CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Banach-Tarskis paradox

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Jimmy Aronsson
Karl Bäckström
Frida Tivedal
Fredrik Wirén

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet

Göteborg 2015

Banach-Tarskis paradox

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom matematikprogrammet vid Göteborgs universitet

Jimmy Aronsson

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Karl Bäckström Frida Tivedal Fredrik Wirén

Handledare: Michael Björklund
Examinator: Maria Roginskaya

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2015

Sammanfattning

I det här arbetet behandlas Banach-Tarskis paradox som påstår att enhetssfären kan delas upp i ett ändligt antal delar som sedan med hjälp av rotationer kan sammanfogas till två enhetssfärer identiska med den som existerade från början. Först undersöks paradoxen för den reella tredimensionella enhetssfären och därefter undersöks den rationella enhetssfären. Slutligen undersöks godartade grupper i samband med paradoxala dekompositioner, och det kommer även redovisas varför det inte existerar någon motsvarighet för Banach-Tarskis paradox för enhetscirkeln i två dimensioner.

Abstract

This paper is about the Banach-Tarski paradox that states that the unit sphere can be taken apart into a finite number of disjoint subsets and later, with the use of rotations, be put back together into two spheres identical to the first one. First the paradox is examined for the three dimensional real unit sphere and then for the rational unit sphere. Finally, amenable groups are examined in connection with paradoxical decomposition, and it will also be demonstrated that the unit circle in two dimensions does not have an equivalent to Banach-Tarskis paradox.

Innehåll

Förord

Det här är ett kandidatarbete i matematik skrivet av Jimmy Aronsson, matematikprogrammet vid Göteborgs universitet, och Karl Bäckström, Frida Tivedal, Fredrik Wirén, Teknisk matematik vid Chalmers tekniska högskola.

Syfte

Den paradoxala karaktären hos resultatet väcker direkt intresse och nyfikenhet. Hur mycket skiljer sig matematiken egentligen från verkligheten? Bör paradoxen ses som ett argument mot urvalsaxiomet? Vad får ett sånt här resultat att vara sant i en dimension men falskt i en annan? Syftet med denna rapport är att förse läsaren, som förutsätts ha liknande studieinriktning som oss författare, med en grund till denna diskussion.

Avgränsningar

Inga nämnvärda avgränsningar görs i kapitlen 2-3.

Att tala om godartade grupper mer generellt kräver topologisk och funktionalanalytisk kunskap som inte kan förmedlas på bara ett fåtal sidor. Eftersom detta arbete inte förutsätter sådan kunskap har vi valt att inte tala mer allmänt om godartade grupper. Av samma skäl bevisar vi inte heller den sats av Markov-Kakutani som vi talar om i arbetet, ty beviset är av funktionalanalytisk karaktär och utnyttjar topologiska resultat.

Metod och genomförande

Till grund för denna rapport ligger litteraturstudier samt studier av material presenterat av handledaren. Vi inför de definitioner som behövs för att förstå materialet i rapporten, redovisar kända satser och vid behov förtydligar eller omformulerar deras bevis, samt formulerar egna bevis av vissa lemman. Eftersom de generella formuleringarna av flera definitioner och resultat som används i rapporten involverar koncept som vi har valt att inte studera djupare, presenteras dessa definitioner och resultat istället i form av de specialfall som är relevanta för vårt arbete.

Disposition

Det är vanligt att reagera med skepticism när man för första gången läser formuleringen av Banach-Tarskis paradox, för många personer låter resultatet omöjligt. Av det skälet inleder rapporten med en mer detaljerad men informell beskrivning av paradoxen, ämnad att tydliggöra vissa av dess aspekter.

I Kapitel 1 presenteras grundläggande definitioner som används genom hela arbetet, däribland definitionen av urvalsaxiomet tillsammans med viss diskussion om detta.

Kapitel 2 går ut på att bevisa Banach-Tarskis paradox, med utgångspunkt från [TT]. Vi använder grundstrukturen i [TT] men förtydligar och omformulerar det som känns otydligt.

Kapitel 3 handlar om motsvarigheten av Banach-Tarskis paradox för den rationella enhetssfären, ett viktigt fall att undersöka eftersom det bara kräver en svagare variant av urvalsaxiomet, på engelska kallat *Axiom of Countable Choice*. Här används grundstrukturen från [KS] där vi förenklar och omformulerar för att göra det enklare att följa texten.

Hittills har vi bara talat om rotationer av enhetssfären, i det reella respektive det rationella fallet. I kapitel 4 undersöker vi mer generella situationer, då grupper verkar på godtyckliga mängder. Mer specifikt bevisar vi att så kallat godartade grupper inte kan ge upphov till någon motsvarighet av Banach-Tarskis paradox för någon mängd.

Författarnas ansvarsområden

Karl och Fredrik har fullt ansvar över Kapitel 3 *Fallet med den rationella enhetssfären* medan Frida och Jimmy har fullt ansvar över Kapitel 4 *Godartade grupper och paradoxala dekompositioner*.

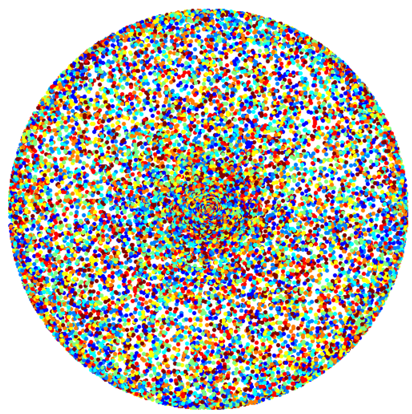
Resterande kapitel har samtliga gruppmedlemmar hjälpts åt att skriva. Dagbok och individuell tidslogg har förts, med detaljerad information om vad som har skrivits vid vilka tillfällen.

1 Introduktion och grundläggande begrepp

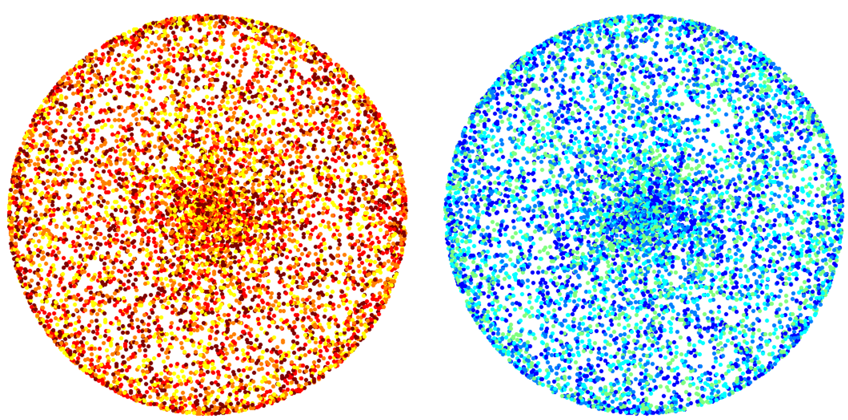
Enligt en välkänd paradox, först konstruerad av Stefan Banach och Alfred Tarski år 1924 och följaktigen kallad *Banach-Tarskis paradox*, kan enhetssfären i tre dimensioner delas upp i ett ändligt antal delar som sedan kan roteras och sammanfogas till två sfärer identiska med enhetssfären.

I vår härledning av detta resultat använder vi mängdlära och gruppteori, och beviset kräver urvalsaxiomet (eng. *Axiom of Choice*). Ur en geometrisk synvinkel kan resultatet uppfattas som en paradox eftersom det, om en fysisk motsvarighet av resultatet vore realiserbar, skulle motsäga en rad antaganden som görs inom tillämpad fysik och inte minst motsäga den personliga intuition man i allmänhet har när det gäller materia. Paradoxen visar därför att det är viktigt att distingera mellan vårt verkliga Universum och matematikens värld.

En annan viktig distinktion är den mellan generella mängder och sammanhängande mängder. När man läser vad paradoxen säger är det lätt att föreställa sig att man delar upp sfären i ett ändligt antal stora *stycken*, men så behöver inte vara fallet. När vi talar om delar av sfären så behöver punkterna i varje del inte ligga nära varandra. Vi har visualiserat detta i figurerna nedan, i vilka punkter med samma färg hör till samma del av sfären.



Punkterna som utgör en enhetssfär...



...kan användas för att skapa två enhetssfärer

För att förstå härledningen av Banach-Tarskis paradox krävs en del förkunskap. Vi börjar med att introducera grundläggande begrepp så som *mängd* och *grupp* kortfattat, för att sedan presentera några betydelsefulla egenskaper hos dessa och till sist en kort introduktion till Urvalsaxiomet.

