VARIATIONENS BETYDELSE FÖR ELEVERNAS LÄRANDE

Relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata

Ulf Ryberg

INSTITUTIONEN FÖR DIDAKTIK OCH PEDAGOGISK PROFESSION

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Variationens betydelse för elevernas lärande

Variationens betydelse för elevernas lärande

Relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata

Ulf Ryberg

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Licentiatuppsats i ämnesdidaktik vid institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Utbildningsvetenskapliga fakulteten, Göteborgs universitet.

Licentiatuppsatsen finns i fulltext i GUPEA – Göteborgs universitets publikationer – elektroniskt arkiv, i samlingen "Licentiatuppsatser/ Institutionen för didaktik och pedagogisk profession"
http://hdl.handle.net/2077/37569

Denna licentiatuppsats har genomförts inom ramen för Forskarskolan Learning Study – undervisningsutvecklande ämnesdidaktisk forskning. Forskarskolan, som leder fram till en licentiatexamen, är ett samarbete mellan Högskolan för lärande och kommunikation, Högskolan i Jönköping (värdhögskola), Göteborgs universitet samt Stockholms universitet och finansieras av Vetenskapsrådet (projektnummer 2011-5273) inom ramen för regeringens satsning på att forskarutbilda lärare.

Sammanfattning

Titel:	Variationens betydelse för elevernas lärande - Relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata
Författare:	Ulf Ryberg
Språk:	Svenska med en engelsk sammanfattning
GUPEA:	http://hdl.handle.net/2077/37569
Nyckelord:	derivata, graf, student, elev, uppfattning, variationsteori, learning study

Begreppet derivata är mångfacetterat och innebörden kan beskrivas och tolkas i flera olika representationsformer. Elever har emellertid ofta en snäv uppfattning av begreppet och för många är derivata synonymt med algebraiska manipulationer. Vid uppgifter som utgår från grafer är det exempelvis vanligt förekommande att elever efterfrågar ett algebraiskt funktionsuttryck för att kunna tillämpa deriveringsregler. Förmågan att uppfatta derivatans innebörd i olika representationsformer har under lång tid lyfts fram som betydelsefullt inom den matematikdidaktiska forskningen. Samtidigt kvarstår fortfarande ett behov av att undersöka och analysera hur utvecklandet av denna förmåga kan ställas i relation till undervisningen.

Syftet med denna licentiatuppsats är att beskriva hur elevers möjlighet att urskilja relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata påverkas av innehållets behandling i undervisningen. Forskningsansatsen utgörs av en learning study som är en iterativ och cyklisk process där forskare och lärare samarbetar. Inom ramen för detta samarbete designas, implementeras och analyseras en lektion vid upprepade tillfällen och mellan varje tillfälle sker revideringar. Studien genomfördes vid en svensk gymnasieskola och innefattade sammanlagt 68 elever. De deltagande eleverna var vid genomförandet 17-18 år och kom från fyra olika gymnasieprogram.

Utgångspunkterna för en learning study är tidigare ämnesdidaktiska forskningsresultat och de deltagande elevernas uttryckta uppfattningar om innehållet. För att undersöka det senare genomfördes före studien kvalitativa intervjuer med sex elever. Baserat på resultatet av intervjuerna och tidigare forskningsresultat designades lektioner med ett variationsteoretiskt perspektiv. Enligt variationsteorin innebär lärande att urskilja kritiska aspekter av ett

fenomen och avgörande för möjligheten till urskiljning är det mönster av variation och invarians som skapas under lektionen.

Elevernas urskiljning bedömdes med hjälp av tester före och efter lektionen och dessutom genomfördes ett fördröjt eftertest cirka sju veckor senare. Resultatet antyder att ett kvalitativt urskiljande var förenligt med en invariant representationsform under lektionen. Detta i termer av att läraren inte, vare sig skriftligt eller muntligt, relaterade grafernas utseende till algebraiska funktionsuttryck utan endast utnyttjade den grafiska representationsformen vid behandlingen av innehållet. Jämförelser med algebraiska funktionsuttryck föreföll, tvärtemot avsikten, ha lett till ett procedurellt lärande hos eleverna. Liknande effekter kunde skönjas när typen av grafer var invariant under lektionen. Om graferna som behandlades endast utgjordes av polynom av låg grad verkade elevernas möjlighet till urskiljning ha begränsats.

Summary

Title: The significance of variation for students' learning – The relationship between a graph and its derivative graph

Author: Ulf Ryberg

Language: Swedish with a summary in English

GUPEA: http://hdl.handle.net/2077/37569

Keywords: derivative, graph, student, conception, variation theory, learning study

The concept of derivative is multifaceted and can be described in a variety of representations. Nevertheless, students´ knowledge of the concept is often restricted to a set of loosely connected algebraic actions and many students facing a graph express the need for a formula in order to use the differentiation rules. In previous research, students´ capability to change between representations is highlighted as very important. This view was established several decades ago but how to design instruction in the most appropriate way, to make it possible for the students to achieve this capability, still needs to be explored.

The aim of this licentiate thesis is to describe how students´ learning of the relationship between a graph and its derivative graph can be related to instruction. The methodological approach is Learning Study, an iterative and cyclic process where researchers and teachers cooperate in designing, implementing, revising and analysing the outcomes of a lesson plan. The study is conducted at a Swedish upper secondary school and comprises 68 students, aged 17-18 years, attending four different programmes.

In a Learning Study, the points of departure are previous research results and the participating students´ initially expressed perceptions. To examine the latter, qualitative interviews with six students were conducted. Based on the insights from the interviews and the previous research results, a lesson plan was designed and during this process, Variation Theory was used as a theoretical framework. According to Variation Theory, learning is equivalent to discerning critical aspects of a phenomenon and for this to occur; the patterns of variation and invariance created during the instructions are determinant.

Students' discernments were evaluated via pre-, post-, and delayed posttests. The results primarily indicate that a qualitative discernment was associated with instructions in an invariant form of representation. This was synonymous with an absence, both written and verbally, of algebra during the lesson. Furthermore, the results showed a more qualitative discernment when a variation of graphs were present at the lesson. Even if not intended, teachers' verbal comparison with differentiation rules or an invariance of graphs, for instance only polynomial, led to a procedural thinking by the students which in turn impeded their discernment of the relationship between a graph and its derivative graph.

Innehåll

Kapitel 1: Introduktion

Kritiken mot svensk matematikundervisning har under de senaste åren vuxit sig allt starkare och det påstås att den inte utvecklar det spektrum av förmågor vilka i förening svarar mot såväl ämnesplanens mål som de flesta lärares föreställningar om vad kunnande i matematik innebär. Skolinspektionen granskade år 2010 undervisningen i dåvarande matematik A på 45 skolor i Sverige. I den efterföljande rapporten var de mycket kritiska till det vanligaste upplägget av lektionerna.

> I Matematik A finns, konstaterar Skolinspektionen, en tradition i hur lärarna utformar undervisningen. Flertalet lektioner innehåller i huvudsak två delar, en gemensam genomgång av ett moment följt av elevernas eget arbete. I en sådan utformning finns inget eller mycket begränsat utrymme för att arbeta med helhet och sammanhang i utbildningen (Skolinspektionen, 2010, s.16).

Skolinspektionen (2010) beskriver också hur vissa skolor utgör goda exempel och det som utmärker dessa är alternativa arbetsmetoder och utrustning, till exempel att eleverna arbetar i grupp eller att läraren använder en smartboard. I denna licentiatuppsats ifrågasätts inte resultatet av Skolinspektionens rapport i sak men samtidigt tas ett annat perspektiv. Om utgångspunkten är att en genomgång, precis som Skolinspektionen (2010) hävdar, är en vanlig arbetsform så uppkommer en fråga: Vad skiljer en bra genomgång, eller för den delen en bra lektion, från en mindre bra? Om en genomgång innebär att illustrera en enskild lösning på ett problem så genererar det enligt Marton, Runesson och Tsui (2004) ofta inte de ultimata förutsättningarna för lärande. De argumenterar å ena sidan för lärarens betydelse för elevernas lärande men menar å andra sidan att en enskild lösning av ett problem kan innebära att läraren ser andra alternativ som självklara vilket det inte alls är lika säkert att eleverna gör. Att elever och lärare tolkar situationen olika är dock inget som är relaterat till genomgången som metod utan istället till utformningen av den. Resonemanget utgör grunden inom denna uppsats där fokus är riktat mot innehållets behandling och inte mot metod och organisation. Marton et al. (2004) menar att eleverna, liksom alla andra människor, behöver variation för att det ska vara möjligt att lära sig. Inte variation i vilken bemärkelse som helst utan av en viss karaktär och enligt ett speciellt mönster.

Utvecklingen kräver att undervisningen analyseras

En bidragande orsak till att matematikundervisningen granskades av Skolinspektionen (2010) var sjunkande resultat hos svenska elever i internationella jämförelser (Skolverket, 2004, 2008, 2009, 2010). Den nedåtgående trenden är i linje med de undersökningar som genomförts av blivande ingenjörsstudenters förkunskaper och vid Kungliga tekniska högskolan i Stockholm (KTH) konstaterar Thunberg, Filipsson och Cronhjort (2006) en kraftig kunskapsnedgång vid ungefär samma tidsperiod. KTH testar alla nyblivna studenter via 15 frågor för att möjliggöra jämförelser mellan olika årgångar.

Sveriges position som en ledande tekniknation är beroende av elever med goda matematikkunskaper vilket betonas från flera olika håll (Matematikdelegationen, 2004; Teknikdelegationen, 2012; Utbildningsdepartementet, 2012). Detta i kombination med en utveckling där en allt större andel elever går vidare till universitet och högskolor gör att den urvalsprincip som Niss (2001) beskriver, där uppfattningen att misslyckandet i matematik kan läggas enbart på studenten själv, inte längre är giltig. För att åstadkomma en utveckling och en förbättring av nuvarande situation krävs sannolikt insatser på flera plan och de politiska diskussionerna rör saker som klasstorlek och läroplaner. Skolverket och Skolinspektionen hänvisar å sin sida i flera sammanhang till betydelsen av utbildningen som en helhet och de pekar också på vikten av att elever utvecklar vissa specifika förmågor. Vad beträffar undervisningen finns den återkommande med som en bakgrundsfaktor. Den benämns ofta och det konstateras att den behöver förbättras men ingen kan riktigt precisera hur.

I denna licentiatuppsats analyseras relationen mellan undervisning och lärande. Forskningsansatsen utgörs av en learning study inom det matematiska området derivata. Specifikt studeras relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata, en relation som i uppsatsen benämns lärandeobjektet. Learning study är en vidareutveckling, eller kanske snarare en modifiering, av det japanska konceptet lesson study (Lewis, 2000) och tog form i början av 2000-talet i samarbete mellan forskare från Sverige och Hong Kong (Lo, Marton, Pang & Pong, 2004; Kullberg, 2010; Runesson & Gustafson, 2012). Learning study är en klassrumsbaserad forskningsansats där forskare och lärare samarbetar. Med hjälp av en teoretiskt grundad, i det aktuella fallet i variationsteori, och iterativ undervisningsdesign är syftet att beskriva hur innehållets behandling påverkar elevernas lärande. Ansatsen kan beskrivas som en hybrid mellan lesson study och design experiment (Marton & Pang, 2006) där det första kan sägas stå för praktikutveckling (Stigler & Hiebert, 1999) och det andra för domänspecifik teoriutveckling (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003). Learning study kan alltså tillskrivas ett dubbelt syfte och har prövats som modell i ett stort antal studier om lärande och visat sig ge såväl bestående effekter på lärares praktik (Holmqvist, 2010; Elliot, 2012) som en ökad insyn i vad en specifik undervisningsdesign leder till för typ av lärande (Lo, 2012).

Vikten av att generera kunskap om undervisning och lärande

Pring (2004) menar att de stora summor som årligen läggs på utbildningsvetenskaplig forskning inte används på rätt sätt. En bidragande orsak är hur forskningen är finansierad, i regel ytterst av stat och regering, vilket leder till att frågorna som ställs ofta är av fel karaktär och behandlar fel områden. Enligt Pring (2004) är frågorna felformulerade dels för att forskningen inte ger några entydiga svar på de frågor som ställs, dels för att frågorna ligger för långt från skolans praktik och slutligen på grund av att frågorna ger en fragmenterad bild och inte bidrar till någon koherens i kunskapen då de har olika utgångspunkt och baseras på olika typer av urval. Mycket forskning som bedrivs under benämningen utbildningsvetenskap saknar enligt Pring (2004) relation till skolans kärnfrågor.

> Many such researchers feel no need to enter schools or be interested in how and what children learn. They would no doubt be as happy outside the education department – in, say, departments of psychology or sociology. But the distinctive focus of educational research must be upon the quality of learning and thereby of teaching. With few exceptions, the classroom, and the transaction between teacher and learner in all its complexity, are what research should shed light upon. It is essentially eclectic and draws upon the theoretically more fundamental work of sociologists and psychologists, but is not the same as it nor can it be logically reduced to it (Pring, 2004, s.27).

Pring (2004) önskar se en utbildningsvetenskaplig forskning där frågorna är centrerade kring undervisning och lärande och härstammar från lärarna. På så sätt kan en kumulativ kunskapsbas konstrueras och läraryrket skulle komma att likna den situation som råder inom professionen medicin. Resonemanget påminner om det Carlgren (2012) för angående läraren som forskare där inte bara forskningsobjekten och kunskapen om dem i sig är av intresse utan också forskningen som en kunskapsgenerator i ett vidare perspektiv. Carlgren (2012) menar att learning study är en möjlig väg för att åstadkomma detta men pekar samtidigt på betydelsen av hur forskningsobjektet formuleras. Learning study är en relativt ny forskningsansats och hittills har forskningsobjektet i många studier varit lärares lärande eller hållbarheten i den ofta applicerade variationsteorin. Enligt Carlgren (2012) behöver detta förskjutas i en riktning mot att vara lärandeobjektet eller relationen mellan undervisning och lärande.

Svenska elevers matematikkunskaper

En analys av svenska gymnasieelevers förståelse för matematiska begrepp (Bentley, 2009a) menar att denna är bristfällig och att elevernas kunskaper främst består av att kunna utföra ett antal procedurer. Bergqvist, Lithner och Sumpter (2003) ger samma bild av situationen och menar att ytterst få elevresonemang grundar sig på matematiska koncept utan utgår istället från att följa rutiner, imitera exempel och genomföra procedurer vilka inte ges någon mening. Ett procedurellt lärande kännetecknas av att eleverna behärskar små steg eller sekvenser men brister i förståelse av övergripande begrepp. Kunskaperna är kontextuella och om en uppgift känns igen av eleven och har tränats tidigare löses den korrekt men avviker formuleringen något får eleven omedelbart problem då den inte har förstått det bakomliggande begreppet (Bentley, 2009a; Bentley, 2009b). Att hantera procedurer finns med som en förmåga att utveckla i styrdokumenten för matematikämnet men även andra förmågor som resonemang, kommunikation och problemlösning är framskrivna. Denna licentiatuppsats argumenterar inte emot värdet av att utveckla procedurella kunskaper men ser det som ett komplement i enlighet med Rittle-Johnson, Siegler och Alibali (2001) vilka menar att det inte går att separera procedurella kunskaper från konceptuella då de hela tiden påverkar varandra i en iterativ process och utvecklandet av den ena typen gynnar utveckling av den andra. Ingen av dem kan heller sägas ha automatiskt företräde i utvecklingen utan detta avgörs av vilket område som behandlas och vilka utgångspunkter som tas i undervisningen. Problemet uppstår när situationen liknar de undersökningar som Marton, Hounsell och Entwistle (1986) refererar till gällande en grupp högskolelärare. Lärarna framhöll vikten av att eleverna utvecklade ett kritiskt tänkande och problemlösningsförmågor men det budskap som eleverna uppfattade var istället riktat mot utantillinlärning av fakta och teorier. Att procedurella kunskaper är dominerande hos eleverna är inte unikt för Sverige utan inriktningen känns igen från flera länder inom västvärlden. Exempelvis skriver Kinard och Kozulin (2012) om amerikanska elevers bristande begreppsförståelse

> Således avslutar många elever sina kurser i naturvetenskap och matematik med en illusorisk kompetens grundad på upprepning av memorerat stoff. De bygger inte upp den förståelse eller den flexibla struktur som krävs för äkta lärande och för bildande av ny kunskap i olika sammanhang och situationer (Kinard & Kozulin, 2012, s.43).

Även om läroplanerna från år 2011 lyfter fram ett antal förmågor att utveckla vid sidan om att hantera procedurer är steget till införlivande i praktiken sannolikt ganska långt. Stigler och Hiebert (1999) sätter fingret på detta när de beskriver undervisning som en kulturell företeelse. Vad undervisning innebär och hur den genomförs är något vi formar en bild av genom att växa upp inom en viss kultur snarare än något som är medfött eller utvecklas via en lärarutbildning. Dagens lärare undervisar som de blev undervisade själva och enligt metoder vilka till viss del grundlades redan innan de ens börjat skolan (Stigler & Hiebert, 1999). Samtidigt får inte tidsaspekten glömmas bort i sammanhanget. En undervisning som syftar till att eleverna ska utveckla konceptuella kunskaper via resonemang, kommunikation, kritiskt tänkande och problemlösning kräver tid och faller till stor del utan procedurella kunskaper. Det går inte att resonera kring en strategi (procedur) i avsaknad av vetskapen om hur denna går till och det går inte att tänka kritiskt kring något utan att känna till fakta om detta något. Svenska gymnasieelever lägger mindre tid på läxor jämfört med elever i andra länder (Skolverket, 2009) vilket i kombination med ett utökat innehåll i läroplanerna för gymnasiet från 2011 gör situationen svårhanterlig. Med hänvisning till Bentley (2009a, 2009b) och Skolverket (2004, 2008, 2009, 2010) förefaller Sverige vara i en situation där eleverna är i behov av såväl mer procedurella som konceptuella kunskaper även om avsaknaden av de senare framträder tydligast.

Undervisningen om derivata

Svenska elever som läser naturvetenskap, teknik samt i viss mån samhällsvetenskap introduceras för begreppet derivata i matematikens kurs 3 på gymnasiet. Ämnesplanen för kurs 3 tar bland annat upp deriveringsregler och sambandet mellan en funktions graf och dess derivata. Derivata är ett ytterst centralt begrepp inom matematisk analys och utgör en betydande del av de efterföljande kurserna på gymnasiet samt inom många av matematikkurserna vid tekniska och naturvetenskapliga universitetsstudier (det förekommer även vid studier inom andra områden i olika omfattning).

Förståelsen för derivata vilar på förståelsen av funktionsbegreppet (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997) och i den svenska gymnasiematematiken behandlas funktioner inom samtliga kurser. En funktion kan representeras på flera olika sätt men störst tid ägnas åt den symboliska representationen och vid övergångar mellan representationer är det vanligast att gå från symboliskt uttryck till graf (Bentley, 2009a). Undervisningen i matematik är av tradition i stor utsträckning läroboksstyrd och de mest frekvent använda läromedlen som behandlar derivata var fram till början av 2000-talet likvärdiga i sina upplägg och utsatta för relativt små förändringar över tid (Bremler, 2003). De sista åren har nya förmågor betonats i de svenska styrdokumenten och i kombination med den ökande IT-användningen har nya vägar till representationer och visualiseringar öppnats, men fortfarande ägnas huvuddelen av tiden åt att behandla derivata symboliskt i form av algebraiska funktionsuttryck. Detta leder till att svenska elever ofta efterfrågar algebraiska uttryck vid problemlösning, ett fenomen som även känns igen internationellt och beskrivs i flertalet studier (t.ex. Tall & Vinner, 1981; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2010; Jukić & Dahl, 2012). Uppgifter eller resonemang där grafer utgör utgångspunkten förekommer i undervisningen och läromedlen men är mer ovanligt vilket ger en annorlunda bild jämfört med hur det ser ut inom andra områden, exempelvis naturvetenskap eller statistik, där det är väl så vanligt att grafen existerar men inte det algebraiska uttrycket.

Matematisk förmåga

Även om det för många elever är en lång väg mot den formella uppfattning av derivata, som är skolans och utbildningssystemets slutmål, förekommer det också att elever relativt snabbt förmår tolka och förstå vad som är nödvändigt att urskilja för att förstå det abstrakta begreppet derivata. Vad är det dessa elever urskiljer som inte de andra gör, hur är förmågan att urskilja beskaffad och hur kan undervisning underlätta urskiljning? Den kanske mest grundläggande studien i syfte att definiera matematisk förmåga i generell mening genomfördes under dryga tio år i mitten på 1900-talet av V.A. Krutetskii. Knappt 200 elever deltog i undersökningen som var av såväl kvantitativ som kvalitativ art. Fokus i undersökningen låg på analyser av problemlösningsstrategier hos elever i olika åldrar och med skiftande matematisk förmåga. Även intervjuer med matematiker och matematiklärare genomfördes och Krutetskii (1976) slår bland annat fast att lärare med erfarenhet av undervisning är en stor tillgång vid sökandet av hur matematisk förmåga är strukturerad. Enligt Krutetskii (1976) är matematisk förmåga inte något medfött utan något som utvecklas via matematiska aktiviteter, dock är vissa personer mer benägna till utveckling och har en tendens att tolka världen matematiskt. I jämförelsen mellan kapabla (*gifted* alternativt *capable* i den engelska översättningen av Krutetskiis studie) och inkapabla (*uncapable)* elever konstateras att de förra vid problemlösning ser den formella strukturen, äger förmågan till ett flexibelt och avkortat resonemang och kommer ihåg relationer, bärande argument och angreppssätt medan de senare istället hänger upp sig på detaljer som inte har med den matematiska strukturen att göra och minns delar av icke matematisk karaktär. Krutetskii (1976) menar att olika elever har olika potential men i princip kan alla lära sig den matematik som behandlas i skolan, om än med olika mängd övning. Målet måste vara att utveckla alla elevers förmågor maximalt vilket enligt Krutetskii (1976) möjliggörs genom att skapa ett system av organiserade övningar.

Om utgångspunkten är Krutetskiis (1976) beskrivning av hur utvecklingen av matematisk förmåga kan ske genom *ett system av organiserade övningar* kan en learning study där design och analys har sin grund i variationsteorin svara mot behoven. Variationsteorin beskriver lärande i termer av vad som urskiljs och i en learning study analyseras och designas undervisningen på ett systematiskt vis för att möjliggöra urskiljande och samtidigt beskriva ett kunnandes beskaffenhet. I relation till Krutetskii (1976) kan en variationsteoretisk analys dels liknas vid att beskriva vilka aspekter av ett innehåll de kapabla eleverna urskiljer men också vid en beskrivning av hur dessa aspekter kan synliggöras för samtliga elever.

Syfte och frågeställningar

På ett övergripande plan är licentiatuppsatsens syfte att bidra till en ökad kunskap om hur undervisning påverkar lärande. Specifikt är syftet att utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv beskriva elevers lärande mot bakgrund av vad som synliggjorts och därmed varit möjligt att urskilja i undervisningen. Lärandeobjektet, relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata, utgör det ämnesspecifika innehållet. Den ämnesdidaktiska forskningen inom derivata är relativt omfattande men har samtidigt till stor del varit inriktad på vilken förståelse elever uppvisar och vilka de mest frekventa missuppfattningarna är. Denna uppsats är också centrerad kring elevernas uppfattningar men försöker beskriva hur dessa kan ställas i relation till undervisningen.

Uppsatsen söker svaret på följande tre frågor:

- Vilka aspekter hos lärandeobjektet är kritiska att urskilja?
- På vilket sätt påverkar innehållets behandling elevernas lärande?
- På vilket sätt kan tidigare matematikdidaktiska forskningsresultat användas för att designa undervisningen inom ett specifikt innehåll?

Kapitel 2: Teoretiska utgångspunkter

Inom licentiatuppsatsens ram är den teoretiska utgångspunkten att människor behöver uppleva variation för att lära sig och den applicerade variationsteorin beskriver hur denna variation bör gestalta sig. Variationsteorin har utvecklats under de senaste decennierna och en historisk tillbakablick ger vid handen att det är de teoretiska inriktningarna behaviorism och kognitivism som dominerat det vetenskapliga studiet av lärande (Säljö, 2000, 2005). Behaviorism och kognitivism är i en mening varandras raka motsatser och har sin filosofiska grund i empirism respektive rationalism. Inom behaviorismen problematiseras inte hur skapandet av kunskap går till utan kunskapen ses som diskret till sin karaktär och som något som överförs till individen bit för bit. Det är alltså frågan om ett rent förvärvande och någon analys av de mentala processerna i samband med detta sker inte då dessa inte antas existera eller åtminstone inte är möjliga att studera för en utomstående (Säljö, 2000). Undervisningen kan enligt en av de främsta företrädarna, Skinner (1969/2006), liknas vid att påskynda utvecklandet av ett önskvärt beteende med hjälp av positiva förstärkningar.

Behaviorismen, som endast koncentrerar sig på det yttre beteendet, kom i slutet av 1950-talet att ersättas av kognitivismen som istället helt fokuserar på det inre tänkandet. Kognitivismen består av många olika inriktningar men den som har fått störst genomslagskraft inom den västerländska skolan är konstruktivismen, en inriktning som främst förknippas med den schweiziske kunskapsteoretikern Jean Piaget (Säljö, 2000). Inom konstruktivismen ses kunskap som något som skapas inom individen i samband med utforskandet av den omgivande miljön. Det nyfödda barnet mognar undan för undan och i takt med denna mognad utvecklar det allt mer förfinade tankestrukturer. Det slutgiltiga abstrakta tänkandet uppnås i tonåren och då sker tänkandet i form av allmänna idéer som inte kräver någon direkt koppling till omgivningen (Piaget, 1976/2006). Det är ett tydligt fokus på att mognad företräder inlärning och likaså på att barnet, människan själv, ska vara aktiv i sin konstruktion av kunskap. Läraren eller den vuxnes uppgift är framförallt att tillhandahålla en kreativ miljö som möjliggör utveckling och inte att leda densamma vilket snarare anses ha en negativ inverkan. Konstruktivismen fick stor inverkan på matematikens didaktik och i början på 1990-talet var det enligt Björkqvist (1993) svårt att finna matematikdidaktiker vars arbete inte omfattade de konstruktivistiska idéerna.

Konstruktivismen förklarar det yttre, handlingar och beteenden, i termer av det inre (Marton & Booth, 1997). Inom fenomenografin, till vilken variationsteorin är nära relaterad, är denna relation människa–värld central eftersom den ontologiska grunden innebär ett icke-dualistiskt synsätt. Människa och värld ses inte som åtskilda, som subjekt och objekt, utan fenomenografin menar att dessa utgör en intern relation.

Fenomenografi

Enligt fenomenografin (Marton, 1981; Marton & Booth, 1997) erfar människor situationer och tillhörande fenomen på skilda sätt. En situation är den helhet som vi erfar tillsammans med andra närvarande i en social, rumslig och tidsbestämd position. För att erfara ett fenomen krävs en situation, men fenomenet är inte kopplat till en viss plats eller en viss tid. Fenomenet är mera abstrakt och länkar samman olika situationer och ger dem en mening. När vi erfar något kan vi inte skilja på situationen och fenomenet men ur forskningssynpunkt går det att studera dem åtskilda (Marton & Booth, 1997). Att erfara är det mest centrala begreppet inom fenomenografin och kan liknas vid vilken relation en människa har till omvärlden och till olika fenomen i denna. Olika människor erfar världen och fenomen på olika sätt. Marton och Booth (1997) menar att det finns sätt att erfara som är mer avancerade och mer komplexa än andra och att erfara något på en nytt mer kvalitativt sätt är vad lärande ytterst handlar om.

Eftersom fenomenografin intresserar sig för hur människor erfar sin omvärld kräver forskningsansatsen att man bitvis intar ett andra ordningens perspektiv. Med detta avses att man intar den lärandes perspektiv (Marton & Booth, 1997). Om en elev till exempel löser en ekvation och får svaret tre samtidigt som den matematiskt korrekta lösningen är fem så innebär ett andra ordningens perspektiv att fokus ligger på att beskriva hur eleven uttrycker sitt tänkande, eller erfar problemet. Elevens uttryckta förståelse av problemet är det relevanta och inte huruvida svaret är rätt eller fel. I exemplet med ekvationen ska därför följdfrågan handla om hur eleven resonerat för att komma fram till svaret tre. Svaret ger i sig inte särskilt mycket information till skillnad mot vägen dit, vilken kan berätta desto mer. Vid en fenomenografisk analys studeras flera elevresonemang vilket leder till att vissa, inte nödvändigtvis för att de ger samma svar, konvergerar mot varandra och vissa divergerar. Resonemangen kommer också vara kvalitativt skilda vilket ligger till grund för att kategorisera dem.

Pang (2003) beskriver hur fenomenografin består av två inriktningar. Medan den ursprungliga var att kategorisera individers sätt att erfara ett fenomen är den nya att besvara frågorna vad det innebär att erfara något och vad som skiljer mellan två olika sätt att erfara något. Den nya inriktningen gör att fenomenografin går från en metodisk till en mer teoretisk inriktning. Vad innebär det då att erfara något? Att erfara är utifrån fenomenografin att urskilja kritiska aspekter av detta något. Ett fenomen är alltid oändligt komplext men har samtidigt ett ändligt antal kritiska aspekter som särskiljer det från andra fenomen (Pang, 2003). För att de kritiska aspekterna ska kunna urskiljas måste det finnas såväl en struktur som en mening, vilket ses i termer av strukturella respektive referentiella aspekter (se t.ex. Marton & Pong, 2005). Marton och Booth (1997) exemplifierar i ett fall de två typerna av aspekter genom förmågan att urskilja ett rådjur i mörkret. För att urskilja rådjuret måste dess konturer urskiljas från omgivningen men detta urskiljande kräver samtidigt att rådjuret ges någon mening. Den strukturella aspekten är dessutom tvåsidig. Dels handlar det om att urskilja något, en helhet, ur ett sammanhang vilket benämns fenomenets externa horisont, och dels urskilja olika delar och hur de hänger ihop inbördes, vilket benämns fenomenets interna horisont (Marton & Booth, 1997).

Vilka kritiska aspekter den lärande urskiljer samtidigt utmärker ett specifikt sätt att erfara (Pang, 2003). Alla aspekter kan inte urskiljas samtidigt men enligt Marton och Booth (1997) är ett mer avancerat sätt att erfara något detsamma som att urskilja många aspekter samtidigt och dessutom relatera dem på ett riktigt sätt till varandra. En sämre förståelse av ett fenomen, exempelvis ett matematiskt problem eller en instruktion, kan ses som att inte lika många aspekter urskiljs samtidigt, vilket innebär en ofullständig förståelse. Marton et al. (2004) menar att en människas medvetande är hur världen erfars momentant. Detta görs mot bakgrund av vad som erfarits tidigare, varför medvetandet hela tiden förändras. Vi är i någon mening medvetna om allt vi erfarit hela tiden men allt är inte fokuserat. En utvecklad förståelse för något innebär att vi samtidigt kan fokusera på många av de aspekter som är kritiska. För att detta ska vara möjligt måste de kritiska aspekterna ha urskiljts. För att kunna urskilja en kritisk aspekt krävs att den varierar. Emanuelsson (2001) diskuterar variationens betydelse och skriver:

> Variation tycks ha avgörande betydelse för vad vi erfar med våra sinnen, uppfattar och förstår, vilka aspekter vi urskiljer och därmed också för vad vi lär. Vi erbjuds ständigt möjligheter att lära i och utanför utbildningssystemet. Har vi tillgång till flera olika sätt att tänka om samma sak, en variation i sätt att se, så har vi rimligtvis bättre möjligheter att möta en helt ny situation än om endast ett sätt att förstå finns vid handen (Emanuelsson, 2001, s.12).

Variationsteori

Variationsteorin är en teori om lärande vilken har vuxit fram ur den fenomenografiska forskningsansatsen. Utgångspunkten inom variationsteorin är lärandeobjektet, vilket syftar på det som är avsikten med lärandet. Marton et al. (2004) beskriver lärandeobjektet som ett kunnande vilket kan delas i en generell och en specifik aspekt. Den generella aspekten syftar på vilken typ av kunnande det är fråga om till exempel komma ihåg, urskilja eller förstå. Den specifika aspekten syftar på innehållet till vilket kunnandet är kopplat till exempel någon historisk händelse eller ett matematiskt avsnitt. Detta belyser det som Marton och Booth (1997) betecknar som lärandets grundläggande struktur, det finns alltid ett hur och ett vad i samband med lärande. *Hur* hör samman med den generella aspekten och benämns det indirekta lärandeobjektet och *vad* hör samman med den specifika aspekten och benämns det direkta lärandeobjektet. De olika aspekterna är ständigt närvarande vid alla former av lärande men inte ständigt fokuserade. De separeras och diskuteras i ett forskningssyfte men inte nödvändigtvis i samband med själva lärandet. Marton et al. (2004) menar att elever i regel fokuserar på det direkta lärandeobjektet medan läraren bör fokusera på båda två. Det direkta lärandeobjektet kan inte ensamt utgöra målet för lärandet utan det är snarare ett sätt att kunna hantera det som är lärandets avsikt (Gustavsson, 2008).

Varje lärandeobjekt har ett stort antal aspekter men som Marton et al. (2004) beskriver kan det definieras utifrån de aspekter som är kritiska. De kritiska aspekterna identifieras via analys av empiriskt material, till exempel i form av hur lektioner genomförts eller vilka typer av svar som elever gett vid tester eller intervjuer. De kritiska aspekterna som urskilts för en grupp av elever behöver inte nödvändigtvis vara desamma som för en annan elevgrupp

(Kullberg, 2010). Marton och Booth (1997) benämner de kritiska aspekterna som dimensioner av variation och menar att en person hela tiden fokuserar på vissa aspekter medan andra är i bakgrunden. Ett särskilt sätt att förstå något kan alltså ses i termer av vilka aspekter som är fokuserade.

