GÖTEBORGS UNIVERSITET
INST FÖR PEDAGOGIK OCH SPECIALPEDAGOGIK

Lärares exempel i matematik

En studie om lärares användning av exempel före och efter deltagande i Learning study

Henrik Hansson

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	PDGX61
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	Ht/2013
Handledare:	Angelika Kullberg
Examinator:	Mikael Nilsson
Rapport nr:	PDGX61:1 HT14

Abstract

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Program och/eller kurs:	PDGX61
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	Ht/2013
Handledare:	Angelika Kullberg
Examinator:	Mikael Nilsson
Rapport nr:	PDGX61:1 HT14
Nyckelord:	Variationsteori, Learning Study, Exempel, Matematik, Undervisning, Lärande

Studien undersöker om och i så fall hur lärare i matematik ändrar sin undervisning efter att de deltagit i en kompetensutveckling i form av tre Learning studies. Lärares användning av exempel i undervisning samt skillnader i vad som görs möjligt att lära studeras. Data består av totalt fyra lektioner där två lärare undervisar två lektioner var. En lektion före respektive efter att de deltagit i Learning studies videoinspelades. Variationsteorin är teoretiskt ramverk i studien. Resultatet visar att lärarna förändrat användningen av exempel i sin undervisning. I lektionerna efter Learning studies, valde lärarna fler exempel som fokuserade skillnader (kontraster), fler exempel där det fanns en tydligare invarians mellan exemplen och där specifika aspekter varierades, samt fler exempel som skapade mönster av variation. Studien visar även att förändringen gav olika möjligheter till lärande i lektionerna. I lektionerna efter lärarna deltagit i Learning studies gavs eleverna möjlighet att erfara fler aspekter i relation till det som skulle läras, möjlighet att urskilja en större variation inom aspekterna, samt möjlighet till en större vidd av exempel. Detta indikerar att lärare genom att delta i Learning studies kan utveckla undervisningen och användningen av exempel samt att det kan bidra till att ge elever större möjligheter till lärande.

Innehållsförteckning

Ändrad fältkod

Inledning

I Skolverkets sammanställning av resultat från TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) påvisas en nedåtgående trend i svenska elevers matematikkunskaper, under de två senaste decennierna (Skolverket, 2009). I TIMSS jämförs svenska elevers kunskaper och färdigheter med elever i andra länder och med tidigare elever i Sverige. Även en annan internationell jämförelse av elevers kunskaper i matematik, PISA (Programme for International Student Assessment) visar samma trend (Skolverket, 2013b). Trenden har skapat debatt i Sverige om vilka förändringar som bör göras för att förbättra prestationerna i matematik. Mycket av diskussionen har handlat om faktorer utanför undervisningen, till exempel om skolan skall förstatligas igen, om det skall vara färre elever i klasserna, om skolplikten skall utökas till tio år, om det fria skolvalet skall tas bort. Det finns många saker som kan göras för att en förändring i skolan skall ske, men lite diskuteras om vad som kan förändras direkt i undervisningen för att förbättra svenska elevers matematikprestationer. I Skolverkets sammanställning av resultat från TIMSS pekas just undervisningen ut som en av de bidragande faktorerna till den negativa trenden (Skolverket, 2009).

Undervisning är ett komplext fenomen som består av många olika aspekter och frågor, till exempel om den skall vara lärarstyrd eller om eleverna skall arbeta individuellt, vilket material och aktiviteter som skall användas, hur ett tillåtande klimat kan skapas i undervisningssituationerna. Den aspekt föreliggande studie fokuserar är hur lärare behandlar innehållet i undervisningen. Elever i Shanghai (Kina) är de som enligt PISA 2012 presterat bäst i matematik (Skolverket, 2013b). Häggström (2008) studerade hur lärare i Hong Kong, Shanghai och Sverige undervisade samma matematikinnehåll och fann att lärarna behandlade innehållet olika. Han har visat att kinesiska lärare varierade aspekter av innehållet på ett mer systematiskt sätt och indikerar att detta kan vara en anledning till skillnaden i resultat mellan ländernas prestationer i de internationella undersökningarna. Flera forskare (Runesson, 1999; Pong, 2000; Marton, 2003; Al-Murani, 2007; Kullberg, 2010) har visat att hur lärare behandlar innehållet gör skillnad för vad eleverna har möjlighet att lära. Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson och Zaslavsky (2006) samt Scataglini-Belghitar och Mason (2012) menar att lärares exempel och matematikinnehållet, ej går att separera då lärares matematikundervisning just sker genom de uppgifter och exempel som läraren presenterar och eleverna arbetar med. Kan lärare utveckla sin matematikundervisning genom att förändra hur de använder exempel (och därmed förändra hur de behandlar innehållet) i sin undervisning?

Denna studie undersöker två lärares matematikundervisning och hur de använder exempel före och efter deltagande i en kollegial kompetensutveckling, kallad Learning study. Studien undersöker om och isåfall på vilket sätt lärarna har förändrat sin undervisning om samma innehåll. Fokus i studien är hur lärarna behandlar innehållet i matematikundervisningen genom användning av exempel. Studien kan ge ett bidrag till om lärares undervisning ändras genom erfarenheter de fått genom deltagande i Learning studies. Studien är en delstudie i LGK-projektet (Lärarnas Gemensamma Kunskapsproduktion[1]), vid Göteborgs Universitet.

[1] Lärarnas Gemensamma Kunskapsproduktion är ett projekt finansierat av Vetenskapsrådet. I projektet ingår forskare från Högskolan i Jönköping, Göteborgs Universitet, Luleå Tekniska Universitet och Högskolan i Halmstad. Projektledare är Ulla Runesson, Högskolan i Jönköping

Bakgrund

Användning av exempel i matematikundervisning är väl beforskat (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson och Zaslavsky, 2006). Däremot har få studier gjorts där man undersöker användning av exempel ur ett variationsteoretiskt perspektiv. Ett exempel är Al-Muranis (2007) studie som i forskningsprojektet Dimensions of Variation Programme (DVP) studerade hur lärare behandlade det matematiska innehållet algebra i sin undervisning. Sex klasser undervisades av lärare som deltog i projektet och fyra klasser undervisades av lärare som utgjorde en kontrollgrupp till projektet. Projektet pågick över fjorton månader och totalt videoinspelades och analyserades åtta lektioner, fyra lektioner i början av projektet och fyra lektioner i slutet av projektet. Lärarna och forskarna träffades regelbundet och planerade tillsammans hur lektionerna med innehållet algebra i fokus skulle genomföras samt utvärderade dem, med hjälp av variationsteorin. Al-Murani visar att lärarna som deltog i DVP undervisade på ett kvalitativt annat sätt än lärarna i kontrollgruppen. Lärarna interagerade och kommunicerade med eleverna om undervisningens innehåll på ett sätt som gjorde att aspekter av innehållet systematiskt varierades på ett annat sätt i lektionerna, jämfört med kontrollgruppernas lektioner. I motsats till kontrollgruppens lärare öppnade lärarna som deltog i projektet för möjligheten till andra variationer än enbart ett exempel som visade på något generellt och att det fanns fler sätt att lösa något än enbart på ett specifikt sätt. När exempelvis ekvationssystemet $5x$-y=9, $4x$+y=9 skulle lösas visade en lärare som deltog i projektet att man kan substituera uttrycket för y först, men att det är ett val och att det kan variera. Läraren förde en dialog med eleverna och de kom tillsammans fram till att man även kan substituera uttrycket för x först. På liknande sätt visar Al-Murani även andra exempel på att elever som undervisades av lärarna som deltog i DVP fick större möjlighet att erfara systematisk variation av undervisningens innehåll och därmed andra möjligheter till lärande med hjälp av de exempel lärarna använde, än elever som deltog i undervisning av kontrollgruppens lärare.

Learning study är ett arrangemang där lärare tillsammans studerar elevers lärande med hjälp av en teori om lärande (se kap. Teoretiska utgångspunkter) och i de flesta Learning studies som genomförts har variationsteorin använts. I ett flertal Learning studies har lärares användning av exempel visat sig vara centralt för elevernas lärande (Kullberg, 2010). I en Learning study om decimaltal (att det finns oändligt många decimaltal) behandlade lärarna innehållet på olika sätt i lektion 1 jämfört med lektion 2 och 3 (Kullberg, 2004). I lektion 2 och 3 behandlades innehållet bland annat genom att talen 0,97 och 0,98 representerades på olika sätt (decimaltal, bråktal och procent) och en jämförelse mellan talen 0,97 och 0,98 genomfördes, vilket inte gjordes i lektion 1. De aspekter som varierade i lektionerna genom användningen av exempel, skiljde sig enligt Kullbergs analys åt mellan lektionerna. I lektion 1 varierades olika tal medan decimalformen var invariant och i lektion 2 och 3 varierades olika antal andelar av en helhet. Eleverna i lektion 2 och 3 gavs därmed större möjlighet att lära att det finns oändligt många decimaltal, än eleverna i lektion 1. Kullberg indikerar att lärarna utvecklat hur de behandlade innehållet i lektion 2 och 3 jämfört med lektion 1 och att det hade betydelse för elevernas lärande.

Pillay (2013) följde i en studie lärarnas utveckling i en Learning study om funktioner. Han kunde tydligt se att lärarna utvecklade innehållets behandling med hjälp av exemplen, ju längre studien pågick och att detta gav bättre möjligheter till lärande för eleverna. Framförallt i lektion 4 användes exemplen annorlunda än i de andra lektionerna. De användes mer i par och exempelvis användes y=2x och y=1/2x respektive p (x) = x^2 och g (x) =2^x samtidigt och eleverna fick jämföra dem med varandra. Användningen av exempel på detta sätt gav eleverna möjlighet att urskilja kritiska aspekter som i de tidigare lektionerna inte varit möjligt. Före och efter studien fick lärarna även fylla i enkäter där de skulle svara på frågor som exempelvis hur de väljer och använder exempel i sin undervisning. Lärarna uttalade att de efter studien valde exempel utifrån vad som skall läras och inte längre slumpmässigt ur ett läromedel eller utifrån vilken kunskapsnivå eleverna befinner sig i gruppen. De uttalade också att de använde exempel i medvetna sekvenser för att något specifikt skall vara möjligt att urskiljas, samt att de tänker på vad som varierar och är invariant mellan exemplen.

Ovanstående studier är exempel på undersökningar där lärare förändrat sitt sätt att behandla innehållet i sin undervisning genom Learning studies och med hjälp av variationsteorin. Slutsatsen av studierna är att lärarna som deltagit i dessa arrangemang utvecklat sitt sätt att behandla innehållet i undervisningen (genom hur de använder exempel), medan de deltagit i projekten. Även andra studier har studerat lärares lärande i Learning studies (se Gustavsson, 2008; Wernberg, 2009; Holmqvist, 2011). Holmqvist (2011) undersökte om och i så fall på vilket sätt sex lärare förändrade sin planering och undervisning i tre olika Learning studies, de deltog i. Hon kommer fram till att lärarna gradvis förändrade sitt sätt att planera och genomföra lektionerna i studierna, under de tre terminerna som de pågick. Den förändring hon fokuserade och noterade var att lärarna förbättrade sin förmåga att urskilja elevgruppernas kritiska aspekter för ett lärandeobjekt och att de förändrade behandlingen av lärandeobjektet, genom att hantera innehållet på ett annat sätt. Varken Holmqvists studie eller de andra ovan nämnda studierna har dock studerat hur lärare som deltagit i studier förändrat sitt sätt att undervisa en tid efter genomförda Learning studies. Denna studie har analyserat effekterna på lärarnas lärande när det gäller användning av exempel en tid efter att de deltagit i Learning studies. I studien studeras två lärares undervisning och behandling av innehållet före och efter deltagandet. Studien undersöker hur lärarna förändrat användningen av exempel och vilka skillnader förändringen inneburit för elevernas möjlighet att lära.

Problemformulering och syfte

Syftet med studien är att beskriva skillnader i hur matematiklärare använder exempel i sin undervisning före och efter deltagande i Learning study samt vilka olika möjligheter till lärande det ger. De frågor studien avser att besvara är

- Hur skiljer sig lärarnas användning av exempel i undervisningen, före och efter deltagande i Learning studies?
- Vad ger skillnaderna i användning av exempel för olika möjligheter till lärande?

Tidigare forskning om exempel i matematikundervisning

Vad är ett exempel? Watson och Mason (2005) menar att ett exempel är "...anything from which a learner might generalize." (s. 3). Flera forskare (Zodik & Zaslavsky, 2008; Rowland, 2008; Mason, 2006) menar att ett exempel är ett specifikt fall eller instans i en större generell klass. Watson och Mason (2002) menar att det viktiga draget i exempel är att de väljs av en rad möjliga exempel. Goldenberg och Mason (2008) menar att matematiska objekt bara blir exempel om det uppfattas som exempel av *något*. Watson och Mason (2005) menar att exempel kan vara exempel på olika saker inom matematiken. De kan vara exempel på begrepp, där x+4=7 är ett exempel på en förstagrads ekvation, medan $3x^2+2x=3-7x$ är ett exempel på en andragradsekvation. Det kan också vara exempel på metoder där 3+2x=7, 3-3+2x=7-3, 2x=4, 2x/2=4/2, x=2 är ett exempel på att lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden och det kan även vara exempel som representerar något, där $3x^2+2x=3-7x$ är ett exempel som representerar en ekvation som är svårare att lösa än 3+2x=7. Oavsett vad exempel är exempel på, så är de något specifikt i något mer generellt. Dessa exempel kallas för *generic examples* (Mason & Pimm, 1984). Denna studie använder begreppet exempel som att det är en specifik instans i något matematiskt generellt, till exempel är ¼ ett exempel på ett stambråk.

Tsamir, Tirosh och Levenson (2008) menar att det finns fler exempel än de generiska. Icke-exempel (non-examples) är en annan typ av exempel och är exempel som inte stämmer med det begrepp, eller den lösning som läraren vill att eleverna skall lära sig. Ett icke-exempel kan vara 3+4=7 (när begreppet ekvation behandlas), för att visa vad som inte är en ekvation och det kan också vara 2·3+4=7·2, för att visa att om man gör ett tillägg i form av en multiplikation på ena sidan om likhetstecknet (i detta fall på höger sida, i exemplet 3+4=7) så måste man också göra det på alla andra värden på vänstra sidan av likhetstecknet, ej enbart på ett av värdena. Zaskis och Chernoff (2008) tar upp en annan typ av exempel, motexempel. De menar att ett sådant exempel är ett exempel som motbevisar den lärandes uppfattning om vad som är matematiskt korrekt. Motexempel används för att skapa en kognitiv konflikt, där den lärande ställs inför en motsägelse av sin uppfattning eller inför ett faktum att uppfattningen ej är hållbar i alla exempel.

Exempel kan även kategoriseras på andra sätt. Ett sätt är från vem exemplen kommer ifrån, i undervisningen. *Instructional examples* kommer från läraren och *Student Generated Examples* kommer från eleverna. Watson och Mason (2002) menar att exempel skapade av elever (Student Generated Examples) är exempel där eleverna själva utarbetar förslag som visar på något mer generellt, exempelvis begrepp och lösningar. Sådana exempel kan ge indikationer på vad eleverna kan om ett specifikt matematiskt innehåll och kan även hjälpa till att utveckla förståelsen av det. Zaslavsky och Lavie (2005) menar att exempel som instruktion (Instructional examples) är exempel som i en undervisning, valts och erbjuds av läraren för att eleverna skall lära sig ett specifikt matematiskt innehåll. Sådana exempel är och har under lång tid varit en central del av matematikundervisningen. Rowland (2008) menar att exempel som instruktion kan ha två olika användningsområden. Det ena är induktivt och så skall exemplen erbjuda exempel av någonting, där någonting är det generella och exemplet är en instans i det generella. Han menar att det andra användningsområdet ej är induktivt och att exemplen används som uppgifter att öva/träna på (färdighetsträning). Även dessa exempel är specifika och representerar något generellt. Denna studie fokuserar de exempel läraren väljer att använda och erbjuda eleverna, exempel som instruktion och de som används induktivt, till exempel vid helklassdiskussioner där exemplen är tillgängliga för alla elever samtidigt.

Betydelsen av de exempel och uppgifter lärare använder och hur de använder dem i sin matematikundervisning är väl beforskat. Bills et al. (2006) menar att ”The choice of examples, and their sequencing, is crucial in instruction” (sid. 146).

Watson (2008) har undersökt vilken roll exempel har för elevers engagemang och lärande i matematikundervisning. I studien analyserades fyrtio lektioner från två tidigare studier, The Changes in Mathematics Teaching Project (CMTP) och Mathematics Knowledge in Teaching e-Research Project (MKiTeR). Fokus i analysen av lektionerna var, i) vad som var tillgängligt under lektionerna som eleverna kunde lära matematik av, ii) vad eleverna skulle göra under lektionerna och iii) hur matematiska idéer kunde utvecklas under lektionerna. Hon kom fram till att de exempel som lärarna använde spelade stor roll för elevernas engagemang och lärande oavsett vilken undervisningsstil, social kontext, lektionsstruktur och mönster av interaktion som fanns i lektionerna.

