Rationella tal

och kopplingen till vardagen

Namn Karin Andersson

Program Ämneslärarprogrammet åk 7-9, matematik, biologi och kemi

Uppsats/Examensarbete: 15 hp

Kurs: Självständigt arbete (examensarbete) 1 för 7-9-lärare, L9MA1G, VT15

Nivå: Grundnivå/Avancerad nivå

Termin/år: VT/2015

Handledare: Jonny Lindström

Examinator: Laura Fainsilber

Kod: VT15-3001-001-L9MA1G

Nyckelord: Rationella tal, bråktal, decimaltal, procent, vardagsanknytning, läroplaner, årskurs 7-9, matematik, matematikdidaktik.

Abstract

Rationella tal har länge varit ett diskussionsämne i den svenska skolan och framför allt om hur dessa tal och och dess uttrycksformer ska läras ut. De olika representationerna av sådana tal, bråktal, decimaltal och procent har en stor plats i svenska läroplaner och ses som en viktig inkörsport till algebran och framtida matematikstudier. Undersökningar visar dock att svenska elever uppfattar rationella tal som komplicerade och ser ingen användning av kunskaperna som lärs ut. Detta examensarbete är därför utformat som en litteraturstudie där möjligheten att knyta ihop undervisningen inom rationella tal i svenska skolan och vardagen undersöks.

Syftet med examensarbetet är främst att utveckla min kunskap om rationella tal som jag kommer ha användning av när jag själv planerar lektioner. Ett annat syfte är att undersöka hur synen på rationella tal ser ut samt hur kopplingen mellan vardag och undervisning kan synliggöras mer.

Genom att ta del av den utvalda litteraturen kan vissa slutsatser dras. Det finns sätt att koppla undervisningen om bråktal, decimaltal och procent mer till vardagen vilket kan underlätta förståelsen för eleverna. Lärare kan genom kompetensutveckling i läroplanstolkning bättre anspassa undervisningen så att eleverna ser en större användning av den till vardagsproblem.

Examensarbetet har givit mig en annan syn på undervisning kring rationella tal. Som lärare finns det möjligheter att anpassa undervisningen till vardagen, men det gäller att man som lärare förstår läroplanen. Det finns också mycket historia kring bråktal, decimaltal och procent som kan vara bra att ta del av innan lektioner planeras. Dessutom är det en fördel att känna till bråktalens representationsformer så att även eleverna kan ta till sig dessa.

Rationella tal och kopplingen till vardagen

Karin Andersson

Självständigt arbete (examensarbete) 1 för 7-9-lärare, L9MA1G, VT15.

Handledare: Jonny Lindström

Examinator: Laura Fainsilber

Rapportnummer: VT15-3001-001-L9MA1G

Summary

The main purpose with this essay is to find out how to make the education in rational numbers more connected with the students everyday life. The other purpose is to develop my knowledge in rational numbers and its different representations. I did this work by reading relevant literature, including mathematical studies about fractions and also research reports of students understanding of rational numbers. I have also studied rational numbers in a historical perspective. This included how the role of the rational numbers in math education has changed from the 1700s to modern time.

Innehållsförteckning

1. Inledning

Jag heter Karin Andersson och studerar till ämneslärare i årskurs 7-9 på Göteborgs Universitet i ämnena matematik, biologi och kemi med matematik som huvudämne. Min utbildning börjar lida mot sitt slut och jag har läst ett flertal olika kurser. Det ämne som jag funderat mest kring är just matematiken, främst för att jag haft svårt att förstå användningen av all komplex teori jag fått ta del av. Den undervisning jag fått ta del av under min studiegång har bidragit till att jag haft funderingar kring användningen av denna för mig. Kanske känner elever i svenska skolan likadant kring den undervisning som de får ta del av? Det sägs att svenska elever blir allt sämre på att förstå matematik och därför vill jag med detta arbete undersöka om det kanske går att öka förståelsen genom att låta matematikundervisningen vara mer kopplad till sådant som eleverna redan förstår. Jag vill inte vara läraren som enbart lär ut matematik för att eleverna ska förstå teorin, utan anser att matematiken på den nivån jag ska undervisa ska användas till vardagliga problem. Därför vill jag undersöka om det finns några metoder för att göra undervisningen inom rationella tal mer levande och förståelig för eleverna. Anledningen till att jag valde rationella tal var för att de är en betydande del av läroplanen i både grundskolan och gymnasiet samt att elever har svårt att räkna med och förstå dessa.

2. Syfte och frågeställning

Det huvudsakliga syftet med denna rapport är att undersöka de rationella talens användning i skolan. Först och främst undersöka om det går att koppla rationella tal mer till vardagen och samhället och om detta bidrar till bättre förståelse för ämnet, men också se hur elever presterar på rationella tal och hur undervisningen ser ut idag. Ett annat syfte med rapporten är att fördjupa mina kunskaper om rationella tal. Teorin är dels intressant för mig men också relevant för den resterade delen av arbetet. Jag kommer även att titta lite på hur synen på matematiken och de rationella talen har utvecklats från förr till nu. Detta examensarbete är också som en förberedelse inför min framtida profession som lärare då mycket av innehållet handlar om kursplaner och andra didaktiska inslag.

Syftena med arbetet har sammanfattats i frågeställningarna:

- Hur ser undervisningen inom rationella tal ut idag?
- Går det att anpassa den undervisning som sker i skolan idag mer till vardagen?

3. Metod

Examensarbetet är en litteraturstudie av litteratur som handlar om de rationella talen och ämnesområdena bråktal, decimaltal och procent. Genom att studera läroplaner, historieredovisningar, forskningsrapporter har jag tagit del av både matematikdidaktiker och andra lärares idéer och tankar kring de rationella talen och deras uttryck i undervisningen.

För att lägga en grund till det som skulle undersökas söktes information i läroplaner och även viss matematikhistoria i *Skolans matematik: En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* av Sverker Lundin (2008) som innehåller en grundlig genomgång av skolmatematiken från förr till där vi är idag. För att bygga upp teoridelen kring rationella tal användes främst Vretblad och Ekstigs text *Algebra och Geometri* och *Appendix - De olika talområdena* som är grundläggande och tillräcklig till detta arbete (2011). Dessutom är en del av didaktiska texter kring om hur undervisningen inom bråkräkning ser ut idag studerade, där Wiggo Kilborns texter *Om tal i bråk och decimalform – en röd tråd* (2014) samt *Didaktisk ämnesteori i matematik – Del 2 Rationella och irrationella tal* (1999) haft en betydande roll. Den text som ligger till grund för den undersökande delen av arbetet, där möjligheterna till en mer vardagsanpassad undervisning undersöks är Clark, Roche och Michells text *10 sätt att göra bråk mer levande* (2010).

4. Avgränsningar

För att inte göra arbetet för stort valdes en inriktning på undervisning inom rationella tal och inte matematikämnet i stort. Syftet med arbetet är att det skulle vara användbart för lärare och kunde därmed inte vara för brett och innehålla för mycket stoff då det redan är en del att ta sig igenom innan undervisningen kan planeras. Därför fokuseras arbetet till de rationella talen och ämnesområdena bråktal, decimaltal och procent.

Även om arbetet är begränsat till just rationella tal så finns det mycket litteratur att ta del av. Den litteratur som sållats fram har valts ut eftersom den främst handlar om vardagsanknytning, historia kring bråkräkning, viss teori kring rationella tal samt läroplaner i årskurs 7-9 och gymnasiet. Arbetet tar inte upp alla matematikkurser på gymnasiet utan de utvalda kurserna är 1c, 2a, 3b och 4 då det finns liknande centralt innehåll i de andra kurserna och främst för att min utbildning riktar in sig på årskurserna 7-9.

5. Bakgrund

Utveckling av undervisningen för elever så att kunskaperna inom rationella tal kan öka är något som intresserar mig. Dessutom vill jag göra en fördjupning i rationella tal, som idag är en central del i matematikundervisningen på grundskolan och gymnasiet. Enligt tester såsom PISA och TIMSS blir kunskaperna kring matematik men också rationella tal i Sverige allt sämre, jämfört med andra länder. Resultaten är oroande och kanske kan en undervisning mer kopplad till vardagen leda till bättre förståelse hos eleverna.

