



GÖTEBORGS UNIVERSITET

”Pre-algebra, vad är det”?

**En studie av lärares arbetssätt med
likhetstecknet**

Av

Rasha Khadhem och Safa Mouishi

Kurs: LAU390

Handledare: Maria Svensson

Examinator: Anita Wallin

Rapportnummer: VT 14-2390-175

Abstract

Examensarbete inom lärarutbildning 15 hp

Titel: ”Pre-algebra, vad är det”? En studie av lärares arbetssätt med likhetstecknet.

Författare: Rasha Khadhem och Safa Mouishi.

Termin och år: VT – 2014.

Kursansvarig institution: LAU390: Institutionen för sociologi och arbetsvetenskap.

Handledare: Maria Svensson.

Examinator: Anita Wallin

Rapportnummer: VT 14-2390-175

Nyckelord: Matematik, pre-algebra, likhetstecknet, arbetssätt, undervisning, styrdokument, variationsteorin, sociokulturellt perspektiv.

Sammanfattning

Vi är två studenter som är intresserade av matematik och är nyfikna till varför eleverna får svårigheter när de möter ekvationer och avancerade beräkningar i senare åldrar. Vi ville veta om det kan bero på att de inte fick utveckla en förståelse för pre-algebra och specifikt likhetstecknet i de tidigare årskurserna. Därför vill vi undersöka de arbetssätt en grupp lärare använder sig av då de undervisar elever i årskurserna F-3 om likhetstecknets betydelse. Varför använder lärargruppen sig av denna arbetsätt? Vilken uppfattning har lärargruppen om likhetstecknets betydelse? För att kunna analysera lärargruppens arbetssätt tog vi hjälp av variationsteorin för att använda den som ett verktyg för att analysera lärarnas arbetssätt. Vi har även inspirerats av ett sociokulturellt perspektiv då vi anser att en del lärare i lärargruppen tycker att eleverna främst lär sig i ett socialt sammanhang. Vi valde den kvalitativa intervjun som forskningsmetod för att samla in data till undersökningen. Vi intervjuade åtta lärare från fyra olika skolor. Vår undersökning letade efter mönster mellan de olika lärarnas undervisning. Resultatet av detta blev att vi uppfattade tre kategorier med vissa skillnader och likheter i mellan. De kategorier vi skapade kallar vi *Praktiska aktiviteter*, *Samtala i grupp* och *Alternativa lärmiljöer*. I vår studie upptäckte vi att variationen i undervisningen är viktigt för att utveckla förståelsen om likhetstecknet. När vi genomförde undersökningen upptäckte vi att några lärare kände sig osäkra på undervisning av likhetstecknet. Då vi bad olika lärare om en intervju blev det tydligt att många av lärarna tackade nej då de uppfattade arbetet med likhetstecknet som svårt och problematiskt. Vår slutsats av detta är att de lärare som själva har svårt att klargöra sina tankar om likhetstecknets betydelse får svårigheter med att undervisa om det i klassrummet. Däremot var det några lärare som arbetar aktivt och varierar sin undervisning om likhetstecknet för att utveckla förståelsen om likhetstecknets betydelse för eleverna.

Förord

Först och främst vill vi tacka lärarna som deltog i intervjuerna för ett gott samarbete. Ni har bidragit intressanta diskussioner och utan er hjälp hade denna undersökning inte gått att genomföra.

Vi vill tacka vår handledare, Maria Svensson. Du har gett oss oerhört goda råd, stöd och varit en riktig inspirationskälla. Det är mycket tack vare dig och din feedback som vi lyckats genomföra undersökningen.

Vi vill även tacka varandra för ett gott samarbete och slutligen vill vi tacka alla som har stöttat oss för att lyckas med arbetet.

Innehållsförteckning

1. Inledning.....	7
2. Bakgrund	8
2.1 Algebras historia.....	8
2.2 Pre-algebra.....	8
2.3 Likhetstecknets betydelse	9
2.4 Styrdokumentet för grundskolan (Lgr11).....	10
3. Definition av begrepp.....	12
4. Syfte och frågeställningar.....	13
4.1 Syfte.....	13
4.2 Frågeställningar	13
5. Teoretisk anknytning.....	14
5.1 Fenomengrafin.....	14
5.2 Variationsteorin	14
5.3 Learning study	16
5.4 Sociokulturella perspektivet	17
6. Tidigare forskning	18
6.1 Internationella undersökningar	18
6.2 Likhetstecknets kritiska aspekter.....	19
7. Metod	23
7.1 Kvalitativ intervju.....	23
7.2 Urval	24
8. Analys av insamlat material	25
9. Tillförlitlighet	26
10. Forskningsetiska aspekter	26
11. Resultatredovisning.....	27
11.1 Praktiska aktiviteter	28
11.2 Samtala i grupp.....	29
11.3 Alternativa lärmiljöer	30
12. Diskussion.....	32
12.1 En varierad undervisning.....	32
12.2 En sociokulturell undervisning	33
12.3 Vilken uppfattning har lärarna om likhetstecknets betydelse?.....	34

12.4 När ska man börja med undervisning om likhetstecknet?	35
12.5 Slutsatser.....	35
13. Metoddiskussion.....	36
14. Förslag till vidare forskning	37
15. Referenser.....	38
15. Bilagor.....	41
15.1 Bilaga 1.....	41
15.2 Bilaga 2.....	42

1. Inledning

Vi har läst två matematikkurser under vår lärarutbildning, dessa behandlar hur lärarna skall utveckla sin undervisning för att öka elevernas intresse för matematiken. Under kurserna fick vi som uppgift att utföra fältstudier, där fick vi möjlighet att undersöka elevernas grundläggande kunskaper om matematik. Under arbetet upptäckte vi hur viktigt det är att läraren använder sig av varierande metoder för att matematikundervisningen och elevernas kunskaper ska utvecklas.

Vi har gått skolan i Irak där matematikundervisningen skiljer sig från undervisningen i Sverige. Under vår utbildning i Irak upplevde vi inga svårigheter med matematiken eftersom lärarna där arbetar med eleverna på ett kreativt sätt. T.ex. under en lektion som handlade om ekvationer så visade läraren en uppgift där alla elever fick arbeta och diskutera uppgiften tillsammans och i det sammanhanget visade läraren hur man kunde lösa uppgiften med olika metoder. Detta arbetssätt gjorde att det blev lättare att förstå ekvationerna och vi kände att ekvationerna inte var avancerade. I Sverige blev vi förvånade över att det finns många lärare som låter eleverna räkna själva med böcker utan någon gemensam dialog i klassen och när eleverna sedan får börja med algebra så upplever de svårigheter. Detta är något vi inte upplevt i vårt hemland. Det var anledningen till att vi vill undersöka hur lärarnas arbetssätt kan påverka elevernas förståelse och utveckling om pre-algebra när det gäller likhetstecken. Undersökningen riktar sig mot elever som går i F-3.

Vi är intresserade av att undersöka matematiklärarnas uppfattning om likhetstecknets betydelse då lärarens uppfattningar direkt påverkar elevernas kunskaper och inläring. Forskning visar att eleverna har fått sämre resultat i matematik och många elever har svårt att räkna ekvationer i algebra. En av undersökningarna är PISA (Skolverket, 2012) och TIMSS (Skolverket, 2011c) som visar att eleverna i Sverige har fått försämrade resultat inom algebra. Detta resultat väckte uppmärksamhet inom skolsystemet där alla pedagoger vill förbättra matematikundervisningen (Skolverket, 2011c; PISA, 2012). Således vill vi undersöka hur lärarna arbetar med pre- algebra i årskurser F-3. Eftersom likhetstecken är en viktig grund för pre- algebra vilket i sin tur är grunden för att kunna lösa ekvationer, valde vi att fokusera på lärarnas arbetssätt och hur det kan bidra till att utveckla elevernas förståelse för pre-algebra. Vi vill undersöka hur lärarna undervisar i algebra och specifikt med likhetstecknet för att hjälpa våra elever i framtiden att få en bättre förståelse av algebra.

2. Bakgrund

Vi kommer att skriva under rubriken bakgrund fakta som syftar till att ge förståelse för vilken undersökningsgrund studien bygger på och för att bättre förstå undervisningen om algebra och framför allt likhetstecknet. Vi kommer även att skriva hur det är kopplat till vad som står i styrdokumentet.

2.1 Algebras historia

Begreppet algebra kommer från den arabiska vetenskapsmannen al-Khwarizmi. Han skrev en lärobok om ekvationer och beräkningar med hjälp av Al-jabr (algebra) som publicerades år 830 e.Kr. i den irakiska huvudstaden Bagdad. Al-jabr handlar om hur man för över termer från den ena sidan till den andra av ekvationen. Ett viktigt begrepp inom Al-jabr är Almuqabala som innebär att ekvationens olika termer på motsatta sidor tar ut varandra. Det svenska begreppet Algebra kommer således från det arabiska ordet al-jabr som också innebär att man ska addera lika termer till båda sidor av en ekvation för att ta bort negativa termer. Senare har algebran utvecklats alltmer abstrakt och matematikerna har gjort en teori för den algebraiska strukturen (Roos, 2014).

2.2 Pre-algebra

Pre-algebra enligt Bergsten m.fl. (1997) är olika aktiviteter som ska ingå i undervisningen innan man inför algebran, för att på så sätt skapa en naturlig utveckling i algebraundervisningen. Efter det första steget (Pre-algebra) kommer den inledande algebran, där läraren inför bokstavssymboler. Eleverna måste få utveckla kunskaper om de tre stegen i progressionen: pre-algebra, inledande algebra och algebra, för att senare kunna lösa ekvationer. Det som menas med att arbeta pre-algebraiskt är att förstå vad en ekvation innebär och hur man kan lösa problemet retoriskt. Bergsten poängterar också att det är nödvändigt för förståelsen av pre-algebra att läraren hjälper eleverna att utveckla förståelsen av likhetstecken och arbeta med likhetstecknet i undervisningen på ett strukturellt sätt. Inom aritmetiken bör läraren t.ex. arbeta med uppgifter av typen $4+6=6+ _$ och $3+ _ = 7+ 3$ och läraren ska inte bara arbeta med uppgifter av typen $4+6= _$ (Bergsten m.fl., 1997).

Mellan pre-algebra och algebra finns steget inledande algebra och där införs bokstavssymbolerna. En viktig aspekt av den inledande algebran är att läraren inte bör introducera bokstavssymbolerna alltför snabbt, eleverna behöver först ha en grundläggande förståelse för olika begrepp, mönster, aritmetik och likhetstecknet, annars finns det risk att eleverna räknar utan förståelse. Det algebraiska tänkandet skiljer sig från det aritmetiska tänkandet då det handlar om en perspektivförskjutning. Aritmetiskt tänkande fokuserar mest på talen och genomför operationer på dessa. Således får elever problem om de tänker i aritmetiska termer när det handlar om en algebraisk operation. Ett exempel på denna tankeform är att elever ställer sig frågan ”vad blir $2+2$ ”. Medan elever som tänker algebraiskt i stället ser det som ett typiskt exempel på operationen $a + b$ som har olika egenskaper

(Bergsten m.fl., 1997). Eleverna måste vara medvetna om det algebraiska tänkandet inom alla beräkningar och få en fördjupad förståelse för det.

As long as one works within a system without being aware of its law, one is tied up in it. Awareness brings about freedom and control over the system. Once the systems are seen as one of the possible systems, a way is open to new systems, new generalizations and syntheses, new understanding. (Bergsten m.fl., 1997, s.157).

2.3 Likhetstecknets betydelse

Likhetstecknet skrevs om för första gången av Robert Recorde i hans bok ”The Whetstone of witte”, publicerad år 1557. Likhetstecknet har dock sett lite annorlunda ut och utvecklats och ändrats med tiden. Under 1600-talet bestämde vetenskapsmän att talspråk ska ersättas med en symbol. Då bestämde man att likhetstecken ska betecknas med två streck =. Likhetstecknet markerar alltså att det alltid ska vara *lika stora mängder* på båda leden om tecknet. Likhetstecken innebär att det är *lika mycket* t.ex. $*****=*****$ eller $5 = 5$ (Webbmatte, 2014). Recorde menar också att eleverna först behöver förstå vad likhetstecknet innebär för att underlätta förståelsen vid ekvationslösningar.

När det står ett likhetstecken mellan två uttryck kan man säga att man med matematiskt språk påstår att de *är lika* (Alkadhe, föreläsning, 2013-12-05). Bergsten m.fl. (1997) skriver att många elever har svårt att lösa en ekvation och menar också att eleverna först behöver förstå vad likhetstecknet innebär för att möjliggöra en förståelse vid ekvationslösningar. Författaren tycker att man ska tolka det som att likheten kan läsas både från vänster till höger och tvärtom, han menar att båda leden finns och att de är likvärdiga. Likhetstecknet står för ekvivalens som betyder att vänster och höger led är olika uttryck för samma tal. Det är inte en signal som säger *här ska svaret komma* eller *nu ska du räkna ut vad det blir*. Det finns en viktig aspekt för elevernas lärande och det är att de måste kunna se likhetstecknet statistiskt, som är *lika med*. Han skriver att både beprövad erfarenhet och studier visar att elever har större förståelse och en högre lösningsfrekvens för ekvationer där (Bergsten m.fl., 1997).