Trots att lärares val av exempel spelar en viktig roll i matematikundervisningen undervisas det sällan specifikt om detta på lärarutbildningar (Goldenberg & Mason, 2008). Rowland (2008) uppmärksammade detta problem och har studerat de val av exempel lärarstudenter gjorde samt hur de använde dem i sin praktiska del av utbildningen, i matematikundervisning. Lärarstudenterna hade inte fått någon tidigare direkt utbildning om vikten av val i vilka exempel de skulle kunna använda och hur de kunde använda dem. Rowland analyserade tjugofyra matematiklektioner de undervisade i och hur de förberedde sig inför dessa. Han kom fram till att studenterna hade bristfälliga insikter i vilka exempel de använde vilket renderade i fyra olika kategorier som lärarutbildare behöver guida och undervisa studenterna i hur de kan använda exemplen i sin undervisning: ”variables”, ”sequencing”, ”representations” och ”learning objectives”. Med ”variables” menas att varje matematiskt objekt består av två eller fler komponenter/variabler och att lärare behöver ta hänsyn till vilka variabler som finns i ett objekt, när de väljer exempel. Med ”sequencing” menas att exemplen kan komma i olika kronologisk ordning, exempelvis samtidigt eller efter varandra och att lärare behöver ta hänsyn till i vilken ordning exemplen används. Med ”representations” menas i vilken form exemplen presenteras och är viktigt att lärarna tar hänsyn till så att det tangerar vad som skall läras. Rowland nämner att Naturliga tal kan presenteras i många olika former, t.ex. block, linjer, rutnät. Med ”learning objectives” menas att exemplen skall väljas utifrån vad de skall användas till och vad eleverna skall lära av dem.

Zodik och Zaslavsky (2008) har undersökt vad som karaktäriserar redan utbildade lärares val av exempel inför och i undervisning. Undersökningen har använt 54 lektions observationer, från fem olika lärares undervisning samt för- och efterintervjuer med lärarna, för varje lektion. De kom fram till att lärarna både använde exempel som är planerade i förväg och exempel som är spontana i undervisningen. De spontana exemplen är exempel som lärarna väljer att använda beroende på vad som händer i undervisningen. Både de exempel som är planerade i förväg och de exempel som används spontant delades sedan upp i olika grupper. Anledningen till att lärarna väljer de ena eller andra exemplen är många och Zodik och Zaslavsky (2008) menar att ”The specific choice of examples may facilitate or impede students learning, thus it presents the teacher with a challenge, entailing many considerations that should be weighed.” (s. 166). De nämner olika aspekter lärare måste ta hänsyn till när de väljer exempel, av vilka några är, i) vilken generell matematisk princip exemplet skall vara något specifikt i, ii) vilka styrkor och svagheter elevgruppen har i den generella matematiska principen, iii) medvetenhet om elevernas möjliga över- eller undergeneralisering av de exempel som används, iv) elevers tendenser att fokusera ej relevanta aspekter av exemplet istället för de kritiska aspekterna för det lärande som exemplet skall visa på, v) vilka aspekter som kan och bör variera mellan exemplen för att eleverna skall fokusera det som är relevanta drag hos exemplen. Zodik och Zaslavsky (2008) menar precis som Rowland (2008) samt Goldenberg och Mason (2008) att lärarutbildningen behöver utbilda blivande lärare i vikten av vilka exempel man väljer och hur man använder dem, samt att redan utbildade lärare behöver fortbildas i detta.

Ma (2010) menar att kinesiska lärare väljer och använder exempel på medvetna och specifika sätt i sin matematikundervisning och att det grundar sig i deras PCK (Pedagogical Content Knowledge). Hon intervjuade amerikanska och kinesiska lärare om hur de undervisar i olika matematiska innehåll och fann skillnader i vad de undervisar om, vilka exempel de väljer och hur det påverkar variationen av innehållet. De amerikanska lärarna undervisade om procedurerna i beräkningar, medan kinesiska lärare undervisade både om procedurerna och de underliggande principerna bakom procedurerna. När de kinesiska lärarna undervisade använde de även en större variation av innehållet än de amerikanska lärarna. De försökte få eleverna att urskilja flera olika variationer på samma sak. Ett exempel var olika sätt att beräkna samma sak och vilket sätt som är mest effektivt. De amerikanska lärarna undervisade ofta i enbart ett specifikt sätt att beräkna. Ma menar också att de kinesiska lärarna varierade innehållet medvetet med hjälp av de exempel som användes, för att eleverna skulle ha möjlighet att urskilja specifika aspekter som lärarna visste var viktiga för att förstå de underliggande principerna i matematiken. I och mellan de exempel lärarna valde att använda, var ofta en specifik aspekt invariant och där olika variationer gjordes utifrån det. Ett exempel hon beskriver är uppdelning av ett tal för att sedan kunna använda den kunskapen när elever ska lösa subtraktioner med växling, med hjälp av algoritm. Hon utgår från subtraktionen 53-26 och visar hur kinesiska lärare resonerade runt att dela upp talen på olika sätt. Lärarna argumenterade för att man antingen kan dela upp 53 i 40 och 13 för att kunna subtrahera därifrån och detta var också det vanligaste svaret från de amerikanska lärarna. De kinesiska lärarna diskuterade dock fler sätt man kan dela upp 53, exempelvis som 40, 10 och 3 för att subtrahera därifrån. De kinesiska lärarna argumenterade även för att i subtraktionen dela upp talet 26 som 20, 3 och 3 och att det kan vara effektivt, vilket ingen av de amerikanska lärarna gjorde. Genom att visa skillnaderna mellan hur de kinesiska lärarna använde exempel i sin undervisning jämfört med amerikanska, argumenterar Ma även för att det ger olika möjligheter till lärande och där kinesiska elever får större möjlighet att lära sig olika sätt att lösa samma sak.

De beskrivna studierna visar att lärare använder exempel på olika sätt och att det är viktigt att lärare medvetet använder exempel i matematikundervisning, utifrån den variation som finns mellan exemplen. Watsons (2008) och Mas (2010) studier visar att de exempel elever får tillgång till i undervisning ger specifika möjligheter till lärande.

Teoretiska utgångspunkter

Studien undersöker lärarnas användning av exempel före och efter deltagande i tre Learning studies, samt vad de skillnaderna medför för olika möjligheter till lärande. För att undersöka och analysera detta används variationsteorin (Marton, 2014; Lo, 2012).

Variationsteorin

Variationsteorin har sitt ursprung i fenomenografin (Marton, 1981; Runesson, 1999; Marton & Booth, 2000; Lo, 2012). Fenomenografins sätt att se på världen (ontologi), är att man inte kan separera individens erfarande av världen och världen. Världen skapas av hur vi uppfattar den (Marton, 2014; Marton & Booth, 2000). Enligt fenomenografin uppfattar vi ett fenomen *som någonting*, men att detta någonting kan vara olika för olika individer. Olika fenomen består av olika aspekter och Lo (2012) menar att det finns en gräns för hur mycket vi kan fokusera samtidigt i ett fenomen och att det innebär att vissa aspekter av fenomenet kommer i förgrunden och andra i bakgrunden. Beroende på vilka aspekter som kommer i förgrunden uppfattar vi fenomenet på ett specifikt sätt och eftersom olika aspekter kan komma i förgrunden för olika individer kan samma fenomen uppfattas på olika sätt (Marton & Booth, 2000; Pang, 2003). När det gäller lärande menar flera forskare (Marton, 2014; Marton & Booth, 2000; Runesson, 1999) att det kan ses som förändring i sättet att uppfatta något, till exempel att andra aspekter kan urskiljas än de man tidigare urskiljt eller att fler aspekter än tidigare kan urskiljas samtidigt. Hur kan man då se på relationen mellan fenomenografin och variationsteorin? Ett sätt att se det är att fenomenografin är ett forskningsområde som kan sägas fokusera och undersöka hur människor uppfattar fenomen i världen och vad lärande innebär, medan variationsteorin kan ses som en lärandeteori om vad som krävs för att lära (Pang, 2003; Runesson & Kullberg, 2010). Om det är förändring och utveckling av en uppfattning som är lärande (fenomenografiskt sätt att se på lärande), kan variationsteorin vara ett verktyg som hjälper till med vad som krävs för att lära och kan även användas för att analysera om möjligheten till lärande givits. I variationsteorin är lärandet centralt och lärandet är alltid ett lärande av *något specifikt*. Detta något definieras i teorin som Lärandeobjekt (Marton, Runesson & Tsui, 2004).

Lärandeobjekt

Med ett lärandeobjekt avses *vad som skall läras*, vilken förmåga som skall utvecklas (Marton, 2014; Marton, Runesson & Tsui, 2004). Lärandeobjektet ses i teorin utifrån tre perspektiv, det avsedda, det iscensatta och det levda lärandeobjektet (Lo, 2012; Wernberg, 2009; Marton, Runesson & Tsui, 2004). Det avsedda lärandeobjektet är det läraren planerar att undervisa om och som läraren vill att eleverna skall lära sig vid ett undervisningstillfälle. Perspektivet här kan sägas vara en lärares. Det iscensatta lärandeobjektet är det lärandeobjekt som kommer fram i undervisningen och som är möjligt för eleverna att lära sig. Perspektivet här kan sägas vara en forskares, som analyserar vad som är möjligt att lära. Det levda lärandeobjektet är det som eleverna faktiskt lär. Perspektivet här kan sägas vara elevernas. Ur ett undervisningsperspektiv är det önskvärt att det avsedda, det iscensatta och det erfarna lärandeobjektet är detsamma, men för det finns ingen garanti oavsett hur bra undervisning läraren planerar och genomför. Denna studie fokuserar och undersöker det iscensatta lärandeobjektet.

Dimensioner av variation, värden och instanser

Marton och Booth (2000) menar att ett fenomen defineras av den variation av de olika aspekterna, som finns i fenomenet. Marton (2014) och Marton och Booth (2000) använder begreppet aspekt synonymt med dimension av variation (DoV). Marton (2014) ger färg som exempel på en DoV och att det inom dimensionen färg finns möjlighet till en variation av olika färger, till exempel grön, röd, blå. Variationen i en DoV benämner han som värden i dimensionen, vilket innebär att grön, röd och blå är exempel på värden inom DoV färg. Marton (2014) menar även att ett värde har instanser och att värdet grön i DoV färger, exempelvis kan ha instanserna grön boll, grön kub och grönt prisma. Denna studie använder som tidigare nämnts begreppet *exempel* som en instans i något mer generellt. Begreppet instans används därmed synonymt med begreppet exempel och som att det representerar ett mer generellt värde.

Läranderymd

Det är det iscensatta lärandeobjektet som visar vad som varit möjligt att lära vid ett undervisningstillfälle (Marton, Runesson & Tsui, 2004; Kullberg, 2010). De definerar det iscensatta lärandeobjektet som den läranderymd (space of learning) som funnits och att den karaktiseras av de DoV som öppnats upp. Många olika Dov kan öppnas upp i ett lärandeobjekt, men i läranderymden fokuseras de som är relevanta för det lärandeobjekt som behandlas. Olika läranderymd kan skapa olika möjligheter att lära.

Variationsrymd

Runesson & Marton (2002) menar att det förutom läranderymd även finns en variationsrymd (space of variation). Det innebär att det är den variation av värden som används (iscensätts) för att öppna upp en DoV, som är möjliga att lära. Många variationer kan användas men i variationsrymden fokuseras de som är relevanta för det lärandeobjekt som behandlas. Till exempel kan samma DoV öppnas upp, men en variation av olika värden användas och vara möjliga att urskilja.

Exempelrymd

Exempelrymd är inte ett variationsteoretiskt begrepp, men Watson & Mason (2005) använder exempelrymd (Example space) och menar att ”Examples are usually not isolated; rather, they are perceived as instances of a class of potential examples. As such they constitute what we call an *example space*” (s. 51). De menar att det finns en viss möjlig variation av de exempel som är specifika instanser i det mer generella värdet. I denna studie tolkas detta som att det inom varje värde finns en exempelrymd, vad som är möjligt att urskilja i form av de exempel som är tillgängliga för eleverna. Mason (2011) menar att för att kunna veta om ett exempel är ett exempel i en specifik exempelrymd kan man ta hjälp av frågorna; vad som kan varieras och vad som måste vara invariant för att det skall kunna vara det. Till exempel kan det i DoV Negativa tal finnas värdet *som bråktal*. Under värdet *Negativa tal som bråktal* kan exemplen -1/4, -3/4 samt -2 ¾ finnas och vara instanser i värdets exempelrymd. Det som varierar är vad bråken representerar -1/4 representerar stambråk, -3/4 representerar ej stambråk och -2 ¾ representerar bråk i blandad form. Invariant är att de alla representerar något slag av negativa tal beskrivna som bråk. Alla exemplen kan då sägas ingå i exempelrymden som finns i värdet *Negativa tal som bråktal*. Det beror också på vilket värde som avses, om exemplen är inom den exempelrymden. Exemplen -2, -102 och -19 102 är instanser i värdet *Negativa tal som heltal.* Heltalens värde varierar, men alla exempel är exempel på negativa heltal. I denna exempelrymd hör då inte exemplet -0,75 hemma. Visserligen är det ett negativt tal, men det är inget negativt *heltal* och alltså är det ingen instans i exempelrymden *Negativa tal som heltal.* Watson och Mason (2005) menar att varje individ har sin personliga exempelrymd och att rymden är dynamisk för individen, beroende av situation. Flera forskare (Watson & Mason, 2006; Goldenberg & Mason, 2008) menar att lärare i sin planering och i själva undervisningen bör vara medvetna om vilken exempelrymd som finns i det de vill att eleverna skall lära och att de medvetet bör välja vilket/vilka exempel de använder i den rymden, som instans i något mer generellt. Detta för att eleverna skall få bästa möjlighet till lärande av det läraren vill att de skall lära. Vad läraren använder för exempel (exempel som instruktion) som skall representera det mer generella (värdet), kan sägas vara de iscensatta exempel som eleverna ges möjlighet att lära av (exempelrymden). Denna studie fokuserar den exempelrymd exempel som instruktion ger eleverna i lektionerna (the instructional example space).

Dimensioner av variation (DoV) öppnas upp

Kontrast – skillnad

Marton (2014), menar att för att lära sig något nytt måste en skillnad i det som skall läras vara närvarande i en lärandesituation. I exemplet *färg* framgår att om en person inte tidigare lärt sig vad färg är kan denne inte lära sig det om enbart färgen grön är närvarande (t.ex. grön boll, grön kvadrat). Om däremot färgerna grön och blå (värden i DoV färg) finns samtidigt i en lärandesituation, ges möjlighet att urskilja vad färg är. Invariant mellan exemplen är att båda är färger och eftersom det som varierar är att det är olika färger, finns möjlighet att lära vad färg är. I detta exempel fungerar färgen blå som kontrast till färgen grön.

När två värden används och skiljer sig åt i den DoV som skall öppnas upp, blir det även möjligt att urskilja värdena i sig. När blå används som kontrast till grön och DoV färg öppnas upp, blir det även möjligt att urskilja värdena blå och grön. Det finns även en annan möjlig kontrast där både DoV och de värden som används är möjliga att urskilja. Något som ej är korrekt kan ställas i kontrast till något som är korrekt.

Samtidighet, jämförelse, invarians

I ovanstående exempel på kontrast har det i kontrasterna funnits möjlighet att jämföra exemplen med varandra eftersom de beskrivits som att de varit närvarande samtidigt. Marton (2014) menar att detta är en nödvändig förutsättning för att den lärande skall kunna få syn på en skillnad och urskilja en DoV, som därmed öppnas. Samtidighet och jämförelse är därav viktigt och kan förstärkas av att till exempel en lärare använder exempel samtidigt och aktivt uppmanar eleverna att jämföra dem. Marton menar att invarians i allt annat än den DoV som skall öppnas upp är en förutsättning för att ge den lärande bästa möjlighet till lärande. När DoV färg skall öppnas upp är det till exempel mer kraftfullt om en blå kvadrat används som kontrast till en lika stor grön kvadrat istället för att en blå kvadrat används som kontrast till en grön boll. I det senare fallet varierar både färg och form samtidigt, vilket innebär att en lärande har två möjligheter att urskilja något, antingen färg eller form. I det tidigare fallet varierar enbart en sak (färgen), vilket innebär att en lärande enbart har möjlighet att fokusera och urskilja en sak, färgen. Runesson och Mok (2004) skriver att ”If the particular aspect is present as a dimension of variation, it`s likely to be discerned.” (s. 98). Marton (2014) menar att förutom att DoV måste vara närvarande i ett undervisningstillfälle, ger det ytterligare bättre förutsättningar att urskilja den om exempel i kontrasterande värden används samtidigt, den lärande får möjlighet till en jämförelse mellan exemplen och att det enda som varierar mellan exemplen är den DoV som skall läras.

Mönster av variation

Genom att använda ett exempel i kontrast till ett annat, där det enda som varierar mellan dem är den DoV som skall urskiljas, bildas ett visst mönster av variation. Om en samtidighet finns i användandet av exemplen och en jämförelse görs, skapar detta mönster goda möjligheter för den lärande att kunna urskilja den avsedda DoV. Det är dock inte enbart två exempel som ställs i kontrast till varandra som kan bilda ett mönster av variation och som kan hjälpa till att öppna nya DoV. Marton menar att även att en viss systematik i användandet av exempel kan skapa mönster av variation och öppna nya DoV. Den sekvens exemplen används i kan skapa ett visst mönster som den lärande kan urskilja och dra slutsatser av. Exempelvis kan nedanstående sekvens av exempel användas för att öppna DoV *Att nämnare mindre än ett ger en kvot större än täljaren*, se figur 1.