För att kunna fokusera en aspekt krävs att den har urskilts och variationsteorin syftar till att variera ett lärandeobjekts kritiska aspekter så att dessa blir möjliga att urskilja. De kritiska aspekterna varieras i samband med undervisning i form av ett mönster vilket beskrivs enligt separation/kontrast, generalisering och fusion (Marton et al., 2004). Separation/kontrast innebär att endast en kritisk aspekt varierar och kontrasteras mot något annat. Avsikten är att synliggöra vad något är genom att kontrastera mot vad det inte är. Generalisering följer efter kontrasteringen och innebär att samma kritiska aspekt synliggörs i flera exempel efter varandra, nu i en varierande kontext. Slutligen genomförs en fusion där flera kritiska aspekter varierar samtidigt och en simultan urskiljning av flera kritiska aspekter utgör målet för lärandet. När en kritisk aspekt varieras innebär det att en dimension av variation öppnas upp. De kritiska aspekterna ska inte varieras, öppnas upp, slumpvis. Runesson (2006) menar att det inte bara är vilken eller vilka dimensioner som öppnas upp som är avgörande för lärandet. Avgörande är också i vilken ordning och med vilken samtidighet detta görs.

Även om kritiska aspekter är identifierade innan en lektion, till exempel som resultatet av ett förtest eller intervjuer, är det inte säkert att eleverna kommer att fokusera på dessa, de kanske riktar sin uppmärksamhet mot andra aspekter av olika anledningar. Marton et al. (2004) beskriver detta som att det finns tre typer av lärandeobjekt. Gustavsson (2008) gör översättningen enligt det intentionella, det iscensatta samt det erfarna lärandeobjektet. Det intentionella är det som före lektionen är avsikten, det iscensatta är det som verkligen kommer till uttryck under lektionen och det erfarna är det som svarar mot vad eleverna faktiskt lärde sig. Det iscensatta är mycket påverkbart då det dels beror på hur läraren agerar men också på hur interaktionen med eleverna ser ut. Interaktionen i klassrummet är mycket svår att förutspå men kan få stor inverkan på resultatet. Kullberg (2012) redovisar en studie där det intentionella lärandeobjektet innebar att utelämna några kritiska aspekter i undervisningen men dessa fördes då fram av eleverna. Det iscensatta lärandeobjeketet blev därmed något annat än det intentionella.

Variationsteorin lägger fokus på innehållets behandling och inte på metod eller organisation. De tre begreppen urskiljning, variation och samtidighet är enligt teorin centrala för att möjliggöra lärande (Holmqvist, 2010). Först och främst måste en kritisk aspekt urskiljas. För detta fordras en variation av den aspekten och slutligen kräver en utvecklad förståelse att flera kritiska aspekter kan fokuseras samtidigt. Samtidighet är ett nyckelbegrepp då att förstå något inte handlar om att urskilja kritiska aspekter i en lång rad efter varandra utan just samtidigt och i samband med detta kunna differentiera och ge vissa kritiska aspekter en överordnad roll (Runesson, 2006).

Marton et al. (2004) tar upp begreppen diakronisk och synkronisk samtidighet. Det förstnämnda kan jämföras med att lyssna på en melodi. Varje ton för sig är tämligen meningslös men tillsammans skapar de en melodi genom variationen. Vi erfar i detta fall något vi upplevt vid olika tillfällen på en och samma gång. Detta kan jämföras med synkronisk samtidighet vilket svarar mot det som beskrevs tidigare där erfarandet består av att urskilja olika kritiska aspekter av ett fenomen på en och samma gång. Att erfara något samtidigt kan alltså dels innebära att det sker i nuet men det kan också innebära att delar av det som erfars härstammar från tidigare upplevelser.

Variationsteorin är fortfarande ung och under utveckling men det variationsteoretiska perspektivet har prövats i ett relativt stort antal studier inom matematik (t.ex. Kullberg, 2010; Olteanu, 2007; van Bommel, 2012; Wernberg, 2009). Wernberg (2009) studerade hur lärandeobjektet behandlades i samband med tre learning studies och kom bland annat fram till att lärarna tydligare bör problematisera vad det innebär att lära sig något och inte ta för givet att eleverna behärskar vissa moment. Kullbergs (2010) avhandling undersökte bland annat hur kritiska aspekters närvaro i undervisningen påverkade elevernas lärande och om funna kritiska aspekter kunde förmedlas mellan lärare. Inom en empirisk studie (Kullberg, 2010) utnyttjade lärare kritiska aspekter som identifierats i två tidigare genomförda learning studies. Lärandeobjektet hade i den ena av dessa varit addition och subtraktion med negativa tal. De fyra identifierade kritiska aspekterna var minustecknets olika betydelse, subtraktion kan ses som skillnad eller ”ta bort”, kommutativa lagen icke användbar samt talsystemets uppbyggnad. Lektionerna inom Kullbergs (2010) studie genomfördes med detta som utgångspunkt och analyserades utifrån det intentionella, iscensatta samt erfarna lärandeobjektet. Elevernas lärande studerades via identiska tester före och efter lektionen. Resultatet av studien tyder på att fokus på de kritiska aspekterna bidrog till elevernas lärande. Resultatet pekar vidare på att eleverna behöver ges möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna; att bara nämna dem ger inte samma effekt.

Kullberg (2010) menar också att de tidigare identifierade kritiska aspekterna utgjorde en kunskapsresurs för lärarna i samband med designen av undervisningen.

Kapitel 3: Några för studien relevanta forskningsresultat

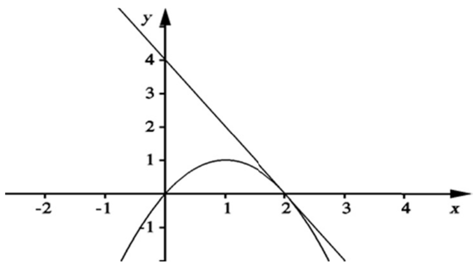
Begreppet derivata befinner sig på gränsen till det som Tall (2004a; 2004b; 2008) kallar den formella matematiska världen och innebär för många elever betydande svårigheter. Undervisningen inom derivata syftar till att eleverna ska utveckla en konceptuell förståelse för begreppet men samtidigt menar Carlgren (2011) att skolans undervisningspraktik ofta inte stödjer den kunskapsutveckling som eftersträvas. Denna situation känns igen inom området derivata vilket för många elever blir synonymt med en uppsättning regler utan någon djupare innebörd. Eleverna är dessutom ofta beroende av att uppgiftsformuleringen är känd så att en invand procedur kan tillämpas (Bentley, 2009a). Att analysera undervisningen av derivata kan göras på olika sätt och exempelvis har Asiala et al. (1997), Habre och Abboud (2006) och Ubuz (2007) undersökt vilka konsekvenser användandet av datorer kan få för elevernas utveckling. Denna licentiatuppsats tar ett annat perspektiv och fokuserar på innehållets behandling och på vilka aspekter som urskiljs av eleverna. Forskningsprocessen är iterativ och intervenerande. Den försöker med hjälp av en variationsteoretiskt grundad lektionsdesign identifiera de aspekter som är kritiska för elevernas lärande och samtidigt beskriva på vilket sätt undervisningen möjliggör urskiljning.

Då tidigare forskningsresultat är en av utgångspunkterna i en learning study beskrivs i detta kapitel ett antal insikter som framkommit gällande elevers förståelse för derivata, det vill säga det begrepp som innesluter denna studies lärandeobjekt. Sökningen av tidigare forskningsresultat skedde initialt via Göteborgs universitetsbiblioteks elektroniska söksidor. De första sökorden var *derivative, graph, student* och *understanding*. Med hjälp av ett relativt stort antal träffar kunde sökningen utvidgas genom att utnyttja de referenslistor som följde med dessa träffar. I samband med att genomgången av tidigare forskningsresultat fördjupades utkristalliserades ett antal forskare som refererades till i flertalet studier inom derivata (t.ex. Tall & Vinner, 1981; Orton, 1983; Asiala et al., 1997). Dessa forskares slutsatser har tillsammans med ett antal andra studiers resultat beretts plats i detta arbete. Syftet med litteratursökningen har varit att försöka beskriva elevers uppfattningar av begreppet derivata; uppfattningar som i sin tur togs som en av utgångspunkterna för den empiriska studiens design. Vid sökningen framkom att ett stort antal studier hade teoretiska utgångspunkter som var grundade i konstruktivismen. De konstruktivistiska idéerna hade också i flera fall gett upphov till teoretiska ramverk som beskriver matematikinlärning (några av dem beskriver även lärande av derivata specifikt). I kapitlet presenteras några av dessa teorier och de som givits plats har ansetts relevanta för uppsatsens empiriska studie, dels som bakgrund men också genom att de indirekt pekar på behovet av studien. Flera av teorierna (Duval, 2006; Zandieh, 2000) har också haft inflytande på designen av studien medan Tall (2008) har påverkat valet av lärandeobjekt.

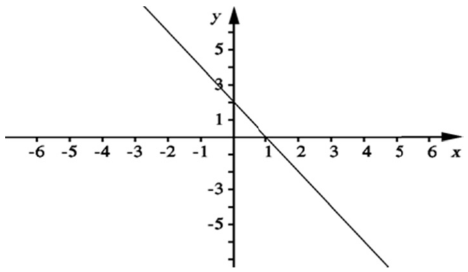
I texten nedan ges först en kort introduktion till derivata följt av de teoretiska beskrivningarna av hur lärande av matematik och derivata kan gestalta sig. Därefter fokuseras elevers uppfattningar av derivata vilket specificeras ytterligare i form av elevers uppfattningar av derivata i den grafiska representationsformen. Sist i kapitlet finns en sammanfattning som leder till den empiriska studiens syfte och lärandeobjekt.

Derivatans olika representationer

Derivatans definition utgörs av ett gränsvärde vilket dels kan vara en funktions förändring i en punkt men också en funktion i sig (jämför figur 1 och 2 nedan).



Figur 1. Derivatan i en punkt. Grafen som utgörs av en parabel ovan kan beskrivas symboliskt enligt $f(x) = 2x - x^2$. I punkten där $x = 2$ är en tangent dragen till parabeln. Den grafiska tolkningen av derivatan i en punkt är lutningen hos tangenten i punkten.



Figur 2. Derivatan som en funktion. Om $f(x) = 2x - x^2$ kan derivatans funktion symboliskt uttryckas $f'(x) = 2 - 2x$. Denna funktion är representerad grafiskt ovan.

Definitionen innebär för många elever betydande svårigheter (Tall & Vinner, 1981; Orton, 1983; Hähkiöniemi, 2006a). Dels utgör den algebraiska hanteringen av gränsvärden ett problem i sig och dels är den matematiska innebörden av ett gränsvärde av abstrakt karaktär. Detta gör att det som på sikt kan öppna för en djupare förståelse inledningsvis för många elever istället utgör ett hinder.

En funktions derivata kan i regel representeras på flera olika sätt. Många elever har svårt att överblicka derivatans olika representationsformer och det är vanligt att elever kan hantera och förstå derivata i en representationsform utan att kunna relatera den till någon annan (Zandieh, 2000). Även förståelsen för derivata som en funktion innebär svårigheter och i den grafiska representationsformen förekommer flera missuppfattningar. Exempelvis är det vanligt att elever förväntar sig en likhet mellan grafen till en funktion och grafen till funktionens derivata (Nemirovsky & Rubin, 1992; Hähkiöniemi, 2006b). Det förekommer också att elever likställer tangenten i en punkt med derivatans funktion (Asiala et al., 1997).

Teorier om lärande i matematik

Vid undervisning inom derivata hanteras ofta symboliska funktionsuttryck. Enligt Gray och Tall (1994) och Tall, Gray, Ali, Crowley, DeMarois, McGowen, Pitta, Pinto, Thomas och Yusof (2000) kan symboler uppfattas som processer eller koncept, se tabell 1 nedan. I takt med att utvecklingen fortgår blir individen allt bättre på att skifta mellan det ena och det andra. De som upplever svårigheter med matematik har ofta problem att växla mellan de två sätten att se på symboler medan exempelvis matematiker gör det utan att fundera alls. Gray och Tall (1994) benämner kombinationen av process och koncept som procept och definierar proceptuellt tänkande som förmågan att fritt växla mellan de två varianterna. De menar att proceptuellt tänkande utgör grunden för att lyckas i matematik och att de som inte utvecklar denna förmåga hamnar i ett procedurtänkande med exempel som *multiplikation före addition*, *två negativa blir positivt* etcetera.

Tabell 1. Symboler som processer eller koncept (Tall et al., 2000*)*.

symbol	process	koncept
-3	subtrahera 3	negativ 3
$3/4$	division	bråk
dy/dx	derivera	derivata
$\int f(x)dx$	integrering	integral

Att stanna kvar i ett procedurellt tillvägagångssätt, där något bara utförs enligt rutiner, och därmed inte utveckla någon begreppsförståelse, leder ofta till en återvändsgränd inom matematiken. Detta är ett vanligt förekommande problem hos elever och existerar dels inom den grundläggande aritmetiken i de tidiga skolåren (Gray & Tall, 1994) men också senare inom matematikstudierna vilket exemplifieras i flera studier (t.ex. Selden, Selden & Mason, 1994; Bergqvist et al., 2003).

Utvecklingen av procept (Gray & Tall, 1994; Tall et al., 2000; Tall, 2004a; Tall, 2004b; Tall, 2008) beskrivs enligt stegen procedur, process, procept. De tre stegen innebär att det matematiska fenomenet går från att förknippas med något att göra till att bli ett mentalt objekt, en konstruktion där fokus successivt förflyttas från själva utförandet till resultatet av utförandet. Synen på lärande som beskrivs vid utvecklingen av procept känns igen i flera andra teorier inom matematikdidaktik och två av dem presenteras nedan.

APOS som står för nivåerna action – process – object – schema är en teori om lärande i matematik, beskriven av Dubinsky och Mc Donald (2001). Enligt APOS sker utvecklingen via mentala konstruktioner av de tre första nivåerna vilka sedan organiseras i scheman. Den första nivån innebär att utföra operationer steg för steg via instruktioner. När detta repeteras och eleven kan reflektera över operationer, och tänka på dem utan att faktiskt utföra dem, innebär det att se dem som en process vilket utgör den andra nivån. Eleven kan också tänka kring processen i två riktningar och förena den med andra processer. Ett objekt konstrueras ur processen när eleven kan se processen som en helhet vilken i sig kan transformeras. Slutligen är ett schema över ett matematiskt koncept en samling av aktioner, processer och objekt samt andra scheman som är länkade till det aktuella via generella principer. Schemat är att likna vid ett ramverk i medvetandet och kan användas vid problemlösning som inkluderar det matematiska konceptet. Dubinsky och Mc Donald (2001) menar att APOS kan användas som ett verktyg vid analys av data och att forskare med dess hjälp kan jämföra studenters framgångar eller misslyckanden inom matematiska områden med de mentala konstruktioner de uppvisar. Detta har gjorts i flertalet studier inom derivata (t.ex. Asiala et al., 1997; Cooley, Trigueros & Baker, 2007; García, Llinares & Sánchez-Matamoros, 2010).

Sfard (1991) ger ytterligare ett exempel på en teori vilken uppvisar påtagliga likheter med APOS. Sfard (1991) menar att en förståelse för matematik kräver såväl en strukturell som en operationell uppfattning av matematiska fenomen. Det första innebär att se matematik som statiska objekt och det sista att se det som processer. Tillägnandet av ett matematiskt koncept startar i regel i form av processer vilket utgör basen för förståelsen. Sfard (1991) beskriver hur vägen till den strukturella statiska synen sedan går via de tre stegen *interiorization - condensation – reification*. Det första steget innebär att bekanta sig med och hantera enkla processer. Om det exempelvis handlar om funktionsbegreppet kan det röra sig om att använda en formel och bestämma specifika funktionsvärden. I det andra steget blir processen mer till en helhet och betydelsen av detaljer minskar. Olika processer kan kombineras och det matematiska fenomenet kan studeras i olika representationsformer. Med avseende på funktioner kan dessa nu exempelvis undersökas och grafer kan ritas. Det andra steget pågår så länge som fenomenet förknippas med specifika processer medan det tredje steget, vilket är det svåraste, innebär ett skifte i kvalitativ mening där fenomenet ses på ett nytt sätt i form av ett reellt, existerande och statiskt objekt vilket kan behandlas som en helhet. Detta relateras nu inte längre till de processer som skapade det utan kan nu användas som bas för att tillägna sig nya koncept. Gällande funktioner kan detta tredje steg visa sig till exempel via färdighet att lösa differentialekvationer eller en syn på funktioner i form av något som inte innebär någon beräkning. Sfard (1991) hävdar att den vanligt förekommande kategoriseringen i konceptuell respektive procedurell förståelse inte är rimlig och därav valet att istället använda termerna strukturell och operationell vilka fungerar som komplement till varandra, det är en fråga om dualism istället för dikotomi.

De tre teoretiska beskrivningarna ovan (Gray och Tall, 1994; Dubinsky och Mc Donald, 2001; Sfard, 1991) redogör alla för den matematiska utvecklingen enligt olika stadier. Pegg och Tall (2010) menar att de, på grund av gemensam utgångspunkt i Piagets tankar, är mycket lika:

> Each of these theories of 'process-object encapsulation' is founded essentially on Piaget's notion of 'reflective abstraction', in which actions on existing or known objects become interiorized as processes and are then encapsulated as mental objects of thought (Pegg & Tall, 2010, s.180).

Samtidigt som dessa tre teorier på ett detaljerat sätt beskriver utvecklingen över tid lyser det kortsiktiga perspektivet med sin frånvaro. Vad som kan möjliggöra, underlätta eller påskynda övergången mellan olika stadier förklaras inte heller.

Ett specifikt teoretiskt ramverk om förståelsen av derivata

Zandieh (2000) utarbetar ett teoretiskt ramverk för att beskriva elevers utveckling inom derivata. Zandiehs (2000) avsikt är inte att med detta förklara hur eller varför elever lär och inte heller att förespråka någon specifik väg för lärandet. Istället vill hon försöka åstadkomma ett analysverktyg som kan användas vid diskussioner som rör elevers lärande. Teorin kan sammanfattas i en matris som ser ut enligt följande:

Process-object layer	**Contexts**				
	Graphical	Verbal	Physical	Symbolic	Other
	Slope	Rate	Velocity	Difference Quotient	
Ratio					
Limit					
Function					

Figur 3. Matris över derivatans olika kontexter och lager (Zandieh, 2000).

Kontexter är ett annat ord för representationer och används av Zandieh (2000) för att ge det en bredare innebörd. Anledningen hör samman med kolumnen till höger där många olika fysiska representationer (kontexter) kan ta plats. Att Zandieh (2000) väljer hastighet som representant för den fysiska representationen beror på att hastighet är vanligast förekommande när begreppet derivata ska beskrivas. De olika lagren i vänstra kolumnen beskriver enligt Zandieh (2000) hur derivata är uppbyggt och process - objekt är begrepp som härstammar från flera andra teorier men speciellt Sfard (1991), en teori som diskuterades ovan, har haft inflytande på Zandiehs (2000) tänkande då hon menar att alla tre lagren kan ses som både dynamiska processer och statiska objekt. Förhållande (ratio) är det första lagret vilket kan ses dels som en divisionsberäkning (process) men också som en kvot (statiskt objekt). Andra lagret, gränsvärde (limit), kan dels ses som en dynamisk process i form av att närma sig gränsvärdet men också statiskt i form av dess definition. Sista lagret, funktion, kan dels uppfattas som dynamiskt genom att den byggs upp via upprepade processer eller statiskt i form av en uppsättning ordnade par. Begreppet derivata innehåller de tre process – objekt paren vilka bildar en kedja från förhållande som process till funktion som objekt. Zandieh (2000) inför även begreppet pseudo-object vilket också det är starkt influerat av Sfard (1991). Detta begrepp beskriver hur elever kan gå vidare i inlärningen av derivata utan att ha utvecklat en statisk uppfattning av ett lager och innebär en uppfattning i form av en helhet utan underliggande struktur. Till exempel kan ett symboliskt uttryck för en funktion manipuleras utan att eleven vet vad en funktion är och på samma sätt kan ett gränsvärde behandlas utan förståelse för processen som leder fram till gränsvärdet.

Zandieh (2000) utgår från matrisen ovan när hon analyserar nio elevers förståelse för begreppet derivata. Alla eleverna var framgångsrika i matematik och även om Zandieh (2000) är försiktig med sina generaliseringsanspråk menar hon att de problem eleverna uppvisade med stor sannolikhet även delas av andra, mindre framgångsrika elever. Data samlades in under en kurs på nio månader och bestod dels av fältanteckningar från 75 lektioner och dels av fem intervjuer med varje elev. Under intervjuerna markerades i matrisen vilka representationer eleverna använde samt hur väl de gjorde detta när de skulle förklara vad derivata innebar. Studien visade att vid första intervjun använde olika elever olika representationer men vid sista intervjun var eleverna relativt enade om att föredra representationerna slope och rate. Detta menar Zandieh (2000) skiljer sig från en matematiker vilken kanske i första hand tänker på den formella definitionen. Vad gäller en eventuell hierarki mellan de tre process – objekt lagren konstateras att det går att ta sig fram via förståelse i form av pseudo-object varför lagren inte nödvändigtvis behöver uppfattas hierarkiskt. Utmaningen hos läraren ligger enligt Zandieh (2000) i att ge eleverna erfarenheter som möjliggör en förståelse för alla de tre lagren. Ett bra läromedel och en gynnsam diskurs ger enligt Zandieh (2000) eleverna möjlighet att möta de olika lagren i matrisen i många olika kontexter.

Representationsformens betydelse

För Duval (2006) är förmågan att växla mellan representationsformer avgörande för hela den matematiska utvecklingen. Duval (2006) hävdar att komplexiteten i begreppen inte är något som utmärker matematiken, alla vetenskaper har komplexa begrepp. Att matematiken är svårtillgänglig beror istället enligt Duval (2006) på att matematiska objekt inte är tillgängliga via perception eller instrument utan endast via behandling av dess semiotiska representationer. Å ena sidan måste eleverna kunna skilja objektet från den semiotiska representationen men å andra sidan är de semiotiska representationerna de enda ingångarna till ämnet vilket innebär problem.

> The crucial problem of mathematics comprehension for learners, at each stage of the curriculum, arises from the cognitive conflict between these two opposite requirements: *how can they distinguish the represented object from the semiotic representation used if they cannot get access to the mathematical object apart from the semiotic representations*? And that manifests itself in the fact that the ability to change from one representation system to another is very often the critical threshold for progress in learning and for problem solving (Duval, 2006, s.107).

En svårighet för eleverna är enligt Duval (2006) matematikens stora variation av semiotiska representationer. Vissa matematiska processer kan utföras inom en representation men många kräver att flera representationer kan behandlas samtidigt där dessa växlar mellan förgrund och bakgrund. Duval (2006) skiljer i matematiken mellan fyra typer av semiotiska system som han benämner representationsregister. Representationsregistret är mer avgörande än det matematiska objektet eftersom registret begränsar vilka egenskaper som kan urskiljas. De fyra registren innefattar inte alla semiotiska system utan endast de som tillåter en transformering av representationer. Transformering kan i sin tur innebära två olika saker; *treatment* eller *conversion* (Duval, 2006). *Treatment* är en transformation inom samma register, till exempel utföra en beräkning eller lösa en ekvation. *Conversion* innebär att gå från ett register till ett annat exempelvis från ett algebraiskt uttryck till en graf eller från att beskriva en relation med vardagligt språk till att beteckna den med symboler. *Conversion* är en mer komplex transformation eftersom den kräver att objektet känns igen i två olika representationer som ofta inte har något uppenbart gemensamt. Duval (2006) menar att undersökningar för ofta riktar in sig på vilken representation som är bäst lämpad för att eleverna ska förstå ett matematiskt begrepp vilket i sin tur leder till en ytlig förståelse hos eleverna. Om undervisningen begränsas inom en representation kommer eleverna få problem när de möter begreppet i en annan representation varför det mest centrala för lärandet är att kunna växla representationsform (Duval, 2006).

Talls teoriutveckling på 2000-talet

Procept-begreppet har av Tall senare integrerats i en mer omfattande teori vilken han kallar tre världar av matematik (Tall et al., 2000; Tall, 2004a; Tall, 2004b; Tall, 2008). Grundtankarna bakom teorin publicerades första gången 2002 (Tall, 2004a) och beskriver hur den kognitiva utvecklingen i matematik pågår i tre skilda världar vilka interagerar med varandra. Teorin kan antingen appliceras på en individs totala matematiska utveckling eller på utvecklingen av ett specifikt matematiskt begrepp (Hähkiöniemi, 2006a).

Den första världen, den *förkroppsligade* (Tall, 2004a, 2008), grundar sig på våra perceptioner och innefattar vårt tänkande om sådant vi först kan uppfatta och känna för att sedan kunna föreställa oss mentalt. Utvecklingen i denna värld sker via reflektion och ett alltmer utvecklat språk. Vi kan till exempel med hjälp av det matematiska språket föreställa oss en perfekt cirkel eller en rät linje även om dessa inte låter sig konstrueras. Den andra världen är den *symboliska* (Tall, 2004a, 2008) och innefattar de symboler som används inom aritmetik, algebra och analys etcetera. Denna värld växer fram ur den förkroppsligade och utvecklingen går från handling till begreppsuppfattning. Exempelvis lär vi oss först att räkna (handling, något vi gör) för att sedan utveckla talbegreppet (begrepp, något vi kan tänka om). I princip har Tall (2004a, 2008) här bevarat den uppfattning som beskrevs tidigare angående procept (världen kallas ibland för den proceptuella av Tall). Den tredje och sista världen är den *formella* (Tall, 2004a, 2008) vilken grundar sig på axiom, teorem, definitioner och bevis där det skrivna matematiska beviset utgör det sista steget i det matematiska tänkandet. Den formella världen sluter teorin om de tre världarna då formalism utgår från erfarenheter i de två andra världarna men också ger upphov till mer avancerade erfarenheter, vilket i sin tur skapar möjligheter att uppfatta alltmer avancerad matematik (Tall, 2008).

De tre världarnas konsekvenser för undervisningen inom derivata

Tall (2008) diskuterar hur derivata introduceras inom matematiken och menar att detta har stor betydelse för den framtida förståelsen. Tall vill att eleverna ges möjlighet att skapa en inre bild av hur en graf, även om den har en lutning som varierar, lokalt kan ses som en rät linje. Talls (2008) modell att åstadkomma detta visuellt är genom att kraftigt zooma in grafen under ett litet intervall och på så sätt uppfatta den som rät. När denna inre bild är skapad kan eleven följa en graf med lutningen i fokus och se hur denna kontinuerligt förändras. Detta är en förändringsprocess, vilken i sin tur kan ses som en funktion, och kan åskådliggöras med en ny graf, derivatans graf. Detta tillvägagångssätt följer enligt Tall (2008) utvecklingen enligt de tre världarna på så sätt att lutningen först kan förkroppsligas och visualiseras vilket ger upphov till en funktion som nu kan beräknas numeriskt eller symboliskt. I samband med detta uppstår behovet av ett gränsvärde och hela processen blir mer naturlig än när den istället utförs i omvänd ordning (Tall, 2008).

Hähkiöniemi (2006a) menar att det existerar två etablerade synsätt på hur elever lär sig derivata. Det ena är att abstrahera begreppet genom stegen process – objekt vilket kan ske genom att beräkna värdet på olika derivator. Detta tillvägagångssätt kan antingen liknas vid Talls symboliska värld eller vid Sfards (1991), Zandiehs (2000) och APOS (Dubinsky & Mc Donald, 2001) teorier. Det andra är att arbeta med begreppet som ett objekt vilket till exempel kan innebära att erhålla en funktions derivata från funktionens graf. Detta svarar i sin tur enligt Hähkiöniemi (2006a) mot Talls förkroppsligade värld. Hähkiöniemi (2006a) utgår i sin avhandling från Talls teori om de tre världarna och fokuserar på vilka representationsformer eleverna använder i sitt tänkande kring derivata samt i vilket syfte och hur de gör detta. Resultatet av Hähkiöniemis (2006a) kvalitativa studie pekar på att behandlingen av derivata som ett objekt erbjuder eleverna många kraftfulla tankeredskap. Eleverna i studien använde termer som ökning, branthet och grafens tangent när de tänkte på derivata kvalitativt och inte utförde några beräkningar. Detta ackompanjerades med gester vilket var ett viktigt bidrag i tänkandet och via egna representationer erhöll eleverna en förståelse för begrepp som positiv/negativ derivata och maximum/minimum punkt. Hähkiöniemi (2006a) menar att resultatet av studien stöder uppfattningen om att undervisningen inom derivata bör ta sin utgångspunkt i derivata som ett objekt och med andra ord utgå från Talls förkroppsligade värld.

Derivata – ett sedan länge erkänt svårt begrepp för elever

De första publikationerna som rör elevers förståelse för derivata kan spåras till början av 1980-talet och en ofta inom området citerad artikel skrevs av Tall och Vinner (1981). I denna diskuteras hur elevers uppfattningar om matematiska begrepp gradvis utvecklas och ändrar karaktär.

> We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures (Tall & Vinner, 1981, s.152).

Förutom begreppet *concept image* (här översatt till begreppsbild) använder Tall och Vinner (1981) också begreppet *concept definition* (här översatt till begreppsdefinition) vilket innebär de ord med vilka ett begrepp definieras. Hos en individ är den formella definitionen av ett begrepp en del av begreppsbilden och definitionen överensstämmer inte alltid med individens övriga begreppsbild. Tall och Vinner (1981) exemplifierar med funktionsbegreppet som inledningsvis kanske definieras som en relation mellan två mängder, A och B, vilken ordnar exakt ett element i B till varje element i A. Om arbetet med funktioner därefter i princip enbart består av uppgifter där formler ska tillämpas kan emellertid den formella definitionen glömmas bort eftersom den har varit inaktiv. Begreppsbilden innefattar nu istället att funktioner likställs med att använda en formel och individen kan också ha varit lyckosam i den specifika kontexten. När den möter funktionsbegreppet i ett senare skede har den däremot svårt att förstå och i detta fall är det den tidigare undervisningen som skapat problemet.

Enligt Tall och Vinner (1981) existerar en potentiell kognitiv konflikt när en individs begreppsbild inte är koherent eller skiljer sig från den formella begreppsdefinitionen. Tall och Vinner (1981) fokuserar på begreppen gränsvärde och kontinuitet vilka är fundamentala inom området derivata och menar att dessa två är exempel på när individens begreppsbild ofta står i konflikt med den formella definitionen. Avvikelserna kan vara subtila, och för individen knappt märkbara, men de ger upphov till problem vid kontakt med den formella behandlingen. Potentiella kognitiva konflikter, där den egna begreppsbilden är koherent men strider mot den formella, utgör ett hinder för inlärningen om de inte aktualiseras. Detta eftersom individen då kan uppleva sig säker i sin tolkning av begreppet och anse den formella teorin som onödig och överflödig.

Orton (1983) genomförde en studie där han intervjuade 110 studenter angående deras förståelse för uppgifter relaterade till derivata och ändringskvot. Sammanlagt testades studenterna på 21 uppgifter och en utbredd missuppfattning kunde konstateras på många av dessa. Särskilt noterbart var att 39 studenter inte kunde beräkna ändringskvoten utifrån två givna punkter på en graf där förändringen dessutom var lätt att läsa av till ett i båda led. Vissa fel var också av algebraisk natur till exempel i form av inkorrekt lösta ekvationer och utelämnad mellanterm vid bruk av kvadreringsregeln. Ortons (1983) studie ger ingen djupare insikt i hur eleverna tänkte utan redovisar i princip bara lösningsfrekvensen. Han delar dock in de felaktiga svaren i tre olika kategorier och vissa typer av felaktiga svar tas upp som exempel. I samband med redovisningen av resultatet spekulerar Orton (1983) en del kring tänkbara orsaker till studenternas missuppfattningar och han anser att studien bör få implikationer för utformningen av kommande läroplaner och för framtida undervisningsmetoder. Vad gäller det senare beklagar Orton (1983) att vissa studenter introduceras till derivata som en samling regler och han trycker på vikten av olika representationsformer då han menar att arbetet med grafer är mycket viktigt för förståelsen av området. De svaga algebraiska kunskaperna hos studenterna bör enligt Orton (1983) medföra en introduktion av matematisk analys där algebra ges en mindre framträdande roll för att inte hindra förståelsen.

Resonemanget hos Tall och Vinner (1981), samt resultatet och analysen från Orton (1983), är nu 30 år gamla men fortfarande gångbara. Liknande slutsatser har dragits i flertalet senare studier. Jukić och Dahl konstaterar så sent som år 2012 att många elever snabbt glömmer sina kunskaper inom derivata då de är av procedurell karaktär och starkt förknippade med specifika rutiner utan begreppslig förankring. Jukić och Dahls (2012) studie ska dessutom ses i ljuset av att de intervjuade elever som frivilligt ställde upp och dessa uttryckte explicit att de behärskade området derivata. Jukić och Dahl (2012) frågar sig härmed lite kryptiskt vilka kunskaper de elever som avböjde att delta för att de inte kunde derivata hade. Att den begreppsliga förankringen saknas får konsekvenser för andra ämnen och Christensen och Thompson

(2012) noterar att studenter ofta saknar de matematiska verktygen som krävs inom fysikkurser. Deras preliminära resultat antyder att detta även gäller derivata då eleverna inom en kurs i flervariabelanalys hade svårt att begreppsligt förstå de matematiska uppgifter vilka var av liknande karaktär som de inom fysikkurserna.

