jag. Hur stor del är den här delen [pekar på den förminskade bilden] av hela den [pekar på originalbilden]?

E (Elin): En fjärdedel

L: Ja, en fjärdedel. Ja. Fast det inte finns en fyra här, så blir det en fjärdedel. Fyra gånger så liten. Okej.

Läraren lyfter in areaförändringen och kontrasterar areaförändringens proportioner med längdförändringens proportioner. Under den här redovisningen ges eleverna möjlighet att separera längder från area och relatera längdförändringen till den givna skalan. Detta liknar det mönster av variation som iscensattes under aktiviteten 'fotografiet' i lektion 2a. Elevernas tycks här, liksom i den tidigare aktiviteten, vara eniga om att bild 3 är den korrekta förminskningen. Aspekten, relationen mellan längdförändring och areaförändring belyses implicit, vilket också visas i ovanstående utdrag.

Därefter är det de grupper som arbetade med förminskning i skala 1:4 som ska redovisa sina lösningar. Även här visas de olika lösningsförslagen simultant. Grupperna får argumentera för om avbilderna är korrekta eller inte.



Figur 33. Kontrastering av fyra möjliga elevsvar i aktiviteten 'A4-papper' vid förminskning i skala 1:4 i cykel 3.

Excerpt 53

L: Den här då, den är ju i fyra delar? Den är ju i fyra delar borde inte det stämma med den [pekar på bilden längst till vänster samt uttrycket 1:4 som står på tavlan].

L: Sebbe?

L: Allan?

E (Allan): Nej, den är ju bara hälften. Längderna är ju bara hälften. Det blir ju inte fyra gånger.

Kontrasteringar görs först mellan de tre inkorrekta lösningarna och därefter läggs den fjärde och korrekta avbildningen till. De två första svaren, där arean har delats med fyra, uttrycks inte av eleverna som en korrekt lösning. I nästa alternativ har alla längder delats med två och arean har blivit en fjärdedel av originalbilden.

Excerpt 54

L: Kan jag göra så här då så vi får alla att bli så [ritar samtidigt den korrekta förminskningen]

E (Alva): Ja, så fyra

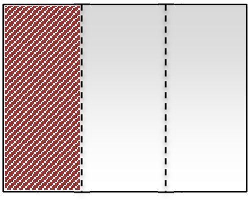
> […]
>
> L: Man kan ju fundera på hur stor del den där [pekar på förminskningen] är av den [pekar på originalbilden].
>
> […]
>
> L: Hur stor del är arean jämfört med den arean?
>
> E (Carl): 16 gånger så liten
>
> […]
>
> L: […] men längderna var en fjärdedel.

Läraren ritar och visar att längderna blivit en fjärdedel så långa och lyfter därefter aspekten areaförändring och kontrasterar den med längdförändringen. I den här sekvensen belyses längdförändring och areaförändring explicit. Båda aspekterna kommer i förgrunden och behandlas simultant. Relationen mellan längdförändring och areaförändring kan endast förnimmas.

Under lektion 3b, ska A4-pappret förminskas i skala 1:3. Aktiviteten organiseras som ett grupparbete, i likhet med de tidigare cyklerna.

> <u>Excerpt 55</u>
>
> L: Det ni ska fundera på, hur gör man här, med förminskning, om man gör skala 1:3? Hur ska man vika det här pappret för att det ska bli en korrekt avbildning av det här pappret? Ni får en stund på er så kollar vi lite olika resultat?

På tavlan ritas olika alternativa lösningsförslag upp. Men till skillnad från föregående uppgift visas och diskuteras förslagen sekventiellt. Första lösningen ser ut enligt följande;



Figur 34. Första alternativet till lösning i aktiviteten 'A4-papper' skala 1:3 i cykel 3

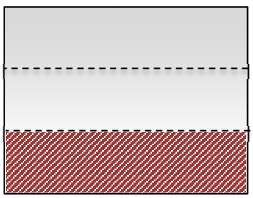
Excerpt 56

L: Vad är det som är fel eller rätt med den här?

[…]

E (Julia): Men de har ju gjort, alltså bara ena sidan.

Den andra bilden är också ett alternativ där hela A4-pappret har delats in i tre delar, men nu längs höjden.



Figur 35. Andra alternativet till lösning i aktiviteten 'A4-papper' skala 1:3 i cykel 3

Excerpt 57

L: Var det någon som gjorde så här då? Vad är det som är rätt och vad är det som är fel i den?

L: Jakob?

E (Jakob): Alltså, det är ju typ, det är ju exakt samma form som den andra, men den är åt andra hållet.

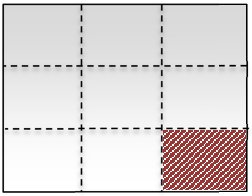
[…]

L: Men vad är det den där trean står för? [pekar på 1:3 som står på tavlan]

L: Vad, hur ska man tänka?

E (kille): Hur många gånger man ska dela.

L: Du menar hur mycket mindre man ska, mindre den här färdiga längden ska vara då allt är klart. Hur mycket mindre den är jämfört med ursprungsbilden. [pekar på bilderna]



Figur 36. Tredje alternativet till lösning i aktiviteten 'A4-papper' skala 1:3 i cykel 3

I det ovanstående momentet skapar läraren variation genom att kontrastera de olika alternativen. Det är elevernas inspel tillsammans med lärarens frågor som ger variationen. Läraren låter dock inte eleven tala om vad han har urskilt utan talar i stället om för eleverna vad det är som ska urskiljas, vilket kan jämföras med lektion 2a och 2b där läraren i sitt sätt att ställa följdfrågor visar att hon vill att eleverna ska uttrycka vad det är de har urskilt. Det är dock inga elevgrupper som redovisar några av de felaktiga förminskningarna utan alla grupper har en korrekt förminskning att visa upp. Efter diskussion kommer det dock fram att en grupp har haft problem och egentligen har två svar. En elev från en annan grupp vill här iscensätta en kontrastering mellan rätt svar och fel svar.

Excerpt 58

L: Men hur blev det då? Kan du visa?

E (Albin): Fel

E (Rosa): Fel

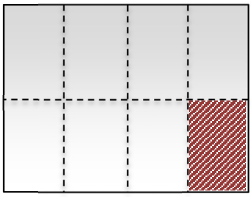
E (Julia): Alltså, det är ju det lektionen går ut på, att vi ska visa vad vi gjorde för fel. Vi lär oss av våra misstag.

E (Julia): Alltså, hur vek ni?

[…]

E (Elina): Vi fick fyra rutor i alla fall, åtta menar jag.

Gruppens bortvalda lösning ritas upp på tavlan.



Figur 37. Fjärde alternativet till lösning i aktiviteten 'A4-papper' skala 1:3 i cykel 3

I den här sekvensen synliggörs att en elevgrupp initialt hade antal vikningar i förgrunden. Gruppen hade liknande problem som en grupp från lektion 1b där eleverna hade vikt pappret tre gånger då skalan var 1:3. Vikningarna kom i första cykeln att vara i förgrunden i aktiviteten. Även i den här cykeln har läraren frågat efter hur eleverna har vikt sitt papper då de gjort förminskningen. Tar hon för givet att eleverna kan hålla både vikningar och längdförändring i fokus samtidigt? Eller att de kan hålla vikningarna i bakgrunden då de ska ha fokus på längdförändringen? Här iscensätts dock en kontrast mellan dessa båda; antal vikningar och längdförändring avseende skalan. På så vis kan längdförändringen komma i förgrunden igen. Vidare belyses även areans förändring samt ett nytt drag av aspekten längd i och med att omkretsen lyfts som en variation på aspekten längd.

<u>Excerpt 59</u>

L: Det är inte helt lätt att få till, man måste verkligen få till, och tänka till på vad står den där trean för. Att fatta det. Det står ju inte för tre vikningar egentligen. Utan man ska få att den här [visar i den korrekta bilden på tavlan] ska vara en tredjedel av den [visar basen] och den ska vara en tredjedel av den [visar höjden]. Och ni kom till längderna allihop.

[…]

L: Nu undrar jag så här, om längderna blivit en tredjedel, vad har hänt med hela omkretsen?

[…]

E (Erik): Ja men omkretsen är ju en tredjedel.

[…]

L: Men hur resonerade ni Elin?

E (Elin): Nej, men jag menar att själva ytan får plats nio gånger.

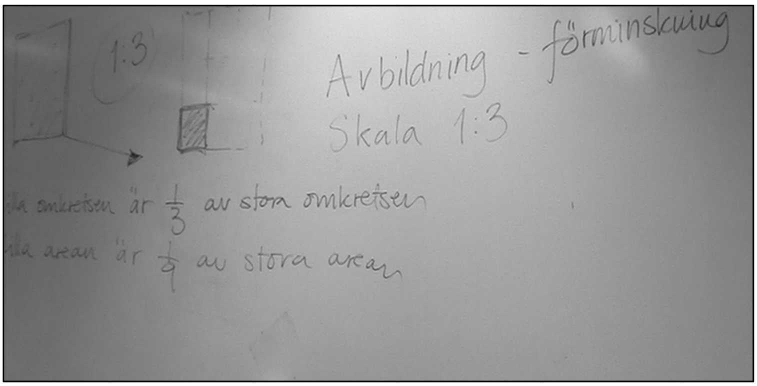
[…]

L: Lilla omkretsen är en tredjedel av stora omkretsen precis som det var med den längden och den längden [pekar i bilderna]

L: Men du menar den lilla arean Julia?

E (Julia): Ja.

L: Lilla arean är en niondel av stora arean eftersom den får plats nio gånger där i då.



Figur 38. Innehållets behandling under aktiviteten 'A4-papper' i cykel 3 där en kontrastering görs mellan längdförändring och areaförändring.

De fyra presumtiva kritiska aspekterna ges möjlighet att urskiljas under aktiviteten genom flera mönster av variation. Det genomförs jämförelser mellan de båda aspekterna längdförändring och areaförändring. Relationen dem emellan belyses dock inte. Det iscensätts flera kontrasteringar där separation av längder och area görs möjlig, men det ges även möjlighet att urskilja längder och dess förändring i relation till en korrekt avbildning och en given skala.

Tabell 29. Övergripande sammanfattning av de iscensatta mönstren av variation under aktiviteten 'A4-papper' i cykel 3.

Moment	Längdförändringar	Area	Urskiljning
Förminskning av en rektangel i skala 1:2 och 1:4	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring i relation till den givna skalan samt innebörden av avbildning. En elev lyfter också implicit upp relationen mellan längdförändring och areaförändring, men det är inget som behandlas.
Förminskning av en rektangel i skala 1:3	v	v	Längder, längdförändring och areaförändring i relation till den givna skalan och innebörden av avbildning.

Rektangeln – förstoring med och utan mått

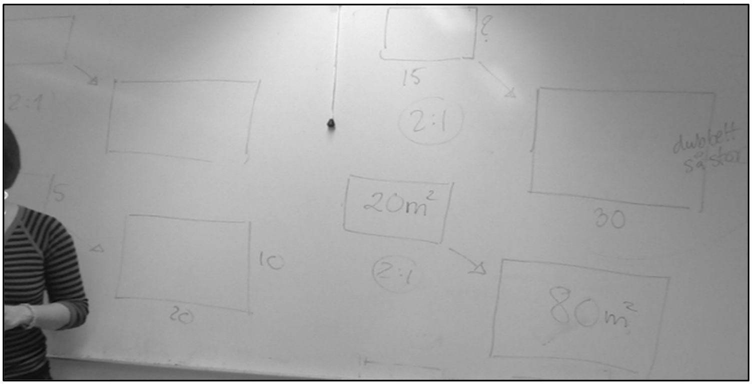
Även i denna aktivitet är det utifrån en rektangel som innehållet behandlas. Men till skillnad från de övriga aktiviteterna hålls areaförändringen initialt i förgrunden. Det är flera mönster av variation som iscensätts även här, men den del av aktiviteten som är av mest betydelse för erfarandet av lärandeobjektet är att eleverna, i kontrast till de tidigare aktiviteterna, initialt erbjuds att ha areaförändringen i förgrunden. Den lilla rektangeln har en area på 20 m^2 och den stora har en area på 80 m^2 och eleverna ska avgöra om det kan stämma att förstoringen är gjord i skala 2:1.

> Excerpt 60
>
> L: Vi har ju hela tiden pratat om att det ska vara dubbelt så långa längder. Men vad sjutton, det här är väl inte dubbelt så mycket? [Pekar 80m^2 respektive 20m^2]
>
> L: 80 är väl inte dubbelt så mycket som 20?
>
> […]
>
> L: Abbe säger att det är fyra gånger så mycket.
>
> […]
>
> L: Kan vi göra en liten bevissväng bakåt här. Vad skulle det kunna vara för sidor?

Här ges möjlighet att göra ett förgrundsskifte, från att ha haft areaförändring i förgrunden uppmanas eleverna nu att byta fokus och istället ha längder och längdförändringar i förgrunden.

Excerpt 61

L: Kom ni ihåg vad vi höll på med innan ni, i början av lektionen? Helen?
Att vi märkte att när vi hade skala 2:1 så blev det **inte** dubbelt så stor area.
Det blev fyra gånger så stor area.



Figur 39. Innehållets behandling under aktiviteten 'rektangeln – förstoring med och utan mått' i cykel 3 där areaförändringen är i förgrunden.

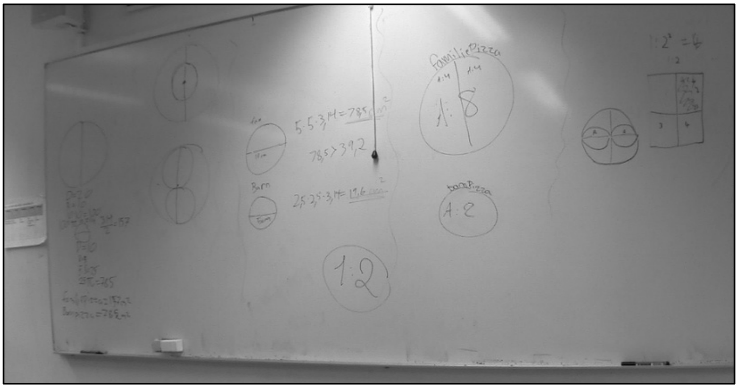
Eleverna får här möjlighet att separera längder från arean och relatera längdförändring och areaförändring med den givna skalan, men nu med ett initialt fokus på areaförändringen.

Tabell 30. Övergripande sammanfattning av de mönster av variation som iscensattes under aktiviteten 'rektangeln – förstoring med och utan mått' i cykel 3.

Moment	Längder	Area	Urskiljning
En förstoring i skala 2:1.	v	v	Längder och relatera dessa till areaförändringen och den givna skalan.

Pizza – förstoring och förminskning av cirkel

Aktiviteten organiseras som i de föregående cyklerna. Mer information avseende aktivitetens design kan läsas på s. 89. Cirkeln har i denna cykel tidigare varit en del av innehållet, till skillnad från de tidigare cyklerna, där aktiviteten 'pizza' var den enda aktivitet som behandlade cirkeln. Läraren organiserar aktiviteten som en gruppuppgift på samma sätt som gjorts i de tidigare cyklerna, men förändrar redovisningsstrukturen. Alla elevgruppers lösningar ritas upp på tavlan, så att lösningarna kan synliggöras samtidigt. Det är dock kontrasteringar som iscensätts, precis som i de tidigare cyklerna, för att genom dessa möjliggöra urskiljning av kritiska aspekter, men också för att synliggöra vad eleverna redan har urskilt. Även den här aktiviteten ses som en fusion då eleverna måste urskilja längd, längdförändring och areaförändring simultant i relation till en korrekt avbilning och en given skala.



