GÖTEBORGS UNIVERSITET

De komplexa talens historia

-vad en gymnasielärare behöver veta

Jonas Salonen

Kurs: MMGL99
Handledare: Ulf Persson
Examinator: Laura Fainsilber
Datum: 2014-08-20

Abstract:
Examensarbete inom Lärarprogrammet

Titel: De komplexa talens historia -vad en gymnasielärare behöver veta
Författare: Jonas Salonen
Termin: VT 2014
Kursansvarig institution: Matematiska vetenskapet - Göteborgs Universitet
Handledare: Ulf Persson
Examinator: Laura Fainsilber
Nyckelord: Komplexa tal, kubiska ekvationer, kvadratiska ekvationer, tredjegradsekvationer, imaginära tal, matematikhistoria

I denna uppsats förklaras de komplexa talens historia genom att först presentera förhistorien med början kring år 50 och sedan kronologiskt gå vidare till mitten av 1800-talet där begreppet komplexa tal får anses vara fött. Syftet med denna uppsats är att koppla denna historia till gymnasieskolans läroplan, LGY11 och de kursmål och centrala innehåll som berör begreppet komplext tal. Som gymnasielärare i matematik på ett högskoleförberedande program är det nödvändigt med kunskaper om komplexa tal då detta behandlas redan i kursen Matematik 2. Detta examensarbete beskriver hur utvecklingen av komplexa tal har gått till, från att ha varit en förkastad tanke då exempelvis roten ur ett negativt tal är omöjligt, till att bli en del utav matematiken och inte bara någonting som kallades för ett imaginärt tal.
Detta arbete är en litteraturstudie där jag med hjälp av litteratur kring matematikens historia har gjort nedslag i de delar av historien som handlar om komplexa tal. Då historien kring de komplexa talen är väldigt stor och spretig och utvecklas på flera håll i världen har jag i denna uppsats valt att enbart fokusera på de upptäckter och de matematiker som är relevanta för det som ska läras ut i den svenska gymnasieskolan.

Innehållsförteckning

1 Inledning 4
1.1 Bakgrund 4
1.2 Syfte och frågeställning 4
1.3 Metod 5
2 De komplexa talens historia 5
2.1 Förhistoria 5
2.2 Kubiska ekvationer 6
2.3 Komplexa tals intåg i andra matematiska områden 8
2.4 De komplexa talens intåg i analysen 10
2.5 De komplexa talens geometriska representation 13
3. Diskussion 17
3.1 Komplexa tal i LGY11 17
4. Slutsats 18
5. Källförteckning 19

1 Inledning

1.1 Bakgrund

På matematiklektionerna under gymnasietiden får lärare det ofta att verka som att de komplexa talen är någonting som historiskt upptäcktes när man försökte lösa andragradsekvationer. Det är nämligen först då problemet med roten ur ett negativt tal dyker upp. Detta är inte en helt korrekt beskrivning då acceptansen och det faktiska användandet av det vi idag kallar komplexa tal var något som skedde först vid lösandet av kubiska ekvationer. När jag upptäckte detta undrade jag vad mer som kunde vara missvisande i gymnasieundervisningen, vilket är en av anledningarna till att jag valde att fokusera mitt arbete på området om komplexa tal.

Någonting annat som är intressant och som fick mig att vilja undersöka detta vidare är språket man använder för att beteckna dessa typer av tal. Det är intressant hur accepterade de komplexa talen är i modern tid jämfört med hur de sågs på när de först dök upp. Från att ha ansetts vara ogiltiga, till att vara ett hjälpmedel till att bli som vilket tal som helst. Det fascinerar mig hur synen på talen kan ha utvecklats så pass mycket och hur någonting som är helt accepterat idag ansågs som låtsastal förr.

1.2 Syfte och frågeställning

Syftet med denna uppsats är att med utgångspunkt i gymnasiets läroplan i matematik redogöra för komplexa tal och dess historia. Mitt mål är att redogöra för de komplexa talen och dess historia. Detta ska jag koppla till vad en matematiklärare på gymnasiet bör kunna om de komplexa talens historia för att kunna bedriva sin undervisning. Tanken med de områden som jag väljer att ta upp är att dessa ska kunna kopplas till de mål som finns i kursplanerna för gymnasieskolan. Det innefattar framför allt kursplanen i Matematik 4 men även det som nämns i kursplanen för Matematik 2 då dessa är de kurser som tar upp komplexa tal som begrepp.