Elevers förståelse för derivata i den grafiska representationen

Såväl Orton (1983) som Koirala (1997) föreslår en informell start på analyskurser där tolkning av grafer utgör en betydande del. Båda förespråkar också att inledningsvis arbeta med grafritande räknare för att på så sätt lägga fokus på att tolka derivata grafiskt, vilket de menar är av betydande vikt för de fortsatta studierna inom området. Effekten av att lösa uppgifter med hjälp av grafritande räknare undersöktes av Berry och Nyman (2003). De åtta studenter som ingick i studien blev presenterade för fyra grafer vilka representerade derivator. Uppgiften var att i grupper om fyra diskutera hur graferna till antiderivatorna såg ut. Därefter skulle en person i gruppen fysiskt förflytta sig framför en rörelsedetektor på så sätt att antiderivatornas grafer erhölls i en grafritande räknare som var kopplad till detektorn. Berry och Nyman (2003) menar att nästan alla studenter klarar att beräkna motsvarande uppgifter om funktionerna ges i algebraisk form men att denna uppgiftsformulering krävde en *känsla* för hur graferna och därmed förflyttningarna skulle se ut. Studenterna i studien klarade efter ett par försök uppgifterna relativt väl men upplevde att den grafiska processen var svårare än motsvarande algebraiska. Berry och Nyman (2003) hävdar att denna typ av uppgifter bör ingå i analyskurser och då särskilt inledningsvis så att studenterna får möjlighet att utveckla sin förståelse för grafers egenskaper. De menar att så skedde i detta fall och att övningen gav goda förutsättningar för diskussioner och reflektioner. Om studenter kan lära sig skissa grafen till antiderivatan utvecklas enligt Berry och Nyman (2003) deras begreppsliga förståelse men de påpekar samtidigt att en sådan process tar tid varför lärare inte ska stressa mot derivatans formella, symboliska definition.

Noterbart i studien av Berry och Nyman (2003) var att den mest framgångsrika eleven inom algebraiska resonemang var relativt tyst genom hela den grafiska processen. Haciomeroglu et al. (2010) analyserade utifrån Krutetskiis (1976) modell tre universitetsstudenters sätt att tänka i samband med uppgifter som gick ut på att rita grafen till antiderivatan det vill säga samma typ av uppgift som i studien av Berry och Nyman (2003). Krutetskii (1976) delar in matematisk begåvning i tre olika typer vilka han beskriver som analytisk, geometrisk och harmonisk (se tabell 2).

Tabell 2. Olika typer av matematisk begåvning (Krutetskii, 1976, s.318).

	Analytisk	Geometrisk	Harmonisk (a)	Harmonisk (b)
Verbal-logisk komponent	Mycket stark	Över genomsnittet	Stark	Stark
Visuell-bildlig komponent	Svag	Mycket stark	Stark	Stark
Korrelation mellan komponenter	Verbal-logisk totalt dominerande	Visuell-bildlig totalt dominerande	Jämvikt	Jämvikt
Användning av visuellt stöd vid problemlösning	Kan inte och känner inget behov	Kan använda och känner ett behov	Kan använda men gör det inte	Kan använda och gör det

Den analytiska typen har en mycket stark språklig-logisk sida men däremot en svag visuell-bildlig och spatial förmåga. Hos den geometriska typen är förhållandena i princip omvända medan den harmoniska typen är stark på alla områden. Den analytiska typen kan inte använda visuella bilder vid problemlösning och känner heller inget behov av det. För den geometriska typen är det tvärtom medan det hos den harmoniska typen råder en balans mellan de två sätten att tänka och de kan kombineras (notera att den harmoniska typen delas i två undergrupper).

I studien som genomfördes av Haciomeroglu et al. (2010) var endast grafen till derivatan känd för studenterna. Uttagningen av medverkande studenter skedde i samråd med ordinarie lärare då Haciomeroglu et al. (2010) i undersökningen önskade arbeta med studenter vilka hade utvecklad matematisk förmåga och dessutom verbala kvaliteter. En av eleverna arbetade konsekvent analytiskt enligt mönstret att via den kända grafen ta fram det algebraiska uttrycket, vilket sedan integrerades och därefter ritades i grafisk form. En av de andra eleverna brydde sig inte om funktionsuttrycket utan ritade antiderivatans graf direkt med hjälp av derivatans graf och representerade alltså den geometriska typen. Hos den tredje eleven låg också tonvikten på det visuella, men bitvis kombinerades de två sätten att tänka. Slutsatsen av studien är att ett visuellt tänkande spelar en betydande roll vilket ett analytiskt tänkande inte kan ersätta. Samtidigt är det visuella tänkandet ingen patentlösning utan det kräver på motsvarande sätt stöd av det analytiska. När studenterna i studien endast använde ett sätt att tänka fick de förr eller senare ett antal problem och författarna menar att en undervisning bör introducera olika representationsformer för eleverna. Elever tänker på olika sätt och att de konstruerar olika representationer i interaktion med varandra, för att erhålla en djupare förståelse, är en möjlighet till att förena olika sätt att tänka (Haciomeroglu et al., 2010).

Aspinwall, Shaw och Presmeg (1997) beskriver hur det efterfrågats en större betoning på det visuella tänkandet inom undervisningen i matematisk analys men menar samtidigt att detta inte alltid är till fördel. Elever som har en stark visuell bild har mycket svårt att släppa denna även om de inser att den på något sätt är felaktig. Aspinwall et al. (1997) undersökte en universitetsstudents sätt att tänka vid en uppgift som gick ut på att utifrån en graf i form av en parabel rita derivatans graf. Studenten ritade först en tredjegradsfunktion med motiveringen att lutningen på parabeln gick mot oändligheten. Efter att han uppmärksammats på att det kunde vara en andragradsfunktion kom han på andra tankar och menade att derivatan måste vara en rät linje eftersom detta erhålls som resultat vid en algebraisk derivering. Han släppte dock inte uppfattningen om parabelns lutning och först några dagar senare kunde han förklara att de grafer som representerar andragradsfunktioner *ser ut* att vara begränsade av asymptoter på grund av hur de i regel ritas. Aspinwall et al. (1997) motsätter sig inte visuella bilder men pekar på vikten av att vara uppmärksam på hur de formas och att läraren här har en viktig roll då de i vissa fall kan göra mer skada än nytta.

Asiala et al. (1997) applicerade i sin studie APOS teorin i ett försök att förstå vilka mentala konstruktioner de studerande har i samband med inlärningen av derivata i den grafiska representationen. Uppgiften som undersökningen baserades på utgjordes av en graf vilken endast benämndes $f(x)$. Till grafen var en tangent dragen i den angivna punkten $(5{,}4)$ och det framgick även av bilden att tangenten skar y-axeln i värdet 2. Utifrån denna information ombads studenterna bestämma $f(5)$ respektive $f'(5)$. Det korrekta svaret på fråga ett stod redan i uppgiften då punkten $(5{,}4)$ var given och svaret på fråga två erhölls genom att beräkna tangentens lutning med hjälp av en differenskvot (givet i uppgiften att tangenten gick genom punkten $(0{,}2)$ och $(5{,}4)$). Vid analys av studenternas svar gällande den första uppgiften framkom att vissa var på ett processtadium (process) vid grafisk tolkning av funktioner och kunde via detta lösa uppgiften genom att kombinera olika information. Andra var på handlingsstadiet (action) vilket till exempel visade sig genom onödiga omvägar vid bestämning av $f(5)$ (först ta fram tangentens ekvation och via denna bestämma $f(5)$). Slutligen hade några ingen tolkningsförmåga alls vad gällde grafen utan efterfrågade ett funktionsuttryck för att lösa uppgiften. Vid den andra uppgiften måste studenten förstå att $f'(5)$ är detsamma som tangentens lutning i punkten $x = 5$ och också kunna lösa uppgiften med bara grafisk information. Uppfattningar som framkom här var till exempel att tangentens ekvation var densamma som ursprungsfunktionen eller att den var detsamma som ursprungsfunktionens derivata och alltså kunde ge derivatans värde i en godtycklig punkt på grafen. Asiala et al. (1997) delar in studenterna i undersökningen i tre nivåer efter visad förståelse och menar att en utebliven sådan i mångt och mycket härrör från att inte ha nått processtadiet (process) vad gäller funktionsbegreppet i grafisk form.

Çetin (2009) undersökte studenters förmåga att bestämma grafen till derivatan med utgångspunkt i situationer i vardagslivet. Så länge sambandet var linjärt var studenterna lyckosamma men när graferna var aningen mer komplicerade fick många problem. Çetin (2009) konstaterar likt flera andra att studenterna var duktiga på att derivera funktioner algebraiskt men föreslår att undervisningen inte bara bör centreras runt detta utan även innefatta uppgifter och resonemang som härrör från tillämpad naturvetenskap eller vardagsliv för att öka förståelsen, det sista en åsikt som delas av bland annat Koirala (1997).

Att omsätta resultaten i undervisningen

Genomgången av tidigare forskningsresultat ger många exempel på hur elever uppfattar begreppet derivata. Samtidigt är det en relativt entydig bild som målas upp. Det som förenar beskrivningarna är betoningen på att elever behärskar enskilda procedurer och att dessa främst är relaterade till derivatans algebraiska representationsform; något som för övrigt förefaller vara konstant över tid (se t.ex. Orton, 1983; Jukić & Dahl, 2012). Även behovet av att kunna förstå innebörden av derivata i flera representationsformer uttrycks som avgörande i flertalet tidigare studier (se t.ex. Orton, 1983; Koirala, 1997; Zandieh, 2000; Berry & Nyman, 2003; Haciomeroglu et al., 2010). Den representationsform som efterlyses mest frekvent är den grafiska. Detta uttalade behov leder till denna studies lärandeobjekt men även i den grafiska representationsformen förekommer ett flertal olika uppfattningar hos elever (se t.ex. Asiala et al., 1997; Aspinwall et al., 1997). Valet av lärandeobjekt är med andra ord inte lösningen i sig utan frågan för studien är hur lärandeobjektet ska kunna urskiljas av eleverna. De teorier om lärande i matematik som presenterats ger implikationer för undervisningen men det är svårt att tolka dem i något annat än ett makroskopiskt perspektiv. Denna licentiatuppsats försöker istället beskriva vad som möjliggör ett urskiljande av lärandeobjektet i ett mikro-perspektiv.

Kapitel 4: Learning study som forskningsansats

Inom en learning study ger tidigare forskning värdefulla insikter när fokus flyttas från att i första hand analysera elevers förståelse till att försöka identifiera vad som är kritiskt att urskilja och pröva hur detta kan manifesteras i undervisningen. I detta kapitel ges först en bakgrund och en motivering till metodvalet. Detta följs av en jämförelse med liknande ansatser. Slutligen diskuteras frågor som rör validitet, generaliserbarhet och forskarens roll i processen.

Varför learning study?

Den svenska skolan utsattes för ett övergripande reformarbete i slutet av 1900-talet och början av 2000-talet. Gemensamt för de flesta av dessa reformer var avsaknad av vetenskaplig grund (Stenlås, 2009) samt inriktning mot praktiska och organisatoriska frågor (Åman, 2011). I takt med sjunkande svenska elevresultat i internationella jämförelser började dock fokus förskjutas mot andra faktorer och då i synnerhet undervisningens utformning vilken också tilldelades brett medialt utrymme. Detta särskilt i samband med att John Hattie (2009) presenterade sin metaanalys av vilka faktorer som ligger bakom goda studieresultat. En rimlig fråga att ställa är vad som svarar mot en god undervisning i den meningen att den genererar hög måluppfyllelse hos eleverna inte bara på kort sikt utan också i ett långt perspektiv vilket är något som studerats med hjälp av learning study (Holmqvist, Gustavsson & Wernberg, 2007).

Ofta diskuteras undervisningen i termer av gruppstorlek, arbetsformer och elevernas delaktighet. Resultatet av Hatties (2009) analys pekar i andra riktningar vad gäller hög måluppfyllelse och komprimerat så genereras det bästa resultatet när läraren har förmågan att se inlärningen via elevens perspektiv. Gruppstorlekar, tekniska hjälpmedel, arbetsform med mera är enligt Hattie (2009) inte att förkasta men de är av sekundärt intresse. En learning study innehåller flertalet av de faktorer som av Hattie (2009) lyfts fram som centrala för elevers måluppfyllelse. Ansatsen fokuserar på vad som behöver synliggöras i undervisningen för den aktuella elevgruppen och på vad detta får för konsekvenser för innehållets behandling, vilket innebär ett tydligt elevperspektiv. Att undervisning utgår från kritiska aspekter är inte unikt i sig utan det som utmärker learning study är på vilket sätt och med vilken systematik det genomförs. En stor del av den undervisning som normalt förekommer innebär en statisk förmedling av ett ämnesinnehåll och eleverna är att betrakta som objekt i sammanhanget (Pettersson, 2011). Inom learning study är behandlingen av innehållet dynamiskt (Wernberg, 2009) och det ändras successivt genom studien med elevernas förståelse och utveckling som utgångspunkt.

Från lesson study till learning study

I Japan har lärarrollen, till skillnad mot i många andra västländer, ändrats markant de senaste 50 åren (Stigler & Hiebert, 1999). I princip alla japanska skolor för yngre elever är engagerade i något som benämns kounaikenshuu vilket består i ett antal aktiviteter som tillsammans ska borga för en ständig utveckling av skolan. Mycket vanligt inom kounaikenshuu är lesson study (Stigler & Hiebert, 1999). En lesson study genomförs i samarbete mellan en grupp lärare och innehåller ett antal steg i syfte att utveckla undervisningen. Utgångspunkten är ett problem som kan vara av specifik karaktär, till exempel lära eleverna förstå ett avgränsat ämnesinnehåll, eller av allmän karaktär till exempel öka elevernas motivation för ett ämne i stort. Lewis (2000) beskriver hur valet av problem ofta sker efter en identifikation av ett område där glappet mellan konstaterade och önskvärda kunskaper hos eleverna är som störst. Vilket problem som väljs avgörs ofta av lärarna själva men ibland kan även förslag komma från högre instanser om det exempelvis konstateras vara av nationellt intresse (Stigler & Hiebert, 1999). När problemet är valt sker en cyklisk process vilken grovt har följande mönster:

1. Planering av en lektion utifrån det formulerade problemet.
2. Genomförande av lektionen.
3. Utvärdering av lektionen och dess resultat vilket fungerar som underlag för justeringar av den initiala planeringen.
4. Genomförande av den justerade lektionen.
5. Utvärdering av den justerade lektionen.
6. Dokumentation av resultatet.

Vid planeringen av den inledande lektionen tas ofta hjälp av liknande redan genomförda lesson studies som finns dokumenterade. Målet med planeringen är inte bara en bra lektion utan också att erhålla kunskap om varför och på vilket sätt lektionen bidrar till förståelse hos eleverna (Stigler & Hiebert, 1999). En av lärarna är ansvarig för genomförandet av lektionen medan de övriga observerar. Vanligt förekommande är att lektionen videofilmas och att observationerna löpande noteras skriftligt (Lewis, 2000). Vid utvärderingen av lektionen deltar samtliga lärare och beskriver i kritiska ordalag hur lektionen fortlöpt och vad som eventuellt inte fungerade. Det är här tydligt fokus på lektionen som sådan och då denna ses som en produkt av ett grupparbete möjliggör detta en kritisk granskning utan att en enskild lärare står i blickfånget. När lektionen sedan åter genomförs med bestämda justeringar är ofta stora delar av övrig skolpersonal med och observerar. Alla deltar därefter i ett möte där lektionen och dess innehåll och utfall diskuteras ur flera olika aspekter (Stigler & Hiebert, 1999). Resultatet av en lesson study dokumenteras och modellen är enligt Hiebert, Gallimore och Stigler (2002) ett bra exempel på vad som kan svara mot en professionell kunskapsbas som kan göras allmän, sparas och utvecklas. Den bygger också på praktisk kunskap snarare än akademisk, vilket enligt Hiebert et al. (2002) är en fördel då lärare och forskare i regel har olika syften och den kunskap som produceras inom akademin ofta är svår för lärare att använda i sin praktik.

Learning study har en tydlig relation till lesson study då ansatsen kan ses som en utveckling, eller modifiering, av lesson study och det praktiska upplägget är likartat. Exempelvis delas stegen att ha ett tydligt lärandemål, arbeta i grupp med en undervisande lärare och resterande observerande. Vidare planera, genomföra och revidera lektionen utifrån lärandemålet och i samband med detta ta hjälp av tidigare forskning och erfarenheter. Den stora skillnaden är den teoretiska grunden eller kanske ibland avsaknaden av den inom lesson study. Pang och Lo (2012) menar att en teori om lärande, i deras fall variationsteorin, är ett kraftfullt redskap som stärker möjligheterna för lärarna att lyckas då den fungerar som en guide i designen av lektioner och efterföljande analyser. Hiebert et al. (2002) pekade på lesson study som en modell för att skapa en kunskapsbas förankrad i praktiken men tio år senare menar Elliot (2012) att learning study svarar än bättre mot behovet då lesson study, även då det medverkat till spridd kunskap om undervisning, inte vilar på en enhetlig teoretisk grund. Följden kan bli att lesson study vid implementeringen i andra länder och kulturer saknar relation till de uttalade pedagogiska målen. Detta exemplifieras i en studie av Fernandez, Cannon och Chokshi (2003) i vilken de analyserade införandet av lesson study i USA. Projektet var ett samarbete mellan amerikanska och japanska lärare där de senare fungerade som stöd och Fernandez et al. (2003) konstaterar att de amerikanska lärarna hade svårt att behålla forskarperspektivet vid arbetet med lektionerna.

> The American teachers selected as their lesson study goal 'fostering students' problem solving and responsibility for learning.' However, as they worked on their lessons, this goal was noticeably absent from their conversations. While it is likely that the 5th and 6th grade group might have had this goal in the back of their minds, throughout 15 hours of conversations about their lesson this goal was never discussed in any explicit manner. Moreover, it certainly never served to generate any hypotheses for the teachers to test (Fernandez et al., 2003, s.174).

Att det inom learning study appliceras en teori får också konsekvenser för vad som kan åstadkommas och för vilken kunskap som kan produceras. Medan Carlgren (2012) beskriver lesson study som en, i första hand, modell för lärares professionella utveckling har learning study å sin sida förutsättningar att generera teoretiska kunskaper om de specifika lärandeobjekten. En lesson study är förvisso också i någon mening teorigenererande men denna kunskap är, till skillnad från den inom learning study, ofta tyst och outtalad. Resultatet av en lesson study beskriver utformningen av en lektion. En beskrivning vilken är frukten av lärarnas sätt att genomföra och studera undervisningen. Att denna lektion kan implementeras i en annan kultur där en annan syn på undervisning råder, kanske framförallt hos eleverna, är inte självklart medan resultatet av en learning study i form av vad som måste synliggöras i undervisningen, lättare kan tas som utgångspunkt då detta inte på samma sätt är beroende av kulturella betingelser.

Vid betraktandet av det praktiska genomförandet verkar såväl learning study som lesson study ligga nära den beskrivning av aktionsforskning som görs av exempelvis Cohen, Manion och Morrison (2011). Begreppet aktionsforskning innehåller enligt Cohen et al. (2011) en mängd olika metoder och kan genomföras av olika anledningar men gemensamt är att problemen formuleras i den lokala praktiken och syftet är att utveckla densamma. Praktikutveckling är dock något som learning study, på grund av dess applicering av en teori om lärande, inte ser som sitt enda mål utan modellen har också en annan dimension vilken framkommer i citatet av Elliot (2012) nedan.

> The transformation in Hong Kong of lesson study into a form of "learning study" structured by variation theory has challenged a currently widespread western assumption that action research is about the development of practice rather than the testing and development of theory (Elliot, 2012, s.115).

Elliot (2012) syftar på att pröva och utveckla variationsteorin vilket i flera av de inledande studierna inom learning study var ett uttalat mål. Learning study var inledningsvis synonymt med variationsteori men i takt med att modellen utvecklats har dock frågan om vilken typ av lärandeteori som används diskuterats. Det är inte fastlagt att detta ska vara variationsteori och Elliot (2012) diskuterar hur han önskar se en utveckling av learning study där variationsteorin förenas med andra teorier.

Learning studys relation till design experiment

Learning studys relation till design experiment kan, likt relationen till lesson study, verka nära men vid närmare granskning finns några avgörande skillnader. Design experiment är liksom learning study en relativt ung forskningsansats och namnet myntades i början på 1990-talet. Brown (1992) författade en av de första artiklarna med design experiment i titeln och hon beskriver i denna behovet av att placera in studiet av lärande i en naturlig kontext. Cohen et al. (2011) diskuterar benämningen design experiment och menar att vi bör fokusera på design snarare än experiment då metoden befinner sig väldigt långt från det klassiska experimentet där betydelsen av en variabel undersöks åt gången och stäms av mot kontrollgrupper. Design experiment är, som Brown (1992) beskriver, en studie som genomförs i naturliga förutsättningar och likheten med experiment ligger i att det innehåller en genomtänkt intervention (Cohen et al., 2011). Cobb et al. (2003) karaktäriserar design experiment via fem typiska drag vilka i stor utsträckning även kan användas för att beskriva learning study. 1. Målet är att utveckla teorier om lärande. 2. Metoden är starkt relaterad till interventioner. 3. Designen görs utifrån hypoteser vilka i sin tur stammar från flera typer av analyser. 4. Hypoteserna omformuleras efter reflektion över genomförandet det vill säga designen är iterativ. 5. De teorier som utvecklas är till skillnad mot mer allmänna pedagogiska teorier domänspecifika och direkt relaterade till den aktuella designen.

Design experiment utgår från tidigare forskning och syftar till att förbättra undervisningsdesignen (Collins, Joseph & Bielaczyz, 2004; Cobb et al., 2003) vilket även är ett ofta uttalat mål för learning study. Collins et.al (2004) hävdade för 10 år sedan att design experiment är här för att stanna men att metoden samtidigt genererar så mycket data att denna skulle kunna delas och analyseras av andra forskare än de som ingått i studien. Den stora datamängden förklaras av Cobb et al. (2003) då de menar att ett idealt design experiment resulterar i en förståelse för lärande beskrivet i form av en ekologi. Detta kan ses som ett komplext, interagerande system bestående av multipla element av olika typ och på olika nivåer.

Argumenten för design experiment är framförallt dess placering i den naturliga kontexten. Brown (1992) berättar om sin övergång till klassrumsforskning eftersom resultaten från hennes experiment i rena laboratoriemiljöer var mycket svåra att placera in i ett naturligt sammanhang. Pring (2004) för ett liknande resonemang och poängterar upprepade gånger att transaktionerna mellan lärare och elev inte kan ses som isolerade företeelser utan måste relateras till en undervisningspraktik. Praktiken definierar Pring (2004) som en samling aktiviteter med ett gemensamt syfte och gemensamma värderingar vilka tillsammans ger den enskilda aktiviteten en mening. Det främsta argumentet för design experiment leder paradoxalt nog också till det främsta emot. I ett naturligt klassrum inverkar många variabler och när många av dessa tas i beaktande genereras stora mängder data. Shavelson, Phillips, Towne och Feuer (2003) frågar sig om de narrativ som design experiment ofta vilar på kan upprätthålla validiteten och om det inte finns andra möjliga tolkningar än den som framställs i det aktuella fallet. Shavelson et al. (2003) menar att validitetsfrågan var särskilt olycklig för design experiment i början på 2000-talet då trenden för vad som ansågs som högklassig forskning inom utbildningsvetenskap gick alltmer mot det klassiska experimentet. De föredrar å ena sidan experiment men menar samtidigt att även design experiment har sin plats i forskningen och att forskningsfrågorna är det som bör avgöra valet av metod. De efterfrågar dock en integration av design experiment och andra metoder i syfte att stärka validiteten.

Learning study har mycket gemensamt med det som skrivits om design experiment ovan men med utgångspunkt i syftet och forskningsfrågorna för denna licentiatuppsats finns några skillnader vilka talar till learning studys fördel i valet av forskningsansats. Cobb et al. (2003) skriver angående design experiment att komplexiteten kan bli alltför stor och att det därför kan finnas skäl att fokusera på några variabler och låta andra finnas i bakgrunden. I denna studie ligger fokus på hur det matematiska innehållet behandlas i undervisningen och vilka konsekvenser det får för elevernas lärande. En learning study innebär för eleverna bara en intervention under en eller ett par lektioner till skillnad från design experiment som ofta sträcker sig över en lång tid. Enstaka lektioner kan verka som en för liten tid för att kunna påverka den matematiska utvecklingen, men samtidigt görs inom learning study inga anspråk på att generera ett recept för allmän matematisk utveckling. Istället fokuserar studierna på att lyfta fram vad som är kritiskt inom ett mycket begränsat matematiskt innehåll och hur behandlingen av detta, med grund i en teori om lärande, påverkat elevernas möjlighet till urskiljning. En longitudinell studie som kan ske inom ramen för design experiment kommer i detta fall inte med precision kunna svara på frågor om det specifika lärandeobjektet medan det mikro-perspektiv som tas med en learning study här erbjuder bättre förutsättningar. Inom learning study studeras subtila skillnader i innehållets behandling och Kullberg, Runesson och Mårtensson (2013) beskriver till exempel hur en liten skillnad i hanteringen av en och samma uppgift leder till olika möjligheter till lärande hos eleverna.

Validitet och generaliserbarhet

Cohen et al. (2011) beskriver validitetsfrågan som central i alla typer av forskning. Samtidigt menar de att den har gått från att enbart bedöma huruvida ett instrument mäter det som är avsett att mäta till att ges en vidare förklaring, exempelvis djupet och omfattningen av de data som inhämtats. Att uppnå full validitet är inte möjligt då kvantitativ forskning innefattar ett inbyggt mätfel och kvalitativ forskning är behäftad med en subjektivitet hos respondenterna vad gäller åsikter, attityder och perspektiv. Således handlar det om att minimera invaliditeten och maximera validiteten (Cohen et al., 2011).

Shadish, Cook och Campbell (2002) relaterar begreppet validitet till sanningshalten i de kunskapsanspråk som görs. Om validiteten ska anses god har anspråken stöd av empiriska resultat men också överensstämmelsen med teorin och tidigare forskning är av betydelse. Den learning study som genomfördes inom ramen för denna licentiatuppsats utgick från tidigare forskning och resultaten härur bekräftades i stor utsträckning i de intervjuer och tester som genomfördes. Kunskapsanspråket ligger sedan i att identifiera vilka aspekter som är kritiska för att förstå ett matematiskt avsnitt och på vad som bör synliggöras i undervisningen för att eleverna ska ges möjlighet att urskilja dessa kritiska aspekter. Undervisningsdesign och analys genomförs med utgångspunkt i variationsteorin och i någon mening påminner processen om det som Stiles (2009) kallar teoribyggande fallstudie. Stiles (2009) skiljer mellan kliniska och teoribyggande fallstudier där de senare, till skillnad mot de första, inte primärt syftar till att djupare förstå det aktuella fallet utan istället med dess hjälp strävar efter att ge en teoretisk beskrivning av mer generell karaktär. Ett centralt inslag är här det som Stiles (2009) benämner abduktion vilket innebär att teorin justeras och förfinas med utgångspunkt i de observationer som gjorts inom det aktuella fallet. Arbetsgången inom learning study följer ett liknande mönster där teoribildningen om lärandeobjektets beskaffenhet succesivt justeras för att till slut mynna ut i en beskrivning i vad som är kritiskt för elevernas lärande. Ett mått på teorins kvalitet blir då hur väl beskrivningarna överensstämmer med gjorda observationer, men också människors igenkännande är en springande punkt (Stiles, 2009).

En central validitetsfråga för learning study, och i synnerhet för variationsteorin, är huruvida det är skillnaden i innehållets behandling som ligger bakom överensstämmelsen mellan teori och empiri eller om det är andra parametrar som är avgörande. Learning study genomförs i klassrum under naturliga förutsättningar och därmed finns åtskilliga saker som kan påverka resultatet och då framförallt det faktum att det är olika elever och olika lärare. Samtidigt innebar det iterativa inslaget i den aktuella learning studyn inga omkastningar i lektionsorganisation och gällande lärarna var dessa likvärdiga i termer av erfarenhet och matematiska kunskaper. Det som varierade var innehållets behandling till exempel i form av att en grupp diskuterade grafer benämnda med gradtal medan nästa grupp möttes av grafer som saknade närmare specifikationer. Eleverna i de olika grupperna kan ha olika förutsättningar men det som studeras är framförallt kvalitativa skillnader i elevernas svar på för- och eftertest. Dessa hölls i direkt anslutning till lektionerna och krävde ett resonemang från eleverna varför designen av den undervisning de mött rimligtvis påverkar deras möjligheter att utforma detta.

De kritiska aspekterna mejslas fram med utgångspunkt i tidigare forskning och empiri från studien. En fråga för validiteten blir huruvida de verkligen är kritiska. Mätinstrumenten består av en pilotstudie med fyra elever, intervjuer med sex elever innan studiens genomförande, för-, eftertest samt fördröjt eftertest. Testen får i och med detta bära en tung börda vad gäller den analys som görs anspråk på. Newton och Burgess (2008) menar att mycket av den aktionsforskning som bedrivs av lärare lider av validitetsproblem och alltför ofta argumenterar för saker som inte kan beläggas. De exemplifierar med ett, enligt dem, skräckexempel där såväl test som urvalsgrupper inom ett aktionsforskningsprojekt var olika men ändå jämfördes resultaten vilket havererade validiteten. Testen som användes inom denna studie prövades på andra elevgrupper och diskussioner om utformningen fördes dels mellan lärare och dels i seminarieform inom akademin. Validiteten i testen kan inte därmed ristas i sten men vad som däremot kan slås fast är att de genomgått en granskning av den typ som Newton och Burgess (2008) så starkt efterlyser inom aktionsforskning.

För- och eftertesten innehöll en marginell olikhet vilket var en medveten konstruktion i syfte att undvika att eleverna kunde upprepa sina svar enligt ett kopieringsförfarande. Resultaten kommer dock inte vara definitiva och som Kullberg (2010) påpekar kan de kritiska aspekterna vara olika för olika elevgrupper. Samtidigt kan konstateras att tidigare forskning om elevers förståelse om derivata är relativt koherent över tid och länder varför de kritiska aspekterna också kan antas ha bärighet utöver de undersökta klasserna. Urvalet i den learning study som genomfördes inom ramen för denna licentiatuppsats bestod av fyra gymnasieprogram med sammanlagt 68 elever. Vilken förståelse och vilka kunskaper dessa elever uppvisade ställdes i relation till den genomförda undervisningen och de variationsmönster denna innehållit. Även om vi antar att resultaten i studien är valida kan generaliserbarheten, och därmed applicerbarheten, på andra elever diskuteras. Ewers och Wu (2006) menar att det finns ett antal konstituerande regler för hur undervisning går till varför klassrum, oavsett placering i världen, uppvisar påtagliga likheter vilket leder till den typ av generalisering som Larsson (2009) kallar kontextlikhet. Om betingelserna i de klassrum som beskrivs inom uppsatsens learning study liknar de i andra klassrum kan vi anta att resultaten är gångbara även där. Här påpekar Larsson (2009) att det ligger på läsaren snarare än på författaren, det vill säga forskaren, att avgöra kontextlikheten. Forskarens roll är att beskriva och kommunicera kontexten varefter läsaren bedömer om den egna kontexten är att betrakta som liknande. Att generalisera via kontextlikhet är dock inte helt oproblematiskt då likheten inte är lätt att avgöra och dessutom är det ingen garanti att människor agerar på samma sätt bara för att kontexten är överensstämmande. Det kan till och med tänkas att samma person agerar olika i samma kontext vid olika tillfällen (Larsson, 2009).

Forskarens roll i processen

Larsson (2009) menar att kvalitativa studier ibland avsäger sig frågor om generalisering vilket är mycket märkligt då värdet av studierna i och med detta reduceras till i princip noll. Den learning study som beskrivs i kommande kapitel leddes av en forskare som samtidigt var kollega med de lärare som genomförde undervisningen under forskningslektionerna. I kraft av forskarrollen och av att vara initiativtagare till studien fick forskaren en framskjuten roll när det gäller design och genomförande. Detta förfarande kan ställas mot att genomföra en learning study utan inblandning av forskare och frågan är vilket alternativ som är att föredra. För att återknyta till Newton och Burgess (2008) menar de att aktionsforskning ofta stöder sina resultat på lärares upplevelser utan att ta hänsyn till den egentliga effektiviteten. Med ledning av en forskare inom en learning study ökar sannolikheten för en vetenskaplig förankring i såväl design som analys och generaliseringsanspråken kan därmed också vara högre. En learning study ska fokusera innehållets behandling och en forskare bidrar sannolikt till att hålla detta fokus. Vid flera tillfällen inom den aktuella studien kom lärarna in på saker som inte var av relevans för den planerade studien. Ett kort inlägg från forskaren ledde dock tillbaka på spåret och processen kunde fortsätta. Ett argument mot inblandning av forskare kan vara att lärarnas kunskap hamnar i skuggan av forskarens föreställningar. Frågan är dock om inte detta eventuella problem är något som styrs mer av sociala faktorer i gruppen än av om en forskare deltar eller inte samt huruvida forskaren har en bakgrund i lärargruppen eller inom akademin.

Kapitel 5: Den empiriska studien

Ansökan till den forskarutbildning inom vars ram denna licentiatuppsats är skriven gjordes under hösten 2011. Då en antagning innebar att en learning study skulle komma att genomföras tillfrågades tre lärare i samband med ansökan om de önskade delta i en studie. Ett år senare startades processen som omfattade den empiriska studien och inledningsvis försågs lärarna med tre texter. Den första texten var en beskrivning av forskningsfältet matematikdidaktik (Niss, 2001) och fungerade som en övergripande introduktion till forskningsprocessen. Samtliga av de deltagande lärarna hade varit verksamma i skolpraktiken under många år men samtidigt var de inte uppdaterade inom det matematikdidaktiska fältet vad gällde dess utbredning och inriktning. En learning study kan genomföras i olika syften men den aktuella forskarutbildningen hade ämnesdidaktiskt fokus varför Niss (2001) översiktliga beskrivning av matematikdidaktik ansågs utgöra en god introduktion. Den andra texten var forskarskolans ansökan (Runesson, 2011) till Vetenskapsrådet vilken gav en orientering inom forskningsansatsen men också ett motiv till varför en learning study skulle genomföras. Den sista texten var en beskrivning av fenomenografi och variationsteori (Ryberg, manuskript) och avsåg introducera lärarna för den teori som skulle komma att genomsyra lektionsdesigner och analyser. Texterna lästes enskilt av lärarna och därefter genomfördes en halv dags möte mellan forskaren och lärarna där texternas innehåll diskuterades och lärarna hade möjlighet att ställa frågor om eventuella oklarheter. Vid tiden för detta möte var inte lärandeobjektet avgränsat till mer än att behandla derivata i den grafiska representationen och gemensamt togs då beslutet att beskriva det enligt:

- Relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata (direkt).
- Att eleverna utvecklar förmågan att, utifrån grafen till en funktion/derivata, kunna tolka och skissa, derivatans graf/funktionens graf (indirekt).