1.1 Grundläggande teori

Ett viktigt begrepp för kommande delar i det här arbetet är en så kallad grupp. Vi definierar den enligt:

Definition 1.1 (Grupp)**.** En grupp består av en mängd G och en operation $\cdot$ som tillsammans uppfyller följande fyra egenskaper:

i) Slutenhet: $\forall g, h \in G$ så gäller $g \cdot h \in G$

ii) Associativitet: $\forall g, h, a \in G$ så gäller $(g \cdot h) \cdot a = g \cdot (h \cdot a)$

iii) Existens av identitet: $\exists e$, kallad identiteten, så att $e \cdot g = g = g \cdot e \quad \forall g \in G$

iv) Existens av invers: $\forall g \in G$ så finns ett element $g^{-1} \in G$ sådant att $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$. Elementet g^{-1} kallas invers till g.

Definition 1.2 (Fri grupp)**.** En grupp G med identitet $e \in G$ över en mängd S säges vara fri ifall varje icke-trivial, förenklad sammansättning utav element i S är skiljd ifrån e.

För att undvika omständig formalism så nöjer vi oss med att beskriva en *förenklad sammansättning* som ett uttryck vars faktorer aldrig står bredvid sin invers och i vilka identitselementet ej förekommer. Exempelvis är $w = ABA^{-1}AAB^{-1}$ inte en förenklad sammansättning då dess uttryck innehåller faktorer som står bredvid sin invers. Förenklas w genom att använda inversegenskapen hos grupper en gång fås uttrycket $w = ABAB^{-1}$ som är exempel på ett uttryck för en förenklad sammansättning.

Ett annat viktigt begrepp är den så kallade gruppverkan.

Definition 1.3 (Gruppverkan)**.** Låt G vara en grupp och X en mängd. Man säger då att G verkar på X, skrivs $G \circlearrowright X$, ifall det existerar en funktion $\phi : G \times X \to X : (g, x) \mapsto \phi(g, x)$ som uppfyller följande två egenskaper:

i) Kompabilitet: $\forall g, h \in G$ och $\forall x \in X$ så gäller $\phi(gh, x) = \phi\big(g, \phi(h, x)\big)$

ii) Identitet: $\forall x \in X$; $\phi(e, x) = x$ där e är identitetselementet i G.

Slutligen defineras nu paradoxal dekomposition, som är en viktig del för Banach-Tarskis paradox. En paradoxal dekomposition innebär att en mängd partitioneras upp i delmängder som genom användning av ett ändligt antal gruppverkningar av någon grupp, kan bilda två kopior av hela den ursprungliga mängden.

Definition 1.4 (Paradoxal dekomposition)**.** Låt G vara en grupp som verkar på en icke-tom mängd X och $\{Y_1, \ldots, Y_m, Z_1, \ldots, Z_n\}$ utgöra en partition av X. Vi säger då att X har en *paradoxal dekomposition* om det existerar element $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$ sådana att

$$X = \biguplus_{i=1}^{m} g_i Y_i = \biguplus_{j=1}^{n} h_j Z_j.$$

Banach-Tarskis paradox kan kortfattat beskrivas som existensen av en paradoxal dekomposition av *enhetssfären* i $\mathbb{R}^3$. Notera att $\biguplus$ används i stället för $\bigcup$ för att betona att mängderna är disjunkta.

Definition 1.5 (Enhetssfären)**.** Med *enhetssfären* S^{n-1} i $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ avses mängden av vektorer i $\mathbb{R}^n$ med avstånd 1 från origo. Formellt,

$$S^{n-1} := \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\big|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\big\}$$

Enhetssfären i $\mathbb{R}^2$ kallas ofta *enhetscirkeln*.

1.2 Urvalsaxiomet

För att bevisa Banach-Tarskis paradox använder vi urvalsaxiomet. Ett axiom är en grundsats som accepteras som sann. Urvalsaxiomet formulerades i början av 1900-talet och ansågs länge vara kontroversiellt. Urvalsaxiomet kan beskrivas geometriskt på följande vis: Antag att du har ett godtyckligt antal strumplådor med godtyckliga antal strumpor i varje, då säger urvalsaxiomet att du kan plocka en strumpa från varje låda och på så vis bilda en ny strumplåda. Det råder ingen tvekan om att det här är sant i fallet med ändligt många strumplådor innehållandes ändligt många strumpor vardera, men det finns en historisk kontrovers angående de oändliga och i synnerhet de ouppräkneliga fallen. Den formella definitionen ser ut så här:

Definition 1.6 (Urvalsaxiomet)**.** Låt $\mathcal{S}$ vara en godtycklig mängd av icke-tomma mängder s_i. Då existerar en funktion f på S sådan att $f(s_i) \in s_i$, formellt:

$$\exists f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S} \ ; \ \big(\forall s \in S \ (f(s) \in s)\big) \tag{1}$$

Det är alltså enligt urvalsaxiomet möjligt att från varje mängd $S_1, S_2, \ldots$ välja exakt ett element och sedan låta dessa utgöra en ny mängd.

2 Banach-Tarskis paradox

Rotationer kring origo i $\mathbb{R}^3$ är centralt i härledningen av Banach-Tarskis paradox. Eftersom varje rotation av en vektor $x \in \mathbb{R}^3$ ska ge upphov till en ny vektor $y \in \mathbb{R}^3$ sådan att $\|x\| = \|y\|$ så kan rotationerna representeras som vänstermultiplikation med en viss typ av kvadratiska matriser. Mängden av dessa matriser kallas $SO(3)$:

Definition 2.1. $\quad SO(3) := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^T A = I \text{ och } \det(A) = 1\}$

Påstående. $SO(3)$ med matrismultiplikation utgör en grupp. Läsaren bekräftar det här enkelt genom att kontrollera att samtliga gruppegenskaper är uppfyllda:

i) Slutenhet: $A, B \in SO(3) \Rightarrow AB \in SO(3)$

ii) Associativitet: $A, B, C \in SO(3) \Rightarrow A(BC) = (AB)C$

iii) Existens av identitet: $I \in SO(3)$

iv) Existens av invers: $A \in SO(3) \Rightarrow \exists A^{-1} \in SO(3)$

Anmärkning: Hädanefter betecknar vi med XY mängden av element xy sådana att $x \in X$, $y \in Y$.

Sats 2.3 är en diskret motsvarighet av Banach-Tarskis paradox. I beviset för satsen förutsätter vi existensen av två rotationer som generar en fri delgrupp utav $SO(3)$. I Sats 2.2 visar vi att matriserna A och B, se uttrycken i (2), representerar rotationer dugliga för detta ändamål. Efter satsen demonstreras ett exempel för att ytterligare betona tankesättet med matriserna.

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

inses enkelt vara inverterbara rotationsmatriser med

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Sats 2.2. *Varje ändlig, förenklad, icke-trivial sammansättning av A, B, A^{-1} och B^{-1} är skiljd ifrån identitetsmatrisen.*

Bevis. Antag att någon sådan sammansättning är lika med identitsmatrisen.

$$ABA^{-1}BAB^{-1}... = I$$

Detta är då, eftersom skalärer kommuterar med matriser, ekvivalent med

$$5A5B5A^{-1}5B5A5B^{-1}... = 5^n I$$

för ett naturligt tal n, som i själva verket är vad som kan betraktas som uttryckets längd.

Om vi nu räknar modulo 5 komponentvis så ger föregående ekvation

$$5A5B5A^{-1}5B5A5B^{-1}... = 0$$

vilket medför att någon av sammansättningarna i uttrycket måste vara nollavbildningen, där då, fortfarande räknat modulo 5, vi har

$$5A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 5B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

som, eftersom de nollskiljda raderna är linjärt beroende, är matriser av rang 1. Det återstår därför endast att visa att detta är en motsägelse, varför man observerar följande om kärnan *ker* för, och bildrummet *Im* av avbildningarna $5A, 5B, 5A^{-1}, 5B^{-1}$:

$$\begin{aligned} \ker(5A) &= \{\mathbf{v}\,;\,(5A)\mathbf{v} = 0\} \\ &= \operatorname{span}\{(1\,3\,0)^T, (0\,0\,1)^T\} \end{aligned} \qquad \ker(5A^{-1}) = \operatorname{span}\{(3\,1\,0)^T, (0\,0\,1)^T\}$$

$$\ker(5B) = \operatorname{span}\{(1\,0\,0)^T, (0\,1\,3)^T\} \qquad \ker(5B^{-1}) = \operatorname{span}\{(1\,0\,0)^T, (0\,3\,1)^T\}$$

samt

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}(5A) = \{\mathbf{v}\,;\,\exists\mathbf{x}\big((5A)\mathbf{x} = \mathbf{v}\big)\} \ni \quad (5A)(1\,0\,0)^T = (3,1,0)^T \\ &\Rightarrow \operatorname{Im}(5\mathrm{A}) = \operatorname{span}\{(3\,1\,0)^T\} \qquad \operatorname{Im}(5A^{-1}) = \operatorname{span}\{(3\;-1\,0)^T\} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}(5B) = \operatorname{span}\{(0\,3\,1)^T\} \qquad \operatorname{Im}(5B^{-1}) = \operatorname{span}\{(0\,3\;-1)^T\}$$

där *span* betecknar höljet för en avbildning. Man observerar nu

$$\begin{aligned} (3\,1\,0)^T, (0\,3\,1)^T, (0\,3\;-1)^T &\notin \ker(5A) \\ (3\;-1\,0)^T, (0\,3\,1)^T, (0\,3\;-1)^T &\notin \ker(5A^{-1}) \\ (3\,1\,0)^T, (3\;-1\,0)^T, (0\,3\,1)^T &\notin \ker(5B) \\ (3\,1\,0)^T, (3\;-1\,0)^T, (0\,3\;-1)^T &\notin \ker(5B^{-1}) \end{aligned}$$

vilket alltså betyder att varje avbildning X i uttrycket kommer att opereras ihop endast med avbildningar som inte ligger i $ker(X)$ vilket alltid resulterar i en avbildning som är nollskiljd. □