1.3 Metod

Genom att läsa läroplanen för matematik (LGY11) försökte jag få en förståelse för vad man som matematiklärare behöver kunna om de komplexa talen. Utifrån detta har jag använt mig av litteratur som beskriver de komplexa talens historia så som *History of Mathematics (vol 1 and 2)* av D.E. Smith och *Mathematical thought from Ancient to Modern Times* av Morris Kline. Med utgångspunkt i bland annat denna litteratur har jag försökt hitta delar som, med tanke på vad läroplanen tar upp, kan tänkas vara relevanta för en gymnasielärare i matematik som undervisar på högskoleförberedande program. Därmed har jag fått avgränsa mitt arbete en hel del då historian kring komplexa tal är väldigt omfattande. En stor del av mitt arbete har därmed varit att ta ställning till vad som har varit relevant att ta med och vad som har varit överflödigt utifrån gymnasieskolans kursplaner.

2 De komplexa talens historia

2.1 Förhistoria

År 825 gav Al-Khwarizmi med sin *al-jabr w'al muqâbalah* namn åt vetenskapen om algebra. I och med hans arbete blev algebra ett avskilt matematiskt fält från talteorin. (Smith 1953:382) De tidigaste källorna där roten ur ett negativt tal nämns har dock daterats redan till kring år 50. I *Stereometria* av Heron av Alexandria kan man hitta $\sqrt{81-144}$ som är omskrivet till $\sqrt{144-81}$ eller 8-$\frac{1}{16}$ när det egentligen borde ha varit $\sqrt{-63}$. Det finns dock en osäkerhet kring om detta beror på en felskrivning av Heron eller om det beror på att det har blivit kopierat felaktigt. (Smith 1953:261) Det är alltså möjligt att Heron redan på 50-talet förkastade tanken på roten ur ett negativt tal och helt enkelt såg det som att han hade gjort något fel i sin uträkning då roten ur ett negativt tal är omöjligt.

Nästa kända källa som behandlar detta problem dateras till år 275 där Diophantus i *Arithmetica* försöker sig på att lösa $336x^2+24=172x$. Han menade att ekvationen inte kunde lösas och förstod alltså inte att ekvationen har komplexa rötter. (Smith 1953:261) I Indien fastslog Mahāvīra år 850 att ”as in the nature of things a negative [quantity] is not a square [quantity], it has therefore no square root”. (Smith 1953:261) Med detta blev problemet med roten ur negativa tal tydligare förklarat. Mahāvīra såg det som omöjligt för ett negativt tal att vara en kvadrat.

Att lösa kvadratiska ekvationer genom att kvadratkomplettera har varit känt ända sedan babyloniernas tid. Den enda egentliga utvecklingen sedan dess gjordes av hinduerna som tittade på olika typer av kvadratiska ekvationer som $x^2 + 3x + 2 = 0$ och $x^2 - 3x - 2 = 0$. Dessa två behandlades lika av hinduiska matematiker medan renässansens matematiker föredrog den senare ekvationen $x^2 = 3x + 2$. (Kline 1972:263)

De algebraiska metoder som araberna använde introducerades i Italien på 1100-talet när Al-Khwarizmis algebra översattes till latin av Gerard av Cremona. Under medeltiden anses Fibonacci vara en av de främsta algebraikerna. Omkring år 1225 presenterade han sina idéer för kejsaren Fredrik II och i en matematisk turnering lyckades han lösa samtliga problem. Bland annat löste han den kubiska ekvationen $x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$ (Eves 1976:211) Specifika kubiska ekvationer gick alltså att lösa men någon allmän metod existerade inte och år 1494 påstod den italienska munken Pacioli att lösningen till den allmänna kubiska ekvationen var omöjlig att finna. (Smith 1953:458)

2.2 Kubiska ekvationer

De komplexa talens historia kan anses börja under 1500 när italienska matematiker sökte efter explicita lösningar till kubiska ekvationer. Målet var att hitta en felfri metod som skulle ge en lösning närhelst det fanns en sådan. Modellen de försökte efterlikna var formeln för lösningar till kvadratiska ekvationer:
$ax^2 + bx + c$ har lösningarna $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Det matematikerna sökte var en motsvarande metod för att lösa allmänna kubiska ekvationer. (Dunham 1999:83)

År 1515 upptäckte Scipione del Ferro (1465-1526) en allmän lösning, men endast för en särskild typ av tredjegradsekvation, vilket han kallade för en reducerad tredjegradsekvation. Han hade lyckats hitta en metod för att hitta lösningarna till kubiska ekvationer utan termer av grad två. Del Ferros lösning såg ut på följande vis:
Lösning till en reducerad kubisk ekvation $x^3 = mx + n$ ges av

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{m^3}{27}}}}$$ (Dunham 1999:83)

Del Ferro delar med sig av sin formel till sin elev Antonio Maria Fiore som använder denna formel i ett par matematiska tävlingar som han deltar i. (Smith 1953:295) Fiore tävlade även med Niccolo Fontana “Tartaglia” som ledde till att Tartaglias upptäcke samma metod som Del Ferro. Därmed är det omstritt vem det egentligen var som upptäckte denna metod.