Gronmo (1999) förklarar att många elever känner att algebra är svårt för att de inte har en förståelse av aritmetikens operationer och likhetstecknets innebörd. Vidare krävs en förståelse för detta även vid senare arbete med bokstäver som symboler (Gronmo, 1999). Likhetstecknet används inte endast för att ange likhet mellan tal, utan även likhet mellan andra objekt som storheter, mängder och vektorer (Skolöverstyrelsen, 1979).

En viktig förutsättning för att förstå likhetstecknet är som Gronmo (1999) skriver att eleverna behöver förstå språket. De flesta uppgifterna som eleverna får innehåller text och begrepp som läraren och eleverna behöver diskutera. Eleverna kan öva sig i att lyssna på varandra för att påbörja en diskussion kring begrepp och symboler. Det blir lätt någon slags tävling mellan eleverna för att bli färdig med alla uppgifter snabbt och avbryta den som pratar och själv komma på svaret (Gronmo, 1999). Detta hindrar att eleverna får tillräckligt plats att kunna reflektera över uppgiften. Hoinés (2004) förklarar i sin bok hur viktigt det är att läraren lyssnar på eleverna och tolkar deras språk för att på så sätt få reda på vad det är de kan. Detta

gör att läraren får möjlighet att veta vad eleverna har lärt sig och eleverna kommunicerar med hjälp av det språk de redan har. Läraren ska hjälpa dem att utveckla sin förståelse om olika begrepp då det är en förutsättning för att eleverna ska förstå matematiken (Hoines, 2004). Gronmo (1999) hävdar att eleverna behöver få varierade erfarenheter av att reflektera och diskutera om likhetstecknet i olika situationer. Eleverna ska förstå att likhetstecknet inte alltid innebär att de skall utföra en operation. Eleverna ska få tid till egen reflektion där de sätter ord på vad de tänker. Lärarens uppgift här är att förklara betydelsen av likhetstecknet för eleverna. Vad som kan vara viktigt att tydliggöra enligt Gronmo är att likhetstecknet har olika betydelse beroende på sammanhanget (Gronmo, 1999).

2.4 Styrdokumentet för grundskolan (Lgr11)

Eleverna behöver uppleva att matematikundervisningen är lustfylld vilket innebär att elever upplever ett samband mellan matematiska beräkningar och vardagslivssituationer (Skolverket, 2011a). Läroplanen lyfter fram matematiken som en kreativ och problemlösande verksamhet och utgår från den glädje som ligger i att förstå och kunna lösa problem. Genom undervisningen ska eleverna få möjlighet att tolka situationer samt formulera och lösa problem. Det står under rubriken grundläggande värden att syftet med utbildningen är ”att elever ska inhämta och utveckla kunskaper och värden. Den ska främja alla elevers utveckling och lärande samt en livslång lust att lära”(Skolverket, 2011a, s.7). Det betyder att lärarna ska kunna hjälpa eleverna att utveckla sina kunskaper på ett sätt som ska göra att eleverna ska ha lust att lära.

Skolverkets beskrivning av ämnet matematik för skolan är att kunskaperna i matematiken ger människor förutsättningar att kunna fatta beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser (Skolverket, 2011a). Beskrivningen är inte specifikt för att eleverna ska kunna möta olika situationer utan syftet med den är att läraren ska lära eleverna hur man kan använda matematiken för att lösa olika situationer eller att bättre kunna förstå situationer i vardagen. Syftet med matematikundervisningen är att eleverna ska utveckla kunskaper om matematiken och undervisningen ska sammanfattningsvis ge eleverna förutsättningar att utveckla sin förmåga att:

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder,
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
- föra och följa matematiska resonemang, och
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. (Skolverket, 2011a, s.62- 63)

Under det centrala innehållet i kursplanen nämns det obligatoriska innehållet som läraren ska undervisa om och på vilket sätt undervisningen ska uppnå sina syften. Läroplanen för årskurs 1-3 tar upp ett av de obligatoriska moment som kräver att matematikundervisning ska lägga

fokus på ”Matematiska likheter och likhetstecknets betydelse” (Skolverket, 2011a, s.63). I skolverkets beskrivning av kunskapskraven i ämnet matematiken står det att:

Eleven kan hantera enkla matematiska likheter och använder då likhetstecknet på ett fungerande sätt. Eleven kan beskriva och samtala om tillvägagångssätt på ett i huvudsak fungerande sätt och använder då konkret material, bilder, symboler och andra matematiska uttrycksformer med viss anpassning till sammanhanget. (Skolverket, 2011a, s.67)

Häftet kommentarmaterial riktar sig till läraren och syftar till en djupare förståelse av texterna i kursplanen. Kommentarmaterialet förklarar hur det centrala innehållet utvecklas över årskurserna och hur kunskapskraven är uppbyggda (Skolverket, 2011b). Man diskuterar progressionen i matematik och förklarar att matematikundervisning i de tidigare åldrarna ska utgå från ett prövande förhållningssätt. Att pröva sig fram med hjälp av olika uttrycksformer i olika sammanhang ger eleverna kunskap för att kunna hantera begrepp och metoder som är användbara och utvecklingsbara. För att eleverna i senare åldrar ska kunna möta mer formaliserade metoder krävs det att i de tidigare årskurserna lyckat tillgodogöra sig grunderna för konkreta och elevnära situationer. Det gör att eleverna i större utsträckning kan uttrycka sig på ett adekvat matematiskt språk och det blir även lättare för eleverna att utföra mer avancerade matematiska beräkningar (Skolverket, 2011a).

Läroplanen betonar vikten av grundläggande algebraiska kunskaper. Vi skrev ovan i stycket som handlar om det centrala innehållet mer om vad som är viktigt för eleverna. Algebraiska kunskaper kan beskrivas som att man kan använda bokstavs-beteckningar i stället för tal och det kan uttrycka beräkningar på ett generellt sätt. Här ingår att man ska ha goda kunskaper om likhetstecknets innebörd, bokstavs-beteckningar och variabel begreppet.

Tillsammans med kunskaper i aritmetik är detta viktiga byggstenar inom det algebraiska området. De ligger till grund för elevernas förståelse av ekvationer, algebraiska uttryck, funktioner och formler // eleverna behöver kunskapen i och om algebra för att kunna föra generella resonemang vid problemlösning. Algebraiska kunskaper är också nödvändiga för att kunna använda matematiska modeller i senare årskurser och i fortsatta studier. (Skolverket, 2011b, s.16)

Matematikdidaktisk forskning visar hur viktigt det är att eleverna i de tidigare årskurserna får möta och utveckla kunskaper i algebra. Det innebär att eleverna i de tidigare åldrarna kommer arbeta med matematiska likheter och likhetstecknets betydelse och efter hand förstå att en lucka i en matematisk likhet kan bytas ut med en bokstav. Vidare utvecklar det en förförståelse för okända tal och variabelbegreppet. Därefter kommer undervisningens fokus lägga en grund för innehållet om ”okända tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att känna igen okända tal med en symbol i senare åldrar” (Skolverket, 2011a, s. 17).

3. Definition av begrepp

Algebra: Handlar om allmänna beräkningar och operationer där tal bytas med bokstäver (Löwing, 2008).

Pre-algebra: En mängd olika aktiviteter under alla skolår innan man inför algebra (Bergsten m.fl., 1997).

Likhetstecknet: Likhetstecknet är ett matematiskt tecken som markerar att två uttryck har samma värde (Alkhade, Föreläsning, 2013-12-05).

Dynamisk: Genom den dynamiska eller så kallad operationer kan det omformas till ett uttryck med en ny struktur, t ex $5x=3x+10$, sedan $2x=10$, och $x=5$. (Bergsten m.fl., 1997).

Statisk: Det betraktas som strukturell uppfattning av likhetstecknet som innebär att de uttryck som finns kring likhetstecknet är lika stora tal. (Bergsten m.fl., 1997)

Ekvationslösning: En lösning av en ekvation. En utsaga av t.ex. $3x + 2 = 8$, här söker man det tal x som gör ekvationen sann (Löwing, 2008).

4. Syfte och frågeställning

Under kapitel 4 kommer vi att presentera vårt syfte och frågeställningarna som är utgångspunkten för vår undersökning.

4.1 Syfte

Syftet med vårt arbete är att undersöka lärarens uppfattningar om arbetssätt för att utveckla elevers förståelse för likhetstecknet i årskurs F-3.

4.2 Frågeställning

1. Vilka arbetssätt använder lärare som arbetar med elever i årskurserna F-3 i samband med undervisningen om likhetstecken?
2. Varför använder lärarna dessa arbetsätt?
3. Vilken uppfattning har läraren om likhetstecknets betydelse?

5. Teoretisk anknytning

Under kapitel 5 kommer vi att presentera två teorier som är relevanta för undersökningen. Denna studie utgår från variationsteorin och det sociokulturella perspektivet.

Variationsteorin lämpar sig väl för att förklara en del av våra forskningsfrågor då det vi intresserar oss av är lärarnas arbetssätt i förhållande till ett lärandeobjekt. Lärandeobjektet vi intresserar oss för av är likhetstecknet och vi fokuserar på de kritiska aspekterna hos detta, ur en lärarsynpunkt. Fenomenografiska forskningsansatsen har legat till grund för utvecklingen av variationsteorin därför kommer vi att presentera först fenomenografin sedan variationsteorin till sist learning study. I learning study projektet har ett antal lärare använt variationsteorin som ett verktyg för att analysera matematikundervisningen, för att kunna utveckla kvalitét i undervisningen.

5.1 Fenomenografin

Variationsteorin är enligt Marton och Booth (2000) en teori om lärandet som har sina grunder i den fenomenografiska forskningstraditionen. Fenomenografi började växa fram vid institutionen för pedagogik vid Göteborgs universitet. Det grundade sig i ett intresse för att beskriva fenomenen i världen och att beskriva variationen av dessa i ett pedagogiskt sammanhang. Författarna skriver att fenomenografi undersöker individers erfarenheter av ett fenomen och forskaren studerar den variation av erfarenheter som finns hos en grupp individer. Undersökningen görs i en grupp av individer och det är svårt att generalisera dessa tolkningar men det kan ge en bild av vilken variation av uppfattningar som kan finnas. Maraton och Booth (2000) skriver om skillnaden mellan det som läraren har erfarenhet om och det som eleven behöver kunna. Med hjälp av att undersöka elevernas uppfattningar kan läraren få syn på kunskaper som vägleder läraren då denna går vidare med sin undervisning. I fenomenografin beskrivs lärande som förändringar i elevens sätt att uppfatta något och lärarens uppgift blir då att variera undervisningen om ett specifikt innehåll så att en förändring kan ske hos eleverna (Marton & Booth, 2000).

5.2 Variationsteorin

Variationsteorin handlar om att utveckla lärandet, dvs. att den är en teoretisering av fenomenografin där variationen är viktigt. Den fenomenografiska forskningsansatsen har legat till grund för utvecklingen av variationsteorin (Marton & Booth, 2000). Teorin kan beskrivas som inriktad på att använda de erfarenheter som fås genom en fenomenografisk undersökningsansats för utveckling av undervisning och lärande. Det som är viktigt är variationen av ett specifikt innehåll där urskiljning och reflektion används för att beskriva undervisningen och elevens lärande. Variationen är viktig för lärande. För att lära sig om exempelvis tiokompisar i matematik så bör läraren dela upp talen med varierande metoder. Det innebär att man måste kunna urskilja en typ av företeelse från en annan för att lära sig.

... we cannot discern anything without experiencing variation of that object. There would not be any gender if there were only one, no color if there were only one color etc. So we believe that what varies and that which invariant is fundamentally important. (Marton & Morris 2002, s. 20)

Eleverna behöver alltså kunna urskilja vad det är som varierar. Variationsteorin har intresse av att kvalitativt ta reda på hur människor upplever samma företeelse eller fenomen på skilda sätt. Forskningsmetoder har använts för att studera hur människor tolkar olika aspekter av det specifika innehållet (Marton & Morris, 2002; Runesson, 1999; Lo Mun Ling, 2014; Marton & Booth, 2000).

Runesson (2005) skriver att variationsteorin är en komplettering av andra teorier eftersom den kan avslöja villkoren för vad som är möjligt att lära i en viss klassrumssituation. Variationsteorin i sin helhet är en sammanhängande logiska förklaringar av en serie förhållande som har prövats genom omfattande forskning (Lo Mun Ling, 2014). Runesson (2004) förklarar att erfandet och lärandet i variationsteorin bygger på hypotesen att för att kunna något krävs att man kan se det på ett särskilt sätt. Det som menas är att man bör kunna urskilja vissa drag hos det man lär sig och se att det kan variera, eller förändras. Detta hjälper eleverna att förstå och för att förstå ett specifikt innehåll så behöver de få möjlighet att uppfatta det specifika innehållet på olika sätt. I undervisningen behöver eleverna möta samma innehåll presenterat med varierande metoder. Eleverna ska i undervisningen ges möjlighet att urskilja olika drag som är viktiga för att förstå det specifika innehållet. Det räcker inte att endast presentera likheter för att eleverna ska förstå dem och kunna upptäcka skillnaderna. Läraren bör även gå på djupet i undervisningen och ge många olika variationer av det specifika innehållet (Lo Mu Ling, 2014). Variationsteorin kan användas som ett verktyg att analysera och utveckla undervisningen. Med hjälp av teorin kan man identifiera de delar som måste finnas för att möjliggöra inläring hos eleverna. Den utgör ett verktyg för att planera och analysera undervisningen och förbättra elevernas lärande och kan även användas för att hitta de olika villkor som behövs för att ett lärande ska ske (Marton & Morris, 2002; Lo Mu Ling, 2014).