Exempel 1. Låt oss studera den icke-triviala sammansättningen

$$w = ABA^{-1}B$$

där $A, B \in SO(3)$. Vi ska nu visa att $w \neq I$, varför vi antar motsatsen, nämligen

$$\begin{aligned} ABA^{-1}B &= I \\ \Rightarrow 5A5B5A^{-1}5B &= 5^4 I \end{aligned}$$

som vid räkning modulo 5 komponentvis medför

$$5A5B5A^{-1}5B = 0$$

vilket i sin tur medför att någon av de sammansatta avbildningarna måste vara nollavbildningen. Från beviset för Sats 2.2 ovan så fås att bildrummet för $5B$, $\operatorname{Im}(5B)$, spänns av $(0\,3\,1)$, som inte ligger i kärnan för dess vänsteroperand $5A^{-1}$. Liknande argument kan sedan upprepas för de övriga avbildningarna, varför man får att detta är en motsägelse. Alltså drar man slutsatsen $w \neq I$.

Sats 2.3 (Diskret version av Banach-Tarskis paradox)**.** *Det existerar en uppräknerlig delgrupp G av $SO(3)$, och en partition[1] $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ av G sådan att för några $A, B \in SO(3)$*

$$G = G_1 \uplus AG_2 = G_3 \uplus BG_4$$

Bevis. Sats 2.2 ovan försäkrar oss om att det existerar två matriser $A, B \in SO(3)$ som är generatorer av en fri delgrupp G till $SO(3)$. Vi har då partitionen

$$G = \{I\} \uplus G(A) \uplus G(A^{-1}) \uplus G(B) \uplus G(B^{-1})$$

där $G(X)$ är mängden av alla element i G vars uttryck inleds med X. Observera att

$$G = G(X) \uplus XG(X^{-1}),$$

[1]Notationen $A \uplus B$ används för att betona att A och B är disjunkta; att $A \cap B = \varnothing$.

för $X \in \{A, B\}$. Härnäst behövs det tomma ordet I hanteras. Detta kan åstadkommas genom att låta

$$\begin{aligned} G_1 &:= G(A) \uplus \{I, A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}, ...\} \\ G_2 &:= G(A^{-1}) \backslash \{A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}, ...\} \\ G_3 &:= G(B) \\ G_4 &:= G(B^{-1}) \end{aligned}$$

där hanteringen av A^{-1}-potenserna är för att uppfylla kravet att mängderna ska vara disjunkta. det är möjligt att kontrollera att påståendena i satsen håller, och eftersom G genereras av en ändlig mängd $\{A, B\}$ så är G uppräknelig. $\square$

Notera att sats 2.3 inte kräver urvalsaxiomet, till skillnad från följande paradox i vilken vi går från den uppräknerliga rotationsgruppen G, till nästan hela enhetssfären S^2. För att bevisa nästkommande sats behöver vi följande definition:

Definition 2.4 (G-bana)**.** Låt G verka på en mängd X och definiera en relation $\sim$ på X genom

$$x \sim y \iff \exists g \in G : x = gy$$

Tolkningen av $\sim$ i vårt fall, då $X = S^2 \backslash C$, är att $x \sim y$ om och endast om vi från x kan ta oss till y via en rotation $g \in G$. Relationen $\sim$ är en ekvivalensrelation:

i) Reflexivitet: Låt $x \in X$. Då är $x \sim x$ ty $x = Ix$.

ii) Symmetri: Låt $x, y \in X$ och antag att $x \sim y$. Alltså är $x = gy$ för något $g \in G$. Eftersom G är en grupp så ligger $g^{-1} \in G$ och det följer att $y = g^{-1}x$, dvs $y \sim x$.

iii) Transitivitet: Låt $x, y, z \in X$ och antag att $x \sim y$ och $y \sim z$. Alltså existerar $g, h \in G$ sådana att $x = gy$ och $y = hz$, därmed är $x = (gh)z$ och vi erhåller att $x \sim z$.

Ekvivalensrelationen $\sim$ ger upphov till ekvivalensklasser

$$Gx = \{gx \in X \mid g \in G\} = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

som kallas *G-banor* och mängden av dessa utgör en partition av X. Notera att

$$y \in Gx \iff Gy = Gx.$$

Sats 2.5 (Hausdorffs paradox)**.** *Det existerar en uppräknerlig delmängd C av sfären S^2 och en dekomposition*

$$S^2 \backslash C = \Omega_1 \uplus \Omega_2 \uplus \Omega_3 \uplus \Omega_4$$

sådan att

$$S^2 \backslash C = \Omega_1 \uplus A\Omega_2 = \Omega_3 \uplus B\Omega_4$$

for några rotationsmatriser $A, B \in SO(3)$.

Bevis. Låt

$$A, B \in SO(3), \qquad \text{delgruppen } G \text{ av } SO(3), \qquad G_1, G_2, G_3, G_4 \subset G$$

vara som i sats 2.3. För varje icketrivial rotation $g \in G$ fixeras precis två punkter på sfären S^2, nämligen de två punkter där sfären skär rotationsaxeln. Låt C vara unionen av sådana punkter:

$$C = \bigcup_{g \in G \backslash \{I\}} \{s \in S^2 \mid gs = s\}$$

Mängden C är uppräknerlig, eftersom den är en uppräknerlig union av mängder som innehåller två element vardera. Notera att definitionen av C implicerar att komplementet $S^2 \backslash C$ har följande egenskap: för varje $g \in G$ och $s \in S^2 \backslash C$ gäller

$$gs = s \Rightarrow g = I \tag{3}$$

Alltså existerar ingen icketrivial rotation $g \in G$ som tar en punkt $s \in S^2 \backslash C$ till sig själv, man säger att G *verkar fritt* på $S^2 \backslash C$. Som följd gäller för varje $s \in S^2 \backslash C$ att

$$i \neq j \Rightarrow G_i s \cap G_j s = \varnothing \tag{4}$$

ty annars skulle det existera $g \in G_i$ och $h \in G_j$ sådana att $gs = hs$. Denna likhet är ekvivalent med att $(h^{-1}g)s = s$, vilket enligt (3) implicerar att $h^{-1}g = I$. Det följer att $g = h$, vilket är en motsägelse eftersom G_i och G_j är disjunkta.

Urvalsaxiomet säger att vi kan bilda en mängd X genom att välja en representant x från varje G-bana Gx. Eftersom mängden av G-banor utgör en partition av $S^2 \backslash C$,

$$S^2 \backslash C = \biguplus_{x \in X} Gx \ ,$$

och eftersom sats 2.3 ger oss att $G = \uplus_{i=1}^4 G_i$, så får vi att

$$\begin{aligned} S^2 \backslash C &= \biguplus_{x \in X} Gx = \\ &= \biguplus_{x \in X} (G_1 \uplus G_2 \uplus G_3 \uplus G_4)\, x = \\ &= \biguplus_{x \in X} (G_1 x \uplus G_2 x \uplus G_3 x \uplus G_4 x) = \qquad (5) \\ &= \left(\biguplus_{x \in X} G_1 x \right) \uplus \left(\biguplus_{x \in X} G_2 x \right) \uplus \left(\biguplus_{x \in X} G_3 x \right) \uplus \left(\biguplus_{x \in X} G_4 x \right) \end{aligned}$$

Notera att inte alla unioner i (5) hade varit disjunkta unioner om vi inte hade plockat bort C från S^2, enligt argumentet kring (4). Definiera nu

$$\Omega_i := \biguplus_{x \in X} G_i x \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Då är

$$S^2 \backslash C = \Omega_1 \uplus \Omega_2 \uplus \Omega_3 \uplus \Omega_4$$

och

$$\begin{aligned} S^2 \backslash C = \biguplus_{x \in X} Gx &= \biguplus_{x \in X} (G_1 \uplus AG_2)\, x = \Omega_1 \uplus A\Omega_2 \\ &= \biguplus_{x \in X} (G_3 \uplus BG_4)\, x = \Omega_3 \uplus B\Omega_4 \end{aligned}$$

enligt sats 2.3. □

Vi är nu nästan framme vid vårt mål. Det återstår att hantera mängden C, vilket vi gör med följande lemma:

Lemma 2.6. *Låt C vara en uppräknerlig delmängd av sfären S^2. Då existerar en dekomposition*

$$S^2 = \Sigma_1 \uplus \Sigma_2$$

sådan att

$$S^2 \backslash C = \Sigma_1 \uplus R\Sigma_2$$

för någon rotationsmatris $R \in SO(3)$.