Under samma period verkade även matematikern Cardano som med hjälp av Tartaglias formel lyckades lösa de två kubiska ekvationerna $x^3 + ax^2 = c$ och $x^3 = ax^2 + c$. När Cardano publicerade sitt verk *Ars Magna* 1545 omvandlade han $x^3 = ax^2 + c$ och $x^3 + ax^2 = c$ genom substitutionen $x = \frac{y+1}{3a}$ och $x = \frac{y-1}{3a}$ och fick en kubisk ekvation utan kvadratiska termer. På samma sätt omvandlade han $x^3 + c = ax^2$ genom substitutionen $x = \sqrt[3]{\frac{c^2}{y}}$. (Smith 1953:460-461)

På detta sätt lyckades Cardano hitta ett sätt att lösa allmänna kubiska ekvationer genom att först skriva om dem till denna simplare form. Cardano kallade lösningar så som $5 + \sqrt{-15}$ för avancerade storheter. I och med att Cardano var den som lyckades lösa de kubiska ekvationerna kallas dessa nu därför för Cardanos formel. (Smith 1953:461)

Problem uppstod med Cardanos formel när man försökte lösa kubiska ekvationer av typ $x^3 = px + q$. Att försöka lösa en sådan ekvation kunde innebära att man skulle behöva ta roten ur ett negativt tal. Om man exempelvis försöker lösa $x^3 = 6x + 4$ genom att använda sig av Cardanos formel får man $x = \sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}}$. Matematikerna såg på detta som att det omöjligt kunde vara sant då man inte kan ta kvadratroten ur ett negativt tal. Man var därmed tvungen att välja; antingen ansåg man Cardanos formel vara felaktig, opålitlig och väldigt begränsad eller så var detta förbryllande resultat meningsfullt. (Dunham 1999:85)

Rafael Bombelli tillhörde en av de matematiker som valde att se resultatet av roten ur ett negativt tal som någonting meningsfullt och användbart. I sitt verk Algebra från 1570 presenterade han grunden till sin idé om att dessa imaginära tal. Hans idé var att man kan använda komplexa tal i beräkningar som leder till reella uttryck. Detta hjälpmedel gjorde att Bombelli kom fram till en reell och riktig lösning av den reducerade tredjegradsekvationen. Detta gjorde han bland annat genom att algebraiskt förenkla uttryck med imaginära tal så som:

$(-1 + \sqrt{-1)^3} = (-1)^3 + 3(-1)^2\sqrt{-1} + 3(-1)(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 =$

$= -1 + 3\sqrt{-1} + 3 - \sqrt{-1} = 2 + 2\sqrt{-1}.$ På samma sätt ser vi att $(-1 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 2\sqrt{-1}$ och att detta implicerar att $\sqrt[3]{2 + 2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 2\sqrt{-1}} = (-1 + \sqrt{-1}) + (-1 - \sqrt{-1}) = -2$.

Med detta visade Bombelli att lösningen fortfarande hade en reell lösning. Nu kunde man inkludera de imaginära talen i de algebraiska uträkningarna och fortfarande få fram ett rimligt svar. Bombelli kallade talen $+\sqrt{-n}$ och $-\sqrt{-n}$ för plus av minus och minus av minus.

(Smith 1953:266) På så sätt skulle dessa imaginära lösningar endast vara något som fanns temporärt, något som bara existerade under uträkningarna men inte hos lösningen. Därmed kunde Cardanos formel vara räddad. (Dunham 1999:85)

Även om man nu hade kommit fram till att man inte alls kan förkasta de imaginära talen och att de till och med behövs för att komma fram till många reella lösningar så kvarstod fortfarande en del frågetecken. För det första visste man fortfarande inte vilket komplext tal som ska upphöjas i kub för att få talet $2+2\sqrt{-1}$. Ett annat stort problem var att man fortfarande inte visste var de andra riktiga lösningarna fanns. Då vi idag vet att det finns tre lösningar till en kubisk ekvation är frågan var de andra reella rötterna finns. (Dunham 1999:86) Även om Bombelli bidrog till en viss acceptans av de imaginära talen lyckades han inte besvara dessa frågor och det dröjde lång tid innan någon annan lyckades göra det.