Variationsteorin fokuserar på ett lärandeobjekt, den förmåga eller kunskap läraren vill att eleverna ska utveckla. Ett lärandeobjekt har flera aspekter och det förstås på olika sätt beroende på vilka aspekter man urskiljer. Om man urskiljer flera aspekter samtidigt har man en mer avancerad förståelse av lärandeobjektet än om man endast urskiljer enstaka aspekter. Förutsättningen för att man ska kunna urskilja lärandeobjektet är att man har upplevt en variation av de kritiska aspekterna av lärandeobjektet när det gäller likhetstecknet kan vara att eleverna blev medvetna om att *det blir* (Lo Mun Ling, 2014). Läraren måste ha ett tydligt mål och bör välja lämpliga arbetssätt som hjälper eleverna att lära sig innehållet. Det är läraren som bestämmer vilket innehåll som ska läras och hur det ska presenteras men variationen i undervisningen är viktigt för elevernas förståelse. Variationsteorin tar lärandeobjektet som utgångspunkt och betonar några viktiga förutsättningar för lärandet och dessa förutsättningar har att göra med hur lärandeobjektet ska behandlas (Lo Mun Ling, 2014).

Variationsteorin används för att skapa möjligheter för lärande. Exempelvis kan en lärare som undervisar om ekvationslösningar, under tiden eleverna diskuterar lösningen, vända på samma ekvation och göra den omöjlig att lösa. Läraren ska medvetet erbjuda situationer där lärande

kan ske på nya sätt. Lärande behöver vara medveten om och kunna använda kritiska aspekter om varför det går/ inte går att lösa ekvationen (Lo Mun Ling, 2014).

Kullberg (2004) skriver i sin undersökning av de internationella studierna, PISA och TIMSS, att många länder fick bättre resultat än Sverige i algebra. Hon förklarar att undervisningen i Sverige i sin helhet är mer lik den amerikanska undervisningen och i större utsträckning skiljer sig från den japanska undervisningen. De asiatiska länderna som t.ex. Japan lyckades bäst med sina resultat i matematik. Det beror på att i Japan arbetar lärarna med kompetensutveckling och de japanska lärarna arbetar på ett medvetet och systematiskt sätt med att utveckla sin undervisning kring ett specifikt innehåll som eleverna skall lära sig (Runesson, 2004). Därför detta tycks vara några av de bakomliggande orsakerna till varför japanska elever får bra resultat i matematik och även lyckas bra vid internationella jämförelser (Skolverket, 2011c). Det som gör att japanska elever lyckades handlar till stor del om lärarens sätt. I Japan fokuserar eleverna i matematikundervisning på ett problem åt gången och försöker komma på olika lösningar/metoder. I Amerika får eleverna i matematikundervisningen lösa många problem med samma metod. Det betyder att eleverna i Japan har olika möjligheter att lära sig fast de hade samma objekt för lärandet. De japanska eleverna tycks nå bättre resultat då de får möta en variation av lösningssätt på problemet medan de amerikanska eleverna får varierade uppgifter som de skall lösa med samma metod (Kullberg, 2004).

5.3 Learning study

Runesson (1999) skriver i sin avhandling om hur olika lärare behandlar samma innehåll. I denna avhandling beskrivs hur lärarna deltog i en learning study där de lät olika kritiska aspekter på lärandeobjektet variera. De kom fram till att undervisningen blev bättre ju större variation det förekom i undervisningen. Lärarna arbetar i en learning study med att låta olika kritiska aspekter variera och det påverkar vad eleverna erbjuds att lära sig i undervisning, vad som varierar i en undervisningssituation har betydelse för lärandet. I en learning study använder en grupp lärare variationsteorin som ett verktyg för att kunna analysera undervisningen kring ett specifikt innehåll. En forskare följer lärarnas arbetssätt och elevernas kunskapsutveckling av ett specifikt innehåll som i detta fall skulle kunna vara likhetstecknet. Syftet med en learning study är att hitta ett mönster av variation som kan tydliggöra lärandeobjektets kritiska aspekter. Genom dylika studier fokuserar man på att reflektera över undervisningen och tar sin utgångspunkt i variationsteorin om lärande. Fokus läggs på elevers lärande av ett specifikt innehåll och på hur läraren kan variera arbetsätten. Grunden för hela arbetet är variationsteorin, lärarna ställer frågor till sig själva innan och efter lektionen för att utveckla sin undervisning. Dessa frågor kan vara av typen: vad brukar eleverna ha svårt med? Varför är det svårt? Hur brukar vi undervisa? Learning study lägger fokuset på kunnande eller förmågan som man vill att eleverna skall utveckla. Lärarna planerar undervisningen tillsammans och genomför undervisningarna i var sin klass. Alla lektioner filmas för att användas vid revidering. Sedan genomfördes en ny undervisningsomgång utifrån ändringar som lärargruppen har bestämt tillsammans (Runesson, 2004; Runesson & Kullberg, 2007).

5.4 Sociokulturella perspektivet

Vi valde det sociokulturella perspektivet som ett verktyg för att kunna analysera hur lärarna arbetar i en elevgrupp för att utveckla deras kunskaper om likhetstecknet utifrån en sociokulturell synsätt, samt för att kunna besvara våra frågeställningar.

Sociokulturella perspektiv handlar (Bråten, Lars & Erling, 1998) om att vi människor lär oss hela tiden i sociala sammanhang. Lev Vygotskij som var en sovjetisk psykolog har utformat en teori och teorins utgångspunkt är det sociokulturella perspektivet. Lev Semenovich Vygotskij föddes i staden Orsha i norra Vitryssland 1896, hans intresse var främst litteratur och filosofi samt historia och psykologi och han undervisade på olika pedagogiska institutioner. Senare blev just psykologi Vygotskijs viktigaste intresse.

” Throughout his life, his work and his behavior draws broadly on the experience of former generations, which is not transmitted at birth from father to son. We may call his historical experience” (Bråten m.fl., 1998, s.14). Vygotskij menar att individens utveckling och prestation spelar en viktig roll i det sociokulturella perspektivet på lärandet. Vygotskij betonar att utvecklingen sker genom relationer, tankeförmåga, språk, och mental och personlig utveckling är den utvecklingen som behövs i det sociokulturella lärande. Säljö (2010) skriver att en av utgångspunkterna för det sociokulturella perspektivet på lärande och mänskligt agerande och tänkande är att man intresserar sig för hur grupper och individer tillägnar sig och använder fysiska och kognitiva tillgångar. Den kognitiva utvecklingen och den kulturella förståelsen kallar Vygotskij för internalisation som innebär att kulturen inte bara är en verklighet utanför individen utan individen faktiskt har internaliserat eller gjort kulturen till sin egen. För att ett barn ska internalisera kunskaper och begrepp krävs det goda relationer med äldre d.v.s. föräldrar, lärare osv för att detta ska lyckas (Bråten m.fl., 1998; Säljö, 2010).

Bråten m.fl. (1998) skriver att enligt Vygotskij är för det första kulturella och kognitiva redskap språk, berättande, skrivande och teckning; för det andra traditionella kognitiva processer som logiskt minne, begreppsbildning och uppmärksamhet. Vygotskij betonar att begreppstänkande hos barnet bildas under yttre påverkan och kan anses vara en social konstruktion. Vidare menar han att för att barnet skall kunna lära sig vetenskapliga begrepp är det viktigt att på förhand kunna utveckla begrepp genom att bygga vidare på fenomen i vardagslivet. Bråten skriver att Vygotskij har formulerat det sociokulturella perspektivet på skolans undervisning som den viktigaste grunden till barns utveckling. I boken Vygotskij och pedagogiken står det att skolans undervisningssituationer och sociala sammanhang är inriktade på att omforma och behandla/utveckla tänkandet. Vidare menar Vygotskij enligt författarna att det sociokulturella perspektivet innebär att eleverna lär sig i ett socialt sammanhang. Där får eleverna möjlighet att diskutera och genom diskussion får de möjlighet att byta kunskaper och lära sig av varandra (Bråten m.fl., 1998).

Säljö (2010) skriver att frågan om hur människor lär och utvecklas är kopplat till hur vi tänker och agerar i allmänhet. Det kan man använda i fortsättningen för att kunna analysera lärande och utveckla kunskaper och färdigheter. Vygotskijs uttryck den närmaste utvecklingszonen innebär skillnaden mellan det ett barn kan klara på egen hand inom ett kognitivt område och de uppgifter som det kan lösa med hjälp av en vuxen. Denna växelverkan mellan spontant och

vetenskapligt begreppstänkande är enligt Vygotskij den viktigaste grunden för individens utveckling av en medvetenhet om sin egen kunskap (Bråten m.fl., 1998). Säljö påpekar att man kommer fram till kunskap, när man förstår argumentationen och handlingen i sociala kontexter och som resultat av aktiva försök att först se och sedan behandla världen på ett visst sätt (Säljö, 2010).

6. Tidigare forskning

Under kapitel 6 kommer problemområdet att belysas närmare genom tidigare forskning. Dels kommer det att handla om olika internationella forskningar om algebra och likhetstecknet och dels kommer det att handla om kritiska aspekter i relation till likhetstecknet.

Under de tidigare årskurserna lär sig eleverna att utföra olika matematiska operationer med naturliga tal. Detta ger eleverna möjligheter att bygga upp en grundläggande förståelse för matematiken. Löwing (2008) skriver att för att elever ska komma vidare i matematiken krävs det att de kan se matematiska operationer på ett mer allmänt sätt för att kunna lösa problem av mer allmänt. Eleverna kan då ha kunskap om hur man löser problem på en generell nivå för resonemang och reflektera om matematiska operationer. Denna förmåga förbättras gradvis hos eleverna och parallellt med att de utvecklar sina matematiska kunskaper är det viktigt att de utvecklar ett matematiskt språk. Detta är viktigt för att eleverna ska kunna resonera och kommunicera kring matematik på ett generellt sätt och även finna och diskutera allmänna matematiska samband. En förutsättning för detta är kunskaper i algebra (Löwing, 2008).

6.1 Internationella undersökningar

PISA (Programme for International Student Assessment) och TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) är studier som genomförs i OECD-länderna (Organisation for economic Co-operation and development) vart tredje år för att undersöka elevernas kunskaper i olika ämnen som matematik, läsförståelse och naturvetenskap (Skolverket, 2012). Där undersöker man olika delar av matematiken och algebra är en av dessa (Skolverket, 2012). Vi kommer att fokusera på vad de har kommit fram till angående svenska elevers kunskaper i algebra och likhetstecken i studierna.

Utifrån undersökningen görs internationella jämförande studier, där länderna kan utforska och uppmärksamma sina egna skolors starka och svaga sidor. Tanken med studierna är att i fortsättningen kunna bidra till en utvecklad och förbättrad skola. Sverige deltog för femte gången i den internationella PISA-studien i mars 2012 och studien visar att Sverige är bland de länder som har lägre och försämrade resultat när det gäller algebra. I Sverige har elevernas genomsnittliga resultat i matematik försämrats jämfört med 2003. Förändringarna är statistiskt signifikanta. I PISA 2003 var Sveriges matematikresultat signifikant högre än OECD-ländernas genomsnitt medan det vid den senaste mätningen var signifikant lägre (Skolverket, 2012).

I PISA undersökningen år 2012 var matematiken huvudområdet och algebra var en stor del av detta område. Även i PISA undersökningen 2003 var algebra en viktig del (Skolverket, 2012). I Skolverket står det om TIMSS, den senaste undersökningen som genomfördes i 50 olika länder där mer än 300 000 elever i årskurs 4 och ungefär lika många i årskurs 8 deltog våren 2011 (Skolverket, 2011c). Målet med TIMSS är att utföra en regelbunden studie för att kartlägga och belysa elevernas kunskaper i matematik och andra ämnen och sätta resultaten i relation till övriga deltagande länder (Skolverket, 2011c). I matematiken undersöks kunskaperna hos eleverna i olika delområden som algebra, där undersöker man elevernas förhållningssätt till dessa ämnesområden och till undervisningen. Studien ger ytterligare information om undervisningens utförande i olika länder. TIMSS visar att Sverige är en av länderna som har lägre resultat just i algebra delen jämfört med elever i andra EU/OECD-länderna. I årskurs 8 är resultatbilden jämfört med de andra länderna den samma som i årskurs 4. Det visar sig att Sverige är bland de OECD- länder som har lägre resultat i algebra, dock låg de över det internationella medelvärdet inom andra områden i matematik. Kunskapsnivån är stabil enligt TIMSS undersökningen. År 2007 deltog svenska elever i årskurs 4 i undersökningen och resultaten visar att det inte har skett någon förändring mellan åren 2007 och 2011 (Skolverket, 2011c). I rapporten står det att matematikkunskaper hos svenska elever varierar inom olika delområden. Eleverna i årskurs 4 är bättre i datapresentation och sämre i taluppfattning. Eleverna i årskurs 8 visar en tendens till att eleverna har bättre resultat inom området taluppfattning men sämre i algebra (Skolverket, 2011c)

6.2 Likhetstecknets kritiska aspekter

Hägström (1995) skriver i sin artikel om hur elever uppfattar matematiken i tidigare årskurser jämfört med senare. Han visar att en större andel elever får svårigheter under högstadiet då många elever under denna period tappar matematikintresset, därför behöver eleverna tidigt en tydlig grundlig matematik undervisning. Det är en trend som inte bara gäller för svenska elever utan återfinns i flera länder. På så vis är det nödvändigt att läraren arbetar med att ge eleverna en stabil matematisk grund då goda kunskaper i matematik kommer att bli allt viktigare i framtiden för att det underlättar förståelsen inför ekvationerna. Frågan är vad det är i högstadiematematiken som ställer till det? Här förklarar Hägström (1995) att det finns en komponent som bidrar till svårigheterna och det är symboler och symbolberäkningar. Introduktionen av algebra har bara förekommit i högstadiet vilket gör att många elever inte fått en riktigt bra förståelse av det. Persson (2002) skriver i sin artikel att det är viktigt för eleverna att algebra ska införas i ett sammanhang och inte som ett lösryckt avsnitt av matematiken med en uppsättning regler, som för eleverna bara blir en procedur utan underliggande förståelse (Persson, 2002).