Figur 40. Innehållets behandling i 'Pizzauppgiften' i cykel 3.

Läraren börjar med att fråga eleverna om de ser några likheter mellan lösningarna.

Excerpt 62

L: Så kan vi börja med att vi bara tittar på allihop, så får vi se lite hur ni har tänkt.

L: Finns det likheter mellan några gruppers lösningar på tavlan som även, om de kanske skiljer sig lite, så finns det någonting som de har gemensamt? Ser ni någonting här?

E (Elin): Diametern

Klassen kommer fram till att alla grupper har delat diametern på hälften d.v.s. de har urskilt längd.

Excerpt 63

L: Då undrar jag, första, första grejen, som jag tror att alla har gemensamt här inne. Hur har ni tolkat den här skalan? [pekar på 1:2 på tavlan]

[…]

E (Julia): Alltså, den är ju hälften så stor i omkretsen.

[…]

E (Julia): Ja, den är hälften så stor i omkretsen, men eftersom de vill ha mer pizza, så måste vi kolla på arean.

L: Okej, men vad har ni gjort? Hur har ni använt den?

[…]

L: Ni jobbar ju med längd, eller hur. Sedan i nästa steg arean.

[…]

E (Juila): Pizzan är bara hälften så stor runt om, men den är fyra gånger så liten i area.

L: Hur dyker fyran upp?

I nästa sekvens ges möjlighet att urskilja längdförändring och areaförändring simultant då en elev i nästa moment lyfter upp de båda aspekterna samtidigt. Läraren poängterar dock att först ska de urskilja längder och därefter arean.

Läraren belyser kontrasten mellan längdförändringen och areaförändringen som lyftes fram av Julia tidigare och visar på så vis relationen mellan längdförändring och areaförändring.

Excerpt 64

E (Allan): Att man tar skalan gånger skalan, egentligen, eller om det är 1:2, så tar man två gånger två, så blir det fyra, så om man tar skala 1:3 så tar man tre gånger tre, så blir det nio.

[…]

L: Men är det så även när det är cirkelformat?

E (Helen): Ja, men man ser det inte lika lätt.

En jämförelse görs mellan hur eleverna förminskade en rektangel i skala 1:2 i en tidigare aktivitet och hur de nu gick till väga när de förminskade en cirkel i skala 1:2. En elev gör en generalisering mellan skala 1:2 och 1:3, vilket kan ses som nödvändig för att urskilja skillnaden mellan 'två gånger två och två upphöjt till två'. Denna generalisering gjordes även i föregående uppgift, 'A4-uppgiften' där eleverna skulle förminska ett A4-papper först i skala 1:2 och därefter i skala 1:3.

Elevgruppernas lösningar redovisas på tavlan och vad de har urskilt och hur de angripit uppgiften sätts i fokus och prövas. I likhet med cykel 1 och 2, är det diametern som urskils avseende längder. En grupp redogör för en lösning, vilken dock var mer frekvent i både cykel 1 och 2, där de gör en generalisering till kvadraten som tidigare varit del av innehållet. De ställer en hypotes där de antar att cirkeln fungerar på samma sätt, d.v.s. det borde gå att dela cirkeln i fyra lika stora delar, där en fjärdedel skulle utgöra en barnpizza.

I likhet med aktiviteten, då den genomfördes i cykel 2, är det ett starkt fokus på längder och längdförändring initialt. Men till skillnad från cykel 2 belyses även i denna cykel areaförändringen explicit. Läraren tar först fasta på aspekten att urskilja längder samt dess förändring vid den givna skalan, därefter lyfts areaförändringen. På det vis som uppgiftens innehåll behandlas under lektion 3b ges en större möjlighet för en variation av tolkning och lösningssätt. Läraren och eleverna öppnar tillsammans dimensioner av variation vad gäller olika innehållsliga aspekter genom att elevernas olika sätt att lösa uppgiften används.

De övergripande mönstren av variation som användes av läraren för att möjliggöra för eleverna att erfara innebörden av förminskning av en cirkel vid en given skala var de samma som i cykel 1 och 2. För att se sammanfattningen av dessa, se tabell 13, 14 och 15.

Analys av lektionernas möjliggörande av elevernas kunnande i cykel 3

I tabell 31 visas elevgruppens resultat på uppgiftsnivå. Därefter följer en analys där elevernas lärande jämförs med hur innehållet behandlades under lektionerna under cykel 3.

Tabell 31. Sammanställning av elevgruppsresultat på uppgiftsnivå i cykel 3.

Uppgift	**Förtest n=11**	**Ej svar**	**Efter-test n=11**	**Ej svar**	**Fördröjt eftertest n=11**	**Ej svar**
2b Avbildning	1	5	9	0	10	0
2c Avbildning	4	6	11	0	10	0
3. Förstora en triangel i skala 4:1.	1	6	9	1	10	0
4. Förstora en cirkeln i skala 4:1.	1	6	9	2	10	0
5. Förstora en kvadrat i skala 2:1.	1	6	10	0	10	0
8a Urskilja längder och längdförändring	4	5	9	2	10	2
8b Urskilja areaförändring	0	5	5	5	3	5
9a Urskilja areaförändring	3	6	6	3	5	1
9b Urskilja längd och längdförändring	1	7	8	3	10	1

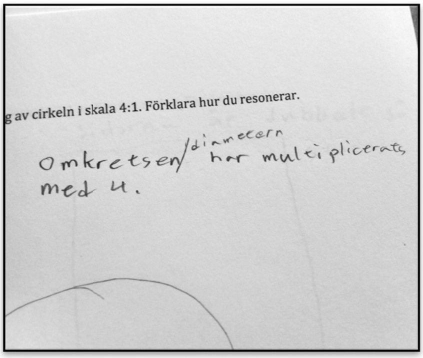
Vad är avbildning och vad är inte avbildning? Testuppgift 2b och 2c

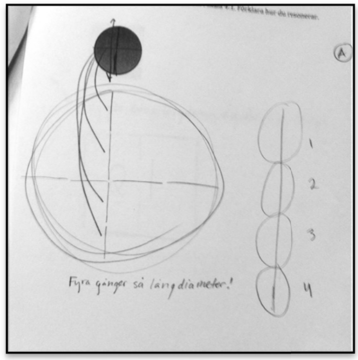
Samma elevresultat som i cykel 2 framkommer även i cykel 3. I cykel 3 behandlas dock innehållet i introduktionsuppgiften genom att bilderna visas sekventiellt från början, men då inga bilder tas bort när nya kommer till kan alla bilder erfaras samtidigt/simultant i slutet av uppgiften och fördelaktiga kontraster ges möjlighet att göras även här. Detta systematiska upplägg avseende mönster av variation vid urskiljning av längder och längders förändring i förhållande till likformig avbildning tycks vara fördelaktigt då båda elevgrupperna visar tillfredsställande resultat. Eleverna får även i cykel 3 respons till sina inspel vilket iscensätter kontrasteringar genom att inspel och påståenden jämförs. På så vis används elevernas förståelse för att synliggöra de kritiska aspekterna, men även för att synliggöra nya drag av aspekterna. Eleverna i denna grupp visar på samma sätt som eleverna i cykel 2 att de genom sina motiveringar har separerat längder från yta, t.ex. 'alla sidor plus cirkelns omkrets har ökat fyra gånger'.

Förstoring av olika geometriska figurer - testuppgift 3, 4 och 5

Elevgrupp 3 har utvecklats mest baserat på att de var de som visade minst kunskaper på förtestet och sedan dessutom visar det bästa resultatet på eftertestet. Eleverna i den här gruppen har jämfört med de två tidigare elevgrupperna urskilt längder och dess förändring i mycket större utsträckning, framförallt när det gäller cirkeln-uppgiften. Under cykel 3 behandlades innehållet utifrån cirkelfiguren vid två tillfällen, där de iscensatta mönstren av variation som möjliggjorde att både längder och längdförändringar kunde urskiljas i förhållande till skalan troligtvis var mer effektiva. Under lektionen iscensattes ett mönster av variation där eleverna erbjöds att systematiskt urskilja först längder därefter längdförändringen och sist areaförändringen. Aktiviteten var dessutom en generalisering från den föregående aktiviteten där en rektangel behandlades genom ett mönster av variation med samma systematik. Det är visserligen två elever som svarar blankt, men övriga elever uttrycker att de urskiljer en eller flera av cirkelns längder; diameter, radie eller omkrets vilka de sedan gör fyra gånger så långa. När det gäller triangeln är det en elev som lämnar blankt och en elev som endast uttrycker att triangeln ska bli fyra gånger större, men skriver inte **vad** som ska bli fyra gånger större. I uppgiften om kvadraten har alla elever förutom en, illustrerat förstoringen utifrån en urskiljning av längd och längdförändring. Eleven har i stället haft arean i förgrunden och ritat en figur vars area har blivit dubbelt så stor. Då eleven bara har lagt till en kvadrat till den ursprungliga har resultatet blivit en ny figur som inte heller är en korrekt avbild. I de övriga figurerna, triangeln och cirkeln har eleven dock fokuserat längder vid förstoringen.

Alla de elever som ritat korrekta förstoringar har också, till skillnad från de tidigare lektionernas elever, talat om vad de har urskilt, d.v.s. vilka längder de har utgått ifrån då de förstorat figuren. De flesta eleverna har uttryckt att 'alla sidor ska förlängas' när det gäller triangeln eller kvadraten. När det gäller cirkeln har de uttryckt ett svar som visar att de är medvetna om både omkrets och diameter som sträckor i en cirkel. Relaterat till hur innehållet behandlades under lektionerna kan man se att mönster av variation med ett samtidigt fokus på de två aspekterna längdförändring och areaförändring iscensattes i flera moment under cykel 3. Då eleverna redovisade sina lösningsstrategier av aktiviteten 'A4-pappret' gjordes flera kontraster vilka möjliggjorde att eleverna kunde separera längd från area och skillnader mellan längdförändring och areaförändring gjordes explicit. Detta mönster av variation fanns inte med samma explicitet i de två tidigare cyklerna.

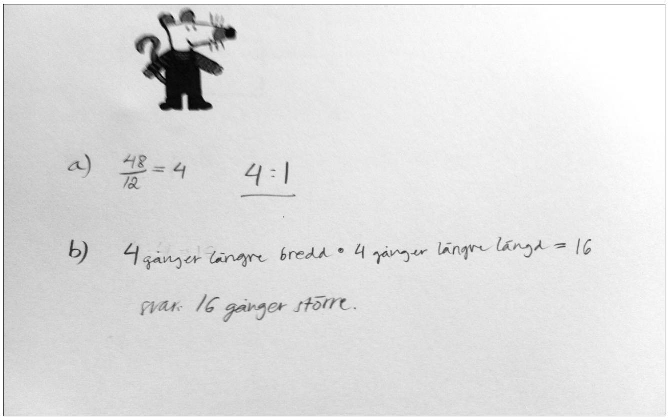




Figur 41. Utdrag av elevsvar från eftertest uppgift 3, 4 och 5 i cykel 3

Simultan urskiljning - Testuppgift 8 och 9

Liksom i elevgruppen i cykel 2 visar nästan samtliga elever i denna cykel, nio av elva, att de i uppgift 8a kan räkna ut skalan korrekt då de får ett mått på längden av den lilla figuren och ett motsvarande mått på längden av den större figuren. Hälften av dessa elever uttrycker också att arean på den större figuren blir 16 gånger större. Det är endast en elev i elevgruppen som uttrycker att arean blir fyra gånger så stor, vilket kan betyda att eleverna i den här cykeln är på väg att släppa 'illusionen av linjäritet'. I uppgift 9 visar elevgruppen, precis som eleverna i cykel 2, att de kan urskilja längder och längdförändring och därmed tala om i vilken skala en förstoring är gjord. Av dessa elever kunde alla förutom en även urskilja areaförändringen korrekt. Då inga elever i den här elevgruppen uttryckte att areaförändringen blev den dubbla längdförändringen i uppgift 8b kan det indikera att de elever som uttrycker att area blivit fyra gånger större i uppgift 9 ser en korrekt relation mellan längdförändring och areaförändring, d.v.s. de ser arean som kvadraten av längdförändringen och inte som den dubbla längdförändringen. Eleverna uttryckte också svar där de överlag angivit vad det är de urskilt, t.ex. att det handlar om att både 'längd och bredd ska förlängas'.



Figur 42. Utdrag av elevsvar från eftertest uppgift 8, och 9 i cykel 3

Den här elevgruppen var markant bättre på att urskilja längder, längdförändring och areaförändringen simultant, vilket indikerar att de kunde släppa 'illusionen om linjäritet'. Under lektionerna i cykel 3 iscensattes både fler och mer effektiva mönster av variation som kan anses svara mot mönstret fusion. Det fanns en systematik i vad som hölls konstant och vad som varierade i större utsträckning än i de tidigare cyklerna. De mönster av variation som iscensattes genom A4-uppgiften gav större möjlighet att separera längder från area, än i de tidigare lektionerna. Eleverna visade också genom sina lösningar att de fokuserade på längderna i förhållande till skalan. Det redovisades inga lösningar där arean varit i förgrunden. En elevlösning dök dock upp som återigen visade på att den nya kritiska aspekten 'relationen mellan längdförändring och areaförändring' är av betydelse för förståelsen av lärandeobjektet. Jämför man elevernas resultat i den här klassen med de övriga två klassernas elevresultat så presterar de bättre på eftertestet i just de uppgifter där längdförändringen och areaförändringen frågas efter samtidigt. Den här samtidigheten iscensätts genom mönster av variation vid flera tillfällen under den tredje cykeln.

Empiriska jämförelser av studiens tre cykler

De tre elevgrupperna var i stora drag likvärdiga avseende den förförståelse de visat upp av det aktuella lärandeobjektet. På förtestet hade majoriteten av eleverna areaförändring i förgrunden då de efter given skala skulle förstora eller förminska en geometrisk figur. Flertalet av dessa hade inte ett samtidigt fokus på likformigheten och konstruerade bilder som fick en helt annan form än ursprungsbilden, men med en area som var fyra respektive två gånger större. Markanta skillnader kan däremot ses mellan de tre grupperna i eftertestsresultaten. Resultaten indikerar att den elevgrupp som deltog i cykel 3 i större utsträckning utvecklat den förmågan som avsågs, d.v.s. att urskilja linjära och icke-linjära samband vid förstoring och förminskning av tvådimensionella geometriska objekt samt utifrån detta hantera begreppet skala. Genomgående har denna elevgrupp ett bättre resultat än de övriga två grupperna.