2.3 Komplexa tals intåg i andra matematiska områden

Viete var den matematiker som tog vid där Bombelli slutade. Han var viktig för den utvecklingen inom den matematiska vetenskapen av två anledningar. För det första var han först med att använda bokstäver samt plus- och minustecken vid algebraiska uträkningar. Han lät algebran ta intryck av geometrin där detta redan var praxis. För det andra så var Vietes arbete också viktigt för att han lyckades binda samman algebran och geometrin på en högre nivå än vad någon tidigare hade gjort. Detta lyckades han med genom att koppla ihop algebran med trigonometrin. Ett av de bästa exemplen på detta är när han visar att lösandet av den kubiska ekvationen är samma sak som att tredela en godtycklig vinkel.

Om vi tar en kubisk ekvation på formen $x^3+ax+b=0$ så kan vi reducera den till en ekvation med endast en parameter genom att sätta $x=ky$ och att välja k så att $k^3/ak=-4/3$ eller så att $k=\sqrt{\frac{-4a}{3}}.$ Vi får då $4y^3-3y=c$. Poängen med att ha denna ekvation är att vi nu kan få relationen $4cos^3\theta-3cos\theta=cos3\theta$. Genom att nu sätta $y=cos\theta$ får vi $cos3\theta=c.$ Så om vi har c kan vi konstruera en triangel med vinkel $cos^{-1}c=3\theta.$ Tredelning av denna vinkel ger oss lösning $y=cos\theta$ till ekvationen. Omvänt sett så kan man se det som att problemet med att tredela en vinkel med cosinus c är ekvivalent med att lösa den kubiska ekvationen $4y^3-3y=c.$ (Stillwell 1989:55-56)

Liksom med Cardanos formel så dyker problemet med de komplexa talen upp även i Vietes metod. Det visade sig att i de fall där Vietes metod kräver de komplexa talens inblandning är just de fall där Cardanos formel klarar sig utan dem. Därmed undviker Viete de komplexa talen och kompletterar Cardanos formel. Viete visade alltså att problemet med att dela en vinkel i ett godtyckligt udda antal lika delar visar sig ha en algebraisk lösning liknande den algebraiska lösningen till den kubiska ekvationen. Viete kom inte längre med detta än att han hittade uttryck för cos $n\theta$ och sin $n\theta$ som är polynom i cos θ och sin θ. Han hittade dessutom detta endast för vissa värden på n. (Stilwell 1989:56)

Isac Newton var den som spann vidare på Vietes idéer efter att ha läst om dessa kring år 1663. Newton kom fram till ekvationen

$$y = nx - \frac{n(n^2-1)}{3!}x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}x^5 + \dots$$

som binder samman $y = \sin n\theta$ och $x = \sin \theta$. (Stillwell 1989:56) Newtons ekvation har, när den reduceras till en polynomekvation, lösningar som ges av n:te roten på motsvarande sätt som Cardanos formel för den kubiska ekvationen

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{y + \sqrt{y^2 - 1}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{y - \sqrt{y^2 - 1}}.$$

Det visar sig dock att detta endast stämmer när n kan skrivas på formen 4m+1. Dessa upptäckter av Newton leder fram till

$\sin \theta = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\theta + i \cos n\theta} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sin n\theta - i \cos n\theta}$ där $n = 4m + 1$.

Denna formel dök upp år 1707 från ingenstans hos matematikern de Moivre. Han förklarade inte heller inte hur han kommit fram till sambandet. (Stillwell 1989:57)
Trots detta brukar sambandet

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

kallas för de Moivres formel. Faktum är dock att de Moivre aldrig påstod detta samband explicit. Han kom som närmast genom att ge en formel för

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{n}}.$$

Det var först senare, efter genombrott inom analysen som man lyckades helt med att bevisa sambandet som idag refereras till, om än ganska felaktigt, som de Moivres formel. (Stillwell 1989:193)
Senare tar man istället hjälp av Eulers identitet för att bevisa De Moivres formel:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Man kan då visa att $e^{(i\theta)n}$ är detsamma som $e^{in\theta}$. Då följer att $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Utveckligen av de komplexa talen har i och med dessa samband kommit såpass långt att man lyckats hitta en metod för att beräkna värdet av ett komplext tal upphöjt till en heltalsgrad, n, exempelvis
$z^n = (c + di)$.