En vanlig kritisk aspekt som författarna Bergsten, m.fl. (1997) beskriver är att det ofta är så att eleverna uppfattar likhetstecknet som det samma som *blir*. Detta medför senare svårigheter för eleverna då eleverna har förförståelsen blir och inte från början kan lösa en beräkning som exempelvis $5+8=$. För elever som inte har förståelse av att 13 är lika mycket som $5+8$ blir

likhetstecknet en uppmaning att utföra ekvationen och sedan skriva svaret. Då ses likhetstecknet som ett dynamiskt operationellt tal (Bergsten m.fl., 1997; Hægström, 1995).

Dahlin och Eriksson beskriver i sin artikel hur eleverna bär med sig en förförståelse av att likhetstecknet är det samma som *blir*. Elever uppfattar det alltså som att det ska bli snarare än att det är lika med. Dahlin och Eriksson betonar också att eleverna måste kunna tolka och använda likhetstecken för att kunna förstå ekvationer och ekvationslösning (Dahlin & Eriksson, 2008; Stephens, 2006; Li m.fl., 2008; McNeil, 2008; Falkner m.fl., 1999; Asquith m.fl., 2007). Forskarna betonar att eleverna måste ta till sig den statistiska förståelsen av likhetstecknet innan man påbörjar algebra. Forskarna menar också att eleverna som har förstått likhetstecknet som statistiskt bättre har kunnat lösa ekvationer i årskurs åtta.

Gronmo (1999) presenterar i sin artikel att eleverna möter problem med uppgifter där likhetstecknet inte skall tolkas som att något skall utföras. I en uppgift som exempelvis $5+9=$ _ och $4-2=$ _ tolkas likhetstecknet som att man ska utföra en operation. Gronmo menar att i uppgifter av typen $5+9=9+_$ och $4-_=6$ får eleverna möjlighet att tänka och reflektera över andra betydelse av likhetstecknet. Vidare menar han att läraren styr det sätt på vilket uppgifterna presenteras och detta gör i sin tur att eleverna kan bli medvetna om det algebraiska sättet att tänka. Vilket sätt bör då läraren använda? Gronmo hävdar att om eleven skall få utvecklad förförståelsen i algebra så skall man utföra diskussioner och reflektioner i små grupper och sedan i helklass som bör följas upp (Gronmo, 1999).

McNeil och Alibali skriver i en artikel om vikten av likhetstecknet att symbolen är viktig för att få förståelse av många aspekter av matematik (McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill, 2006).

Ett antal forskare (McNeil m.fl., 2006) redovisar i en artikel den studie som de har utfört om elevers upplevelser av likhetstecknet. Den fokuserar på likhetstecken som symbol och hur viktigt det är för att få en bättre förståelse av många delar av matematiken. Författarna uppfattade elevers förståelse av likhetstecken som en viktig del för deras lärande och utveckling. Det som författarna vill betona är att elever behöver en rationell förståelse av likhetstecknets betydelse. Författarna förklarar att det finns andra studier som har pekat på att elever som kan lösa algebraiska ekvationer korrekt har nått upp till en rationell förståelse av likhetstecknet (McNeil m.fl., 2006).

De ovan nämnda forskarna har undersökt om likhetstecknets symboler som inte betyder lika med, för att det skall bidra till att eleverna får förståelse för likhetstecknet. De ovan nämnda forskarna har undersökt elevers förståelse av likhetstecknets olika symboler genom sin studie. Forskarna har gjort 3 olika undersökningsstadier där eleverna fick utföra ett förtest samt ett eftertest för att på så vis kunna undersöka elevernas utveckling (McNeil m.fl., 2006).

Det ena gruppen var elever i årskurs tre och fyra som skulle förstå skillnaden för mellan mindre än, större än och så vidare. Det andra gruppen var enbart att kunna förstå likhetstecken och den sista fick inte möjlighet till att upptäcka och urskilja symboler. Författarna har kommit fram till att de elever som fick öva sig i att urskilja mellan mindre än, större än och likhetstecknet fick bättre resultat än eleverna i de andra grupperna (McNeil m.fl., 2006).

Utifrån studien drog dessa forskare slutsatser om varför elever får svårigheter med likhetstecknet och varför elever ofta brister i förståelse när de ska utföra beräkningar (McNeil m.fl., 2006). Undervisningen ska syfta till att eleverna inte enbart ska hitta svar och lösningar på olika operationer utan den ska även syfta till en ökad förståelse av likhetstecknets betydelse (McNeil, 2008). Som vi har nämnt tidigare under punkt 6.1 visar TIMSS-undersökningen som gjordes år 2007 att svenska elevers matematikkunskaper behöver utvecklas och förbättras. Enligt TIMSS får undervisning som enbart är läroboksstyrd svårighet att befästa matematisk förståelse. (Skolverket, 2011c). McNeil m.fl. (2006) skriver i sina studier om Baroody och Ginsburg (1983) och Carpenter m.fl. (2003) som även har undersökt om likhetstecknet. Enligt de sistnämnda forskarnas undersökningar tycks det vara både möjligt och önskvärt att föra in likhetstecknet redan i föreskoleklassen. McNeil m.fl. (2006) beskriver i sin undersökning, som genomförts i årskurs 6, hur eleverna skulle svara på en vis typ av uppgifter som gick ut på att svara och placera rätt siffra i rutan t.ex. $8+4= _+ 5$. Resultatet visade att endast 10 % av eleverna skrev det rätta svaret. McNeil (m.fl., 2006) och de andra forskarna beskriver i sin undersökning förståelsen av likhetstecknet hos elever i årskurs ett hur. Forskarna menar att eleverna ser likhetstecknet som en relationssymbol vilket innebär att likhetstecknet relaterar till ett svar. Där gjorde alltså eleverna en operativ tolkning av likhetstecknet. Författarna skriver också att det ger bättre resultat om läraren tidigt presenterar likhetstecken. Man bör börja med att presentera likhetstecknet i en enklare kontext för att sedan gradvis göra mer komplicerade beräkningar. Om man för tidigt presenterar svåra tal för eleverna leder det ofta till en sämre förståelse av likhetstecknet längre fram. Så bör man t.ex. undvika att presentera ett tal som $12-4+2=$ då det innehåller både addition och subtraktion och lätt ställer till det för eleven. För att lösa denna typ av operationer på rätt sätt är det nödvändigt för eleverna att först lära sig tolka likhetstecknet som en symbol för likvärdighet snarare än som en uppmaning att utföra en operation (McNeil m.fl., 2006; Carpenter m.fl., 2003).

Vi skrev under punkt (5.3) om undersökningen där många lärare deltog i en learning study. Där beskriver Runesson (2006) learning study med hjälp av variationsteorin. Hon poängterar att det är nödvändigt för eleverna att de förstår likhetstecknets två betydelser för att senare kunna utföra svårare matematiska beräkningar som t.ex. algebraiska ekvationer. I arbetet som lärarna deltog i försökte de utveckla elevernas förståelse för likhet och att likhetstecknets kritiska aspekter som kan betyda att likhetstecken består av *det blir* och är *lika mycket*. Detta gör att eleverna förstår både helheten av en beräkning och de olika delarna t.ex. del + del = del + del. Här menar Runesson (2006) att det är viktigt att det finns ett visst mått av variation av lärandeobjektet. I denna learning study började lärarna med att ta reda på elevernas för-förståelse av lärandeobjektet genom intervjuer. Där bad lärarna eleverna att förklara hur de tänkte kring vissa beräkningar, sen samlade lärarna elevernas synpunkter och använde dem som en grund för undervisningen. Denna undervisning planerade lärarna tillsammans. Lärarna planerade och genomförde tre lektioner som hade samma typ av struktur, men de skiljde sig åt i hur lärandeobjektet kritiska aspekter bearbetades. Lärarnas utvärderingar av lektionerna visade att i två av lektionerna om likhetstecknet förändrades flera av de kritiska aspekterna som är ”bli tänket”. I den andra lektionen förändrades flera aspekter av likhet i följd. Det som

lärarna kom fram till var att olika lärande var bundna till flera aspekter som förändrades samtidigt eller separat (Runesson, 2006).

Bergsten m.fl. (1997) förklarar att det är nödvändigt för elevernas lärande att läraren presenterar både det dynamiska, operationella och statiska, strukturella tänkandet för att ge en övergripande förståelse om likhetstecknets betydelse. I undervisningen bör lärarna förklara huvudräkning för eleverna med både tankesätten. Det gör att eleven får en rikare förståelse och kan använda flera olika sätt att förstå sambanden i en ekvation (Bergsten m.fl., 1997). Enligt variationsteorin så är variation nödvändig för att eleverna ska kunna urskilja olika aspekter av lärandets objekt. Forskarna Marton, Runesson och Tsui (2004) hävdar att om eleverna kan urskilja kritiska aspekter av lärandets objekt så ges de bättre möjligheter att lära sig och utveckla sina kunskaper.

What is of decisive importance for the students, is what actually comes to fore of their attention, i.e., what aspects of the situation they discern and focus on. In the best case they focus on the critical aspects of the object of learning, and by doing so they learn what the teacher intended. But they may also fail to discern and focus on some of the critical aspects, or they may discern and focus on other aspects. (Marton, Runesson & Tsui, 2004, s.5)

Honies (2004) beskriver hur barnen i den inledande undervisningen tillägnar sig det matematiska symbolspråket genom att rita och samtala om hur de tänker när de arbetar med olika uppgifter. Författaren hävdar att lärarna inte har tagit tillräckligt allvarligt på den abstrakta process som symbolerna införs i en operation. Det betyder att eleverna utvecklar sina kunskaper om likhetstecknet genom att berätta något. Läraren bör vara medveten om vilka krav som han eller hon vill uppnå då det hjälper eleverna att veta vad som är viktigt för att de ska kunna utvecklas.

Författare Ahlberg m.fl. (2000) förklarar att barn redan i förskoleklassen kan rita och prata om räkne händelser utan att de behöver skriva symboler. Barn har mycket fantasi och löser uppgifter på ett kreativt sätt. När de kommer upp i sexårsåldern behöver de dock börja förstå matematiska symboler och innebörder. Många barn missförstår likhetstecknet och för att kunna utveckla förståelsen för innebörden av likhetstecknet så bör läraren lära barnen att möta likhetstecknet i konkreta situationer långt innan de börjar räkna uppgifter av typen $3+2=$ __. Då de senare kommer att möta ekvationer behöver eleverna förståelse av likhetstecknets innebörd. Läraren bör introducera likhetstecknet i de tidigare åldrarna då eleverna kan få jämföra mängder. Författarna skriver också att det finns olika konkreta arbetssätt att lära eleverna på. Genom t.ex. vågen, öppna utsagor och att eleverna får laborera själva får eleverna bättre förståelse när de laborerar och diskuterar om likhetstecknet eller beräkningarna. Författarna tycker att det är lämpligt att införa symbolerna gradvis och med konkreta material kan läraren först införa likhetstecknet och sedan föra in plus- och minustecken och även lära eleverna att arbeta samtidigt med båda sidorna av likhetstecknet. Läraren bör lära eleverna de informella metoderna för att de ska kunna klara beräkningar (Ahlberg m.fl., 2000)

7. Metod

Under punkt 7 presenterar vi vårt val av metod för genomförandet av undersökningen som är relevant för vårt syfte och frågeställningar. Vi beskriver vilken metod som vi har valt och förklarar även varför vi har valt just den metoden i vår undersökning.

7.1 Kvalitativt intervju

Vår undersökning baserar sig på en kvalitativ studie. Stukat (2011) förklarar begreppet kvalitativt och menar att kvalitet har två betydelser, en mer neutral med betydelsen sort, karaktärsdrag och beskaffenhet samt en andra, mer positivt värderande betydelse. Stukat skriver att det kvalitativa tänkandet har vuxit fram ur de humanistiska vetenskaperna. Grundtanken inom de filosofiska inriktningarna hermeneutik och fenomenologi uppfattning är att helheten utgör mer än summan av delarna. I en fenomenografisk forskningsansats som vi har nämnt tidigare under punkt (5.1) kan det också handla om att forskaren bör ha kunskaper och erfarenheter om ämnet. Kunskaperna behövs för att utforma intervjun där det skapas en dialog och forskaren bör lyssna med öppet sinne och ställa frågor så att den intervjuade hänger med. Forskaren måste även vara medveten om sin egen förförståelse för att kunna upptäcka vad som är kritiskt i intervjun. Den kvalitativa analysens huvuduppgift är att tolka och förstå de resultat som framkommer och inte att generalisera resultatet och dra statistiska slutsatser (Stukat, 2011). Det kvalitativa arbetssättet kan innebära öppna intervjuer av olika slag och intervjun ska ha bestämda frågor utifrån specifika kategorier. Det samlade materialet ska bearbetas med olika former av kvalitativ analys, men det finns en problematik i det då forskarens tolkningar kan spela roll för vilket resultat man får. För att undvika denna fälla bör forskaren koncentrera sig på en undersökningsmetod t.ex. intervju där man ska beskriva materialet exakt som det är och forskaren inte blandar in sina egna åsikter med undersökandeobjektets åsikter (Stukat, 2011).