Redan förr i tiden diskuterades det kring vad utbildningssystemet hade för funktion. På 1700-talet argumenterade politiker och matematikdidaktiker för ”matematikens nytta för vetenskaperna och det praktiska livet” (Lundin 2008). De menade alltså att matematiken kunde hjälpa till i det praktiska livet och var därför inte bara viktig för fortsatta studier. Det menades också att matematikundervisning skulle leda till att studenterna lärde sig bli förståndiga. Matematikförståelsen innebar inte bara att förstå sig på matematik generellt utan den innebar också att eleverna fick en bättre allmän tankeförmåga. Genom att träna på matematikräkning skulle två mål uppnås; det ena var att förstå sig på matematik och det andra var att forma sitt eget tänkade. Det betonades även hur viktigt det var att tänka själv (Lundin 2008). I Lundins genomgång av skolmatematikens utveckling från förr till nu diskuteras olika matematikers syn på bildning. Bland annat diskuteras att kunskaper växer fram genom att man övar på användning av dessa vilket beskrivs som en ”simulering av det praktiska livet utanför skolan” (Lundin 2008, 279). Vissa av de som uttalade sig kring matematikkunskaper menade också att praktiska färdigheter måste vara förankrade i förståendet. Det fanns även idéer om att eleverna skulle räkna på sådana uppgifter som behövdes i det praktiska livet (Lundin 2008). På 1800-talets andra hälft sattes så kallade högre mål som eleverna skulle nå efter avslutad skolgång. Dessa mål som Lundin tagit del av löd bland annat: ”Leder undervisning i matematik till sådant som att Sverige får bättre tillväxt, att demokratin stärks och att människor får bättre självförtroende?” (Lundin 2008). Även här menades att matematiken inte bara skulle bidra till utvecklandet av räknekonsten utan också till utvecklandet av samhället utanför skolan. Detta kan enligt Sverker Lundin liknas vid de kursplaner som finns idag och var som ett startskott till ytterliggare vardagsanknytning i undervisningen, även om denna syn på undervisning länge funnits. (Lundin 2008). Finns det något i undervisningen kring rationella tal som praktiseras som bidrar till elevernas förbättring av självförtroende och utvecklar det samhället?

I detta examensarbete kommer begreppet vardagsanknytning att nämnas ett flertal gånger. Därför behövs begreppet definieras och i uppsatsen ses vardagsanknytningen som förklaring på två olika företeelser. Den första företeelsen är när vardagen används för att ge förklaring och mening för matematikinnehållet hos eleven, exempelvis vid förklaring av stambråk kan pizzor användas och hur de delas upp i olika delar. Däremot behövs inte kunskap kring bråk för att kunna dela upp pizzor. Den andra företeelsen då vardagsanknytning dyker upp är när elever genom undervisning kring matematik får metoder till att lösa problem i vardagen, exempelvis att undervisning kring bråktal ger kunskaper kring fjärdedelar som används i bakning vid $1/4$ deciliter och så vidare.

Enligt testerna PISA och TIMSS är svenska elevers kunskaper inom rationella tal och bråkräkning bristfälliga (Kilbom 2014). Exempelvis är det bara 19 % av skolelever i årskurs 6 som kan lösa uppgiften:

Beräkna 3/4 · 2/5.

Samma uppgift kan 43 % av elever i årskurs 9 lösa. En anledning till att det är så få elever som kan lösa uppgiften i årskurs 6 kan vara att eleverna har bristande kunskaper kring bråkräkning från tidigare årskurser. Att kunskaperna sedan blivit bättre till nionde klass kan vara ett bevis på att eleverna kan lära sig bråkräkning med hjälp av rätt hjälpmedel. Det är dock långt ifrån alla elever som kan ta till sig dessa hjälpmedel eftersom lösningsfrekvensen i nionde klass bara är 43 %. Frågan är hur man kan förbättra kunskaperna kring rationella tal hos svenska elever?

Bråkräkning är viktigt för den fortsatta matematikförståelsen i exempelvis algebra och resultaten på både TIMSS och PISA tyder på att elevernas kunskaper inom rationella tal har blivit sämre. Samtidigt finns det enligt Kilborn tecken på att fokus inom undervisningen av matematiken har flyttats från vardagen till mer formell undervisning (2014). Jag tror det kan vara en idé att testa att koppla undervisningen på framför allt grundskolan mer till vardagen för att göra räkning med rationella tal mer intressant och förståelig och det är detta vill jag undersöka med examensarbetet.

6. Teoretisk bakgrund

Det ämnesområde inom matematikundervisningen som arbetet fokuserar på är rationella tal. För att beskriva de rationella talen används boken *Algebra och Geometri* och *Appendix- De olika talområdena* (Vretblad & Ekstig 2011). I detta appendix förklarar författarna att man kan utgå från begreppet ekvivalensrelation för att kunna visa att exempelvis $5/3$ och $10/6$ är samma tal.

Definition talpar. Låt Q vara mängden av alla ordnade par av positiva heltal. Ett element i Q är alltså ett objekt av formen *(x,y)*, där x och y är positiva heltal.

I boken byter de därefter ut (x,y) till $(x : y)$ för att det ska likna vad det innebär. Detta betyder inte att det är division utan är bara ett sätt att skriva ett ordnat par.

Först definieras en relation $\sim$ på Q:

Definition A4. $(x_1 : x_2) \sim (y_1 : y_2)$ omm $x_1y_2 = x_2y_1$.

Sats A5. Relationen $\sim$ är en ekvivalensrelation.

Definition ekvivalensrelation. Relationer som har de tre egenskaperna

1. Reflexiv: xRx för alla x.
2. Symmetrisk: $xRy \Rightarrow yRx$ för alla x och y.
3. Transitiv: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ för alla x, y och z.

är en ekvivalensrelation.

Bevis A5. Visa att $\sim$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv, vilket görs i olika steg.

(a) För det första gäller att $x_1x_2 = x_2x_1$ för godtyckliga x_1, x_2, vilket betyder att $(x_1 : x_2) \sim (x_1 : x_2)$, så att $\sim$ är reflexiv.

(b) Vidare: om $(x_1 : x_2) \sim (y_1 : y_2)$ för några x_1, x_2 och y_1, y_2, så är $x_1y_2 = x_2y_1$, och då är också $y_1x_2 = y_2x_1$ så att $(y_1 : y_2) \sim (x_1 : x_2)$, vilket visar att $\sim$ är symmetrisk.

(c) Antag slutligen att $(x_1 : x_2) \sim (y_1 : y_2)$ och $(y_1 : y_2) \sim (z_1 : z_2)$, för alla x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 och z_2. Det innebär att

$$x_1y_2 = x_2y_1 \; och \; y_1z_2 = y_2z_1.$$

Då gäller $(x_1y_2)(y_1z_2) = (x_2y_1)(y_2z_1)$. Med hjälp av de associativa och kommunitativa lagarna för multiplikation av positiva heltal går detta att skriva som

$$(x_1z_2)(y_1y_2) = (x_2z_1)(y_1y_2).$$

Används därefter annuleringslagen för multiplikation av positiva heltal blir resultatet $x_1z_2 = x_2z_1$, vilket innebär att $(x_1 : x_2) \sim (z_1 : z_2)$. Detta visar att relationen $\sim$ även är transitiv och därmed är beviset färdigt.

Definition ekvivalensklass: Låt E vara en ekvivalensrelation med en mängd A. För varje $x \in A$ kan en delmängd Ax av A bildas. Denna består av alla element som står i relation E till x

$$A_x = \{y \in A : xEy\}.$$

Ax kallas för ekvivalensklassen till x. Eftersom $x\,E\,x$ så gäller även att $x \in A_x$, så att $Ax \neq \emptyset$.

Definition A6. En ekvivalensklass i Q med avseende på $\sim$ kallas ett positivt rationellt tal (prt). Ett prt betecknas i detta avseende med stor bokstav X, Y.

Genom att utgå från definition A6 kan räkneoperationer och ordning för de nya talen definieras och även det går även att bevisa de räknelagar som gäller. Som representanter för de positiva rationella talen kommer talpar, $(x_1 : x_2)$ att användas. För att detta ska stämma måste det genomföras kontroll av att det som utförs inte beror på de representanter som används. Först definieras addition och summa av två talpar.