Resultat från de tre för- och eftertesten indikerar att eleverna i cykel 3 till stor del har utvecklat den förmåga som avsågs under studien. Vid en närmare granskning av testresultaten skiljer sig de tre cyklerna åt. Avseende de planerade aktiviteterna, vilka skiljer sig åt i antal mellan de tre cyklerna, kan dessa ha resulterat i att det skapades olika läranderum. Cykel 3 innehåller några fler aktiviteter än cykel 2, som i sin tur innehåller fler än i cykel 1. Denna utveckling har skett utifrån den ökade insikten om vad eleverna behöver erbjudas att urskilja. Innehållets behandling skiljer sig därför också åt mellan de tre cyklerna avseende antal iscensatta mönster av variation och huruvida urskiljning av de kritiska aspekterna görs mer eller mindre explicit. Utifrån innehållets behandling i de tre cyklerna relaterat till elevernas testresultat görs här en sammanfattning över vad som gjordes möjligt för eleverna att lära. Syftet är att beskriva vilka likheter och skillnader mellan de tre elevgruppernas lärande som kan urskiljas.

Elevgruppen i cykel 1 visar utifrån testresultat att de inte i någon större utsträckning har urskilt lärandeobjektets kritiska aspekter. De iscensatta mönstren av variation gav eleverna begränsade möjligheter att lära det tänkta lärandeobjektet. Analys av de iscensatta mönstren av variation visar att varken längdförändring eller areaförändring fokuserades på ett sådant sätt att det gav eleverna möjlighet att urskilja dessa aspekter av innehållet på ett sätt som krävdes för att utveckla den önskvärda förmågan. Resultaten indikerar att de fortfarande har kvar ’illusionen om linjäritet’, d.v.s. de uttrycker på eftertesten att om längderna blir fyra gånger så långa i en figur så blir även arean fyra gånger så stor. Vid analys av cykel 1, då de iscensatta mönstren av variation betraktades, visas att elevgruppen inte gavs möjlighet att erfara de kritiska aspekterna simultant. Läraren höll areaförändringen i bakgrunden och hade under båda lektionerna fokus på längder och längdförändring i förhållande till givna skalor, vilket troligen försvårade för eleverna att urskilja dem både separat men också simultant, d.v.s. att separera längdförändringar från areaförändringen. För att kunna ha areaförändringen i bakgrunden måste den också ha urskilts, vilket gör iscensättandet av mönster av variation problematiskt då aspekterna är funktioner av varandra.

Elevresultatet i cykel 2 däremot indikerar att de iscensatta mönstren av variation innebar att elevgruppen fick avsevärt större möjlighet att urskilja längder och dess förändringar i förhållande till en given skala. I de första uppgifterna, 2b och 2c, visar större delen av gruppen att de kan urskilja längder och längdförändringar i förhållande till den givna skalan. I testuppgifterna 3, 4 och 5 visar de samma förmåga som elevgruppen i cykel 3 men med ett något sämre resultat i uppgift 4 som behandlade cirkeln. I det mönster av variation där cirkeln behandlades i cykel 2 'pizzauppgiften', visar analysen att mönstret inte blev strukturerat som det var planerat att vara. Flera aspekter varierade samtidigt, vilket också var planerat, då aktiviteten sågs som en fusion, men redovisningen av elevernas olika lösningar och vilka aspekter de hade urskilt blev inte explicitgjorda i den utsträckning som troligen hade varit av betydelse. Dessutom var det tidsbrist och läraren avslutade inte aktiviteten som önskat.

Lektionsanalysen visar också att det fanns ett tydligt fokus på att areaförändringen skulle hållas i bakgrunden och att det var längder och längdernas förändring som skulle vara i förgrunden, vilket resulterade i att denna elevgrupp inte lyckades så väl i de frågor på eftertestet, uppgift 8 och 9, som efterfrågade båda dessa aspekter simultant. Att eleverna hade problem med att fokusera båda dessa aspekter simultant visade sig i aktiviteten 'A4-papper', vilket också resulterade i att en ny aspekt dök upp; relationen mellan längdförändring och areaförändring.

Första lektionen i cykel 3 inleddes även den med ett starkt fokus på längder och längdförändringar i relation till både en given skala, men också till begreppet likformighet och korrekt avbildning. Aspekten areaförändring belystes inte under introduktionuppgiften utan där var det starkt fokus på längder och dess förändring. Däremot lyftes aspekten areaförändring explicit i de nästkommande aktiviteterna, 'rektangeln' och 'cirkeln' och elevgruppen fick möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna simultant. De mönster av variation som iscensattes i cykel 3 kan tolkas som att det var möjligt för eleverna att urskilja dessa kritiska aspekter simultant på ett mer explicit sätt än de mönster av variation som iscensattes i cykel 1 och 2.

När det gäller det icke-linjära sambandet mellan geometriska figurer, d.v.s. aspekten areaförändring, indikerar elevresultatet för elevgrupperna i cykel 1 och 2 att denna aspekt inte erbjöds urskiljas på ett kraftfullt sätt. Denna aspekt hölls i allt för många mönster av variation i bakgrunden och detta trots att elever i framförallt cykel 2, efterfrågade aspekten. De gav starkt uttryck för att de ville lyfta in den aspekten i resonemanget då längdförändringar fokuserades i relation till en given skala. Läraren i cykel 2 fortsatte dock att belysa längder och dess förändringar och plockade inte in areaförändringen förrän i slutet av den första lektionen i cykeln. Elevgrupp 3 presterar avsevärt bättre i de två test-uppgifterna, 8 och 9, där både längdförändring och areaförändring efterfrågas. En tänkbar anledning till detta kan vara att fler mönster av variation iscensattes där dessa två aspekter hölls i förgrunden simultant, men också att det går att utläsa en systematik i hur dessa mönster av variation öppnades upp. Aspekterna längder och längdförändring i förhållande till avbildning och likformighet fokuserades först, därefter plockades skalan in. I nästa steg lyftes areaförändringen explicit och blev en del av innehållets behandling, men med ett samtidigt fokus på längdförändringen. Relationen mellan dessa båda aspekter behandlas också explicit vid flertalet moment. Dessutom varierade även den geometriska figuren. Betydelsefullt för att erfara det avsedda lärandeobjektet tycktes vara vad som gjordes möjligt att urskiljas omedelbart och vad som lämnades därhän en stund för att senare, då läraren ansåg att det gav en större potential, lyftas fram och fokuseras genom ett mönster av variation.

En översikt av lektionernas läranderum

När olika dimensioner av variation öppnas upp i undervisningssituationen skapas en rymd av variationer, ett läranderum, till vilket lärarens och elevernas medvetande riktas. Läranderummets beskaffenhet bestämmer således den innebörd eller den mening som är möjlig för eleverna att erfara. De dimensioner av variation som öppnades upp eller de kritiska aspekter som belystes under studiens tre cykler när det gäller förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer visas i nedanstående tabell 26.

Från lärargruppens sida fanns en intention av progression av innehållets behandling genom lektionsaktiviteterna. Introduktionsuppgifternas syfte var att först behandla de kritiska aspekterna; längd och längdförändring i relation till avbildning och låta helheten vara konstant. Helheten i det här momentet var den geometriska formen rektangel, förstoring, proportionell avbildning samt begreppet skala, d.v.s. proportionalitetskonstanten. Efter att ha belyst dessa kritiska aspekter och låtit helheten vara konstant ansåg lärargruppen att de var i position att diskutera situationer eller erbjuda aktiviteter där även areaförändringen fokuseras d.v.s. att flera kritiska aspekter varierar samtidigt då de iscensätts genom ett mönster av fusion. Detta görs genom aktiviteterna som därefter följer. Resultatet av detta visar sig i att läranderummet växer ju längre in i varje enskild cykel undervisningen fortskrider, men även ju längre in i studien lärargruppen och eleverna kommer, eftersom de iscensatta mönstren av variation både förfinas och blir fler mellan varje cykel. Läranderummen blev också olika utifrån att elevernas frågor och inspel varierade mellan grupperna, vilket resulterade i att de kritiska aspekterna kunde belysas på olika sätt.

Här nedan följer tabellen över hur läranderummet utvecklades genom studien i respektive cykel. Jämförelse kan göras, både inom och mellan aktiviteterna i de olika cyklerna, vilket kan hjälpa till att göra det möjligt att upptäcka och beskriva olikheter i huruvida kritiska aspekter lyftes och problematiserades eller inte. Tabellerna skulle kunna ligga insprängda i resultatavsnittet under respektive cykel, men då de kan ses som en möjlighet att explicit kunna jämföra de olika cyklernas läranderum kan det vara en fördel att se dem tillsammans på detta sätt.

Tabell 32. Beskrivning av färgkodning av läranderummets konstitution.

	Betyder att den kritiska aspekten öppnades upp och problematiseras genom mönster av variation under denna aktivitet.
	Betyder att den kritiska aspekten öppnades upp, men inget mönster av variation iscensätts under denna aktivitet
	Betyder att den kritiska aspekten inte behandlades under denna uppgift
~~överstruken~~	En överstruken aktivitet betyder att den inte iscensattes under lektionen

Dessa färgkodningar illustrerar likheter och skillnader mellan aktiviteterna huruvida de bidrog till att belysa de kritiska aspekterna eller inte genom de olika cyklerna, vilket kan fungera som en hjälp för att läsaren ska få en överblick över hur läranderummet utvecklades under studiens gång.

Tabell 33. Analys av läranderummets konstitution i cykel 1.

Kritiska aspekter / Aktivitet	Innebörd av likformighet. Relationen mellan längder vid korrekt avbildning	Urskilja längder	Urskilja längd-förändring vid given skala	Urskilja area-förändring vid given skala	Urskilja relationen mellan längd-förändring och area-förändring
Introd. uppgift. Fotografiet					
Introd. uppgift. Plustecknet					
~~Rektangel, förstoring och förminskning~~					
~~Cirkel, förstoring och förminskning~~					
A4-papper, förminskning 1:2 och 1:4					
~~Rektangel, förstoring och förminskning med och utan mått~~					
~~Diagonalen~~					
A4-papper, förminskning 1:3					
Pizza 1:2					

Första cykelns läranderum skapas utifrån vad lärargruppen initialt trodde var betydelsefullt för elevernas lärande avseende det aktuella lärandeobjektet.

Tabell 34. Analys av läranderummets konstitution i cykel 2.

Kritiska aspekter / Aktivitet	Innebörd av likformighet. Relationen mellan längder vid korrekt avbildning	Urskilja längder	Urskilja längd-förändring vid given skala	Urskilja area-förändring vid given skala	Urskilja relationen mellan längd-förändring och area-förändring
Introd. uppgift. Fotografiet					
Introd. uppgift. Plustecknet					
Rektangel, förstoring och förminskning					
~~Cirkel, förstoring och förminskning~~					
A4-papper, förminskning 1:2 och 1:4					
~~Rektangel, förstoring och förminskning med och utan mått~~					
Diagonalen					
A4-papper, förminskning 1:3					
Pizza 1:2					

Inför cykel 2 hade lärarna planerat för fler aktiviteter där de kritiska aspekterna också gavs möjlighet att urskiljas vid flera tillfällen. Dock kom lärargruppen inte åt areans förändring explicit i den utsträckning som de önskat, vilket också syns i tabellen.

Tabell 35. Analys av läranderummets konstitution i cykel 3.

Kritiska aspekter / **Aktivitet**	**Innebörd av likformighet. Relationen mellan längder vid korrekt avbildning**	**Urskilja längder**	**Urskilja längd-förändring vid given skala**	**Urskilja area-förändring vid given skala**	**Urskilja relationen mellan längd-förändring och area-förändring**
Introd. uppgift. Fotografiet					
Introd. uppgift. Plustecknet					
Rektangel, förstoring och förminskning					
Cirkel, förstoring och förminskning					
A4-papper, förminskning 1:2 och 1:4					
Rektangel, förstoring och förminskning med och utan mått					
~~Diagonalen~~					
A4-papper, förminskning 1:3					
Pizza 1:2					

I cykel 3 togs en aktivitet bort, men två nya lades till. Dessa båda bidrog till att fler av de kritiska aspekterna gavs möjlighet att problematiseras och urskiljas vid ytterligare fler tillfällen. Areaförändringen problematiserades explicit i flera aktiviteter och även dess relation till längdförändringen belystes. Överlag skapades här ett läranderum som var rikare än de två tidigare på så vis att det var fler aktiviteter där de kritiska aspekterna kunde belysas, vilket de också gjorde, med en explicitet.

KAPITEL 7: DISKUSSION

I detta kapitel kommer resultaten att diskuteras utifrån den genomförda studiens forskningsfrågor. Då studien är tänkt att ge ett ämnesdidaktiskt bidrag så är det även av intresse att diskutera hur resultatet kan relateras till tidigare forskning samt vad studien kan innebära för undervisningen i det aktuella innehållet i matematik. Kapitlet inleds med en sammanfattning av studiens forskningsprocess där det även förs en metodologisk diskussion. Därefter följer resultatdiskussionen där forskningsfrågorna besvaras. Avslutningsvis diskuteras studiens begränsningar samt några möjliga implikationer avseende studiens kunskapsbidrag och fortsatt forskning.

Studiens övergripande syfte var att genom en learning study analysera och beskriva relationen mellan innehållets behandling av ett specifikt matematiskt innehåll under tre cykler samt koppla detta till elevernas lärande. Studien vill ge svar på följande frågor;

- Vad behöver eleven urskilja för att se både det linjära och det icke-linjära sambandet vid avbildning av två-dimensionella geometriska figurer och utifrån det hantera skalan korrekt?

- På vilket sätt kan innehållets behandling i form av olika mönster av variation av innehållets kritiska aspekter bidra till att elevernas förståelse för förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer ökar?

- Hur förändras elevernas uttryckta förståelse av lärandeobjektet utifrån hur innehållet har behandlats i undervisningen?

Komplexiteten i ett matematikklassrum är påtaglig. Alla händelser under en lektion kan mer eller mindre påverka varandra. Denna komplexitet har minimerats genom att intresset har riktats mot att studera de mönster av variation som iscensätts under lektionerna då det matematiska innehållet förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer samt begreppet skala behandlas. Det betyder inte att andra påverkansvariabler är oviktiga, men det är inte dessa som studeras eller analyseras. När elevernas lärande diskuteras är det avgränsat till vad som är möjligt att lära genom dessa iscensatta mönster av variation.

Då de kritiska aspekterna identifierades vara kritiska i alla tre elevgrupperna kan innehållet ses som konstant på ett övergripande plan. Detta möjliggjorde också urskiljning av explicita skillnader i hur mönster av variation iscensattes samt även möjligheten att relatera dessa till elevernas lärande.

Analysen visade att det öppnades olika dimensioner av variation under de olika lektionerna samt att det på så vis var olika aspekter som var möjliga att urskilja. Lärarna belyste dessa aspekter mer eller mindre explicit, vilket innebar att det skapades läranderum som möjliggjorde olika lärande. Avsikten med utformningen av studien har varit att genom interventionen i en learning study ge möjlighet att skapa och förfina mönster av variation, vilka hade till avsikt att bidra till ett ökat lärande. Resultatet i studien visar dels att det var möjligt att genom undervisning komma förbi 'illusionen av linjäritet' (De Bock et.al, 1998; DeBock et.al, 2002; De Bock et. al, 2003), dels att eleverna, då skalan var i fokus, kunde separera längdförändring och areaförändring och därigenom handskas med skalan korrekt.