Vårt bevis av lemmat kräver kunskap om flera begrepp som vi inte förutsätter att läsaren känner till, och begreppen används inte tillräckligt ofta i resten av arbetet för att motivera explicita definitioner av begreppen.

Bevis. Låt $K := \mathrm{Stab}_G(e_3) = \{g \in SO(3) : ge_3 = e_3\}$ vara mängden av alla rotationer $g \in SO(3)$ som fixerar enhetssfärens nordpol $e_3 = (0,0,1)$. Man ser definitionsmässigt att K är en delgrupp av $SO(3)$ och rättframma räkningar visar att man kan skriva K som

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : R_0 \in SO(2) \right\}$$

Man kan alltså säga att K består precis av de horisontella rotationerna av sfären.

Avbildningen $\pi : SO(3)/K \to S^2$ definierad av

$$\pi(RK) = Re_1 \ , \qquad R \in SO(3)/K$$

är väldefinierad, kontinuerlig, inverterbar och har kontinuerlig invers. Därmed gäller att om $C_0 \subset S^2$ är en uppräknelig mängd, så kan vi identifiera den med mängden av sidoklasser

$$C = C_0 K \subset SO(3)$$

Vi kommer behöva följande klassiska teorem av Baire:

Sats 2.7 (Baires kategorisats)**.** *Antag att X är ett kompakt rum och att $K_i \subset X$ är en uppräknelig mängd av slutna delmängder av X som inte innehåller öppna delmängder av X. Då innehåller unionen $L = \cup_i K_i$ inte några öppna mängder i X. Ekvivalent (upp till komplement): Om U_i är en samling av täta öppna mängder i X, så är deras snitt en tät mängd (i synnerhet är den icke-tom).*

Det är inte svårt att kontrollera att K inte innehåller några öppna delmängder av $SO(3)$, och inte heller någon mängd på formen

$$KxK \subset SO(3) \qquad \text{för } x \in SO(3)$$

Därmed innehåller mängden

$$CC^{-1} = \{xy^{-1} : x, y \in C\} = \bigcup_{x_0, y_0 \in C_0} Kx_0y_0^{-1}K \subset SO(3)$$

inte någon öppen mängd, eftersom den är en uppräknelig union av mängder som saknar öppna delmängder. Ekvivalent är komplementet $(CC^{-1})^{\complement}$ ett uppräkneligt snitt av täta öppna mängder, och därmed en tät mängd enligt Baire.

Avbildningen $\phi_k : SO(3) \to SO(3), R \mapsto R^k$ kontinuerlig för varje $k \geqslant 1$, så inversa bilden $\phi_k^{-1}((CC^{-1})^{\complement})$ är återigen ett ändligt snitt av täta, öppna mängder för varje $k \geqslant 1$. Notera att mängderna

$$E_k := \left\{R \in SO(3) : C \cap R^k(C) = \varnothing\right\} = \phi_k^{-1}((CC^{-1})^{\complement}),$$

är täta och därmed att mängden

$$E = \bigcap_{k \geqslant 1} E_k = \left\{R \in SO(3) : R^k(C) \cap C = \varnothing \ , \forall k \geqslant 1\right\}$$

är tät, eftersom den är ett uppräkneligt snitt av uppräkneliga snitt av öppna täta mängder. I synnerhet är E icke-tom och varje $R \in E$ har egenskapen att

$$R^i(C) \cap R^j(C) = \varnothing \qquad \forall i, j : i \neq j$$

Låt nu $R \in E$ och definiera

$$\Sigma_2 := C \cup RC \cup R^2C \cup \ldots$$
$$\Sigma_1 := S^2 \backslash \Sigma_2$$

Då är

$$S^2 \backslash C = \Sigma_1 \uplus R\Sigma_2$$

vilket skulle visas. □

Enligt lemma 2.6 kan vi nu dela upp S^2 i två delmängder enligt $S^2 = \Sigma_1 \uplus \Sigma_2$ för att sedan med Hausdorffs paradox, sats 2.5, delas upp dessa i ytterligare respektive fyra delar. Med hjälp av rotationsmatriser kan delarna sedan representera hela Σ_1 respektive Σ_2. Det vi nu kommit fram till kan vi samla upp i följande korollarium som helt följer från lemma 2.6 och Hausdorffs paradox, sats 2.5:

Korollarium 2.8 (Banach-Tarskis paradox i åtta delar)**.** *Det existerar en uppdelning av sfären S^2 i åtta delar enligt $S^2 = \Gamma_1 \uplus \ldots \uplus \Gamma_8$ samt rotationer enligt $R_1, \ldots, R_8$ sådana att*

$$S^2 = \biguplus_{i=1}^{4} R_i \Gamma_i = \biguplus_{i=5}^{8} R_i \Gamma_i.$$

Vi har nu visat att enhetssfären kan delas upp i åtta delar och sedan med hjälp av rotationsmatriser sammanfogas till två enhetssfärer. Vi är nu redo att gå vidare till den rationella enhetssfären.

3 Fallet med den rationella enhetssfären

Syftet med följande kapitel är att visa att det är möjligt att göra en uppdelning av den rationella enhetssfären, motsvarande resultatet i Banach-Tarskis paradox. För detta ändamål kommer vi som tidigare att konstruera en fri delgrupp av $SO_3(\mathbb{Q})$ som verkar på $S^2 \cap \mathbb{Q}^3$ utan fixpunkter. Vi kan efter en sådan konstruktion enkelt upprepa samma resonemang som i föregående kapitel, med den väsentliga förenklingen att mängden C av fixpunkter är tom.

Eftersom mängden i fråga nu är uppräknerlig så är den hittills använda versionen av urvalsaxiomet, enligt Definition (1.6), inte nödvändig. Det krävs däremot en svagare motsvarighet av urvalsaxiomet, som endast behöver uttala sig om uppräknerliga mängder, till skillnad från godtyckliga mängder.

För vårt ändamål visar det sig vara lämpligt att använda så kallade kvaternioner för att representera rotationer.

3.1 Introduktion av kvaternioner

Definition 3.1 (Mängden $\mathbb{H}$ av kvaternioner)**.** $\mathbb{H}$ är ett 4-dimensionellt vektorrum över de reella talen. Med basen $(1, i, j, k)$ är varje kvaternion $q \in \mathbb{H}$ unikt representerad.

$$q = a + bi + cj + dk.$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Operationer

$\mathbb{H}$ har tre naturliga operationer; addition, skalärmultiplikation och Hamiltonprodukt.

Summan av två element $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ definieras genom komponentvis addition.

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

Skalärmultiplikation av $h \in \mathbb{R}$ med $q \in \mathbb{H}$ är definierat genom komponentvis multiplikation.

$$hq = ah + bhi + chj + dhk$$

Inför definitionen av Hamiltonprodukt, alltså multiplikation av två kvaternioner, definieras först multiplikation av baselementen. Sedan fås Hamiltonprodukten med hjälp av distributionslagen.

Identiteterna

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

ger följande cayley-tabell.

Tabell 1: Produkterna

x	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Utifrån detta, inspirerade av distributionslagen, definierar vi Hamiltonprodukten

$$\begin{aligned} q_1 * q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) * (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k \\ &+ b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 + b_1 c_2 ij + b_1 d_2 ik \\ &+ c_1 a_2 j + c_1 b_2 ji + c_1 c_2 j^2 + c_1 d_2 jk \\ &+ d_1 a_2 k + d_1 b_2 ki + d_1 c_2 kj + d_1 d_2 k^2 \end{aligned}$$

Från identiteterna ovan fås sedan att

$$\begin{aligned} q_1 * q_2 = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \\ + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

Skalär- och vektordelar

Kvaternioner kan liksåväl representeras som par

$$q = (c, \overrightarrow{s}) \in \mathbb{H} \qquad c \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{s} \in \mathbb{R}^3,$$

där då i föregående notation $c = a_1, \overrightarrow{s} = bi + cj + dk$. Formeln för Hamiltonprodukt blir då

$$(c_1, \overrightarrow{s}_1) * (c_2, \overrightarrow{s}_2) = (c_1c_2 - \overrightarrow{s}_1 \cdot \overrightarrow{s}_2, c_1\overrightarrow{s}_2 + c_2\overrightarrow{s}_1 + \overrightarrow{s}_1 \times \overrightarrow{s}_2)$$

där "$\cdot$" är skalärprodukt och "$\times$" är kryssprodukt för vektorer. Denna är hädanefter den primära notationen för kvaternioner.