Definition A7. Operationen $\oplus$ på Q definieras genom

$$(x_1 : x_2) \oplus (y_1 : y_2) = (x_1 y_2 + x_2 y_1 : x_2 y_2).$$

Sats A8. Om $(x_1 : x_2) \sim (y_1 : y_2)$ och $(u_1 : u_2) \sim (v_1 : v_2)$ så är

$$(x_1 : x_2) \oplus (u_1 : u_2) \sim (y_1 : y_2) \oplus (v_1 : v_2).$$

Satsen förklarar att om termerna i en summa byts ut mot ekvivalenta talpar så blir den nya summan ekvivalent med den förra.

Bevis A8. Givet är att $(x_1 : x_2) \sim (y_1 : y_2)$ och $(u_1 : u_2) \sim (v_1 : v_2)$, vilket innebär att

$$x_1 y_2 = x_2 y_1 \text{ och } u_1 v_2 = u_2 v_1.$$

Detta ger

$$(x_1 : x_2) \oplus (u_1 : u_2) = (x_1 u_2 + x_2 u_1 : x_2 u_2),$$

$$(y_1 : y_2) \oplus (v_1 : v_2) = (y_1 v_2 + y_2 v_1 : y_2 v_2).$$

Uppgiften är att visa att båda leden är ekvivalenta, men

$$\begin{aligned}(x_1 u_2 + x_2 u_1)(y_2 v_2) &= (x_1 u_2)(y_2 v_2) + (x_2 u_1)(y_2 v_2) = (x_1 y_2)(u_2 v_2) + (x_2 y_2)(u_1 v_2) \\ &= (x_2 y_1)(u_2 v_2) + (x_2 y_2)(u_2 v_1) = (y_1 v_2)(x_2 u_2) + (y_2 v_1)(x_2 u_2) \\ &= (y_1 v_2 + y_2 v_1)(x_2 u_2).\end{aligned}$$

Därmed är satsen bevisad.

Efter detta bevis är det möjligt att definiera summan av två rationella tal.

Definition A9. Om X och Y är prt, så är $X + Y$ den ekvivalensklass (prt), som innehåller $(x_1 : x_2) \oplus (y_1 : y_2)$, där $(x_1 : x_2) \in X$ och $(y1 : y2) \in Y$.

Med hjälp av detta kan nu räknereglerna för positiva rationella tal bevisas, vilka är:

A1 – Associativa lagen. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.

A2 – Kommutativa lagen. $X + Y = Y + X$.

A3 – Strykningslagen. $X + Z = Y + Z \Rightarrow X = Y$.

Som exempel kan regel A3 bevisas. Regel A3 kallas också för strykningslagen eftersom samma term ”stryks” från höger- och vänsterled.

Bevis A3. Som utgångspunkt är $X+Z=Y+Z$. Låt $(x_1 : x_2) \in X$, $(y_1 : y_2) \in Y$, $(z_1 : z_2) \in Z$. Förutsättningen innebär att

$$(x_1 : x_2) \oplus (z_1 : z_2) \sim (y_1 : y_2) \oplus (z_1 : z_2).$$

Enligt definitionen för $\oplus$ är ovanstående ekvivalent med

$$(x_1 z_2 + x_2 z_1 : x_2 z_2) \sim (y_1 z_2 + y_2 z_1 : y_2 z_2).$$

Definitionen för $\sim$ ger att detta är ekvivalent med

$$(x_1 x_2 + x_2 z_1)(y_2 z_2) = (y_1 z_2 + y_2 z_1)(x_2 z_2),$$

vilket är detsamma som $(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_2 z_1) z_2 = (x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) z_2$. Genom att använda strykningslagen M3 för multiplikation av positiva heltal

$$xz = yz \Rightarrow x = y,$$

fås

$$x_1y_2z_2 + x_2y_2z_1 = x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1.$$

Används därefter räkneregel A3, strykningslagen, för addition av positiva heltal blir resultatet

$$x_1y_2z_2 = x_2y_1z_2 \Leftrightarrow (x_1y_2)z_2 = (x_2y_1)z_2,$$

där strykningslagen M3 för positiva heltal ger $x_1y_2=x_2y_1$. Detta betyder $(x_1 : x_2) \sim (y_1 : y_2)$ eller $X=Y$ vilket var det som skulle bevisas.

Nu har addition definierats och nu är det istället multiplikation som ska definieras.

För att kunna göra detta behövs en produkt av talpar definieras:

$$(x_1 : x_2) \odot (y_1 : y_2) = (x_1y_1 : x_2).$$

Sats A10. Om $(x_1 : x_2) \sim (y_1 : y_2)$ och $(u_1 : u_2) \sim (v_1 : v_2)$, så är

$$(x_1 : x_2) \odot (u_1 : u_2) \sim (y_1 : y_2) \odot (v_1 : v_2).$$

Efter att sats A10 har visats görs en övergång till en påföljande definition för produkt av klassen.

Definition A11. Om X och Y är prt, så är X·Y eller XY den ekvivalensklass som innehåller $(x_1 : x_2) \cdot (y_1 : y_2)$, där $(x_1 : x_2) \in X$ och $(y_1 : y_2) \in Y$.

När sats A10 och definition A11 är visade kan räknereglerna för multiplikation visas.

M1. $(XY)Z = X(YZ)$.

M2. $XY = YX$.

M3. $XZ = YZ \Rightarrow X = Y$.

D. $X(Y + Z) = XY + XZ$.

För att komma vidare härifrån måste ordningsrelationen < för positiva rationella tal definieras.

Vi definierar ordningsrelationen med

$$(x_1 : x_2) \prec (y_1 : y_2) \text{ omm } x_1y_2 < x_2y_1,$$

och omvänt att $(x_1 : x_2) \succ (y_1 : y_2)$ omm $x_1y_2 > x_2y_1$. Tas ett godtyckligt par av talpar så gäller precis en av relationerna $(x_1 : x_2) \prec (y_1 : y_2)$, $(x_1 : x_2) = (y_1 : y_2)$ eller $(x_1 : x_2) \succ (y_1 : y_2)$. Detta leder till sats A12.

Sats A12. Om $(x_1 : x_2) \sim (y_1 : y_2)$ och $(u_1 : u_2) \sim (v_1 : v_2)$ samt $(x_1 : x_2) \prec (u_1 : u_2)$, så gäller även $(y_1 : y_2) \prec (v_1 : v_2)$.

Genom att visa denna sats kan ordningsrelationen för ekvivalensklasserna definieras.

Definition A13. Relationen < på mängden av positiva rationella tal definieras genom att $X \prec Y$ omm $(x_1 : x_2) \prec (y_1 : y_2)$, där $(x_1 : x_2) \in X$ och $(y_1 : y_2) \in Y$.

Nu kan ordningslagarna bevisas:

O1. För två positiva rationella tal X och Y gäller precis ett av fallen $X < Y, X = Y$ eller $X > Y$.

O2. $X < Y \wedge Y < Z \Rightarrow X < Z$,där $\wedge$ står för och, men bara om båda är sanna.

O3. $X < Y \Rightarrow X + Z < Y + Z$.

O4. $X < Y \Rightarrow XZ < YZ$.

Definition subtraktion. Om $X > Y$ finns ett precist positivt rationellt tal Z sådant att $Y + Z = X$, och detta skrivs $Z = X - Y$. Genom att använda räkneregel A3 kan det visas att det finns högst ett sådant Z, ty om $Y + Z_1 = Y + Z_2$, så måste $Z_1 = Z_2$. Vretblad och Ekstig visar att det verkligen finns ett sådant Z genom att konstruera en representant för det (2011). Detta görs genom att låta $(x_1 : x_2) \in X$ och $(y_1 : y_2) \in Y$. Eftersom $X > Y$ så är även $(x_1 : x_2) \succ (y_1 : y_2)$, det vill säga $x_1y_2 > x_2y_1$. Detta medför att det finns ett positivt heltal u så att $x_1y_2 = x_2y_1 + u$. Genom att upprepande använda regeln 11.4,$(x_1 : x_2) \sim (ax_1 : ax_2)$ för varje heltal, fås

$$(y_1 : y_2) \oplus (u : x_2y_2) = (y_1x_2y_2 + uy_2 : x_2y_2y_2)$$

$$= \big((y_1x_2 + u)y_2 : (x_2y_2)y_2\big) \sim (y_1x_2 + u : x_2y_2) = (x_1y_2 : x_2y_2) \sim (x_1 : x_2).$$

Låt Z vara ekvivalensklassen som innehåller $(u : x_2y_2)$. Då ger ovanstående kedja av olikheter och ekvivalenser att $Y + Z = X$.

Division kan även den definieras för positiva rationella tal.