2.4 De komplexa talens intåg i analysen

De komplexa talens fortsatta utveckling skedde under 1700-talets framsteg inom analysen av integraler. Framför allt var det matematikerna Leibniz och Bernoulli som gjorde upptäckter som bidrog till att man kunde koppla ihop logaritmer, integraler och imaginära tal. Det hela började med att Bernoulli 1702 observerade att man kunde skriva $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$ som $\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$. På detta sätt upptäckte Bernoulli ett väldigt användbart sätt att lösa olika typer av integraler med hjälp av det som vi idag kallar för partialbråksuppdelning. I brevväxlingar mellan Leibniz och Bernoulli applicerade de denna metod på integralen
$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Eftersom de linjära faktorerna i $ax^2 + bc + c$ kunde vara komplexa, ledde lösandet av integraler med hjälp av partialbråksuppdelning till integraler på formen
$\int \frac{dx}{cx+d}$ där åtminstone d är ett komplext tal. Lösningen på integraler av denna form involverar logaritmer av komplexa tal. Detta verkade inte bekymra varken Leibniz eller Bernoulli som ansåg att detta inte var något problem. (Kline:1972:407)

Bernoulli fortsatte att använda integraler till komplexa tal och visade att $\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dz}{2(1+z\sqrt{-1})} + \frac{dz}{2(1-z\sqrt{-1})}$ och härledde från detta att $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \times \log\frac{i-z}{i+z}$. Han hade här hittat en koppling mellan trigonometriska och komplexa logaritmer. (Stillwell:1989:221)

Under samma tid som Bernoulli gjorde dessa upptäckter om integraler och komplexa logaritmer kom matematikern Cotes med ett annat samband. 1714 visade han att

$$\log(\cos x + i\sin x) = ix$$

och klargjorde på detta sätt hur logaritmiska funktioner och inversa tan-funktioner hör ihop. Med detta visade han också att i den komplexa domänen är logaritmer och inversen av de cirkulära funktionerna praktiskt taget samma sak. (Stillwell 1989:221)

Euler är nästa matematiker att utveckla förståelsen för de komplexa talen. Detta gjorde han genom att stärka kopplingen mellan integraler, komplexa logaritmer och de cirkulära funktionerna. Han var även den som fick oss att använda betäckningen *i* för $\sqrt{-1}$. Han skiftade fokus från logaritmiska funktioner och Cotes formel till dess invers, den exponentiella funktionen. 1748 publicerade Euler formeln

$$e^{ix} = cos\ x + i\ sin\ x$$

som kan sägas vara en omskrivning av Cotes formel. Euler härledde den genom att jämföra expansionen av båda sidornas utvecklade serier. Formeln hade stor inverkan på förståelsen för komplexa logaritmer. Anledningen till detta var för att man nu kunde skriva e^{ix} och att denna funktion gav en enkel förklaring till många av de logaritmiska värdena som den har på grund av periodiciteten hos sinus och cosinus. Eulers formel visade också att

$$(cos\ x + i\ sin\ x)^n = e^{inx} = cos\ nx + i\ sin\ nx\ .$$

Med detta samband förtydligare Euler de Moivres formel. (Stilwell 1989:221) Formeln $e^{ix} = cos\ x + i\ sin\ x$ kallas för Eulers identitet och eftersom Euler ansåg att ett resultat som är värt att bevisa, är värt att bevisa ännu en gång, finns flera bevis på att hans identitet är korrekt. Nedan följer ett av dessa bevis:

För ett godtyckligt heltal x, gäller $e^{ix} = cos\ x + i\ sin\ x$

Vi introducerar $y = sin\ x$ så att $sin^{-1} y = x = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

Nu utför vi variabelbytet $y = iz$ och $dy = i\ dz$ och får att

$$x = \int \frac{idz}{\sqrt{1-(iz)^2}} = i \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = i \times ln(\sqrt{1+z^2} + z)$$

Eftersom $z = y/i = \frac{sin\ y}{i}$ så blir $z^2 = \frac{sin^2 x}{i^2} = -sin^2 x$. Stoppar vi in detta istället för z^2 får vi att

$$x = i \times ln(\sqrt{1 - sin^2 x} + \frac{sin\ x}{i}) = i \times ln(cos\ x - i\ sin\ x)$$

Nu får vi att $ix = i^2 \times ln(cos\ x - i\ sin\ x) = ln(\frac{1}{cos\ x - i\ sin\ x}) = ln(cos\ x + i\ sin\ x)$

ix är alltså detsamma som $ln(cos\,x\ +\ i\,sin\,x)$ och det räcker med en exponentiering för att få

$e^{ix} = e^{ln(cos\,x + i\,sin\,x)} = cos\,x\ +\ i\,sin\,x$. (Dunham 1999:95)

I och med Eulers identitet och att det nu bevisats att den är korrekt, vet vi att om vi låter $x = \pi$ så får vi att $e^{i\pi} = cos\,\pi + i\,sin\,\pi\ = -1 + i \times 0\ = -1$.