3.2 Rotationer och ekvivalensrelationer

Inför huvudresultatet visar vi inledningsvis hur rotationer kan representeras med hjälp av kvaternioner.

Då $c \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{s} \in \mathbb{R}^3$ och $c^2 + |\overrightarrow{s}|^2 = 1$ representerar paret av kvaternioner $\pm(c, \overrightarrow{s})$ en unik rotation γ på $\mathbb{S}^2$ som motsvarar en moturs rotation på $\mathbb{S}$ kring vektorn $\overrightarrow{s}$ där vinkeln θ fås från $c = |\sin(\theta/2|/\tan(\theta/2)$, alltså

$$\gamma(\overrightarrow{r}) = 2(\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{r})\overrightarrow{s} + (c^2 - |\overrightarrow{s}|^2)\overrightarrow{r} + 2c\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{r}, \quad \text{för} \overrightarrow{r} \in \mathbb{S}^2.$$

Observera att γ är identitetsavbildningen om och endast om $\overrightarrow{s} = 0$. Det par av kvaternioner som representerar rotationen γ betecknar vi $\pm(c_\gamma, \overrightarrow{s}_\gamma)$.

Detta kapitels huvudresultat, Sats 3.4, är att μ och ν nedan (6) är generatorer av en fri delgrupp av $SO_3(\mathbb{Q})$ som verkar på $S^2 \cap \mathbb{Q}$ utan icke-triviala rationella fixpunkter. Med andra ord, för varje icke-tom, förenklad sammansättning w av $\mu^{-1}, \nu^{-1}, \mu, \nu$ så kommer rotationen $w \in SO_3(\mathbb{Q})$ inte vara identitetsrotationen och rotationsaxeln för w kommer att skära sfären $\mathbb{S}^2$ i irrationella punkter.

$$\mu = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } \nu = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{6}$$

kan inses vara representerade av kvaternionerna

$$\pm(c_{\mu^\epsilon}, \overrightarrow{s}_{\mu^\epsilon}) = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}(3, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}) \text{ och } \pm(c_{\nu^\delta}, \overrightarrow{s}_{\nu^\delta}) = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}(3, \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 2\delta \end{pmatrix}),$$

där $\epsilon, \delta \in \{-1, 1\}$.

För att förenkla räkningarna nedan inför vi ekvivalensrelationen $\equiv$ på $\mathbb{H}$. Denna definieras helt enkelt som kongruens modulo 7 komponentvis, alltså

$$(C, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}) \equiv (C', \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix})$$

om och endast om $C \underset{7}{\equiv} C'$, $X \underset{7}{\equiv} X'$, $Y \underset{7}{\equiv} Y'$ och $Z \underset{7}{\equiv} Z'$. Vi definierar även $\asymp$ som

$$\big(C, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\big) \asymp \big(C', \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}\big)$$

ifall det finns ett $t \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ sådant att

$$\big(C, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\big) \equiv t\big(C', \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}\big).$$

Observera att $\asymp$ ej utgör en ekvivalensrelation på $\mathbb{H}$.

3.3 Existens av fria generatorer

I följande lemma klassificeras samtliga element i den fria grupp som genereras utav μ och ν, och det visar sig att de kan alla skrivas på en och samma explicita och normaliserade form, nämligen specifika typer av kvaternioner.

Lemma 3.2. *Låt w vara en förenklad, icke-trivial sammansättning utav $\mu, \nu, \mu^{-1}, \nu^{-1}$. Då kan w representeras som en kvaternion på följande vis.*

För $\epsilon, \delta, \epsilon_m, \delta_m, ..., \epsilon_0, \delta_0 \in \{-1, 1\}$, $k, l, k_m, l_m, ..., k_0, l_0 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ och $m \in \mathbb{N}$ har vi

(1) $w = \mu^{\epsilon k} \Rightarrow \big(C_w, \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix}\big) \asymp \big(3, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}\big)$

(2) $w = \nu^{\delta k} \Rightarrow \big(C_w, \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix}\big) \asymp \big(3, \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 2\delta \end{pmatrix}\big)$

(3) $w = \mu^{\epsilon_m k_m} \nu^{\delta_m l_m} ... \mu^{\epsilon_0 k_0} \nu^{\delta_0 l_0}$

$$\Rightarrow \big(C_w, \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix}\big) \asymp \big(2 - \epsilon_m \delta_0, \begin{pmatrix} -\epsilon_m + 2\epsilon_m \delta_0 \\ 3\epsilon_m + 3\delta_0 + 3\epsilon_m \delta_0 \\ -\delta_0 + 2\epsilon_m \delta_0 \end{pmatrix}\big)$$

Bevis. ***(1)*** framgår av följande räkning

$$\begin{aligned} \big(3, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}\big) * \big(3, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}\big) &= \big(9 - 5\epsilon^2, 6 \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} + 0\big) \\ &= -\big(3, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}\big) + 7\big(1, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}\big) \\ &\asymp \big(3, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}\big) \end{aligned}$$

(2) visas analogt.

Uttryck av typen $\mu^{\epsilon k}\nu^{\delta k}$ reduceras på följande vis

$$\begin{aligned}
\big(3, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}\big) * \big(3, \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ 2\delta \end{pmatrix}\big) &= \big(9 - \epsilon\delta, 3\begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon + \delta \\ 2\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\epsilon\delta \\ -4\epsilon\delta \\ 2\epsilon\delta \end{pmatrix}\big) \\
&= \big(2 - \epsilon\delta, \begin{pmatrix} -\epsilon + 2\epsilon\delta \\ 3\epsilon + 3\delta + 3\epsilon\delta \\ -\delta + 2\epsilon\delta \end{pmatrix}\big) + 7\big(1, \begin{pmatrix} \epsilon \\ -\epsilon\delta \\ \delta \end{pmatrix}\big) \\
&\asymp \big(2 - \epsilon\delta, \begin{pmatrix} -\epsilon + 2\epsilon\delta \\ 3\epsilon + 3\delta + 3\epsilon\delta \\ -\delta + 2\epsilon\delta \end{pmatrix}\big)
\end{aligned} \tag{7}$$

I syfte att även visa ***(3)*** görs följande
Påstående: Sammansättningar av uttryck på formen (7) reduceras på följande vis:

$$\begin{aligned}
\big(2 - \epsilon'\delta', \begin{pmatrix} -\epsilon' + 2\epsilon'\delta' \\ 3\epsilon' + 3\delta' + 3\epsilon'\delta' \\ -\delta' + 2\epsilon'\delta' \end{pmatrix}\big) &* \big(2 - \epsilon\delta, \begin{pmatrix} -\epsilon + 2\epsilon\delta \\ 3\epsilon + 3\delta + 3\epsilon\delta \\ -\delta + 2\epsilon\delta \end{pmatrix}\big) \\
&\asymp \big(2 - \epsilon'\delta, \begin{pmatrix} -\epsilon' + 2\epsilon'\delta \\ 3\epsilon' + 3\delta + 3\epsilon'\delta \\ -\delta + 2\epsilon'\delta \end{pmatrix}\big)
\end{aligned}$$

där $\epsilon, \delta, \epsilon', \delta' \in \{-1, 1\}$. Härledningen av påståendet blir väsentligt simplare ifall den görs i basen $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ där

$$\mathbf{i} = (-1, 3, 0)^t, \quad \mathbf{j} = (0, 3, -1)^t, \quad \mathbf{k} = (2, 3, 2)^t$$

I förberande syfte för härledningen görs följande observationer om basen.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 10 \equiv -4, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 10 \equiv -4, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 17 \equiv 3 \\
\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 9 \equiv 2, & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 7 \equiv 0, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 7 \equiv 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = (-3, -1, -3)^t &= 2\mathbf{k} + (-7, -7, -7)^t \\
\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{i} = (6, 2, -9)^t &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (7, -7, -7)^t \\
\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = (9, -2, -6)^t &= -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + (7, 7, -7)^t
\end{aligned} \tag{8}$$

För att visa påståendet behövs alltså att räkna ut

$$\big(2 - \epsilon'\delta', \begin{pmatrix} -\epsilon' + 2\epsilon'\delta' \\ 3\epsilon' + 3\delta' + 3\epsilon'\delta' \\ -\delta' + 2\epsilon'\delta' \end{pmatrix}\big) * \big(2 - \epsilon\delta, \begin{pmatrix} -\epsilon + 2\epsilon\delta \\ 3\epsilon + 3\delta + 3\epsilon\delta \\ -\delta + 2\epsilon\delta \end{pmatrix}\big)$$

som med hjälp av $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ kan skrivas

$$= (2 - \epsilon'\delta', \epsilon'\mathbf{i} + \delta'\mathbf{j} + \epsilon'\delta'\mathbf{k}) * (2 - \epsilon\delta, \epsilon\mathbf{i} + \delta\mathbf{j} + \epsilon\delta\mathbf{k})$$