Sats A14. Låt X och Y vara två godtyckliga prt. Då finns precist ett prt Z sådant att YZ = X.

Bevis A14. Att Z måste vara entydligt, om det existerar, följer av räkneregel M3. Existensen visas genom att låta$(x_1 : x_2) \in X$ och $(y_1 : y_2) \in Y$. Sätt $z_1 = x_1y_2$, $z_2 = x_2y_1$, vilket ger

$$(y_1 : y_2) \cdot (z_1 : z_2) = (y_1z_1 : y_2z_2) = (x_1y_1y_2 : x_2y_1y_2) \sim (x_1 : x_2),$$

där (11.4) används i sista steget. Översätts detta till ekvivalensklasser, varvid $(z_1 : z_2) \in Z$, följer att $YZ = X$.

Detta bevisar att division av positiva rationella tal är möjligt. Z i satsen ovan kallas för kvoten mellan X och Y och kan då skrivas $Z = \frac{X}{Y} = X/Y$.

Heltal brukar uppfattas som specialfall av rationella tal, men eftersom de rationella talen här är definierade som en mängd (ekvivalensklass) av par av positiva heltal är detta inte möjligt att göra. Vretblad och Ekstig sätter därför upp ett par riktlinjer så att det blir möjligt. De låter x vara ett positivt heltal. Ekvivalensklassen, vilket är prt, som innehåller paret $(x : 1)$ kallas temporärt för $\hat{x}$. Vidare definieras även en funktion $\hat{\sigma}$ som har en definitionsmängd bestående av alla klasser på formen $\hat{x}$ så att $\hat{\sigma}(\hat{x})$ är den klass som innehåller $(\sigma(x) : 1) = (x + 1 : 1)$, det vill säga $\hat{\sigma}(\hat{x}) = \widehat{\sigma(x)} = \widehat{x + 1}$. När detta gäller, gäller även att objekten $\hat{x}$ tillsammans bildar en mängd som i sin tur uppfyller alla Peanos axiom för positiva heltal, vilka är:

Axiom 1. $Det\ finns\ ett\ tal, vilket\ betecknas\ med\ talet$ 1.

Axiom 2. $Till\ varje\ tal\ x\ finns\ ett\ tal\ \sigma(x),\ vilket\ kallas\ efterföljare\ till\ x.$

Axiom 3. $För\ alla\ tal\ x\ gäller\ att\ \sigma(x) \neq 1.$

Axiom 4. $Om\ \sigma(x) = \sigma(y), så\ är\ x = y.$

Axiom 5. $Om\ M\ är\ en\ mängd\ (av\ tal)\ med\ egenskaperna$

$$1 \in M\ och\ x \in M \Rightarrow \sigma(x) \in M,$$

$$så\ innehåller\ M\ alla\ tal.$$

I detta fall fungerar det positiva rationella talet $\hat{1}$ som talet 1 i axiomen också. Funktionen $\hat{\sigma}$ fungerar som efterföljarfunktionen σ. Även dessa regler gäller

$$\widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y},$$

$$\widehat{xy} = \hat{x}\hat{y},$$

$$\hat{x} < \hat{y} \Leftrightarrow x < y,$$

$$\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x = y,$$

$$\text{och } \hat{x} > \hat{y} \Leftrightarrow x > y.$$

Vretblad och Ekstig tar upp hur heltalen kan bäddas in i de rationella talen. Detta görs genom att identifiera $\hat{x}$ med x. Anledningen till att detta kan göras är för att de positiva rationella talen av formen ($\hat{x}$) fungerar i alla avseenden på samma sätt som de positiva heltalen (x). Mängderna kallas också för isomorfa. Eftersom detta är genomfört kan taket (^) i beteckningen $\hat{x}$ tas bort.

De positiva rationella talen är möjliga att dividera, och därför bör det vara möjligt att dividera positiva heltal också. Vretblad och Ekstig testar att dividera x med y, vilket innebär klass $(x : 1)$ med klass $(y : 1)$ genom att använda sats A8. Detta genom att representera kvoten x/y med paret $(z_1 : z_2)$, där $z_1 = x$ och $z_2 = y$, vilket innebär att paret $(x : y)$ tillhör kvoten x/y. De tittar också på det omvända, att varje positivt rationellt tal kan skrivas som en kvot mellan två positiva heltal. Detta betyder alltså att om $(x_1 : x_2) \in X$ så är $X = x_1/x_2$. Vilket detta exempel demonstrerar

För ett godtyckligt positivt rationellt tal X gäller att

$$1 \cdot X = X.$$

Genom att låta (1 : 1) representera 1 och (x_1 : x_2) representera X, blir $(1{:}\,1) \odot (x_1{:}\,x_2) = (x_1{:}\,x_2)$.

Avslutningsvis visar de den arkimediska egenskapen för positiva rationella tal:

O5. Om X och Y är godtyckliga positiva rationella tal, så finns ett positivt heltal n sådant att $X < nY$.

Här måste n vara ett positivt heltal och inte bara ett rationellt tal (Vretblad & Ekstig 2011).

Nu finns det en grund för bakgrundsteorin kring rationella tal och därmed kan en övergång till mer matematikdidaktik genomföras så att frågeställningarna kan besvaras.

7. Hur ser det ut idag?

7.1 Vad säger läroplanerna?

De rationella talen har en betydande roll i svenska grundskolan. Det behandlas redan i år 4-6, men jag har valt att fokusera på år 7-9 då jag utbildar mig till ämneslärare i de åldrarna. I det centrala innehållet för år 7-9 i läroplanen finns det ingen kategori som är döpt ”rationella tal”. Däremot finns det centralt innehåll kring bråktal och procent under andra kategorier. Bland annat står det under kategorin ”taluppfattning och tals användning” att man som elev ska få ”centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik. Metodernas användning i olika situationer” (Skolverket 2011, 66). Under kategorin ”samband och förändring” finns det nämnt innehåll kring procent, där det bland annat står att eleven ska ta del av ”procent för att uttrycka förändring och förändringsfaktor samt beräkningar med procent i vardagliga situationer och i situationer inom olika ämnesområden” (Skolverket 2011, 66).

I syftesbeskrivningen av läroplanen för matematik i årskurs 7-9 står det bland annat att ”undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden”, att eleverna ska ”ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska situationer samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer” och att eleverna ”genom undervisningen också ges möjlighet att utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang” (Skolverket 2011, 62).

Kilborn beskriver att det centrala innehållet lämnar mycket plats hos läraren för individuell tolkning vilket också kräver planering och en plan för hur undervisningen ska se ut (2014). Därför är det viktigt att man som lärare är medveten om vad som behandlas i de tidigare årskurserna. Hans tolkning av kursplanen beskrivs nedan:

”Enligt kursplanens centrala innehåll i årskurs 7-9 ska de arbeta med:

- Talsystemets utveckling från naturliga tal till reella tal.
- Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik.
- Strategier för att tolka, skapa och använda algebraiska uttryck, formler och ekvationer.” (Kilborn 2014).

Vid undersökning av läroplanerna för matematik i gymnasiet finns det flera centrala innehåll kring rationella tal att ta del av. Under kategorin ”samband och förändring” i kursen Matematik 1a står det att elevernas undervisning ska innehålla ”fördjupning av procentbegreppet: promille, ppm och procentenheter” och ”begreppen förändringsfaktor och index samt metoder för beräkning av räntor och amorteringar för olika typer av lån” (Skolverket 2011, 92). Under kategorin ”taluppfattning, aritmetik och algebra” står det att undervisningen ska innehålla ”metoder för beräkningar med reella tal skrivna på olika former inom vardagslivet och karaktärsämnena, inklusive överslagsräkning, huvudräkning och uppskattning samt strategier för att använda digitala verktyg” (Skolverket 2011, 92). Även under kategorin ”problemlösning” finns centralt innehåll som går att anpassa på de rationella talen, där det står att eleven ska få undervisning innehållande ”matematiska problem av betydelse för privatekonomi, samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen” (Skolverket 2011, 93). Detta centrala innehåll ska inte bara ha en koppling till vardagslivet och samhället utan även till andra ämnen. Jag väljer att inte titta på kurserna Matematik 1b och 1c eftersom de har liknande centralt innehåll men med högre svårighetsgrad, detsamma gäller för kurs 2.