1. 64/2=32
2. 64/1=64
3. 64/0,5=128

Figur 1. Exempel på användning av exempel som skapar ett visst mönster av variation för att öppna DoV *Att nämnare mindre än ett ger en kvot större än täljaren.*

Invariant mellan exemplen är täljaren (64) och det som varierar är nämnarens värde som mellan exemplen hela tiden halveras, vilket ger att kvotens värde dubbleras. När nämnaren är två är kvoten mindre än täljaren, när nämnaren är ett är kvoten lika stor som täljaren och när nämnaren är noll komma fem är kvoten större än täljaren. Därmed ges möjlighet att urskilja DoV *Att en nämnare mindre än ett ger en kvot större än täljaren*.

I denna studie används variationsteorin för att analysera vilket lärande som varit möjligt under lektionerna samt hur lärarna använder exempel i sin undervisning. Förutom att teorin används som analysredskap, används den också för att utveckla undervisning med fokus på innehållets behandling. Flera forskare (Marton, 2014; Lo, 2012; Marton, 2005) menar att lärare kan använda teorin som ett verktyg i sin vardagliga planering, undervisning och utvärdering av undervisningen. Detta görs av lärare på många håll i världen och teorin används även på detta sätt i så kallade Learning studies. Lärarna i denna studie har mellan de lektioner som analyserats, deltagit i tre Learning studies, under 1,5 år. Vad innebär då Learning study?

Learning study

Learning study är studier i elevers lärande. Marton (2003) menar att Learning study är inspirerat av Design experiment (se Brown, 1992; Collins, 1992) och Lesson study (se Stigler & Hiebert, 1999; Lewis & Tsuchida, 1998; Yoshida, 1999). Learning study och Lesson study har många likheter som arrangemang, men skiljer sig bland annat genom att Learning study primärt studerar lärandet och tar hjälp av en teori om lärande, medan Lesson study primärt studerar lektioner (Marton, 2003; Marton & Tsui, 2004; Wernberg, 2009).

Learning study kan beskrivas som ett arrangemang där lärare tillsammans systematiskt planerar, genomför och utvärderar undervisning, utifrån en teori om lärande. Ett antal lärare och en handledare (med kunskap i den teori om lärande som används i studien och kunskap om arrangemanget) bildar en grupp som planerar, utvärderar och utvecklar undervisning tillsammans. Lärarna i gruppen startar studien med att bestämma vilket innehåll man vill att undervisningen (en lektion eller serie av lektioner) skall behandla och vad man vill att eleverna skall lära sig. Ett förtest genomförs i de elevgrupper som skall undervisas i studien och rättas. Gruppen analyserar resultaten och hur eleverna förstår det man ville att de skall lära sig. Därefter bestäms till första lektionen i studien, vad man skall undervisa om och vad man vill att eleverna skall lära. Första lektionen genomförs av en lärare ur gruppen och undervisningen filmas. Ett eftertest görs och jämförs med förtestet för att se vilken effekt undervisningen haft på lärandet. Filmen analyseras för att finna anledningar till varför det blev den effekt det blev på lärandet och hur eleverna i undervisningssituationen förstod det som lärarna ville att de skulle lära sig. Utifrån analysen justeras eventuellt det man vill att eleverna skall lära sig något och planeringen av undervisningen utvecklas. En ny lärare i gruppen undervisar en annan elevgrupp med den gemensamt utvecklade planeringen, ett eftertest görs, en analys görs, och en utveckling av planeringen görs, på samma sätt som ovan. Oftast görs denna cykel ytterligare en gång. Studien avslutas med att resultaten av studien dokumenteras och presenteras för andra lärare (Häggström, Bergqvist, Hansson, Kullberg, Magnusson, 2012).

Metod

Studien är en fallstudie (Johannesson & Tufte, 2010) som undersöker två matematiklärares användning av exempel i sin undervisning före och efter deltagande i Learning study samt vilka möjligheter till lärande det ger.

Metodval

Att studera hur exempel används i matematikundervisning är först möjligt efter noga, detaljerad och kontrollerad observation (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006; Scataglini-Belghitar & Mason, 2012). Därför har den kvalitativa metoden observation genom video använts. Powell, Francisco och Maher (2003) menar att video är ett flexibelt instrument för att samla in både muntlig och visuell information. Forskare får med hjälp av video möjlighet att analysera samma data flera gånger om. Intervjuer valdes i denna studie bort eftersom de inte visar hur lärarna faktiskt använder exemplen i sin undervisning, samt att det hade varit svårt att genom intervjuer analysera vad som varit möjligt att lära under lektionerna.

Johannesson & Tufte (2010) menar att kvalitativ dataanalys måste vara både teoretiskt upplyst och empiriskt grundad. Syftet med denna studie är att undersöka hur exempel används i matematikundervisning och vilket lärande som varit möjligt. Variationsteorin (Marton, 2014; Lo, 2012) har valts för att analysera data då den fokuserar innehållets behandling och vad som är möjligt att lära. Flera forskare (Runesson, 1999; Marton & Pang, 2006; Häggström, 2008; Kullberg, 2010; Lo, 2012) beskriver variationsteorin som användbar och kraftfull för att analysera hur innehållet i undervisning behandlas och vad som är möjligt att lära. Om studien haft ett annat syfte hade andra teoretiska utgångspunkter varit mer lämpliga. Om syftet varit att undersöka vilket behov av lärande användningen av exempel skapat hade verksamhetsteorin (Engeström, 2000) kunnat användas och hade syftet varit att undersöka vilken interaktion användningen av exempel skapat mellan eleverna hade ett sociokulturellt perspektiv (Säljö, 2000) kunnat användas.

Studiens uppläggning

Studien är en delstudie i LGK-projektet (Lärarnas Gemensamma Kunskapsproduktion) finansierat av Vetenskapsrådet som pågick under åren 2010-2014. I LGK-projektet har 12 lärares undervisning i matematik och NO (totalt 24 lektioner), observerats före och efter deltagande i Learning studies, samt har lärarna intervjuats om hur de uppfattade att de behandlade undervisningen och dess innehåll (Runesson, 2009). Studien undersöker två av LGK-projektets deltagande matematiklärare med fokus deras användning av exempel i undervisning före (lektion 1) och efter (lektion 2) deltagande i tre stycken Learning studies. Nedan beskrivs studiens design och datainsamling.

1. **Lektion 1**. Läraren undervisade en lektion där han/hon själv valt innehållet i undervisningen. Lektionen videofilmades.
2. Lärarna deltog i tre stycken Learning studies, under en period av tre terminer.
3. **Lektion 2.** Läraren undervisade en annan elevgrupp om samma innehåll som i Lektion 1, två år senare. Lektionen videofilmades.

Varje Learning study lärarna deltog i bestod av sju möten och tog fyra månader att genomföra. Lärarna har medverkat under alla tre studierna och endast sjukdom har gjort att lärarna varit borta vid några tillfällen. Lärarna valde själva innehåll i de genomförda Learning studies. Det var ”Räta linjens ekvation”, ”Division med tal mellan 0 och 1”, samt ”Förstå ordet ”av”, till exempel om 3 av 4 innebär en multiplikationsberäkning eller divisionsberäkning”. NÄr de deltog i Learning studies fanns en handledare som även var en av forskarna i LGK-projektet.

Video data

Data i form av de videoinspelade lektionerna som används i studiens analys samlades in vid fyra olika tillfällen. Två tillfällen innan lärarna deltog i Learning studies och två efter. Enbart en kamera användes vid filmandet av lektionerna och riktades mot läraren och tavlan i de gemensamma genomgångarna, för att fånga ”undervisningens centrum”. Hela lektionerna filmades och vid de gemensamma genomgångarna var kameran placerad i bakre delen av klassrummet. Lektion 1 som lärare A undervisade i var ca. 53 minuter lång och lektion 2 var ca. 46 minuter lång. Lektion 1 som lärare B undervisade var ca. 47 minuter och lektion 2 var ca. 48 minuter. De två lektioner lärare A undervisade i behandlade området ekvationslösning och de två lektioner lärare B undervisade i behandlade området bråk och procent.

Videoinspelningarna har transkriberats för analys och både tal, vad som skrevs på tavlan och vad läraren till exempel pekade på, har transkriberats. Nedan finns en beskrivning av hur transkriberingen skall läsas.
(L1) eller (L2), står för om det är första eller andra lektionen transkriberingen kommer från
Lärare: står för att läraren säger något
Namn: står för vilken elev som säger något
Elev: står för att en elev säger något, men det framgår inte vem det är
Text inom parentes står för författarens kommentarer, till exempel att läraren pekar på något på tavlan eller skriver/ritar något på tavlan

Analysprocessen

Videoinspelningarna har analyserats många gånger och i analysarbetets uppstart genomfördes arbetet även tillsammans med en forskare som arbetar på NCM (Nationellt Centrum för Matematik) och som är kunnig i variationsteorin. Inför det gemensamma analysarbetet hade vi först analyserat lektionerna var för sig och vi utvecklade sedan en gemensam syn på analysen. Fokus i analysen har varit hur lärarna använde exemplen i undervisningen samt vad som var möjligt att lära. I analysen har variationsteorin använts som teoretiskt redskap. När lärarnas användning av exempel analyserades i undervisningen var följande frågor i fokus, i)i vilken sekvens användes exemplen, ii)gavs eleverna möjlighet att jämföra exemplen, iii)vilken invarians fanns och hur varierade aspekter mellan exemplen, iv)användes elevernas uppfattningar som exempel, v)fokuserade lärarna skillnader mellan exemplen, vi)använde lärarna icke-exempel i kontrast till korrekta exempel. I analysen av vad eleverna gavs möjlighet att lära i undervisningen var följande frågor i fokus, i)vilka DoV öppnades, ii)vilken variation av värden var möjlig att erfara inom de öppnade DoV, iii)vilken vidd av exempel var möjlig att erfara inom de värden som varierade.

Urval

Urval av skolor och lärare i LGK-projektet har gjorts av de forskare som samlade in data i projektet. Deras kännedom om skolorna och lärarnas vilja att delta i utvecklingsprojektet, låg till grund för urvalet. Lärarna i denna studie arbetar på en kommunal skola belägen i en svensk mellanstor stad som i huvudsak har elever från villaområden. Lärarna är utbildade Ma/NO 4-9 lärare och hade vid LGK-projektets början 8 respektive 20 års lärarerfarenhet. I deras Learning study grupp deltog ytterligare en lärarkollega som undervisar i matematik. De två lärarnas undervisning är i studien vald dels utifrån den föreliggande studiens omfattning och dels utifrån vilket matematiskt innehåll som behandlades i lektionerna. Innehållen valdes för största möjlighet till att analysera relevansen av de DoV som öppnades i lektionerna. Den ena läraren behandlade innehållet ”Bråk och procent” och den andra läraren behandlade innehållet ”Ekvationer”. Den tredje läraren som deltog i samma Learning study grupp undervisade i ”Geometri” och har därför valts bort i denna studie. Båda lärarna undervisade lektionerna i årskurs 7.

Tillförlitlighet

Ambitionen har varit att ge läsaren möjlighet att själv bedöma tillförlitligheten i studien genom att redovisa analys av data och excerpt så att läsaren har möjlighet att bedöma rimligheten i tolkningen. Larsson (2005) menar att forskning skall vara tillgänglig för kritisk granskning. Öppenhet har varit ett ledord i denna forskning, till exempel har det så tydligt och noga som möjligt redogjorts för hur undersökningen gått till.

Validitet handlar om den metod man valt mäter vad man påstås vilja undersöka (Kvale & Brinkmann, 2009). Eftersom analysen fokuserat lektioner som genomfördes före respektive efter lärarna deltog i Learning studies mäts hur denna kompetensutveckling påverkat lärarnas undervisning. Hade studien enbart undersökt förändring av hur lärarna använde exempel i sin undervisning under tiden de deltog i Learning studies, hade inte resultaten varit valida i relation till lärarnas undervisning efter deltagandet i Learning studies. Detsamma hade gällt om lärarna enbart intervjuats om hur de använder exempel i sin undervisning före och efter deltagandet i Learning studies. Validiteten stärks av att det är individuellt planerade lektioner som analyserats, före och efter deltagandet i Learning studies, i de lektioner som analyserats. Studiens analys har gjorts utifrån min 10-åriga erfarenhet som grundskollärare i matematik, min 4-åriga erfarenhet av att utbilda lärare i variationsteorin samt utifrån att ha varit handledare för 55 Learning studies där variationsteorin använts för att studera och utveckla undervisning i olika matematiska innehåll. Även den sambedömare som användes är kunnig i variationsteorin och det matematiska innehåll som analyserats.

Kvale och Brinkmann (2009) menar att reliabilitet är vad forskaren gjort för att få noggrannhet i sina mätningar. Analysen har gjorts med reflexiv objektivitet (Kvale & Brinkmann, 2009) där min erfarenhet och bakgrund har tagits hänsyn till och där jag är medveten om att den kan påverka mitt sätt att analysera och se på studiens resultat. Även vid transkriberingen kan detta påverka och Kvale och Brinkmann (2009) menar att utskrifterna är konstruktioner som kan vara styrda av våra specifika teoretiska antaganden. Transkriberingarna har nedskrivits ordagrant efter noggrann analys av vad som sagts och vad som hänt i behandlingen av innehållet under lektionerna, där jag varit medveten om mina teoretiska antaganden.

Videoobservation ger möjlighet att observera samma fenomen flera gånger och det är ett sätt att komma åt den mänskliga faktorn i ”live” observation. Det finns även beslut och svårigheter som forskare stöter på när man använder videokamera. Mot vad skall kameran riktas för att få med det centrala i vad man vill observera, när skall man filma och inte filma och egentligen behövs flera kameror för att fånga allt som händer i ett klassrum. Dessutom kan lärare och elever uppträda på ett sätt de vanligtvis inte gör när videokameran inte finns i klassrummet (Powell, Francisco och Maher, 2003). För att komma fram till resultaten har videoinspelningarna av lektionerna observerats ett flertal gånger, av både mig och andra forskare. Om observation enbart gjorts direkt på plats hade det varit lätt att missa saker och svårt att hinna göra anteckningar om allt som observerades. Jämfört med enbart ljudinspelning var det dessutom med videoinspelningarna möjligt att få syn på vad som hände i klassrummet förutom det som sades. I denna studie har det förutom talet från läraren och eleverna varit viktigt att observera de exempel som skrevs på tavlan och vad läraren pekade på. Eftersom enbart en kamera använts vid videoinspelningarna har den vid de gemensamma genomgångarna i huvudsak varit riktad mot undervisningens ”centrum”, oftast tavlan och där läraren befann sig i klassrummet. Det är dock omöjligt att veta hur eleverna agerade förutom muntligt, när de vid dessa tillfällen ej ”var i bild”. Till exempel skulle elevernas gester för att förklara vad de menade kunna vara ett tänkbart bortfall. Även när inte läraren ”var i bild” kan dennes gester vara ett tänkbart bortfall. Ljudet har dock varit av god kvalité och tal från både läraren och eleverna, har varit möjligt att observera vid alla gemensamma genomgångar i lektionerna. Eftersom videofilmning kan upplevas som en konstlad situation av lärare och elever är det inte säkert att de agerar som de brukar i undervisningen. Det kan innebära att undervisningen som studerades ej var representativ för lärarnas ordinarie undervisning. För att inte mer än nödvändigt störa undervisningen filmades undervisningen från längst bak i klassrummet.

Den undervisning respektive lärare genomfört före och efter deltagande i Learning studies, är om samma matematiska innehåll. Hade undervisningen varit om olika innehåll hade det varit svårare att jämföra undervisningarna och avgöra en förändring. De matematiska innehållen respektive lärare undervisar om skiljer sig åt mellan dem, men det påverkar ej tillförlitligheten eftersom varje lärares förändring i användandet av exempel studeras för sig. För att ytterligare vara säker på att samma sak analyserades i båda lektionerna, gjordes analysen enbart av de gemensamma genomgångarna lärarna hade med eleverna. De moment där eleverna fick träna sig i att lösa uppgifter analyserades ej, då det i en av lektionerna ej framgår vilka uppgifter eleverna fick träna på. Det var heller inte möjligt i någon av de videoinspelade lektionerna, att analysera vilka exempel lärarna använde och hur de gjorde det, när de gick runt och hjälpte eleverna i att lösa uppgifterna.

Då studiens resultat enbart bygger på två lärares undervisning och fyra lektioner, går det inte att generalisera genom till exempel signifikanta resultat rent statistiskt och undersökningen anger inte heller hur vanligt fenomenet är. Denna studie kan enbart säga något om de inspelade lektionerna och inte om lärarnas undervisning i andra lektioner. Det går dock att argumentera för att det finns en överförbarhet av studiens resultat och att det kan ge mening utöver just denna undersökning. Johannesson och Tufte (2010) menar att överförbarhet är möjlig om man i studien lyckas göra tydliga beskrivningar av begrepp, tolkningar och förklaringar som är användbara i andra sammanhang. Larsson (2005) menar att läsarens igenkänning har stor betydelse för om han/hon skall kunna använda studiens resultat i sitt eget sammanhang och att det kräver en rik beskrivning av fallstudien. Kvale och Brinkmann (2009), menar att en analytisk generalisering absolut kan göras av kvalitativa studier. Där behöver man göra en analys av olikheter och likheter mellan den ursprungliga studien och den ”nya” studien. Även de betonar vikten av rika beskrivningar av fallstudien för att detta skall vara möjligt. I denna studie har en beskrivning gjorts på ett så detaljerat sätt som möjligt av lärarnas förändring av användandet av exempel och vad det inneburit för elevernas möjlighet till lärande. På detta sätt har möjligheten stärkts till att andra skall kunna överföra och använda den kunskap, studien bidrar med.