Efter utnyttjande av definitionen för Hamiltonprodukten $*$ och utförande av okomplicerade men omständiga räkningar (som förenklas väsentligt av räknereglerna (8)) förenklas till

$$\equiv 2(1 + \epsilon'\epsilon + \delta'\epsilon + \delta'\delta - \epsilon'\delta'\epsilon\delta)\big(2 - \epsilon'\delta, \begin{pmatrix} -\epsilon' + 2\epsilon'\delta \\ 3\epsilon' + 3\delta + 3\epsilon'\delta \\ -\delta + 2\epsilon'\delta \end{pmatrix}\big)$$

som slutligen, enligt definition av $\asymp$ ger

$$\asymp \big(2 - \epsilon'\delta, \begin{pmatrix} -\epsilon' + 2\epsilon'\delta \\ 3\epsilon' + 3\delta + 3\epsilon'\delta \\ -\delta + 2\epsilon'\delta \end{pmatrix}\big)$$

Eftersom ovan demonstrerade reduktion 'sparar' endast potenstecknet ϵ' hos vänster operand och δ hos höger så kan, eftersom uttrycket för w är ändligt, w efter ändligt många reduktioner skrivas på formen i tesen. $\square$

Lemma 3.3. *Låt w vara som i Lemma 3.2. Då är $X_w^2 + Y_w^2 + Z_w^2 \equiv -2, -1$ eller 3.*

Bevis. I fallet att $w = \mu^{\epsilon k}$ så följer av Lemma 3.2 att det finns $t \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ sådant att

$$\left(C_w, \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix}\right) \equiv t\left(3, \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

och därmed

$$X_w^2 + Y_w^2 + Z_w^2 \equiv t^2((2\epsilon)^2 + \epsilon^2 + 0^2) = 5t^2 = 5, 20 \text{ eller } 45 \equiv -2, -1 \text{ eller } 3.$$

Fallet $w = \nu^{\delta l}$ visas analogt.

Från föregående lemma har vi att om $w = \mu^{\epsilon_m k_m} \nu^{\delta_m l_m} ... \mu^{\epsilon_0 k_0} \nu^{\delta_0 l_0}$ så finns $t \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ sådant att

$$\left(C_w, \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix}\right) \equiv t\left(2 - \epsilon_m \delta_0, \begin{pmatrix} -\epsilon_m + 2\epsilon_m \delta_0 \\ 3\epsilon_m + 3\delta_0 + 3\epsilon_m \delta_0 \\ -\delta_0 + 2\epsilon_m \delta_0 \end{pmatrix}\right)$$

och därmed har vi

$$\begin{aligned} X_w^2 + Y_w^2 + Z_w^2 &\underset{7}{\equiv} t^2((-\epsilon_m + 2\epsilon_m\delta_0)^2 + (3\epsilon_m + 3\delta_0 + 3\epsilon_m\delta_0)^2 + (-\delta_0 + 2\epsilon_m\delta_0)^2) \\ &= t^2((5 - 4\delta_0) + (27 + 18\epsilon_m + 18\delta_0 + 18\epsilon_m\delta_0) + (5 - 4\epsilon_m)) \\ &= t^2(37 + 14\epsilon_m + 14\delta_0 + 18\epsilon_m\delta_0) \equiv t^2(2 - 3\epsilon_m\delta_0) \end{aligned}$$

där $\epsilon_m \delta_0 = \pm 1$, varav vi får

$$= -t^2 \text{ eller } 5t^2 = -1, -4, -9, 5, 20, 45 \underset{7}{\equiv} -2, -1 \text{ eller } 3.$$

□

Vi är nu redo för vårt huvudresultat

Sats 3.4. *μ och ν är fria generatorer av en grupp som verkar på $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ utan icke-triviala fixpunkter.*

Bevis. Om en icke-trivial rotation w är fri från fixpunkter på $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ så är likaså rotationerna $\mu^{-1} w \mu$, $\mu w \mu^{-1}$, $\nu^{-1} w \nu$, $\nu w \nu^{-1}$ fria från fixpunkter på $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$. Det är alltså tillräckligt att visa två saker. Det första är att $\vec{s}_w$ är skiljd från nollvektorn (annars är w identitetsrotationen). Det andra är att $\frac{\mathbf{s}_w}{|\mathbf{s}_w|} \notin \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{Q}^3$ för något icke-tomt, förenklat uttryck, w, på formen $\mu^{\pm 1} ... \nu^{\pm 1}$, eller en potens utav μ eller ν (alltså att rotationsaxeln ej skär enhetssfären i en rationell punkt). Det som skall visas är alltså

$$\frac{\mathbf{s}_w}{|\mathbf{s}_w|} = \frac{1}{\sqrt{X_w^2 + Y_w^2 + Z_w^2}} \begin{pmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{pmatrix} \notin \mathbb{Q}^3 \tag{9}$$

Från Lemma 3.3 är det känt att för w på formen ovan gäller att $|\mathbf{s}_w|^2 = X_w^2 + Y_w^2 + Z_w^2 \equiv -2, -1$ eller 3. Men, för heltal har vi att, räknat modulo 7

$$0^2 \equiv 0 \quad 1^2 = 6^2 \equiv 1 \quad 2^2 = 5^2 \equiv -3 \quad 3^2 = 4^2 \equiv 2$$

alltså att $a^2 \underset{7}{\equiv} -3, 0, 1$ eller 2 för alla $a \in \mathbb{Z}$. Man inser därmed att $|\mathbf{s}_w|^2$ ej är en heltalskvadrat. Ifall ett heltal ej är en heltalskvadrat är det ej heller en kvadrat av ett rationellt tal, alltså

$$\sqrt{X_w^2 + Y_w^2 + Z_w^2} \notin \mathbb{Q}^3$$

vilket bekräftar (9). □

4 Godartade grupper och paradoxala dekompositioner

Vi har hittills givit två exempel på paradoxala dekompositioner; Banach-Tarskis paradox för reella enhetssfären och dess rationella motsvarighet. Hur vanlig är existensen av paradoxala dekompositioner? Finns det något kriterium som, givet någon grupp G och någon mängd X, garanterar att gruppverkan av G på X inte kan ge upphov till någon paradoxal dekomposition av X?

Vi kommer i det här kapitlet diskutera godartade grupper (eng. *ameanable groups*). Dessa grupper behandlas oftast i samband med topologi men eftersom det här arbetet ej förutsätter kunskaper inom den grenen av matematik så kommer grupperna presenteras något förenklat. För att kunna presentera godartade grupper krävs först följande definition:

Definition 4.1 (Mängden av begränsade funktioner)**.** Låt X vara en icke-tom mängd. Då defineras $\ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X)$ som alla begränsade funktioner på X enligt

$$\ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X) = \left\{ \phi : X \to \mathbb{R} : \sup_{x \in X} |\phi(x)| < +\infty \right\}$$

Vi kan nu formellt definiera en godarad grupp enligt:

Definition 4.2 (Godartad grupp)**.** Låt G vara en diskret[2] grupp som verkar på en mängd X. Gruppverkan av G på X kallas *godartad* (eng. *amenable*) om det existerar en linjär funktion $\lambda : \ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$ sådan att λ är

i) Positiv: $\phi \geqslant 0$ implicerar att $\lambda(\phi) \geqslant 0$, för varje $\phi \in \ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X)$.

ii) Normaliserad: $\lambda(1_X) = 1$, där $1_X \in \ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X)$ betecknar indikatorfunktionen definierad enligt
$$1_X(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in X \\ 0\,, & x \notin X. \end{cases}$$

iii) G-invariant: $\lambda(g \cdot \phi) = \lambda(\phi)$ för varje funktion $\phi \in \ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X)$ och varje $g \in G$. Observera att $(g \cdot \phi)(x)$ innebär $\phi(g^{-1} \cdot x)$.

Vi säger att gruppen G är godartad om gruppverkan av G på sig själv via vänstertranslation är godartad. Linjära funktioner $\lambda : \ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$ som följer *i)-iii)* kallas för *G-invarianta medel.*

Det visar sig att godartade grupper har den eftertraktade egenskapen att de inte kan ge upphov till någon paradoxal dekomposition av någon mängd X över huvud taget!

Sats 4.3. *Låt G vara en grupp som verkar på en icke-tom mängd X. Om G är godartad så ger gruppverkan av G på X inte upphov till någon paradoxal dekomposition av X.*

Innan vi kan bevisa sats 4.3 krävs ytterligare kunskaper om de godartade grupperna. Därför presenteras nu följande två lemman där vi låter *G-space* beteckna mängder X utrustade med en gruppverkan av G.

Lemma 4.4. *Låt X och Y vara G-spaces och antag att $p : X \to Y$ är en surjektiv avbildning med egenskapen att*
$$p(g \cdot x) = g \cdot p(x)$$
för varje $g \in G$ och varje $x \in X$. Då gäller att om X är godartad, så är Y godartad.