I Matematik 2a under kategorin ”taluppfattning, aritmetik och algebra” i det centrala innehållet står det att eleverna ska få ”metoder för beräkningar vid budgetering” (Skolverket 2011, 12) och under kategorin ”problemlösning” står det att undervisningen ska innehålla ”matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen” (Skolverket 2011, 12). Det senare av innehållen behöver inte bara innebära rationella tal, men går att anpassa på det. Dock står det uttryckt att innehållet ska gå att anpassa på vardagslivet. Även Matematik 3b och Matematik 4 har under kategorin ”problemlösning” det centrala innehållet att eleverna ska ta del av ”matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen” (Skolverket, 2011, 21).

I texten *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet* beskrivs de svenska kursplanerna som ”mycket kortfattat skrivna och innehåller huvudsakligen inga explicita och tydliga specificeringar och tolkningar av vad kompetensmålen (eller andra motsvarande lärandemål) egentligen består av” (Bergqvist m.fl. 2010, 8). Boken syftar egentligen på den tidigare läroplanen, men går även att anpassas på den närvarande. De tar också upp att lärares förmåga att tolka det centrala innehållet beror på mängden kompetensutveckling de har tagit del av. I sin analys av läroplaner och kursplaner tar Bergqvist m.fl. upp att verklighetsanknytningen i undervisningen kan delas upp i tre olika typer.

1. Den första typen av verklighetsanknytning är att konkretiseringen av kursplan/läroplan kopplas till matematikens användbarhet, alltså att förbereda eleverna för vardagslivet.
2. Den andra typen av konkretisering är för lärare att visa upp hur matematikens användning där ”användbarheten ses som en motivationshöjare” (Bergqvist m.fl. 2010, 24).
3. Tredje typen av konkretisering är att matematiken som tas upp i undervisningen är för att förstå den fortsatta (abstrakta) matematiken. De genomförde även intervjuer av lärare där ungefär hälften av dessa svarade att matematikundervisningen i skolan är till för att låta eleverna ”prata matematik”, ”få matematisk förståelse”, ”logiskt tänkande” eller liknade termer (Bergqvist m.fl. 2010).

Skillnaden mellan punkt 1 och 2 är att den först punkten syftar på att lära ut hur matematiken kan användas i vardagen medan punkt 2 istället syftar på att använda vardagen för att visa att matematiken är användbar. Detta kan i sin tur leda till större motivation hos eleverna då de inser användbarheten av matematik.

En del lärare som intervjuades nämnde även att det finns för lite kreativitet i arbetet med skolmatematiken och att det är svårt att använda sig av det i praktiken. Många lärare upplever även att de inte har tillräcklig kunskap kring kursplaner och läroplaner och enligt Bergqvist m.fl. är det viktigt att lärarna får stöd i arbetet med dessa och även ha tid att läsa kommentarsmaterialet till kursplanerna (2010). Lärare tolkar kursplaner på olika sätt eftersom de har olika grundmål och då sker ofta en form av filtrering. Denna kan ha en negativ effekt på undervisningen och olika mål i läroplanerna kan då gå förlorande. Exemplet som tas upp i Bergqvist m.fl. text är resonemangskompetensen som en lärare kan tolka som ”att prata matematik”. Därmed antas det av vissa lärare att kommunikationskompetensen och resonemangskompetensen i stort sätt är identiska, vilket leder till att målen blir begränsade och vissa går förlorade. I texten tar de även upp hur de nationella proven påverkar lärarnas undervisning. Det mest intressanta resultatet av intervjuerna med lärare var att ungefär 70 % av de tillfrågade lärarna anger att de blivit påverkade av de nationella proven och planerar undervisningen därefter. Där dessa lärare framför allt sett kompetensmål i de nationella proven, exempelvis resonemang och problemlösning, som de sedan anpassar undervisningen efter. Rapporterna innehåller även klassrumsobservationer där det tydligaste resultatet var att procedurhantering är den klart vanligaste klassrumsaktivitet och framför allt i samband med arbete i läroböcker. Resultatet visar också att det finns en stark positiv korrelation mellan lärobokanvändning och procedurhantering och samtidigt en negativ korrelation mellan läroboksanvändning och de övriga kompetenserna. Detta gäller framför allt i skolår 4-9 (Bergqvist 2010).

7.2 Bråkens roll i skolan

Enligt Kilborn i texten *Om tal i bråk- och decimalform – en röd tråd* beskrivs att undervisningen inom rationella tal länge har varit formell men nu har blivit lättsammare och tonats ner i undervisningen och framför allt i de lägre årskurserna av grundskolan. Det är framför allt bråkräkningen som har tonats ner och istället ersatts av decimaltal vilket har lett till att eleverna har förlorat viktig kunskap inom grundläggande begrepp så som bråk (2014). Elevernas bristande kunskap inom bråk, framför allt i de yngre åldrarna, leder till bristande kunskaper inom andra matematikområden i högre årskurser. Kilborn beskriver också att bråk är en bra inkörsport till algebran, som är en stor del av matematiken. När bråkräkningen då förenklas genom decimaltal går grundläggande kunskaper förlorade som i sin tur leder till att eleven får problem i fortsatta matematikundervisningen och framför allt på gymnasiet. De rationella talen består inte enbart av decimaltal som bråktalen förenklats till. Enligt Kilborn är det bara ett alternativt skrivsett för bråken. Därmed går eleverna miste om viss kunskap inom de rationella talen. Bråkräkningen har alltså förenklats till decimaltal eftersom det uppfattas som svårt. Frågan är om det är en fördel för eleverna eller snarare en nackdel? Kilborn påstår att förenklingen till decimaltal inte ens underlättar för de lägre presterande eleverna utan skapar problem för alla elever (2014). Detta kan vara en annan anledning till att svenska elevers kunskaper inom rationella tal inte är så bra som de borde vara.

I boken *Didaktisk ämnesteori i matematik – Del 2 Rationella och irrationella tal* tar Wiggo Kilborn upp bråkets roll i den svenska skolan (1999). I texten diskuteras synen på bråket och de rationella talens roll inom undervisningen. Dessutom finns en del kopplingar till vardagen. Kilborn tar upp att bråkräkning för många elever innebär att lägga sitt vardagstänkande åt sidan och istället övergå till ett mer formellt tänkande. Han påstår även att bråkräkning är en viktig övergång och övning inför algebran.

Kilborn påstår att en anledning till att grundskoleelever har problem med att förstå bråk kan vara att de har svårt att ta till sig de definitioner och räknelagar som behövs för att räkning med bråk ska ske problemfritt. Dessa lagar och definitioner är svåra att få in i undervisningen som lärare och framför allt är det svårt för grundskoleelever att ta till sig dem (1999). Kilborn beskriver också att det finns en didaktisk teori som eliminerar de onödigaste felen elever genomför kring bråkräkning som tillsammans med bättre vardagsanknytning kan bidra till en bättre förståelse för bråkräkning och rationella tal hos eleverna. Teorin behöver handla om hur grundläggande tankeformer om bråk byggs upp tillsammans med problemlösning i vardagen. Dessa teorier ska inte bara vara till för att eleverna enklare ska kunna lösa vardagsproblem utan också för att eleverna ska ha lättare att lösa matematiska problem som kan ta eleven längre i sitt akademiska tänkande (Kilborn 1999).

Enligt Kilborn används bråktal relativt sällan i vardagen. De gånger bråktal faktiskt används är det inte alltid i talform utan också som namn på storheter. Ett exempel är ”Han blev utslagen i åttondelsfinalen” där åttondel nämns, men inte som ett bråk utan som ett namn (Kilborn 1999, 45). I vissa fall behöver man för att förstå bråk i vardagen endast kunna tolka storlek på bråken, men inte behöva utföra någon uträkning. Exempel på detta är ”TV-programmet varade i tre kvart” (Kilborn 1999, 45). Viktigt att se i dessa fall är att formen av bråk egentligen inte är ett bråk utan istället en slags enhet. Det finns också andra fall där man går miste om bråkformen som exempelvis procentform, dock så är detta en representationsform av rationella tal (Kilborn 1999).

I texten redovisas att det finns vardagssituationer där det också krävs en beräkning för att kunna lösa problemet. Ett exempel som tas upp är ”Jag har ett recept på pannkaka för åtta personer. Till det behövs 16 dl mjölk, 8 dl mjöl, 4 ägg, ... Hur mycket mjölk behöver jag om jag skall laga pannkakor till tre personer?” (Kilborn 1999, 45). Enligt Kilborn är det få som löser dessa problem med hjälp av matematiska instrument utan i de flesta fall behöver kunskaper kring bråkräkning inte ens existera för att man ska finna en lösning (Kilborn 1999).