Tillförlitligheten i studien skulle kunna förbättrats på olika sätt. Till exempel skulle även analys av de intervjuer som genomfördes i LGK-projektet kunnat användas, fler lektioner av samma lärare kunnat observeras innan och efter deltagandet i Learning studies och flera lärares undervisning i LGK-projektet kunnat studeras. På grund av studiens begränsade omfattning valdes ovanstående möjligheter bort.

Etiska hänsynstaganden

I LGK-projektet har Vetenskapsrådets (2002) huvudkrav för humanistisk och samhällsvetenskaplig forskning följts. *Informationskravet* följdes genom att elever och lärare innan projektet startade blev informerade om projektets syfte och upplägg samt att de när som helst under projektets gång kunde avbryta sin medverkan. *Konfidentialitetskravet* följdes genom att löfte om anonymitet gavs till både lärare och elever. I denna studie benämns lärarna som Lärare A respektive Lärare B och elevernas riktiga namn har ändrats i excerpten, för att de skall kunna förbli anonyma. Då det är videoinspelningar som är en del av projektets data, förvaras de på säker plats. *Samtyckeskravet* följdes genom att lärarna själva fick välja om de ville delta i projektet efter förfrågan, samt genom att målsmans skriftliga samtycke till att eleverna fick delta i projektet inhämtades. Då ej målsman samtyckte placerades eleven så att ej kamera hade möjlighet att filma eleven. Eleven har på detta sätt ändå kunnat delta i undervisningen.

Det finns alltid dubbla etiska hänsynstaganden som behöver göras i en forskning. Dels gentemot informanterna och dels mot själva forskningen (Kvale & Brinkmann, 2009; Larsson, 2005). Samarbetet mellan forskare och lärare i LGK-projektet, har präglats av respekt och lyhördhet för lärarnas vilja och beslut. Till exempel fick lärarna välja vilket innehåll de ville undervisa om i lektionerna före deltagandet i Learning studies. LGK-projektet genomfördes i nära samarbete med lärare och elever, där vissa av forskarna även var handledare för de Learning studies lärarna deltog i. Detta innebar att forskarna forskade tillsammans med lärarna istället för på dem (Runesson, 2009).

Resultat

Här presenteras resultatet från analysen av de lektioner som ingått i studien. Analysen har gjorts med hjälp av variationsteorin. Jämförelse av lärare A:s lektioner (lektion 1 och 2) och lärare B:s lektioner (lektion 1 och 2) presenteras var för sig.

Jämförelsen görs utifrån två huvudfrågor.

- *Vad gavs möjlighet att lära i de olika lektionerna?* Vilka dimensioner av variation (DoV) öppnades, vilka värden och exempel användes?
- *Hur användes exemplen i lektionerna?* I vilken sekvens användes de och vilken variation av aspekter fanns mellan exemplen?

Studien visar att lärarna förändrat sitt sätt att behandla innehållet i matematik, utifrån hur de använder exempel i undervisningen. Det förändrade sättet att använda exempel i undervisningen gav också olika möjlighet till lärande för eleverna i lektionerna. I båda lärarnas lektioner har fler DoV och värden som är relaterade till lärandeobjektet varit möjliga att erfara i lektion 2 än i lektion 1. Detta innebär att det i lektion 2 funnits en större och mer strukturerad Lärande- och Variationsrymd. De exempel som användes i lektion 2, hade även en större variation av specifika instanser inom de mer generella värdena, vilket innebär att även exempelrymden var vidare i lektion 2.

I de Learning studies lärarna deltog i (mellan de lektioner som analyserats i denna studie) användes variationsteorin i planering och analys av lektionerna. I resultatet kan man tydligt se att det satt spår i lärarnas undervisning, efter studiernas slut. Skillnaderna mellan lektion 1 och lektion 2, kan sammanfattas enligt följande. I lektion 2

- Använde lärarna flera exempel samtidigt, vid fler tillfällen
- Använde lärarna exemplen med specifika sekvenser och på ett mer systematiskt sätt, som frambringade mönster av variation
- Lät lärarna eleverna jämföra exemplen, vid fler tillfällen
- Använde lärarna fler exempel där något hölls invariant och något specifikt varierade mellan exemplen
- Använde lärarna fler exempel utifrån elevernas uppfattningar
- Fokuserade lärarna skillnader (kontraster) mellan exemplen på ett tydligare sätt
- Använde lärarna fler icke-exempel som kontrast till korrekta exempel

Resultaten från respektive lärares undervisning presenteras var för sig och inleds med en kort beskrivning av vad som var lika och vad som skiljde mellan lektionerna. Därefter presenteras resultaten så att det skall bli möjligt att se skillnaderna i vad som var möjlighet att lära och skillnaderna i hur exemplen används, mellan varje lärares lektioner. De gemensamma innehållen för lektionerna, jämförs även om de i respektive lektion behandlades på olika ställen i lektionerna. Varje innehåll som jämförs börjar med vad som gavs möjlighet att lära på lektionerna, i form av en tabell med de DoV som öppnades och de värden som användes. Under varje värde finns det/de exempel som var en instans/instanser i just det värdet. Beskrivning görs inte av alla DoV som öppnades och värden som användes, utan framförallt av de som är relevanta för lärandeobjektet och det innehåll som behandlades eller för att belysa andra viktiga skillnader i vad som var möjligt att lära. Beskrivning görs inte heller av hur alla exempel används i lektionerna, utan framförallt av de som belyser likheterna och skillnaderna i hur lärarna använde dem i lektion 1 respektive lektion 2.

Lärare A – Lärandeobjekt: Att kunna lösa en ekvation

Lektion 1 och lektion 2 som lärare A undervisade i, var i vissa avseenden lika och i andra avseenden olika, vilket nedanstående tabell (tabell 1) visar. Organisatoriskt var en likhet att lektionerna först innehöll en genomgång/diskussion och därefter arbetade eleverna med uppgifter, i par. Skillnaden var att det i lektion 2 även fanns en genomgång efter eleverna arbetat med uppgifter (se L2, rad 6), vilket inte fanns i lektion 1. En innehållsmässig likhet var att båda lektionerna behandlade lärandeobjektet *Att kunna lösa en ekvation* och innehållen *likhetstecknet, begreppet ekvation* och *lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden.* En skillnad var att i lektion 1 behandlades även innehållet *Ta ut och uttrycka relevant information från en uppgift samt göra en ekvation* upp (se L1, raderna 1, 5 och 7), vilket det inte gjordes i lektion 2.

Tabell 1. Lektionsinnehåll i Lektion 1 (L1) och Lektion 2 (L2).

	L1			**L2**	
	Tid	**Innehåll**		**Tid**	**Innehåll**
1.	7:39-13:18	Ta ut och uttrycka relevant information från en uppgift samt göra en ekvation	1.	00:17-11:20	Likhetstecknet
2.	13:19-15:53	Begreppet ekvation	2.	11:21-19:35	Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden
3.	15:54-19:15	Likhetstecknet	3.	19:36-20:15	Begreppet ekvation
4.	19:16-24:24	Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden	4.	20:16-23:24	Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden
5.	24:25-26:58	Ta ut och uttrycka relevant information från en uppgift samt göra en ekvation	5.	(23:35-40:32)	(Eleverna jobbade två och två med uppgifter)
6.	26:59-29:08	Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden	6.	40:33-45:36	Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden
7.	29:09-36:35	Ta ut och uttrycka relevant information från en uppgift samt göra en ekvation			
8.	36:36-37:25	Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden			
9.	(37:26-52:12)	(Eleverna jobbade två och två med uppgifter)			

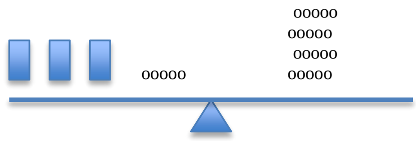
Eftersom innehållet *Ta ut och uttrycka relevant information från en uppgift samt göra en ekvation* inte behandlades i lektion 2, var lärandeobjektet mer avgränsat i lektion 2. Det tillsammans med att en extra gemensam genomgång hölls i lektion 2, innebar att det i den lektionen användes mer tid till det innehåll som var samma mellan lektionerna.

I följande text kommer de olika innehåll som var gemensamma för lektionerna beskrivas separat. Beskrivningen inleds med vad som var möjligt att lära och därefter beskrivs hur exemplen användes, i de olika lektionerna.

Begreppet ekvation

När innehållet *Begreppet ekvation* behandlades öppnades olika DoV i respektive lektion. Nedanstående tabell (tabell 2) visar att exempelvis DoV *Lösningar kan uttryckas på olika sätt*, öppnades i lektion 2 (se L2, rad 1), men inte i lektion 1.

Tabell 2. DoV som öppnades och de värden och exempel som användes i innehållet Begreppet ekvation

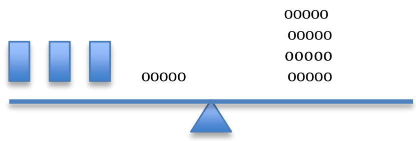
L1	L2
1. Ekvationer kan symboliseras på olika sätt **(DoV)** a. Algebraiskt (Värde) $3x+5=20$ b. Som bilder (Värde)  2. Om det obekanta talet ej kan ha ett negativt värde, finns det ekvationer som ej har en likhet och går då ej att lösa **(DoV)** a. Ekvation där det obekanta talet är ett positivt värde och då går att lösa (Värde) $3x+5=20$ b. Ekvation där lösningen är ett negativt värde och då ej går att lösa **(**Värde) $3x+20=5$ $2x+3=3x+4$	1. Lösningar kan uttryckas på olika sätt **(DoV)** a. Aritmetisk lösning **(**Värde) $3+4=7$ b. Algebraisk ekvation (Värde) $x+4=7$ 2. Ekvationer kan vara olika svåra att lösa **(DoV)** a. Lättare ekvation (Värde) $6x/4+4=7$ b. Svårare ekvation (Värde) $3x^2+2x=3-7x$

Det framgår att eleverna i lektion 2 hade möjlighet till en annan läranderymd. Då begreppet ekvation är det direkta lärandeobjektet i lärandeobjektet *Att kunna lösa en ekvation* kan det vara relevant att behandla. Eftersom värdet Algebraiskt ekvation användes i lektion 2 (se L2, rad 1b) men inte i lektion 1, hade eleverna i lektion 2 möjlighet att erfara innebörden av begreppet ekvation, vilket eleverna i lektion 1 inte hade.

Lektion 1

Under lektionen fick eleverna vid ett moment komma med förslag på vad en ekvation innebär, men läraren använde inte dessa förslag som exempel och jämförde dem inte med varandra. Läraren gav inte heller själv några egna exempel på vad en ekvation innebär.

Vid ett annat moment i lektionen användes 3x+5=20 och nedanstående figur 1 samtidigt.



Figur 1. En balansvåg med tre lådor och fem stenar på ena sidan och tjugo stenar på andra sidan.

En jämförelse i likhet mellan exemplen (3x+5=20 och figur 1.) gjordes. Läraren sa ”ser ni att det hänger ihop” (se Excerpt 1, rad 3).

Excerpt 1 (L1)
Läraren hade tidigare skrivit upp ekvationen 3x+5=20 och även ritat ovanstående figur 1, på tavlan

1. Lärare: låda, hänger det ihop med det där på något sätt (pekar på 3x+5=20)
2. Elev: ja
3. Lärare: ser ni att det hänger ihop?
4. Elev: mmh, ja
5. Lärare: det är olika sätt att beskriva samma sorts problem va
6. Elev: ja

När exemplen jämfördes var den enda skillnaden mellan exemplen att $3x+5=20$ var algebraiskt och figur 1 var i bilder. Därmed gavs möjlighet att urskilja att man kan symbolisera en ekvation på olika sätt, både algebraiskt och som bilder.

Lektion 2

Vid ett moment i lektionen användes 3+4=7 och $x+4=7$ samtidigt. Läraren, skrev upp exemplen på tavlan och bad eleverna jämföra skillnaden mellan dem. Läraren sa ” vad har hänt nu?” (se Excerpt 2, rad 2).

Excerpt 2 (L2)

1. Lärare: (skriver 3+4=7, på tavlan) jag tänkte såhär nudå
2. Lärare: (skriver x+4=7, på tavlan) vad har hänt nu?
3. Elev: du har bytt ut trean mot ett x
4. Lärare: och vad har hänt då?
5. Elev: fyra plus x eller blir sju
6. Lärare: ja och vad, vad kallar vi det nu för någonting?
7. Elev: ekvation
8. Lärare: ja just precis, nu har det blivit en ekvation va

När exemplen jämfördes ställdes icke-exemplet 3+4=7 som kontrast till $x+4=7$, där den enda skillnaden mellan exemplen var att 3:an i 3+4=7 var utbytt till ett x i $x+4=7$. Därmed gavs möjlighet att urskilja att lösningar kan uttryckas på olika sätt och att en ekvation är en likhet där ett obekant tal ingår.

Något senare i lektionen använde läraren även $6x/4+4=7$ och $3x^2+2x=3-7x$ samtidigt och som kontrast till varandra. Läraren ledde en diskussion med fokus på vilken av ekvationerna som var enklast att lösa. I detta moment gavs möjlighet att urskilja att det finns ekvationer som är olika svåra att lösa.

I jämförelsen av hur exemplen användes i lektionerna finns både likheter och skillnader. I båda lektionerna används exemplen vid vissa tillfällen samtidigt och med invarians mellan exemplen. Den stora skillnaden var att läraren i lektion 2 fokuserade skillnader istället för likheter med hjälp av fler kontrasterande exempel.

Likhetstecknet

När innehållet *Likhetstecknet* behandlades öppnades både samma och olika DoV, i lektionerna. Nedanstående tabell (tabell 3) visar att DoV *Likhetstecknet kan användas på olika sätt* öppnades i båda lektionerna (se L1, rad 1 och L2, rad 1) och att DoV *Likhetstecknet* *kan förstås på olika sätt* (se L2, rad 4) enbart öppnades i lektion 2, samt att DoV *Ett svar kan finnas på olika sidor om tecknet* enbart öppnades i lektion 1 (se L1, rad 3).

Tabell 3. DoV som öppnades och de värden och exempel som användes i innehållet Likhetstecknet

L1	L2
1. Likhetstecknet kan användas på olika sätt **(DoV)** a. Korrekt, som att visa likhet (Värde) 18*2=36 b. Ej korrekt, som att visa ej likhet (Värde) 3*6=18*2 2. En likhet kan utryckas på olika sätt om ett likhetstecken **(DoV)** a. Som ett svar (Värde) 12*2=24 b. Som en operation (Värde) 12*2=3*2*2*2 3. Ett svar kan finnas på olika sidor om tecknet **(DoV)** a. Höger sida (Värde) 3*4=12 b. Vänster sida (Värde) 12=3*2*2	1. Likhetstecknet kan användas på olika sätt **(DoV)** a. Korrekt, som att visa likhet (Värde) 6*4=12*2=24 12*4/2=48/2=24 cm^2 b. Ej korrekt, som att ej visa likhet (Värde) 6*4=48/2=12 6*4=24/2=12 12*4=48/2=24 cm^2 2. En likhet kan uttryckas på olika sätt på sidorna om ett likhetstecken a. Som svar (Värde) 12*2=24 b. Som operation (Värde) 6*4=12*2 3. Likhetstecknet kan förstås på olika sätt **(DoV)** a. Som en likhet mellan värden (Värde) 6+2=8 b. Som del av beräkningsprocesser (Värde) 6+2=8/2=4

I jämförelsen av vad som var möjligt att lära mellan lektionerna fanns likheter och skillnader. En likhet var att eleverna i båda lektionerna hade möjlighet att erfara likhetstecknets innebörd, som att det måste vara likhet på båda sidorna om tecknet. Detta genom att värdet *Korrekt, som att visa likhet* (se L1, rad 1a och L2, rad 1a) användes. Detta kan vara relevant för lärandeobjektet *Att kunna lösa en ekvation* samt *likhetstecknet*, då en ekvations definition är, en matematisk utsaga som innehåller en likhet (Kiselman & Mouwitz, 2011). En skillnad i läranderymd var att eleverna i lektion 1 hade möjlighet att erfara att ett svar kan finnas på olika sidor om likhetstecknet, genom att även värdet vänster sida (se L1, rad 3b) användes, vilket eleverna i lektion 2 inte hade möjlighet till. I likhetstecknets användning kan eleverna ibland missförstå tecknet som ett svarstecken och de kan även uppfatta det som att svaret endast kan komma på höger sida om tecknet, vilket gör att detta kan vara relevant att behandla. En annan skillnad var att eleverna i lektion 2 hade möjlighet att lära sig att likhetstecknet kan uppfattas på olika sätt. När den DoV öppnades, användes värdet *Som en del av en beräkningsprocess* (se L2, rad 3b). I förståelsen av likhetstecknets innebörd kan eleverna ibland missförstå tecknet som att det är en del av en beräkningsprocess istället för att det innebär att det skall vara lika stort värde på båda sidor tecknet, vilket gör att även detta kan vara relevant att behandla. I lektion 2 var exempelrymden vidare än i lektion 1. I värdena som användes för att öppna DoV Likhetstecknet kan användas på olika sätt, fanns fler exempel som var specifika instanser i de mer generella värdena. I lektion 1 användes enbart exemplen 18*2=36 och 3*6=18*2 medan det i lektion 2 användes exemplen 6*4=12*2=24, 12*4/2=48/2=24 cm^2 , 6*4=48/2=12, 6*4=24/2=12 och 12*4=48/2=24 cm^2. I lektion 2 hade eleverna därmed möjlighet att erfara att värdena *korrekt som likhet* och *ej korrekt som likhet* även gäller i areaberäkningar, vilket inte eleverna i lektion 1 hade möjlighet till.