Alltså är $e^{i\pi} - 1 = 0$. Denna ekvation är något utöver det vanliga eftersom den samlar de fem viktigaste konstanterna inom matematiken:
0 - den additiva identiteten
1 - den multiplikativa identiteten
π - den cirkulära konstanten
e - den naturliga logaritmens bas
i - den imaginära enheten

(Dunham 1999:96)

En av de viktigaste matematikerna efter Euler var Carl Fredrich Gauss. Han bidrog till utveckligen inom flertalet områden i matematiken, så också de komplexa talens utveckling. Ett av Gauss viktigaste bidrag när det gäller de komplexa talen är det som brukar kallas faktorsatsen. Denna handlar om att alla algebraiska funktioner i en variabel kan bli faktoriserade i reella faktorer av första- eller andra graden. Gauss gav 1799 ut en uppsats som behandlade just detta med titeln *New Demonstration of the Theorem that Every Rational Integral Algebraic Function in one Variable can be Resolved into Real Factors of First or Second Degree.* (Boye 1989:559) För att illustrera hans bevis för faktorsatsen följer här ett exempel på att uppdelningen av ett polynom är det samma som att hitta rötterna till ekvationen

$f(x)\ =\ x^2 - 3x + 2$. Vi sätter $x^2 - 3x + 2 = 0$ och får då rötterna $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$.
Vi kan nu dela upp vårt polynom som $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.
På samma sätt kan vi faktoruppdela polynom med komplexa rötter:

$f(x) = x^4 - 1$
$x^4 - 1 = 0$
$x^4 = 1$ ger oss rötterna $x_{1,2} =\ \pm 1$ och $x_{3,4} =\ \pm i$
och vi får faktoruppdelningen $f(x) = (x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$ som kan skrivas som $(x+1)(x-1)(x^2+1)$.

I och med Gauss uppsats 1799 ökade acceptansen för de komplexa talens validitet. Däremot undvek Gauss att skriva den imaginära delen i sina lösningar och skrev därför sin lösning på exemplet ovan som just $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ och inte $(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$. (Hall 1965:49)

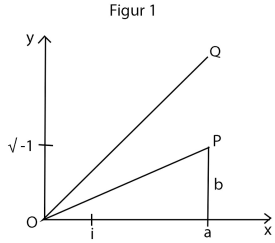
Ännu rådde atllså skepsis kring de komplexa talens riktighet även om Gauss bidrog med att visa att även polynom med komplexa rötter går att faktoruppdela.
Gauss tyckte även att det vore rimligt om man skilde på $a\sqrt{-1}$ och $a+b\sqrt{-1}$ så han gav det senare namnet komplext tal. (Smith 1953:267)

2.5 De komplexa talens geometriska representation

Utvecklingen av den geometriska representationen av de komplexa talen var ett viktigt steg i att göra dessa tal mer greppbara och intuitivt rimliga.

Trots att Viete hade lyckats koppla samman algebran och geometrin var John Wallis den första som försökte sig på att ge komplexa tal en geometrisk representation. Han försökte ge geometrisk representation till rötterna till den kvadratiska ekvationen $x^2+2bx+c^2,\ b,c\geq 0$. (Stillwell 1989:191) Även om detta försök misslyckades får det även anses som ett viktigt steg i de komplexa talens utveckling då han bidrog till att man närmade sig en geometrisk representation. Norrmannen Caspar Wessel var den som tog vid där Wallis stannade. Han kom med den moderna geometriska teorin 1797. (Smith 1953:265) Wessel försökte i *"On the Analytic Representation of Direction; an Attempt"* representera imaginära tal med hjälp av linjesegment eller vektorer. Han gjorde även en geometrisk representation av räkneoperationer med dessa. Wessel tänkte på de komplexa talen som vektorer och inte som punkter i planet.

Figur 1

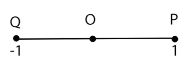


I figuren ser man att Wessel ställer upp en imaginär axel med $\sqrt{-1}$ som referenspunkt. Vektorn OP som dras från origo, O, i planet med axlar +1 och $\sqrt{-1}$. OP representerar

därmed det komplexa talet $a+b\sqrt{-1}$. På samma sätt representerar vektorn OQ ett annat komplext tal $c+d\sqrt{-1}$. (Kline 1972:629)
När det gäller operationer med dessa vektorer i geometriska termer hade Wessel definitioner för de fyra räkneoperationerna. Summan av de komplexa talen a+bi och c+di är lika med diagonalen av det parallellogram som bestäms av de närliggande sidorna OP och OQ. Produkten av faktorerna a+bi och c+di är en ny vektor, OR med längd lika med produkten av OP och OQ. OR:s vinkel till x-axeln är lika med summan av OP:s och OQ:s vinklar. Trots dessa framstående och mycket användbara resultat upptäcktes inte Wessels uppsats förrän 1897. (Kline 1972:630).