Beslutet togs efter en diskussion grundad i tre urvalskriterier. 1. Lärandeobjektet skulle ha uppmärksammats inom matematikdidaktisk forskning. 2. Lärandeobjektet skulle vara något som av lärarna ansågs som problematiskt för eleverna att urskilja. 3. Lärandeobjektet skulle vara något som genom urskiljning kunde underlätta lärandet inom derivata i en vidare mening. Det första kriteriet fanns med för att underlätta den kommande designen men också för att kunna erhålla ett perspektiv på resultatet. De två sista kriterierna var grundade i den metodologiska ansatsen. Learning study är en modell som belyser en del av en pågående undervisningssekvens, en del som lärarna uppfattar som särskilt problematisk att undervisa om. Den eller de lektioner där lärandeobjektet behandlas är således en del av en större helhet, men samtidigt också en del som kan vara avgörande för att förstå vad det är som är signifikant för att utveckla elevernas lärande. Forskaren kunde bekräfta att det formulerade lärandeobjektet uppfyllde det första kriteriet (se t.ex. Aspinwall et al. 1997; Ubuz, 2007; Haciomeroglu et al., 2010) och gruppen var överens om att det också uppfyllde de två sista. Lärandeobjektet ansågs dock vara för omfattande för en lektion á 60 minuter varför det beslöts att det skulle behandlas under 2 X 60 minuter.

Datainsamling

Det första empiriska materialet samlades in våren 2012 i samband med en pilotstudie som innefattade fyra elever. Eleverna gick på Naturvetenskapsprogrammet och tillhörde dåvarande årskurs 2 och skulle inte delta i den kommande learning studyn. Ett år senare, 1-2 veckor före forskningslektionernas genomförande, intervjuade forskaren två elever från varje deltagande grupp i huvudstudien för att undersöka hur elevernas uttryckta uppfattningar om derivata överensstämde med tidigare forskningsresultat. Med utgångspunkt i resultatet av pilotstudien, intervjuerna, lärarnas erfarenheter och tidigare forskningsresultat gjorde forskaren ett designutkast till de två första lektionerna. Därefter diskuterades och reviderades utkastet under två möten á två timmar tillsammans med lärarna. Studien genomfördes sedan enligt tabell 3.

Tabell 3. Studiens genomförande.

Punkt	Dag	Aktivitet
1	1	Förtest samt lektion 1 med Teknikprogrammet.
2	1	Analys av lektion 1 och förtestet. Revidering av planeringen för lektion 2 med Teknikprogrammet.
3	2	Lektion 2 med Teknikprogrammet samt eftertest.
4	2-6	Gemensam analys av de två lektionerna och eftertestet. Revidering av planeringen för kommande lektioner med Naturvetenskapsprogrammet.
5	7	Förtest samt lektion 1 med Naturvetenskapsprogrammet.
6	7	Analys och revidering enligt punkt 2.
7	8	Lektion 2 med Naturvetenskapsprogrammet samt eftertest.
8	8-11	Gemensam analys enligt punkt 4. Revidering av planeringen inför kommande lektioner med Samhällsvetenskapsprogrammet.
9	12	Förtest samt lektion 1 med Samhällsvetenskapsprogrammet.
10	12-13	Analys och revidering enligt punkt 2.
11	14	Lektion 2 med Samhällsvetenskapsprogrammet samt eftertest.
12	14-16	Gemensam analys enligt punkt 4.
13	56	Fördröjt eftertest med eleverna i de tre programmen.

Urval

I samarbeten mellan universitet och skola uppstår inte sällan konflikter då den mer teoretiskt inriktade forskaren ska arbeta tillsammans med de mer praktikorienterade lärarna. Adamson och Walker (2011) visar med ett reellt exempel på hur denna typ av konflikt kan utvecklas inom en learning study. I den learning study de refererar till delade lärarna till en början forskarens teoretiska ansats men i takt med att diskussionerna pågick gled de alltmer över i en förenklad syn på problemställningen och ett tänkt djup i studien övergick i betydligt ytligare resonemang och analyser. Det visade sig att det inte på något sätt var klart vid studiens början vem som var ansvarig för vad och hur deltagarna förväntades bidra. Exemplet pekar på vikten av att rollfördelningen är klar vid en learning studys början men också på betydelsen av ämnesteoretiska kunskaper. Lärarna hade inte själva klart för sig vad det innebar att kunna det som skulle läras ut vilket fick konsekvenser för studiens utfall (Adamson & Walker, 2011).

Den aktuella learning studyn genomfördes inom en av staten finansierad forskarutbildning för verksamma lärare (Utbildningsdepartementet, 2011). Syftet med utbildningen var att bygga upp skolans kunskapsbas och parallellt med studiens genomförande arbetade forskaren som gymnasielärare där det senare uppdraget innebar 20 % av arbetstiden. Forskaren var väl förtrogen med miljön och de anställda på den skola han arbetade vilket talade för att genomföra studien tillsammans med kollegor. Inledningsvis fanns funderingar på att genomföra studien på en annan skola, men fördelen av att ha en upprättad relation med de tre lärarna ansågs tala till den egna skolans fördel. Ytterligare en aspekt var vetskapen om de tre lärarnas utbildningsnivå och erfarenhet. Samtliga hade gedigna ämneskunskaper och dessutom lång erfarenhet av undervisning (se tabell 4).

Tabell 4. Medverkande lärares utbildning och erfarenhet.

	Examen	Undervisningserfarenhet
Lärare 1	Ämneslärare matematik och fysik	25 år
Lärare 2	Ämneslärare matematik och fysik	32 år
Lärare 3	Magisterexamen matematik, inriktning pedagogik	19 år

I och med valet av skola och lärare ansågs effekten av de potentiella problem som Adamson och Walker (2011) beskrev ovan vara minimerade. Att hitta lärare med adekvat utbildning och erfarenhet på en annan skola hade varit fullt möjligt men relationen och rollfördelningen vid design, genomförande och analys hade däremot varit en betydligt mer osäker faktor.

I studien ingick elever från Teknikprogrammet (TE), Naturvetenskapsprogrammet (NA), Samhällsvetenskapliga programmet (SP) samt elever från Idrott och ledarskapsprogrammet (IL). IL var ett lokalt utformat program vilket försvann i samband med införandet av Gy 11 (Skolverket, 2013). NA och TE läste programvis Matematik 3c enligt Gy 11 och SP/IL läste tillsammans Matematik C enligt LPf 94. Som framgår av tabell 5 var fördelningen mellan pojkar och flickor relativt jämn så när som på en något större andel flickor inom SP/IL på grund av fördelningen på SP. Inom TE och SP/IL fanns ingen elev som inte fullt ut behärskade det svenska språket medan detta för tre av eleverna på NA, om än i olika grad, ansågs vara en icke försumbar faktor i den ordinarie undervisningen. Då behandlingen av innehållet till största delen innebar arbete med grafer ansåg dock inte den ordinarie läraren att det var något som särskilt behövde tas i beaktande.

Tabell 5. Program, årskurs, antal elever och fördelning mellan pojkar och flickor.

Program	Årskurs	Antal	Pojkar	Flickor
Teknikprogrammet (TE)	2	26	12	14
Naturvetenskapsprogrammet (NA)	2	23	11	12
Samhällsvetenskapliga programmet (SP)	3	9	2	7
Idrott och ledarskapsprogrammet (IL)	3	10	5	5

Initialt innehöll designen endast elever från NA och TE. Cohen et al. (2011) beskriver ett antal olika möjligheter gällande urval av deltagare, eventuella kontrollgrupper etcetera och flera av dessa varianter diskuterades. NA och TE innehöll sammanlagt 49 elever och ett alternativ var att dela in dessa i det som Cohen et al. (2011) benämner *matched pairs* utifrån tidigare uppnådda resultat och sedan låta hälften av eleverna utgöra en kontrollgrupp. Detta skulle dock medföra att interventionen omfattade endast 25 elever vilka i sin tur skulle delas i grupper. Elevunderlaget ansågs här för litet och dessutom skulle designen innebära ett steg bort ifrån de naturliga förutsättningar som eftersträvas inom en learning study. Efter diskussioner mellan forskaren och lärarna togs därför beslutet att involvera även SP/IL. Argumenten för detta var att studien därmed skulle omfatta fler elever, att elevernas bakgrund skulle vara mer skiftande och slutligen att de ordinarie elevgrupperingarna kunde hållas intakta. En skola med flera elever inom NA och/eller TE hade möjliggjort den första typen av design ovan och även alternativ med kontrollgrupper från andra skolor diskuterades. Sammantaget ansågs emellertid, mot bakgrund av aktuell tidsram samt diskussionerna om deltagande lärare som fördes tidigare, att designen med tre sammanhållna elevgrupperingar på en och samma skola innebar det mest ändamålsenliga upplägget.

De sex elever (två från NA, två från TE och två från SP/IL) som intervjuades innan forskningslektionerna valdes ut av respektive lärare. Urvalskriterierna var att de skulle inneha god verbal förmåga men också att de kunskapsmässigt var representativa för gruppen som helhet i den meningen att de inte skulle utgöra en ytterlighet. Det bör här påpekas att urvalsmöjligheterna var goda och grupperna innehöll många elever som svarade mot kriterierna. Efter en kortare diskussion mellan lärarna och forskaren valdes därefter en pojke och en flicka från respektive grupp ut för intervju.

Dokumentation av forskningslektionerna

Alla sex forskningslektioner följde samma mönster i form av videoinspelning och observation. Två videokameror användes vid varje lektion. En videokamera var statiskt placerad i ett av de främre hörnen på klassrummet och dokumenterade elevernas förehavanden. Den andra manövrerades av forskaren och följde den undervisande lärarens aktiviteter. Kamerornas inverkan på eleverna är svår att uttala sig om men de verkade inte röna någon större uppmärksamhet. Att eleverna var 17-18 år var sannolikt en faktor som medförde att kamerornas påverkan inte var så påtaglig. Vid sidan om videoinspelningen observerades också alla lektioner av forskaren och de två lärare som för tillfället inte undervisade. Direkt efter varje lektion hölls en diskussion där lärarnas och forskarens momentana reflektioner ventilerades och skrevs ner av forskaren.

Etiska överväganden

I en learning study studeras människor och i det aktuella fallet består det empiriska materialet av videofilmade lektioner, ljudupptagningar från intervjuer, testresultat i skriftlig form samt observationer. Att bli videofilmad innebär ett intrång i den personliga integriteten och deltagande i studien var frivilligt. Eleverna informerades i förväg om studiens syfte och genomförande och fick därefter lämna ett skriftligt medgivande om att delta. De fick också precisera huruvida videosekvenserna där de förekom endast fick användas i forskningssyfte eller om de även fick användas vid fortbildning av lärare. Alla elever utom en valde att delta i studien och de som inte godkände att videosekvenserna användes i fortbildningssyfte placerades utanför videokamerans räckvidd under lektionerna. De elever som deltog i intervjuer tillfrågades och gav sitt medgivande muntligt och även i detta fall informerades de om att deltagande var frivilligt. Samtliga sex elever som tillfrågades tackade ja till att medverka i intervjuerna. Lärarna tillfrågades om att delta i studien ett och ett halvt år innan genomförandet och informerades i samband med detta om upplägget inklusive kommande videofilmning. I deras fall var de extra utsatta eftersom en kamera dokumenterade alla deras förehavanden under de två lektionerna. Alla tillfrågade lärare valde att medverka under de beskrivna förutsättningarna.

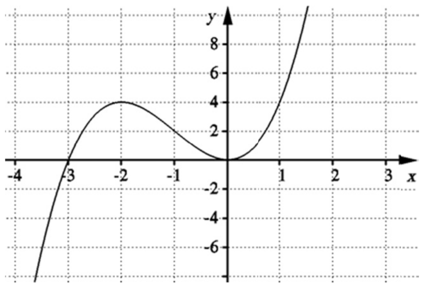
I Vetenskapsrådets riktlinjer för god forskningssed (2011) beskrivs hur forskning handlar om att på ett rimligt sätt väga olika intressen mot varandra.

Inom arbetet med denna licentiatuppsats aktualiserades detta vid ett antal tillfällen. I de excerpt som förekommer i texten framgår det inte någonstans vilken elev som avses. Det enda som står angivet är att det är en elev som yttrar sig. Skälet till att inte precisera närmare är att det inte bedömdes som avgörande i sammanhanget, åtminstone inte på bekostnad av att det skulle bli lättare att hänföra ett uttalande till en viss elev. Det som studeras och analyseras är innehållets behandling. I och med detta är det inte vilken elev som säger vad som är avgörande. Det intressanta är istället hur det påverkar vad som är möjligt att urskilja eller att det berättar något om vad som urskilts. Ett liknande resonemang fördes i samband med att resultatet av intervjuerna som undersökte elevernas uppfattningar om funktioner och derivata skulle redovisas. I denna beskrivning framgår inte vilket program de olika eleverna tillhör, något som borde vara av intresse eftersom innehållets behandling i respektive cykel ska utgå från elevernas förkunskaper. Under intervjun gav dock de sex eleverna utryck för liknande uppfattningar varför en separering av dem programvis inte tillförde någon extra dimension till resultatet. Det skulle däremot ha medfört att respektive yttrande kunnat hänföras till någon av två elever. Intresset att inte kunna identifiera eleverna vägde i detta fall tyngre än intresset att precisera deras programtillhörighet.

Pilotstudien

Fyra elevers (benämns 1-4 nedan) sätt att erfara ett problem undersöktes via intervjuer vilka videofilmades. I urvalsgruppen, 30 elever från Naturvetenskapsprogrammets årskurs två, fanns ingen elev som ej uppnått målen i matematik. Eleverna hade under intervjun endast tillgång till penna och papper. De arbetade utan tidspress och fick samtidigt förklara vad de gjorde (eller kunde tänka sig att göra) och varför de gjorde det (eller hur de tänkte kring problemet). Denna intervjumetod beskrivs av Marton och Booth (1997) och innehåller alltså två parallella delar. Den ena innebär att intervjuaren utformar situationen och resultatet är den intervjuades lösning, eller försök till lösning, på problemet. Den andra delen rör den intervjuades egen medvetenhet om hur denna lösning växte fram och Marton och Booth (1997) beskriver hur detta kan vara problematiskt. Dels kan det vara jobbigt för den intervjuade att redogöra för sina tankegångar men det är också viktigt att den intervjuades tankar tillåts komma fram i sin helhet. Vad gäller det förstnämnda verkade ingen av de intervjuade se några problem med att delge sina tankegångar och reflektioner. Ett sätt att åstadkomma det andra är att återkomma till ursprungsfrågan gång på gång eller att ta upp saker som den intervjuade tidigare sagt. Båda dessa förfaranden användes vid flera tillfällen i samtliga intervjuer.

Pilotstudien genomfördes i slutskedet av den för eleverna aktuella kursen (matematik C enligt Lpf 94). Kursen hade till största delen behandlat derivata och syftet med pilotstudien var att undersöka vilka förmågor de elever som genomgått kursen utvecklat. En insikt som i sin tur skulle kunna tas som en av utgångspunkterna vid designen av undervisningen i den kommande huvudstudien. En av uppgifterna inom pilotstudien innebar att eleverna utifrån en funktions derivata som var given såväl symboliskt, $f'(x) = x^3 + 3x^2$, som grafiskt (se figur 4 nedan), skulle skissa antiderivatan.



Figur 4. $f'(x) = x^3 + 3x^2$

Uppgiftstypen var ny för eleverna men det ska påpekas att de i anslutning till studien arbetat med deriveringsregler för polynom och med att skissa såväl tredje- som fjärdegradsfunktioner. Samtliga elever konstaterade snabbt att antiderivatan skulle vara en fjärdegradsfunktion men därefter blev det mer komplicerat. Två av eleverna (1 och 4) såg framför sig hur grafen till antiderivatan i olika omfattning skulle likna derivatans graf. Elev 1 släppte aldrig denna föreställning utan konstaterade till slut att de två graferna i princip skulle vara identiska (trots att antiderivatan var en fjärdegrads-funktion).

Excerpt 1:

Elev 1: Utifrån den här tycker jag liksom att den ska se exakt likadan ut.

Elev 2 funderade under ett par minuter men kunde sedan inte komma längre i resonemanget än att det var en fjärdegradsfunktion av något slag. De två sista eleverna (3 och 4) genomförde mer omfattande ansatser. Att uttala sig om vilka förmågor dessa två elever besatt generellt är inte på något sätt möjligt eller önskvärt, men deras handlande i det aktuella fallet kan analyseras. Elev 3 konstaterade först att det var en fjärdegradsfunktion men släppte därefter den tanken och fokuserade endast på derivatans graf och inte på det algebraiska uttrycket. Undan för undan konstruerades sedan en graf vilken i princip var korrekt (uppgiften var att skissa). Eleven visade upp ett mycket väl utvecklat visuellt resonemang men reflekterade inte över att grafen kunde förskjutas i höjdled och hade inte heller någon klar bild över hur funktionen kunde uttryckas algebraiskt. Elev 4 konstaterade också inledningsvis att det rörde sig om en fjärdegradsfunktion vilken dessutom skulle ha positiv fjärdegradsterm. Trots en medvetenhet om hur en funktion av den typen såg ut stötte eleven på problem eftersom uppfattningen samtidigt var att antiderivatans graf skulle likna derivatans. Trots lång tids fundering kunde inte eleven komma fram till något svar.

> Excerpt 2:
>
> Elev 4: [...] om den skulle komma här nerifrån så känns det som att det skulle vara ett minustecken framför x^4, annars känns det som att den skulle komma här uppifrån.

Sammanfattningsvis kan konstateras att samtliga elever inledningsvis resonerade algebraiskt när uppgiften skulle lösas. Tillgången till det algebraiska funktionsuttrycket uppmuntrade förmodligen till detta men samtidigt var kanske också utseendet på grafen bekant för eleverna. Trots konstaterandet att antiderivatan var en fjärdegradsfunktion menade två av eleverna att grafen till funktionen och grafen till antiderivatan skulle likna varandra.

Allmänna förkunskaper och uttryckta uppfattningar om derivata

Designen av en learning study kan variera men gemensamt är att de tar sin utgångspunkt i elevernas kunskaper och uppfattningar. I det aktuella fallet erhölls en allmän bild av elevernas kunskaper genom att summera och jämföra deras resultat i den senast avslutade kursen. Eftersom lärarna i studien också undervisade på de tre programmen som ordinarie lärare kunde de komplettera betyg och provresultat med intryck från lektionstid. Eleverna på TE och NA bedömdes vara relativt likvärdiga. De hade läst samma matematikkurser under samma tid, de hade liknande betygsstatistik på kursen innan och de hade en liknande resultatbild på det senaste nationella provet. Exempelvis var betygssnittet på kursen innan (omvandlat till meritvärde) 13,75 för TE och 13,91 för NA. SP/IL innebar dock andra förutsättningar:

- Matematikämnet var mindre centralt på SP/IL då programmen inte riktade sig mot matematikintensiva utbildningar på högskola/ universitet.
- Eleverna läste mindre matematik under sin gymnasietid jämfört med TE och NA vilket också innebar färre matematiktimmar per vecka.
- SP/IL läste enligt Lpf 94 medan TE och NA läste enligt Gy 11. Kurserna var inte identiska gällande innehåll och upplägg och olika läromedel användes. Stoffet som täcktes på SP/IL var mindre omfångsrikt och tempot på kurserna var lägre.
- Eleverna på SP/IL hade lägre resultatnivå på kursen innan och en större andel av eleverna bedömdes uppleva ämnet som svårt.

Punkterna ovan ledde inte till någon förändring av lärandeobjektet men de ansågs få inverkan på designen.

För att kartlägga elevers kunskaper om lärandeobjektet studerades tidigare ämnesdidaktisk forskning men då den aktuella undervisningsgruppen i en learning study ska mötas efter sina förutsättningar ska också deras specifika uppfattningar studeras. Hur detta genomförs varierar. Ett sätt är att genomföra förtestet en tid innan forskningslektionerna och använda sig av resultatet i designen. Problemet som då uppstår är att det går en tid mellan förtest och forskningslektion. Kritik som därmed kan uppkomma är huruvida elevernas skilda sätt att uttrycka sig på för- respektive eftertest härstammar från forskningslektionen eller om det kan relateras till tiden mellan förtest och forskningslektion. För att undvika kritik av denna typ genomfördes i denna studie förtestet i direkt anslutning till den första lektionen.

Som grund för studiens design genomfördes istället för skriftliga tester sex intervjuer vilka spelades in med diktafon. Intervjuerna behandlade funktioner och derivata och syftet var att få en bild av hur elevernas uppfattningar av dessa begrepp kunde relateras till tidigare forskningsresultat. Före intervjun klargjorde forskaren att tillfället inte utgjorde underlag för betygsättning. Det tydliggjordes också att det var elevens uppfattningar och tankar kring frågeställningarna, oavsett rätt eller fel, som var intressanta. Ingen av frågorna berörde lärandeobjektet och detta var ett medvetet val. Lärandeobjektet var nytt för eleverna och lärarna och forskaren gjorde med stöd av undervisningserfarenhet antagandet att förkunskaperna var knapphändiga. På grund av detta antagande ansågs en intervju centrerad kring lärandeobjektet till övervägande del bli ett tillfälle för lärande. Nackdelarna med intervjuförfarandet var att endast en liten andel av eleverna kom till tals och intervjuerna gav inte heller någon information om elevernas uppfattningar om lärandeobjektet. Samtidigt medförde de uteblivna frågorna om lärandeobjektet att validiteten på de intervjuade elevernas kommande testresultat ökade vilket ansågs överväga nackdelarna med tillvägagångssättet. Genomgången av tidigare forskningsresultat om elevers uppfattningar av begreppet derivata hade gett en relativt koherent bild. Bedömningen som gjordes var att intervjuer med två elever per undervisningsgrupp skulle ge information om, och i så fall i vilken grad, de aktuella elevgruppernas uppfattningar kunde ställas i relation till denna bild. Överensstämmelsen mellan elevernas uttryckta uppfattningar och tidigare forskningsresultat ansågs därefter kunna utgöra en utgångspunkt vid designen av forskningslektionerna. Detta eftersom intervjuinnehållet angränsade till lärandeobjektet.

Intervjuupplägget var inte identiskt, men liknade det Goldin (2000) benämner *task-based interview* vilket innebär att intervjun är centrerad kring en sekvens av specifika uppgifter vilka väljs med utgångspunkt i det syfte som intervjun har. Intervjun innebar också, i enlighet med Goldins (2000) beskrivning av *structured task-based interview*, en interaktion där forskaren vid behov hjälpte till att föra diskussionen framåt. Om eleven exempelvis efter en stunds funderande inte hade något svar försökte forskaren med hjälp av ett förslag få eleven att komma vidare. När eleven resonerade var inte heller forskaren nollställd utan uppmuntrade och bemötte elevens resonemang utan att för den skull övergå i förklaringar av frågeställningen. Task-based interviews kan enligt Maher och Sigley (2013) ha olika frihetsgrad och forskarens frågor kan vara helt förutbestämda eller så finns möjlighet att anpassa sig till situationen. Intervjuerna följde det senare upplägget och i respektive intervju var utgångspunkten de sju frågorna men efter varje fråga styrdes riktningen på diskussionen av eleven.

Samtliga intervjuer pågick i cirka 20 minuter och utgick från sju frågor (se bilaga 1) vilket, då sex elever intervjuades, resulterade i totalt 42 svar eller beskrivningar. De första tre frågorna behandlade funktioner och de följande tre begreppet derivata. Avslutningsvis fick eleverna till uppgift att skissa en graf och sedan redogöra för vad derivatan innebar i detta fall. Resultatet av intervjuerna är presenterat nedan som en sammanfattande löpande text. Vilken elev som har svarat vad kan inte utläsas. Sättet att redovisa resultatet är valt då elevernas uppfattningar om begreppen funktion och derivata i de frågor som ställdes var relativt likartade. Svaren var inte heller av karaktären rätt eller fel varför en kategorisering av detta slag skulle varit både svår att genomföra och svår att tolka. I sammanhanget är det också värt att återigen upprepa syftet med intervjun. Syftet var att få en bild av hur elevernas uttryckta uppfattningar kunde ställas i relation till den bild som framkom i forskningsöversikten, inte att mäta eller att på djupet analysera deras kunskaper. De citat som finns i texten är exakta återgivningar (hela eller delar) av elevernas yttranden.

Lärandeobjektet behandlade den grafiska representationen och först undersöktes om eleverna spontant relaterade funktioner till denna representationsform. Den första frågan gick ut på att beskriva vad en funktion innebar. Gemensamt för samtliga sex elever var att de i första hand associerade begreppet funktion till ett symboliskt uttryck. Fem nämnde specifikt att en funktion för dem inkluderar x. Den sista eleven nämnde förvisso inte x men istället ”siffror å typ sånt, plus och minus och upphöjt” varför även detta svar innebar en symbolisk association. Två av eleverna nämnde också att en funktion kunde representeras grafiskt men detta efter att de först redovisat en symbolisk tolkning. När eleverna i fråga två ombads ge exempel på en funktion var svarsbilden återigen enhetlig och alla gav exempel på polynomfunktioner i symbolisk form av första eller andra graden.

Därefter ledde intervjuaren in samtalet på grafer och en bild av en andragradsfunktion ($y = x^2 + 2x$) representerad grafiskt visades. Eleverna fick i samband med detta den tredje frågan som var om bilden visade en funktion. Alla elever ansåg, i några fall efter diskussion om begreppen ekvation och funktion, att det var en funktion och alla utom en kunde också namnge den som en andragradsfunktion. Denna elev sade sig dock känna igen funktionen utan att för den skull kunna namnge den.

Den fjärde frågan var att beskriva vad derivata innebar. Alla elever utom en förknippade direkt begreppet med lutningen i en punkt även om det uttrycktes på olika sätt. En elev beskrev det som ”har svårt att hänga upp det på något men skulle va lutningen i en punkt” medan en annan hänvisade till processen att beräkna k-värdet i en punkt och en tredje till processen att dra tangenter. En av eleverna gav ett annorlunda svar på vad derivata innebar och det krävdes ett antal följdfrågor för att reda ut vad eleven menade. Eleven hänvisade till ett streck och först förstod inte intervjuaren vad detta syftade på. Det klargjordes dock när eleven ritade $f'(x)$ med hjälp av sitt finger i luften. Strecket härrörde från notationen för derivata i den symboliska representationsformen. Om funktionen betecknas $f(x)$ skrivs derivatan som $f'(x)$ vilket utläses f prim av x där prim svarar mot strecket. Eleverna hade arbetat med deriveringsregler och denna elev förknippade derivata med hur detta uttrycktes symboliskt.

Samtliga elever kunde derivera enkla polynomfunktioner och även eleven som först associerade derivata till prim i den symboliska notationen relaterade efter några följdfrågor också begreppet till lutning och tangenter. Vad tangenter innebar eller syftet med att dra dem var emellertid mer eller mindre oklart vilket framkom i fråga fem där olika representationsformer av derivata diskuterades. På bordet låg fortfarande grafen från fråga tre och intervjuaren försökte bland annat få eleverna att beskriva varför tangenter dras till en graf. Svaren från eleverna var då osäkra och en elev svarade exempelvis ”men då kan man väl få ut hur många x det går på ett y” men kunde därefter inte riktigt förklara vad detta i sin tur betydde. Att relatera tangentens betydelse till det symboliska uttrycket för derivatan innebar också svårigheter. I en av intervjuerna var eleven på det klara med att derivatans värde kunde beräknas för ett specifikt x-värde med hjälp av det algebraiska uttrycket. Eleven ombads då föreslå en metod för att beräkna derivatan för samma x-värde grafiskt och svarade ”ehh, ja, ja alltså man kan ju säkert räkna ut det”. Svaret är representativt för eleverna och de ville gärna arbeta med specifika värden och uttryck. Vad derivering av ett algebraiskt uttryck hade för betydelse i den grafiska representationen var däremot inte på något sätt klart.

Fråga sex innebar att förklara vad derivatan innebar med utgångspunkt i en graf (fortfarande $y = x^2 + 2x$ från fråga tre och fem). Eleverna hade svårt att uttala sig angående detta och en elev svarade ”ja, alltså, nej det skulle jag ha problem å säga”. Samtliga elever kunde dock efter olika mycket hjälp säga huruvida derivatan var positiv, negativ eller noll i en punkt eller ett intervall. Det visade sig också att det inte bara var begreppet derivata som var problematiskt i den grafiska representationsformen utan även betydelsen av ordet funktionsvärde vållade problem när det kom upp i en av intervjuerna. ”Jag har ingen aning om vad det ordet betyder” blev svaret från eleven och först efter ett klargörande kunde intervjun fortsätta.

Även om redogörelserna så här långt är korta och fokuserar olika missuppfattningar belyser de samtidigt hur intervjuaren upplevde situationen med alla de intervjuade eleverna. Samtliga kunde nämna ett antal begrepp och beskriva ett antal procedurer men på frågor om hur dessa var relaterade till varandra eller varför de utfördes var svaren betydligt mer vaga.

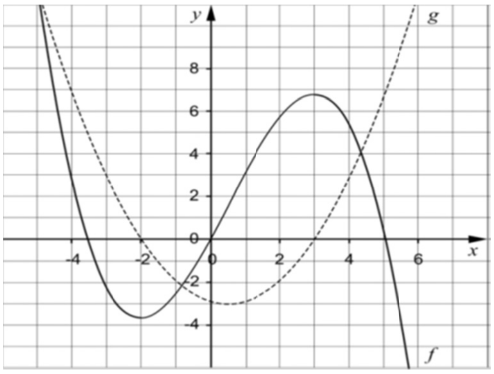
Sist fick eleverna i uppgift att skissa en graf över hur deras kroppslängd förändrat sig från födseln fram till idag. De ombads sedan med utgångspunkt i grafen diskutera derivatans betydelse. Lärandeobjektet i den kommande studien skulle till stor del behandla grafer utan specifika värden och syftet var att eleverna skulle utveckla förmågan att tolka och analysera snarare än beräkna. Denna sista fråga fanns med i ett försök att utreda hur eleverna förhöll sig till ordet skiss och den försökte också ge svar på om begreppet derivata kunde ges någon mening i en naturlig kontext. En elev skissade en rät linje med positiv lutning och start i origo vilket alltså svarar mot en jämn längdtillväxt och att vi föds 0 cm långa. Ytterligare två elever startade grafen i origo men åstadkom bortsett från detta, liksom övriga tre elever, grafer som var rimliga i sammanhanget. Det var dock uppenbart att de uteblivna specifikationerna skapade viss osäkerhet och eleverna frågade till exempel ”Måste den korsa x- och y-axeln?” eller ”Alltså kan jag börja var man vill? Kan jag börja här?” i samband med att grafen skulle skissas. När graferna väl var skissade kunde eleverna ganska väl redogöra för grafernas utseende och förklara orsakerna till eventuella skillnader i lutning i olika partier. På frågor om vad derivata innebar i förhållande till den skissade grafen hänvisade några elever till att det svarade mot lutningen men i flera fall var detta samband mer oklart.

Sammanfattningsvis gav de sex intervjuerna en bild av att derivata var ett diffust begrepp. Noterbart var att de uppfattningar eleverna uttryckte, med något eller några undantag, fanns dokumenterade i form av tidigare forskningsresultat. Intervjustudien gav inte möjlighet till någon djupanalys av elevernas kunskaper men den styrkte uppfattningen att de tidigare, främst internationella, forskningsresultaten föreföll utgöra rimliga utgångspunkter för designen av den kommande studien. I huvudsak konstaterades att eleverna kunde tillämpa deriveringsregler och beskriva derivata som lutningen i en punkt men däremot kunde de inte ge några utförliga redogörelser av innebörden. Resultatet var inte anmärkningsvärt med tanke på att TE och NA hade startat den aktuella kursen under våren och bara arbetat med derivata under ett par veckor. SP/IL hade å sin sida startat kursen på hösten i åk 3 vilket innebar att de arbetat längre tid med derivata. Intervjuerna pekade dock inte på att eleverna på SP/IL hade urskilt fler aspekter av derivata jämfört med eleverna på TE och NA. De nämnde visserligen fler typer av funktioner men på frågor som rörde innebörden av begreppet derivata framkom ingen skillnad, alla elever redovisade ungefär samma uppfattning. Om det fanns någon skillnad föreföll denna vara mer av kvantitativ än av kvalitativ karaktär och med tanke på lärandeobjektet innebar det inget som av lärare eller forskaren ansågs underlätta urskiljandet.

Förtest, eftertest och fördröjt eftertest

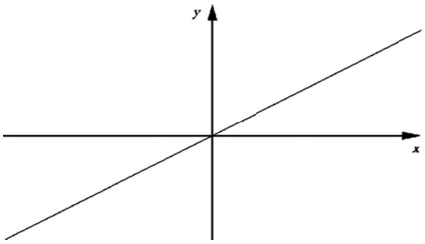
Precis före lektion ett i respektive cykel gjorde eleverna ett förtest och direkt efter lektion två genomförde de ett eftertest. 6-8 veckor senare genomfördes ett fördröjt eftertest och anledningen till det två veckor långa intervallet var att samtliga deltagande program gjorde detta test samma dag. I övervägningen mellan att alla elever skulle ha lika lång tid mellan lektioner och fördröjt eftertest eller att de skulle göra testet samma dag ansågs det senare vara att föredra. Eleverna kände inte till existensen av det fördröjda eftertestet och då detta var av betydande vikt för analysen talade mycket för ett samtidigt genomförande. Att hitta en dag med samtliga elever på plats var inte möjligt varför sex elever genomförde det fördröjda eftertestet när de återkommit från sjukdom, resa eller motsvarande. Vid testen hade eleverna inte tillgång till några hjälpmedel och eleverna genomförde testen enskilt i skriftlig form.