För att lyckas med undervisningen menar Marton och Tsui, (2004) att lärare och elever behöver dela en gemensam grund i relation till lärandeobjektet, en s.k. relevansstruktur, vilket startar i att lärarna behöver göra sig medvetna om elevernas förståelse av lärandeobjektet och därefter vara uppmärksamma på elevernas signaler, huruvida de delar denna gemensamma grund eller inte. Meningen är att lärarna genom undervisning ska försöka att vidga denna gemensamma grund. Alla dessa tre uppmaningar hänger dock samman, poängterar Marton och Tsui, (2004), och kan inte åstadkommas oberoende av varandra. Vid analys av studiens genomförda lektioner kan slutsatsen dras att dessa tre uppmaningar, för att åstadkomma en lyckad undervisning, kan skönjas i samtliga tre cykler. Aktiviteten som kallas 'introduktionsuppgiften', vilken genomfördes i samtliga cykler, hade delvis som syfte att skapa denna gemensamma grund. Den hade också som syfte att ge eleverna möjlighet att se på lärandeobjektet på ett nytt och mer kvalitativt sätt genom att iscensätta mönster av variation vilka skulle ge eleverna möjlighet att urskilja fler aspekter, d.v.s. att de gavs möjlighet att vidga den gemensamma grunden. Överlag visade lärarna en nyfikenhet över hur eleverna uppfattade lärandeobjektet och de uppmanade dem vid flera tillfällen att utveckla sina ofta korta implicita svar för att på så vis få reda på vad de hade urskilt.

Sammanfattning av forskningsprocessen

Learning study används som metod för att undersöka relationen undervisning – lärande avseende ett specifikt matematiskt innehåll. Under processens gång tycktes lärargruppen få en allt djupare förståelse för hur iscensättning av olika mönster av variation påverkade elevernas lärande. Denna utveckling ska kunna följas genom resultatkapitlet.

Learning study, med utgångspunkt i variationsteorin (Marton & Tsui 2004), har visat sig vara lämplig för att upptäcka och beskriva olikheter och utveckling i hur innehållet behandlas avseende mönster av variation genom de tre cykler som denna studie innefattas av. Genom att tillhandahålla omfattande beskrivningar av hur det matematiska innehållet behandlades under de tre cyklerna samt utdrag från både lektioner och elevers svar på för- respektive eftertest, har gjort frågan om bevis, såväl validitet som reliabilitet för resultatet så explicit som möjligt för läsaren. Därigenom kan läsaren göra sin egen bedömning av resultatet, vilket kan öppna upp för diskussion och verifikation en s.k. dialogisk validitet (Newton & Burges, 2008).

Syftet med studien var att utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv undersöka och jämföra undervisningen i de tre cyklerna avseende de mönster av variation som iscensattes och beskriva i detalj vilka skillnader som framkom och hur dessa påverkade elevernas lärande. Under processens gång tycktes lärargruppen få en allt djupare förståelse för relationen mellan undervisning och elevernas lärande avseende det specifika lärandeobjektet. Processen ska gå att följa genom resultatredovisningen och kan på så vis kopplas till en begreppsvaliditet. Resultatet är kopplat till själva undervisningen av det matematiska innehållet; förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer i tre specifika elevgrupper och kan på grund av detta bli svårt att generalisera. Men å andra sidan då det aktuella matematiska innehållet är väl beforskat vad gäller elevernas svårigheter och där svårigheterna sägs greppa över hela åldersspannet 12-16 år, utan några större skillnader i hur eleverna förstår innehållet, framhålls att studiens design kan vara tillförlitlig. De presumtiva kritiska aspekterna har kunnat identifieras från resultatet från den tidigare genomförda learning studyn samt från screeningintervjuerna med elever i olika åldrar, men de anas också från resultat av tidigare forskning. Då resultaten i min studie indikerar att de dessutom tycks vara kritiska även i studiens tre elevgrupper, kan slutsatsen dras att det trots allt går att generalisera resultatet av studien så till vida att de mönster av variation som iscensattes under lektionerna i cykel 3 även skulle kunna ligga som grund för en lektionsdesign för en annan elevgrupp i motsvarande ålder. Det som denna studie bidrar med är att beskriva på vilket sätt lärandet av detta innehåll kan utvecklas och förändras med hjälp av förändringar i innehållets behandling under lektionen.

Studiens resultat ska inte ses som en färdig lektionsdesign med tillhörande kritiska aspekter utan bör istället ses som ett vetenskapligt bidrag till vår kunskap om vad som krävs för att lära.

Resultatdiskussion

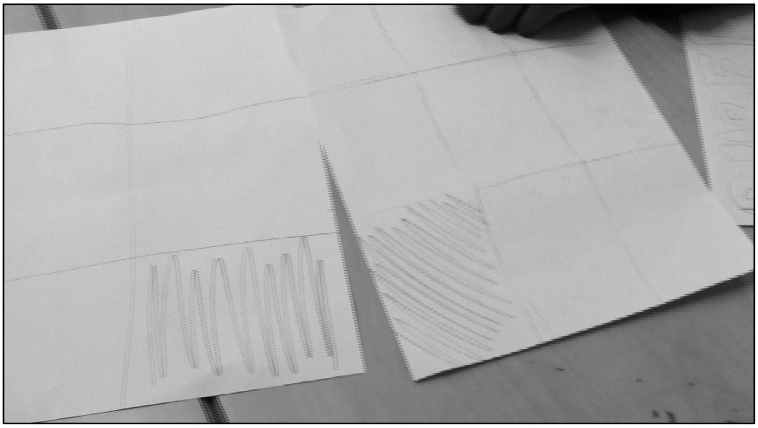
I resultatdiskussionen, vilken organiseras utifrån studiens tre forskningsfrågor diskuteras även studiens resultat i förhållande till tidigare forskning. Då interaktionen mellan lärare, elever och ämnesinnehållet var påtaglig genom hela studien förs även ett resonemang om dess betydelse i den aktuella undervisningen.

Vad behöver eleverna urskilja för att öka sin förståelse av lärandeobjektet?

Lärargruppen hade, innan de genomförde den planerade learning studyn, identifierat fyra presumtiva kritiska aspekter för det aktuella lärandeobjektet och syftet var att skapa lämpliga och effektiva mönster av variation för att på så vis hjälpa eleverna att fokusera och urskilja dessa presumtiva kritiska aspekter. Dessa aspekter visade sig genom studien vara kritiska även för föreliggande studies tre elevgrupper och formulerades som att eleverna skulle ges möjlighet att urskilja längder i de olika geometriska figurerna, längdernas förändring och areans förändring då figuren förstorades eller förminskades samt koppla dessa till korrekt avbildning vid hantering av skala. Genom att skapa förutsättningar för eleverna att urskilja dessa kritiska aspekter gavs de dels möjlighet att komma förbi 'illusionen av linjäritet', dels att utveckla sin förmåga att hantera skalan korrekt vid förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska figurer.

I början av studien iscensattes mönster av variation som inte gav eleverna tillfredsställande möjligheter att urskilja de kritiska aspekterna. Detta medförde att eleverna, framförallt i första cykeln, inte erfor en lika kvalitativ helhet av lärandeobjektet som eleverna i cykel 3. De tycktes inte ha givits möjlighet att erfara hur del-helhetsrelationen var beskaffad. Läraren lyckades inte skapa en gemensam relevansstruktur (Lo, 2012) och analysen från cykelns lektioner indikerade att det tycktes vara betydelsefullt i vilken ordning de olika aspekterna belystes. Eleverna behövde, som Marton och Booth (1997) uttalar, rekonstruera den redan konstituerade omvärlden, d.v.s. först ska de plocka isär (dekonstruera) lärandeobjektet för att sedan plocka ihop det igen. För att det ska skapas en fusion behöver eleverna få möjlighet att urskilja de enskilda kritiska aspekterna i helheten och hur de relateras till varandra och till helheten och i detta förutse vad som skulle hända om mer än en kritisk aspekt varierar. Då de kritiska aspekterna är funktioner av varandra, d.v.s. varierar en av dem varierar också en annan, medförde detta att det tycktes vara svårt för lärarna att få en systematik kring hur dessa kritiska aspekter skulle belysas inledningsvis.

Ytterligare en aspekt identifierades i aktiviteten 'A4-pappret' i cykel 2, då en elevgrupp i samband med att de skulle urskilja areaförändringen uttryckte att areaförändringen blev dubbla längdförändringen. Det vill säga, då skalan är 1:2 blir längderna hälften så långa och arean fyra gånger så liten, och då skalan är 1:3, blir längderna en tredjedel så långa och arean sex gånger så liten. Det förra är i och för sig korrekt, arean blir fyra gånger så liten men urskiljningen är inte den avsedda, d.v.s. areans förändring har inte varit i förgrunden utan istället blir det just relationen mellan längdförändring och areaförändring som blir förgrunden. Problem uppstår då de tar med sig denna uppfattning till nästkommande uppgift där skalfaktorn 1:3 är i fokus. Den här nya aspekten identifieras i samband med att en elev vid en gruppuppgift under cykel 2 redovisar två olika svar som kontrasteras av både henne och läraren inför klassen på grund av behovet att etablera ytterligare mening och förståelse kring lärandeobjektet.



Figur 43. De två olika elevsvaren ur vilka en ny kritisk aspekt kunde identifieras.

I detta fall medförde det att en ny aspekt blev synlig för fler elever; relationen mellan längdförändring och areaförändring. De två olika sätt att uppfatta relationen mellan längdförändring och areaförändring problematiseras dock inte explicit under cykel 2. Kullberg (2010) resonerar utifrån Al-Murani, (2009) om betydelsen av elevernas delaktighet då dimensioner av variation öppnas upp och lyfter fram följande;

> Variation generated by learners provides a window into students' awarness and contributes to the public domain while being possible for other learners to experience. (Kullberg, 2010, s.156)

De elevgrupper som inte fick uppgiften med skala 1:2 först utan istället fick skala 1:4 att arbeta med och därefter skala 1:3 visade inte samma problematik. Här skulle man kunna tolka det som att det är just 'tvåan' som är problematisk, d.v.s. hälften och dubbelt är ord vi använder både till vardags och inom matematiken, men att användandet behöver bli mer explicit inom skolmatematiken. Uttryckt med hjälp av variationsteoretiska termer, fick eleverna inte möjlighet att separera de tänkta kritiska aspekterna, längdförändring från areaförändring, innan de skulle erfaras simultant. I stället letade eleverna kanske efter ett mönster eller så svarade de intuitivt? Den nya kritiska aspekten problematiserades genom mönster av variation först under cykel 3, men då i samband med en annan aktivitet.

Den nya kritiska aspekten behöver eventuellt inte urskiljas eller vara kritisk för att erövra en tillfredställande förståelse av lärandeobjektet. Men i det här fallet har den hjälpt lärargruppen att få syn på huruvida eleverna har urskilt de andra kritiska aspekterna. Lärargruppen tog för givet att eleverna hade urskilt areans förändring explicit då A4-pappret skulle förminskas i skala 1:2. Men då nästa uppgift hade iscensatts blev lärargruppen varse om att eleverna eventuellt inte hade urskilt areaförändringen explicit utan istället hade de haft relationen mellan längdförändringen och areaförändringen i fokus då de genomförde förminskningarna, både i skala 1:2 och 1:3. Relationen såg de som att areaförändringen är den dubbla längdförändringen. Att lärargruppen fick syn på detta hjälpte dem att inse att eleverna inte fått tillfredställande möjlighet att explicit urskilja areaförändringen utan troligtvis hölls den fortfarande i bakgrunden. För att erfara lärandeobjektet på ett tillfredställande sätt behöver eleverna separera längdförändringen från areaförändringen, vilket innebär att de behöver se att relationen dem emellan inte är linjär. Detta kan även innebära att eleverna behöver urskilja hur denna relation är beskaffad, d.v.s. kubisk, för att erfara det avsedda lärandeobjektet.

För att ta reda på vad som är nödvändigt att urskilja kan, vilket tidigare nämnts, ett förtest genomföras. Men det kan tyckas vara en omöjlighet att i realiteten genomföra ett sådant innan varje lektion. Utifrån den föreliggande studiens resultat kan slutsatsen dras att det är av betydelse att läraren dels har goda kunskaper om det aktuella lärandeobjektet, men att läraren även är nyfiken på hur eleverna ser på innehållet. T.ex. vad eleverna fokuserar på i givna uppgifter där innehållet behandlas, för att under lektionens gång kunna identifiera vad som skulle kunna utgöra kritiska aspekter och där och då använda dem som del i undervisningen.

Vilka iscensatta mönster av variation tycks ha betydelse för elevernas lärande?

Det som varierar är det som blir möjligt att urskilja. Studiens empiri understryker också detta, då de iscensatta mönstren av variation blev mer explicita under studiens gång samtidigt som elevernas uttryckta förståelse av lärandeobjektet utvecklades. Det för studien aktuella lärandeobjektet innebar bl.a. att skillnaden och relationen mellan de två aspekterna; längdförändring och areaförändring skulle urskiljas. Om vi vill att eleverna ska relatera de två aspekterna till varandra, d.v.s. förstå relationen dem emellan, bör lärarna variera dem samtidigt, men först efter att aspekterna har urskilts var och en för sig (Marton & Pang, 2013). Det här var lärargruppen medveten om när de planerade lektionerna. De mönster av variation de presenterade för eleverna initialt hade som syfte att eleverna skulle urskilja längder och längdernas förändring vid en avbildning, i form av en förstoring. Att först urskilja längderna och sedan lägga till areans förändring, men inte släppa längdförändringen såg ut att vara av betydelse, d.v.s. att båda dessa aspekter skulle hållas i förgrunden simultant. När dessa båda hölls i förgrunden samt varierades i tre av aktiviteterna i cykel 3; 'rektangeln' samt kontrasten som uppstod mellan den och 'cirkeln' samt delar av 'A4-pappret', uppstod ett kraftfullt mönster av variation. Undervisningen generade på så vis ett specifikt mönster av variation. Detta skulle kunna tolkas som att läraren hade goda kunskaper om och erfarenhet av vanliga elevmissuppfattningar, samt de kritiska aspekter som behandlades, vilket i den här studien delvis kan ha erövrats genom den iterativitet som en learning study medför. Kontrasten som skapades mellan dessa exempel öppnade upp flertalet dimensioner av variation, vilka korresponderade till aspekter som här ses som kritiska när det kommer till förståelse av begreppet förstoring och förminskning av olika tvådimensionella geometriska figurer. De aktuella aspekterna hålls i detta mönster av variation i förgrunden simultant; längdförändring, areaförändring, olika drag av aspekten längder i geometriska figurer samt relationen mellan längdförändring och areaförändring. Detta effektiva mönster av variation, som visserligen skedde i flera steg, kan visa sig vara en av orsakerna till att den tredje elevgruppen, både klarar av den därefter på lektionen kommande fusionsuppgiften på ett bättre sätt, men också att de visar ett ökat lärande jämfört med de två tidigare elevgrupperna på eftertestet. I cykel 3 genomfördes även fler undervisningsmoment där de olika kritiska aspekterna belystes genom mönster av variation. Eleverna fick också möta de kritiska aspekterna i olika sammanhang (Marton, 2014), vilket här betyder att eleverna i cykel 3 erbjöds en större variation av strukturerade aktiviteter där bl.a. den geometriska figuren varierades i större utsträckning. Watson och Mason (2006) och Mason (2011) hävdar att uppgifter som noggrant strukturerar variationen kring innehållet sannolikt resulterar i ett ökat lärande, på ett sätt som en ostrukturerad uppsättning av uppgifter inte gör. Genom en learning study's iterativa upplägg gavs möjlighet att pröva, förändra och förfina även systematiken inom och mellan aktiviteterna. Lärarna gavs här möjlighet att reflektera över innehållet och de uppgifter de använde, vilket enligt Kullberg et al. (in press/2014) kan resultera i uppgifter som är bättre anpassade. Även detta kan ha bidragit till att eleverna i cykel 3 fick större möjlighet att utveckla förmågan att förstora och förminska två-dimensionella geometriska figurer och hantera längdskalan, än eleverna i de övriga två cyklerna.