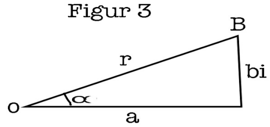
John-Robert Argand var en bokhandlare och en självlärd matematiker som hade ett lite annorlunda sätt att geometriskt representera de komplexa talen jämfört med Wessel. Argand förstod principen om att de negativa talen är en förlängning av de positiva talen genom en kombination av riktning och magnitud.

Figur 2



Argand tittade på talserien 1, x, -1 och frågade sig om man kan hitta en operation som får 1 att bli x och x att bli -1. Med hjälp av figuren kan vi se att om vi roterar OP motsols runt O i 90° och sedan repetera detta går vi från P till Q. Vi har alltså gått från 1 till -1 genom att utföra en operation två gånger. Argand upptäckte att detta är precis vad som sker när man multiplicerar 1 med $\sqrt{-1}$ och sedan multiplicerar med $\sqrt{-1}$igen. (Kline 1972:630) Han utnyttjar alltså att $1\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$.
Man kan alltså se $\sqrt{-1}$ som en 90° rotation motsols. För att försöka illustrera detta tydligare lät Argand vektorn OB representeras av $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ där r är vektorns längd. Denna form kallas polär form, till skillnad från det vanliga sättet att skriva ett komplext tal, a+bi, som kallas rektangulär form. I figur 3 nedan visas Argands geometriska representation samt de båda formerna.

Figur 3



På samma sätt som Wessel visade Argand hur man kunde utföra addition och multiplikation av de komplexa talen på ett geometriskt sätt. (Kline 1972:630)

John-Robert Argand är alltså känd för att ha skrivit den grafiska representationen av $\sqrt{-1}$. Hela Argands sätt att geometriskt representera de komplexa talen kallas numera för Argands diagram.

Den engelske matematikern William Rovan Hamilton nöjde sig inte med att de komplexa talens geometriska representation vilade på intuitiva grunder. Grunden i hans kritik låg i att han inte såg det logiska i att de komplexa talet a+bi ska behandlas som en summa på samma sätt som exempelvis 4+5. Användandet av plustecknet är en historisk felaktighet då bi inte kan adderas med a. Hamilton såg på talet a+bi som ett ordnat par, (a,b), av reella tal. Han utvecklade även räknelagar för dessa talpar där de behåller sina egenskaper. Om a+bi och c+di är två komplexa tal så gäller följande:

- $(a,b) \pm (c,d) = (a \pm c,\ b \pm d)$
- $(a,b) \times (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$
- $\frac{(a,b)}{(c,d)} = (\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2})$

De komplexa talen behåller alltså sin associativitet, komutativitet och sin distributivitet. Med detta sätt att representera de komplexa talen som ordnade par av de reella lyckas Hamilton undvika det mystiska och svårhanterliga $\sqrt{-1}$. (Kline 1972: 776)

Matematikern Gauss var väldigt viktig för acceptansen av de komplexa talen. Han använde dem bland annat i sina många bevis av algebrans fundamentalsats. I ett av sina bevis använder sig Gauss av komplexa tal i det kartesiska planet. Istället för att plotta x+iy använder han sig av x och y som koordinater i det reella planet. Han såg den geometriska representationen av det komplexa talet a+bi som punkten (a,b) och påstod att man kan ta sig från en punkt till en annan i det komplexa planet på många olika sätt. Det som skiljer Gauss från Wessel och Argand är att han ser de komplexa talen som punkter istället för vektorer i det komplexa planet. Detta beskrivs i en uppsats som Gauss publicerar 1831. I uppsatsen beskrivs även hur man geometriskt adderar och multiplicerar punkterna i det komplexa planet. Detta görs på samma sätt som Wessel och Argand gjorde. Det rådde inga tvivel om att Gauss förstod sig på den geometriska teorin kring de komplexa talen och hans tidigare osäkerhet kring hur man ska se på $\sqrt{-1}$ verkar ha försvunnit. Bland annat introducerar Gauss absolutbelopp och konjugat av ett ett komplext tal. Genom att visa att absolutbeloppet av $z = a + bi$ är detsamma som $\sqrt{a^2 + b^2}$ och att det geometriskt representeras av längden r i det komplexa talet $z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$ befäster Gauss sin bild av den geometriska representationen av de komplexa talen. Framväxten av denna geometriska representation av de imaginära talen ledde till att synen på deras sanna metafysik sågs på ett nytt sätt. Gauss bidrog med detta och han var även först med att introducera begreppet “komplext tal” istället för “imaginära tal”. Han fortsatte däremot att använda i för $\sqrt{-1}$. (Kline 1972:632) I och med detta var begreppet komplext tal fött.