Forskningsintresset i kvalitativt arbete handlar inte alltid om att man ska generalisera sina resultat. Däremot är målet att finna kvalitativt olika uppfattningar som kan täcka större delen av variationen i uppfattningar (Stukat, 2011). Författarna Rienecker och Jorgensen (2008) skriver angående kvalitativ empiridata att den handlar om särskilda kvaliteter och egenskaper hos det som forskaren studerar. Om man har få kvalitativa data måste man formulera sig omfattande. Problematiken är, som vi nyss påpekade, att säga något generellt utifrån en begränsad mängd data. Genom att uttala sig om just det som gäller den empiri man undersökt kan forskningen göras relevant för läsaren.

Syftet med vår undersökning var att ta reda på hur lärarna arbetar för att utveckla elevernas kunskaper om likhetstecknet. Vi genomförde vårt arbete genom intervjuer med åtta olika lärare från fyra olika skolor för att sedan göra analyser av det. Vi har tillsammans planerat våra intervjufrågor utifrån arbetets syfte och våra intervjufrågor var relaterade till frågeställningarna. Vidare har vi konstruerat följdfrågor som kan användas under intervjun för att få djupare förståelse om lärarnas arbetssätt. När vi formulerade våra intervjufrågor tog vi vår utgångspunkt i det som författarna skriver om i *Metodpraktikan* (Esaiasson, Gilljam,

Oscarsson & Wängnerud, 2012). Där menas det att intervjun bör inledas med frågor som fungerar som ett slags ”uppvärmningsfrågor”, vilka skapar god stämning för att intervjupersonen inte känner sig för utsatt. Under intervjun lyssnade vi noga på svaren och vi var även nyfikna på deras reflektioner vilket gjorde att intervjupersoner lättare kunde känna sig avslappnade (Esaiasson m.fl., 2012).

Genomförandet av vår undersökning präglades av ett kvalitativt arbetssätt. Kvale och Brinkmann (2009) skriver om den kvalitativa forskningsintervjun att den syftar till att undersöka och förstå världen från undersökningens personernas synvinkel, framställa och utveckla mening av personernas erfarenheter, upptäcka deras levda värld som den var före de vetenskapliga förklaringarna. (Kvale & Brinkmann, 2009). Syftet med den kvalitativa forskningsintervjun är att förstå ämnen från det praktiska arbetet i vardagen ur lärarnas eget perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2009). Verktyg som vi har använt under våra intervjuer är bandspelare och våra mobiltelefoner då det underlättade arbetet med att renskriva lärarnas svar. Kvale och Brinkmann (2009) förslår att forskaren ska skaffa sig en bandspelare under intervjuaren för att det ska vara intressant för intervjupersonen. Vidare menar Kvale och Brinkmann (2009) att man kan säga att vardagslivets samtal liknar ett professionellt samtal. Detta innebär att genom intervjun konstrueras kunskap i interaktionen mellan intervjuaren och den intervjuade (Kvale & Brinkmann, 2009). I *Metodpraktikan* (Esaiasson m.fl., 2012) står det att samtalsintervjun ger större utrymme för interaktion och samspel mellan intervjuaren och intervjupersonen. Författarna skriver att intervjun som metod inte främst bygger på källkritik utan i första hand lämpar sig för att undersöka människors åsikter och inställningar kring de föreställningar man undersöker (Esaiasson m.fl., 2012).

Vi valde att endast använda oss av intervjuer då undersökningen handlar om likhetstecknet och hur lärarna i praktiken arbetar för att utveckla undervisningen. Vi gjorde ett begränsat urval då vi främst ville intervju lärore som för tillfället befann sig mitt uppe i arbetet med likhetstecknet. Vi upplevde vissa svårigheter i att få tag på lärare för intervjuer och det var en del som tackade nej till intervjun när de hörde att det handlade om pre-algebra. Vi försökte dock förklara att det inte var så avancerade ämnen men trots det upplevde vi vissa svårigheter med att få intervjuobjekt. Naturligtvis accepterade vi de som inte ville bli intervjuade i enlighet med vad författarna Esaiasson m.fl. (2012) skriver om samtycke mellan intervjuaren och intervjupersonen. Den teori som vi har tagit inspiration från är variationsteori, fenomenografin och sociokulturell perspektiv. I vår resultatredovisning och diskussionen, kommer vi att analysera och diskutera lärarnas arbetsätt.

7.2 Urval

Åtta lärare ingick i undersökningen och dessa valdes ut genom bekvämlighetsurval (Bryman, 2008). Som namnet antyder befann sig fyra av lärarna nära till hands under författarnas verksamhetsförlagda utbildning (VFU). Vi har vår VFU-placering på två olika skolor. Vi intervjuade två lärare från varje skola. Vi fick även en intervju med två lärare från en annan skola i det ena området och två lärare i det andra området, vi intervjuade sammanlagt åtta lärare från fyra olika skolor och samtliga lärare undervisade i de tidigare åldrarna. Dessa lärare

valdes eftersom de tyckte att likhetstecknet var viktigt för elevernas utveckling. Åtta lärare tackade ja till intervjun medan 35 stycken tackade nej. Att hitta lärare som tycker att likhetstecknets betydelse är viktigt för eleverna var en förutsättning för vår undersökning. Vi ville också få en så stor variation som möjligt, därför valde vi lärare som arbetar i fyra olika skolor som befann sig i olika miljöer för att se om de hade olika arbetssätt som vi kunde ha nytta av i vår undersökning. Vi ville inte bara undersöka en skola då vi kanske inte hade fått en tillräcklig variation i vårt underlag. Lärarnas uppfattningar om lärandeobjektet lämpar sig väl för en kvalitativ analys. Observationer hade varit en annan möjlig metod som hade gjort det möjligt för oss att se hur lärarna arbetar med likhetstecknet i praktiken. Då hade vi kunnat jämföra hur lärarnas utsagor stämmer med det de gör under lektionen. Men vi valde inte detta tillvägagångssätt då det var svårt att få tag på lärare som under den aktuella perioden undervisade om just om likhetstecknet.

8. Analys av insamlat material

Vi intervjuade åtta lärare och varje intervju tog mellan 20 - 35 minuter. Vi skrev rent varje intervju för sig. Kvale och Brinkmann (2009) beskriver vad hon kallar meningskoncentrering. Detta är en analysmodell som innebär att man utgår från de transkriberade intervjuerna och kondenserar förkortar/vaskar fram det centrala ur långa sammansatta texter tills endast huvudinnebörden/vissa centrala teman finns kvar. Vi använde först meningskoncentrering sen ställde vi undersökningsfrågor som är studiens frågeställningar i relation till dessa centrala teman för att sedan kunna knyta samman all samlad data till ett tydligt slutresultat. Slutligen kategoriserade vi våra intervjuresultat utifrån de centrala teman som vi identifierat. På så vis försökte vi identifiera mönster och samband mellan våra olika intervjuer. Vår kategorisering resulterade i skapandet av tre kategorier.

Vi kommer under kapitlet Resultatredovisning att presentera dessa kategorier. Teorin som vi utgår ifrån och använder som analysverktyg är variationsteori och sociokulturell teori. Begreppen skillnader och likheter kommer att användas för att hitta centrala teman och kritiska aspekter. Vi kommer lägga fokus på lärarnas arbetssätt och lärandeobjektet samt undersöka i vilken utsträckning lärarna använder sig av en varierad undervisning. På vilket sätt skiljer sig de olika lärarnas arbetssätt och hur förhåller sig deras arbetssätt till vår valda forsknings tankar om variation i undervisningen? Detta är frågor som vi kommer att belysa och dra av slutsatser som kommer i vår analys. Vi undersöker även huruvida de intervjuade lärarna uppfattar kritiska aspekter av elevernas lärande och om de identifierar några särskilt viktiga faktorer för lärandet.

För att skydda lärarnas identitet kommer vi att markera lärarna med LA, LB, LC, LD, LE, LF, LG och LH.

9. Tillförlitlighet

För att kunna utföra vår studie har vi använt oss av våra inspelningar samt anteckningar. Genom att använda oss av inspelningar menar vi att vi stärker undersökningens reliabilitet då vi kan försäkra oss om att vi har uppfattat svaren korrekt.

Stukat (2011) förklarar reliabilitet som tillförlitlighet och betonar att det handlar om kvalitén på mätverktyget som används i studien. Han menar också att det ibland kan finnas brister på reliabiliteten. Det kan vara exempelvis feltolkningar när intervjuaren frågar eller yttre störningar under intervjun. Vidare menar han att intervjupersonen kan ha en dålig dag eller att man gissar på vissa frågor som ställs. Ibland var det störningar vid enstaka tillfällen under inspelningarna då det kom någon och öppnade dörren eller så rörde intervjupersonen på sig för mycket. Detta gjorde att det var svårt att höra vissa ord när vi skrev rent intervjuerna. För att få in det området som undersökningen handlar om så har vi utgått från frågeställningarna och syftet med studien.

Stukat (2011) skriver att forskaren ska vara medveten och fundera över undersöknings generaliserbarhet, "vem de resultat man får fram egentligen gäller för" (Stukat, 2011, s.129). Vi kan inte generalisera lärarens arbetssätt i vår undersökning då vi endast har intervjuat 8 lärare.

10. Forskningsetiska aspekter

Under intervjuerna har vi utgått från vetenskapliga rådets forskningsetiska principer inom humanistisk- samhällsvetenskaplig forskning (HSFR) (Stukat, 2011). De åtta lärarna som vi har intervjuat har blivit informerade om undersökningen. Vi berättade för dessa lärare om oss och vad syftet var med vår undersökning. Lärarna har blivit informerade om att deras uppgifter endast kommer att användas i undersökningssyfte och att inspelningen och allt transkriberat material kommer att slängas när arbetet är färdigt. Vi har förklarat att all material och information som vi har fått konfidentiellt och deras identitet skulle vara anonym. Lärarna hade även informerat och vi varit tydliga från början om att medverkan var frivillig och att de när som helst kunde avbryta i undersökningen. Kontakten med dessa lärare var genom telefon och E-post och frågade de om de ville delta i undersökningen. Dessa lärare var positiva och ställde upp, medan många andra lärare som vi hade frågat tackade nej vilket var helt acceptabelt.

11. Resultatredovisning

Under detta kapitel kommer vi att presentera vår tolkning av intervjuerna med lärarna LA, LB, LC, LD, LE, LF, LG och LH som handlar om undervisningen av likhetstecknet. Resultatet är vår egen tolkning som vi styrker med citat som är tagna från intervjuerna. Under intervjuerna ställde vi olika frågor, bland annat om hur undervisningen om likhetstecknet ser ut idag jämfört med några år sedan? När presenterar lärarna likhetstecknet för eleverna? Hur uppfattar lärarna själva likhetstecknet? Vilka arbetssätt använder de i undervisningen om likhetstecknet? Av dessa frågor fick vi svar att matematikundervisning ser mycket bättre idag än för några år sedan. De flesta lärare som vi intervjuade har arbetat i många år och av detta drog vi slutsatser som vi kommer att belysa nedan.

Vårt resultat bygger på 8 intervjuer, vi frågade 43 lärare om intervju men 35 lärare tackade nej till intervjun och angav som svar att de dels hade ont om tid, dels tyckte de ämnet var svårt. De flesta frågade vad som menas med pre-algebra. De lärarna som vi intervjuade hade redan en förståelse om likhetstecknet men begreppet pre-algebra var okänt för de flesta lärarna. Utifrån vår samlade data har vi lagt märke till att det finns två dimensioner i lärargruppens arbetssätt. Dimensionerna kallar vi *metod* och *förståelse*. Med *metoden* menar vi hur lärarna undervisar om likhetstecknet, vilka olika arbetssätt som lärarna föredrar och vilka material de använder i undervisningen om likhetstecknet. Med *förståelsen* menar vi att handlar om vad lärarna vill att eleverna ska förstå i undervisningen om likhetstecknet och vilken *förförståelse* eleverna bör ha innan lärarna presenterar likhetstecknet. Det finns likheter och skillnader på metod och förståelse. Skillnaden är att lärarna har olika uppfattningar om vad som är viktigast i undervisningen om likhetstecknet, om de koncentrerar sig på förståelse först eller metod. Likheten är att lärarna integrerar metod och förståelse i sin undervisning. Kategorin praktiska aktiviteter skiljer sig från den andra kategorin genom det sätt som lärargruppen arbetar med *förståelsen* och grundläggande uppfattningar om talen. I denna kategori görs det genom praktiska aktiviteter vilket tycks öka *förståelsen* för likhetstecknet.

Vi kommer att skriva en kort presentation om lärarna (se bilaga 1), och intervjufrågorna som handlar om undervisningen om likhetstecknet (se bilaga 2). I resultatredovisningen kommer vi att skriva några citat från lärarna för att tydliggöra vad som skiljer kategorierna åt. Lärarna presenteras i en grupp för att vi ser på dem som en helhet, en lärargrupp. De tre kategorier som beskriver lärares varierande arbetssätt av likhetstecknet är:

1. Praktiska aktiviteter.
2. Samtala i grupp.
3. Alternativa lärmiljöer.

11.1 Praktiska aktiviteter

Denna kategori handlar om att lärarna använder praktiska moment för att skapa en förståelse för vad likhetstecknet betyder.