De inledande mönstren av variation

Alla tre cykler inleddes med aktiviteten 'introduktionsuppgiften' där kontrasteringar skulle iscensättas. Kontrasteringar kommer med fördel före mönster av variation som generalisering och fusion (Marton & Tsui, 2004), och tanken är att mening ska framkomma genom skillnader och inte likheter. De planerade mönstren av variation i introduktionsuppgiften var tänkt att hjälpa eleverna att urskilja innebörden av proportionell avbildning, vilket innebar att eleverna ska urskilja längder och längdförändringar vid förstoring och förminskning. Att starta upp lektionerna med dessa uppgifter och de mönster av variation som därigenom iscensattes, ligger väl i linje med den variationsteoretiska principen; att gå från helhet till delar (Lo, 2012). Notera dock att denna aktivitet endast vill ge eleverna en förnimmelse av lärandeobjektet. Men den kom således att ge eleverna en möjlighet att skapa en relevansstruktur för att på så vis göra de efterföljande undervisningsaktiviteterna mer meningsfulla. Den variation som iscensattes i introduktionsuppgiften var av betydelse. Utmaningen tycktes vara att skapa och iscensätta lämpliga mönster av variation då de identifierade kritiska aspekterna var funktioner av varandra, vilket försvårade urskiljningen. Varieras t.ex. längderna i en figur varierar även arean. För att kunna bortse från en aspekt behöver den också vara urskild (Marton, 2014), vilket inledningsvis tycktes vara ett stort problem att lösa.

En utmaning för lärargruppen låg i hur mycket de kunde tona ner den ena aspekten, vilket inledningsvis var areaförändringen, för att möjliggöra urskiljning av den andra aspekten, längdförändringen. Lärargruppen hade redan i första cykeln flera planerade aktiviteter där mönster av variation var, som Marton (2014) uttrycker, inbäddade. Dessa aktiviteter blev genom studiens fortskridande fler och de gav dessutom upphov till mer explicita mönster av variation där en distinktion mellan längdförändringen och areaförändringen blev allt tydligare. I cykel 3 tycktes lärargruppen komma fram till en mer tillfredställande balans avseende hur dessa båda aspekter inledningsvis skulle varieras, genom att låta areaförändringen ligga i bakgrunden under introduktionsuppgifterna och först i de följande aktiviteterna låta aspekten finnas med som en del av de iscensatta mönstren av variation. Visserligen lyftes areaförändringen av en elev under introduktionsuppgiften, men den problematiserades inte. I samtliga cykler var det elever som uppmärksammade areaförändringen i samband med att förstoring och förminskning diskuterades i förhållande till den givna skalan 2:1 *'varför pratar ni om att dubbla, det får ju plats fyra sådana?'* Att karaktären av de kritiska aspekterna komplicerade den systematiska hanteringen av variationen var något som lärargruppen blev varse under studiens gång. Att komma åt dessa aspekter och problematisera dem blev möjligt genom att systematisera variationen, men också genom att lärarna kontrasterade elevernas påståenden genom att de ställde motfrågor till dessa för att på så vis komma åt vad eleverna explicit hade urskilt, men även för att komma åt deras intuitiva förståelse.

Svårigheter med att iscensätta en generalisering

Aktiviteterna som involverade A4-pappret visade sig generera en ny aspekt, men också att den tänkta generaliseringen mellan de två olika delarna i uppgiften blev problematisk. Även Wallerstedt (2010) och Lilliestam (2013) lyfter fram en problematik med generalisering. Likt det Wallerstedt beskriver i sin studie, att eleverna inte urskiljer det generaliserbara som läraren avsett utan de urskiljer något annat, kan även jag se i min studie. I Wallerstedts studie presenterar läraren musik i tvåtakt och tretakt tillsammans med olika rörelser såsom klappmönster och gångmönster för att på så vis stödja elevernas möjlighet till att urskilja takten och skillnaden takterna emellan. För eleverna kom dock helt andra aspekter i fokus. Det blev istället fokus på skillnaderna mellan de olika rörelserna och inte alls skillnaderna mellan takterna så som läraren hade avsett. Det blev en kontrast mellan rörelserna. Lilliestam (2013) kan se att historielärare kan riskera att skapa generaliseringar som understödjer något annat än det tänkta t.ex. att eleverna placerar in personer och händelser i en tid där de inte hör hemma. Utifrån Wallerstedts resonemang gör jag en jämförelse med min studie och gruppuppgiften 'A4-papper'. I denna uppgift, vilken fanns med i alla tre cyklerna, skulle eleverna arbeta i grupp kring en uppgift som skulle fungera som en fusion. Intentionen var att eleverna skulle urskilja både längdförändring och areaförändring samt dess relation, först utifrån skala 1:2 eller skala 1:4 och under lektionen därefter (1b, 2b och 3b) utifrån skala 1:3, vilket kan ses som en generalisering. Eleverna hade inte tillgång till sax, utan de skulle istället förkorta papprets längder genom att vika ihop pappret så att de skapade en skalenlig avbild. Här var det flera grupper som istället för att fokusera längdförändringen i förhållande till den givna skalan, fokuserade antal vikningar och relaterade dessa till den givna skalan, d.v.s. de kontrasterade antal vikningar istället för längdförändringar, vilket betydde att de vek pappret två gånger vid skala 1:2 och fyra gånger vid skala 1:4 samt tre gånger vid skala 1:3. I de första två fallen blev resultaten dessutom korrekta avseende avbildningen, men urskiljningen var en annan än den önskvärda. Under den här aktiviteten identifierades även den femte kritiska aspekten också på grund av att den avsedda generaliseringen inte helt föll ut som det var tänkt. En elevgrupp hade fokus på 'relationen mellan längdförändringen och areaförändringen' under aktiviteten, vilket är beskrivet tidigare i avhandlingstexten.

Att iscensätta fusion

De mönster av variation som iscensattes genom aktiviteten 'A4-papper' var av lärargruppen tänkta att fungera som fusion. De konstituerades dock på olika sätt i de tre cyklerna. I cykel 1 problematiserades inte de kritiska aspekterna på ett sådant sätt att de explicit kunde urskiljas av eleverna. Elevernas svar på eftertestuppgifterna indikerade, genom att de var inkonsekventa i sina lösningar, att det troligtvis hade varit för mycket som varierat samtidigt och på ett för tidigt stadie under lektionen. Det tyder på att det alltför tidigt i undervisningen iscensatts en synkron simultanitet, d.v.s. att alla kritiska aspekter samvarierade, men också att det saknades en systematik i de mönster av variation som iscensattes. Dessutom väljer läraren själv att tala om vad det är som urskiljs, d.v.s. eleverna gavs inte samma möjlighet som i de efterkommande cyklerna att själva tala om vad det är de urskiljer. 'A4-pappret' bjöd in till ett fokus på antal vikningar av pappret och det avsedda fokuset på längder och dess förändring hamnade i bakgrunden. I framställning av aktiviteten i cykel 2 fanns ett starkt fokus på längdernas förändring. På så sätt erfars ett lärandeobjekt där areaförändringen förblir ett problem, vilket också tydligt visar sig i elevresultatet på eftertestet. I cykel 3 öppnades det dock upp för en variation avseende relationen mellan längdförändring och areaförändring, vilken karaktäriserades av att det skapades samband mellan längdförändring och areaförändring. Dessa samband varierades utifrån olika givna skalor. Att de iscensatta mönstren av variation tycktes vara mer explicita under den här aktiviteten i cykel 3 än i de övriga cyklerna indikerades av att alla elever redovisade korrekta lösningar i den andra delen av aktiviteten då skala 1:3 var i fokus. Att eleverna redovisade korrekta lösningar på denna fusion kan också förefalla bero på att de aktiviteter som genomfördes innan denna aktivitet i cykel 3, iscensatte mönster av variation med en påtaglig systematik avseende både vilken ordning de olika kritiska aspekterna skulle belysas, men också att relationen dem emellan problematiserades explicit vid flera tillfällen. Detta skulle indikera, att för att lyckas iscensätta en synkron simultanitet avseende det aktuella lärandeobjektet krävs att den har föregåtts av diakron simultanitet, vilket är något som både Marton och Tsui, (2004) och Marton (2014) framhåller som betydelsefullt vid simultan urskiljning av ett lärandeobjekts kritiska aspekter.

Att öppna en dimension av variation på olika sätt

Utifrån variationsteorin är erfarandet av variation nödvändig för urskiljning av en aspekt av lärandeobjektet, vilket betyder att utifrån ett teoretiskt perspektiv är det intressanta huruvida en dimension av variation är öppnad eller inte, det menar Häggström (2008) är den kritiska skillnaden. Från det teoretiska perspektivet är det inte möjligt att göra skillnad på olika sätt att öppna upp dimensioner av variation. Inte heller är det möjligt att göra skillnad mellan antal gånger en dimension av variation har öppnats upp under flera antal lektioner. Om en dimension av variation öppnats upp betyder det att en aspekt har gjorts möjlig för eleverna att urskilja. Häggström (2008) resonerar utifrån detta och framhåller att de elever som faktiskt kommer att erfara variation i den aktuella aspekten, troligtvis kan bero både på vilket sätt och hur många gånger dimensionen av variation öppnas upp. Han uttrycker att det skulle vara intressant att jämföra olika sätt att öppna en dimension av variation i relation till vad eleverna lär sig. I förhållande till Häggströms resonemang funderar jag på min studie, där det är några få kritiska aspekter som är i fokus, men att det under lektionerna fanns ett flertal olika aktiviteter, där varje aktivitet innebar att flera av dessa kritiska aspekter skulle urskiljas och belysas. Det betyder att varje kritisk aspekt gavs flera tillfällen att belysas genom att dimensioner av variation avseende aspekten öppnades upp vid flera tillfällen. Dimensionen öppnades även upp på olika sätt. Det kan vara på lärarens initiativ eller på någon elevs initiativ eller genom att en innehållsdiskussion förs mellan eleverna i ett grupparbete. Häggström (2008) frågar sig också om det spelar någon roll huruvida dimensionen av variation öppnas upp explicit? Kan något sätt vara bättre än något annat? I den föreliggande studien framkommer att det är just detta som är avgörande. Att en kritisk aspekt lyfts vid flera tillfällen genom olika aktiviteter tycktes inte vara tillräckligt. Resultatet indikerade att det även krävs att aspekten problematiserades, d.v.s. att den belystes explicit. Att explicitgöra kontrasten mellan längdförändringen och areaförändringen, men också att belysa dess relation, tycktes bidra till en ökad förståelse för eleverna. Även resonemangens karaktär, genom vilka mönstren av variation skapades kunde vara implicita eller explicita (Lilliestam, 2013), vilket också gjorde skillnad för huruvida en kritisk aspekt problematiserades eller inte, eller huruvida en dimension av variation öppnades upp och problematiserades. Lilliestam (2013) menar att vid de implicita resonemangen så överläts själva urskiljningen till eleverna själva. Den kritiska aspekten problematiserades inte och möjligheten att öppna upp nya drag eller värden av den aspekten eller dimensionen gick förlorad och ett distinkt mönster av variation omöjliggjordes. De explicita resonemangen i den föreliggande studien utmärktes av att den kritiska aspekten lyfts upp och problematiserats genom mönster av variation och där läraren eller eleven har satt ord på vad som gjorts möjligt att urskilja. Läraren frågar efter elevernas förståelse genom att fråga efter vad de urskilt och sätter vid flera tillfällen elevernas påstående i kontrast med något annat för att på så vis explicitgöra vad det är de urskilt. Att få dessa dimensioner av variation mer ’explicitgjorda’ genom effektiva mönster av variation bidrar till att elevernas möjlighet till lärande ökar, men också att dessa dimensioner av variation öppnas upp genom flera olika aktiviteter eller uppgifter. I cykel 2 och 3 syntes ett mer explicit resonemang i flera moment där mönster av variation öppnades upp, vilka kvalitativt skiljde sig från resonemangen i den första cykeln där elevernas inspel inte gav ett lika explicit öppnande av variation, eftersom läraren inte utnyttjade dem i skapandet av effektiva mönster av variation. Genom metoden learning study, får lärarna möjlighet att testa just detta (Holmqvist, 2006; Lo et al. 2005).

Förändring i elevers lärande

Inom fenomenografin definieras elevernas lärande som en förändring av den dynamiska situationen av att erfara något. Den lärande kan alltså gå från en mindre kvalitativ uppfattning av något mot en mer kvalitativ uppfattning av samma något (Marton, 1981; Marton & Pang, 2008). Elevernas lärande kan också beskrivas i hur många rätt eller fel de hade på ett test och låta dessa siffror tala för om ett ökat lärande har skett eller inte. Denna studie beskriver elevernas lärande i enlighet med dessa båda sätt att identifiera lärandet. I resultatredovisningen illustrerades elevernas progression avseende lärandet av det specifika lärandeobjektet i form av utdrag från deras respektive för- och eftertest. Ur dessa kunde de kvalitativt skilda sätt att erfara lärandeobjektet utrönas. Vidare visades även, i tabellerna 19, 24 och 31 hur många elever som gav rätt svar på varje uppgift i respektive cykel, vilket inbjöd till att jämföra hur många rätta svar som angavs på förtestet respektive eftertestet. Denna jämförelse kunde också indikera huruvida ett lärande hade varit möjligt eller inte under de olika lektionerna.

Skillnaderna i de iscensatta mönstren av variation speglade elevernas lärande i de svar de anger på eftertestuppgifterna och huruvida mönstren möjliggjorde det avsedda lärandet eller inte. Empirin visar att den elevgrupp som deltog i undervisningen i cykel 3, har ökat sin förståelse för lärandeobjektet mer än de andra två elevgrupperna. Resultatet indikerar att den tredje elevgruppen i större utsträckning utvecklat den förmågan som avsågs, d.v.s. urskilja linjära och icke-linjära samband vid förstoring och förminskning av två-dimensionella geometriska objekt samt utifrån det hantera begreppet längdskala. De har dels visat svar och lösningar på testuppgifterna som är av högre kvalitet, men de är också den elevgrupp som hade minst kunskap med sig från början avseende det avsedda lärandeobjektet. I cykel 3 iscensätts mönster av variation med en större systematik än i de tidigare cyklerna. Först ges eleverna möjlighet att urskilja enskilda aspekter, en s.k. diakron simultanitet. Därefter ger en fusion eleverna möjlighet att relatera de kritiska aspekterna till varandra, vilket betyder att det erbjudits, enligt Marton & Tsui, (2004) en synkron simultanitet. Cykel 3 stod i kontrast till cykel 1 i vilken aspekterna inte explicit problematiserades en i taget och avsaknaden av systematik var uppenbar. Elevernas resultat på eftertestet indikerade också att undervisningen inte givit eleverna möjlighet till lärande då majoriteten av eleverna varken urskilde längdförändringar eller areaförändringar korrekt i förhållande till en avbildning i given längdskala. I cykel 2 var tre av de fem kritiska aspekterna explicit problematiserade vilket också speglas i elevgruppens eftertestresultat då de presterar avsevärt bättre på uppgifterna 2, 3 och 5 än på uppgifterna 8 och 9, där de senare uppgifterna kräver en simultan urskiljning av alla de kritiska aspekterna.