Bevis. Per antagandet att X är godartad existerar ett G-invariant medel $\lambda : \ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$. Vi vill därför i detta bevis konstruera ett G-invariant medel $\mu : \ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(Y) \to \mathbb{R}$, genom att identifera $\ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(Y)$ med en delmängd av $\ell^{\infty}_{\mathbb{R}}(X)$ samt utnyttja egenskaper hos λ och p för att visa att μ faktiskt är positiv, normaliserad och G-invariant, och därmed att Y är godartad.

[2] En grupp med den diskreta topologin. Läsare som ej är bekanta med detta begrepp kan lugnt läsa vidare, att G är diskret utnyttjas endast bakom kulisserna.

Eftersom $p : X \to Y$ är surjektiv kan godtycklig funktion $\phi_Y \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(Y)$ ses som en funktion $\phi_X \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ via det kommutativa diagrammet

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "\phi_Y"] & \\ X \arrow[ur, two heads, "p"] \arrow[rr, dashed, "\phi_X"] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Vi definierar $\mu : \ell^\infty_{\mathbb{R}}(Y) \to \mathbb{R}$ genom $\mu(\phi_Y) := \lambda(\phi_Y \circ p) = \lambda(\phi_X)$. Vi är klara om vi kan visa att μ är positiv, normaliserad och G-invariant:

Positiv:

Notera att $1_X = 1_Y \circ p$, ty

$$1_Y \circ p = 1_Y(p(x)) = \begin{cases} 1\,, & p(x) \in Y\,, \\ 0\,, & p(x) \notin Y \end{cases}$$

och $p(x) \in Y$ om och endast om $x \in X$. Alltså är $1_Y \circ p = 1$ precis då $x \in X$ och $= 0$ annars, vilket är definitionen av 1_X. Vi får därmed

$$\mu(1_Y) := \lambda(1_Y \circ p) = \lambda(1_X) = 1.$$

Normaliserad:

Låt $\phi_Y \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(Y)$ och antag att $\phi_Y \geqslant 0$. Då är $\phi_X := \phi_Y \circ p \geqslant 0$, så

$$\mu(\phi_Y) = \lambda(\phi_Y \circ p) = \lambda(\phi_X) \geqslant 0.$$

***G*-invariant:**

Låt $g \in G$, $y \in Y$ och låt $x \in X$ vara sådant att $y = p(x)$. Då gäller för godtyckligt $\phi_Y \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(Y)$ att

$$\mu(g \cdot \phi_Y) := \mu(\phi_Y(g^{-1} \cdot y)) = \mu(\phi_Y(g^{-1} \cdot p(x))) = \lambda(\phi_Y(p(g^{-1} \cdot x))) =$$

$$= \lambda((\phi_Y \circ p)(g^{-1} \cdot x)) = \lambda(\phi_X(g^{-1} \cdot x)) = \lambda(g \cdot \phi_X) = \lambda(\phi_X) = \mu(\phi_Y).$$

Alltså är $\mu(g \cdot \phi_Y) = \mu(\phi_Y)$, så μ är G-invariant.

□

Lemma 4.5. *Om G är godartad, så är varje G-space Y godartat.*

Bevis. Det räcker att betrakta fallet då det för varje $x, y \in Y$ existerar $g \in G$ sådant att $g \cdot x = y$. Om vi fixerar $x \in Y$ så följer via antagandet och definitionen av gruppverkan att

$$Gx := \{g \cdot x \mid g \in G\} = Y$$

Funktionen $p : G \to Gx = Y\ ,\ p(g) = g \cdot x$ är surjektiv och har egenskapen att

$$h \cdot p(g) = h \cdot (g \cdot x) = (h \cdot g) \cdot x = p(h \cdot g)$$

för varje $g, h \in G$. Lemmat följer nu från lemma 4.4 med $G = X$. □

Vi är nu redo att bevisa sats 4.3, som säger att om en godartad grupp G verkar på en icke-tom mängd X så saknas möjligheten att skapa en paradoxal dekomposition av mängden X med hjälp av gruppverkan.

Bevis av sats 4.3. Antag via motsägelse att gruppverkan av G på X ger upphov till en paradoxal dekomposition av X, det vill säga antag att det existerar en partition

$$X = \left(\biguplus_{i=1}^{m} Y_i \right) \uplus \left(\biguplus_{j=1}^{n} Z_j \right) \tag{10}$$

samt element $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$, sådana att

$$X = \biguplus_{i=1}^{m} g_i Y_i = \biguplus_{j=1}^{n} h_j Z_j \tag{11}$$

Eftersom G är godartad så är X godartad, enligt lemma 4.5, varför det existerar ett G-invariant medel $\lambda : \ell^\infty_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$. Vårt mål är att visa att detta implicerar att $1 = 2$, vilket förstås är en motsägelse. För att göra detta använder vi indikatorfunktionen $1_X \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ som vi tidigare definierat enligt

$$1_X(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in X \\ 0\,, & x \notin X. \end{cases}$$

Vi utnyttjar nu likheterna

$$1_{g_i Y_i}(x) = 1_{Y_i}(g_i^{-1} \cdot x) =: g_i \cdot 1_{Y_i}\,, \qquad 1_{h_j Z_j}(x) = 1_{Z_j}(h_j^{-1} \cdot x) =: h_j \cdot 1_{Z_j}\,, \qquad \forall i, j,$$

samt faktumet att unionerna i (10) och (11) är disjunkta unioner, för att skriva

$$\begin{aligned} 1_X &= 1_{Y_1} + \dots + 1_{Y_m} + 1_{Z_1} + \dots + 1_{Z_n}, \\ 1_X &= g_1 \cdot 1_{Y_1} + \dots + g_m \cdot 1_{Y_m}, \\ 1_X &= h_1 \cdot 1_{Z_1} + \dots + h_n \cdot 1_{Z_n}. \end{aligned} \tag{12}$$

Genom att tillämpa det G-invarianta medlet λ på varje likhet i (12) får vi respektive av de tre likheterna

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda(1_X) = \lambda(1_{Y_1}) + \ldots + \lambda(1_{Y_m}) + \lambda(1_{Z_1}) + \ldots + \lambda(1_{Z_n}), \\ 1 &= \lambda(1_X) = \lambda(g_1 \cdot 1_{Y_1}) + \dots + \lambda(g_m \cdot 1_{Y_m}), \\ 1 &= \lambda(1_X) = \lambda(h_1 \cdot 1_{Z_1}) + \dots + \lambda(h_n \cdot 1_{Z_n}), \end{aligned} \tag{13}$$

men eftersom λ är G-invariant så är $\lambda(g \cdot \phi) = \lambda(\phi)$ för varje $\phi \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ och varje $g \in G$. De tre likheterna i (13) oss därmed att

$$\begin{aligned} 2 = 1 + 1 &= \Big(\lambda(g_1 \cdot 1_{Y_1}) + \ldots + \lambda(g_m \cdot 1_{Y_m})\Big) + \Big(\lambda(h_1 \cdot 1_{Z_1}) + \ldots + \lambda(h_n \cdot 1_{Z_n})\Big) = \\ &= \Big(\lambda(1_{Y_1}) + \dots + \lambda(1_{Y_m})\Big) + \Big(\lambda(1_{Z_1}) + \dots + \lambda(1_{Z_n})\Big) = \lambda(1_X) = 1 \end{aligned}$$

Vi har kommit fram till vår sökta motsägelse och drar slutsatsen att gruppverkan av G på X inte ger upphov till någon paradoxal dekomposition av X. □

Just hur viktig sats 4.3 är beror förstås på hur vanligt det är att grupper är godartade, det vore trevligt att kunna visa att det finns många såna grupper. Låt oss tala mer ingående om en typ av godartade grupper.

4.1 Abelska grupper och Markov-Kakutani

En intressant egenskap att undersöka är den som de så kallade *abelska* grupperna har.

Definition 4.6 (Abelsk grupp)**.** En grupp kallas *abelsk* om dess element kommuterar.

Nedan presenteras Markov-Kakutanis sats som fått sitt namn efter de två matematikerna Andrey Markov och Shizuo Kakutani. Satsen kommer inte bevisas då det kräver fördjupande kunskaper inom topologi och funktionalanalys.

Sats 4.7 (Markov-Kakutani)**.** *Abelska grupper är godartade.*

Markov-Kakutani tillsammans med sats 4.3 ger oss omedelbart följande resulat som vi väljer att formulera som en sats.

Sats 4.8. *Låt G vara en grupp som verkar på en icke-tom mängd X. Om G är abelsk så ger gruppverkan av G på X inte upphov till någon paradoxal dekomposition av X.*

Läsare som är obekväma med att använda Markov-Kakutani utan bevis, finner ett direkt bevis av sats 4.8 i appendix.