LE: // Och jag tänker att matte är konkret, laborativt och abstrakt. När eleverna är små ska man visa eleverna med konkret material och laborera med fingrarna, kort och klossar så att eleverna förstår likhetstecknets betydelse. Sedan jobbar vi med abstrakta saker, att fem står för fem saker. Sedan när vi gör olika räknesätt så måste vi kunna gå tillbaka till det konkreta och se vilka regler gäller.

Lärare LE i detta citat poängterar det konkreta, laborativt och abstrakta. Att eleverna behöver laborera med fingrar, kort och klossar är ett exempel på hur eleverna använder laborativt material i sitt arbete. Enligt LE leder det till att eleverna utvecklar *förståelse* om likhetstecknet, när de arbetar med konkreta material och förstår vad föremålet står för. Detta effektiviserar elevernas lärande om likhetstecknet och tal. LE tycker att eleverna behöver ha en djupare förståelse av tal för att sedan kunna förstå vad likhetstecknet står för. LE förklarade att eleverna behöver lära sig både den *dynamiska* och *statiska* uppfattningen om likhetstecknet.

LF: Vi brukar prata om gungbrädor och jag brukar vara en våg för att visa för eleverna likhetstecknet där ta jag fram mina händer // jag lägger saker och även visa att det inte spelar någon roll om det är tunga saker eller lätta saker. Så att man visar att det antalet som gäller. Men först måste de ju förstå delning av tal så förstår de inte det så är det kört. Det är viktigt att ha öppna utsagor att och man gör mycket praktiskt först för att förstå.

Både lärarna LE och LF säger explicit att det praktiska laborativa arbetet är viktigt. Lärare LF använder våg som ett praktiskt verktyg för att förklara för eleverna vad likhetstecknet står för. Det hjälper dem att få en djupare *förståelse* om likhetstecknet samtidigt tycker LF att denna metod är lämplig för att den hjälper eleverna att förstå likhetstecknet. LF tycker att innan man presenterar likhetstecknet för eleverna så bör de förstå delning av tal och om de inte får utveckla denna förmåga så blir det svårt för dem att förstå likhetstecknets betydelse.

LA: det som är viktigt i ettan är att de måste kunna förstå vad ett tal är, många barn kan ramsa, rams räkna om talen. Men vad betyder t.ex. i talet 4 så finns talet 3 och 1 det är inte självklart för barnen. Sen att likhetstecknet när man börjar med och är lika med på båda sidor är hur svårt som helst att visa för barn och att förstå de olika sakerna. Jag brukar lägga en tallinje på golvet där brukar vi räkna tillsammans.

Lärare LA i detta citat förklarar att eleverna måste ha en grundläggande förståelse för tal och dess uppdelning redan i första klass även om likhetstecknet är svårt att förstå när eleverna är små. Läraren tycker att det är viktigt att börja tidigt med att utveckla förståelsen av likhetstecknet. Det uppnås genom praktiska aktiviteter, t.ex. nämnde lärare LA att de brukar räkna med en tallinje. LA tycker att eleverna kan räkna från ett till tio men de förstår inte vad det innebär. Då förklarar LA att i talet 4 finns siffror som talet 3 därför behöver eleverna förstå det först innan LA presenterar likhetstecknet för dem för att likhetstecknet är inte lätt för eleverna.

Ett laborativt och konkret material fungerar enligt våra intervjuade lärare bra för att nå en ökad förståelse för många av eleverna. Det är även viktigt att kunna ha med Praktiska aktiviteter som en variation av undervisningen för de elever som har svårigheter att förstå lärandeobjektet med andra metoder. Sedan tycker lärarna att det är viktigt att tänka på en lämplig *metod* som hjälper eleverna att förstå de viktiga aspekter som rör likhetstecknet och tal. Det gör de efter att eleverna fått utveckla förståelsen om grundläggande kunskaper om talen.

11.2 Samtala i grupp

Denna kategori handlar om att lärargruppen arbetar i grupper med eleverna för att skapa trygghet hos eleverna och få möjlighet för en öppen diskussion mellan läraren och eleverna. Lärargruppen vill utveckla elevernas förståelse om likhetstecknet genom att undervisa i grupp. Denna kategori skiljer sig från andra kategorier genom att lärargruppen koncentrerar sig på att välja en *metod* där eleverna känner sig trygga i att arbeta i en grupp. I valet av *metod* reflekterar lärarna över hur de ska undervisa och variera arbetssättet i grupperna för att vidare utveckla elevernas *förståelse*. Det som utmärker kategorin samtala i grupper är att lärarna tycker att man först bör välja rätt *metod* som sedan kan hjälpa eleverna att utveckla *förståelsen* om likhetstecknets betydelse. Vidare är det sociokulturella inslaget mycket tydligt i denna arbetsform då gruppssamtalen möjliggör ett ständigt utbyte mellan eleverna emellan.

LA: ofta börjar jag med en samling där jag använder de små white-boardarna. Speciellt i årskurs tre när vi fick dem kunde jag skriva ett tal vilket som helst så fick eleverna sitta och lösa det och sen var jag sekreteraren och kunde visa på två olika sätt och prata om det, vilket var det bästa sättet eller smartaste sättet. Så kunde jag visa på olika sådana saker. Sen har jag ibland olika projekt som jag kan kalla det, för barnen fick jobba ihop två och två eller tre och tre o.s.v. De undersöker alltså någonting och det kan vara vad som helst. Efter det samlas vi igen och då får barnen redovisa sina undersökningar för gruppen.

I detta ovanstående citat uttrycker lärare LA att samlingen är viktig. Där bör läraren tänka på vilket språk man ska använda då det påverkar elevernas förståelse om likhetstecknet. Läraren använder i ovanstående exempel ett hjälpmedel för att få eleverna att förstå hur de kan undersöka och förstå likheten. Där är även diskussionen och reflektionen mellan eleverna och läraren viktiga för förståelsen. Därför tycker lärare LA att det är viktigt att läraren väljer rätt metod som hjälper eleverna att förstå likhetstecknet. LA tycker att eleverna lär sig bättre om likhetstecknet när de samtalar med varandra om beräkningar. Detta ger dem möjlighet att reflektera och resonera och det i sin tur utvecklar deras förståelse om likhetstecknet.

LB: Det är viktigt att dela upp eleverna i små grupper för att eleverna ska känna sig bekväma när de pratar inför en grupp. För att våga göra fel utan att det är en stor grupp som lyssnar och att kamraten skrattar åt en eftersom vissa elever inte har förmågan att visa sina kunskaper då. Då är det bra om de sitter i små grupper och pratar om beräkningar och reflekterar över likhetstecknet.

I detta ovanstående citat poängterar lärare LB att eleverna känner sig trygga i mindre grupper och att det är viktigt att man vågar säga fel. Sedan väljer man en lämplig *metod* som hjälper eleverna att förstå likhetstecknet och detta gör man i mindre grupper. Därför tycker LB att

läraren först bör välja en metod som passar eleverna och får dem att känna sig trygga, vilket är en viktig aspekt som gör att eleverna förstår ämnet.

LG: Vi brukar ofta börja med att jag visar eleverna på tavlan, sedan så försöker jag göra en dialog med eleverna och demonstrera hur jag gör för eleverna. Gärna att man introducerar någonting nytt och de får chansen att prata två och två eller i små grupper. Sedan gör man individuellt arbete där de räknar själva och använder läromedel.

Lärare LG börjar undervisningen med en genomgång vid tavlan där LG presenterar nya strategier för att lösa beräkningar. Enligt LG gör det att eleverna får upp sina ögon för nya sätt att utveckla deras förståelse om likhetstecknet. Läraren upprepar vid varje genomgång att likhetstecknet står för *lika mängder*. LG förklarar att det är viktigt att skapa någon slags dialog mellan läraren och eleverna och att arbeta i små grupper är också ett arbetssätt som hjälper eleverna att förstå. Sedan efter diskussionen använder läraren läromedel som matteböcker för att eleverna ska kunna räkna själva.

LD: Samtala om likhetstecknet och förklara. Det här att samtala två och två det är så mycket effektivare än att sitta där själv med massor av tal som barnen inte vet om de har gjort rätt eller fel. Att bara göra mekaniskt. Läraren ska kräva att de ska sitta tillsammans och förklara vad de har gjort för att de inte vet när jag kommer. Då frågar jag hur har ni tänkt, kan ni förklara? Då upptäcker jag om eleverna har förstått eller inte, jag uppmanar barnen själva att de ska förklara.

Lärare LD tycker att eleverna inte bör använda matematikböcker så ofta för att det stör deras inläring om likhetstecknet. LD förklarade att läraren får ta hjälp av matematikböcker där det finns uppgifter som eleverna ska samtala om. Enligt LD påverkar diskussionen mellan eleverna för deras förståelse positivt. LD och LA har arbetat år 2007 med projektet learning study där lärarna upptäckte att de bör analysera sin undervisning och variera i arbetsätt.

11.3 Alternativa lärmiljöer

Denna kategori handlar om att lärarna använder andra lärmiljöer än klassrummet för att skapa förståelse för vad likhetstecknet betyder. Det som skiljer denna kategori från andra kategorier är att lärargruppen tycker att båda dimensionerna går hand i hand och det går inte att specificera vilken dimension som kommer först. Lärarna poängterar att det som hjälper eleverna att förstå likhetstecknet är att man som lärare väljer rätt *metod* i olika miljöer vilket samtidigt ger möjlighet för en fördjupad *förståelse* där eleverna arbetar kreativt med beräkningarna.

LH: det finns många saker sådana som man håller på jättelänge med. Som att ha en tallinje på marken i skolgården, som består av 5 röda cirklar, 5 svarta eller vita, 5 röda till och 5 svarta och sen går de och ställer sig på 10. Då frågar jag hur vet du det? Att det är 5 där och 5 där som är 10. Det här att kunna använda tallinjen så praktiskt. Att lära sig att de här första 5 är 5 som inte ens behöver räknas. Det är mycket sånt här och dels är det förfärligt med matteböckerna för de börjar nästan med en gång med + och -.

I detta ovanstående citat menar lärare LH att, genom att välja rätt miljö hjälper man eleverna att förstå likhetstecknet. Det är viktigt att det görs genom praktiska aktiviteter och innan dess bör läraren veta vilken *metod* som passar eleverna för att utveckla deras *förståelse*. Där tog

LH ett exempel som förklarar hur eleverna arbetar på skolgården med en tallinje. Eleverna brukar ta figurer som cirklar i olika färger. LH ger en uppgift för eleverna; räkna summan av 10 med hjälp av färgade cirklar. Då väljer eleverna 5 röda cirklar som de adderar med 5 svarta cirklar där fick de se att röda och svarta cirklar väger *lika mycket*. LH menar att eleverna utvecklar förståelsen om likhetstecknet och tal samtidigt genom denna arbetsätt.

LC: Jag försöker hitta olika metoder som barn kan använda väldigt mycket. De får själva göra saker eller själva få räknas som föremål i skogen. Då har vi två timmar i veckan som vi får vara där i skogen och eleverna får stå eller lägga 4 barn där på olika sätt. Man kan även göra det i klassrummet. Jag försöker koppla det till många områden och även få med begrepp som de kan lära sig så de får vara mer delaktiga.

Lärare LC betonar att man genom att undervisa om likhetstecknet i utemiljö och att variera arbetssättet hjälper eleverna i tidigare årskurser att förstå likhetstecknet. LC förklarar att i skogen räknar eleverna olika föremål för att förstå att saker ser olika ut men de är *lika mycket*, även eleverna själva får vara delaktiga och användas som ett föremål.

LE: Jag försöker ha olika. Ibland gör vi så att vi kommer fram till svaret tillsammans eller också genom att experimentera. Jag tar fram vågen och vi ser om det väger lika mycket. De ska förstå själva att jag måste lägga så mycket för att det ska väga lika mycket på den sidan. Vi går utanför klassrummet och försöker väga olika föremål och använda utemiljön. Det hjälper barnen att förstå på ett kreativt sätt.

LE förklarar i detta citat att det som hjälper eleverna att förstå likhetstecknet är att de får experimentera själva, eleverna får gå ut och undersöka om tal. På det sättet ökar deras förståelse om tal och likhetstecknets betydelse. LE förklarade att i undervisningen brukar eleverna använda olika hjälpmedel som IKT, och i experimenten får eleverna använda olika föremål som eleverna kan hitta i naturen.

12. Diskussion

Under detta kapitel kommer vi att diskutera tidigare forskning och resultatet. Kapitlet inleds med en diskussion kring undersökningens frågeställningarna med en förklaring om vilka resultat vi fick av vår insamlade data.

Syftet med vårt arbete var att undersöka lärarens uppfattning om arbetssätt för att utveckla elevernas förståelse för likhetstecknet i årskurser F-3. Under våra intervjuer har vi funnit en hel del kopplingar till såväl variationsteori som sociokulturell teori. För att tydliggöra de olika typer av aktiviteter som försiggick i klasserna har vi skapat tre kategorier som sammanfattar viktiga aspekter av vår studie. Dessa är *Praktiska aktiviteter*, *Alternativa lärmiljöer* och *Samtala i grupp*.