Den största kvalitativa skillnaden i elevernas lärande och förståelse av lärandeobjektet handlar således om huruvida eleverna har lyckats urskilja längdförändring och areaförändring simultant, men också på vilket sätt eleverna motiverar sina svar. Elevgrupp 3 har genomgående ett bättre resultat än de övriga två grupperna, vilket kommer till uttryck genom att de både uttrycker sig mer explicit om vad de har urskilt, men även att de motiverar sina svar mer stringent. De talar t.ex. om att *'alla längder, både på insidan och utsidan av figuren ska vara fyra gånger så långa'*, vilket kan jämföras med de andra elevgrupperna där eleverna som deltog i cykel 1 överlag endast ger svar som *'figuren ska bli fyra gånger större'* eller elevgruppen från cykel 2, som ger mer implicita svar t.ex. *'längderna ska bli fyra gånger större'*. Dessa kvalitativt olika elevsvar speglades i undervisningen och de mönster av variation som iscensattes såtillvida att de resonemang som fördes för att möjliggöra iscensättningen var mer implicita i cykel 1 än i cykel 3. Det betyder att de kritiska aspekterna inte problematiserades explicit och att eleverna inte fick möjlighet att sätta ord på vad de urskilde. Det fördes fler explicita resonemang i första delen av cykel 2 och under större delen av cykel 3. Till detta kan en parallell dras till Lo (2012) som pekar på, att det är vad eleverna kommunicerar om och inte hur de kommunicerar som är av betydelse, d.v.s. att innehållet i denna kommunikation är avgörande för elevernas lärande.

Hilton et al. (2013) redogör för en studie där resultatet visar att eleverna har svårigheter med att separera de proportionerligt linjära sambanden med de proportionerligt icke-linjära sambanden då två-dimensionella figurer förstoras vid given skala. Färre än en tiondel av eleverna i Hiltons studie svarade korrekt på areans förändring då längd och bredd fördubblades. Tre fjärdedelar av eleverna svarade att även arean fördubblades då längderna fördubblades. Jämförs dessa resultat med föreliggande studies resultat, där ett liknande kunnande efterfrågas i framförallt fråga 9, indikeras ett liknande resultat, d.v.s. att det endast är ett fåtal elever som kan separera längdförändringen från areaförändringen. Däremot sker en markant utveckling av elevernas kunnande genom föreliggande studies intervention, då det är en majoritet av eleverna i tredje cykeln som kan separera dessa samband och också se dess relation. Detta resultat indikerar att de iscensatta mönstren av variation avseende att hålla både längdförändringen och areaförändringen i förgrunden simultant, kan ses som effektiva. Majoriteten av eleverna som deltog i undervisningen i cykel 3 visade att de kunde göra denna urskiljning.

Interaktionens betydelse i undervisningen

Det kan tyckas vara svårt i en studie att förutsäga resultatet av en lektion där det finns en stor mängd interaktion, än i en lektion med mindre interaktion. Om man som lärare har utvecklat en detaljerad lektionsdesign, men samtidigt uppmärksammar elevernas idéer och försöker anpassa undervisningen till dessa, kan det resultera i att det blir svårare att följa lektionsdesignen (Kullberg, 2010). Elevernas inspel kan komma att förändra designen och resultera i att planerade jämförelser blir svårare. Elevernas och lärarens sätt att ställa frågor samt sätt att respondera på dessa kan avgöra hur innehållet behandlas (Kullberg et al. inpress). Genom den iterativitet som finns i en learning study, kan lärargruppen med hjälp av interventionen pröva sig fram och utforska på vilket sätt elevernas inspel kan användas för att utveckla undervisningen. En del kritiska aspekter kommer inte fram varken genom lärarnas samarbete om lärandeobjektet eller under ett förtest utan först när elever interagerar med ämnesinnehållet under lektionen (Lo, 2012), vilket även visade sig vara av betydelse i föreliggande studie.

Interaktionen i alla tre cykler, men framför allt i cykel 2 och 3 är riktad åt flera håll. Det sker en kommunikation mellan lärare och elever, men också mellan elever. Ur detta skapas spontana mönster av variation som gör det möjligt att belysa de kritiska aspekterna från flera håll eller på olika sätt. Lärarna har genom studien haft en förmåga att rikta kommunikationen mot avgränsade delar av lärandeobjektet och interaktionen sker i flera riktningar mellan lärare, elever och det specifika innehållet, vilket enligt Marton (2014) utifrån Maunula (2011) kan ses som en dynamisk innehållsrelaterad interaktion. Lärarna uppmuntrade eleverna att kommunicera om innehållet och genom detta tycktes lärare och elever ges möjlighet att tillsammans iscensätta mönster av variation där elevernas missuppfattningar eller skilda sätt att se på innehållet kunde synliggöras, men också problematiseras. En parallell kan här dras till Paic-Antunovic och Vlahovic-Stetics (2011) studie då även de för fram att det är av betydelse att eleverna får respons på sina svar samt att de får möjlighet att diskutera sina strategier och jämföra sina lösningar med andra elevers lösningar oavsett om de är korrekta eller inte. Detta menar de kan bidra till att eleverna kommer förbi 'illusionen av linjäritet' och får en ny förståelse för förstoring och förminskning av två-dimensionella figurer. Att låta eleverna själva uttrycka hur de ser på innehållet, men inte låta det stanna därvid, utan också använda och problematisera uttrycken, har i flera studier visat sig vara ett effektivt sätt att utmana den problematik som beskrivits i tidigare forskning (De Bock et.al, 1998; DeBock et.al, 2002; De Bock et. al, 2003; Nilsson, 2005). De poängterar att detta kan vara ett effektivt sätt att komma åt elevernas intuitiva sätt att se på det aktuella innehållet.

När lektionerna analyserades tillsammans av lärargruppen i första skedet såg det ut som om läraren gjorde bruk av elevernas inspel som en källa för till sin undervisning. Men vid den djupare analysen som därefter skedde tycktes det vara en något mer explicit interaktion under cykel 2. Kommunikationen riktades tydligare mot att ta reda på vad eleverna urskilde och samtidigt få dem att sätta ord på vad det var det urskilde. Något som kan sägas betyda att läraren försökte få eleverna att gå bortom sin intuitivitet, d.v.s. släppa den eller borra i det som de intuitivt ville svara på de specifika frågor eller aktiviteter som ställdes eller genomfördes under lektionerna. Lärarna gjorde bruk av elevernas inspel, på ett sätt som indikerade att de både hade ett kunnande om lärandeobjektet, men också om de svårigheter som påvisats att elever i motsvarande ålder tycks ha (Lo, 2012). Frågorna och motfrågorna lärarna ställde gjorde det möjligt för dem att peka ut något, få elevernas uppmärksamhet riktat mot en specifik aspekt eller få eleverna att sätta ord på vad de hade urskilt, vilket tycktes vara av betydelse för hur undervisningen utvecklades men också i hur elevernas lärande utvecklades. Då tidigare forskning påpekat att eleverna gärna svarar intuitivt på frågor eller uppgifter rörande det aktuella matematiska innehållet (De Bock et al. 2002), tycktes lärarnas förhållningssätt till elevernas inspel och de frågor som ställdes vara av betydelse. Lärarna använde de framlyfta aspekterna i ett för eleverna meningsfullt mönster av variation. Genom detta förhållningssätt skapades vid flera tillfällen spontana och effektiva mönster av variation där kritiska aspekter blev explicit problematiserade. När eleverna svarade eller redogjorde för lösningar under de olika aktiviteterna ställde lärarna vid flera tillfällen hypotetiska motfrågor likt det som efterfrågades av Modestou et al. (2006) och Modestou et al. (2008).

Under cykel 2 skulle en elev under aktiviteten 'fotografiet' (se figur 10) tala om varför den tredje bilden var en korrekt avbildning. Eleven säger då att den är rätt för att den är *'förstorad'*. Läraren nöjde sig inte med svaret utan ställde då en hypotetisk motfråga genom att peka på bild 2, vilken också är större än ursprungsbilden, men inte en korrekt avbildning och frågar *'är inte den också förstorad?'*. Frågandets karaktär bidrar till elevernas uppmärksamhet på de kritiska aspekter som ska urskiljas, d.v.s. längder, längdernas förändring och innebörden av en korrekt avbildning. Läraren skapade genom sin motfråga en kontrast, då hon jämförde två förstoringar med varandra. Marton och Tsui, (2004) menar på att läraren genom att ställa frågor av den här karaktären öppnar upp utrymmet för att elevgruppen ska kunna undersöka sina svar, men också att frågor som ställs vid kritiska faser i lektionen kan innebära att de kritiska aspekterna kommer i förgrunden. Detta var något som hände vid flera tillfällen under lektionerna, men främst under lektionerna i cykel 2 och 3. Eleverna uppmanades att nyansera och utvidga sina påståenden och tankar, vilket vid flera tillfällen resulterade i mer explicita svar och möjlighet till urskiljning av någon av de kritiska aspekterna. Frågorna gav också möjlighet till det som Modestou et al. (2008) kallar för systematiska didaktiska ingripanden, då läraren skapar situationer som möjliggör ett ifrågasättande av elevernas sätt att se på innehållet. Mason (2000) lyfter också fram betydelsen av frågor i undervisningen och hävdar att de bör vara av sådan form att de stimulerar eleverna att börja ställa relevanta frågor till sig själva och genom det förstå matematiken som något annat än endast rätta svar. Mason (2000) påpekar också att för att lärarna ska kunna ställa relevanta frågor är det en fördel om de har vetskap om vilka svårigheter eleverna har inom det aktuella området. Även här kan man dra en parallell till elevernas intuitiva kunskap och oförmåga att reflektera över dem (De Bock et al. 2002; Van Dooren et al. 2004a). För att kritiskt kunna granska sin intuitiva kunskap behöver eleverna troligtvis lärare som är nyfikna på hur de tänker, på vad de fokuserar och på vad de tycks ta för givet.

Det ser ut att vara en förnuftig undervisningsstrategi att ge eleverna möjlighet att uttrycka sig kring det matematiska innehållet för att på så vis undvika att ta uppenbara aspekter för givet. Användandet av elevernas inspel i studien genererade exempel som hjälpte lärargruppen och även läraren i enskild undervisningssituation att avslöja hur eleverna förstår och tänker om det aktuella matematiska innehållet. Det tycks vara det specifika i inspelen som är avgörande, inte inspelen i sig. Med hjälp av denna starkt innehållsrelaterade delaktighet kunde lärargruppen skapa nya eller förfina mönster av variation inför varje cykel, men de kunde även skapa spontana mönster av variation under pågående undervisning.

Studiens begränsningar

Learning study får ibland kritik för sin småskalighet, vilket är något som bör beaktas. I en learning study används ofta tester före respektive efter undervisningen i varje cykel för att med hjälp av dessa kunna bedöma elevernas lärande av det avsedda lärandeobjektet (Lo, 2012). Elevgrupperna i föreliggande studie är relativt små, och antalet elever är också olika i de tre ordinarie klasserna, så skillnader i resultatsiffror av kvantitativ karaktär är på så vis inte övertygande. Det har inte varit möjligt att påvisa statistiskt säkerställa skillnader mellan elevgrupperna då det krävs större elevgrupper för detta. En skillnad mellan elevgrupperna visade dock vad gäller antal rätta svar, men framförallt framträdde det skillnader avseende kvalitén i svaren eleverna ger, vilket visade sig i att eleverna i grupp 3 motiverade sina svar i större utsträckning än framförallt elevgrupp 1. De visade också mer explicit vad det var de hade urskilt och tar fasta på när de löser uppgifterna, vilket var något som inte gjordes i lika stor utsträckning i elevgrupp 2 och knappt alls i elevgrupp 1. Fördelen med att genomföra studien i de ordinarie klasserna, trots att det i framförallt elevgrupp 3 blev färre antal elever, är att eleverna är trygga med varandra, vilket i den här studien bedömdes vara viktigare än att det konstruerades nya större grupper där eleverna från olika klasser skulle blandas. Eleverna kände även studiens deltagande lärare, vilket inte sågs som en nackdel i första hand utan med en förhoppning att det skulle ge en trygghet för eleverna och innebära att eleverna deltog aktivt i undervisningen på så vis att de gav sig in i diskussionerna och deltog i interaktionen som var planerad att skapas mellan lärare, elev och det matematiska innehållet. Avsaknad av kontrollgrupp var också något att förhålla sig till i den här studien. Om förutsättningarna i större utsträckning liknar de som eleverna är vana vid kan den s.k. Hawthorne-effekten minskas (Cohen, Manion & Morrison, 2011). Hawthorne-effekten innebär att en s.k. konstruerad elevgrupp kan prestera bättre än en kontrollgrupp p.g.a. den ökande uppmärksamheten den får. Enligt Elliot, (2012) kan man istället i studier som denna se att kontrollgruppen skapas genom själva iterativiteten, vilket betyder att de s.k. interventionsgrupperna blir varandras kontrollgrupp. Tillämpningen och variationsteorin valideras på så vis genom den iterativa processen.

Testens betydelse

De presumtivt kritiska aspekterna identifierades i den tidigare genomförda learning studyn, i screeningintervjuerna över flera årskurser samt att de anas utifrån vad tidigare forskning visar av elevernas svårigheter inom det aktuella ämnesområdet. Det övergripande resultatet visar också att i samtliga tre elevgrupper syns samtliga presumtiva kritiska aspekter. Utan dessa inledande kartläggningar skulle ett förtest i direkt anslutning till forskningslektionerna kunna innebära att de kritiska aspekterna för den aktuella elevgruppen inte kommer i fokus för undervisningen då dessa aspekter inte blir synliga för lärargruppen förrän efter genomförd undervisning. Genom att använda screening för att synliggöra de presumtivt kritiska aspekterna, och för- och eftertest som ett instrument att studera elevernas förändrade uppfattningar i direkt anslutning till lektionen, elimineras denna problematik. Dessutom består varje cykel av två forskningslektioner, vilka genomförs två på varandra följande dagar, vilket innebär att lärargruppen haft möjlighet att ta del av förtestsresultatet innan de genomför den andra av de två forskningslektionerna.