Lektion 1

I lektionen användes exemplet 18*2=36 som kontrast till icke-exemplet 3*6=18*2. Exemplen användes samtidigt och en jämförelse i vilket exempel som visade likhet och inte, gjordes. Invariant mellan exemplen var 18*2 och mellan exemplen varierades två saker samtidigt. Det som varierades var att det fanns en produkt på ena sidan likhetstecknet (36) och att det var en likhet i exemplet 18*2=36, medan det i exempel 3*6=18*2 fanns operationer (3*6 och 18*2) på båda sidor om likhetstecknet samt att det inte var en likhet. I detta moment gavs möjlighet att urskilja att det måste vara en likhet mellan värdena på båda sidor likhetstecknet för att det skall vara korrekt.

I ett annat moment fanns exemplen 3*4=12 och 12=3*2*2 under varandra på tavlan, samtidigt. Två saker varierade mellan exemplen, produkten (12) fanns på olika sidor likhetstecknet i exemplen och 4:an delades upp i 2*2. Ingen jämförelse gjordes mellan exemplen av läraren, men eftersom de fanns under varandra samtidigt gavs ändå möjlighet att urskilja att ett svar kan stå på olika sidor om likhetstecknet.

Lektion 2

I lektionen användes exemplen 6*4=12*2=24, 6*4=48/2=12 och 6*4=24/2=12 samtidigt. Läraren sa, ”nu vill jag att ni kollar riktigt noga på det här och så försöker ni avgöra om allt det jag har skrivit här är rätt, om det stämmer. Stämmer allting som jag har skrivit här” (se excerpt 3, rad 3).

<u>Excerpt 3</u> (L2)

1. Lärare: jah, bra då. Då tänkte jag skriva upp några olika uträkningar som jag vill att ni kollar lite extra på. (skriver 6*4=24/2=12, på tavlan)
2. Lärare: så har man ju gjort en sådan där liten fusklapp så att det blir riktigt bra (skriver 6*4=48/2=24 och 6*4=12*2=24, på tavlan)
3. Lärare: nu vill jag att ni kollar riktigt noga på det här och så försöker ni avgöra om allt det jag har skrivit här är rätt, om det stämmer. Stämmer allting som jag har skrivit här
4. Elev: nej, inte den i mitten
5. Lärare: Signe var först så hon får börja
6. Signe: Inte den i mitten
7. Lärare: Den stämmer inte?
8. Signe: nej
9. Lärare: nehe, varför tycker du inte det

(Diskussionen fortsatte sedan om varför exemplen stämde och inte stämde med en likhet, samt vad som skiljde exemplen åt)

Exemplen användes som kontraster till varandra, där en jämförelse gjordes i vilka exempel som var en likhet och inte var en likhet. I alla exemplen var operationen 6*4 invariant och det som varierade var att det i exemplet 6*4=12*2=24 fanns en likhet medan det i icke-exemplen 6*4=48/2=12 och 6*4=24/2=12 ej fanns en likhet. I detta moment gavs möjlighet att urskilja att det måste vara en likhet mellan värdena på båda sidor likhetstecknet för att det skall vara korrekt.

Läraren använde även icke-exemplet 6+2=8/2=4 för att belysa hur han uppfattade att många elever använde likhetstecknet felaktigt, som en del av en beräkningsprocess. Svaret från beräkningen, 6+2=8 skrevs ihop med en ny beräkning, 6+2=8/2=4 och där exemplen användes som kontrast till varandra. Läraren sa ”ni tänker att likamedtecknet är en process, man gör räknar man gör någonting va. Man har någonting så får man någonting och sen är det ok va. Och sen kan vi fortsätta med att dela på två och göra såhär va. Men så tänks inte likamedtecknet, likamedtecknet är någonting det ska vara lika mycket på båda sidor”. Läraren använde den felaktiga uppfattningen om likhetstecknet som en kontrast till hur likhetstecknet skall uppfattas och i detta moment gavs eleverna möjlighet att urskilja att ett likhetstecken skall uppfattas som en likhet i värde och ej som en del av en beräkningsprocess.

I jämförelsen av hur exemplen användes i lektionerna finns både likheter och skillnader. I båda lektionerna används exemplen vid vissa tillfällen samtidigt och med invarians mellan exemplen samt att läraren fokuserade skillnader mellan dem. De stora skillnaderna var att läraren i lektion 2 hela tiden använde icke-exempel och som ibland kom från elevernas uppfattningar som kontraster till exempel som var korrekta, samt att läraren hela tiden lät eleverna jämföra exemplen med varandra.

Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden

När innehållet *Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden* behandlades öppnades både samma och olika DoV. Nedanstående tabell (tabell 4) visar dock att det i lektion 1 inte öppnades någon DoV som direkt behandlade balansmetodens princip eller vad man behöver kunna för att utnyttja den, det vill säga hur olika operationer fungerar i en ekvationslösning. I lektion 2 öppnades flera sådana DoV, exempelvis DoV *Samma tillägg måste göras på båda sidor om likhetstecknet för att det skall bli en likhet* (se L2, rad 5), DoV *Mellan en konstant och en variabel behövs inte multiplikationstecken skrivas ut* (se L2, rad 3), DoV *En faktor multiplicerat med en annan faktor delat med samma värde som en av faktorerna, ger ett värde på svaret som är detsamma som den andra faktorn* (se L2, rad 4), DoV *Hur multiplikation skall användas korrekt i balansmetoden* (se L2, rad 7) och DoV *Samma värde kan skrivas på olika sätt* (se L2, rad 8).

Tabell 4. DoV som öppnades och de värden och exempel som användes i innehållet Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden

<table>
<tr><th>L1</th><th>L2</th></tr>
<tr>
<td>1. Balansmetoden är tillämpbar för olika ekvationer (DoV)
a. Ekvation med det obekanta talet multiplicerat en konstant (Värde)
$3x+5=20$, $3x+5-5=20-5$, $3x=15$, $3x/3=15/3$, $x=5$
b. Ekvation med det obekanta talet dividerat med en konstant (Värde)
$x/3+495=1975$, $x/3+495-495=1975-495$, $x/3=1480$, $3*x/3=1480*3$, $x=4440$
c. Ekvation med det obekanta adderat en konstant (Värde)
$3x+(x+5)+x=40$, $5x+5-5=40-5$, $5x/5=35/5$, $x=7$</td>
<td>1. Balansmetoden är tillämpbar för olika ekvationer (DoV)
a. Ekvation med ett obekant tal adderat en konstant (Värde)
$3+4=7$, $\mathbf{x+4=7}$, $x+4-4=7-4$, $x=3$
b. Ekvation med det obekanta talet multiplicerat en konstant (Värde)
$3+4=7$, $\mathbf{3+2x=7}$, $3-3+2x=7-3$, $2x=4$, $2x/2=4/2$, $x=2$
c. Ekvation med det obekanta talet dividerat en konstant (Värde)
$3+4=7$, $\mathbf{6x/4+4=7}$, $6x/4+4-4=7-4$, $6x/4=3$, $4*6x/4=3*4$, $6x=12$, $6x/6=12/6$, $x=2$

2. Upprepad addition kan skrivas som en multiplikation (DoV)
a. Multiplikand som ett värde (Värde)
$3+3+3+3=4*3$
b. Multiplikand som ett obekant tal (Värde)
$4x=x+x+x+x=4*x$

3. Mellan en konstant och en variabel behövs inte multiplikationstecken skrivas ut (DoV)
a. Konstant och variabel med multiplikationstecken (Värde)
$4*x$
b. Konstant och variabel utan multiplikationstecken (Värde)</td>
</tr>
</table>

	4*x* c. Två konstanter utan multiplikationstecken ger inte samma sak som en konstant och variabel utan multiplikationstecken (Värde) 4*3 betyder inte samma som 43 4. En faktor multiplicerat med en annan faktor delat med samma värde som en av faktorerna, ger ett värde på svaret som är detsamma som den andra faktorn **(DoV)** a. Multiplikator samma som nämnare (Värde) 5*3/5=15/5=3 6*4/6=4 b. Multiplikand samma som nämnare (Värde) 5*3/3=15/3=5 c. Multiplikation med obekant tal (Värde) 6*x*/6=*x* 5. Samma tillägg måste göras på båda sidor om likhetstecknet för att det skall bli en likhet **(DoV)** a. Ej likhet (Värde) 3+4=7+2 b. Likhet (Värde) 2+3+4=7+2 6. I balansmetoden kan likhet skapas med olika räknesätt **(DoV)** a. Med en addition (Värde) 2+3+4=7+2 b. Med en subtraktion (Värde) 2+3+4-5=7+2-5 c. Med en multiplikation (Värde) 2*3+4*2=7*2 7. Hur multiplikation skall användas korrekt i balansmetoden **(DoV)** a. Ej korrekt, ej multiplikation av alla värden (Värde) 2*3+4=7*2 b. Korrekt, multiplikation av alla värden (Värde) 2*3+4*2=7*2 8. Samma värde kan skrivas på olika sätt **(DoV)** a. Som ett värde (Värde) 3+**4**=7 b. Som en multiplikation (Värde) 3+**2*2**=7 c. om en konstant och variabel (Värde) 3+**2x**=7 9. Man kan lösa en ekvation genom olika sätt **(DoV)** a. Genom att hålla för (Värde) 3+2**x**=7, x=2 b. Genom att använda balansmetoden (Värde) 3+2x=7, 3-3+2x=7-3, 2x=4, 2x/2=4/2, x=2 10. Metoder att lösa ekvationer med, är olika hållbara för olika ekvationer **(DoV)** a. ”Hålla för” metoden, är hållbar för lättare ekvationer (Värde) 3+2x=7 b. Balansmetoden är hållbar både för lättare och för svårare ekvationer (Värde) $3x^2+2x=3-7x$

Det framgår att eleverna i lektion 2 hade möjlighet till en annan läranderymd, än eleverna i lektion 1. Eleverna i lektion 1 gavs inte någon direkt möjlighet att erfara balansmetodens princip eller vad som är nödvändigt att kunna för att utnyttja den. Eleverna i lektion 2 gavs flera möjligheter till detta och det kan vara relevant för lärandeobjektet *Att kunna lösa en ekvation* eftersom det är en av metoderna som kan användas för att lösa ekvationer. Eleverna i lektion 2 hade möjlighet att erfara principen i balansmetoden, som *Samma tillägg måste göras på båda sidor om likhetstecknet för att det skall bli en likhet.* De hade även möjlighet att erfara att flera olika räknesätt kan skapa likhet när balansmetoden används (se L2, rad 6). De räknesätt som användes var addition, subtraktion och multiplikation (se L2, värdena 6a, 6b, 6c). Att variationsrymden inte begränsades med till exempel addition kan vara relevant för att eleverna skall förstå att principen för balansmetoden är generell och att den inte enbart gäller för ett räknesätt. Eleverna i lektion 2 hade även möjlighet att erfara att ett multiplikationstecken ej behöver skrivas ut mellan en konstant och variabel. Detta kan vara relevant för att eleverna skall förstå varför en division behöver användas för att det obekanta talet skall bli ensamt i exempelvis ekvationen 4x=12, när balansmetoden används. Då DoV *En faktor multiplicerat med en annan faktor delat med samma värde som en av faktorerna, ger ett värde på svaret som är detsamma som den andra faktorn* öppnades i lektion 2, hade de även möjlighet att erfara en strategi för att komma fram till vilken nämnare som behöver användas för att få det obekanta talet ensamt. Eleverna hade också möjlighet att erfara hur multiplikation skall användas korrekt i balansmetoden, genom att en multiplikation måste göras av alla värden på båda sidor om likhetstecknet för att det skall bli en likhet. Detta kan vara relevant då en del elever kan missförstå vilka tillägg som behöver göras och uppfatta det som att endast en multiplikation behöver göras på var sida om likhetstecknet för att få en likhet, oavsett hur många värden det är. I lektion 2 hade även eleverna möjlighet att erfara en strategi hur de kunde tänka ut vad det obekanta värdet kunde vara, utan att använda balansmetoden. Genom att förstå att samma värde kan skrivas på olika sätt hade de möjlighet, att till exempel tänka ut värdet i det obekanta talet i ekvationen 4x=12. I lektion 2 öppnades också DoV *Man kan lösa en ekvation genom olika sätt* (se ovanstående tabell, L2, rad 9). Därmed hade eleverna i lektion 2 möjlighet till en större variationsrymd i vilka metoder som kan användas för att lösa ekvationer, än eleverna i lektion 1. Även DoV *Metoder att lösa ekvationer med är olika hållbara för olika ekvationer* (se L2, rad 10) öppnades i lektion 2 och eleverna hade därmed möjlighet att erfara att man kan välja metod efter ekvationernas svårighetsgrad, vilket inte eleverna i lektion 1 hade möjlighet till.

Lektion 1

De exempel på ekvationer som användes och som läraren utgick från när innehållet *Lösa en ekvation med hjälp av balansmetoden* behandlades var olika, 3x+5=20, x/3+495=1975 och 3x+(x+5)+x=40. Mellan exemplen varierade mycket, exempelvis talen som användes i exemplen och kontexten ekvationerna kom ifrån. 3x+5=20, kom från kontexten lådor och stenar, x/3+495=1975 kom från kontexten pengar och inköp och 3x+(x+5)+x=40 kom från vilken ålder en syskonskara hade. Mellan ekvationerna varierade även det obekanta talets värde i ekvationerna (x=5, x=4440 och x=7). Invariant var att man löste alla ekvationerna med hjälp av samma metod. Därmed gavs möjlighet att urskilja att balansmetoden är tillämpar för att lösa olika ekvationer.

Lektion 2

I alla moment där läraren undervisade om hur ekvationer kunde lösas användes utgångsexemplet, 3+4=7. Utifrån det skapades de olika ekvationerna, x+4=7, 3+2x=7 och 6x/4+4=7. I exemplen 3+2x=7 och 6x/4+4=7 var även värdet på det obekanta talet invariant, x=2. Invariant var även att alla exemplen löstes med samma metod. Med dessa exempel gavs möjlighet att urskilja att balansmetoden är tillämpar för olika ekvationer.

3+4=7 var invariant i flera delar av lektionen och utifrån det varierades specifika saker beroende på vad läraren ville att eleverna skulle urskilja. Förutom att 3+4=7 var utgångsexemplet från vilket olika ekvationer skapades, användes det även till behandlingen av balansmetodens innebörd. Utifrån 3+4=7 gjordes ett tillägg i form av en addition på höger sida om likhetstecknet vilket skapade icke-exemplet 3+4=7+2. Exemplet användes sedan som kontrast till 2+3+4=7+2. Skillnaden mellan exemplen var att det i exemplet 3+4=7+2 ej fanns likhet och i exemplet 2+3+4=7+2 fanns en likhet. Eleverna fick jämföra exemplen med varandra utifrån vilken skillnad som fanns mellan dem. Denna användning av exemplen gav eleverna möjlighet att urskilja att om ett tillägg till en likhet i form av en beräkning görs på ena sidan om likhetstecknet måste samma tillägg göras på andra sidan om likhetstecknet för att det skall bli en likhet.

3+4=7 användes sedan återigen och där ett tillägg i form av en multiplikation gjordes på ena sidan om likhetstecknet (7*2) och eleverna fick svara på vad som skulle skrivas på andra sidan för att skapa en likhet. En elev svarade 2*3+4 (se excerpt 4, rad 2), vilket skapade exemplet 2*3+4=7*2. Läraren skrev efter ett tag dit ytterligare en multiplikation med två så att exemplet 2*3+4*2=7*2 skapades (excerpt 4, rad 15). Eleverna fick jämföra de två exemplen med varandra och diskutera vilket av exemplen som stämde i likhet och inte, samt vad det var som gjorde att det blev en likhet eller ej.

<u>Excerpt 4</u> (L2)

1. Lärare: (skriver 3+4=7, på tavlan) då tänkte jag någonting annat nu, då tänkte jag ta gånger två där (skriver till 2 så det blir 3+4=7*2)
2. Ali: då tar du två gånger tre plus fyra
3. Lärare: vad sa du?
4. Ali: ta två gånger tre plus fyra
5. Lärare: det var bra Ali
6. Elev: eller så lägger du bara till sju där
7. Lärare: eller så lägger vi bara till sju där. Men du sa 2*3+4, sa Ali (skriver 2*3+4=7*2). Var det rätt tycker ni?
8. Elev: ja
9. Lärare: men nu svarar du för fort
10. Elev: det blir tio
11. Lärare: det blir tio ja, stämmer det då
12. Elev: nej
13. Lärare: vad var det lilla, lilla han tänkte nog rätt Ali men han sa ett litet fel här
14. Elev: man tar allt det där gånger två
15. Lärare: allt det där gånger två ja. Jag slänger in en gånger två där med, eller hur (skriver 2*3+4*2=7*2)

Lite senare

16. Lärare: så om man fördubblar det på den sidan (pekar på höger sid om likhetstecknet i 3+4=7*2) då måste man fördubbla det på alla delar (pekar på vänster sida om likhetstecknet), det var nog så du tänkte

I detta moment använde läraren en uppfattning som ej är korrekt. Icke-exemplet 2*3+4=7*2 (en elevs uppfattning) och exemplet 2*3+4*2=7*2 användes samtidigt, en jämförelse var möjlig för eleverna och det var lite som varierade mellan exemplen. Skillnaden mellan exemplen fokuserades vilket skapade en kontrast mellan exemplen och ett specifikt variationsmönster framträdde. Skillnaden mellan exemplen var att enbart ena termen multiplicerats i exemplet 2*3+4=7*2, vilket inte gav en likhet medan båda termerna multiplicerats i exemplet 2*3+4*2=7*2, vilket gav en likhet. Denna användning av exemplen gav eleverna möjlighet att lära sig principen i balansmetoden, samt hur multiplikation skall användas i balansmetoden.