För att kunna bilda sig en uppfattning kring hur bråkräkningen ser ut i skolan och hur denna kan kopplas till verkligheten är det viktigt att känna till de olika sätt som bråk behandlas i och utanför skolan. Kilborn förklarar att det hittills inte funnits någon vetenskaplig förankring kring didaktikteorin och metodiken som används vid undervisning av bråk och rationella tal. Därför har de skolpolitiska riktlinjerna förändrats genom tiderna och det är en viktig anledning till att studera de olika sätt som bråken, inom skolan och utanför, kan se ut så lärare vet hur de ska bygga sin undervisning.

Kilborn förklarar att det som lärare är viktigt att hålla koll på bråkens olika representationsformer när man planerar sin undervisning. Den undervisning som presenteras för eleverna bör behandla alla dessa representationsformer för att de ska bli så bra förberedda för framtida matematikstudier samt för problem i vardagen. De olika former av bråk som tas upp i texten är:

- **Som tal.** Precis som heltal är bråktalen representerade på tallinjen. I texten tas bråket 2/5 upp som exempel på ett tal som har plats på tallinjen. Det går också att manipulera som 2/5 = 4/10 = 6/15 som tillslut går att få till 0,4.
- **Som del av en hel.** Bråket 2/5 betyder 2 av 5, där 5 är en hel. 2/5 är en förklaring på att man har två stycken femtedelar, där det behövs fem femtedelar för att få en hel. Bråket 2/5 är alltså en del av en hel.
- **Som del av ett antal.** Under denna representationsform tar Kilborn upp exemplet 2/5 av antalet 15. Då behöver man först göra klart för sig vad 1/5 av 15 är, för att sedan ta två sådana delar. I detta fallet är alltså varje 1/5 bestående av flera delar jämfört med tidigare fall då 1/5 bara bestod av en del.
- **Som proportion eller andel.** I vissa fall så säger bråket inget om beloppets storlek. Exemplet som tas upp i texten är ett bolag där ägaren ska ha 2/5 av vinsten och då är de två femtedelarna oberoende av storleken på beloppet och måste relateras till ett annat tal.

- **Som förhållande.** Bråket 2/5 kan uttryckas som ett förhållande. Kilborn tar upp exemplet ”För 5 kr kan man få 2 kg potatis” (Kilborn, 1999, s.47). Följdfrågan till detta är hur mycket potatis man kan få för 75 kr. Genom att först konstatera att man får 2/5 kg potatis för 1 kr kan man gå vidare och vända på frågeställningen och ta reda på att kilopriset är 5/2 kr eller 2,50 kr. På så sätt kan man ta reda på hur mycket potatis man kan få för 75 kr.

Inte bara Kilborn anser att det är viktigt att lärare är inläst på bråkens olika representationsformer utan dessa former beskrivs även av Clark, Roche och Mitchell i *10 råd att göra bråk levande* (2010). Författarna påpekar att det kan vara betydande att ta till sig dessa representationsformer för att kunna förändra undervisningen mot en större vardagskoppling.

Kilborn tar också upp två matematiska modeller med vilka man kan introducera bråk till elever med (1999). Problemet med att introducera bråk till elever är oftast inte att bråket i sig är svårt, utan att det är svårt att konkretisera. Med hjälp av dessa modeller kan läraren introducera bråkräkning för eleverna och båda modellerna är kopplade till vardagen. Den första modellen är *Brödkakemodellen* som bygger på cirkeldiagram och är en bra modell för att introducera stambråk, vilket är bråk på formen $1/n$. Brödkakemodellen är lätt att konkretisera till urtavlor och kompasser vilket kan vara till fördel för elevernas förståelse. Ett exempel på användning av brödkakemodellen är ”1/3 brödkaka är större än (mer än) 1/4 av samma brödkaka. Om tre personer delar en brödkaka (lika), så får var och en mer, än om fyra personer delar på samma kaka” (Kilborn 1999, 48). På så sätt kan brödkakemodellen introducera viktiga räkneregler för stambråk, men mycket längre än så kan man inte komma med hjälp av den modellen eftersom vissa bråk är svåra att introducera med hjälp av den men också för att det inte är möjligt att se alla räkneregler som gäller för bråk.

En starkare modell presenteras därför av Kilborn i texten, *Chokladkakemodellen*, som är möjlig att utveckla längre än brödkakemodellen och som också kan användas till att visa räkneregler för bråk (1999). I texten presenteras chokladkakemodellen med hjälp av att visa att 1/3 av 2 chokladkakor är lika mycket som om man räknar 2 multiplicerat med 1/3 chokladkaka.

När denna metod redovisas för eleverna är det viktigt att inte slarva så att inget blir fel, vilket kan vara förödande för elevernas förståelse kring bråk. Det är också viktigt att läraren har klart för sig att det för eleverna inte finns någon logisk förklaring till varför 1/3 av 2 skulle vara detsamma som 1/3 multiplicerat med 2. Chokladkakemodellen kan användas som hjälpmedel för att introducera räkning med de fyra räknesätten och bråk.

Två modeller som är kopplade till vardagen kan alltså användas till att introducera bråkräkning för eleverna, vilket ger en tydligare konkretisering av bråktal än om eleverna bara lär sig räkneregler för bråk. I boken diskuterar Kilborn även kring decimaltal och procent och hans redovisning tyder på att mycket inom dessa områden också går att anpassa på vardagen, framför allt inom procenträkning (Kilborn 1999).

Det lärare bör ha i åtanke enligt Kilborn är att de rationella talen inte kan behandlas enskilt utan måste behandlas tillsammans med andra delar av matematiken, framför allt i de yngre åldrarna där eleverna lär sig räkna med naturliga tal. Eleverna behöver också få förståelse för att dessa räkneregler även gäller för rationella tal. Eftersom eleverna behöver få ett sammanhang för sina kunskaper kan de rationella talen inte isoleras från resten av matematiken.

Enligt Kilborn har bråktalen en betydligt mindre roll i dagens samhälle och i vardagen, framför allt pågrund av tekniska hjälpmedel. Men att bråktal används mindre i vardagen behöver inte innebära att bråktalen ska ersättas med decimaltal i grundskolan för att underlätta för eleverna. Svårighetsgraden inom rationella tal på gymnasiet är fortfarande hög och därmed bör inte bråkets roll tonas ner i grundskolan.

I Kilborns text om bråk- och decimaltal beskrivs elevers kunskaper inom bråkräkning med exempel från TIMSS och PISA. Han skriver också att dessa tester tillsammans med nationella proven endast är summativa och därmed inte ger några fler detaljer än lösningsfrekvens. Det ger dock en fingervisning kring hur eleverna presterar (2014). På en uppgift såsom ”Beräkna $1/\frac{1}{2}$” var det bara 10 % av sjätteklassarna som löste den korrekt, medan lösningsfrekvensen på uppgiften ”Beräkna $\frac{4}{5}/2$” hade en lösningsfrekvens på 63 %.

7.3 Hur kan lärare koppla rationella tal mer till vardagen?

Doug M Clarke, Anne Roche och Annie Mitchell har skrivit en text som handlar om hur man kan göra bråk mer levande för eleverna (2010). Författarna går igenom olika förslag på hur man som lärare och lärarlag kan arbeta med bråk så att eleverna inte bara utför beräkningar utan också arbetar med uppgifterna, vilket förhoppningsvis ska leda till en djupare förståelse för rationella tal. De har tagit del av forskning från Australien och andra länder där svårigheterna för bråk har övervunnits. Genom att hantera de så kallade ”big ideas” kan undervisningen göras mer begriplig för både elever och lärare och kan därmed förstås bättre (Clark, Roche, Mitchell 2010).

Rationella tal är en stor del av kursplanen både i Sverige och andra länder och därmed också en viktig del av matematikundervisningen. Bråkräknandet är även viktigt för framtida matematikstudier, inom framför allt algebra och sannolikhet. Ett problem med bråkräkning enligt författarna är att bråk räknas som ett svårt moment där till och med vissa lärare uppfattar bråk som svårt både att förstå och undervisa om. Anledningen till att en del lärare och många elever uppfattar det som svårt tycks vara de olika tolkningarna, representationerna och symbolspråket (Clark, Roche, Mitchell 2010).