Då eftertesten ligger i direkt anslutning till den sista av de två lektionerna i varje cykel finns en risk att eftetestet endast visar något som eleverna har memorerat från undervisningen, d.v.s. något de kommer ihåg. De fördröjda eftertesten spelar p.g.a. detta en viktig roll, då de testar elevernas kunnande flera veckor efter avslutad lektion och kan på ett mer trovärdigt sätt visa vilka effekter undervisningen har haft på elevernas lärande. Målet med undervisningen var att eleverna skulle utveckla en förmåga som de också skulle behålla över tid. De fördröjda eftertesten kan då ses som en slags utvärdering av undervisningen och dess relation till lärande. Testet som eleverna genomförde, vilket bestod av nio frågor, visade att eleverna på gruppnivå presterade i stort sett samma på det fördröjda eftertestet som på eftertestet, se tabell 11. Det går dock inte att utesluta att lärande har skett mellan eftertest och fördröjt eftertest både i form av undervisning i skolan eller vid andra tillfällen än lektioner. Det fördröjda eftertestet visar på vilket sätt eleverna lyckats ta tillvara de efterföljande lärsituationerna och utvecklat sitt kunnande bortom undervisningstillfället.

De testuppgifter som används i studien är utformade av lärargruppen tillsammans, men även i samråd med andra forskare. Att på förhand kunna formulera relevanta uppgifter kan anses vara svårt. De uppgifter som användes har dock testats under screeningintervjuerna och ansågs då testa det som lärargruppen var nyfiken på, nämligen huruvida eleverna kunde urskilja de linjära och de icke-linjära sambanden mellan två-dimensionella geometriska figurer och därigenom hantera skalan korrekt. Trots detta uttryckte lärargruppen i efterhand att testuppgifterna skulle kunna konstrueras med större skärpa på att de verkligen kunde ge svar på det som lärargruppen efterfrågade. Detta indikerar att lärarna utvecklat en fördjupad förståelse jämfört med tidpunkten när de konstruerade förtestet.

Studiens kunskapsbidrag och fortsatt forskning

Resultatet av en learning study kan inte användas rakt av i ett nytt sammanhang utan kan ses som en beskrivning av de kritiska aspekter som är identifierade för en speciell elevgrupp avseende ett specifikt ämnesinnehåll och som kan ge en riktning då undervisning ska planeras i en ny grupp kring samma ämnesinnehåll. Resultatet av en learning study ska heller inte ses som en lista av kritiska aspekter, utan ett resultat som vuxit fram ur en interaktiv aktivitet och som är specifikt för just det sammanhanget. Den kunskap som producerats genom en learning study avseende ett avgränsat ämnesinnehåll kan istället ses som en källa att utgå ifrån när lektioner ska planeras i en ny kontext (Runesson & Gustafsson, 2012). De resultat som en learning study ska utmynna i ska bidra till vår förståelse av lärandets betingelser, både på generell och innehållsmässig nivå.

Kan resultatet i denna studie bli användbart för lärare i praktiken eller för fortsatta studier avseende det aktuella matematiska innehållet utifrån ett undervisningsfokus? Jag tror att så är fallet. Det empiriska resultatet kan betraktas som användbart för andra lärare. Dessutom kan studien ses som att den fyller en plats inom området 'illusionen av linjäritet' genom att resultaten bidrar till vår förståelse för varför detta fenomen uppkommer och på vilket sätt det kan motverkas genom undervisning.

I föreliggande studie hade lärargruppen redan innan studien startade kunskap om vad som skulle kunna vara kritiskt för att åstadkomma lärande av det valda lärandeobjektet då de tidigare genomfört en learning study kring begreppet skala. Genom att därefter ha tagit del av resultat från tidigare forskning avseende elevers svårigheter (De Bock et al. 1998; De Bock et al. 2002; Fernandez et al. 2009; Modestou et al. 2009; Van Dooren et al. 2004a) och resultatet av screeningintervjuerna, vilka tycktes vara samstämmiga, fick de en riktning och kunde därigenom identifiera presumtiva kritiska aspekter och därefter ett mer avgränsat lärandeobjekt i förhållande till det som iscensattes i den tidigare learning studien.

Studien ger en detaljerad beskrivning av de mönster av variation som iscensattes under lektionerna. Genom att ta del av denna beskrivning kan lärarna bli medvetna om sin egen undervisning, men de kan även se beskrivningen som en inspiration för hur de kan handskas med det aktuella matematiska innehållet. Med hänsyn till möjligheten att göra generaliseringar av mönster av variation är huvudlinjen att det aldrig går att säga att ett specifikt mönster av variation är bättre eller mer kraftfullt än andra mönster av variation. Ett mönster kan endast vara bättre eller mer kraftfullt än ett annat i relation till ett specifikt lärandeobjekt (Marton, 2014). En systematik kring mönster av variation som under interventionen växte fram som mer effektivt i studien, var att först fokusera vad som krävs för en korrekt avbildning genom att låta längdförändringar variera men hålla den geometriska figuren konstant. Därefter hålls längdförändringen konstant och den geometriska figuren varierar. Areaförändringen hålls i bakgrunden initialt. Den lyfts fram explicit och simultant med de övriga aspekterna först då dessa har fokuserats genom flera olika mönster av variation, vilket innebär att en synkron simultanitet möjliggjordes. Systematiken visade sig vara effektiv avseende att komma förbi 'illusionen av linjäritet'. En majoritet av de elever som erbjöds denna systematik visade i sina lösningar på eftertestet att de både kunde separera linjära samband och icke-linjära samband från varandra och se hur dessa förhöll sig till helheten, men att de också kunde urskilja dem simultant då detta efterfrågades. Det betyder att de i en och samma uppgift kunde konstruera en avbild efter given längdskala samt explicit tala om vad som händer med längderna respektive arean.

Den interaktiva karaktären av ett klassrum visade sig i denna studie vara betydelsefull, vilket här innebar att elevernas förståelse av innehållet efterfrågades och blev till undervisningens innehåll i form av att lärarna uppmanade eleverna att sätta ord på vad de fokuserade på i innehållet för att därigenom få möjlighet att få syn på vad eleverna hade urskilt, men också för att få syn på eventuella nya kritiska aspekter. Analysen av innehållets behandling indikerade att även de iscensatta mönstren av variation kunde ses som dynamiska då elevernas olika sätt att se på innehållet synliggjordes, vilka därigenom blev ett redskap för att skapa spontana mönster av variation. Dessa mönster av variation blev mer explicita och således mer kraftfulla i sista cykeln då interventionen givit lärarna en större förståelse för elevernas svårigheter, vilket ytterligare ger tyngd åt att undervisning och lärande är något lärare och elever med fördel skapar tillsammans. Morris och Hiebert (2011) poängterar att lektionsplaneringen inte är en fast produkt utan även den är till för att andra lärare ska testa och utveckla den vidare. Undervisningen i studien skulle kunna ses som genuint interaktiv, med vilket jag menar att elevernas inspel och påståenden ges utrymme och läraren gör bruk av dessa som en källa till undervisning och skapandet av både planerade och spontana mönster av variation.

Ytterligare praxisnära forskning avseende detta specifika matematiska innehåll kan bygga vidare på studiens resultat. En naturlig fortsättning på studien skulle kunna vara att med ett fortsatt undervisningsfokus utvidga det matematiska innehållet. Som ett första steg skulle det kunna innebära att areaförändringen får ett större utrymme vid förstoring och förminskning genom att föra fram den i förgrunden och låta längderna ligga i bakgrunden. Genom ett sådant förfarande kan begreppet skala fördjupas genom att kvadratiska samband kan undersökas och problematiseras. Elevgrupperna visade i alla tre cykler att då en två-dimensionell figur undersöks uppkommer en nyfikenhet avseende areans förändring i relation till begreppet skala. I studien var det längdskalan som var i fokus, men den gav således upphov till frågor som visade att begreppet skala i nästa steg borde utvecklas vidare genom att även areaskalan belyses. Ytterligare ett steg i undersökningen kan vara att även behandla oregelbundna två-dimensionella figurer samt tre-dimensionella figurer.

Det borde finnas intresse i det ämnesdidaktiska fältet att genom fortsatt forskning bygga vidare på och pröva de resultat som denna studie presenterar genom ytterligare en studie där det matematiska innehåll jag givit förslag på undersöks eller att resultatet från denna genomförda studie ses som en utgångspunkt för att undersöka ett utökat ämnesinnehåll genom Design experiment (Cobb et al. 2003). En nyfikenhet som väckts under arbetets gång och som skulle kunna bli en förlängning på studien är att sätta delar av resultatredovisningen i relation till Brousseau's teori (Brousseau, 1997) om didaktiska situationer. Brousseau's teori kan sammanfattas som en teori, vilken explicit beskriver hur matematikundervisning kan genomföras där eleverna har ett eget ansvar för att skapa sin kunskap, men att läraren samtidigt har ett ansvar för att stödja eleven i lärprocessen genom att bl.a. utmana eleverna i deras befintliga föreställningar om det matematiska innehållet. Både lärare, elever och matematiskt innehåll är involverade i den didaktiska situationen, vilket även speglas i resultatet av denna studie.

REFERENSER

Baumert, J. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom and student progress. *American Education Research Journal*.

Bentley, P-O. (2008) *Mathematics Teachers and their conceptual models. A new field of research.* Göteborg, Studies in Educational Science, 265. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bentley, P-O. & Bentley, C. (2011) *Det beror på hur man räknar – matematikdidaktik för grundlärare.*. Stockholm: Liber. 300s.

Boaler, J. (2002) The development of disciplinary relationships: knowledge, practice, and identity in mathematics classrooms**,** *In For The Learning of Mathematics, 2002, 22 (1),* 42-47

Brousseau, G.: 1997, *Theory of Didactical Situations in Mathematics,* Dordrecht: Kluwer.

Carlgren, I. (2011). Forskning ja, men i vilket syfte och om vad? Om avsaknaden och behovet av en 'klinisk' mellanrumsforskning. *Forskning om undervisning och lärande 5*. Stiftelsen SAF i samarbete med Lärarförbundet.

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1(2),* 126-139.

Carlgren, I. & Marton, F. (2000). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbundets förlag.

Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32(1),* 9-13.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7th ed.). London: Routledge.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical andmethodological issues. *The Journal of the Learning sciences, 13(1),* 15-42.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solution of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 65-85.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in- depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 311-334.

De Bock, D., Verschaffel, K., Janssens, D., Van Dooren., W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students; performance? Negative evidence from a study on modeling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction, 13 (4),* 441-463.

Dewey, J. (2004). *Individ, skola och samhälle: utbildningsfilosofiska texter*. (4., [utök.] utg.) Stockholm: Natur och kultur.

Dole, S., Clarke, D., Wright, T., Hilton, G. and Roche, A. (2008). Eliciting growth in teachers' proportional reasoning: Measuring the impact of a Professional Development program. In: Goos, M., Brown, R. and Makar, K., Mathematics education research : navigating : proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. *Navigating Currents and Charting Directions*, The University of Queensland, (163-169).

Dole, S. 2010, Making connections to the big ideas in mathematics: promoting proportional reasoning. In C. Glascodine & K.-A. Hoad (Eds). *Teaching mathematics? Make it count: What research tells us about effective mathematics teaching and learning of mathematics. ACER Research Conference 2010, Melbourne, Australia* (pp 71-74).

Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study Mathematics, (2010).

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change* (Vol. 49): Open University Press Buckingham.

Elliot, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 108-125.

Emanuelsson, J. (2001) *En fråga om frågor. Hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis

Eriksson, I. (1999) *Lärares pedagogiska handlingar: en studie av lärares uppfattningar av att vara pedagogisk i klassrumsarbetet.* Diss. Uppsala: Univ. Uppsala studies in education; 82. Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis: Univ.-bibl.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2009). Effect of the number structure and the quality nature on secondary school students" proportional reasoning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 25-32). Thessaloniki, Greece: PME.

Gagatsis, A., Sriraman, B ., Elia,I., and Modestou, M (2006) Exploring Young Children's Geometrical Strategies through Dynamic Transformation of Polygons and Geometrical Models. In press in *Nordic Studies in Mathematics Education*.

Gagatsis, A., Modestou, M., Elia, I., Spanoudis, G (2009) Structural modeling of developmental shifts in grasping proportional relations underlying problem solving in area and volume. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 9*, 9-23.

Hannibal, M. Z. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics,* 5 (6), 353-357.

Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher, 31*(5), 3-15.

Hilton, A., Hilton, G., Dole, S., & Goos, M. (2013). Development and application of a two-tier diagnostic instrument to assess middle-years students' proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 25*(4), 523-545.

Holmqvist, M. 2004: *En främmande värld. Om lärande och autism.* Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-03445-8

Holmqvist, M. (2006). *Lärande i skolan. Learning study som skolutvecklingsmodell.* Lund: Studentlitteratur.

Holmqvist, M. (2011). Teachers' learning in a learning study. *InstructionalScience, 39*(4), 497-511.

Holmqvist, M., Gustavsson, L., & Wernberg, A. (2007), Generative Learning: Learning beyond the learning situation. *Educational Action Research 15*(2), 181-208.

Holmqvist, M., Holmquist, P-O. & Cheung, W. M. (2010). The same lesson in two different cultures – what differs and what is the same? A learning study on reading comprehension in Sweden and Hong Kong. *Problems of Education in the 21st century,* Vol. 21, pp. 71-82.

Häggström, Johan (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* Göteborgs universitet.

Kaput, J., & West, M. M. (1994). Missing value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In I. G. H. J. Confrey (Ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). New York: State of New York Press.

Kinnard, J. & Kozulin, A. (2008) *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande.* Lund. Pozkal.

Kiselman, C. & Mowitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* NCM, Göteborgs universitet.

Kullberg, A. (2010) *What is taught and what is learned - Professional insights gained and shared by teachers of mathematics.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis

Kullberg, A. (2012). Students' open dimensions of variation for learning. *International journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2). 168-181.

Kullberg, A., Runesson, U. & Mårtensson, P. (in press 2014) The same task? – different learning possibilities. *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford,* 615-622.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Larsson, S. (1994). I: Starrin, B. & Svensson, P-G. *Kvalitativ metod och vetenskapsteori.* Lund: Studentlitteratur.

Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativ forskning. (On quality in qualitative reserach; in Swedich). *Nordisk Pedagogik , 25* (1), ss. 16-35.

Larsson, S. (2009). A pluralist view of generalization in quantitative research. *International Journal of Research & Methods in Education , 32* (2), ss. 25-38.

Lewis, C. (2000). Lesson Study: The Core of Japanese Professional Development. *American Educational Research Association Meetings.* New Orleans: lessonreseacher.net.

Lilliestam, A. (2013) *Aktör och struktur i historieundervisning. Om utveckling av elevers historiska resonerande.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis

Lo, M. (2012) *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lo, M. & Marton, F. (2012). Towards a science of the art of teaching. Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(1) 7-22.

Lo, M. L., Pong, W. Y., & Chik, P. (Eds.). (2005). *For each and everyone. Catering for individual differences through learning study*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

Lobato, J., Orrill, C., Druken, B., & Jacobson, E. (2011). *Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), New Orleans, LA.

Lundberg, A (2011). *Proportionalitetsbegreppet i den svenska gymnasiematematiken: en studie om läromedel och nationella prov.* Lic-avh. Linköping: Linköpings universitet.

Lundberg, A. L. V., & Kilhamn, C. (2013). The lemon squash task. In A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. Bolite Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, C. Margolinas, P. Sullivan, D. R. Thompson & Y. Yang (Eds.), *ICMI study 22: Task Design in Mathematics Education (pp. 363-372). Department of Education*, University of Oxford, UK.

Magnusson, J. (2014). *Proportionella samband – Innehållets behandling och elevernas lärande.* Licentiatuppsats. Göteborg: Göteborgs universitet.