I ett moment användes exemplen 3+3+3+3=4*3 och 4*x*=*x*+*x*+*x*+*x*=4**x* samtidigt, på tavlan. En jämförelse i exemplet 4*x*=*x*+*x*+*x*+*x*=4**x* gjordes mellan 4*x* och 4**x*, där enda skillnaden var multiplikationstecknet. Sedan användes icke-exemplet 43 tillsammans med multiplikationen 4*3 från exemplet 3+3+3+3=4*3 i en jämförelse med 4*x* och 4**x* och att det var skillnad i hur man kunde tänka med 43 och 4*3 respektive 4*x* och 4**x* (se excerpt 5, rad 3 och 5).

<u>Excerpt 5</u> (L2)

1.	Lärare:	(ritar dit ett multiplikationstecken mellan 4 och *x* och pekar på 4**x*=*x*+*x*+*x*+*x*=4**x* exemplet) brukar man skriva ut det
2.	Elev:	fyra x bara
3.	Lärare:	(suddar ut multiplikationstecknet mellan 4 och *x*) ja, man skriver inte ut gånger, men fyra x betyder egentligen fyra gånger x. Är ni med på det?
4.	Elev:	mmh
5.	Lärare:	Men om man skrev det här utan gånger tecken då blir det inte så bra va (skriver 43 jämte 3+3+3+3=4*3, på tavlan och pekar på 4*3 och 43) det betyder någonting helt annat. Det är ett matematikspråk det här. När man skriver så (pekar på 4*x* och 4**x*) då menar man såhär då menar man fyra gånger *x*, är vi överens om det
6.	Elev:	mmh

Läraren använde exemplen 43 och 4*3 som kontrast till 4*x* och 4**x*, där skillnaden var att 4*x* och 4**x* innehöll variabler, vilket inte 43 och 4*3 gjorde. I detta moment gavs möjlighet att urskilja att mellan en konstant och en variabel behövs inte multiplikationstecken skrivas ut, det står ändå för en multiplikation. Det gavs också möjligt att urskilja att det är skillnad om två konstanter skulle skrivas ihop, det blir inte samma sak.

Exemplen 5*3/5=15/5=3 och 5*3/3=15/3=5 användes samtidigt. Mellan exemplen varierade enbart nämnarens värde vilket också gav en variation i värdet på kvoten. Läraren bad eleverna att jämföra exemplen och frågade efter vilket mönster de kunde se mellan dem. Eleverna hade svårt att se mönstret läraren var ute efter och frågade efter ytterligare exempel som läraren skrev upp på tavlan. Läraren skrev upp och använde exemplen 6*4/6=4 och 6*x*/6=*x* där skillnaden mellan exemplen var att faktorn 4 ändrades till faktorn *x*, vilket också gav en skillnad i vilken kvot divisionen fick. Eleverna fick jämföra exemplen med varandra och leta efter mönstret. Här gavs eleverna möjlighet att urskilja att en faktor multiplicerat med en annan faktor delat med samma värde som en av faktorerna, ger ett värde på kvoten som är detsamma som den andra faktorn.

I ett annat moment användes återigen 3+4=7 och i en snabb följd exemplen 3+**2*2**=7 och 3+**2*x***=7, så att de samtidigt stod under varandra, på tavlan. Läraren frågade eleverna om de kunde säga värdet på det obekanta talet i exemplet 3+2*x*=7 (se excerpt 6, rad 3). Efter det startade läraren en diskussion genom att säga *om vi skulle räkna ut x:et om vi inte visste det här som var ovanför, skulle ni se det på en gång*, (se rad 11).

Excerpt 6 (L2)

(Exemplen 3+4=7 och 3+2*2=7 fanns på tavlan och läraren har precis skrivit exemplet 3+2x=7, så att alla exempel kom under varandra)

1. Lärare: vad säger vi nu då, Sune? Vad säger ni nu?
2. Elev: en ekvation
3. Lärare: (läraren skriver till ekvation bakom 3+2x=7) en ekvation, ok. Vad är svaret på ekvationen då
4. Elev: x är lika med två
5. Lärare: det ser ni, Sune
6. Sune: ja, ja
7. Lärare: är ni med på det, det ser du nu
8. Elev: ja
9. Lärare: det var inget svårt
10. Elev: nej
11. Lärare: om vi skulle räkna ut x:et om vi inte visste det här som var ovanför, skulle ni se det på en gång

I diskussionen som följde om hur man kunde komma fram till värdet, kom läraren och eleverna tillsammans fram till att det var lätt att se det obekanta talets värde när man såg exemplen ovan. De konkluderade att det framträdde ett mönster som hjälpte dem att urskilja värdet på det obekanta talet. I mönstret gavs möjlighet att urskilja att samma sak kan skrivas på olika sätt och att man genom att se lösningar ekvationen kommit från, kan ange värdet på det obekanta talet.

I jämförelsen av hur exemplen användes i lektionerna finns det skillnader. I lektion 1 användes få exempel och skillnaderna mellan exemplen var många. I lektion 2 däremot användes många exempel och skillnaderna mellan dem var få och specifika. I lektion 2 användes även många icke-exempel i kontrast till korrekta exempel samtidigt, samt gjordes en jämförelse mellan exemplen med fokus på skillnad, vilket inte gjordes i lektion 1. I lektion 2 användes även exemplen vid vissa tillfällen systematiskt och i en viss ordning för att utgöra specifika mönster av variation. Inga sådana mönster användes i lektion 1.

Sammanfattning av lärare A:s lektioner

Möjlighet till lärande

I jämförelsen av lektionerna visar det sig att eleverna i lektion 2 hade andra möjligheter till lärande än eleverna i lektion 1. De största skillnaderna i läranderymd var att eleverna i lektion 2 hade möjlighet att erfara begreppet ekvation, balansmetodens princip och förutsättningar för att kunna använda metoden som till exempel att det mellan en konstant och variabel inte behövs skrivas ut ett multiplikationstecken. Skillnaden i variationsrymd var exempelvis att eleverna i lektion 2 hade möjlighet att erfara att balansmetoden kan användas och hur den skall användas i både räknesätten addition, subtraktion och multiplikation. Dessa viktiga aspekter för lärandeobjektet *Att lösa en ekvation*, gavs inte möjlighet att erfara i lektion 1.

Användning av exemplen

I jämförelsen av hur exemplen användes i lektionerna, visar det sig att i lektion 2 använde läraren exemplen på ett mer systematiskt sätt, än i lektion 1. I lektion 1 använde exempelvis läraren exempel där många aspekter varierade samtidigt mellan exemplen. I momenten när balansmetoden skulle användas för att lösa en ekvation, användes till exempel tre olika ekvationer $3x+5=20$, $x/3+495=1975$ och $3x+(x+5)+x=40$. I lektion 2 använde läraren exemplen på ett annat sätt, exempelvis genom att hela tiden utgå från exemplet 3+4=7 och variera specifika aspekter utifrån det, för att eleverna skulle ha möjlighet att urskilja dem. De utmärkande skillnaderna i hur läraren använde exemplen var att han i lektion 2, i) använde fler exempel där något hölls invariant och något specifikt varierade mellan exemplen, ii) använde exempel samtidigt vid fler tillfällen, iii) gav eleverna möjlighet att jämföra exemplen med varandra vid fler tillfällen, iv) fokuserade skillnader (kontraster) mellan exemplen på ett tydligare sätt, v) använde fler icke-exempel som kontrast till korrekta exempel, vi) använde fler exempel utifrån elevernas uppfattningar, vii) använde exemplen med mer specifika sekvenser och på ett mer systematiskt sätt som skapade mönster av variation.

Lärare B – Lärandeobjekt: Att kunna skriva bråk som procent och tvärtom

Lektion 1 och lektion 2 som lärare B undervisade i, var i vissa avseenden lika och i andra avseenden olika, vilket nedanstående tabell (tabell 6) visar. En likhet var att båda lektionerna innehöll en genomgång/diskussion och sedan jobbade eleverna med uppgifter, två och två. Skillnaden var att det i lektion 2 även fanns en genomgång efter eleverna jobbat med uppgifter (se L2, rad 5), vilket inte fanns i lektion 1. Likheterna i de innehåll som behandlades var att båda lektionerna behandlade lärandeobjektet *Att kunna skriva bråk som procent och tvärtom* och inom det *bråk (som del av hel) skrivs som procent, bråk (som del av antal) skrivs som procent* och *procent av en helhet skrivs som antal*.

Tabell 6. Lektionsinnehåll i Lektion 1 (L1) och Lektion 2 (L2).

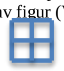
	L1			L2	
	Tid	**Innehåll**		**Tid**	**Innehåll**
1.	00:25-04:45	Bråk (som del av hel) omvandlas till procent	1.	00:19-05:28	Bråk (som del av hel) omvandlas till procent
2.	04:46-10:47	Bråk (som del av antal) omvandlas till procent	2.	05:29-11:30	Procent av en helhet omvandlas till antal
3.	10:48-15:15	Procent av en helhet omvandlas till antal	3.	11:31-15:50	Bråk (som del av antal) omvandlas till procent
4.	(16:09-47:02)	(Eleverna jobbade två och två med uppgifter)	4.	16:24-33:48	(Eleverna jobbade två och två med uppgifter)
			5.	(33:49-48:28)	(Genomgång av de uppgifter eleverna jobbat med två och två)

Eftersom det fanns en extra gemensam genomgång i lektion 2, innebar det att det användes mer tid i den lektionen, till behandlingen av lärandeobjektet.

Bråk (som del av hel) skrivs som procent

När innehållet *Bråk (som del av hel) skrivs som procent* behandlades öppnades både samma och olika DoV i lektionerna. Nedanstående tabell (tabell 7) visar exempelvis att DoV *En andel kan symboliseras på olika sätt* (se L1, rad 1 och L2, rad 1) öppnades i båda lektionerna, medan DoV *Nämnarens innebörd* (se L2, rad 4) enbart öppnades i lektion 2.

Tabell 7. DoV som öppnades och de värden och exempel som användes i innehållet Bråk (som del av hel) skrivs som procent

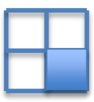
L1	L2
1. En andel kan symboliseras på olika sätt **(DoV)** a. Som del av figur (Värde)   b. Som bråkform (Värde) ¼ 4/10 c. Som procentform (Värde) 25% 40%	1. En andel kan symboliseras på olika sätt **(DoV)** a. Som del av figur  b. Som bråkform (Värde) ¼ c. Procentform (Värde) 25% 2. Täljarens innebörd (**DoV)** a. Fler delar (Värde) 3/5=60% b. Färre delar (Värde) 1/5=20%

2. Täljarens innebörd (**DoV**) a. Fler delar (Värde) 4/10=40% b. Färre delar (Värde) 1/10=10% 3. Olika bråk kan skrivas som procent (**DoV**) a. Stambråk ¼=25% 1/10=10% b. Ej stambråk 4/10=400%	3. Olika bråk kan skrivas som procent (**DoV**) a. Stambråk ¼=25% ½=50% 1/5=20% 1/10=10% 1/100=1% b. Ej stambråk 3/5=60% ¾=75% c. En hel 1=100% 4. Nämnarens innebörd (**DoV**) a. Färre delar (Värde) b. Fler delar (Värde) ½=50% 1/5=20% 1/10=10% 1/100=1% 5. Delarna i ett skrivet bråk står för olika saker (**DoV**) a. Nämnaren står för hur många delar den hela är indelad i (Värde) 1/**4** b. Täljaren står för hur många delar av delarna den hela är delad i (Värde) **1**/4

I jämförelsen av vad som var möjligt att lära i lektionerna fanns likheter och skillnader. En likhet var att det i båda lektionerna fanns möjlighet att erfara att en andel kan symboliseras på olika sätt. Det kan vara relevant att behandla i lärandeobjektet *Att kunna skriva bråk som procent och tvärtom*, eftersom bråk och procent är två olika sätt att symbolisera samma andel. En skillnad var att eleverna i lektion 2 hade möjlighet att erfara både täljarens och nämnarens innebörd, medan eleverna i lektion 1 enbart hade möjlighet att erfara täljarens innebörd. Att både täljarens och nämnares innebörd behandlas när bråk skall skrivas som procent kan vara relevant för att inte skapa en begränsning i elevernas uppfattning om vad som påverkar procentsatsen. En annan skillnad var att eleverna i lektion 2 kunde erfara att förutom stambråk och ej stambråk kan även en hel skrivas som procent (se L2, rad 3c). Därmed hade eleverna i lektion 2 möjlighet att erfara en större variation av vilka bråk som kan skrivas som procent.

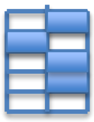
Lektion 1

Vid ett tillfälle i lektion 1 fanns ¼, 25% och nedanstående figur 2 samtidigt på tavlan. Andelen var invariant mellan exemplen och hur den symboliserades varierade. Ingen direkt jämförelse gjordes mellan exemplen av läraren, men eftersom exemplen fanns på tavlan samtidigt gavs eleverna möjlighet att urskilja att en andel (1/4) kan symboliseras på olika sätt.



Figur 2. En kvadrat indelad i fjärdedelar, där en av delarna var markerad.

Även exemplen 4/10, 40% och nedanstående figur 3 användes på samma sätt.



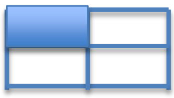
Figur 3. En rektangel indelad i tiondelar, där fyra av delarna var markerade.

I ett annat moment användes exemplet 4/10=40% och 1/10=10% samtidigt. En jämförelse gjordes mellan exemplen och man kom fram till att bråket 4/10 var fyra gånger större än 1/10. Läraren och eleverna diskuterade att skillnaden i procentsats därmed också måste vara fyra gånger. Mellan exemplen var nämnaren invariant och enbart täljaren varierade. I detta moment gavs eleverna möjlighet att urskilja täljarens innebörd.

Mellan exemplen ¼=25% och 1/10=10% gjordes ingen jämförelse och eftersom exemplen inte heller fanns samtidigt på tavlan någon gång under lektionen, hade eleverna inte möjlighet att urskilja DoV *Nämnarens innebörd.*

Lektion 2

Vid ett tillfälle i lektion 2 fanns exemplen 1/4, 25% och nedanstående figur 4 samtidigt på tavlan.



Figur 4. En rektangel indelad i fjärdedelar, där en av delarna var markerad.

En jämförelse gjordes mellan exemplen ¼ och 25%. Läraren sa ”är det någon skillnad mellan en fjärdedel och tjugofem procent” (se Excerpt 1, rad 3).

Excerpt 1 (L2)

1. Lärare: (skriver ¼ och 25%, jämte varandra på tavlan*)* Ehh, Om jag skriver en fjärdedel och så skriver jag tjugofem procent vid sidan av, är det någon skillnad mellan en fjärdedel och tjugofem procent? Stefan
2. Stefan: nej
3. Lärare: Nej en fjärdedel och tjugofem procent det är två olika sätt att beskriva lika mycket, så jag kan sätta ett likamedtecken här emellan (skriver ett likhetstecken mellan ¼ och 25% och pekar sedan på rektangeln som är indelad i fjärdedelar och där en del är markerad) så jag har prickat in en fjärdedel av figuren och den fjärdedelen utgör alltså tjugofem procent.

I momentet var andelen (1/4) invariant mellan exemplen och hur den symboliserades varierade (1/4, 25% och figur 4). I detta moment gavs eleverna möjlighet att urskilja att en andel kan symboliseras på olika sätt.

Exemplen ½=50%, 1/5=20%, 1/10=10% och 1/100=1% skrevs upp under varandra, på tavlan. Invariant mellan exemplen var att de var stambråk och nämnarens värde varierade. Exemplen utgjorde ett mönster där värdet i bråkets nämnare hela tiden ökade mellan exemplen, medan procentsatsen minskade. I detta moment gavs eleverna möjlighet att urskilja innebörden av nämnaren.

I jämförelsen av hur exemplen användes i lektionerna finns både likheter och skillnader. I båda lektionerna används exemplen vid vissa tillfällen samtidigt och med invarians mellan exemplen samt att läraren fokuserade jämförelse mellan dem. De största skillnaderna var att läraren i lektion 2 använde exemplen mer systematiskt och i en viss ordning för att utgöra specifika mönster av variation. Inga sådana mönster användes i lektion 1.

Bråk (som del av antal) skrivs som procent

När innehållet *Bråk (som del av antal) skrivs som procent* behandlades öppnades både samma och olika DoV i lektionerna. Nedanstående tabell (tabell 8.) visar att exempelvis DoV *En andel kan symboliseras på olika sätt* (se L1, rad 1 och L2, rad 1) öppnades i båda lektionerna, medan DoV *Täljarens innebörd* (se L2, rad 2) och DoV *Nämnarens innebörd* (se L2, rad 3), enbart öppnades i lektion 2.