Testen innehöll tre uppgifter vilka alla utgick från grafer (se figur 5-7). De sista två uppgifterna utgick från samma graf och benämndes därför 2a respektive 2b. Uppgift 1 var identisk under alla tre testen medan grafen till uppgift 2a och 2b skiftades mellan förtest och eftertest för att undvika ett kopieringsförfarande av ett exempel som förekommit under lektionerna.

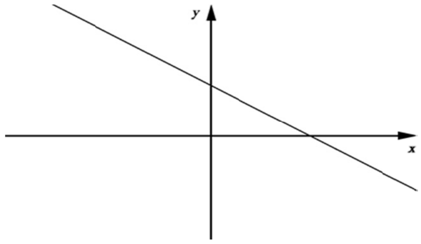


Figur 5. Grafer till uppgift 1.

Alla uppgifterna i testen innehöll uppmaningar till eleverna att förklara eller motivera sina svar och vikten av detta påpekades även muntligt i samband med testen. Uppgift 1 gick ut på att redogöra för om funktionen g var derivata till funktionen f (se figur 5). Svaret är nej och uppgiften var utslagsgivande så tillvida att funktionen f är en tredjegradsfunktion och funktionen g är en andragradsfunktion. Dessutom är nollställena för g korrekta och de elever som endast utgår från dessa två kontrollpunkter svarar fel.



Figur 6. Graf till uppgift 2a och 2b förtest.



Figur 7. Graf till uppgift 2a och 2b på eftertest och fördröjt eftertest.

Grafen till uppgift 2a och 2b (se figur 6 och 7) var föremål för flera diskussioner. Dels mellan forskaren och forskarkollegor och dels mellan forskaren och de i studien deltagande lärarna. Till slut bestämdes att i uppgiften utgå från en linjär funktion.

I uppgift 2a skulle eleverna skissa grafen till derivatan och i uppgift 2b skulle de av sex givna grafer (se bilaga 2 och 3) identifiera den som representerade funktionens antiderivata. Begreppet antiderivata var nytt för eleverna och innebörden förklarades muntligt i samband med testen med en beskrivning: *I uppgift 2a ska ni utgå från grafen i figuren och skissa grafen till derivatan. I uppgift 2b är istället grafen i figuren en derivata. Ni ska motivera vilken av de sex givna graferna den är derivata till.* Det förekom även ytterligare förklaringar av begreppet antiderivata men gemensamt var att de handlade om betydelsen av begreppet och inte innebar någon ledtråd till hur uppgiften skulle lösas.

Valet av en linjär funktion i fråga 2 var inte givet och andra alternativ diskuterades. Lärandeobjektet innefattade dock att eleverna med en graf som utgångspunkt skulle kunna förklara både hur grafen till derivatan såg ut och hur grafen till antiderivatan såg ut. Det innebar också att såväl kunna skissa som att analysera befintliga grafer och en linjär funktion ansågs då vara den bästa utgångspunkten eftersom en skiss av derivatans graf i detta fall är lätt att bedöma korrektheten i (även en andragradsfunktion hade varit passande men det förekom i uppgift 1). Nackdelen med en linjär funktion ansågs vara att uppgiften eventuellt skulle kunna lösas utan förståelse men samtidigt krävdes en förklaring och dessutom hade två av de deltagande programmen endast ett par veckors erfarenhet av derivata. För att undersöka uppgifternas lämplighet prövades de på sex elever från en annan årskurs som forskaren undervisade. Bedömningen var att testet föll väl ut och att en linjär funktion kunde svara på huruvida eleverna hade urskilt relationen som lärandeobjektet innefattade eller inte. Att eftertestet skulle innehålla en annan linjär funktion än förtestet var forskare och lärare eniga om. Det blir förvisso en annan uppgift men då grafen i förtestet förekom i undervisningen fanns en uppenbar risk att eleverna skulle komma ihåg utseendet på derivatas och antiderivatans graf. Dessutom kan konstateras att om en elev förstått relationen mellan en graf och derivatans graf är inte typen av linjär funktion avgörande för huruvida eleven kan avge ett korrekt svar eller inte.

Bortfall

Varje cykel i studien innebar två lektioner som genomfördes under olika dagar vilket medförde ett visst bortfall. På TE var en elev som deltagit i lektion 1 frånvarande från lektion 2. På SP/IL var motsvarande antal två stycken. På NA deltog dock alla elever från lektion 1 också under lektion 2. Det totala antalet elever som deltog i båda lektionerna var 68. Samtliga dessa genomförde det fördröjda eftertestet men det gjordes inte av alla under samma dag. Betydelsen av att några elever gjorde testet vid ett senare tillfälle kan diskuteras men fördelarna med att alla elever deltog ansågs överväga eventuella nackdelar. Det ska också poängteras att eleverna vid flertalet tillfällen informerades om studiens syfte och om att deras enskilda prestationer inte utgjorde underlag för betygsättning då svaren på individnivå endast skulle komma att studeras av forskaren.

Lektionsdesign

Lektionsdesignen var för samtliga tre cykler strukturerad. Den innebar till största delen lärargenomgångar och avsikten var att strikt behålla fokus på det avsedda innehållet. Den tydliga strukturen ska inte tolkas som att elevernas tankar skulle ignoreras. Tvärtom var målet en ständig interaktion mellan lärare och elever men samtidigt betonades vikten av att interaktionen höll sig inom det planerade innehållet. Lektionsdesignen var i alla tre cykler baserad på följande Presumtiva Kritiska Aspekter (PKA):

Eleverna behövde urskilja:

- att derivatan kan vara både en funktion och lutningen i en punkt (PKA 1)
- att derivatans graf i regel inte liknar den deriverade funktionens graf (PKA 2)
- relationen mellan värdet på derivatans graf och lutningen på den deriverade funktionens graf (PKA 3)
- betydelsen av grafernas nollställen och vändpunkter (PKA 4)

Under cykel 2 identifierades ytterligare en presumtiv kritisk aspekt som kom att behandlas i cykel 3:

- Eleverna behövde urskilja skillnaden mellan lutning och värde inom en och samma graf (PKA 5)

PKA 1 och 2 var grundade i tidigare forskningsresultat. PKA 2 var också tydlig under pilotstudien medan betydelsen av PKA 1 hade bekräftats under intervjuerna som genomfördes under veckorna före studien. Med tanke på resultatet av intervjuerna fördes diskussioner mellan forskaren och lärarna huruvida tangentens innebörd utgjorde en PKA i sig. Gruppen enades dock om att innesluta tangentens innebörd i PKA 1. PKA 3 och 4 härstammade inte från kända missuppfattningar utan utgjorde vad som ansågs som kritiskt att urskilja för att utveckla de förmågor som det indirekta lärandeobjektet innebar. Framförallt betonades betydelsen av PKA 3 vilket också inverkade på designen. PKA 5 tillkom efter att fyra elever i cykel 2 förväxlat betydelsen av värde och lutning inom en och samma graf i fråga 2b på eftertestet.

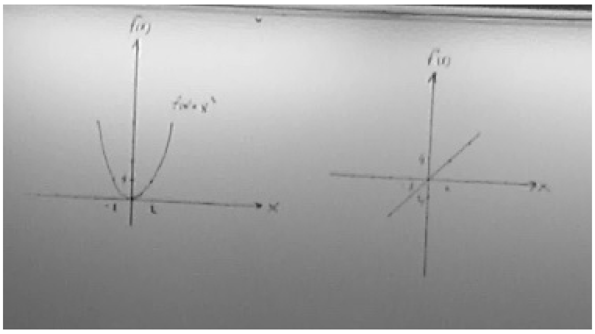
Tidigare forskningsresultat var enligt ovan den direkta orsaken till två presumtiva kritiska aspekter men resultaten påverkade vid sidan om detta också momentens utformning på andra sätt. I forskningsöversikten framkom en stark betoning på procedurer och algebraiska resonemang hos elever vilket också bekräftades i intervjuerna före studien. För att synliggöra relationen mellan graferna och flytta fokus bort från procedurer och beräkningar skissades därför i princip alla koordinatsystem utan gradering. Det enda momentet som innehöll graderade koordinataxlar var det första. Anledningen till graderingen var dock olika i cykel 1 jämfört med cykel 2 och 3. I cykel 1 fanns graderingen för att läraren på ett, i princip exakt sätt, skulle kunna rita funktionen $f(x) = x^2$ och dess derivata $f'(x) = 2x$. Cykel 1 tog därmed sin utgångspunkt i de algebraiska uttryck som eleverna var bekanta med och syftet var att via detta synliggöra en övergång mellan olika representationsformer. Förmågan att kunna växla mellan representationsformer var i tidigare forskningsresultat uttryckt som mycket betydelsefull och både forskaren och lärarna delade denna uppfattning. Vid genomförandet av cykel 2 och 3 var orsaken till graderingen en helt annan. I dessa cykler var övergången från algebraiskt uttryck till graf borttagen och graderingen existerade på grund av behovet att kunna beräkna lutningen hos ett antal tangenter. Dessa beräknade värden markerades sedan i ett nytt koordinatsystem där grafen till derivatan konstruerades.

Den tillkomna presumtiva kritiska aspekten (PKA 5) innebar ett extra moment (D_2 nedan) i designen för cykel 3 vilken i och med detta innehöll åtta olika moment fördelade på de två lektionerna. Av tidsskäl kom dock moment D och E att genomföras samtidigt och moment F utgick vilket innebar att totalt sex moment genomfördes i cykeln. Designen för cykel 1 och 2 innehöll sju moment (A-G) där tre var planerade att genomföras under lektion 1 och övriga fyra under lektion 2 vilket också blev fallet. Momenten var avsedda att synliggöra de presumtiva kritiska aspekterna och även om en enskild presumtiv kritisk aspekt kunde vara i fokus under ett visst moment behandlades också, direkt eller indirekt, flera andra på grund av lärandeobjektets formulering. Exempelvis innebar alla moment att derivatan beskrevs som en funktion och samtliga moment innefattade också relationen mellan värdet på derivatans graf och lutningen på funktionens graf. På samma sätt synliggjordes återkommande, implicit eller explicit, att graferna hade olika utseende och att nollställen och vändpunkter var av särskilt intresse. Av denna anledning är det svårt att hävda att de uteblivna momenten i cykel 3 medförde att någon presumtiv kritisk aspekt kan anses utelämnad.

Inom en learning study revideras designen mellan cyklerna. De revideringar som genomfördes i den aktuella studien beskrivs och analyseras främst i nästa kapitel. Gemensamt för revideringarna var att de innebar förändringar av innehållets behandling *inom* momenten. Syftet med momenten och deras ordningsföljd var däremot detsamma varför det övergripande upplägget i de tre cyklerna kan beskrivas gemensamt. Momentens innehåll, samt vilka presumtiva kritiska aspekter som i första hand berördes i respektive moment, kan sammanfattas enligt följande:

Moment A

Innebar att lärandeobjektet introducerades. Momentet innehöll avslutningsvis en graf och grafen till funktionens derivata bredvid varandra på tavlan (se figur 8). Momentet kontrasterade derivatan som lutningen i en punkt mot derivatan som en funktion (PKA 1). Det innebar också en kontrast mellan grafernas utseende (PKA 2). Slutligen kontrasterades också lutningen hos funktionens graf mot värdet av derivatans graf (PKA 3).

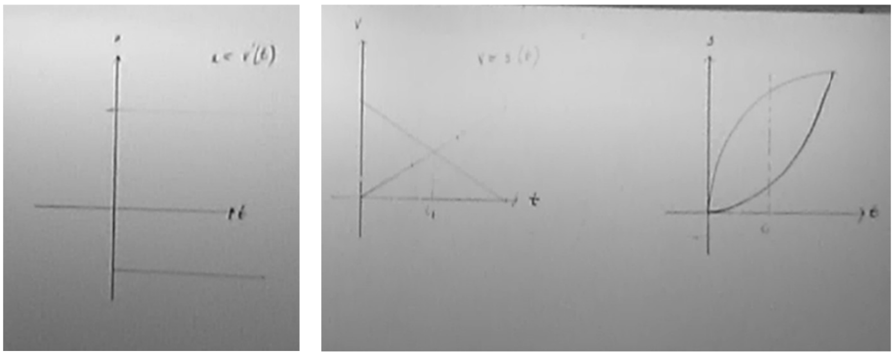


Figur 8. Funktion och derivata i moment A i cykel 1 (TE).

Moment B

Efter det inledande momentet var syftet att eleverna skulle kunna urskilja begreppen funktion, derivata och antiderivata i vardagliga händelser. De fick därför först arbeta med en uppgift i grupper om tre till fyra där formuleringen var att en bil körde ut på en väg och därefter med konstant acceleration ökade farten från noll km/h till den tillåtna hastigheten. Uppgiften till eleverna var att i tre befintliga koordinatsystem skissa grafer som beskrev bilens acceleration, hastighet respektive sträcka med avseende på tiden (axlarna i koordinatsystemen var märkta med a och t, v och t samt s och t). Tiden för grupparbetet var ungefär tio minuter och avbröts när läraren förvissat sig om att minst en grupp hade korrekta skisser. Därefter gick läraren igenom uppgiften gemensamt på tavlan. Det indirekta lärandeobjektet innebar att med utgångspunkt i en graf kunna skissa både grafen till derivatan och grafen till antiderivatan. Derivatan till $v(t)$ är $a(t)$ och antiderivatan till $v(t)$ är $s(t)$ och kopplingen till en händelse från vardagen var tänkt att underlätta urskiljandet av relationen mellan graferna.

Som en kontrast till bilens rörelse ovan behandlades också situationen när bilen istället bromsade in. Läraren skissade grafen som beskrev sträckan och därefter skissades graferna som visade hastighet respektive acceleration. Båda händelserna summerades med att beskriva de skissade graferna som funktion, derivata och antiderivata.

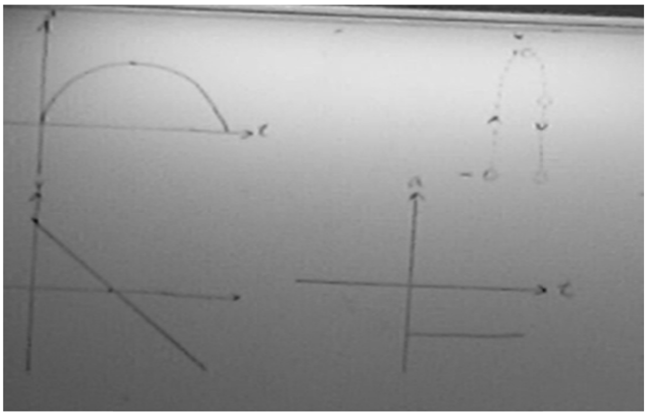


Figur 9 och 10. Skissade grafer över acceleration, hastighet samt sträcka för de två händelserna i cykel 2 (NA).

Momentet innebar en generalisering av det som behandlats i moment A. Kontexten var dock helt annorlunda och i första hand var syftet att PKA 3 skulle urskiljas av eleverna.

Moment C

För att generalisera sambandet mellan sträcka, hastighet och acceleration introducerades i moment C ytterligare en händelse vilken innebar att en boll kastades rakt upp i luften.

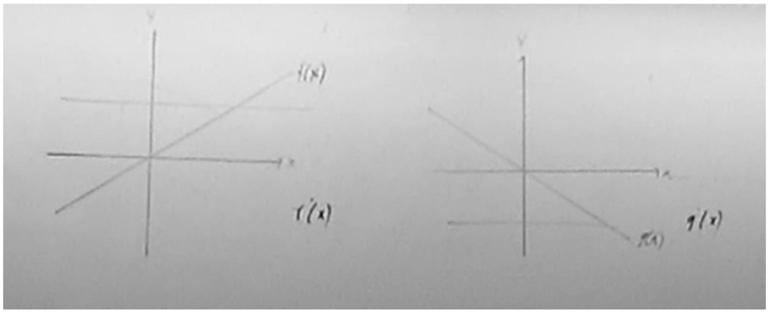


Figur 11. Figur och grafer som visar bollens rörelse i moment C i cykel 1 (TE).

En figur över bollens rörelse samt grafen som visade bollens sträcka som funktion av tiden skissades av läraren utan medverkan från eleverna. När dessa fanns på tavlan resonerades med eleverna om hur grafen kunde relateras till figuren och om hur graferna som beskrev bollens hastighet respektive acceleration kunde se ut. Återigen gjordes kopplingen till funktion, derivata och antiderivata. Momentet innebar en generalisering av moment B.

Moment D

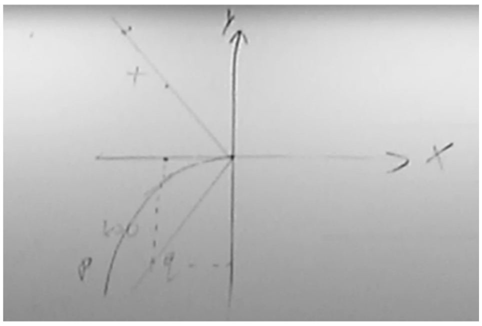
Under lektion 1 hade lärandeobjektet introducerats och en stor del av lektionen hade ägnats åt att relatera till vardagliga händelser (bilen och bollen). Designen i lektion 2 innehöll inte några kopplingar till vardagliga händelser utan syftade till att eleverna skulle kunna tolka relationen mellan funktionens graf och grafen till derivatan generellt. I det inledande momentet skapades en kontrast mellan positiv och negativ lutning genom att läraren skissade två räta linjer (se figur 12). När graferna var skissade fick eleverna till uppgift att skissa motsvarande derivator och antiderivator. Elevernas förslag togs sedan som utgångspunkt i diskussionen om grafernas utseende. Återigen var PKA 3 i fokus.



Figur 12. Grafer till funktioner och derivator skissade i cykel 2 (NA).

Moment D_2

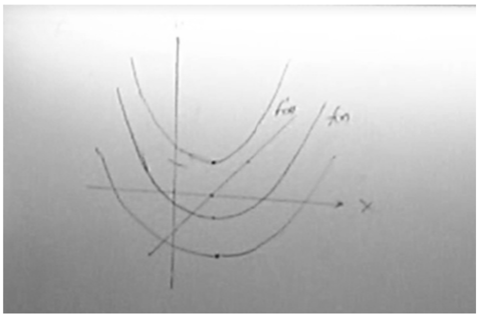
För att eleverna skulle få möjlighet att urskilja skillnaden mellan lutning och värde inom en och samma graf skissade läraren två grafer p och q (se figur 13). q var skissad så att lutningen var positiv men värdet negativt och läraren ställde frågan om q kunde vara derivata till p. Läraren kontrasterade därefter p:s positiva lutning mot q:s negativa värde och synliggjorde varför så inte var fallet. Istället skissades p:s derivata korrekt i den andra kvadranten. Momentet genomfördes bara i cykel 3 och avsåg att eleverna skulle urskilja PKA 5.



Figur 13. Från cykel 3 (SP/IL). p till vänster och q till höger i tredje kvadranten. p:s derivata i andra kvadranten.

Moment E

I uppgifter som innehåller grafer är ofta grafens skärning med x-axeln av intresse men detta påverkar inte utseendet på derivatans graf; grafens nollställen ger i sig ingen specifik information om derivatan. Omvänt gäller däremot att derivatans eventuella skärning med x-axeln är central då det ger information om antiderivatans vändpunkter. För att eleverna skulle få möjlighet att urskilja relationen mellan nollställen och vändpunkter skissades en graf vilken försköts i höjdled (se figur 14). Syftet med momentet var att eleverna skulle urskilja PKA 4.



Figur 14. Graf förskjuten uppåt och nedåt i cykel 1 (TE).

Moment F

För att generalisera sambandet mellan en funktions vändpunkter och derivatans nollställen skissades ytterligare två grafer. Den ena grafen skissades med utgångspunkt i den andra och nyttan av att *initialt* studera nollställen/vändpunkter synliggjordes liksom processen för att färdigställa skissen. Även här var avsikten i första hand ett urskiljande av PKA 4 men också PKA 3 synliggjordes. Momentet genomfördes inte i cykel 3.

Moment G

Moment G avslutade de två lektionerna och var det moment som innebar mest enskilt arbete för eleverna. Eleverna hade förvisso redan under de tidigare momenten varit aktiva men detta moment presenterades mer uttryckligen som en uppgift till dem. De fick också mer tid avsatt. I cykel 1 och 2 innebar momentet att med utgångspunkt i grafer skissa grafer till derivatan och antiderivatan. I cykel 3 innebar det att med utgångspunkt i ett antal befintliga grafer beskriva vilken som var derivata respektive antiderivata till vilken. Som avslutning i alla tre cyklerna gick läraren igenom de korrekta lösningarna. *Inför* detta moment var målet att PKA 1, 2, 3 och 4 (och PKA 5 i cykel 3) skulle vara urskiljda.

I cykel 1 och 2 kom designen att följas mycket strikt och med mycket små avvikelser genomförde lärarna de olika momenten helt enligt planeringen. Cykel 3 höll sig också strikt till designen men däremot medförde inspel från eleverna att tiden inte räckte till för att genomföra alla moment (därav att moment E komprimerades och moment F uteblev). Inspelen var inte av karaktären att de ledde lektionen bort från det planerade innehållet utan innebar att innebörden av vissa av de ingående begreppen diskuterades mer utförligt.

Analysprocess

Analysen av det empiriska materialet har skett i omgångar och i olika konstellationer. Syftet har genomgående varit att med ett variationsteoretiskt perspektiv studera hur innehållets behandling påverkat elevernas lärande. Successivt har forskaren, själv och tillsammans med andra, undan för undan fördjupat och arbetat fram den analys som presenteras i nästa kapitel. Analysen baseras i första hand på elevernas tester och videoinspelade lektioner. Möten och diskussioner med de deltagande lärarna och andra forskare har kompletterat bilden och också påverkat utfallet. Nedan ges en övergripande beskrivning av hur analysprocessen sett ut.

I direkt anslutning till genomförda forskningslektioner delgav forskaren och lärarna varandra sina omedelbara reflektioner vilka noterades i en form av dagbok som fördes under studiens gång. Denna momentana analys låg tillsammans med resultaten på förtesten till grund för justeringar av designen mellan två lektioner i samma cykel. Efter varje cykel gjordes på samma sätt en direkt analys men då tiden till nästa cykel var 4-5 dagar kom den att kompletteras ytterligare av forskaren och lärarna. Analysen låg tillsammans med resultaten på eftertestet till grund för justeringar av designen i kommande cykel.

Efter att de sex forskningslektionerna genomförts och eftertesten rättats fick materialet vila fram till att det fördröjda eftertestet hållits. Efter detta kunde analysen fördjupas och utgångspunkten var att försöka förklara resultatbilden på testen i respektive program med utgångspunkt i innehållets behandling under forskningslektionerna. Testresultaten summerades per fråga, per test och totalt. Denna kvantitativa del utgjorde grunden för analysen.

Viktigare var emellertid den kvalitativa analysen av testen där utgångspunkten var hur elevernas motiveringar, och förändring av motiveringar, såg ut på programnivå. De skillnader som här fanns analyserades mot bakgrund av innehållets behandling i respektive cykel.

Inledningsvis skapade sig forskaren en helhetsbild av innehållets behandling genom att i obruten följd studera videoinspelningarna av de sex forskningslektionerna två gånger. På grund av kvalitativa skillnader i elevernas testsvar riktades därefter fokus mot hur vissa aspekter behandlats under de tre cyklerna. Succesivt växte därefter, via ytterligare granskning av lektionerna, en bild fram över vad som skilde de olika cyklerna åt och hur detta i sin tur kunde vara en orsak till skillnaderna i elevernas resultat. Eftersom videoinspelningarna i detta läge studerats många gånger prövade forskaren sina slutsatser genom att låta andra forskare, som inte var insatta i studien, studera materialet. Några av de mest intressanta videosekvenserna valdes då ut och studerades i seminarieform. Ingen information gavs utan deltagarna ombads endast beskriva innehållets behandling under videosekvenserna. De analyser som framkom under seminariet förändrade inte bilden som forskaren hade sedan tidigare. Avslutningsvis gick därefter forskaren igenom videoinspelningarna ännu en gång för att åter erhålla en helhetsbild. Vid denna genomgång skrevs innehållets behandling i de olika momenten ner vilket följdes av en variationsteoretisk analys på momentnivå i respektive cykel. De övergripande drag som härigenom kunde urskiljas som utmärkande för innehållets behandling i respektive cykel var gemensam med den tidigare uppfattningen och de är dessa drag på vilken analysen i uppsatsen baseras.

Kapitel 6: Resultat och analys

I detta kapitel presenteras och analyseras resultatet av den empiriska studien. I det första avsnittet redovisas elevernas resultat på för-, efter-, samt fördröjt eftertest. Förutom sammanställningen av antalet korrekta svar på respektive program redogörs också för elevernas motiveringar och strategier. Det senare gäller såväl korrekta som felaktiga svar. Att summera antalet korrekta svar på programmen ger en övergripande bild av elevernas kunskaper men det är i kombination med den kvalitativa analysen av samtliga elevers strategier och motiveringar som det blir möjligt att uttala sig om vad eleverna urskilt.

Testresultaten var en av utgångspunkterna för de revideringar som genomfördes i designen mellan respektive cykel. Revideringarna beskriver skillnaderna mellan cyklerna med avseende på innehållets behandling. Vad revideringarna bestod av beskrivs i kapitlets andra avsnitt. Därefter ställs de två inledande avsnitten i relation till varandra på så sätt att testresultaten analyseras mot bakgrund av innehållets behandling. Analysen är genomförd enligt den process som beskrevs i avsnitt 5.10 och resultatet av analysen redovisas i de två sista avsnitten i detta kapitel.

Testresultat

Testresultaten på respektive program redovisas i tabell 6. För att ett svar skulle bedömas som korrekt krävdes en tillhörande motivering. En motivering ansågs godtagbar om den förklarade elevens svar/skiss/val av alternativ på ett sätt som var korrekt och möjligt att följa. Tabellen ger en överblick av resultatutvecklingen och det kan konstateras att på alla tre programmen var antalet korrekta svar på förtestet lågt för att sedan stiga kraftigt på eftertestet. Alla tre programmen gick också tillbaka på det fördröjda eftertestet. Noterbart är att endast en elev på SP/IL svarade rätt på uppgift 1 på eftertestet och att det var fler elever på NA som svarade rätt på uppgift 1 på det fördröjda eftertestet jämfört med eftertestet.

Tabell 6. Resultat i form av antal korrekta svar per test och program.

TE (n=26)	Uppgift 1	Uppgift 2a	Uppgift 2b
Förtest	0	4	6
Eftertest	16	20	15
Fördröjt eftertest	5	12	8
NA (n=23)	Uppgift 1	Uppgift 2a	Uppgift 2b
Förtest	1	3	2
Eftertest	9	22	17
Fördröjt eftertest	11	15	10
SP/IL (n=19)	Uppgift 1	Uppgift 2a	Uppgift 2b
Förtest	0	0	0
Eftertest	1	17	12
Fördröjt eftertest	3	9	4

Tabell 6 säger inget om karaktären på elevernas motiveringar. I avsnitten nedan redovisas resultatet på respektive test var för sig och elevernas motiveringar jämförs både inom och mellan programmen. Det görs också sammanställningar över vilka strategier och motiveringar som eleverna använde i samband med de felaktiga svaren.

Förtest

Tabell 7 redovisar antalet korrekta svar på förtestet på respektive program. Ett fåtal av eleverna på TE och NA hade svarat korrekt på uppgifterna men däremot ingen på SP/IL.

Tabell 7. Antal korrekta svar på förtest per program och uppgift.

	Uppgift 1	Uppgift 2a	Uppgift 2b
TE (n=26)	0	4	6
NA (n=23)	1	3	2
SP/IL (n=19)	0	0	0

Av de som svarat rätt hade en elev på NA väl underbyggda motiveringar på samtliga uppgifter. De övriga korrekta svaren grundades i de flesta fall på algebraiska resonemang. En graf identifierades som en polynomfunktion och därefter tillämpades deriveringsregler.

Elevernas typer av felaktiga strategier eller motiveringar på förtestet redovisas i tabell 8-10. En del elever lämnade fältet för motivering blankt och en del hade motiveringar som var svåra att tyda eller som inte kunde relateras till övriga delen av svaret. Dessa elever är samlade under rubriken inget/oklart svar i tabellen. Noterbart är att ett likartat mönster i svarsbilden framträder oavsett program.

Tabell 8. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på förtest (TE).

Typ av felaktig strategi/motivering TE (n=26)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.	11		5
2. Derivatan av x^3 blir x^2.	1		
3. Derivata är lutningen i en punkt och ingen graf.		2	
4. Likställer derivata med en tangent.	1		
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.	1		
6. Tar fram ett felaktigt algebraiskt uttryck.			
7. Menar att f är derivata till g (tvärtom).			
8. Felaktig rät linje. De flesta en likadan som $f(x)$.		8	
9. Derivatan är konstant men utan/felaktig skiss.		6	
10. Skissar en andragradsfunktion.		4	
11. Går inte att skissa utan ett algebraiskt uttryck.			
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			9
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			6
14. Inget/oklart svar.	12	2	

Tabell 9. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på förtest (NA).

Typ av felaktig strategi/motivering NA (n=23)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.	7		11
2. Derivatan av x^3 blir x^2.	3		
3. Derivata är lutningen i en punkt och ingen graf.	2		
4. Likställer derivata med en tangent.	3		
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.			
6. Tar fram ett felaktigt algebraiskt uttryck.	1		
7. Menar att f är derivata till g (tvärtom).			
8. Felaktig rät linje. De flesta en likadan som $f(x)$.		7	
9. Derivatan är konstant men utan/felaktig skiss.		9	
10. Skissar en andragradsfunktion.		2	
11. Går inte att skissa utan ett algebraiskt uttryck.		2	
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			3
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			5
14. Inget/oklart svar.	6		2

Tabell 10. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på förtest (SP/IL).

Typ av felaktig strategi/motivering SP/IL (n=19)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.	5		7
2. Derivatan av x^3 blir x^2.	1		
3. Derivata är lutningen i en punkt och ingen graf.	1		
4. Likställer derivata med en tangent.			
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.			
6. Tar fram ett felaktigt algebraiskt uttryck.			
7. Menar att f är derivata till g (tvärtom).	1		
8. Felaktig rät linje. De flesta en likadan som $f(x)$.		8	
9. Derivatan är konstant men utan/felaktig skiss.		3	
10. Skissar en andragradsfunktion.		3	
11. Går inte att skissa utan ett algebraiskt uttryck.		3	
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			7
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			4
14. Inget/oklart svar.	11	2	1

Det vanligaste felet var att resonera utifrån likheter mellan graferna (strategi/motivering 1 och 8 i tabell 8-10). På uppgift 1 kunde det till exempel betyda att eleven svarade ja med motiveringen att båda graferna var avtagande i början eller nej eftersom f hade tre nollställen och g bara 2. På uppgift 2b var det vanligaste svaret i detta fall att antiderivatans graf var exakt likadan som funktionens. På uppgift 2a var det vanligaste felet av samma karaktär det vill säga eleverna skissade en derivata som var exakt likadan som funktionen. Ett annat vanligt förekommande resonemang på uppgift 2a var att funktionen var av typen $kx + m$ varför derivatan med hjälp av deriveringsregler blev en konstant. Hur eller var grafen skulle skissas var dock inte klart (9). I övrigt syntes ett antal olika strategier/motiveringar av vilka flera kunde relateras till undervisningen av algebraiska deriveringsregler och derivatan som en tangent (2-4, 6, 11).

Eftertest

En stor andel av eleverna som tidigare inte lyckats lösa uppgifterna svarade på eftertestet korrekt. Resultatbilden var i tabellform (se tabell 11) av samma karaktär i de tre cyklerna med undantag för uppgift 1 i cykel 3 där endast en elev svarade rätt.

Tabell 11. Antal korrekta svar på eftertest per program och uppgift.

	Uppgift 1	Uppgift 2a	Uppgift 2b
TE (n=26)	16	20	15
NA (n=23)	9	22	17
SP/IL (n=19)	1	17	12

Vid en närmare analys av elevernas strategier och motiveringar framkom dock skillnader. Exempelvis verkade antalet rätta svar på TE vid första anblicken vara tillfredsställande men samtidigt var elevernas motiveringar i många fall knapphändiga. På uppgift 1 motiverade de flesta eleverna med att derivatans graf skulle vara *tvärtom* eller en *ledsen mun* medan det var få som resonerade i termer av lutning och värde. Samma mönster återkom i uppgift 2b där motiveringarna i många fall baserades på algebraiska resonemang. Även om andelen rätta svar var liknande på NA (något lägre i uppgift 1 men högre i uppgift 2) var den sammantagna bilden av elevernas motiveringar annorlunda och av de korrekta var det fler som var av en utförlig karaktär. En viktig skillnad i svarsbilden var också att andelen motiveringar som grundade sig på relationen mellan värdet på derivatans graf och lutningen på den deriverade funktionens graf var markant högre på NA medan algebraiska resonemang bara förekom en handfull gånger. På SP/IL var det endast en elev som svarade korrekt på uppgift 1. På uppgift 2 var det däremot en hög andel rätta svar och i samtliga fall utom ett var motiveringarna baserade på grafernas utseende och på hur värdet i den ena grafen svarade mot lutningen i den andra. Trots detta framstod svaren överlag som en aning mekaniska och merparten av dem var ganska knapphändiga, om än korrekta, där värdet hos $f(x)$ och lutningen hos antiderivatan markerats med + och -.

De felaktiga strategier/motiveringar som eleverna använde/uttryckte på eftertestet presenteras i tabell 12-14 (numreringen från tabell 8-10 har behållits). Jämfört med förtestet kan ett antal skillnader konstateras.

Tabell 12. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på eftertest (TE).

Typ av felaktig strategi/motivering TE (n=26)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.			
2. Derivatan av x^3 blir x^2.	2		
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.	5		
7. Menar att f är derivata till g (tvärtom).			
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			1
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			10
14. Inget/oklart svar.	3		
15. Rätt skiss men utan motivering.		4	
16. Skissat antiderivatan.		1	
17. Skissat en graf med konstant men positivt värde.		1	
18. Förväxlat negativt värde med negativ lutning.			