Faktumet att abelska grupper är godartade ger oss direkt en stor mängd grupper som inte kan ge upphov till paradoxala dekompositioner, ty de abelska grupperna är många. Till exempel är varje grupp genererad av ett element abelsk, varje ring är en abelsk grupp med avseende på addition, mängden av heltal modulo n utgör för varje n en abelsk grupp såväl med avseende på addition som på multiplikation, och så vidare.

I beviset av Banach-Tarskis paradox utnyttjade vi oss av att $SO(3)$ inte är abelsk, vilket vi snabbt kan illustrera: Tag de två rotationsmatriserna A, B från sats 2.3.

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vanlig matrismultiplikation ger att

$$AB = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & 12 & 16 \\ -20 & 9 & 12 \\ 0 & -20 & 15 \end{pmatrix}$$

$$BA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & 20 & 0 \\ -12 & 9 & 20 \\ 16 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

Därmed är $AB \neq BA$.

Ett intressant faktum är att om vi går ner en dimension och tittar på gruppen $SO(2)$ av rotationer i planet, så ser vi att den gruppen är abelsk.

Lemma 4.9. *Den speciella ortogonala gruppen av dimension 2,*

$$SO(2) := \left\{ A \in R^{2\times 2} \;\middle|\; AA^t = I \text{ och } \det A = 1 \right\} ,$$

är abelsk.

Bevis. Låt oss börja med att ta reda på hur matriserna som utgör $SO(2)$ faktiskt ser ut. Tag en godtycklig matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Från definitionen av $SO(2)$ får vi att

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$\det A = ad - bc = 1$$

Vi får med andra ord följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \tag{14}$$

Inspirerade av de två första likheterna i (14) gör vi substitutionen

$$\begin{aligned} a &= \cos\theta\ , \qquad & b &= \sin\theta\ , \qquad & 0 \leqslant \theta < 2\pi \\ c &= \sin\varphi\ , \qquad & d &= \cos\varphi\ , \qquad & 0 \leqslant \varphi < 2\pi \end{aligned}$$

och kan därmed uttrycka de två nedre likheterna i (14) som

$$\begin{cases} \cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta = \sin(\theta+\varphi) = 0 \\ \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta+\varphi) = 1 \end{cases}$$

från vilket det följer att $\varphi = -\theta$. Följdaktigen är varje matris i $SO(2)$ på formen

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

och det är en enkel uppgift att kontrollera att multiplikation av sådana matriser kommuterar, dvs att $AB = BA$: Låt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

vara godtyckliga element i $SO(2)$. Då är

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi \\ -(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi) \\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

Motsvarande omskrivning av BA är identisk sånär som på ombytta roller hos θ och φ. Vi har därmed kommit fram till att

$$BA = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) & \sin(\varphi+\theta) \\ -\sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi) \\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = AB$$

och drar slutsatsen att $SO(2)$ är abelsk. □

Sats 4.8 säger oss alltså att $SO(2)$ inte kan ge upphov till någon paradoxal dekomposition av någon mängd, vilket leder oss till det anmärkningsvärda resultatet

Korollarium 4.10. *Det existerar ingen motsvarighet av Banach-Tarskis paradox i två dimensioner.*

Appendix

Vi presenterar här ett direkt bevis av sats 4.8.

Bevis. Vi bevisar satsen via motsägelse, precis som i beviset för sats 4.3. Antag därmed att gruppverkan av G på X ger upphov till en paradoxal dekomposition av X, det vill säga antag att det existerar en partition

$$X = \left(\biguplus_{i=1}^{m} Y_i \right) \uplus \left(\biguplus_{j=1}^{n} Z_j \right) \tag{15}$$

samt element $g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_n \in G$, sådana att

$$X = \biguplus_{i=1}^{m} g_i Y_i = \biguplus_{j=1}^{n} h_j Z_j \tag{16}$$

Givet en baspunkt $x_0 \in X$, ett heltal $N \geqslant 1$ och en delmängd $C \subseteq X$, definiera det reella talet

$$\lambda_N(C) = \frac{1}{N^{m+n}} \sum_{i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_n=1}^{N} 1_C(g_1{}^{i_1} \cdots g_m{}^{i_m} \cdot h_1{}^{j_1} \cdots h_n{}^{j_n} \cdot x_0)$$

Notationen är otymplig men vad vi gör är inte komplicerat. Summan har N^{m+n} termer och $\lambda_N(C)$ är helt enkelt lika med *andelen* av elementen $g_1{}^{i_1} \cdots g_m{}^{i_m} \cdot h_1{}^{j_1} \cdots h_n{}^{j_n} \cdot x_0$ som ligger i mängden C. Notera att definitionen av paradoxal dekomposition direkt implicerar de två likheterna

$$1 = \lambda_N(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_N(Y_i) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_N(Z_j) \ ,$$
$$1 = \lambda_N(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_N(g_i Y_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_N(h_j Z_j) \ ,$$

för att $1_X(\cdot) = 1$ för varje term i summan $\lambda_N(X)$.

Vi ska bevisa att för varje $\epsilon > 0$ existerar $N = N(\epsilon)$ sådant att

$$|\lambda_N(g_i Y_i) - \lambda_N(Y_i)| < \epsilon \qquad \text{och} \qquad |\lambda_N(h_j Z_j) - \lambda_N(Z_j)| < \epsilon \tag{17}$$

för varje i, j, och därmed att

$$2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_N(g_i Y_i) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_N(h_j Z_j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_N(Y_i) + |\lambda_N(g_i Y_i) - \lambda_N(Y_i)| + \sum_{j=1}^{n} \lambda_N(Z_j) + |\lambda_N(h_j Z_j) - \lambda_N(Z_j)| <$$

$$< \sum_{i=1}^{m} [\lambda_N(Y_i) + \epsilon] + \sum_{j=1}^{n} [\lambda_N(Z_j) + \epsilon] =$$

$$= 1 + \epsilon(m+n)$$

vilket är en motsägelse för $\epsilon < \frac{1}{m+n}$.

För att bevisa (17) noterar vi att[3] $1_{(g_m Y_m)}(x) = 1_{Y_m}(g_m^{-1} x)$ och vi definierar mängden

$$P = \left\{ g_1{}^{i_1} \cdots g_{m-1}^{i_{m-1}} \cdot h_1{}^{j_1} \cdots h_n{}^{j_n} \;\middle|\; 1 \leqslant i_1, \ldots, i_{m-1}, j_1, \ldots, j_n \leqslant N \right\}$$

som har kardinalitet N^{m+n-1}. Eftersom G är abelsk följer det att

$$\lambda_N(g_m Y_m) = \frac{1}{N^{m+n}} \sum_{i_m=1}^{N} \sum_{p \in P} 1_{Y_m}(p \cdot g_m^{i_m - 1} \cdot x_0) \ , \tag{18}$$

$$\lambda_N(Y_m) = \frac{1}{N^{m+n}} \sum_{i_m=1}^{N} \sum_{p \in P} 1_{Y_m}(p \cdot g_m^{i_m} \cdot x_0) \tag{19}$$

De enda termerna som finns i (18) men inte i (19) är de N^{m+n-1} stycken termerna då $i_m - 1 = 0$, de enda termerna som finns i (19) men inte i (18) är de N^{m+n-1} stycken termerna då $i_m = N$. Vi får därför likheten

$$\lambda_N(g_m Y_m) - \lambda_N(Y_m) = \frac{1}{N^{m+n}} \sum_{p \in P} \left[1_{(Y_m)}(p \cdot x_0) - 1_{(Y_m)}(p \cdot g_m^N \cdot x_0) \right]$$

[3] argumenten för resterande g_i och h_j är helt analoga.

Denna likhet är tillräcklig för vårt ändamål, eftersom indikatorfunktionen inte kan anta andra värden än 0 och 1:

$$|\lambda_N(g_m Y_m) - \lambda_N(Y_m)| \leqslant \frac{1}{N^{m+n}} \sum_{p \in P} |1_{Y_m}(p \cdot x_0) - 1_{Y_m}(p \cdot g_m^N \cdot x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N^{m+n}} \sum_{p \in P} 1 = \frac{N^{m+n-1}}{N^{m+n}} = \frac{1}{N}$$

Vi uppnår nu en motsägelse för varje $N > \frac{1}{\epsilon}$ och beviset är klart. $\square$

Referenser

[TT] Terence Tao, (2004), *The Banach Tarski paradox*, UCLA, tillgänglig på https://www.math.ucla.edu/∼tao/preprints/Expository/banach-tarski.pdf , besökt 2015-05-19.

[KS] Kenzi Sato, (1995), *A free group acting without fixed points on the rational unit sphere*, Tokyo Institute of Technology, tillgänglig på http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm148/fm14814.pdf, besökt 2015-05-19.

[UR] Utformning av rapporter och kandidatarbetens skriftliga presentation för Civilingenjörsprogrammen vid Chalmers tekniska högskola. 2008. Göteborg: Chalmers Tekniska Högskola