Tabell 8. DoV som öppnades och de värden och exempel som användes i innehållet Bråk (som del av antal) skrivs som procent

L1	L2
1. En andel kan symboliseras på olika sätt **(DoV)** a. Del av ett antal (Värde) 5 elever av 8 elever b. Bråkform (Värde) 5/8 c. Decimalform (Värde) 0,625 d. Procentform (Värde) 62,5%	1. En andel kan symboliseras på olika sätt **(DoV)** a. Del av ett antal (Värde) 1 kr av 4 kr 3 kr av 4 kr 1 kr av 10 kr 6 kr av 10 kr b. Bråkform (Värde) ¼ ¾ 1/10 6/10 c. Procentform (Värde) 25% 75% 10% 60% 2. Täljarens innebörd **(DoV)** a. Färre delar (Värde) ¼=25% 1/10=10% 7/10=70% b. Fler delar (Värde) ¾=75% 6/10=60% 10/10=100% 3. Nämnarens innebörd **(DoV)** a. Fler delar (Värde) 8/100=8% b. Färre delar (Värde) 8/10=80% c. Om förhållandet mellan tal uppfattas fel, kan nämnaren i bråket bli felaktig, vilket leder felaktig procentsats (Värde) 8/100=80%

I jämförelsen av vad som var möjligt att lära mellan lektionerna fanns likheter och skillnader. En likhet var att det även i detta innehåll fanns möjlighet att erfara att en andel kan symboliseras på olika sätt. Skillnaden var att eleverna i lektion 1 kunde erfara att en andel även kan symboliseras som ett decimaltal (se L1, rad 1c), men detta låg utanför lärandeobjektet. En annan skillnad var att eleverna i lektion 2 hade möjlighet att erfara andra exempel, när bråk skulle skrivas som procent. I lektion 1 användes enbart exemplet 5/8=62,5%, medan exempelvis 1/10=10% och 10/10=100% användes i lektion 2. I den senare lektionen hade eleverna möjlighet att erfara en vidare exempelrymd av vilka bråk som kan skrivas som procent, eftersom det fanns skillnad i bråkens värde mellan exemplen.

Lektion 1

I lektion 1 skrevs bråk som procent i enbart ett exempel, när innehållet *Bråk (som del av antal) skrivs som procent* behandlades. Vid ett tillfälle stod 5/8=0,625=62,5% på tavlan men ingen direkt jämförelse gjordes mellan dem. Eftersom dessa exempel ändå fanns samtidigt på tavlan och andelen var invariant gavs eleverna möjlighet att urskilja att en andel kan symboliseras på olika sätt.

Lektion 2

Vid ett moment i lektion 2 användes först exemplen ¼=25% och ¾=75% i en sekvens samt 1/10=10% och 6/10=60% i en direkt anslutande sekvens. Mellan exemplen ¼=25% och ¾=75% varierade enbart täljarens värde och därmed även procentsatsen, vilket även var fallet mellan exemplen 1/10=10% och 6/10=60%. Då exemplen fanns samtidigt på tavlan hade eleverna möjlighet att urskilja innebörden av täljaren.

Vid ett moment uppfattade en elev att 8 av10 (8/10) kunde skrivas som 8/100. Läraren använde exemplet som ett icke-exempel och som kontrast till 8/10 och diskuterade med eleverna att det inte var samma sak. Slutsatsen var att det blev olika procentsatser beroende på om förhållandet mellan åtta och tio beskrivs som 8/100=8% eller 8/10=80% (se excerpt 3, rad 6) samt att 8/100=80% inte är korrekt (se excerpt 3, rad 2 och rad 6).

<u>Excerpt 3</u> (L2)
(På tavlan står 8 av 10 och 8/10=80%)

1. Elev: Går inte åtta hundradelar, går inte det
2. Lärare: Åtta hundradelar, hur mycket motsvarar det? Åtta hundradelar är det också åttio procent?
3. Elev: Nej
4. Lärare: Åsa
5. Åsa: Åtta procent
6. Lärare: Det är åtta procent. Och hade det varit åtta pojkar utav tio stycken eller hade det varit 8 pojkar utav hundra stycken, Sture då hade det varit åtta hundradelar och då hade det varit åtta procent. Men nu var det åtta utav tio pojkar, det var ju nästan allesammans (pekar på 8/10)
7. Elev: Ja
8. Lärare: Och åttio procent det är, det är nästan allesammans.

Mellan exemplen 8/100=8% och 8/10=80% var täljaren invariant och nämnaren varierade och eftersom exemplen jämfördes var det möjligt att urskilja innebörden av nämnaren.

I jämförelsen av hur exemplen användes i lektionerna fanns skillnader. I lektion 1 använde läraren enbart ett exempel, medan hon i lektion 2 använde flera. I den senare lektionen använde hon exemplen systematiskt med tydlig invarians mellan exemplen, så att mönster av variation framträdde. Läraren använde även icke-exempel och som kom från elevernas uppfattningar som kontrast till exempel som var korrekta.

Procent av ett värde skrivs som antal

När innehållet *Procent av ett värde skrivs som antal* behandlades öppnades samma och olika DoV i lektionerna. Nedanstående tabell (tabell 9.) visar exempelvis att DoV *En andel kan symboliseras på olika sätt (se L1, rad 1 och L2, rad 1)* återigen öppnades i båda lektionerna och att DoV *När bråk av ett värde skrivs som antal, varierar beräkningsstrategin med vilket bråk det är* (se L2, rad 3) enbart öppnades i lektion 2.

Tabell 9. DoV som öppnades och de värden och exempel som användes i innehållet Procent av en helhet omvandlas till antal

L1	L2
1. En andel av ett värde kan symboliseras på olika sätt **(DoV)** a. Procentform (Värde) 5% av 800 kr 6% av 700 kr b. Antal (Värde) 40 kr av 800 kr 42 kr av 700 kr 2. Innebörden av procent, som andel av ett värde **(DoV)** a. Fler procent (Värde) 6% av 700 kr ger 42 kr 5% av 800 kr ger 40 kr b. Färre procent (Värde) 1% av 700 kr ger 7 kr 1% av 800 kr ger 8 kr	1. En andel av ett värde kan symboliseras på olika sätt **(DoV)** a. Procentform (Värde) 25% av 200 kr 10% av 200 kr 40% av 200 kr 75% av 200 kr 50% av 500 kr 25% av 500 kr 10% av 500 kr 1% av 500 kr b. Bråkform (Värde) ¼ av 200 kr 1/10 av 200 kr 2/5 av 200 kr ¾ av 200 kr ½ av 500 kr ¼ av 500 kr 1/10 av 500 kr 1/100 av 500 kr c. Antal (Värde) 50 kr av 200 kr 20 kr av 200 kr 80 kr av 200 kr 150 kr av 200 kr 250 kr av 500 kr 125 kr av 500 kr 50 kr av 500 kr 5 kr av 500 kr 2. Innebörden av procent, som andel av ett värde **(DoV)** a. Fler procent (Värde) 10% av 200 kr ger 20 kr 40% av 200 kr ger 80 kr 75% av 200 kr ger 150 kr b. Färre procent (Värde) 50% av 500 kr ger 250 kr 25% av 500 kr ger 125 kr 10% av 500 kr ger 50 kr 1% av 500 kr ger 5 kr 3. När bråk av ett värde skrivs som antal, varierar beräkningsstrategin med vilket bråk det är **(DoV)** a. Värdet divideras med bråkets nämnare, när det är ett stambråk (Värde) 1/4 av 200 kr: 200kr/4=50kr 1/10 av 200 kr: 200kr/10=20kr

	b. Värdet divideras först med bråkets nämnare och kvoten multipliceras sedan med bråkets täljare, när det är ett ej stambråk (Värde) 2/5 av 200 kr, 1/5: 200/5=40kr, 40kr*2=80kr 3/4 av 200 kr, ¼: 200kr/4=50kr, 50kr*3=150kr

I båda lektionerna kunde eleverna återigen erfara DoV *en andel kan symboliseras på olika sätt*. Skillnaden var att det i lektion 2 fanns möjlighet att erfara att en andel, förutom procent och antal, även kan symboliseras som bråk (se L2, rad 1b.). Denna variation kan vara viktig att inte ta förgivet att eleverna förstår, eftersom strategin som användes för att komma fram till vilket antal procentsatsen motsvarar av värdet, innebar att procentsatsen först skulle skrivas som bråk. I lektion 2 hade eleverna även möjlighet att erfara att beräkningsstrategin för att kunna skriva procentsats av ett värde till ett antal, varierar med vilket bråk procentsatsen skrivs som. Detta kan vara relevant att behandla då en del elever uppfattar det som att de beräknat klart när de skrivit stambråket till ett antal, även om det är ett ej stambråk som skall skrivas som antal. En annan skillnad var att eleverna i lektion 2 hade möjlighet att erfara andra exempel, när en procentsats av ett värde skulle skrivas som antal. I lektion 1 användes enbart exemplen, 5% av 800 kr ger 40 kr och 6% av 700 kr ger 42 kr, medan exempelvis 1% av 500 kr ger 5 kr och 75% av 200 kr ger 150 kr, användes i lektion 2. I den senare lektionen hade eleverna möjlighet att erfara en vidare exempelrymd av procentsatser som kan skrivas som antal, eftersom det fanns större skillnad i procentsatsernas värde mellan exemplen.

Lektion 1

För att skriva procent som antal användes strategin att först ta reda på hur stort värde antalet har för en procent genom att dividera med hundra (eftersom procent betyder hundradel) och sedan multiplicera den kvoten med antal procent. I exemplet 5% av 800 kr dividerades först 800 kr/100=8 kr vilket gav att 1% av 800 kr var 8 kr. Sedan multiplicerades 8 kr*5=40 kr, vilket i detta fall gav värdet 40 kr av 800 kr. I uträkningen fanns 5% av 800 kr och 40 kr av 800 kr samtidigt och mellan exemplen var värdet invariant och hur andelen symboliserades varierade. Även om ingen direkt jämförelse gjordes gav detta eleverna ändå möjlighet att urskilja att en andel kan symboliseras på olika sätt. I strategin användes antalet som motsvarade 1% av värdet för att få fram antalet som motsvarade 5%, vilket gav eleverna möjlighet att jämföra 1% av 800 kr som gav 8 kr och 5% av 800 kr som gav 40 kr. Ingen direkt jämförelse gjordes mellan exemplen men de fanns samtidigt på tavlan och värdet var invariant och procentsatsen varierade. Därmed hade eleverna möjlighet att urskilja innebörden av procent, som andel av ett värde.

De enda exemplen som användes var 5% av 800 kr och 6% av 700 kr. Mellan exemplen varierade både procentsatsen och värdet samtidigt.

Lektion 2

För att skriva procent av ett värde som antal användes strategin, att först skriva procentsatsen som bråk och sedan dividera värdet med bråkets nämnare för att få fram antalet. I exemplet 10% av 200 kr skrevs först 10% som 1/10 av 200 kr och sedan dividerades 200 kr/10=20 kr, vilket i detta fall gav antalet 20 kr av 200 kr. 10% av 200 kr, 1/10 av 200 kr och 20 kr av 200 kr fanns samtidigt på tavlan och eleverna kunde göra en jämförelse mellan dem även om inte läraren gjorde en direkt sådan. Invariant mellan exemplen var värdet och andelen. Det som varierade var hur andelen symboliserades vilket gav eleverna möjlighet att urskilja att en andel kan symboliseras på olika sätt.

Många beräkningar gjordes i lektionen med ovan beskriven strategi. Vid ett moment fanns nedanstående exempel samtidigt och skrivna under varandra på tavlan,

- 50% av 500 kr ger 250 kr
- 25% av 500 kr ger 125 kr
- 10% av 500 kr ger 50 kr
- 1% av 500 kr ger 5 kr

Exemplen utgjorde ett variationsmönster där både procentsatsen och antalet minskade, mellan exemplen. Invariant mellan alla exempel var värdet (500 kr), vilket gav eleverna möjlighet att urskilja innebörden av procent, som andel av ett värde.

I jämförelsen av hur exemplen användes i lektionerna fanns skillnader. De största skillnaderna var att läraren i lektion 2 vid flera tillfällen använde exemplen systematiskt och i specifika sekvenser, så att tydliga mönster av variation framträdde, samt att invarians mellan exemplen hela tiden användes och där specifika aspekter varierades, vilket inte fallet var i lektion 1.

Sammanfattning av lärare B:s lektioner

Möjlighet till lärande

I jämförelsen av lektionerna visar det sig att eleverna i lektion 2 hade andra möjligheter till lärande än eleverna i lektion 1. En skillnad i läranderymd var att eleverna i lektion 2 hade möjlighet att erfara *både* täljarens och nämnarens innebörd. En skillnad i variationsrymd var att eleverna i lektion 2 hade möjlighet att erfara att förutom stambråk och ej stambråk kan även en hel skrivas som procent. Eleverna i lektion 2 hade även möjlighet att erfara en vidare exempelrymd. När procent av ett värde skulle skrivas som antal hade eleverna i lektion 2 till exempel möjlighet att erfara exempel med procentsatser från en procent till sjuttiofem procent medan eleverna i lektion 1 enbart hade möjlighet att erfara procentsatserna fem och sex procent.

Användning av exemplen

I jämförelsen av hur exemplen används i lektionerna, visar det sig att i lektion 2 använde läraren exemplen på ett annat sätt, jämfört med i lektion 1. I lektion 1 använde läraren exempel där flera aspekter varierade samtidigt, mellan exemplen. Ett exempel på det är i momentet när procent av ett värde skulle skrivas som antal, där exemplen 5% av 800 kr och 6% av 700 kr användes. Mellan exemplen varierade både procentenheten och helhetens värde, samtidigt. I samma moment i lektion 2 använde läraren istället exemplen, 25% av 200 kr, 10% av 200 kr, 40% av 200 kr och 75% av 200 kr. Mellan exemplen varierade enbart procentsatsen medan värdet var invariant. De utmärkande skillnaderna i hur läraren använde exemplen var att hon i lektion 2, i) använde fler exempel där något hölls invariant och något specifikt varierade mellan exemplen, ii) använde exempel samtidigt vid fler tillfällen, iii) gav eleverna möjlighet att jämföra exemplen med varandra vid fler tillfällen, iv) använde exemplen med mer specifika sekvenser och på ett mer systematiskt sätt som skapade mönster av variation.

Diskussion

Det övergripande syftet med denna studie är att bidra till kunskap om lärares behandling av innehållet i undervisningen förändras efter de deltagit i Learning studies. Studiens resultat visar att matematiklärare kan förändra innehållets behandling i form av hur de använder exempel. Analys har gjorts av två lärares undervisning, före respektive efter de deltagit i tre Learning studies. De specifika forskningsfrågorna var

- Hur skiljer sig lärarna användning av exempel i undervisningen, före och efter deltagande i Learning studies?
- Vad ger skillnaderna i användning av exempel för olika möjligheter till lärande?

Studiens resultat visar att lärarna förändrat sitt sätt att använda exempel efter deltagandet i Learning studies. Skillnaderna mellan lektion 1 och 2 var att i lektion 2

- Använde lärarna flera exempel samtidigt, vid fler tillfällen
- Använde lärarna exemplen med specifika sekvenser och på ett mer systematiskt sätt, som frambringade mönster av variation
- Lät lärarna eleverna jämföra exempel, vid fler tillfällen
- Använde lärarna fler exempel där något hölls invariant och något specifikt varierade mellan exemplen
- Använde lärarna fler exempel utifrån elevernas uppfattningar
- Fokuserade lärarna skillnader (kontraster) mellan exemplen på ett tydligare sätt
- Använde lärarna fler icke-exempel som kontrast till korrekta exempel

Undervisningen i lektion 2 erbjöd även andra möjligheter till lärande för eleverna. Fler DoV i relation till lärandeobjektet öppnades. Till exempel gavs eleverna i lärare A:s lektion 2 möjlighet att erfara begreppet ekvation och balansmetodens princip, vilket inte eleverna i lektion 1 hade möjlighet att erfara. I lärare B:s lektion 2 gavs eleverna möjlighet att erfara *både* täljarens och nämnarens innebörd, medan eleverna i lektion 1 enbart hade möjlighet att erfara täljarens innebörd. Även fler värden inom de DoV som öppnades användes i lärarnas lektion 2. I lärare A:s lektion 2 hade eleverna exempelvis möjlighet att erfara hur balansmetoden används i räknesätten addition, subtraktion och multiplikation, vilket inte eleverna i lektion 1 hade möjlighet att erfara. Även fler exempel och en större vidd av exempel användes i lärarnas lektion 2. I lärare B:s lektion 2 hade eleverna i ett moment exempelvis möjlighet att erfara bråk från 1/100 till 1 (en hel) som skrevs som procent, medan eleverna i lektion 1, i samma moment enbart hade möjlighet att erfara bråk från ¼ till 4/10. Detta innebär att det både fanns en större och mer specifik Lärande-, Variations- och Exempelrymd, i lektion 2.

I de Learning studies lärarna deltog i användes variationsteorin som utgångspunkt i att utveckla och utvärdera undervisning. Studien visar att det satt spår i lärarnas undervisning efter deltagandet, genom att de använder exempel utifrån variationsteoretiska principer. Inom LGK-projektet har fler studier genomförts, där man studerat hur lärare förändrat sin undervisning genom deltagande i Learning studies. Även dessa studier visar att lärare utvecklat undervisningen utifrån variationsteoretiska principer (se Nilsson, 2014; Vikström, 2014).

Hur lärarna använde exemplen

Hur lärare använder exempel med hänsyn till sekvensering är en viktig aspekt i matematikundervisning (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky 2006; Rowland, 2008). Lärarna i denna studie använde exemplen i en annan sekvens (annan ordning) i lektion 2 jämfört med lektion 1. Flera exempel användes samtidigt, vid fler tillfällen och exemplen användes på mer systematiska sätt som frambringade mönster av variation. Till exempel använde lärare B vid ett moment i lektion 2 först exemplen ¼=25% och ¾=75% i en sekvens samt 1/10=10% och 6/10=60% i en direkt anslutande sekvens. Att exempel används samtidigt och i specifika sekvenser för att skapa mönster av variation är även centrala principer i variationsteorin.