12.1 En varierad undervisning

Inledningsvis arbetade de allra flesta lärarna med att variera material, metoder och lärmiljöer. De allra flesta arbetade även med olika hjälpmedel som läroböcker, IKT och praktiska material av olika typer. Praktiska material var exempelvis klossar, pengar, leksaker eller material som man kunde hitta i naturen.

En av intervjufrågorna var hur lärarna såg på undervisningen nu jämfört med tio år sedan? De flesta lärare i lärargruppen har arbetat i många år och undervisningen är enligt dem mycket bättre än för några år sedan. Framförallt upplevde lärarna att arbetssättet i skolan nu är mycket mer varierat, inriktat på grupparbeten och i större utsträckning kopplat till praktiska aktiviteter. I de fall undervisningen har förändrats på ett sådant sätt kan man, dels utifrån forskning, dels utifrån våra intervjuer tro att matematikundervisningen kommer nå bättre resultat än tidigare.

I intervjuerna betonade många av lärarna att det är viktigt att inte bara variera aktiviteterna i klassrummet utan det är även viktigt att variera den miljö som lärande äger rum i. I linje med detta resonemang menade de att elevernas utveckling gynnades av att lära sig i andra miljöer, som t.ex. i skogen eller andra platser utomhus. Lärarna LH, LC och LE upplevde att undervisning i skogen hjälpte eleverna att få en bättre förståelse för likhetstecknet än i klassrummet. Ibland kändes det för lärarna att det är lite rörigt ute i skogen men att vistas där innebar många fördelar. Lärargruppen tycker genom att eleverna får möjlighet att känna på saker och undersöka verkligheten blir det lättare att konkretisera den annars ofta abstrakta matematiken. När man t.ex. talar om olika föremåls vikt går det bra att gå ut i skogen för att jämföra vikten på olika saker.

Just vikten av att arbeta med konkreta material och situationer är något som betonas av Ahlberg (m.fl., 2000). Författaren förklarar att läraren bör planera en undervisning där likhetstecknet introduceras i en konkret situation med laborativa material innan barnen får räkna själva. Ahlberg poängterar att eleverna får bättre förståelse när de laborerar med, och diskuterar om likhetstecknet eller beräkningarna.

I projektet learning study (Runesson, 2006) använde lärarna variationsteorin som ett verktyg för att utveckla undervisningen om ett specifikt innehåll. Två av lärarna som vi intervjuade arbetade för ett par år sedan med projektet learning study där fick de möjlighet att reflektera och analysera undervisningen om likhetstecknet med andra pedagoger i skolan. Där upptäckte de att lärarens variation i undervisningen var viktigt för elevernas förståelse och ökade undervisningens kvalitet.

Utifrån variationsteorin valde vi att analysera lärarnas arbetssätt. Det sätt lärarna arbetade på påminde ofta om det japanska sättet (Kullberg, 2004), där man varierar material och metoder men låter en viss beräkning vara kvar. Genom att variera materialet och metoderna men inte själva beräkningen är förhoppningen att eleverna ska få upp ögonen för lärandeobjektets kritiska aspekter. De lärare vi intervjuade som arbetade enligt denna modell upplevde att det var positivt för elevernas inläring.

12.2 En sociokulturell undervisning

Genom att vistas i skogen får eleverna dels möjligheter till en varierad undervisning, dels får de även möjligheter till att diskutera och reflektera kring de beräkningar som utförs. Just diskussionen och det gemensamma reflekterandet kring matematiken är något som ligger i linje med ett sociokulturellt perspektiv där man betonar vikten av att få uttrycka sin växande ämnesförståelse i ord (Bråten m.fl., 1998; Säljö, 2010). Enligt denna teori utvecklas kunskaper till stor del i ett socialt sammanhang. Det blir i ljuset av denna insikt tydligt att den typ av undervisning som lämnar utrymme för elevernas tankar och diskussioner har större möjligheter att nå målen för undervisning.

Sociokulturell teori (Bråten m.fl., 1998) betonar att språket är en viktig del av lärandet och detta var något som vi märkte tydligt i samtalen med lärarna. De tyckte att språket spelade en viktig roll då man ska förstå likhetstecknet. Genom diskussioner sinsemellan och med handledning av läraren lyckades eleverna bättre än då de arbetade på egen hand. Det blev då lättare för dem att få en förståelse för att likhetstecknet kan betyda, *det blir, det är så* eller att *det är lika mycket* på båda sidor. Ett exempel på hur lärarna arbetade i enlighet med ett sociokulturellt perspektiv gav läraren LH. LH arbetade med halvklass och en del arbetade i små grupper där läraren kunde fungera som sekreterare. I den rollen uppmanade läraren eleverna att själva hitta olika vägar för att nå en lösning men det som var viktigt var inte främst svaret utan reflektionen och metoden som eleverna använder vid lösningen. Lärargruppen tyckte alltså att eleverna ska samtala med varandra vilket gör att de kan inspireras av varandras tankar. Arbetssättet kan utveckla elevernas förmåga att reflektera, argumentera och kommunicera om beräkningarna vilket det utvecklar undervisningen i sin helhet.

Ett exempel på hur lärarna arbetade i enlighet med sociokulturell teori kan vi ta från vanligt förekommande klassrumssituationer. Enligt lärarna vi intervjuade lät de ofta eleverna sitta tillsammans i små grupper och arbeta under en längre tid med en viss beräkning. Det gjorde det möjligt för eleverna att mer ingående diskutera och resonera kring uppgiften. En forskare

som t.ex. Gronmo (1999) menar att läraren bör låta eleverna reflektera själva över en beräkning för att nå en djupare förståelse. Även kursplanen i matematik skriver att eleverna behöver lära sig att resonera och kommunicera kring matematiska beräkningar. En del lärare i lärargruppen arbetar alltså i grupper där läraren samtalar med eleverna. Våra intervjuade lärare tyckte att tryggheten och den öppna diskussionen var till stor hjälp för eleverna. Vi fann alltså i vår studie att lärarna till stor del uppfyllde de målsättningar som uttrycks i kursplanen i matematik men även lyckades arbeta i enlighet med sociokulturell teori och variationsteori.

I våra intervjuer stack en lärare dock ut lite från mängden. Denna lärare använde sig bara av matematikböcker. Utifrån detta arbetssätt fick inte eleverna möjlighet att arbeta vare sig utifrån variationsteori eller sociokulturell teori då är den en konsekvens att eleverna för inte tillräckligt med förståelse. Enligt den forskning vi tagit del av innebär detta sätt att arbeta att eleverna går miste om viktiga möjligheter att utveckla sin förståelse för likhetstecknet. Dels då det inte genomförs några praktiska aktiviteter, dels då de inte får möjlighet att reflektera över matematiken i grupp och slutligen utnyttjas inga alternativa lärmiljöer vilket skulle kunna ha varit gynnsamt för många elever. Här vill vi poängtera att när lärarna använder enbart böcker får eleverna heller inte möjligheter till den reflektion som styrdokumentet efterfrågar och enligt forskningen vi tagit del av är det alltså även en nackdel att inte variera sin undervisning vad gäller material, metoder och lärmiljöer.

12.3 Vilken uppfattning har lärarna om likhetstecknets betydelse?

Några lärare kände inte till begreppet pre-algebra. Då vi försökte få tag på lärare för intervjuer frågade vi 43 stycken. Av dessa 43 kände endast 2 stycken till begreppet pre-algebra. Men 8 lärare tyckte att förstå likhetstecknets betydelse är viktigt för eleverna. Vad innebär det för elevernas möjligheter att utveckla kunskap inom området? Att lärarna själva har bristfälliga kunskaper om lärandeobjektet kan av naturliga själv ses som en stor förklaring till varför inte heller eleverna lyckas utveckla tillräckliga kunskaper inom området.

De 35 lärare som tyckte alltså att ämnet var svårt och de flesta hade alltså inte kunskaper om begreppet pre-algebra. Redan där kom vi fram till att det finns många lärare av dessa lärare som vi frågade om intervju inte har en välutvecklad förståelse om likhetstecknets betydelse och hur viktig den är för elevernas kunskapsutveckling. Det är en problematik att det finns så många lärare som saknar kunskaper och kompetens om algebra och ändå undervisar i matematik. Om själva lärarna har inte förståelse om vad likhetstecknet är så förvånar det oss inte att eleverna inte heller förstår den.

Av de åtta lärare vi intervjuade var det endast en som tyckte att eleverna behöver ha förståelse kring både den dynamiska och den statiska uppfattningen om likhetstecknet. Bergsten m.fl. (1997) förklarar att eleverna behöver ha en uppfattning om både *dynamiska* och *statiska* uppfattningar av likhetstecknet för att kunna lösa operationer på mer generellt sätt vid avancerade beräkningar. Denna uppfattning återspeglades alltså inte i någon större utsträckning av lärarna vi intervjuade även om det var positivt att det fanns åtminstone en lärare som tänker på dessa aspekter av undervisningen kring likhetstecknet.

12.4 När ska man börja med undervisning om likhetstecknet?

I styrdokumentet (2011) står det att eleverna ska kunna förstå matematiska likheter och likhetstecknets betydelse. För att lyckas uppnå dessa mål är det viktigt att eleverna i de tidigare årskurserna får möta och utveckla kunskaper i algebra och lära sig att tal kan bytas mot bokstäver.

Runesson (2005) beskriver hur viktigt det är att läraren är klar över elevernas förkunskaper innan man planerar inför undervisningen. Detta var något vi kände igen under våra intervjuer då ett flertal av lärarna uttryckte åsikten att det var viktigt att först testa elevernas kunskaper om likhetstecknet innan man planerade den kommande undervisningen. Lärarna uttryckte även tankar som liknade de vi tagit del av i forskningen. Ett antal forskare (Carpenter m.fl., 2003; McNeil, 2008; McNeil m.fl. 2006; Ahlberg m.fl., 2000; Bergsten m.fl., 1997) menar att lärare bör introducera likhetstecknet redan vid sex års ålder, t.ex. för att jämföra två mängder. Även i våra intervjuer var det ett antal lärare som menade att barnen borde börja redan i förskolan med att utveckla en förståelse för likhetstecknet.

En lärare förklarade att hon arbetade med de kritiska aspekterna av likhetstecknet vid varje lektion. Hon upprepade alltså att likhetstecknet betyder lika mycket. Hon menar att denna repetition hjälper eleverna att förstå lärandeobjektet. Även om repetition är viktigt så är det inte tillräckligt, eleverna behöver själva vara delaktiga under lektion och få möjlighet att diskutera och reflektera för att kunna förstå.

12.5 Slutsatser

Utifrån våra intervjuer så drar vi ett antal slutsatser. Först och främst är det tydligt, både utifrån tidigare forskning och våra intervjuer, att en varierad undervisning är gynnsam för likhetstecknets utveckling som både forskning och lärarna understrycker. De lärare vi har talat med varierar undervisningen vad gäller den fysiska lärmiljön, material, metoder och genom att arbeta såväl enskilt som i mindre grupper. Det är alltså ett arbetssätt som ligger i enlighet med såväl variationsteorin som med sociokulturell teori och lärarna upplevde att det påverkade elevernas lärande i en positiv riktning.

Att lärarna valde att arbeta utifrån dessa teoretiska utgångspunkter motiverades delvis med hänvisning till den teori vi diskuterat men främst utifrån en vardaglig upplevelse av att denna varierade och samarbetsinriktade undervisning faktiskt gav bra resultat. Enligt oss kommer ett fortsatt ökat fokus på en varierad matematikundervisning leda till bättre resultat i framtiden.

En av de viktigaste slutsatserna av undersökningen är att det sätt på vilket lärarna arbetar med likhetstecknets kritiska aspekter spelar stor roll för elevernas möjligheter till lärande. I fallet med den lärare som endast arbetade med läroböckerna upplevde vi att det verkar finnas bättre förutsättningar där ett varierat arbetssätt förekommer.

Vidare ser vi de 35 lärarnas bristande förkunskaper som en allvarig nackdel då eleverna ska lära sig om likhetstecknets betydelse. Alla forskning om algebra som vi tagit del av

understryker att eleverna tidigt behöver utveckla en förståelse för likhetstecknet då det är helt avgörande för deras fortsatta utveckling och underlättar för eleverna i senare årskurserna att lösa ekvationer.

Som lärare är det viktigt att ibland vara övertydlig med saker som man kan uppfatta som självklara. För att utveckla nödvändiga förståelsen för likhetstecknet är detta något vi vill understryka en extra gång. Att verkligen variera sin undervisning och på en mängd olika sätt förklara likhetstecknets betydelser är av avgörande betydelse för elevernas framtida studier.

Det som är bra med läraryrket är att läraren behöver lära sig nya saker och nya arbetssätt/metoder hela tiden för att utveckla undervisningen. För att de lärare som saknar kunskaper om likhetstecknet borde läsa om det för att hjälpa eleverna att utveckla förståelsen om likhetstecknet. Det ska vi komma ihåg alltid och det finns ingenting som säger att man kan allting utan man behöver lära sig mer om olika saker. Vi som blivande lärare vill utveckla vårt eget sätt att lära ut och ska analysera undervisningen.

13. Metoddiskussion

Vår metod byggde på det vi hade läst innan vi började med undersökningen. Forskning och teorier som vi tog del av är variationsteorin, sociokulturell perspektiv (Bergsten m.fl., 1997; McNiel m.fl., 2006; Gronmo, 1999; Hoines, 2004; och Lo Mun Ling; 2014). Vi blev inspirerade av fenomenografin och variationsteorin men vi har inte använt teorierna helt utan vi tog bara inspiration av de för att kunna analysera lärarnas arbetssätt. Vi valde den kvalitativa intervju som metod för att samla in data för undersökningen. Vi har undersökt lärarnas arbetssätt och intervjuerna besvarar frågor om hur lärarna arbetar kring likhetstecknet.