Tabell 13. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på eftertest (NA).

Typ av felaktig strategi/motivering NA (n=23)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.	2		
2. Derivatan av x^3 blir x^2.	4		
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.	2		
7. Menar att f är derivata till g (tvärtom).			
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			3
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			
14. Inget/oklart svar.	2		
15. Rätt skiss men utan motivering.			
16. Skissat antiderivatan.			
17. Skissat en graf med konstant men positivt värde.			
18. Förväxlat negativt värde med negativ lutning.	4	1	3

Tabell 14. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på eftertest (SP/IL).

Typ av felaktig strategi/motivering SP/IL (n=19)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.	6		
2. Derivatan av x^3 blir x^2.			
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.	8		
7. Menar att f är derivata till g (tvärtom).	3		
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			7
14. Inget/oklart svar.	1		
15. Rätt skiss men utan motivering.			
16. Skissat antiderivatan.		1	
17. Skissat en graf med konstant men positivt värde.		1	
18. Förväxlat negativt värde med negativ lutning.			

Ett flertal felaktiga typer av strategier och motiveringar hade försvunnit från förtest till eftertest (3-4, 6, 8-11 i tabell 8-10). Strategin att utgå från likheter mellan graferna (1) hade dessutom minskat kraftigt och förekom nu endast i 8 fall jämfört med i 46 på förtestet. Den strategi som ökat mest uppenbart i användning var att vid studiet av graf och derivatans graf kontrollera att vändpunkter och nollställen överensstämde (5). I uppgift 1 ledde detta till fel svar vilket åskådliggörs i tabellerna ovan men strategin var också flitigt använd i de andra uppgifterna. Vid jämförelse mellan programmen hade den gemensamma svarsbilden splittrats i vissa avseenden och två saker kan påpekas särskilt. För det första att eleverna på TE i mindre utsträckning än NA och SP/IL resonerade i termer av värde och lutning och för det andra att i princip alla elever på TE och SP/IL valde rätt alternativ i uppgift 2b men många av dem saknade motivering till varför (13).

Fördröjt eftertest

Resultatet av det fördröjda eftertestet som genomfördes 6-8 veckor efter forskningslektionerna redovisas i tabell 15. Sett till antalet korrekta svar är nedgången jämfört med eftertestet relativt likvärdig på programmen vad gäller uppgift 2. NA utmärker sig däremot på uppgift 1 där till och med något fler elever svarade rätt på det fördröjda eftertestet (detsamma gäller för SP/IL men där var endast ett fåtal svar korrekta på respektive test).

Tabell 15. Antal korrekta svar på fördröjt eftertest per program och uppgift.

	Uppgift 1	Uppgift 2a	Uppgift 2b
TE (n=26)	5	12	8
NA (n=23)	11	15	10
SP/IL (n=19)	3	9	4

Med något undantag utgick de korrekta svaren i uppgift 1 från ett resonemang där lutningen hos f ställdes mot värdet hos g. På uppgift 2a var svarsbilden också entydig och de som svarade rätt konstaterade att $f(x)$ hade en konstant negativ lutning vilket gav upphov till en derivata med konstant negativt värde. På uppgift 2b var motiveringarna något mer olika. På TE utgick fem elever från att $f(x)$ var en negativ förstagradsfunktion vilket gav att antiderivatan var en negativ andragradsfunktion medan tre elever förde ett resonemang som grundades på antiderivatans lutning. På NA motiverade nio av eleverna svaret med hjälp av antiderivatans lutning och bara en elev utgick från ett algebraiskt resonemang. På SP/IL var alla korrekta svar på uppgift 2b baserade på relationen mellan lutning och värde. Sammanfattningsvis var de korrekta svaren på det fördröjda eftertestet, oavsett typ av motivering, överlag förhållandevis tydliga.

Fördelningen av de felaktiga strategierna/motiveringarna på det fördröjda eftertestet åskådliggörs i tabell 16-18 (numrering enligt tabell 8-10, 12-14).

Tabell 16. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på fördröjt eftertest (TE).

Typ av felaktig strategi/motivering TE (n=26)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.	1		
2. Derivatan av x^3 blir x^2.	6		
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.	1		
8. Felaktig rät linje (ej med $k = 0$)		1	
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			13
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			5
14. Inget/oklart svar.	13		
15. Rätt skiss men utan motivering.		3	
16. Skissat antiderivatan.		2	
17. Skissat en graf med konstant men positivt värde.		8	

Tabell 17. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på fördröjt eftertest (NA).

Typ av felaktig strategi/motivering NA (n=23)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.	2		
2. Derivatan av x^3 blir x^2.	4		
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.	1		
8. Felaktig rät linje (ej med $k = 0$)		1	
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			11
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			1
14. Inget/oklart svar.	5	1	1
15. Rätt skiss men utan motivering.		1	
16. Skissat antiderivatan.		2	
17. Skissat en graf med konstant men positivt värde.		3	

Tabell 18. Typer och frekvens av felaktiga strategier/motiveringar på fördröjt eftertest (SP/IL).

Typ av felaktig strategi/motivering SP/IL (n=19)	Uppgift		
	1	2a	2b
1. Utgår från likheter mellan graferna.	5		
2. Derivatan av x^3 blir x^2.			
5. Tar bara hänsyn till derivatans nollställen.	5		
8. Felaktig rät linje (ej med $k = 0$)		1	
12. Fel alternativ med olika motiveringar.			9
13. Rätt alternativ men utan/felaktig motivering.			6
14. Inget/oklart svar.	6	3	
15. Rätt skiss men utan motivering.			
16. Skissat antiderivatan.		4	
17. Skissat en graf med konstant men positivt värde.		2	

På uppgift 2b valde nu betydligt fler elever på samtliga program fel alternativ (12). Betydande skillnader kan även konstateras för TE på uppgift 1 och 2a. Många av de korrekta, men knapphändiga, motiveringarna i uppgift 1 på eftertestet hade nu ersatts av motiveringar som utgick från deriveringsregler (2) alternativt inga eller oklara svar (14). TE hade även betydligt färre korrekta svar på uppgift 2a och den mest frekventa felaktiga strategin var att skissa en graf med konstant positivt istället för negativt värde (17). En graf med konstant positivt värde var för övrigt den korrekta skissen på förtestet.

Resultatutvecklingen på programmen

Förutom att studera tabell 6 kan ytterligare en jämförelse av resultatutvecklingen från förtest till fördröjt eftertest göras. Detta genom att korrigera för att några elever på förtestet svarade rätt och i tabell 19 är dessa svar exkluderade. Tabellen återger därmed hur stor andel av de felaktiga svaren på förtestet som på det fördröjda eftertestet var korrekta. Då elevantalet på programmen inte var lika stort och antalet felaktiga svar på förtestet var olika på olika uppgifter anges resultatet i procent (t.ex. TE uppgift 2a: 22 fel på förtest och 14 fel på fördröjt eftertest det vill säga 8/22≈36 % av de felaktiga svaren på förtestet var på det fördröjda eftertestet korrekta).

Tabell 19. Resultatutveckling från förtest till fördröjt eftertest med korrekta svar på förtestet exkluderade.

	Uppgift 1	Uppgift 2a	Uppgift 2b
TE	19 %	36 %	10 %
NA	45 %	60 %	38 %
SP/IL	16 %	47 %	21 %

Tabell 19 ger den kanske mest rättvisande bilden av resultatutvecklingen på programmen. Att utgå från de elever som innan studien svarat fel säger rimligtvis mer om resultatet än att inkludera samtliga. Beräkningsmodellen kan förvanska resultatet men är passande i det aktuella fallet då antalet korrekta svar på förtestet var förhållandevis litet. De var dessutom fördelade på ett sådant sätt att beräkningsunderlaget inte var avvikande i något fall.

Revideringar i designen mellan de tre cyklerna

Efter genomförda lektioner diskuterades designen av forskaren och lärarna. Med utgångspunkt i elevernas förkunskaper, observationer under lektionerna och testresultaten genomfördes revideringar i designen mellan de olika cyklerna. Efter cykel 1 var uppfattningen hos den undervisande och de observerande lärarna samt forskaren att lektionerna kunnat följa designen enligt planeringen. Samtidigt upplevde den undervisande läraren att graferna som de olika momenten innehöll var alltför likartade vilket lett till ett felaktigt fokus, framförallt under andra halvan av lektion 2. Istället för att fokusera på de PKA som var avsikten upplevdes de sista momenten ha handlat om att komma ihåg grafernas utseende från tidigare moment. Denna bild delades av övriga varför designen till nästa cykel ansågs behöva innehålla en större variation av grafer. Efter att elevernas eftertest analyserats stärktes uppfattningen av de gjorda observationerna. Många elever hade svarat korrekt och också motiverat svaren men detta utan att samtliga PKA bedömdes som urskilda. PKA 1 och 2 föreföll eleverna ha urskilt men däremot inte PKA 3. PKA 4 hade också många elever fått syn på men samtidigt var inte innebörden klar för alla vilket visat sig i ett antal felaktiga svar på uppgift 1.

Då ett flertal resonemang på eftertestet var grundade i deriveringsregler genomfördes ytterligare en övergripande revidering; i cykel 2 berördes endast den grafiska representationsformen. Detta innebar att designen inte innehöll några skriftliga algebraiska funktionsuttryck. Det innebar också att den undervisande läraren inte skulle göra några muntliga jämförelser mellan grafer och algebraiska funktionsuttryck.

Revideringarna ledde till att de funktioner som förekom i moment E, F och G i cykel 1 byttes ut. I cykel 1 hade endast grafer till polynomfunktioner av grad 0-3 förekommit. I designen för cykel 2 förekom också en graf till en polynomfunktion av grad 4 samt grafer som inte kunde relateras till ett algebraiskt uttryck. Intentionen var att undvika ett igenkännande hos eleverna och istället synliggöra PKA 3 genom generalisering på ett tydligare sätt.

Förutom de två övergripande revideringarna designades också moment A på ett annorlunda sätt. I moment A i cykel 1 tecknades funktionen $f(x) = x^2$ och dess derivata $f'(x) = 2x$ på tavlan och därefter skissades motsvarande grafer med hjälp av de algebraiska uttrycken. Värdet på $f'(x)$ kontrasterades sedan mot lutningen hos grafen till $f(x)$ i två punkter. Lutningen hos $f(x)$ åskådliggjordes med tangenter men värdet på derivatan beräknades med hjälp av det algebraiska uttrycket. I den efterföljande analysen ansågs detta kunna ha förhindrat ett urskiljande av PKA 3 eftersom det i processen inte hänvisades till värdet hos grafen till derivatan. I cykel 2 slutade moment A med samma två grafer på tavlan men vägen dit var mycket annorlunda. Grafen till $f(x) = x^2$ ritades av läraren och i samband med detta drogs också fem tangenter till funktionen (två för negativa och två för positiva x samt tangenten för $x = 0$). Momentet gick sedan ut på att beräkna värdet på tangenternas lutning och därefter pricka in värdena i ett nytt koordinatsystem. De fem punkterna hamnade i och med valet av funktion längs en rät linje. Syftet var att steg för steg synliggöra hur derivatans graf kunde konstrueras med utgångspunkt i lutningen hos grafen till funktionen. Processen synliggjorde dels derivatan som en funktion (PKA 1) men också hur lutningen hos $f(x)$ svarade mot värdet hos $f'(x)$(PKA 3). Avslutningsvis pekade läraren på grafernas olika utseende (PKA 2).

Efter cykel 2 var uppfattningen att revideringarna varit ändamålsenliga. Variationen av funktioner upplevdes i kombination med de uteblivna algebraiska funktionsutrycken ha bidragit till en större möjlighet att urskilja PKA 3. Innan cykeln spekulerades i om eleverna skulle efterfråga algebraiska uttryck men så blev inte fallet. När eftertestet studerades kunde det konstateras att eleverna i cykel 2 motiverade sina svar på ett annorlunda sätt jämfört med eleverna i cykel 1. De algebraiska resonemangen var inte lika frekventa och en högre andel av eleverna motiverade sina svar på ett sätt som antydde att de urskilt de PKA som designen avsett att synliggöra.

Designen i cykel 2 bedömdes, både med avseende på gjorda observationer och med avseende på elevernas testresultat, ha synliggjort PKA förhållandevis väl. Inledningsvis var det därför inte på något sätt uppenbart hur designen inför cykel 3 skulle revideras. De övergripande revideringarna inför cykel 2 hade dock varit två stycken och inför cykel 3 beslutades att pröva den ena av dem. De grafer som användes i momenten byttes därför återigen ut och i designen för cykel 3 användes nästan uteslutande grafer till polynomfunktioner av grad 0-2. Avsikten var att därmed försöka utreda hur stor del av skillnaderna mellan cykel 1 och 2 som kunde härledas till de uteblivna jämförelserna mellan grafer och algebraiska uttryck. Vid sidan om detta fanns ytterligare ett motiv till revideringen vilket var relaterat till eleverna. Eleverna i cykel 3 gick på mindre matematikintensiva program och de hade också ett något lägre resultat på tidigare kurser. Några av de grafer som använts i cykel 2 hade lett till avancerade tolkningar och det bedömdes som att detta skulle kunna leda till en utebliven möjlighet till urskiljning i cykel 3. Av samma anledning beslutades att i lektion 1 i cykel 3 utesluta begreppet antiderivata. Moment B och C innehöll därmed bara relationen mellan hastighet och acceleration och begreppet antiderivata togs upp först i designen för lektion 2. Vid sidan av dessa revideringar tillkom också moment D_2 sedan det uppmärksammats att ett antal elever i cykel 2 blandat ihop betydelsen av värde och lutning inom samma graf i uppgift 2b på eftertestet. Grafen representerade i detta fall en derivata och i ett intervall hade den en positiv lutning men ett negativt värde. De aktuella elevernas tolkning hade då varit att den deriverade funktionens lutning skulle vara positiv i intervallet vilket motiverades med att derivatans derivata (lutning) var positiv.

Vilka aspekter hos lärandeobjektet är kritiska att urskilja?

Relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata är ett komplext lärandeobjekt. Det vilar på förståelsen av både funktioner och derivata och gällande dessa två begrepp måste dessutom förståelsen innefatta den grafiska representationsformen. Före och under studien formulerades fem presumtiva kritiska aspekter. Analysen av innehållets behandling och elevernas testresultat pekar mot att två av dem var kritiska medan de andra tre var underordnade den ena av dessa två kritiska aspekter.

Kritiska aspekter

Det indirekta lärandeobjektet innefattade att kunna tolka relationen mellan grafer men också att med utgångspunkt i en graf kunna skissa en annan. De flesta eleverna hade före studien uppfattningen att derivata svarade mot lutningen i en punkt. En kritisk aspekt var att komplettera denna uppfattning genom att också urskilja derivatan som en funktion. Analysen av testresultaten tyder på att en stor andel av eleverna gjorde det men det är däremot svårare att säga hur kvalitativt elevernas erfarande var. Samtliga moment behandlade en relation mellan grafer. Eleverna fick därmed möjligheten att induktivt erfara derivatan som en funktion och det fanns såväl en strukturell som en referentiell aspekt. Samtidigt kan den strukturella aspekten av erfarandet ha varit begränsad till den externa horisonten. Helheten kan ha urskilts från sammanhanget utan att delarnas inbördes relation urskilts.

I moment A i cykel 2 och 3 synliggjorde proceduren att dra tangenter och beräkna deras lutning inte bara relationen mellan värde och lutning utan också derivatan som en funktion. Erfarandet kunde i detta fall innebära att lutningen på varje tangent gavs två innebörder. Dels beskrev den lutningen i punkten hos ursprungsfunktionen och dels så svarade den mot ett värde i derivatans funktion. I detta sätt att erfara derivatan som en funktion kunde även delarna som tillsammans formade en helhet urskiljas. I cykel 1 erbjöds inte eleverna det variationsmönster där derivatan synliggjordes som en funktion på detta sätt. Detta innebär inte att elevernas sätt att erfara i någon cykel kan sorteras in och beskrivas enligt det ena eller det andra sättet. Däremot kan det konstateras att innehållets behandling i cykel 2 och 3 erbjöd eleverna möjligheter till ett mer kvalitativt erfarande. Moment A gav i cykel 2 och 3 möjlighet att också urskilja delarna av derivatans funktion det vill säga den strukturella aspektens interna horisont.

Att urskilja derivatan som en funktion är enligt analysen en av lärandeobjektets kritiska aspekter. Den andra kritiska aspekten är att urskilja hur värdet på derivatans graf är relaterat till lutningen på den deriverade funktionens graf. I kombination gav urskiljandet av dessa båda aspekter möjlighet att utveckla de förmågor som specificerades i det indirekta lärandeobjektet. De kunde antingen urskiljas separat i form av att derivatan först urskiljdes som en funktion och därefter urskiljdes att värdet i varje punkt svarade mot en lutning. De kunde också, till exempel i proceduren där tangenter drogs, urskiljas simultant. Oavsett vilket visar analysen av eftertesten att urskiljandet av dessa två aspekter var gemensamt för de mest kvalitativa motiveringarna.

Ett stort antal elever resonerade under förtestet med utgångspunkt i likheter mellan graferna och på eftertestet var det många som hänvisade till betydelsen av vändpunkter och nollställen. Att bortse från det förstnämnda är nödvändigt och att utnyttja det sistnämnda är att föredra men det är inte förenligt med att det var kritiska aspekter. Nollställen och vändpunkter kan med fördel användas för att snabbt skaffa sig en överblick av en grafs utseende eller för att skissa en graf men det är samtidigt en aspekt som är underordnad relationen mellan värdet på derivatans graf och lutningen på den deriverade funktionens graf. Har det senare urskilts så har också det förra gjort det. Omvändningen gäller däremot inte vilket flera av elevernas motiveringar på testen vittnade om. Om betydelsen av nollställen och vändpunkter urskiljs innan relationen mellan lutning och värde urskilts kan detta leda till att nollställen och vändpunkter tjänar som ”kontrollpunkter” vilket i sin ensamhet innebär en ofullständig förståelse av lärandeobjektet.

Att resonera med utgångspunkt i likheter mellan graferna är enligt analysen en än mer underordnad aspekt. Visserligen var det en vanlig strategi men för de flesta bara i samband med att lärandeobjektet var nytt. Om eleverna urskilt relationen mellan värde och lutning är inte eventuella likheter mellan graferna längre intressanta. Detta betyder inte att grafernas, ofta olika, utseende är meningslöst att lyfta fram i undervisningen. Inledningsvis kan det vara att föredra men det innebär inte att det är kritiskt. Den sista presumtiva aspekten som formulerades efter cykel 2 är av samma karaktär. Att blanda ihop betydelsen av värde och lutning inom en och samma graf kan betraktas som ett misstag som lätt inträffar. Särskilt eftersom lärandeobjektet innebar en hög abstraktionsnivå och innefattade flera för eleverna nya begrepp. Designen i cykel 3 innehöll ett specifikt variationsmönster för att synliggöra missuppfattningen men samtidigt innebar det bara ytterligare ett sätt att synliggöra relationen mellan värdet på derivatans graf och lutningen på den deriverade funktionens graf.

På vilket sätt påverkar innehållets behandling elevernas lärande?

Testresultaten beskriver att eleverna på NA i större utsträckning erbjudits möjligheter att urskilja lärandeobjektets kritiska aspekter. Detta kan konstateras dels kvantitativt via tabell 19 men framför allt kvalitativt i form av karaktären på deras motiveringar. Motiveringarna på TE var jämfört med NA generellt mer knapphändiga och till större del inriktade på algebraiska resonemang. Resultatet på de båda eftertesten ger vid handen att ganska få elever på TE urskilt lärandeobjektets båda kritiska aspekter i samband med forskningslektionerna. Vad gäller SP/IL är deras resultat också lägre än NA men däremot enligt tabell 19 aningen högre än TE. Motiveringarna hos SP/IL liknade i allmänhet de på NA men var samtidigt något vagare. På eftertestet utmärker sig dessutom fråga 1 där endast en elev kunnat svara korrekt.

Variationens betydelse i de tre cyklerna

På vilket sätt kan skillnaderna av innehållets behandling i de tre cyklerna förklara skillnaderna i resultat? Om det iscensatta lärandeobjektet analyseras på ett övergripande plan, med ett variationsteoretiskt perspektiv, och i termer av vad som varierat och hållits invariant under de tre cyklerna kan följande tabell konstrueras:

Tabell 20. Iscensatt lärandeobjekt. Invariant (i) och variant (v).

Cykel	Representationsform	Typ av funktioner
1 TE	v	i
2 NA	i	v
3 SP/IL	i	i

Trots att momenten i varje cykel var likartade i form av innehåll och organisation var de iscensatta lärandeobjekten olika. *Representationsform* syftar på funktioner, derivator, antiderivator och respektive grafer. Under cykel 2 och 3 användes, i såväl tal som skrift, endast den grafiska representationsformen medan också den algebraiska representationsformen var vanligt förekommande i cykel 1. Det mest uppenbara var under moment A där designen i cykel 1 innebar att representera funktionerna både algebraiskt och grafiskt. Även om inte något av de resterande momenten innehöll några skriftliga algebraiska uttryck förekom de däremot ofta muntligt genom att läraren benämnde grafer algebraiskt. Det synliggjordes därmed för eleverna hur relationen mellan två grafer kunde erhållas med hjälp av deriveringsregler vilket också en stor andel av svaren på testuppgifterna vittnar om. Representationsformen är ingen kritisk aspekt i sig men i samband med att den varierade skapades ytterligare en kontrast. Denna uppkomna kontrast förefaller ha stängt möjligheten att urskilja relationen mellan värdet på derivatans graf och lutningen på den deriverade funktionens graf för många av eleverna.

Enligt tabell 20 var *typen av funktioner* invariant i cykel 1 och 3 vilket innebär att endast polynomfunktioner av låg grad förekom i undervisningen. I cykel 1 användes polynomfunktioner av grad 0-3 och i cykel 3 användes i huvudsak polynomfunktioner av grad 0-2. I det sista momentet i cykel 3 förekom förvisso en polynomfunktion av grad 3 men denna behandlades under en mycket kort tid varför elevernas möjlighet till urskiljning kan sägas ha varit begränsat till polynomfunktioner av grad 0-2. I cykel 2 förekom också vid flertalet tillfällen polynomfunktioner av grad 0-3 men eleverna fick också möta andra typer av funktioner upprepade gånger. Typen av funktioner är inte heller en kritisk aspekt men även i detta fall tyder resultaten på att en invarians av funktioner stängt möjligheten att urskilja relationen mellan värdet på derivatans graf och den deriverade funktionens lutning för många elever. Observera att en variation av funktioner kan ha olika innebörd för olika elevgrupper. Det avgörande i sammanhanget är huruvida eleverna kan relatera en graf till ett algebraiskt uttryck eller inte. De flesta eleverna i den aktuella studien bedömdes vara bekanta med polynomfunktioners grafiska utseende upp till grad 3 medan utseendet på andra funktioners grafer ansågs vara obekant för merparten.

Enligt både testresultat och observationer verkar betydelsen av såväl varierande representationsform som invarianta funktioner förstärkas när de kombineras. En tillbakablick på de presumtiva kritiska aspekterna förklarar varför. Innan forskningslektionerna formulerades de enligt följande:

Eleverna behövde urskilja:

- att derivatan kan vara både en funktion och lutningen i en punkt (PKA 1)
- att derivatans graf i regel inte liknar den deriverade funktionens graf (PKA 2)
- relationen mellan värdet på derivatans graf och lutningen på den deriverade funktionens graf (PKA 3)
- betydelsen av grafernas nollställen och vändpunkter (PKA 4)

Tesresultaten visade att de två första verkade ha urskilts av i princip samtliga elever och även den fjärde föreföll en stor del av eleverna fått syn på. Det som skiljer mellan cyklerna är i första hand den tredje kritiska aspekten och det var också den som diskuterades mest i möten mellan forskaren och lärarna inför cykel 2. Den ansågs ytterst central men hade enligt både testresultat och observationer inte synliggjorts i de flesta momenten. I cykel 1 varierade representationsformen medan funktionerna var invarianta vilket medförde att möjligheten för eleverna att urskilja relationen mellan värde och lutning begränsades. Tabell 20 beskrev cyklerna som helhet i termer av variation och invarians. Tabell 21 är ett exempel på hur respektive moment kan beskrivas på samma sätt.

Tabell 21. Exempel på invarianta respektive varianta aspekter per moment.

Representationsform	Värde	Lutning
i/v	i/v	i/v

Syftet i de flesta momenten var att synliggöra relationen mellan värde och lutning genom att variera dessa simultant (antingen via antiderivata/funktion eller via funktion/derivata). Detta gjordes också i samtliga cykler men om representationsformen samtidigt varierade, som i cykel 1, förhindrade det möjligheten till urskiljning. Eleverna erbjöds att tillämpa algebraiska resonemang vilket betydde att relationen mellan lutning och värde var överflödig och saknade mening.

Variationen av funktioner som användes i momenten fick också en avgörande betydelse och påverkade hur det iscensatta lärandeobjektet gestaltade sig. I både cykel 1 och 3 var typen av funktioner invariant. Kombinationen av variant representationsform och invarianta funktioner i cykel 1 gjorde att det iscensatta lärandeobjektet för många av eleverna antingen blev ett pussel av elementära grafer som skulle paras ihop två och två, eller en bekräftelse av deriveringsreglerna. I cykel 3 var representationsformen invariant. Därmed fick eleverna större möjlighet att urskilja relationen mellan värde och lutning men då funktionerna genomgående var invarianta i momenten erbjöds ingen möjlighet till generalisering. Det senare kan tänkas förklara varför så få elever svarade korrekt på uppgift 1, de hade bara mött polynomfunktioner av första och andra graden. Även om eleverna urskilt relationen mellan värde och lutning var urskiljandet begränsat till funktioner med ett visst utseende. I cykel 2 innebar kombinationen av invariant representationsform och varierande funktioner att relationen mellan värde och lutning kunde urskiljas och dessutom generaliseras. Variationsteoretiskt kan relationen mellan lutning och värde inom ett moment beskrivas som ett synkroniskt erfarande. I cykel 2 innebar variationen av funktioner att eleverna också erbjöds möjligheten till ett diakroniskt erfarande.

Empiriska jämförelser mellan cyklerna - variationen av representationsform

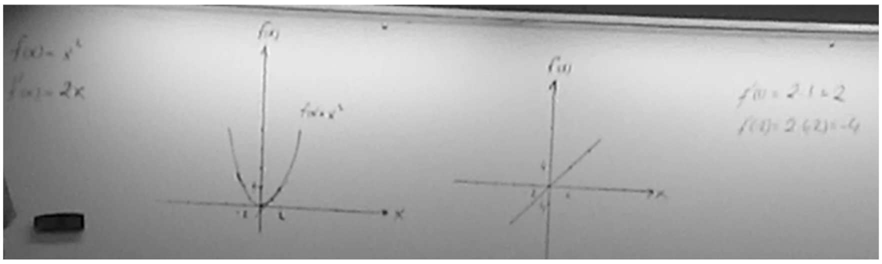
Skillnaden av innehållets behandling i de tre cyklerna kan illustreras med ett antal empiriska exempel. I detta avsnitt beskrivs på vilket sätt den varierande representationsformen påverkade elevernas möjligheter till urskiljning. I det efterföljande avsnittet beskrivs på motsvarande sätt hur variationen av funktioner spelade en betydande roll i de tre cyklerna.

<u>Representationsform moment A</u>

I moment A var syftet att eleverna skulle urskilja derivatan som en funktion, att derivatans graf inte liknade den deriverade funktionens graf och att värdet hos derivatans graf kunde relateras till lutningen hos grafen till den deriverade funktionen. I cykel 1 presenterades och deriverades därför funktionen $f(x) = x^2$ algebraiskt och motsvarande grafer skissades (se figur 15). Därefter beräknades derivatan för två värden på x med hjälp av det algebraiska uttrycket. Dessa värden jämfördes med lutningen hos tangenter till ursprungsfunktionen för samma x-värden men det gjordes ingen koppling till motsvarande värden i derivatans graf.

Excerpt 3:

> Lärare cykel 1: f prim av minus två, det vill säga lutningen i punkten x lika med två, förlåt minus två, x lika med minus två, lutningen i den punkten den har vi ju där va [pekar i funktionens graf], skissar vi den [skissar tangenten] så verkar den va negativ, det är negativ lutning. Och lutningens värde då, får vi genom att ta två gånger minus två, minus fyra [beräknar med hjälp av derivatans algebraiska uttryck $f'(x) = 2x$]. Så lutningen i punkten x lika med minus två är ju minus fyra.



Figur 15. Funktion och derivata representerade algebraiskt och grafiskt i cykel 1. Beräkningar av derivatans värde till höger i bild. Motsvarande tangenter syns (svagt) i funktionens graf.

I cykel 2 och 3 var syftet med momentet detsamma och liksom i lektionsdesignen i cykel 1 slutade det med att funktion och derivata fanns bredvid varandra på tavlan. I cykel 1 skissades dock graferna i sin helhet och på samma gång med hjälp av de algebraiska uttrycken. I cykel 2 och 3 ritades inledningsvis endast funktionens graf och detta utan hänvisning till något algebraiskt uttryck. Eleverna kände förmodligen igen den som grafen till en andragradsfunktion men det var inget lärarna noterade utan de benämnde den bara som en funktion $f(x)$. Istället synliggjordes hur derivatans graf kunde konstrueras bit för bit med hjälp av lutningen hos tangenter till funktionen. Lutningen beräknades för respektive tangent och lutningen i varje punkt prickades in som ett värde i derivatans graf (se figur 16). Fem punkter innebar ingen graf men som läraren i cykel 2 konstaterade:

Excerpt 4:

> Lärare cykel 2: Det skulle jag kunna hålla på några dagar med, å pricka in punkter, å då skulle man kanske kunna tänka sig att det hamnar punkter, nånstans, på det här sättet [prickar in ett antal punkter till i derivatans graf],

å då ser ni att det verkar ju som att till varje, till varje x-värde här [pekar på ursprungsfunktionen], så finns det faktiskt en tangent och tangenten är ett derivatavärde så att, vi har på något sätt påvisat här att, vi kan få, till varje x-värde i en funktion så kan vi alltså få ett derivatavärde och vi kan få derivatan som en funktion.

Figur 16. Graf med tangenter (syns svagt) och derivatans graf i cykel 3.

I alla cykler synliggjordes att derivatan var en egen funktion och att dess graf inte liknade funktionens graf så i den meningen uppfylldes syftet. Elevernas möjlighet att urskilja hur graferna var relaterade till varandra, det vill säga det indirekta lärandeobjektet, skiljde sig däremot åt. I cykel 1 hamnade fokus på algebraiska beräkningar och derivatans värde berördes inte grafiskt överhuvudtaget. I cykel 2 och 3 var istället graferna i fokus och funktionens lutning kontrasterades mot derivatans värde, de varierade simultant.

Tabell 22. Varianta respektive invarianta aspekter i moment A. * Derivatans värde varierade symboliskt men inte grafiskt.

Moment A		Representationsform	Värde	Lutning
Cykel 1	Antiderivata	-	-	-
	Funktion	v	-	v
	Derivata	v	-*	-
Cykel 2 och 3	Antiderivata	-	-	-
	Funktion	i	v	v
	Derivata	i	v	-

Tabell 22 sammanfattar moment A med avseende på vad som varierade (v) och vad som hölls invariant (i) i de tre cyklerna. Ett streck (-) betyder att detta inte behandlades. Tabellen åskådliggör hur den varierande representationsformen i cykel 1 ledde till en utebliven variation (grafiskt) av derivatans värde. I cykel 2 och 3 erbjöds inte eleverna möjligheten att resonera algebraiskt på grund av att representationsformen var invariant och relationen mellan graferna blev därmed synliggjord på ett tydligare sätt.

Representationsform moment B

I momentet skissades grafer som visade sträckor, hastigheter och accelerationer. Syftet var att generalisera moment A men nu i koppling till vardagliga händelser och i alla tre cykler synliggjordes derivatans betydelse i den aktuella händelsen upprepade gånger. Liksom i moment A erbjöds emellertid eleverna i cykel 1 att resonera algebraiskt. Excerpt 5 återger konversationen i samband med att grafen som visade sträckan skulle skissas.

> Excerpt 5:
>
> Läraren: Hur blir det med sträckan? Jag såg ni hade ett par förslag där nere. Den gruppen längst ner där.
>
> Elev: Så [visar med handen].
>
> Läraren: Ja som en...
>
> Elev: Halvmåne.
>
> Läraren: Ja, vad är det för typ av funktion?
>
> Elev: x^2
>
> Läraren: Ja, x^2va? Skulle vi kunna köpa att det är nåt sånt där?
>
> Elev: Mycket sannolikt.

När sambandet mellan sträcka och hastighet diskuterades en stund senare utnyttjades det faktum att sträckan var en andragradsfunktion.

> Excerpt 6:
>
> Läraren: [...] Hur är sambandet mellan sträcka och hastighet? Finns det nåt liknande samband där?
>
> Eleverna: [tystnad]
>
> Läraren: Vi skulle kunna tänka så här. Om det där var en x^2-kurva [pekar på $s(t)$], om jag deriverar den, vad får jag då?
>
> Elev: Den där nere [$v(t)$].
>
> Läraren: Precis, det var ju precis vad vi gjorde här [pekar på graferna från moment A], vi deriverade en andragradskurva och vad fick vi? Jo en rät linje. Så att $s'(t)$ är helt enkelt lika med hastigheten. Och deriverar jag hastigheten så får jag accelerationen. Och det är helt enkelt dom då [pekar på graferna] funktionerna som vi har ritat här.

Istället för att synliggöra relationen mellan lutningen hos grafen för sträckan och värdet i grafen för hastigheten i olika punkter behandlades graferna istället som helheter. Detta kan jämföras med hur sambandet mellan sträcka och hastighet behandlades i cykel 2.