Enligt Ma (1999) varierar kinesiska lärare innehållet mer medvetet i sin matematikundervisning, jämfört med sina amerikanska kollegor. Med hjälp av de exempel som används, där något ofta är invariant och där olika variationer görs utifrån det, försöker de kinesiska lärarna få eleverna att urskilja flera olika variationer på samma sak. Zodik och Zaslavsky (2008) menar att vad som kan och bör variera mellan exemplen är en viktig aspekt för lärare att ta hänsyn till i sin matematikundervisning. I jämförelsen mellan lektionerna framgår att lärarna i denna studie använde fler exempel där något hölls invariant och något specifikt varierade mellan exemplen, i lektion 2. Till exempel använde lärare B vid ett moment i lektion 2 exemplen så att värdet var invariant och procentsatsen varierade (50% av 500 kr ger 250 kr, 25% av 500 kr ger 125 kr, 10% av 500 kr ger 50 kr, 1% av 500 kr ger 5 kr). Att det mellan exempel finns invarians och att specifika aspekter varierar, är en central princip även i variationsteorin.

Zodik och Zaslavsky (2008) menar att en annan aspekt lärare måste ta hänsyn till när de väljer exempel är vilka styrkor och svagheter elevgruppen har i den generella matematiska principen. I lektion 2 använde lärarna till synes exemplen mer utifrån elevernas uppfattning av det matematiska innehåll som skulle läras. Vid ett moment i lektion 2 använde till exempel lärare A icke-exemplet 6+2=8/2=4 för att belysa att likhetstecknets innebörd ej är detsamma som en beräkningsprocess och för att förstärka den matematiskt korrekta uppfattningen av likhetstecknet. Att utgå från elevernas uppfattningar är även en central princip i variationsteorin. Enligt variationsteorin är det också nödvändigt att den lärande ges möjlighet att urskilja skillnader (kontraster) mellan exempel, för att lära sig något nytt. I lektion 2 fokuserade lärarna skillnader mellan exemplen på ett tydligare sätt och använde fler exempel som var inkorrekta i kontrast till korrekta exempel. Vid ett moment i lektion 2 använde exempelvis lärare A icke-exemplet 3+4=7 (ej ekvation) i kontrast till x+4=7 (ekvation) och vid ett annat moment icke-exemplet 2*3+4=7*2 (ej likhet) i kontrast till 2*3+4*2=7*2 (likhet).

Lärare bör välja exempel som är relevanta för det lärande som avses och vilken generell matematisk princip som skall framträda i undervisningen (Rowland, 2008; Zodiak & Zaslavsky, 2008). Båda lärarna använde exemplen i lektion 2 mer utifrån vad som är relevant för lärandeobjektet och vilken matematisk princip exemplet skall vara något specifikt av. Vid ett moment använde exempelvis lärare A exemplen 3+4=7+2 och 2+3+4=7+2 i lektion 2, för att eleverna skulle ha möjlighet att erfara balansmetodens princip. Lärare B använde till exempel vid ett moment i lektion 2 exemplen 1/5=20% och 3/5=60% för att eleverna skulle ha möjlighet att erfara täljarens innebörd, samt exemplen ½=50%, 1/5=20%, 1/10=10% och 1/100=1% för att eleverna skulle ha möjlighet att erfara nämnarens innebörd. Slutsatsen är att i lektion 2 använde lärarna i denna studie exemplen mer i likhet med både det som variationsteorin och många tidigare forskare kommit fram till är viktigt för en effektiv användning av dem.

Praktiska implikationer av studien

Studiens resultat visar att lärarna förändrat hur de undervisar i matematik och hur de använder exempel efter deltagandet i Learning studies. Lärarna använde till synes exemplen mer medvetet i lektion 2. Utifrån den variationsteoretiska analysen kan man argumentera att lärarnas matematikundervisning utvecklats i lektion 2 genom att fler aspekter av lärandeobjektet blivit möjliga att urskilja. Resultatet visar att den lärande-, variations- och exempelrymd eleverna hade möjlighet att erfara i lektion 2 bidrog till andra möjligheter för lärande.

Studien kan därmed ha betydelse för skolledare och skolpolitiker på olika nivåer i skolutvecklingssyfte, då den erbjuder ett exempel på hur man med hjälp av Learning study kan utveckla matematiklärares undervisning. Studien kan bidra till diskussionen om vilka förändringar man bör satsa på för att öka svenska elevers matematik prestationer. Flera forskare (Zodik & Zaslavsky, 2008; Rowland, 2008; Goldenberg & Mason, 2008) menar att lärarstudenter bättre behöver utbildas i vilka aspekter det finns att ta hänsyn till när exempel väljs och hur de kan användas i matematikundervisningen när de går på lärarutbildningen. Studien kan därmed även ha betydelse för lärarutbildare till deras undervisning av lärarstudenter för att jämföra skillnader i hur exempel används och vad som erbjuds eleverna att lära.

Teoretiska implikationer av studien

Variationsrymd och Range of Change

I studien har bland andra det variationsteoretiska begreppet Variationsrymd fokuserats och analyserats. Marton (2014) menar att när en DoV är öppnad är värden som finns i den dimensionen möjliga att urskilja. Watson och Mason (2005) menar att det är den möjliga variationen i dimensionen som är möjlig att urskilja, Range of Change. Om det vid ett undervisningstillfälle till exempel används ytterligare värden inom en redan öppnad DoV innebär det att Range of Change inom den DoV, ökar. I denna studie används Range of Change synonymt med det variationsteoretiska begreppet Variationsrymd, vilket innebär att om ytterligare värden används inom en redan öppnad DoV ökar Variationsrymden. Ett exempel på det är när lärare A använt värdena, *Ej likhet* (3+4=7+2) och *likhet* (2+3+4=7+2) så att balansmetodens princip blev möjlig att urskilja. När sedan likhet skapades med andra räknesätt än addition, användes andra värden och som även de var möjliga att erfara. Till exempel att balansmetoden är möjlig att använda även med subtraktion (2+3+4-5=7+2-5) och multiplikation (2*3+4*2=7*2). I detta fall ökade Variationsrymden (Range of Change). Watson och Mason (2005) gör en skillnad i om det ges möjlighet att lära nya värden inom en redan öppnad DoV eller om eleverna faktiskt lär fler värden. De menar att om eleverna lär fler värden, utökas vad de uppfattar som möjlig variation (Range of *permissable* Change), inom den DoV. Det senare är ett elevperspektiv, medan det förra är en observatörs perspektiv. Inom variationsteorin skulle elevperspektivet (Range of *permissable* Change) kunna användas som den Variationsrymd eleverna uppfattar.

Exempelrymd i det iscensatta lärandeobjektet

Läranderymd, de DoV som varit möjliga att urskilja och Variationsrymd (Range of Change), de värden som används och varierar inom en redan öppnad DoV, ger indikationer på vad som varit möjligt att lära vid ett undervisningstillfälle. Denna studie har använt ytterligare ett begrepp för att analysera vad som varit möjligt att lära. Exempelrymd (Instructional Example Space), de exempel läraren använt och därmed eleverna haft möjlighet att urskilja. Watson och Mason (2005) introducerade begreppet Exempelrymd och menar att alla har sin egen exempelrymd och att den är beroende av situation. Det innebär att eleverna kan uppfatta att något generellt representeras av ett begränsat antal specifika exempel. De menar också att en lärare genom att medvetet välja exempel kan påverka elevernas exempelrymd. Exempelvis kan lärare använda exemplen -2 och -8 som representanter för Negativa heltal, vilket innebär att eleverna har möjlighet att erfara exemplen -1, -3, -4, -5… -10 som representanter för Negativa heltal. I detta fall har eleverna möjlighet att erfara att Negativa heltal har exempelrymden -1 till -10. Det kan vara ett förgivet tagande att eleverna även förstår att till exempel talet -4 087 är ett Negativt heltal. Att därför ge eleverna möjlighet att erfara flera exempel inom samma värde, innebär att man givit möjlighet till en vidare Exempelrymd. Ett exempel på att lärarna i denna studie ger eleverna möjlighet att erfara en vidare Exempelrymd i lektionen efter deltagande i Learning studies, är i lärare B:s lektion 2. Läraren använder exemplen 1/100=1% och 1=100% i momentet när bråk skall skrivas som procent. I det momentet hade eleverna möjlighet att erfara att bråk från en hundradel upp till en hel kan skrivas som procent. Detta innebär en vidare exempelrymd än när läraren i samma moment i lektion 1 använde exemplen ¼=25% och 4/10=40%. I denna studie har förutom de variationsteoretiska begreppen Läranderymd och Variationsrymd även Exempelrymd använts för att analysera vad som gjorts möjligt för eleverna att lära. Studien indikerar att Exempelrymd kan användas inom variationsteorin, för att ytterligare fördjupa analysen av det iscensatta lärandeobjektet.

Fortsatt forskning

Denna studie har visat att Learning study kan vara ett sätt att utveckla lärares användning av exempel i matematikundervisning och att det kan bidra till elevers ökade möjlighet till lärande. En kritik som Learning study får är dock att det är ett tids- och resurskrävande arrangemang (Skolverket, 2013a) och ett förslag till ytterligare forskning skulle därför kunna vara att testa andra sätt för att få liknande resultat. Ett sådant sätt skulle kunna vara att lärare precis som i Learning study träffas och diskuterar innehållets behandling i undervisningen, men istället för att det är i ett Learning study arrangemang, skulle det kunna genomföras som en naturlig del av lärares praktik. I Kina genomförs något liknande, i vad som kallas Teachers Research Groups (Paine & Ma, 1993). Där planerar och utvärderar lärare, bland annat undervisning tillsammans kontinuerligt. En intressant studie hade varit ifall något liknande skulle kunna gå att genomföra i Sverige och jämföras med de resultat som denna studie kommit fram till. Denna studie har undersökt lärares användning av exempel i matematik. Ett annat förslag på forskning skulle kunna vara att göra en liknande studie, men i ett annat ämne. Skulle liknande resultat framträda i lärares användning av exempel i exempelvis ämnena Svenska och SO? Framförallt skulle Exempelrymden vara intressant att analysera, i andra ämnen.

Referenslista

Al-Murani, T. (2007). *The deliberate Use of Variation to Teach Algebra: A Realistic Variation Study*. Oxford: University of Oxford.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. I J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126–154). Prague, Czech Republic: Charles University.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of Learning Sciences, 2*(2), 141-178.

Collins, A. (1992). Towards a design science of education. I E. Scanlon & T. O'Shea (red.). *New Directions in Educational Technology*. Berlin: Springer.

Engeström, Y. (2000). Activity theory as a framework for analyzing and redesigning work. *Ergonomics, 43*(7), 960-974.

Goldenberg, P. & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183–194.

Gustavsson, L. (2008). *Att bli bättre lärare: Hur undervisningsinnehållets behandling blir till samtalsämne lärare emellan*. Kristianstad: Högskolan, Kristianstad

Holmqvist, M. (2011). Teachers`learning in a learning study. *Instructional Sciences, 39*(4), 497–511.

Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: what is made possible to learn?* Göteborgs studies in educational sciences 262. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Häggström, J., Bergqvist, M., Hansson, H., Kullberg, A. och Magnusson, J. (2012). *Learning study – en guide.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Johannessen, A. & Tufte, P.- A. (2010). *Introduktion till samhällsvetenskaplig metod*. Malmö: Liber.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insight gained and shared by teachers of mathematics.* Göteborg studies in educational sciences 293. Göteborg: Acta Unversitatis Gothoburgensis.

Kullberg, A. (2004). *Tal, delar och oändlighet. En studie om avgörande skillnader i undervisning och lärande om decimaltal*. Fördjupningsarbete 10 p. Program i pedagogik med didaktisk inriktning. Göteborgs Universitet.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.

Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik, 25*(1), 16–35.

Lewis, C. & Tsuchida, I. (1998). "A lesson is like a swiftly flowing river: how research lessons improve Japanese education", *American Educator, 22*(4), 12-17.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning*. Göteborg studies in educational sciences 323. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2011). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Litorapid Media.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics*. New York: Taylor & Francis.

Marton, F. (1981). Phenomenography: Describing conceptions of the world around us. *Instructional Science*, *10*(2), 177-200.

Marton, F. (2003). Learning Study – pedagogisk utveckling direkt i klassrummet. I I. Carlgren, I. Josefson, C. Liberg (red.) *Forskning av denna världen. Praxisnära forskning inom utbildningsvetenskap. Rapport 2* (sid.41-46). Stockholm: Vetenskapsrådet.

Marton, F. (2005). Om praxisnära grundforskning. I I. Carlgren (red.) *Forskning av denna världen II- om teorins roll i praxisnära forskning* (sid.105-122). Stockholm: Vetenskapsrådet.

Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning sciences*, *15*(2), 193-220.

Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. B. (2004). The space of learning. I F. Marton & A. B. Tsui (red.), *Classroom discourse and the space of learning* (sid. 3-40). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. & Tsui, A. B. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (2011). Phenomenology of example construction. *ZDM Mathematics Education, 43*(2), 195–204.

Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. I R. Zazkis, & S. R. Campbell (red.), *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (sid. 41–68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Press.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 277–289.

Nilsson, P. (2014). When Teaching Makes a Difference: Developing science teachers' pedagogical content knowledge through learning study. *International Journal of Science Education, 36*(11), 1794-1814.

Formaterat: Engelska (USA)

Formaterat: Engelska (USA)

Formaterat: Engelska (USA)

Formaterat: Engelska (USA)

Paine, L. & Ma, L.-P. (1993). Teachers working together: A dialogue on organizational and cultural perspectives of chinese teachers. *International Journal of Educational Research, 19*(8), 675-697.

Pang, M. F. (2003). Two Faces of Variation: on continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research, 47*(2), 145-156.

Formaterat: Engelska (USA)

Pillay, V. (2013). Enhancing mathematics teachers' mediation of a selected object of learning through participation in a learning study: the case of functions in Grade 10. Unpublished PhD-thesis. Faculty of humanities, Universty of the Witwatersrand, Johannesburg.

Pong, W.Y. (2000). Widening the space of variation—inter-contextual and intra-contextual shifts in pupils' understanding of two economic concepts. Opublicerat manuskript. University of Hong Kong.

Powell, A. B., Francisco, J. M. & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405–435.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematic 69*(2), 149–163.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Göteborg studies in educational sciences 129. Göteborg: Acta Unversitatis Gothoburgensis.

Formaterat: Engelska (USA)

Runesson, U. (2009). Lärarnas Gemensamma Kunskapsproduktion (LGK). Projektansökan, Dnr. 2009-4686. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Formaterat: Engelska (USA)

Runesson, U. & Kullberg, A. (2010). Learning from variation. Differences in learners ways of experiencing differences. In B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, C. Michelsen, G. Palsdottir, O. Steinthorsdottir & L. Haapasalo (Red.), *The sourcebook on Nordic research in mathematics education.* Charlotte, N.C: Information Age Publishing.

Runesson, U. & Marton, F. (2002). The object of learning and the space of variation. I F. Marton & P. Morris (red.) *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning* (sid. 19-37). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson, U. & Mok, I. (2004). Lessons from a small-scale observational study: An example of the teaching of fractions. I M. Hoines & A. Fuglestad (red.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (sid. 217–221). Bergen, Norge: Bergen University College.

Scataglini-Belghitar, G. & Mason J. (2012). Establishing appropriate conditions: Students learning to apply a theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education 10*(4), 927-953.

Formaterat: Engelska (USA)

Skolverket (2009). *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola?* Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2013a). *Forskning för klasrummet. Vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet i praktiken.* Sverige: Elanders.

Skolverket (2013b). *PISA 2012 - 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap.* Stockholm: Skolverket. http://www.skolverket.se/publikationer?id=3126

Stigler, J.W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom.* New York: The Free Press.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken*. Stockholm: Prisma.

Tsamir, P. & Tirosh, D. & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Eductational Studies in Mathematics 69*(2), 81–95.

Vetenskapsrådet (2002). *Forskningsetiska principer, inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Vetenskapsrådet.

Vikström, A. (2014). What makes the difference? Teachers explore what must be taught and what must be learned in order to understand the particulate character of matter. *Journal Sciences Teacher Education.* DOI 10.1007//s10972-014-9397-9

Watson, A. (2008). How secondary teachers structure the subject matter of mathematics. I M. Joubert (red.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 28*(3) *November 2008*. Oxford: University of Oxford.

Watson, A. & Mason, J. (2006). Seeing exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Teaching and Learning*, 8(2), 91-111.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, A. & Mason, J. (2002) Student- generated examples in the learning of mathematics, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(2), 237-249.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt.* Umeå: Umeå Universitet.

Yoshida, M. (1999), "Lesson study: a case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development". Opublicerat manuskript. Chicago, IL: The University of Chicago.

Zaslavsky, O., & Lavie, O. (2005). Teachers' use of instructional examples. *Paper presented at the 15th ICMI study conference: The professional education and development of teachers of mathematics, i Brasilien.*

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, *68*(3), 195–208.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies Mathematics*, *69*(2), 165-182.

Formaterat: Engelska (USA)

Formaterat: Engelska (USA)

Formaterat: Engelska (USA)

Formaterat: Engelska (USA)