Vi skrev om learning study för att det är ett arbetssätt då det är ett sätt att använda sig av variation i undervisningen och lärarens analys av undervisningen hänger samman med den fortsatta planeringen. Vi inspirerades av detta arbetssätt och använder det som metod för att kontrollera om lärarna har variation i undervisningen och erbjuder något lärande för eleverna kring likhetstecknet. De åtta läraren som deltog i undersökningen var positiva och intresserade av undersökningen.

När vi analyserade intervjuerna märkte vi att det skulle ha blivit bättre om vi har ställt mer följdfrågor till lärarna. På något sätt kände vi att vi borde nöja oss med de svar vi fick av lärarna. Vi fick en känsla av att inte ställa frågor i intervju, och inte lämpligt att ställa för mycket följdfrågor under intervjun och ibland svarade lärarna med att de redan har svarat på samma fråga. Utifrån denna erfarenhet känner vi att vi behöver träna oss på att formulera vettiga följdfrågor som kan gynna en undersökning. Vi upplevde även att det var alldeles för få lärare som ville ställa upp på en intervju. Om fler lärare hade ställt upp hade vi fått ett större underlag och haft bättre möjligheter att urskilja en variation i lärarnas arbetssätt och deras uppfattning av likhetstecknet.

Det som är positivt med vår metod är att den är relevant för vår undersökning. Metoden hjälpte oss att svara på en del av undersökningens frågeställningar även om det var bara åtta

lärare som deltog. Där fick se en liten variation i lärarnas arbetsätt. Vi tyckte att av metoden ändå fick ett brett resultat som besvarade frågeställningarna. Det var spännande att vara ute och intervjuade olika lärare i olika skolor och man får en god känsla av att kunna undersöka och komma fram till ett resultat. Det var trevligt att kunna diskutera med olika lärare som hade olika uppfattningar om likhetstecknet och matematikundervisning. Lärarna hade olika åsikter kring undervisningen men hade också argument till varför de gjorde som de gjorde. Undersökningen gav oss också en insikt i hur viktigt det är att förhålla sig kritisk och analytisk.

Sammanfattningsvis är att de flesta forskaren som vi har nämnt tidigare i undersökningen och de 8 lärarna som vi intervjuade understrycker att den viktigaste slutsatsen av undersökningen är att lärarens arbetsätt kring de kritiska aspekterna av likhetstecknet är av avgörande betydelse för elevernas kunskapsutveckling inte och gör att eleverna i senare åldrar förstår ekvationerna.

14. Förslag för vidare forskning

Fortsättningsvis kan man undersöka om likhetstecknet och hur lärarnas arbetsätt kan påverka elevernas förståelse, då kan undersökaren göra en studie och undersöka de klasser som de åtta lärare undervisar i. Där kan man göra ett före och efter test för att se vilken uppfattning eleverna har om likhetstecknet. På det sättet kan undersökaren ta reda på vilken arbetsätt utvecklar förståelsen aktivt om likhetstecknet för eleverna. Undersökaren kan jämföra mellan lärarnas arbetsätt och se vilka som utvecklar elevernas uppfattning om likhetstecknet. Det kan leda till ett intressant resultat för att ta reda på elevernas kunskaper och se om de har förstått likhetstecknet betydelse enligt lärarnas arbetsätt. För att syftet är att eleverna ska få möjlighet att utveckla förståelsen om likhetstecknet, som kan bidra till att det blir lättare för eleverna när de möter ekvationer.

Referenser

- Alberg, A., Bergius, B., Doverberg, E., Emanuelsson, L., Olsson, I., Pramling, Samuelsson, I. & Sterner, G. (2000). *Matematik från början*. Nationellet centrum för matematikutbildning, NCM Göteborg universitet.
- Asquith, P., Stephens, A., Knuth, Eric, J. & Alibali, Martha, W. (2007). *Knowledge of Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equal Sign, and Variable*. Mathematical Thinking & Learning.
- Baroody, Arthur, J. & Ginsburg, Herbert, P. (1983). *The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign*. /Elektronisk version/. The Elementary School Journal, 84 (2). <http://www.jstor.org/pss/1001311>
- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla - Nämnaren TEMA*. Göteborg: Nämnaren Nationellt centrum för matematikutbildning
- Bryman, A. (2008). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber.
- Bråten, I., Lars, D. & Erling, G. (1998). *Vygotskij och pedagogiken*. Lund: Studentlitteratur.
- Carpenter, Thomas, P., Franke, Megan, L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically - Integrating arithmetic and algebra in elementary school*.
<http://books.heinemann.com/shared/onlineresources/e00565/chapter2.pdf>.
- Dahlin, M. & Eriksson, E., (2008). *Kan 8 – 12-åringar lösa ekvationer?*. Göteborgs universitet: Nämnaren Nr4.2008.
- Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H. & Wängnerud, L. (2012). *Metodpraktikan: konsten att studera samhälle, individ och marknad*. Stockholm: Norstedts juridik.
- Falkner, Karen P., Levi, L. & Carpenter, Thomas P. (1999). *Children's understanding of equality: a foundation for algebra*. Teaching children mathematics.
- Gronmo, Liv, S. (1999). *Att sätta ord på algebra*. Universitet i Oslo: Nämnare Nr:1.
- Hoinen, Johnsen, M. (2004). *Matematik som språk*. Kristianstad AB.
- Häggström, J. (1995). *Tidigare algebra*. Göteborg universitet: Nämnare Nr4.
- Knuth, Eric, j., Stephens, Ana, C. McNeil, Nicole, M., & Alibali, Martha, W. (2006). *Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations*. /Elektronisk version/. Journal for Research in Mathematics Education.
http://128.104.130.43/alibali/files/Knuth_Stephens_McNeil_Alibaldi_JRME_2006.pdf.
- Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Kullberg, A. (2004). *Tal, delar och oändlighet*. Göteborg universitet.
http://www.idpp.gu.se/digitalAssets/997/997766_Angelika_uppsats.pdf.

- Li, X., Meixa, D., Margaaret, M., Carpraroc & Robert, M. (2008). *Sources of differences in children's understandings of mathematical equality Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States*. Cognition and Instruction.
- Lo Mun Ling (2014). *Variationsteori- för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitratur AB.
- Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om Lärande*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Marton, F., Runesson, U. & Tsui, B. M. Amy (2004). *The space of learning*. In F. Marton & A.B Tsui. *Classroom discourse and the space of learning*. New Jersey: Erlbaum.
- Marton, F. & Morris P., (2002) What matters Discovering critical conditions of classroom learning. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- McNeil, Nicole, M. (2008). *Limitations to Teaching Children $2 + 2 = 4$: Typical Arithmetic Problems Can Hinder Learning of Mathematical Equivalence*. Child Development.
- McNeil, Nicole, M., Grandau, L., Knuth, Eric, J., Alibali, Martha, W., Stephens, Ana, C., Hattikudur, S. & Krill, Daniel, E. (2006). *Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help*. /Elektronisk version/. Cognition and Instruction. <http://www.nd.edu/~nmcneil/McNeiletal06.pdf>.
- Persson, P. (2002). *Behöver alla lära sig algebra?* Lärare vid Klippans gymnasieskola. Nämnaren NR3. <https://gul.gu.se/courseId/58687/node.do?id=24866569&ts=1385472706826&u=1221965009>.
- Rienecker, L. & Jorgensen, P. (2008). *Att skriva en bra uppsats*. Samfundslitteratur: Liber AB Malmö.
- Roos, Jan, E. (2014). *Algebra*. NE: Nationalencyklopedin. <http://www.ne.se/lang/algebra>. Hämtad 2014-04-09.
- Roos, Jan, E. (2014). *Matematik*. NE: Nationalencyklopedin. <http://www.ne.se/enkel/matematik>. Hämtad 2014-05-22.
- Runesson, U. (2005). *Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics*. /Elektronisk version/. Cambridge Journal of Education. <http://gup.ub.gu.se/gup/record/index.xsql?pubid=30143>.
- Runesson, U. & Kullberg, A. (2007). *Möte med bokstäver*. Göteborg universitet: Nämnare Nr 1.
- Runsson, U. (2004). *Med lärandets innehåll i fokus*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis: Nämnaren NR1.

Runesson, U. (2006). *Vad är möjligt att lära sig?* Variationens och samtidighetens betydelse. I M. Holm-qvist (Red.), *Lärande i skolan - Learning study som skolutvecklingsmodell*. Lund: Studentlitteratur.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik*. Skilda sätt att behandla ett matematiskinnehåll. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Skolverket (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm. Hämtad 2014-04-30.<http://www.skolverket.se>.

Skolverket (2011b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Ordförrådet AB.
<https://gul.gu.se/courseId/58687/node.do?id=23561990&ts=1371546862626&u=1221965009>.

Skolverket (2012). *PISA 2012, 15-åringars kunskaper i matematik. Läsförståelse och naturvetenskap*. Rapportnummer 398. Stockholm: SKOLV-R-398-SE.

Skolverket (2011c). *TIMSS 2011, Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapportnummer: 380. Stockholm: SKOLV-R-380-SE.

Skolöverstyrelsen (1979). *Matematikterminologi i skolan*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Stephens, Ana C. (2006). *Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions*. Journal of Mathematics Teacher Education.

Stukat, S. (2011). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap*. Studentlitteratur AB, Lund.

Säljö, R. (2010). *Lärande i praktiken*. Norstedts förlagsgrupp AB.

Webbmatte (2014). *2.2 Likhetstecknet*. Stockholm. Hämtad 2014-04-10.
http://www.webbmatte.se/display_page.php?language=&HeadLanguage=&id=135&on_menu=724&page_id_to_fetch=1849&lang=swedish&no_cache=783280063.

15. Bilagor

15.1 Bilaga 1

Presentation av lärarna som deltog i undersökningen.

Lärare A har arbetat i 30 år och undervisar i årskurs ett. Har stor intresse för matematiken och har arbetat år 2007 med projektet learning study.

Lärare B har arbetat i 25 år och undervisar i årskurs ett. Läraren tycker att det är viktigt att eleverna känner sig trygga på skolan för att det är då eleverna presterar bra och utvecklas.

Lärare C har arbetat i 2 år och undervisar i en förskoleklass. Lärare C tycker att i förskoleklassen ska eleverna vara ute och utforska om matematiken det hjälper de att få bättre förståelse om matematik

Lärare E har arbetat i 10 år och undervisar i årskurs ett. Innan E kom till Sverige arbetade hon i sitt hemland som lärare, hon intresserad av matematik. När hon började undervisa i Sverige tyckte hon att matematik undervisning är för enkel och eleverna behöver se variation i undervisningen då bestämde hon sig att utveckla elevernas förståelse för matematiken genom laborativa aktiviteter.

Lärare F har arbetat i 16 år och undervisar i årskurs ett. Läraren arbetar utifrån elevernas behov och intresse.

Lärare D har arbetat i 40 år och undervisar i årskurs tre. Läraren Tycker det viktigaste som läraren borde tänka på är den sociala relationen mellan eleverna. Det är viktigt för att kunna lära eleverna kunskaperna.

Lärare G har arbetat i 30 år och är mellan stadie lärare 4-6, men har också haft matematik för årskurs tre. G har intresse för musik och använder det i sin undervisning. Läraren tycker att dagens undervisning är mycket bättre än vad det var förut för att man vill nå förståelsen.

Lärare H har arbetat som lärare i 12 år och undervisar i årskurs två. H är lärare Från F-3.

15.2 Bilaga 2

Intervjufrågor:

Intervjun börjar med en kort presentation av läraren.

1. När jag säger pre- algebra vad får du för tankar kring det?
2. Tycker du att likhetstecken är viktigt för elevernas utveckling?
3. När introducerar du likhetstecken för eleverna? Och hur?
4. Har eleverna förkunskaper när du introducerade likhetstecken för dem? vilka förkunskaper?
5. När är det viktigt med förståelsen för likhetstecknet?
6. Introducerar du likhetstecken för sig eller tillsammans med andra symbolar? Varför gör du det? Hur gör du?
7. Vilka arbetsätt/metoder använder du under lektionen? Vilka arbetssätt tycker du fungerar bäst? Varför? Ge exempel?
8. Använder du dig av olika metoder? Vilka? Varför? När använder du respektive metod?
9. Vilka svårigheter upplevde du under arbetets gång? Vilka fördelar tycker du det finns?
10. Vilka material använder du under lektionen? Vad är det som bra med dem?
11. Är IKT något som du använder under lektionen?
12. Diskuterar du elevernas förståelse av likhetstecken med andra pedagoger? Hjälper det dig att utveckla din undervisning?
13. Brukar du tipsa andra läraren om hur du arbetar om likhetstecken? Får du feedback av dem? Ändrar du din synsätt på din undervisning efter diskussionen med andra pedagoger?
- 14-Forskningen visar att eleverna i årskurs 8 har fortfarande den statiska uppfattningen och inte den dynamiska stämmer det enligt dina erfarenheter?
15. Brukar du förklara för eleverna den dynamiska och statiska exempelvis $10=5+$? Hur skulle du vilja förklara uppgiften för eleverna? Brukar du ta flera exempel och lösa med samma metod eller ett exempel med flera metoder?
16. Om du skulle kunna jämföra matematik undervisningen nu jämfört med några år sedan?