Marton, F. (1981). Phenomenography - Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*.

Marton, F. (2006). Sameness and difference in transfer. *The Journal of the Learning Sciences, 15*(4), 499-535.

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. New York, NY: Routledge.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande.* (P. Wadensjö övers.) Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. & Pang, M.F. (2006). On some necessary conditions of learning. *Journal of the Learning Sciences, 15*, 193-220.

Marton, F. & Pang, M.F. (2008). The idea of Phenomenography and the pedagogy of conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of conceptual change* (pp. 533-539). New York: Routledge.

Marton, F. & Pang, M. F. (2013). Meanings are acquired from experiencing differences against a background of sameness, rather than from experiencing sameness against a background of difference: Putting a conjecture to the test by embedding it in a pedagogical tool. *Frontline Learning Research 1* (1)*,* 24-41.

Marton, F., & Pong, W. Y. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher Education Reseach and development.*

Marton, F. & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology 31* (1), 97-111.

Mason, J. (2011). Explicit and Implicit Pedagogy: variation theory as a casestudy. (C. Smith, Red.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics , 31* (3).

Miyakawa, T., & Winslöw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational studies in mathematics, 72*(2), 199-218.

Modestou, M., Gagatsis, A. & Pitta-Pantazi, D. (2004). Students' improper proportional reasoning: the case of area and volume of rectangular figures. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, 345-352. Bergen: Norway.

Modestou, M. and Gagatsis, A. (2006). Can the spontaneous and uncritical application of the linear model be questioned?, in J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka and N. Stehlikova (eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, Prague, Czech Republic, 169-176, (2006).

Modestou, M; Elia, I; Gagatsis, A; Spanoudis, G (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39* (3), 313-324

Morris, A. K. & Hiebert, J. (2011). Creating Shared Instructional Products: An alternative Approach to Improving Teaching. *Educational Researcher* (40)5, 5–14.

Newton, P., & Burgess, D. (2008). Exploring Types of Educational Action Research: Implications for Research Validity. *International Journal of Qualitative Methods , 7* (4), ss. 18-30.

Nilsson, G. (2005). *Att äga π. Praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis

Olteanu, C. (2007). ”*Vad skulle x kunna vara?” : andragradsekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande [”What could x be?” : second degree equation and quadratic function as objects of learning]*. Institutionen för beteendevetenskap, Högskolan i Kristianstad.

Paic-Antunovic, J; Vlahovic-Stetic, V. (2011). The effect of feedback on the intensity of the illusion of linearity in high-school students’ solving of geometry problems. *Review of Psychology, 18* (1), 23-32

Pang, M. F. (2003). Two Faces of Variation: on continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research.*

Pang, M. F., & Marton, F. (2003). Beyond "lesson study": Comparing two ways of fasciliating the grasp of some ecomomic concepts. *Instructional Science , 31*, ss. 175-194.

Pang, M. F., & Lo, M. L. (2012). Learning study: helping teachers to use theory, develop professionally, and produce new knowledge to be shared. *Instructional Science, 40*(3), 589-606.

Polanyi, M. (1963). *Tacit knowledge*: Terry lectures.

Pring, R. (2004). *Philosophy of educational research* (2nd ed.) (Vol. 1). London: Continuum.

Row, T. Sundara. (1958). *Geometric Exercises in Paper Folding.* Rev. ed. Editedby W. W. Beman and D. E. Smith. Gloucester, Mass.: Peter Smith, 1958.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematisk innehåll* [The pedagogy of variation. Different ways of handling a mathematical topic]. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson, U., & Kullberg, A. (2010). Learning from variation. Differences in learners' ways of experiencing differences. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, C. Michelsen, G. Palsdottir, O. Steinthorsdottir & L. Haapasalo, (Eds.), *The Source book on Nordic Research in Mathematics Education* (pp. 299-317), Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Runesson, U., Kullberg, A., Maunula, T. (2011). Sensitivity to student learning: a possible way to enhance teachers' and students' learning *Mathematics teacher education:* New York: Springer.

Runesson, U., & Gustafsson (2012). Sharing and developing knowledge products from Learning Study. *International Journal of Lesson- and Learning Studies.*

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L., & Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher, 32*(1), 25-28.

Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: En jämförande analys av elevers taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra I Sverige, Hong Kong och Taiwan.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.* Stockholm: Skolverket

Skolverket (2012). Varför är det svårt att implementera forskning i undervisning? Hämtad från http://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/tema/tema-naturvetenskap/varfor-ar-det-svart-att-implementera-forskning-i-undervisning-1.168924#

Stenhouse, L. (1981). What counts as research? *British journal of educational studies, 29*(2), 103-114.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande*. Umeå: Umeå Universitet.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004a). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction, 14*, 485-501.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004b). Students' overrelliance om proportionality: evidence from primary school pupils solving arithmetic word problems. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, 4,* 385-392

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and instruction, 23*(1), 57-86.

Van Hiele, Pierre M. (1986) *Structure and insight – A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, N.J: National Council of Teachers of Mathematics.

Vetenskapsrådet. (2011). *God forskningssed.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wallerstedt, C. (2010) *Att peka ut det osynliga i rörelse. En didaktisk studie av taktart i musik.* Göteborg: Nämnden för konstnärligt utvecklingsarbete Vid Konstnärliga fakulteten, Göteborgs universitet

Watson, A. (2006). Raising achievment in secondary mathematics. Maidenhead: Open University press.

Watson, J. M., Beswick, K., Caney, A., & Skalicky, J. (2006). Profiling teacher change resulting from a professional learning program in middle school numeracy. *Mathematics Teacher Education and Development*, *7*, 3–17.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, A. & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: using vari- ation to structure sense-making. *Mathematics thinking and learning,* 8(2), pp. 91–111.

Wernberg, A. (2009) *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad som görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Umeå, Kristianstad: Umeå universitet, Högskolan i Kristianstad

BILAGOR

Bilaga 1: Tillstånd för deltagande i studien.

Hej! Göteborg [redacted]

Mitt namn är Jenny Svanteson Wester och jag är anställd på [redacted] som matematik- och NO-lärare samt utvecklingsledare. Jag har dock tagit ett uppehåll i min lärartjänst och är nu doktorand i pedagogiskt arbete vid Göteborgs universitet och forskarskolan Learning study, med inriktning matematikundervisning. Ni kanske känner till att svensk matematikundervisning debatteras mycket i media och att fokus ligger på att alltför många elever lär sig för lite matematik. För att kunna utveckla matematikundervisningen behöver vi som forskare få veta mer om den och det är i detta sammanhang som jag planerar att filma två av matematiklektionerna i ditt barns klass. Det som ska fångas på filmen är vad lärarna gör och säger i undervisningssituationen och hur barnens tankar bemöts och hanteras. Filmandets fokus är därför i första hand på läraren och inte på barnen. Jag kommer inte att ta med något material som kan uppfattas som kränkande eller som utlämnar enskilda barn. Därefter ska jag analysera lektionerna för att på sikt kunna bidra med kunskap om vad i undervisning som möjliggör lärande. Lektionerna har planerats med ditt barns ordinarie lärare i matematik och ingår i den ordinarie undervisningen. Några av eleverna kommer, om de vill bli intervjuade före och efter lektionen. När studien är klar kommer den att presenteras i bokform för pedagoger och forskare i pedagogik. Materialet kan även användas i utbildning av lärare, om ni godkänner det. Varken ditt barns namn eller skolans namn kommer nämnas i något sammanhang.

Jag hoppas att du och ditt barn ställer er positiva till att delta i detta forskningsprojekt. Har ni frågor eller undrar över något, går det bra att kontakta mig via telefon eller mail.

Vänligen

Jenny Svanteson Wester
doktorand vid Institutionen för didaktik och pedagogisk profession (IDPP), Göteborgs universitet. Forskarskolan Learning Study.

Tele: [redacted]
Mail: jenny.svanteson@fenestra.se
Handledare:
Docent Mona Holmqvist
Fil.Dr. Cecilia Kilhamn
Professor Catherine Lewis

Barnets namn:

Barnets klass:

___ Ja, mitt barn får delta i forskningsprojektet. Filmen får användas både i forskning och i utbildning av lärare.

___ Nej, mitt barn deltar inte i forskningsprojektet.

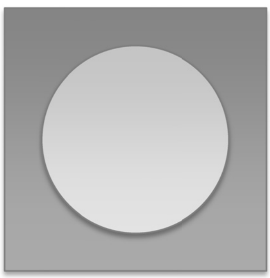
Barnets underskrift:

Vårdnadshavares underskrift:

Bilaga 2: De för- och eftertest-uppgifter som användes i samtliga cykler.

Uppgift 2b: Titta på den kvadratiska figuren till vänster. Din uppgift är att avgöra om de följande figurerna är avbildningar av den första figuren som en förstoring i skala 4:1?
Förklara hur du resonerar.

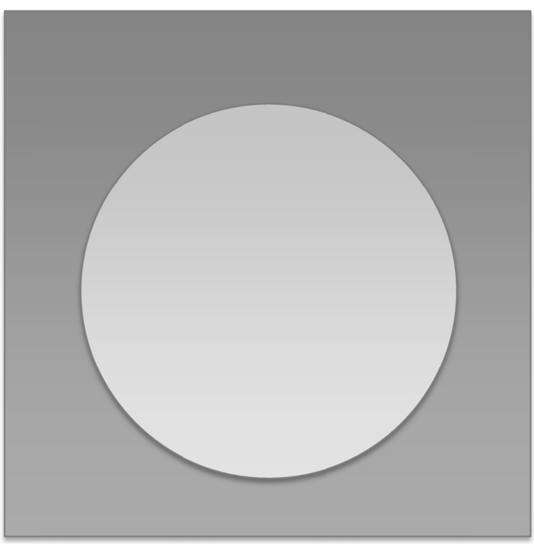
A.



- ☐ Ja
- ☐ Nej
- ☐ Jag vet inte

Förklara hur du resonerar:

B.



- ☐ Ja
- ☐ Nej
- ☐ Jag vet inte

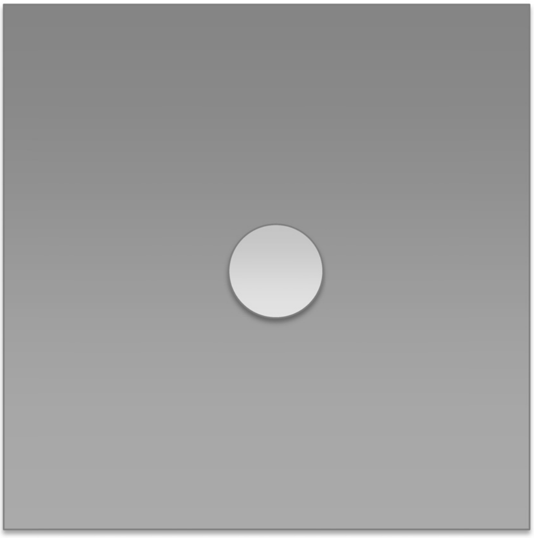
Förklara hur du resonerar:

Uppgift 2c: Titta på den kvadratiska figuren till vänster. Din uppgift är att avgöra om de följande figurerna är avbildningar av den första figuren som en förstoring i skala 4:1?
Förklara hur du resonerar.

A.

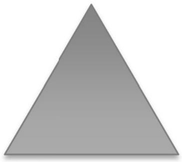
☐ Ja
☐ Nej
☐ Jag vet inte
Förklara hur du resonerar:

B.

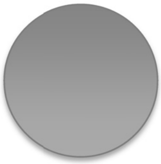


☐ Ja
☐ Nej
☐ Jag vet inte
Förklara hur du resonerar:

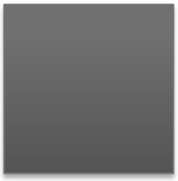
Uppgift 3: Gör en avbildning av triangeln i skala 4:1. Förklara hur du resonerar.



Uppgift 4: Gör en avbildning av cirkeln i skala 4:1. Förklara hur du resonerar.

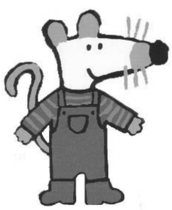


Uppgift 5: Gör en avbildning i skala 2:1 av figuren nedan. Förklara hur du resonerar.



Uppgift 8: Martin ska göra en målning av Mollymus som är 48 cm lång på sin dotters vägg. Han utgår i från ett vykort där han har en bild på Mollymus som är 12 cm. Han har förstorat bilden.
a) I vilken skala har han gjort förstoringen?
b) Hur många gånger större yta har Mollymus-målningen på väggen än Mollymus-bilden på vykortet?
Hur löser du problemet?

Förklara hur du resonerar.



Uppgift 9: Stina har ett staket runt sitt kvadratiska trädgårdsland. Stinas bror Olle har också ett staket runt sitt kvadratiska trädgårdsland. Olles trädgårdsland är större än Stinas och han behöver ett staket som är dubbelt så långt.
a) Hur många gånger större är ytan på Olles land jämfört med Stinas land?
b) Olles trädgårdsland är en förstoring av Stinas trädgårdsland. I vilken skala är förstoringen gjord?

Förklara hur du resonerar

HUR KAN DUBBELT SÅ LÅNGT BLI FYRA GÅNGER STÖRRE?

Tidigare forskning har visat att majoriteten av 12-16-åriga elever har en tendens att utgå ifrån ett linjärt samband då de löser uppgifter av icke-linjär karaktär. Fenomenet, som kallas för 'illusionen av linjäritet' kommer av att eleverna då de ska förstora eller förminska fler-dimensionella geometriska figurer intuitivt utgår ifrån att då sidorna görs dubbelt så långa blir även arean och volymen dubbelt så stor. Syftet med denna licentiatuppsats har varit att undersöka hur innehållets behandling under en serie lektioner avseende förstoring och förminskning av två-dimensionella figurer i relation till begreppet skala kan bidra till att utveckla elevernas förmåga att urskilja det linjärt proportionella och det icke-linjärt proportionella sambandet simultant. Empirin, vilken baseras på en learning study, en iterativ process, tar här sin utgångspunkt i variationsteorin. Resultatet i studien visar att undervisning som skapar förutsättningar för elever att urskilja båda dessa samband simultant, d.v.s. separera längdförändring från areaförändring och se att relationen dem emellan inte är linjär, ger eleverna möjlighet att komma förbi 'illusionen av linjäritet'.

Eftersom tidigare forskning visat på att eleverna gärna svarar intuitivt på frågor eller uppgifter rörande det aktuella matematiska innehållet, tycktes även lärarnas förhållningssätt till elevernas inspel och de frågor som ställdes vara av betydelse. Med hjälp av denna innehållsrelaterade delaktighet kunde lärargruppen, genom att använda elevernas inspel, skapa mönster av variation där elevernas missuppfattningar eller sätt att se på innehållet kunde bli, inte bara visualiserat utan också problematiserat. De kritiska aspekterna kunde således bli explicit urskilda, vilket tycktes vara av stor betydelse för hur elevernas lärande utvecklades.

Jenny Svanteson Wester är verksam som lärare i matematik och NO på grundskolan sedan 1994. Hennes forskningsintresse är klassrumsnära och inriktad på relationen mellan undervisning och lärande.

GUPEA - Göteborgs universitets publikationer – elektroniskt arkiv:
http://hdl.handle.net/2077/37230