Svårigheterna med bråk är att forma samband så att förståelsen blir mer mogen och utvecklad, vilket i sin tur leder till att förståelsen för rationella tal kan förbättras. Med hjälp av texten vill författarna ge tio råd som kan hjälpa lärare att underlätta elevens förståelse för bråk och då även för rationella tal. I denna redovisning av texten kommer en genomgång av de tio råden ske.

Råd 1. Att betona innebörden av bråket mer än manipuleringen av det. Författarna påpekar att styrdokumenten betonar att målet med bråkräkning är att kunna operera med dem, genom att använda de fyra räknesätten. De tycker att eleverna ska använda sin tid i övning av bråkräkning till att förstå vad bråk handlar om, istället för att börja manipulera bråken direkt. Undersökningar visar att elever har svårt att uppskatta bråks storlek vilket kan vara beroende på att just förståelsen kring vad bråk handlar om inte är tillräckligt stor hos eleverna. Clark m.fl. anser att ett mål med arbete kring rationella tal exempelvis är att elever ska kunna avgöra reklam liknande att ”det är bättre med 5% rabatt än 50 kr rabatt” (Clark, Roche, Mitchell 2010, 3).

Råd 2. Utveckla en regel som kan användas som förklaring för täljare och nämnare. Författarna anser att lärares metod att förklara bråk fungerar för tal mellan 0 och 1, men inte för bråktal större än 1. Den metod lärare använder för att förklara bråk är att ”nämnaren talar om hur många delar det hela har delats i och täljaren talar om hur många av dessa man ska ta, räkna eller måla” (Clark, Roche, Mitchell 2010, 3). Den förklaringen Clark, Roche och Mitchell anser att man bör använda sig av är att utgå från bråket $^{a}/_{b}$ och förklara att b är namnet eller storleken på den del man förklarar och antalet av dessa delar med det namnet eller storlek är a. Exemplet de använder sig av i texten är ”om vi har $^{7}/_{3}$ talar 3 om namnet eller storleken på delarna, tredjedelar, och 7 talar om att vi har 7 sådana tredjedelar (eller $2\,^{1}/_{3}$)” (Clark, Roche, Mitchell 2010, 3). De menar att denna metod ska leda till bättre språkbruk hos eleverna kring bråk då det finns tecken på att eleverna har svårt att veta vilken siffra i bråket som refererar till delarna och delarnas storlek.

Råd 3. Vikten i att betona att bråk representerar tal och även använda tallinjen. Författarna lyfter fram studier som visar att lärare inte lägger tillräckligt med tid på att betona förhållandet mellan bråk och tal, eftersom det ses som självklart. De påpekar att användning av tallinjen har många fördelar i undervisningen av bråk. En anledning är att det ger elever en möjlighet att se sambandet mellan naturliga tal och rationella tal. Exempelvis kan det visa ”varför $^{5}/_{3}$ är detsamma som $1\,^{2}/_{3}$, att $^{6}/_{3}$ är detsamma som 2” (Clark, Roche, Mitchell 2010, 4) och det kan också demonstrera att det finns oändligt många tal mellan två rationella tal (Clark, Roche, Mitchell 2010).

Råd 4. Ägna tid av undervisningen till att uppmärksamma oegentliga bråk och ekvivalenser. Oegentliga bråk är då täljaren och nämnaren är lika stora, exempelvis $^{3}/_{3}$. Genom att förstå tallinjen kan eleverna också få förståelse för vad oegentliga bråk är. Författarna tar upp aktiviteten ”Färglägg bråk” som ett bra verktyg för förståelse för ekvivalenta bråk som i förlängningen kan hjälpa eleverna med förståelse för oegentliga bråk. ”Färglägg bråk” är ett spel där eleverna får tillgång till två tärningar som ska representera ett bråk. Eleverna arbetar med aktiviteten genom att slå tärningarna och sedan fylla i det på spelplanen där poängen är att fylla sitt bräde så fort som möjligt. Om eleven exempelvis slår en 4 och en 3 får hen välja mellan bråket $^{4}/_{3}$ och $^{3}/_{4}$. Målet med spelet är att eleverna ska fundera kring vad som är ekvivalent med bråken de slår, till exempel att $^{4}/_{3}$ är detsamma som 1 rad plus $^{1}/_{3}$. Spelet kan användas på alla nivåer där eleverna observerar varandra vilket leder till utvecklad förståelse (Clark, Roche, Mitchell 2010). Spelplanen kan ses i appendix A.

Råd 5. Representera bråk på olika sätt med hjälp av varierande modeller. Författarna tar upp problemet med att elever har svårt att använda sig av olika modeller vid bråkräkning. För att eleverna ska kunna använda sig av olika modeller måste de bli vana vid olika representationer av bråk och även olika material. Detta eftersom varje modell skiljer sig från de andra. Clark m.fl tar också upp att elever ofta har ont om modeller att använda sig av i sitt tänkande och i

Bråkpar	Vilket bråk är störst? Beskriv din strategi.
a. $^3/_8$ $^7/_8$	
b. $^1/_2$ $^5/_8$	
c. $^4/_7$ $^4/_5$	
d. $^2/_4$ $^4/_8$	
e. $^2/_4$ $^4/_2$	
f. $^3/_7$ $^5/_8$	
g. $^5/_6$ $^7/_8$	
h. $^3/_4$ $^7/_9$	

Figur 1. Ovanstående tabell innehåller åtta olika bråkpar som eleverna i Clark m.fl. studie fick arbeta med. Uppgiften var att diskutera och avgöra vilket av de två talen i varje par som var störst.

vissa fall kan de bara föreställa sig bråk som en cirkelyta eller delar av den, vilket visade sig när de svarade på frågan ”rita eller skriv $^3/_4$ på så många sätt du kan”. I texten lyfts en annan undersökning om bråktal fram, som handlar om elevernas tolkningar av en cirkelmodell. Genom att titta på resultatet av undersökningen kan man anta att de elever som behärskade olika modeller presterade bättre än de elever som inte behärskade dessa modeller. I texten förklaras att eleverna har nytta av att arbeta med problem som innehåller visuellt distraherande element, som exempelvis uppgiften ”markera $^3/_4$ av rektangeln”, för att de måste tänka matematiskt (Clark, Roche, Mitchell 2010).

Råd 6. Använda sig av referenspunkter som eleverna kan relatera bråken till vilket uppmuntrar uppskattning av bråken. Författarna genomförde en-till-en intervjuer där elever fick arbeta med åtta bråkpar där de skulle avgöra vilket av bråken som var störst. De bråktal som eleverna fick arbeta med är de som representeras i figur 1. Eleverna fick inte tillgång till något material utan fick bara genomföra jämförelserna i huvudet och förklara varför och hur de kom fram till sitt svar. De flesta eleverna i undersökningen gjorde först bråken liknämniga för att sedan jämföra de men de elever som presterade bäst använde sig också av andra metoder, som de ej lärt sig under matematikundervisningen i skolan.

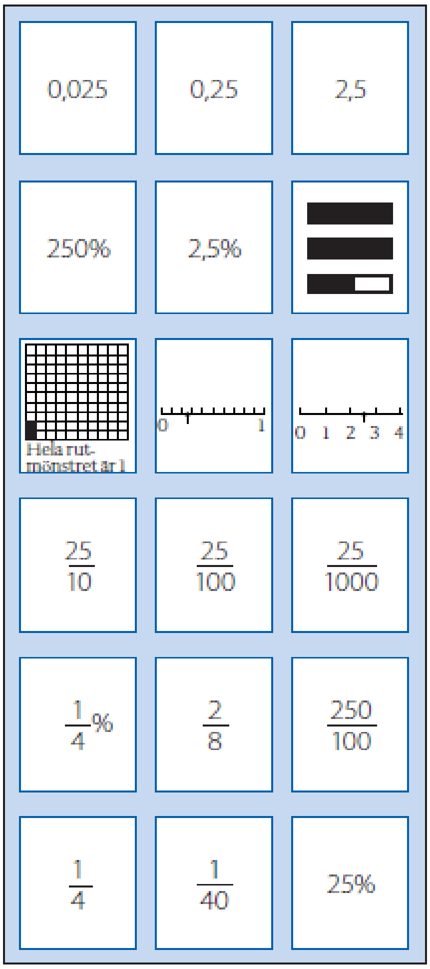
Den första metoden dessa elever använde sig av var *användning av referenssystem*, vilket innebär att eleverna jämför de olika bråken med 0, $^1/_2$ och 1. Exempelvis bråkparet $^3/_7$ och $^5/_8$ där det förstnämnda är mindre än $^1/_2$ medan det sistnämnda bråket är större än $^1/_2$.