> <u>Excerpt 7:</u>
>
> Läraren: Om vi tittar på $s(t)$-diagrammet då. Ja då ser vi ju att lutningen i olika punkter är ju inte konstant. I början [pekar på grafen] så är lutningen liten och vad är lutningen i ett $s(t)$-diagram? Jo det är lika med hastigheten. Hastigheten är ju låg här [pekar i början på grafen], lutningen ökar när tiden går [använder pennan som tangent och flyttar längs med grafen]. Vi skulle kunna räkna ut lutningarna men [...] så lutningarna här [pekar i $s(t)$-grafen] kan vi få som värdena här [pekar i $v(t)$-grafen].

Cykel 3 tog inte upp sambandet mellan sträcka och hastighet men motsvarande diskussion hölls om sambandet mellan hastighet och acceleration. Även i denna cykel riktade läraren in sig på relationen mellan lutning och värde och för att ytterligare förtydliga skrevs detta ner på tavlan (se figur 17).

Figur 17. ”Konstant lutning” och ”konstant värde” noterat vid respektive graf.

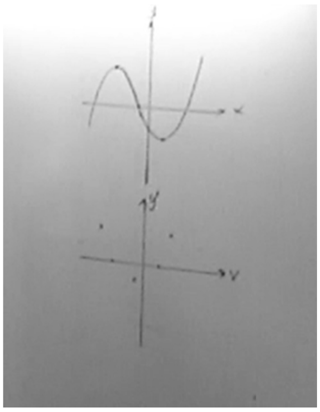
Tabell 23 beskriver moment B med avseende på vilka aspekter som varierade respektive hölls invarianta. Sträckan svarade i momentet mot antiderivatan vilket förklarar varför denna inte finns med i tabellen för cykel 3. Tabellens utseende är liknande i de tre cyklerna med undantag för att antiderivatans (sträckans) representationsform varierade i cykel 1 vilket medförde att funktionens värde inte behövde varieras. En viktig skillnad eftersom eleverna på grund av detta fick möjlighet att urskilja hur relationen mellan graferna kunde beskrivas algebraiskt.

Tabell 23. Varianta respektive invarianta aspekter i moment B.

Moment B		Representationsform	Värde	Lutning
Cykel 1	Antiderivata (s)	v	-	v
	Funktion (v)	i	-	v
	Derivata (a)	i	v	-
Cykel 2	Antiderivata (s)	i	-	v
	Funktion (v)	i	v	v
	Derivata (a)	i	v	-
Cykel 3	Antiderivata (s)	-	-	-
	Funktion (v)	i	-	v
	Derivata (a)	i	v	-

<u>Representationsform moment F</u>

I cykel 1 innebar momentet att med utgångspunkt i en tredjegradsfunktion skissa grafen till derivatan. Läraren visade på fördelen av att utgå från vändpunkterna hos grafen till funktionen då dessa var lätta att markera i koordinatsystemet för derivatans graf eftersom de hamnade på x-axeln. Därefter påpekades att det fanns ett ställe mellan vändpunkterna där lutningen var som brantast vilket också markerades. Slutligen konstaterades att lutningen hos funktionens graf var positiv både i början och i slutet vilket gav upphov till ytterligare två punkter på derivatans graf. Nu fanns dels grafen till funktionen och dels fem punkter i derivatans graf på tavlan (se figur 18). Det som återstod var att binda samman punkterna.



Figur 18. Funktionens graf och inprickade punkter i derivatans graf.

Efter att genom hela processen ha utgått från relationen mellan derivatans värde och lutningen hos funktionens graf erbjöd läraren i detta läge även eleverna att urskilja sambandet algebraiskt.

> Excerpt 8:
>
> Läraren: Vad skulle det här kunna vara för typ av funktion [syftar på de fem punkter han just prickat in]?
>
> Elev: En andragradare.
>
> Läraren: En andragradare verkar det vara [skissar grafen]. Det här då [pekar på ursprungsfunktionen]? Vad skulle det kunna va för typ av funktion, våran ursprungsfunktion, om derivatan nu är en andragradare, vad skulle detta kunna va då?
>
> Elev: Tredjegrad.
>
> Läraren: Det borde va en tredjegradare ja.

Lärarens intention var att visa på rimligheten i skissen genom att hänvisa till de sedan tidigare kända deriveringsreglerna. Av svaren på eftertesten att döma verkade dock detta alternativa sätt att urskilja sambandet fått en överordnad roll hos en stor del av eleverna.

I cykel 2 utgick momentet från samma tredjegradsfunktion som i cykel 1 men istället skissades funktionens antiderivata. I denna process var representationsformen invariant och antiderivatans graf skissades med utgångspunkt i värdet hos funktionens graf i olika punkter. I cykel 3 genomfördes inte moment F.

Tabell 24. Varianta respektive invarianta aspekter i moment F.

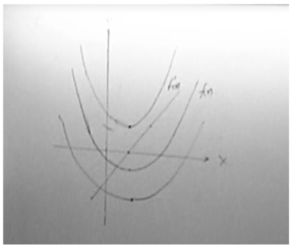
Moment F		Representationsform	Värde	Lutning
Cykel 1	Antiderivata	-	-	-
	Funktion	v	-	v
	Derivata	v	v	-
Cykel 2	Antiderivata	i	-	v
	Funktion	i	v	-
	Derivata			-

Tabell 24 återger hur både lutning och värde varierade i de båda cyklerna. Variationen av representationsform i cykel 1 gav dock återigen eleverna möjlighet att urskilja sambandet mellan graferna algebraiskt.

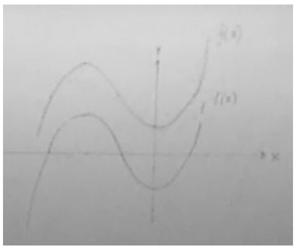
Empiriska jämförelser mellan cyklerna - variationen av funktioner

Variationen av funktioner såg olika ut i de tre cyklerna. Dels kan detta beskrivas i termer av vilka funktioner eleverna mötte under forskningslektionerna som helhet men analysen pekar mot att den progression som variationen medförde var lika viktig för elevernas möjligheter till urskiljning. Det föreföll med andra ord inte bara vara variationen som sådan utan också när och hur denna variation uppkom som var betydelsefullt. Skillnaden mellan cyklerna återfinns framförallt genom att betrakta de tre sista momenten (E-G) som en helhet. Skillnaden i innehåll i de tre momenten i respektive cykel var betydande och innebörden av den i cykel 2 större variationen analyseras nedan.

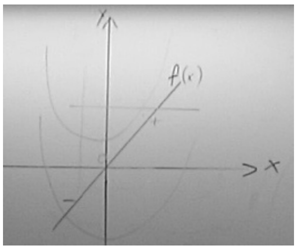
I moment E studerades betydelsen av att grafen försköts i höjdled. I cykel 1 och 3 illustrerades detta med utgångspunkt i en andragradsfunktion medan cykel 2 istället utgick från en tredjegradsfunktion (se figur 19-21).



Figur 19. Graf förskjuten i höjdled i cykel 1.



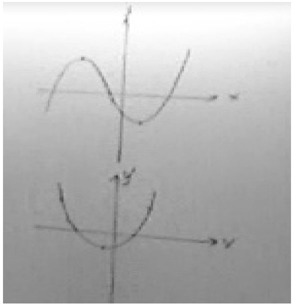
Figur 20. Graf förskjuten i höjdled i cykel 2.



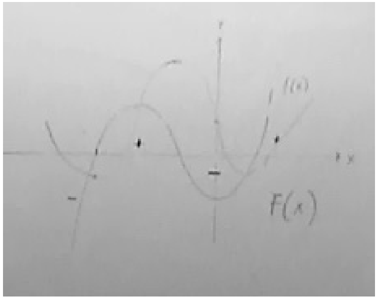
Figur 21. Graf förskjuten i höjdled i cykel 3.

Polynomfunktioner av grad 3 hade visserligen förekommit i undervisningen innan studien men jämfört med andragradsfunktioner som användes i cykel 1 och 3 innebar det ändå en viktig skillnad. Dels på grund av att andragradsfunktioner förekommit betydligt mer frekvent i tidigare kurser men också på grund av att det innebar en kontrast mot funktionerna i de tidigare momenten. I samtliga tre cykler hade alla moment så långt utgått från första- och andragradsfunktioner. Övergången till en tredjegradsfunktion innebar endast en subtil skillnad men samtidigt också en betydelsefull variation eftersom eleverna i detta skede började känna sig bekväma med utseendet på graferna. Att då återigen utgå från en andragradsfunktion ökade risken att eleverna direkt såg den räta linjen (som derivatan innebar) framför sig och missade urskiljandet av den kritiska aspekten (betydelsen av funktionens nollställen).

Moment F var nära kopplat till moment E och syftet med momentet var att synliggöra betydelsen av nollställen och vändpunkter. Cykel 1 och 2 utgick i momentet från samma tredjegradsfunktion men i cykel 1 skissades derivatan och i cykel 2 skissades antiderivatan (se figur 22 och 23).



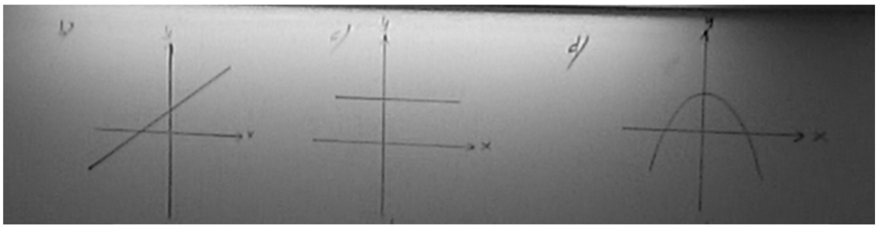
Figur 22. Funktion och derivata i cykel 1.



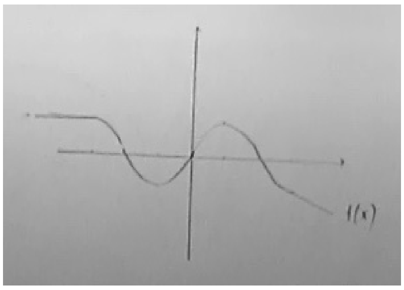
Figur 23. Funktion och antiderivata i cykel 2. Funktionens (röd) värde markerat med plus och minus i de olika intervallen mellan nollställena.

Förutom att eleverna i cykel 2 nu mötte ytterligare en typ av (för de flesta okänd) funktion innebar progressionen återigen att de inte kunde luta sig tillbaka och förlita sig på tidigare kunskaper och erfarenheter om grafers utseende. De blev tvingade att rikta sin uppmärksamhet mot relationen mellan graferna och på vilket sätt utseendet på den ena påverkade utseendet på den andra. En rimlig fråga att ställa är om inte detsamma gällde för eleverna i cykel 1 i och med införandet av en tredjegradsfunktion; innebar inte det samma progression som i cykel 2 men ett moment senare? Svaret är å ena sidan ja men om moment E-G studeras som en helhet faller till stora delar den möjlighet till urskiljning som eleverna i cykel 1 erbjöds i och med moment F. Detsamma gäller eleverna i cykel 3 då de inte genomförde moment F. Designen av moment G nedan förklarar varför.

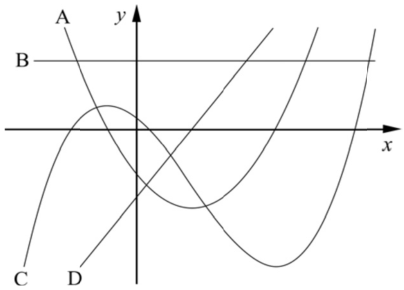
Moment G innebar i samtliga cykler en uppgift till eleverna men den var formulerad på olika sätt. I cykel 1 skulle eleverna skissa derivatan och antiderivatan till tre olika funktioner (se figur 24). I cykel 2 skulle eleverna skissa derivata och antiderivata till en funktion (se figur 25). I cykel 3 skulle eleverna med utgångspunkt i fyra befintliga funktioner (se figur 26) svara på frågor om vilken funktion som var derivata/antiderivata till vilken.



Figur 24. Funktioner i moment G i cykel 1.



Figur 25. Funktion i moment G i cykel 2.



Figur 26. Funktioner i moment G i cykel 3.

I detta sista moment fanns i cykel 2 inga möjligheter för eleverna att kopiera tidigare skisser eller använda sig av algebraiska resonemang. För att lösa uppgiften krävdes att relationen mellan lutning och värde hade urskilts. I den gemensamma genomgången av utseendet på derivatans graf var det tydligt vad som var i förgrunden i lärarens resonemang.

> <u>Excerpt 9:</u>
>
> Läraren: Då får man memorera igen, vad är det vi håller på med? Vi ska rita derivatan till den här funktionen det vill säga vi ska kolla på lutningen och få fram derivatan. Börjar vi från vänster, lutningen fram hit [sveper med pennan längs grafens inledande horisontella del]? Vad säger ni?
>
> Elev: Noll.
>
> Läraren: Noll. Det innebär att derivatans värde är noll. Det kan vi vara övertygade om [skissar derivatans graf längs med x-axeln i det aktuella partiet]. Sen ser vi att det är negativ lutning ända fram dit [sveper samtidigt med pennan längs det första avtagande partiet] det vill säga derivatans värde ska va negativt.

På motsvarande sätt skissades resten av derivatans graf och processen upprepades för att skissa antiderivatan.

I cykel 2 innebar moment G ytterligare en progression jämfört med moment F. I cykel 1 innebar momentet istället ett steg tillbaka. I första läget skulle derivatan till de tre funktionerna skissas och ingen av dessa skisser krävde att eleverna utgick från grafernas lutning. De hade gjort samma skisser innan och kunde titta tillbaka i sina anteckningsblock om de var osäkra. Som inledning på momentet hade läraren också, helt enligt designen, illustrerat med ett exempel hur uppgiften gick till. Det var då tydligt att variationen av funktioner varit obetydlig.

Excerpt 10:

Läraren: Ska vi ta och börja med derivatan där då. Och den kan vi ju nu den har vi ju gjort ett par gånger va? Kolla var vi har minpunkten [pekar på grafen], derivatans värde lika med noll [markerar punkten]. Positivt till höger [pekar på grafen utan att vända sig mot eleverna], negativt till vänster [konstaterar utan att peka och markerar punkterna], lägger våran räta linje där [skissar grafen och fortsätter med antiderivatan utan vidare diskussion].

Den gemensamma genomgången i cykel 1 som följde efter att eleverna skissat sina förslag var av liknande karaktär. Graferna hade redan skissats i tidigare moment och tonvikten låg på att behandla dem som helheter, vilken graf passade i det aktuella fallet. Läraren gjorde i några fall kopplingar mellan lutningen i en graf och värdet i en annan men sammanfattningsvis var denna relation i bakgrunden. Att tiden dessutom började bli knapp var också en påverkansfaktor som inverkade på genomgångens upplägg, den fick inte bli alltför utdragen.

Tidsfaktorn spelade viss roll i sista momentet för cykel 1. För cykel 3 kom denna att påverka hela den andra lektionen i cykeln vilket fick konsekvenser för moment E-G. Moment E bakades in i moment D och moment F hann aldrig genomföras. Avslutningsvis fick moment G genomföras i högt tempo och relationen mellan graferna som var tänkta att studeras ingående fick istället konstateras i snabb takt. Designen innebar en mindre variation av funktioner jämfört tidigare cykler och den forcerade avslutningen medförde att variationen minskades ytterligare.

Skillnaden mellan intentionellt och iscensatt lärandeobjekt i cykel 3

Analysen av innehållets behandling har hittills varit relaterad till aspekter som kan härledas till skillnader i de olika designerna. I cykel 1 och 2 var avvikelserna från designen så små att orsakerna till testresultaten till stor del kan spåras i denna analys. För eleverna i cykel 3 kom dock andra, oförutsedda, aspekter i form av elevernas föreställningar och förkunskaper att påverka. Dessa ledde inte lektionerna bort från innehållet men de tvingade fram en utvidgad diskussion om ett antal begrepp som var nödvändiga att förstå för att de aktuella momenten skulle ges någon mening. Tiden som därmed togs i anspråk orsakade den påskyndade avslutningen av cykeln vilket i sin tur påverkade elevernas möjlighet att urskilja lärandeobjektet.

För samtliga elever i studien var lärandeobjektet nytt. När innehållet var begränsat till grafer skissade i koordinatsystem som saknade gradering och markering av axlarna var antalet inspel från eleverna obetydligt. Sannolikt har detta sin förklaring i svårigheten att relatera innehållet till tidigare uppfattningar och därmed begränsas vad som kan ifrågasättas. Moment B och C innebar däremot att lärandeobjektet placerades i en naturlig kontext och detta fick olika konsekvenser i de tre cyklerna. I cykel 1 och 2 väckte begreppen sträcka, hastighet och acceleration ingen uppmärksamhet och eleverna verkade acceptera derivatans betydelse i sammanhanget. Förklaringen är förmodligen elevernas studier i fysikämnet där begreppen förekommit vid flertalet tillfällen. Dessa elever hade också tidigare skissat grafer liknande dem i designen av studien.

I cykel 3 ledde däremot moment B och C till diskussioner vilka kretsade kring frågor som inte var planerade att behandlas. Betydelsen av begreppet *konstant* acceleration och betydelsen av att hastigheten och accelerationen var *relaterade* till varandra (vilket beskrevs i uppgiftstexten till eleverna i moment B) var exempelvis föremål för ifrågasättanden från eleverna. I de tidigare cyklerna hade kopplingen till fysikämnet varit uppenbar men nu var läraren i en annan situation. I diskussion med eleverna försökte hon reda ut begreppet konstant acceleration och det diskuterades också om det kunde finnas situationer där acceleration och hastighet inte är relaterade till varandra.

Excerpt 11:

Elev: Det står ju att hastighet och acceleration är relaterade till varandra.

Läraren: Ja.

> Elev: Det betyder ju att dom är beroende av varandra, ökar den så ökar den. Om det inte hade stått så hade väl inte linjen blivit rät? Eller är linjen rät bara för att dom är relaterade till varandra?
>
> Läraren: [...] Kan hastighet och acceleration vara inte relaterade till varandra? Om vi vänder på frågan.
>
> Elev: Den kan ju öka, i början så kanske den accelererar ganska långsamt sen kanske den gasar upp jättefort.
>
> Läraren: Ja och hänger hastighet ihop med acceleration då eller? Var för sig? Vad tror ni? [...]
>
> Elev: Det är klart att hastigheten beror på hur mycket man accelererar.

Läraren fortsatte därefter att reda ut innebörden av ordet *konstant*. Hon hänvisade bland annat till grafen för hastigheten och konstaterade att hastigheten inte var konstant eftersom värdet ökade, däremot var grafens lutning konstant. En elev tog i samband med detta upp en diskussion om grafens utseende om hastigheten de facto varit konstant. Eleven menade att det borde leda till en horisontell linje vilket läraren utnyttjade för att skissa grafen till accelerationen. På tavlan fanns nu de två graferna och läraren förtydligade ytterligare genom att skriva *konstant lutning* vid grafen för hastigheten och *konstant (samma) värde* vid grafen för accelerationen. Diskussionen om accelerationen var inte slut och kom nu att kretsa kring varför grafen inte startade i origo samt om det var praktiskt möjligt att trycka så jämnt på gaspedalen som krävdes för en konstant acceleration. Läraren hänvisade till att det var en modell och kunde till slut flytta fokus till grafernas utseende.

Med tanke på elevernas funderingar och ifrågasättanden under lektion 1 beslutades att i designen för lektion 2 utöka tiden för repetition. Bland annat skulle moment B och C repeteras innan nästa moment tog vid. Repetitionen av lektion 1 hade i de två första cyklerna tagit 3-5 minuter. I cykel 3 var cirka 10 minuter avsatt till repetition men det tog vid genomförandet ungefär tre gånger så lång tid varför halva lektionen ägnades åt detta. Inledningsvis skissade läraren graferna för stenen som kastades i moment C och nu innebar det beskrivningar av såväl höjden som hastigheten och accelerationen. Läraren hade tydliga intentioner att eleverna skulle ge förslag på skissernas utseende men responsen var ganska svag. Det verkade som om grafernas utseende fortfarande var oklara för eleverna vilket medförde att läraren vid flera tillfällen fick upprepa eller utvidga sina resonemang. Läraren fick i och med detta många möjligheter att synliggöra hur värdet i en graf var relaterat till lutningen i en annan men utgångspunkten var hela tiden polynomfunktioner av grad 0-2 (eftersom det i grunden var konstant acceleration som skulle förklaras). Parallellt kom interaktionen mellan lärare och elever återigen att handla om flera aspekter som inte var planerade. Till exempel diskuterades varför koordinatsystemen inte var graderade och varför graferna skissades på den plats de gjorde i höjdled (vilket skulle tas upp i ett senare moment).

Det iscensatta lärandeobjektet i cykel 3 bidrar till förklaringen av elevernas testresultat och det visar också på hur elevernas möjligheter till urskiljning styrs av innehållets behandling. Det iscensatta lärandeobjektet i cykel 3 synliggjorde hur lutningen hos en graf påverkar utseendet på derivatans graf men möjligheten till urskiljning blev samtidigt begränsad till vissa typer av funktioner. En begränsning som inte var tänkt men som uppkom på grund av en design som inte var lämplig för den aktuella elevgruppen. Bilen och stenen var tänkta att generalisera begreppet derivata till vardagliga händelser men inom SP/IL var momenten där de ingick inte passande. För dessa elever utgjorde bilen och stenen vardagliga *objekt* men *händelserna* som beskrevs i momenten kan inte beskrivas som vardagliga.

Kapitel 7: Diskussion

Det kan diskuteras hur stor del av skillnaderna i resultaten som kan härledas till skillnaderna i innehållets behandling under forskningslektionerna. Eleverna på NA stod för den bästa resultatutvecklingen från förtest till fördröjt eftertest och orsakerna till detta kan vara flera. Samtidigt är det inte det kvantitativa testresultatet utan kvaliteten på elevernas motiveringar som i första hand analyserats. Inom programmen var elevernas motiveringar relativt koherenta medan de skilde sig åt mellan programmen och dessa likheter och skillnader kan spåras i analysen av innehållets behandling. Därmed inte sagt att det inte finns ett antal andra faktorer, vilkas betydelse inte fångades, som också kan ha påverkat resultatet.

På samma gång som analysen visar att elevernas möjlighet till urskiljning påverkas av innehållets behandling framgår också att elevernas bakgrund påverkar hur behandlingen kan se ut. Cykeln som innefattade SP/IL genomfördes sist i studien och därmed fanns flest testresultat och observationer tillgängliga vid designen. Detta kunde delvis utnyttjas men samtidigt blev det uppenbart att det inte går att forcera undervisningen och att elevernas uppfattningar måste tas i beaktande.

På grund av elevernas skiftande bakgrund är det extra svårt att jämföra resultatet på SP/IL med TE/NA. Visserligen var bara ett fåtal av svaren, oavsett program, på förtestet korrekta och under intervjuerna som genomfördes före studien framkom liknande uppfattningar hos eleverna i alla de tre grupperna. Detta till trots kan inte deras förutsättningar inför studien på något sätt jämställas. Provresultat och betyg erhållna före studien var på SP/IL lägre och analysen pekar mot att deras, av allmän matematisk karaktär, något lägre nivå på förkunskaper påverkade deras möjligheter till ett kvalitativt erfarande av lärandeobjektet. Delvis redan i designen, eftersom förändringarna inför cykel 3 på ett sätt stred mot erfarenheterna från de två första cyklerna, men också under genomförandet då designen förändrades till följd av interaktionen mellan lärare och elever. Noterbart är dock att de uppkomna frågorna och diskussionerna i cykel 3 inte uppfattades härstamma från kognitiva begränsningar hos eleverna utan bedömdes snarare vara en effekt av att eleverna inte tidigare erbjudits en undervisning som berört det aktuella innehållet.

Att använda tidigare forskningsresultat

Tidigare forskningsresultat spelade en betydande roll för licentiatuppsatsens empiriska studie då de påverkade såväl presumtiva kritiska aspekter som lektionsdesignen. De forskningsresultat som analyserades före studien var till största delen internationella och frågan var hur gångbara resultaten var med avseende på de i studien ingående eleverna.

Forskaren genomförde inför lektionsdesignen intervjuer, dels i samband med pilotstudien och dels i samband med huvudstudien. Totalt innebar detta 10 intervjuer med en sammanlagd intervjutid om tre timmar. Under dessa tre timmar framkom i princip inga uppfattningar hos eleverna som inte fanns dokumenterade i litteraturen. Att elever, likt elev 1 och 4 i pilotstudien, sökte likheter mellan ursprungsgrafen och grafen till derivatan fanns beskrivet av bland andra Nemirovsky och Rubin (1992) och Hähkiöniemi (2006b) menar att detta är ett vanligt förekommande fenomen. Elev 3 förde å sin sida tankarna till Krutetskiis (1976) geometriska typ då den fokuserade helt på grafens utformning och inte på det algebraiska uttrycket. Elev 4 personifierade det resonemang som förts av Aspinwall et al. (1997) där två olika tänkanden, det visuella och det analytiska, stod i konflikt med varandra. Alla fyra eleverna visade också att de gärna resonerade via procedurer om möjlighet fanns, något som också var väldokumenterat sedan tidigare (se t.ex. Bergqvist et al., 2003; Jukić & Dahl, 2012). De sex elever som intervjuades inför huvudstudien hade mindre erfarenhet av derivata jämfört med eleverna i pilotstudien. Uppfattningarna fanns dock återigen redovisade i tidigare forskningsresultat, bland annat i form av derivata som en samling regler (se t.ex. Berry & Nyman, 2003; Orton, 1983) eller att inte inse tangentens betydelse (Asiala et al., 1997). Även svårigheten att förstå innebörden av derivata i olika representationsformer var tydlig hos eleverna (Zandieh, 2000). Gällande derivata visade intervjuerna att tidigare forskningsresultat gav en god bild av hur elever uppfattade begreppet men också att elevers uppfattningar verkade vara likvärdiga mellan länder. Att tidigare studier var genomförda med exempelvis danska, turkiska, kroatiska eller amerikanska elever påverkade inte överförbarheten i resultaten.

Den goda överensstämmelsen mellan de intervjuade elevernas uttryckta förståelse och tidigare forskningsresultat medförde att de senare var till hjälp vid designen av undervisningen. Samtidigt ger inte tidigare forskningsresultat alla nycklar till en optimal lektionsdesign. Det är i lika hög utsträckning tolkningen, bearbetningen och införlivandet i den aktuella kontexten som är avgörande. De tidigare forskningsresultaten redogjorde i det aktuella fallet främst för elevers missuppfattningar. Frågan som i första hand behövde ställas var hur dessa missuppfattningar beskrev vad eleverna behövde urskilja; inte vad de inte urskilde. Gällande detta gav de tidigare resultaten inte lika tydliga svar och de beskrev inte heller hur undervisningen skulle se ut. Implicit gavs visserligen ett antal allmänna råd för undervisningens utformning och exempelvis lyftes betydelsen av att den utvecklade en förståelse för begreppet derivata i olika representationsformer. I studien visade sig dock effekten av att variera representationsformen leda till en minskad möjlighet för eleverna att urskilja lärandeobjektet. Det betyder inte slutsatsen var felaktig och såväl forskaren som de i studien deltagande lärarna delade, och delar, uppfattningen att det är en viktig förmåga. I det läge eleverna som deltog i studien befann sig var däremot, enligt analysen av resultatet, en avgränsning till den grafiska representationen att föredra. Exemplet beskriver hur forskningsresultat inte alltid ger direkt information om undervisningen utan behöver ses i ljuset av de aktuella elevernas förutsättningar. Detta ställer höga krav på lärarna, framförallt i form av en förståelse av innehållet och vad det innebär att kunna det. Lärarna i den aktuella studien hade samtliga gedigna ämneskunskaper vilket kan pekas ut som en avgörande faktor i processen att försöka identifiera på vilket sätt designen kunde förändras för att underlätta urskiljningen av lärandeobjektets kritiska aspekter.

Lärandeobjektet och variationsteorin

Lärandeobjektet inom denna uppsats empiriska studie ligger närmast Talls (2008) och Hähkiöniemis (2006a) utgångspunkt i form av att urskilja derivatan som ett objekt. Tall (2008) menar att om undervisningen om derivata startar i den förkroppsligade världen (Tall, 2004a, 2004b, 2008) leder det till att derivatans symboliska processer och dess definition ses som mer naturligt. Hähkiöniemi (2006a) menar att det finns fördelar med att inledningsvis möta begreppet derivata i den grafiska representationen istället för att utföra beräkningar. I Hähkiöniemis (2006a) studie ledde detta till att eleverna tillägnade sig flertalet tankeredskap som de använde i diskussioner om derivata. Hähkiöniemis (2006a) och Talls (2008) resonemang kan jämföras med Sfards (1991) och Dubinsky och Mc Donalds (2001). De senare beskriver hur inlärningen startar med enkla processer och först i ett senare skede förstås det matematiska begreppet som en statisk helhet. Huruvida undervisningen om derivata ska starta med beräkningar eller med tolkning av grafer kan relateras till den sedan länge inom matematikdidaktiken utbredda diskussionen om procedurella kontra konceptuella kunskaper vilken berördes i introduktionen. Valet av lärandeobjekt ska inte tolkas som att licentiatuppsatsen tar ställning i denna fråga men kan däremot ses i ljuset av den övervikt på algebraiska resonemang hos elever som framkom i forskningsöversikten. Att urskilja aspekter av lärandeobjektet handlar således inte om att ersätta utan om att komplettera elevernas algebraiska färdigheter med ett grafiskt urskiljande.

En förståelse för derivata innebär mer än algebraiska manipulationer och uppfattningar i form av det Zandieh (2000) benämner som pseudo-object. Zandieh (2000) pekar på vikten av att elever ges möjlighet till en förståelse av derivata som innefattar alla tre lagren i hennes matris. Att urskilja relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata berör alla tre lagren i den grafiska kontexten i Zandiehs (2000) matris. Detta eftersom det inte räcker med att urskilja innebörden av en tangent (limit i matrisen) utan funktionen behöver urskiljas i form av ett (oändligt) antal tangenter (function i matrisen). Inom den ämnesdidaktiska forskningen om derivata påpekas ofta att elever behöver arbeta med flera representationsformer (se t.ex. Berry & Nyman, 2003; Haciomeroglu et al., 2010; Koirala, 1997; Orton, 1983) vilket gör att studier som rör elevers lärande av grafiska samband är motiverade. Om eleverna urskilt de kritiska aspekterna i relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata har eleverna erhållit en kvalitativ innebörd av begreppet derivata vilket i sig kan underlätta för att ge exempelvis derivatans definition en mening.

Variationsteorins sätt att förklara lärandeprocessen betyder inte att de beskrivningar som ges av exempelvis Tall (2004a, 2004b, 2008), Sfard (1991), Dubinsky och Mc Donald (2001) och Duval (2006) inte kan tillskrivas någon mening. Dessa beskrivningar är dock i första hand statiska och redogör på ett övergripande och ämnesrelaterat plan för den kognitiva utvecklingen i termer av olika nivåer. När eleven behärskar någonting skapar det i sin tur möjligheter för en fortsatt utveckling och slutprodukten av beskrivningarna består i att kunnandet formuleras i form av vilka färdigheter och vilken förståelse eleverna har vid de olika nivåerna. Konkreta exempel på vad kunnandet kan bestå av presenteras men i ett mikro-perspektiv saknas en redogörelse för vad som möjliggör utvecklingen, framförallt inom olika nivåer. Tall (2008) menar till exempel att de tre världarna bör förenas i matematikundervisningen men han klargör inte hur de kvalitativa skillnaderna inom världarna uppstår. Exempelvis beskrivs hur eleven först lär sig räkna för att sedan kunna uppfatta talbegreppet men vad som möjliggör för eleven att gå från process till koncept fastsälls inte.

Även om många elever har svårigheter att nå det som av Gray och Tall (1994) beskrivs som proceptuellt tänkande, vilket kan sägas ha sin motsvarighet i ett objekttänkande hos Sfard (1991), existerar det också elever som relativt snabbt når dessa stadier (Krutetskii, 1976) och lägger märke till de aspekter som är bärande för en önskvärd matematisk förståelse. Vad är det dessa elever ser som inte de andra gör? Variationsteorin ger i detta avseende en förklaring då den beskriver utvecklingen i form av urskiljning och på vilket sätt denna kan möjliggöras i undervisningen. Det kan verka som att variationsteorins ontologiska grund skulle kollidera med de på 1990-talet ofta konstruktivistiskt grundade (Björkqvist, 1993) teorierna inom matematikdidaktiken. Om förklaringen av vad lärande innebär skiljs från kunskapen om vilka uppfattningar elever uppvisar behöver emellertid inte olika ontologiska utgångspunkter utgöra ett problem. Variationsteorin ger en holistisk bild av lärandet men förklarar också vad lärandet av ett enskilt fenomen innebär. Samtidigt är det inte en matematikdidaktisk teori varför de beskrivningar av elevers kunnande som ges av Tall (2004a, 2004b, 2008), Sfard (1991), Dubinsky och Mc Donald (2001), Duval (2006) och Zandieh (2000) på samma gång är relevanta.

Testens och iterativitetens betydelse

Tester, både vad gäller utformning och resultat, har en betydelsefull roll i beskrivningen av vad elever behöver urskilja. Studien visar att undervisningen inte kan utvärderas och utvecklas enbart via observation och diskussion. Även om det väcktes funderingar kring designen direkt efter genomförandet av cykel 1 var samtidigt uppfattningen att lektionerna genomförts på ett gediget sätt utan egentliga misstag. Samma sak gällde de övriga cyklerna. Det fanns en initial uppfattning hos forskaren och lärarna om vad som synliggjorts under lektionerna men det var först när denna jämförts med resultatet av eftertestet som det blev möjligt att beskriva vad i designen som kunde bli föremål för justering.