3. Diskussion

3.1 Komplexa tal i LGY11

I det Centrala innehållet för kursen Matematik 4 behandlas komplexa tal under områdena aritmetik, algebra och geometri samt under området problemlösning.

Centralt innehåll, Matematik 4:
Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:
Aritmetik, algebra och geometri

- *Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.*
- *Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.*
- *Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.*
- *Användning och bevis av de Moivres formel.*
- *Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.*

Problemlösning

- *Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.*

(Skolverket 2011)

Då undervisningen ska behandla matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria är det viktigt att man som gymnasielärare besitter kunskaper om historian för att kunna undervisa om den på ett bra sätt. Ett exempel på ett matematiskt problem med anknytning till matematikens kulturhistoria som berör komplexa tal är de Moivres formel. I den historiska genomgången nämns hur bevisandet av denna formel upptäcktes först av Euler efter att han utvecklat det som nu kallas Eulers identitet. Då de Moivres formel även är en punkt under det centrala innehållet som undervisningen ska behandla kan det vara en extra god idé att ta upp just detta historiska matematiska problem. Dessutom kan det vara intressant eftersom man kan påstå att det är direkt felaktigt att formeln idag tillägnas de Moivre.

Den del av matematikens historia som handlar om komplexa tal blir även viktigt när det gäller punkten om det komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektorer. Att känna till hur exempelvis Wessel och Argand använder sig av komplexa tal som vektorer och hur Gauss och Hamilton representerar dem som punkter i ett plan blir då viktigt.

Att undervisningen i matematik ska behandla metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form gör det nödvändigt för en gymnasielärare att känna till exempelvis hur Argand i sin geometriska representation introducerar den polära formen av ett komplext tal. Den rektangulära formen som Gauss introducerar blir viktig då han är den som tar upp den rektangulära formen. Även punkten om konjugat och absolutbelopp kan kopplas till Gauss och hans bidrag till matematiken.

Den sista punkten under aritmetik, algebra och geometri som behandlar bland annat lösandet av polynomekvationer kan även det tillägnas Gauss. Det kan vara intressant att veta att det då pågick en ständig diskussion om någonting som vi idag inte ser som något tvivelaktigt. Algebrans fundamentalsats och att alla algebraiska funktioner i en variabel kan bli faktoriserade i reella faktorer av första- eller andra graden är förmodligen ingenting som eleverna skulle ifrågasätta idag.

4. Slutsats

Som gymnasielärare i matematik bör man ha en övergripande kunskap om de komplexa talens historia. Detta då de komplexa talens användning och till viss del deras historia tas upp som centralt innehåll för kursen Matematik 4. Även om de komplexa talen ges störst utrymme i kursen Matematik 4 tas det upp redan i Matematik 2b och 2c där undervisningen ska behandla ”Utvidgning av talområdet genom introduktion av begreppet komplext tal i samband med lösning av andragradsekvationer.” (Skolverket 2011:116) Då Matematik 2b eller 2c är obligatoriska kurser på alla högskoleförberedande gymnasieprogram är det i högsta grad relevant för gymnasielärare i matematik att vara väl insatt i de komplexa talens historia och användning. Med denna uppsats och de nedslag som görs i de komplexa talens historia kan man som gymnasielärare få en bra inblick i hur uppbyggnaden och utvecklingen av de komplexa talen har gått till. Uppsatsen kan fungera som en sammanfattning av en brokig och komplex historia.

5. Källförteckning

Boyer, Carl B. & Merzbach, Uta C. *A History of Mathematics* Singapore: John Wiley & Sons, 1989

Dunham, William *Euler the master of us all,* The Mathematical Association of America, 1999

Hall, Tord *Gauss matematikernas konung,* Stockholm: Prisma, 1965

Kline, Morris *Mathematical thought from Ancient to Modern Times* New York: Oxford University Press, 1972

Smith, D.E. *History of Mathematics (volume 1)* New York: Dover Publications, 1951

Smith, D.E. *History of Mathematics (volume 2)* New York: Dover Publications, 1953

Skolverket *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen förgymnasieskola 2011* Stockholm: Fritzes, 2011

Stillwell, John *Mathematics and Its History* New York: Springer-Verlag, 1989