På samma sätt spelade det fördröjda eftertestet en viktig roll. Visserligen beskrev eftertestet hur eleverna uppfattat innehållet men i kombination med resultatet på det fördröjda eftertestet kunde det analyseras på ett noggrannare sätt. Rimligtvis existerar det ingen undervisning som syftar till att eleverna endast ska kunna något i direkt anslutning till lektionen utan målet är att kunskaperna ska finnas kvar i så stor utsträckning som möjligt. Ett fördröjt eftertest ger möjlighet att utvärdera vad de elever som har bestående kunskaper har urskilt. Redan vid rättningen av ett eftertest görs en värdering av kvaliteten i elevernas urskiljande och i den aktuella studien svarade denna relativt väl mot utfallet på det fördröjda eftertestet. Därmed inte sagt att denna överensstämmelse var given varför det fördröjda eftertestet spelar en viktig roll vad gäller att styrka eller ifrågasätta analysen av eftertestet.

De test som eleverna genomförde bestod av tre uppgifter och alla av dem innebar att eleverna skulle motivera sina svar. Kravet på motivering var betydelsefullt i analysen då endast ett kort svar av karaktären ja eller nej i regel inte beskriver elevernas urskiljande. Ett tydligt exempel är fråga 2b under eftertestet där 44 av 45 elever i cykel 1 och 3 valde rätt alternativ men en stor andel av dem kunde inte motivera varför. Att en del av eleverna lämnat utrymmet för motivering tomt skulle kunna tolkas som att de inte tog sig tid men den förklaringen är inte den mest sannolika. Testen var designade för att kunna genomföras på kort tid, ungefär 10 minuter, och eleverna var dessutom 17-18 år och särskilt instruerade att motiveringarna var viktiga. Dessutom visade de bristfälliga eller knapphändiga motiveringarna på uppgift 2b att valet av rätt alternativ inte kunde likställas med ett kvalitativt erfarande. Alla test har dock sina begränsningar och det ska påpekas att uppgifterna inte alltid med säkerhet kunde redogöra för hur elevernas urskiljande var beskaffat. Några elever som svarade korrekt resonerade exempelvis med hjälp av insiktsfulla algebraiska resonemang. Om dessa elever också behärskade andra strategier är okänt. De kan till exempel också ha urskilt att lutningen på funktionens graf svarade mot derivatans värde utan att hänvisa till det. Om så inte var fallet svarade de rätt på testen utan att ha utvecklat de förmågor som specificerades i det indirekta lärandeobjektet.

Tester förekommer i olika form genom hela utbildningssystemet men i många fall används resultaten endast för att bedöma den enskilda elevens prestationer. Skolverket (2014a) betonar vikten av att eleverna involveras i bedömningspraktiken och att denna inte bara ska vara summativ utan också av formativ art. Formativ bedömning (se t.ex. Black & Wiliam, 2012) kan ske genom att läraren använder elevens resultat för att identifiera styrkor och svagheter vilka förmedlas till eleven i syfte att öka medvetenheten om vad som behöver utvecklas. Även om denna process kombineras med att läraren beskriver på vilket sätt utvecklingen kan ske är det fortfarande eleven som ska justeras utifrån lärarens anvisningar. Iterativiteten inom en learning study innebär istället att processen är omvänd; elevernas resultat används för att förstå hur lärarna behöver justera sin undervisning. Learning study möter därmed det efterfrågade behovet av att lärare utvärderar sin egen undervisning vilket enligt Hattie (2009) är en av de viktigaste faktorerna för att uppnå hög måluppfyllelse.

> A major argument throughout this book is the power of feedback to teachers on what is happening in their classroom so that they can ascertain "How am I going?" in achieving the learning intentions they have set for their students, such that they can then decide "Where to go next?" for the students (Hattie, 2009, s.181).

Iterativiteten i en learning study ger inte bara möjlighet att identifiera *nästa steg* utan också att *göra om det senaste steget*. Direkt eller indirekt designades den aktuella studien under ett års tid och sammanlagt hade forskaren och de deltagande lärarna 88 års erfarenhet av undervisning. Trots denna över tid utsträckta och i erfarenhet grundade design, identifierades via tester och observation ett flertal justeringar som bedömdes kunna underlätta urskiljandet. Hade utförandet varit begränsat till en cykel skulle erfarenheterna av denna varit desamma men möjligheten att omedelbart genomföra en ny cykel, med en justerad design, kan ändå pekas ut som en bidragande faktor för möjligheten att generera kunskaper om lärandeobjektet. De flesta lärare reflekterar förmodligen över sin undervisning men i regel går det en tid till nästa genomförande och eventuella förändringar riskerar att bli av typen *förändring för förändringens skull* som Hattie (2009) uttrycker det. Inom en learning study sker istället förändringen på ett systematiskt sätt. De ofta subtila skillnaderna mellan olika undervisningsmoment skapar förutsättningar för att på en detaljerad nivå peka ut vilka aspekter av lärandeobjektet som behöver synliggöras för eleverna.

Studiens implikationer nationellt

Redan år 2003 (Skolverket, 2004) konstaterades en kraftig nedgång hos svenska grundskoleelevers matematikkunskaper men det var först när dessa sjunkit ytterligare år 2007 (Skolverket, 2008) som det på allvar började uppmärksammas. Den negativa trenden har därefter fortsatt. De två internationella jämförelser som i regel hänvisas till inom matematik är TIMSS och PISA (se t.ex. Skolverket, 2008, 2010) och syftena med mätningarna är delvis olika (Wu, 2009). Medan TIMSS är direkt relaterad till klassrumspraktiken och läroplaner är PISA också inriktad mot hur väl eleverna är förberedda för framtiden (Wu, 2009). Noterbart är att Sverige tappar inom båda undersökningarna och som lösning på problemet åberopas framförallt att undervisningen behöver utvecklas och en av åtgärderna från regeringen har varit att satsa på kompetensutveckling för matematiklärare (Utbildningsdepartementet, 2012). Innehållet i utbildningen bygger på kollegialt lärande och upplägget liknar i flera avseenden learning study. Lärare tar del av tidigare forskningsresultat inom ett område och planerar därefter en lektion gemensamt. Lektionen genomförs sedan av varje lärare enskilt och avslutningsvis diskuteras de olika lektionerna gemensamt.

Den svenska skolan ska vila på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet (Skolverket, 2014b). Angående det senare uttrycker Skolverket (2014b) att lärares eller ett lärarlags tyckande inte är underlag för huruvida en metod kan betraktas som byggd på beprövad erfarenhet eller inte. Satsningen på att fortbilda matematiklärare är ett led i att öka skolans vetenskapliga förankring men samtidigt som tidigare forskningsresultat tas i beaktande och diskuteras mellan lärare så saknas i fortbildningen kravet på iterativitet och tester. I denna uppsats empiriska studie utgjorde testresultaten en betydelsefull del i beskrivningen av vad eleverna urskilt och iterativiteten gav möjlighet att omforma designen. Utan dessa två inslag blir utvärderingen av en lektion inte på något sätt meningslös men mer uddlös och risken är att aktiviteterna under lektionen utvärderas utan hänsyn till resultatet av dem. Även om relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata utgör ett avgränsat innehåll kan de i studien vunna kunskaperna och erfarenheterna utnyttjas i andra sammanhang. Detta eftersom en undervisningsdesign baserad på tidigare forskningsresultat och elevers förkunskaper, med ett kvalitativt lärande som mål, inte är metodiskt begränsad till ett specifikt lärandeobjekt. På samma sätt var licentiatuppsatsens forskningsfrågor centrerade kring ett enskilt lärandeobjekt men de svar som gavs kan också tolkas i relation till undervisning och skolutveckling i en mer generell mening.

Studiens resultat i ett matematikdidaktiskt perspektiv

Historiskt har diskussioner och studier som rör matematikutbildning ofta behandlat elevers taluppfattning och kunskaper inom grundläggande aritmetik men i takt med att matematikdidaktiken utvecklats och utvidgats har också mer specialiserade områden kommit att behandlas. Tall och Vinner (1981) och Orton (1983) författade några av de först publicerade studierna som beskriver elevers förståelse för derivata och under de efterföljande 30 åren har ett stort antal forskare analyserat elevers uppfattningar av begreppet. Resultaten har under dessa år varit förhållandevis likartade och slutsatserna har ofta varit av en nedslående karaktär. Elever verkar ha svårt att utveckla någon djupare förståelse för derivata och deras kunskaper skrivs i regel fram som procedurella.

Från 1990-talet och framåt kan en viss förskjutning, från att konstatera elevers missuppfattningar till att försöka förstå hur dessa har uppstått, skönjas och ett antal studier har exempelvis försökt beskriva elevers lärande av derivata med stöd i ett teoretiskt ramverk (t.ex. Asiala et al., 1997; Cooley et al., 2007). Ett flertal forskare har också avgränsat sig till den grafiska representationsformen (t.ex. Aspinwall et al., 1997; Hähkiöniemi, 2006a; Haciomeroglu et al*.,* 2010). Under andra halvan av 1990-talet etablerade sig datorerna alltmer inom skolans praktik och även deras inverkan på förståelsen av derivata har undersökts vid upprepade tillfällen (t.ex. Habre & Abboud, 2006; Ubuz, 2007). Argumentet bland de som förespråkar datorer är att dessa bidrar till en ökad förståelse för derivata då de skapar möjlighet att laborera sig fram. Samtidigt flyttar de också fokus från det tidsödande arbetet att rita grafer till att istället kunna studera hur dessa förändrar sig när koefficienter och konstanter varieras. Även grafritande räknares betydelse för förståelsen har undersökts (se t.ex. Berry & Nyman, 2003) och författarna når liknande slutsatser som datorförespråkarna och menar att grafritande räknare kan stärka förståelsen.

Det som förenar flertalet av de studier som genomförts är att de på olika sätt beskriver rådande förhållanden och inte i första hand försöker förklara hur elevernas lärande kan förbättras. De avslutas i och för sig ofta med några generella råd för undervisningen men när forskningsresultaten inte är analyserade mot bakgrund av undervisningen, åtminstone inte i ett mikroperspektiv, ges inga närmare beskrivningar av hur undervisningen bör utformas. Hähkiöniemi (2006a) närmar sig visserligen lärandet då han föreslår en hypotetisk väg vid inlärningen av derivata men samtidigt är det ingen beskrivning på lektionsnivå. Även Jukić och Dahl (2012) diskuterar möjliga vägar till att fördjupa förståelsen. I deras fall genom idéer om hur uppgifter bör utformas. De är samtidigt försiktiga i sina anspråk eftersom inte heller deras studie har analyserat undervisningen utan elevers uppfattningar.

De förslag som förekommer vad beträffar undervisningens utformning har genom åren varit relativt liknande. Orton pekade redan 1983 på vikten av att eleverna får arbeta med flera representationsformer och slutsatserna i många av de senare studierna har liknande utgångspunkt; derivata ska inte enbart innebära algebraiska manipulationer utan även andra representationsformer bör förekomma i undervisningen. Att beskriva derivatans betydelse i vardagliga sammanhang är ett annat vanligt förekommande förslag och Zandieh (2000) lyfter fram begreppet hastighet specifikt eftersom det enligt henne ofta används när derivatans innebörd ska förklaras.

Resultatet av denna studie motsäger inte de tidigare forskningsresultaten vad gäller elevers uppfattningar av begreppet derivata. Tvärtom så bekräftades de i stor utsträckning och med något enstaka undantag fanns de uppfattningar som eleverna i studien gav uttryck för i tester, under lektioner och intervjuer, redovisade i tidigare forskningsresultat. Det som däremot skiljer studien från många av de tidigare är dess fokus. Visserligen var elevers uppfattningar av intresse men huvudsyftet var att ställa dem i relation till undervisningen.

Undervisningen hade tidigare forskningsresultat som en av utgångspunkterna och därav valet att i flera av momenten utgå från hastighet och acceleration. Zandieh (2000) hävdar enligt ovan att det är ett vanligt förekommande angreppssätt och Hähkiöniemi (2006a) menar att rörelse är något som alla elever kan relatera till vilket därmed kan göra det lättare att förstå derivatans innebörd. Studiens resultat pekar dock mot att detta ställningstagande bör problematiseras ytterligare. Observationerna av cykel 1 och 2 i studien gav inga belägg för att moment B och C (bilen och bollen) var avgörande för att synliggöra derivatans betydelse och i cykel 3 var momenten närmast hindrande. Detta betyder inte att en anknytning till vardagliga händelser (eller objekt) inte bör förekomma i undervisningen inom derivata. Studiens resultat visar emellertid att anknytningen inte alltid är helt oproblematisk och att det inte kan tas för givet att en koppling till vardagen leder till en ökad möjlighet till urskiljning. Vardagliga händelser är i regel komplexa ur matematisk synvinkel och för elever som inte har accepterat matematikens sätt att modellera kan kopplingen till vardagliga händelser orsaka problem. Gällande lärandeobjektet, relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata, förefaller urskiljandet enligt studiens resultat snarare ha underlättats av att behandlingen av innehållet förflyttades till en abstrakt nivå.

Att kunna växla mellan representationsformer är enligt Duval (2006) den mest avgörande förmågan för progressionen i den matematiska förståelsen. Resultatet av den empiriska studien kan tyckas stå i motsats till Duvals (2006) resonemang men paradoxalt nog kan det vara tvärtom. Att förstå innebörden av ett begrepp i flera representationsformer och att kunna växla mellan dem är målet men för att kunna göra detta måste eleverna rimligtvis först kunna urskilja innebörden i representationsformerna var för sig. Eleverna väljer så att säga inte att växla till en representationsform där ingen uppfattning existerar. När representationsformen i cykel 1 varierade erbjöds eleverna att stanna kvar i det algebraiska tänkandet och möjligheten att urskilja derivatan i den grafiska representationsformen begränsades. I cykel 2 och 3 var den grafiska representationsformen den enda som erbjöds men även om detta under lektionerna utgjorde en begränsning innebar det på samma gång en utvidgning i det längre perspektivet.

På samma sätt som en varierande representationsform verkade försämra möjligheterna till urskiljning antyder studien också att en invarians av grafer har samma påverkan. Initialt kan grafer som eleverna känner igen användas för att synliggöra de kritiska aspekterna men därefter bör generaliseringen ske med hjälp av grafer som inte kan beskrivas med ett algebraiskt uttryck i den meningen att eleverna kan tillämpa deriveringsregler.

Den empiriska studien inom denna licentiatuppsats har genererat ett antal resultat men de ska tolkas med försiktighet. Innehållets behandling är enligt studien en faktor som påverkar elevernas möjligheter till lärande men samtidigt var urvalet begränsat till 68 elever från fyra olika gymnasieprogram. Generaliserbarheten i resultaten är därmed svår att uttala sig om men det relativt snäva urvalet till trots bidrar studiens resultat med ett antal hypoteser vilka kan prövas i nya studier alternativt ses i relation till andra resultat inom området. Vid sidan om detta bidrar resultaten dessutom med att problematisera innebörden av de allmänna riktlinjer som inte sällan avslutar studier som rör elevers lärande av derivata. Studien visar att det inte finns någon universallösning för hur undervisningen om derivata ska designas utan att detta är beroende av de aktuella eleverna.

Referenser

Adamson, B. & Walker, W. (2011). Messy collaboration: Learning from a Learning Study. *Teaching and Teacher Education. 27(1),* 29-36.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16(4),* 399-431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics 33*, 301–317.

Bentley, P-O. (2009a). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995 – En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken.* Skolverket: Analysrapport till 336, 2009.

Bentley, P-O. (2009b). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007/2003 En jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan.* Skolverket: Analysrapport till 323, 2008.

Bergqvist, T., Lithner, J. & Sumpter, L. (2003). Reasoning Characteristics in Upper Secondary School Students' Task Solving. *Research reports in mathematics education, no 1,* 2003. Department of mathematics, Umeå University.

Berry, J. & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 481-497.

Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nordisk matematikkdidaktikk, vol. 1, nr 1,* 8-17.

Black, P. & Wiliam, D. (2012). Developing a theory of formative assessment. In J. Gardner (Ed.), *Assessment and learning.* (2nd ed.) 206–229. London: Sage Publications.

Bremler, N. (2003). *Matteboken som redskap och aktör - en studie av hur derivata introduceras i svenska läroböcker 1967-2002.* Stockholm: Lärarhögskolan i Stockholm.

Brown, A. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences, 2,* 141-178.

Carlgren, I. (2011). Kunnande-kunskap-kunnighet. I Lindström, L., Lindberg, V. & Pettersson, A. (Red.) *Pedagogisk Bedömning. Att dokumentera, bedöma och utveckla kunskap*. HLS förlag.

Carlgren, I. (2012). The Learning Study as an approach for 'clinical' subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1:2,* 1-18.

Çetin, N. (2009). The Ability of Students to Comprehend the Function-Derivative Relationship with Regard to Problems from Their Real Life. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 19:3,* 232-244.

Christensen, W.M. & Thompson, J.R. (2012). Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context. *Physical review special topics – physics education research 8, 023101 (2012).*

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer , R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher , 32(1),* 9-13.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* (7th ed.). London: Routledge.

Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and methodological Issues. *The Journal of the Learning Sciences , 13(1),* 15-42.

Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Schema Thematization: A Framework and an Example. *Journal for Research in Mathematics Education 2007, Vol. 38, No. 4,* 370-392.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. New ICMI Study Series, Vol. 7 273-280. Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics (2006) 61,* 103-131.

Eliott, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. *International Journal of Lesson and Learning Studies , 1*(2), 108-125.

Emanuelsson, J. (2001). *En fråga om frågor. Hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Evers, C.W. & Wu, E.H. (2006). On generalising from single Case Studies: Epistemological reflections. *Journal of Philosophy of Education, Vol. 40, No. 4,* 511-526.

Fernandez, C., Cannon, J. & Chokshi, S. (2003). A US – Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education 19,* 171–185.

García, M., Llinares, S. & Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education 2010 Vol. 9, No. 5,* 1023-1045.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured task-based interviews in mathematics education research. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education,* 517- 545. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26(2),* 115–141.

Gustavsson, L. (2008). *Att bli bättre lärare. Hur undervisningsinnehållets behandling blir till samtalsämne lärare emellan.* Umeå, Kristianstad: Umeå Universitet, Högskolan i Kristianstad.

Habre, S. & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior 25,* 57–72.

Haciomeroglu, E.S., Aspinwall, L. & Presmeg, N.C. (2010). Contrasting Cases of Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs. *Mathematical Thinking and Learning*, *12(2),* 152-176.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning – a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* New York: Routledge.

Hiebert, J., Gallimore, R. & Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: what would it look like and how can we get one? *Educational Researcher, 31 (5),* 2-15.

Holmqvist, M. (2010). Teachers' learning in a Learning study. *Instructional Science*, *39(4),* 497-511.

Holmqvist, M., Gustavsson, L. & Wernberg, A. (2007). Generative learning. Learning beyond the learningsituation. *Educational Action Research, 15 (2)* 181-208.

Hähkiöniemi, M. (2006a). *The role of representations in learning the derivative.* Report 104. Jyväskylä: Department of mathematics and statistics.

Hähkiöniemi, M. (2006b). Perceiving the derivative: the case of Susanna. *Nordic Studies in Mathematics Education, 11(1),* 51-73.

Jukić, L. & Dahl, B. (2012). University students' retention of derivative concepts 14 months after the course: influence of 'met-befores' and 'met-afters'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43:6,* 749-764.

Kinard, J.T. & Kozulin, A. (2012). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande.* Lund: Studentlitteratur.

Koirala, H. P. (1997). Teaching of calculus for students' conceptual understanding. *The Mathematics Educator*, *2(1),* 52–62.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.

Kullberg, A. (2012). Students' open dimensions of variation for learning. *International journal for Lesson and Learning Studies, 1*(2), 168-181.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned - Professional insights gained and shared by teachers of mathematics.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Kullberg, A., Runesson, U. & Mårtensson, P. (2013). The same task? – different learning possibilities. *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, Oxford,* 615-622.

Larsson, S. (2009). A pluralist view of generalization in qualitative research. *International Journal of Research & Method in Education, 32 (1),* 25-38.

Lewis, C. (2000). Lesson Study: The Core of Japanese Professional Development. *American Educational Research Association Meetings.* New Orleans: lessonreseacher.net.

Lo, M.L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lo, M.L., Marton, F., Pang, M.F. & Pong, W.Y. (2004). Toward a Pedagogy of Learning. In Marton, F. & Tsui, A. B. M. (Eds.). *Classroom discourse and the space of learning.* 189-225. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Maher, C.A. & Sigley, R. (2013). *Task-based interviews.* Hämtad 2013-10-29 från http://www.researchgate.net/publication/254862724_Task_Based_Intervi ews_(to_appear_in_Springer_Encyclopedia_of_Mathematics_Education_V olume_1_in_2014)

Marton, F. (1981). Phenomenography – Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science 10 (1981),* 177-200.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Mahwah, N.J.: Erlbaum.

Marton, F., Hounsell, D. & Entwistle, N. (1986). *Hur vi lär.* Stockholm: Prisma.

Marton, F. & Pang, M.F. (2006). On some necessary conditions of learning. *Journal of the learning sciences 15(2),* 193-220.

Marton, F. & Pong, W. Y. (2005). On the unit of description in phenomenography. *Higher Education Reseach and development, 24(4),* 335-348.

Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A.B.M. (2004). The Space of Learning. In Marton, F. & Tsui, A. B. M. (Eds.). *Classroom discourse and the space of learning.* 3-40. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Matematikdelegationen (2004). *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens.* (No. SOU 2004:97). Stockholm: Fritzes

Nemirovsky R. & Rubin A. (1992). Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative. TERC Working Paper 2-92. Cambridge, MA: TERC Communications.

Newton, P. & Burgess, D. (2008). Exploring Types of Educational Action Research: Implications for Research Validity. *International Jounal of Qualitative Methods , 7*(4).

Niss, M. (2001). Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status. *I B.* Grevholm (Red.) *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv.* 21-47. Lund: Studentlitteratur.

Olteanu, C. (2007). *"Vad skulle x kunna vara?" Andragradsekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande.* Kristianstad: Högskolan Kristianstad, Institutionen för beteendevetenskap.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics 14,* 235-250.

Pang, M. F. (2003). Two Faces of Variation: on continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research, 47(2),* 145-156.

Pang, M.F. & Lo, M.L. (2012). Learning study: helping teachers to use theory, develop professionally, and produce new knowledge to be shared. *Instructional science*, *40(3),* 589-606.

Pegg, J. & Tall, D. (2010). The Fundamental Cycle of Concept Construction Underlying Various Theoretical Frameworks. In B. Sriraman & L. English (Eds.) *Theories of Mathematics Education Seeking New Frontiers.* 173-192. Berlin/Heidelberg: Springer.

Pettersson, A. (2011). *Mattelyftet – avgörande hur pengarna används.* Hämtad 2011-09-22 från

http://forskning.se/apropaer/apropaer/mattelyftetavgorandehurpengarnaanvands. 5.254ac15513223a7296a80001263.html

Piaget, J. (1976/2006). *Barnets själsliga utveckling.* Stockholm: Norstedts Akademiska Förlag.

Pring, R. (2004). *Philosophy of educational research.* (2nd ed.). London: Continuum.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. & Alibali, M.W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology No. 93(2),* 346-362.

Runesson, U. (2011). *Forskarskola i Learning Study, undervisningsutvecklande ämnesdidaktisk forskning.* Ansökan till vetenskapsrådet. Hämtad 2013-12-13 från http://hj.se/hlk/forskarutbildning/forskarskola-i-learning-study.html

Runesson, U. (2006). What is it Possible to Learn? On Variation as a Necessary Condition for Learning. *Scandinavian Journal of Educational Research, 50 (4),* 397-410.

Runesson, U. & Gustafsson, G. (2012). Sharing and developing knowledge products from Learning Study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1(3),* 245-260.

Ryberg, U. (manuskript). Fenomenografi och Variationsteori.

Selden, J., Selden, A. & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.). *Research issues in undergraduate mathematics learning. MAA notes 33,* 31-45. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22,* 1-36.

Shadish, W.R., Cook, T.D & Campbell, D.T. (2002). *Experimental and quasi-experimental designs for generalized casual inference.* New York: Houghton Mifflin Company.

Shavelson, R. J., Phillips. D.C. Towne, L. & Feuer, M.T. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher, 32 (1),* 25-28.

Skinner, B. F. (1969/2006). *Undervisningsteknologi.* Stockholm: Norstedts Akademiska Förlag.

Skolinspektionen (2010). *Undervisningen i matematik i gymnasieskolan.* Kvalitetsgranskning. Rapport 2010:13.

Skolverket (2013). *Ansökan om avvikelser från de nationella programmen.* Hämtad 2013-10-06 från

http://www.skolverket.se/skolformer/gymnasieutbildning/gymnasieskola/program-och-utbildningar/avvikelser

Skolverket (2014a). *Forskning inom bedömning och betyg*. Hämtad 2014-03-11 från http://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/bedomning

Skolverket (2010). *Rustad att möta framtiden? PISA 2009 om 15-åringars läsförståelse och kunskaper i matematik och naturvetenskap*. Rapport 352. Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2004). *TIMSS 2003 Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv*. Rapport 255. Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2008). *TIMSS 2007 Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport 323. Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2009). *TIMSS advanced 2008. Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*. Rapport 336. Stockholm: Fritzes.

Skolverket (2014b). *Vetenskaplig grund, beprövad erfarenhet och evidens*. Hämtad 2014-02-17 från http://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/vetenskaplig-grund-och-beprovad-erfarenhet/vetenskaplig-grund-beprovad-erfarenhet-och-evidens-1.189565

Stenlås, N. (2009). *En kår i kläm – Läraryrket mellan professionella ideal och statliga reformideologier*. Regeringskansliet, finansdepartementet: Rapport till expertgruppen för studier i offentlig ekonomi 2009:6.

Stigler, J.W. & Hiebert, W. (1999). *The teaching gap – Best ideas from the world´s teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

Stiles, W.B. (2009). Logical Operations in Theory-Building Case Studies. *Pragmatic case studies in psychotherapy. Volume 5, Module 3, Article 2,* 9-22.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken*. Stockholm: Prisma.

Säljö, R. (2005). *Lärande och kulturella redskap*. Stockholm: Norstedts Akademiska Förlag.

Tall, D. (2004a). Building theories: the three worlds of mathematics: a comment on Inglis. *For the Learning of Mathematics*, *23 (3),* 29–33.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, Vol. 20 (2),* 5-24.

Tall, D. (2004b). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 4 281-288. Bergen, Norway.

Tall, D., Gray, E., Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. & Yusof, Y. (2000). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *The Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1,* 80–104.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Teknikdelegationen (2012). Hämtad 2012-10-24 från http://teknikdelegationen.se/

Thunberg, H., Filipsson, L. & Cronhjort, M. (2006). Gymnasiets mål och högskolans förväntningar. *Nämnaren (2) 2006,* 10-15.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *Vol. 38, No. 5,* 609-637.

Utbildningsdepartementet (2011). *Regeringsuppdrag 2011-03-11. Uppdrag till Vetenskapsrådet att utlysa medel för utbildning på forskarnivå för lärare och förskollärare.* Hämtad 2013-10-02 från http://www.regeringen.se/sb/d/14040/a/162879

Utbildningsdepartementet (2012). *Regeringsbeslut 2012-03-29. Uppdrag att svara för utbildning.* Hämtad 2012-04-21 från http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.172842!Menu/article/attachment/U2012_2103_GV.pdf

van Bommel, J. (2012). *Improving Teaching, Improving Learning, Improving as a Teacher – Mathematical Knowledge for Teaching as an Object of Learning.* Karlstad: Karlstad University, Faculty of Technology and Science.

Vetenskapsrådet (2011). *God forskningssed.* Vetenskapsrådets rapportserie 1:2011. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad som görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna.* Umeå, Kristianstad: Umeå universitet, Högskolan i Kristianstad.

Wu, M. (2009). A comparison of PISA and TIMSS 2003 achievement results in mathematics. *Prospects, 39(1),* 33-46.

Zandieh, M. J. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing Student Understanding of the Concept of Derivative. In E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.). *Research in collegiate mathematics education IV*, 103-127. Providence, RI: American Mathematical Society.

Åman, J. (2011). *Att lära av de bästa – en ESO-rapport om svensk skola i ett internationellt Forskningsperspektiv*. Regeringskansliet, finansdepartementet: Rapport till expertgruppen för studier i offentlig ekonomi 2011:8.

Bilagor

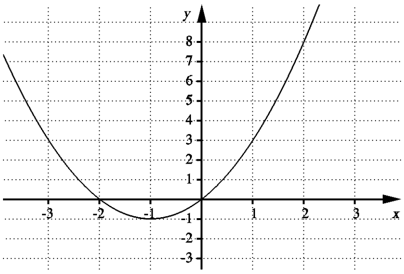
Bilaga 1

Intervjufrågor vid undersökningen av elevernas, före studien, uttryckta uppfattningar om funktioner och derivata.

1. Du har arbetat med funktioner inom matematiken. Kan du försöka beskriva vad en funktion är?

2. Kan du ge något exempel på en funktion?

3. Är det här en funktion?



4. Beskriv vad begreppet derivata innebär för dig.

5. Hur kan man bestämma derivatan?

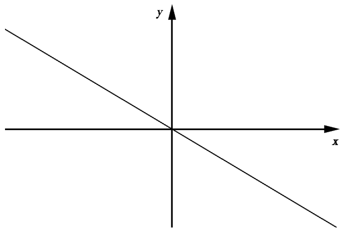
6. Kan du säga något om derivatan hos denna funktion? (se grafen i fråga 3)

7. Kan du i grova drag försöka skissa en graf som visar din längd från det att du föddes fram till idag? Vad innebär derivatan i detta fall?

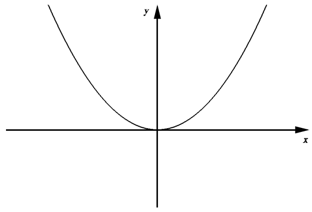
Bilaga 2

Svarsalternativ i fråga 2b på förtest.

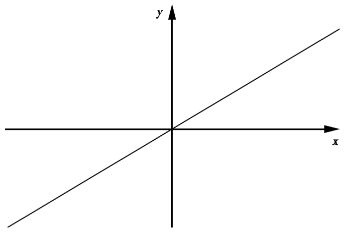
a)



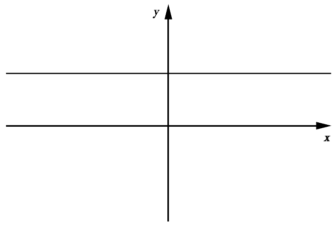
b)



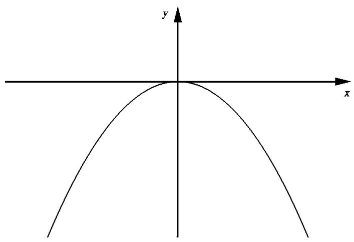
c)



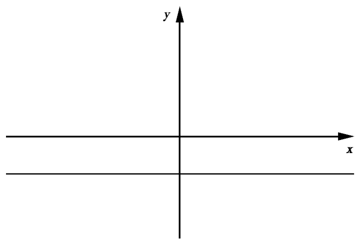
d)



e)



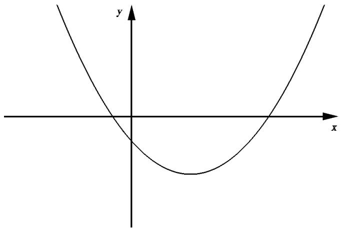
f)



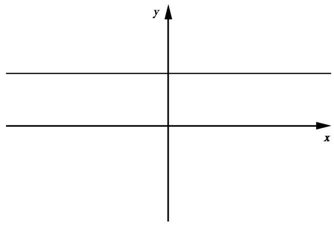
Bilaga 3

Svarsalternativ i fråga 2b på eftertest och fördröjt eftertest.

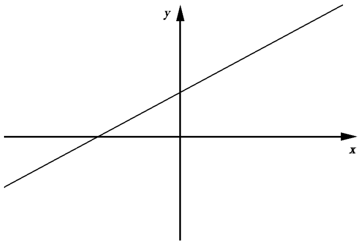
a)



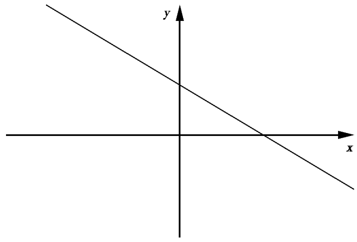
b)



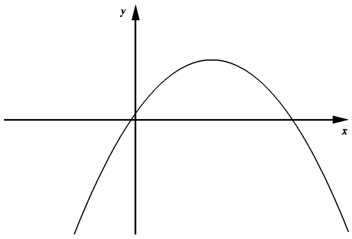
c)



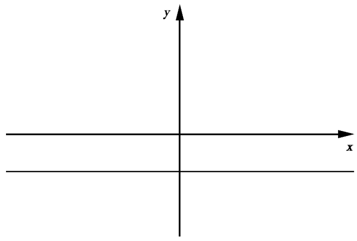
d)



e)



f)



VARIATIONENS BETYDELSE FÖR ELEVERNAS LÄRANDE

Relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata

Enligt den matematikdidaktiska forskningen är en förståelse för derivata beroende av förmågan att kunna växla mellan derivatans olika representationsformer. Samtidigt beskrivs emellertid också hur derivata för många elever blir synonymt med att manipulera algebraiska funktionsuttryck. Denna licentiatuppsats baseras på tidigare forskning men fokuserar inte, likt flera tidigare studier, på elevers missuppfattningar. Utgångspunkten är istället på vilket sätt en kartläggning av elevernas uppfattningar kan användas i undervisningsplanering och genomförande för att utmana och utveckla elevernas förståelse. Uppsatsen innefattar en empirisk studie där relationen mellan en funktions graf och grafen till funktionens derivata utgör det ämnesspecifika innehållet. Resultatet av studien visar att förståelsen för relationen mellan graferna gynnas om undervisningen endast behandlar den grafiska representationsformen och inte den algebraiska. Lärandet gynnas också av att undervisningen innehåller en variation av grafer med olika komplexitet. En koppling till vardagliga händelser leder däremot inte enligt studien till en mer kvalitativt utvecklad förståelse hos eleverna.

Ulf Ryberg har varit verksam som matematiklärare sedan början på 2000-talet. Hans forskningsintresse är klassrumsnära och inriktat på relationen mellan undervisning och lärande.

GUPEA - Göteborgs universitets publikationer - elektroniskt arkiv:
http://hdl.handle.net/2077/37569