Den andra metoden eleverna använde sig av var *beaktande av återstoden*, vilket innebär att eleverna jämförde bråken med hur mycket det saknades tills det blev 1. Exemplet Clark m.fl använder i texten är bråkparet $^5/_6$ och $^7/_8$, där eleverna kunde undersöka hur mycket det var kvar till 1 och fick att det återstod $^1/_6$ för $^5/_6$ till 1. För $^7/_8$ återstod det istället $^1/_8$ till 1 och eleverna kunde därmed avgöra vilket bråk som saknade minst till 1 och därmed var störst.

Det fanns också felaktiga metoder där eleverna exempelvis jämförde skillnader mellan täljare och nämnare. Problemet med det är att de då menade att $^5/_6$ och $^7/_8$ var lika stora eftersom det till båda bråken saknades en ”del” tills det blev 1. Författarna anser därför att det är viktigt att eleverna får ta del av varandras metoder och att detta kan användas i undervisningen kring bråk. Genom att använda olika metoder i undervisningen och låta eleverna ta del av varandras idéer kommer eleverna bli mer övertygande av användandet av referenspunkter. Att använda sig av referenspunkter är ofta en effektiv metod för att storleksordna bråk och fokuserar tydligt på vad bråk innebär. Denna delen saknas ofta i dagens undervisning av rationella tal och bör därför läggas mer tid på. En undersökning som författarna tar upp i texten visar att 60 % av beräkningar med bråk endast krävde uppskattning och överslagsräkning för att lösas, vilket tyder på att detta är en viktig del av förståelsen och bör läggas mer undervisning på. Framför allt är uppskattning och överslagsräkning med bråk en viktig förmåga i vardagen och borde därför integreras mer i undervisningen också. Den undervisningen som bedrivs i dagens läge förbereder inte eleverna tillräckligt för de problem de kommer ställas mot i vardagen (Clark, Roche, Mitchell 2010).

Råd 7. Lyfta fram bråk som division mer, vilket är en mindre uppmärksammad modell. Genom att titta på bråk som en division kan självklara lösningsstrategier komma till eleverna utan ansträngning. Exempelvis om elever uppmanas att skriva bråket $^3/_7$ i decimalform genom att använda miniräknare, då leder det till att eleverna automatiskt dividerar 3 med 7 vilket innebär att förhållandet mellan bråk och division uttrycks för eleverna utan att det behöver påpekas. Författarna genomförde intervjuer med elever där de fick se en bild med fem tjejer och tre pizzor. Efter eleverna fått titta på bilden ställde författarna frågan: ”Tre pizzor delades lika mellan fem flickor. Hur mycket pizza fick var och en?” (Clark, Roche, Mitchell 2010, 6). Resultatet av utfrågningen visar att de flesta eleverna ritade bilder eller delade upp pizzorna i huvudet för att sedan kunna beräkna hur stor del varje tjej fick. Enligt Clark m.fl tyder detta på att ”3 uppdelat på 5 är $^3/_5$” inte är automatiserad förståelse utan eleverna måste använda sig av andra metoder, som uppdelning, för att beräkna uppgiften. Bara 30,3 % av de utfrågade eleverna svarade rätt på uppgiften men ett ännu större bekymmer var att 11,8 % inte försökte sig på att lösa uppgiften överhuvudtaget. Författarna anser därför att det är viktigt att elever får möta fler divisionsproblem av denna typ för att kunna förstå relationen mellan bråkform och division (Clark, Roche, Mitchell 2010).

Råd 8. Lyfta fram sambandet mellan bråkform, decimalform och procentform för eleverna. Detta ska göras så fort det är möjligt för eleverna att förstå sambandet. När elever stöter på räkneuppgifter med bråk brukar de göra om det till antingen decimaltal eller procent. Författarna anser att kompetensen att kunna växla mellan de olika formerna av rationella tal är något som bör ägnas mer tid åt i undervisningen. En del forskare anser till och med att olika former av rationella tal bör introduceras tidigare än nu och då framför allt procent eftersom det verkar ha en viktigt roll för förståendet hos många elever. I texten använder de sig av en aktivitet för att öka förståelsen kring sambandet av formerna. Aktiviteten går ut på att varje elev får ett kort med ett rationellt tal som de ska storleksordna från minst till störst genom att ställa sig bredvid varandra i den ordningen. De kort som användes i övningen finns representerade i figur 2. Genom att träna förmågan att översätta tal i olika former övar eleven också förståelsen för rationella tal (Clark, Roche, Mitchell (2010).



Figur 2. Bilden visar de kort som eleverna får tilldelade sig för att träna koppling mellan representationsformer av rationella tal. Övningen går ut på att storleksordna korten.

Råd 9. Använda uppgifter för att intervjua enskilda elever där de får diskutera kring dessa för att förstå tankar och metoder. Författarna uppmuntrade lärare att genomföra intervjuer med sina elever. Resultatet av intervjuerna visade att de flesta lärarna ansåg att det var användbart för att se hur elever tänkte kring uppgifter. I flera fall ledde intervjuerna till en större respekt för elevers kunskap kring bråkräkning. Det ledde också till att lärarna förde vidare elevers berättelser kring uppgifterna till andra elever för att försöka få dessa att använda metoderna också. Lärarna ansåg alltså att intervjuer var ett bra sätt att urskilja kunskaper eftersom de tyckte de var tillräckligt bra för att föra vidare till andra elever.

En av de bättre uppgifterna som användes i intervjuerna var ”konstruera en summa”. Uppgiften gick ut på att eleverna ska ha kort med talen 1, 3, 4, 5, 6 och 7 och en spelplan, för att sedan placera ut korten på spelplanen så att summan är nära men inte lika med noll. När Clark m.fl genomförde uppgiften med sjätteklassare lyckades endast 25,4 % göra en summa mellan 0,9 och 1,1. Ett annat resultat av undersökningen av uppgiften var att 24,4 % utformade minst ett oegentligt bråk. Detta resultat visar att eleverna inte har tillräckliga kunskaper kring uppgifter av detta slag, vilket tydligt kan ses om ansvarig lärare genomför intervjuer med sina elever (Clark, Roche, Mitchell (2010).

Råd 10. Det sista rådet handlar om att ta fram bra uppgifter som eleverna kan arbeta med för att tänka och resonera kring bråk och vidare möta rationella tal. Författarna tar här fram sina favoritaktiviteter för utveckling av elevers förståelse kring bråktal. ”Bråkhängbron” är en av uppgifterna som de anser är bra att använda. Den går ut på att man visar bilder på ett antal olika sorters broar samt bilder på Golden Gate-bron. Därefter får eleverna förklarat för sig att de ska tillverka något liknande en bro med hjälp av bråk, genom att använda sig av tre 60 cm långa pappersremsor ska de tänka ut hur de kan använda $1/_2$, $1/_3$, $1/_4$, $1/_5$, $1/_6$, $1/_7$, $1/_8$, $1/_9$, $1/_{10}$, $1/_{11}$och $1/_{12}$ och klippa ut dessa ”bråkdelar” av pappersremsorna, där varje pappersremsa motsvarar en hel. Eleverna arbetar i par och ska med dessa tre remsor skapa alla bråk och sedan skapa en hängbro med ett annat par genom att klistra upp pappersbitarna med bråk på ett papper. Uppgiften stimulerar elevernas problemlösningsförmåga samtidigt som det ger eleverna möjlighet att se beviset på hur bråktalen hänger ihop när de rör sig från $1/_2$, $1/_3$ till $1/_4$ och så vidare. Eleverna får samtidigt öva sin förmåga att använda bråk som operatorer när de behöver räkna ut hur stora pappersbitarna ska bli.

En annan aktivitet Clark m.fl. lyfter fram genom texten är ”förstå operationer”. Den aktiviteten går ut på att eleverna får använda sin visuella förmåga för att ge förklaringar på olika operationer, så som $1/_2 + 1/_3$; $1/_2 - 1/_3$; $1/_2 \cdot 1/_3$ och $1/_2 \div 1/_3$.

Dessa tio råd är tips till lärare om hur de ska hjälpa elever med mötet med bråk och rationella tal. Alla tio råd är forskningsbaserade och kan användas i undervisningen för att göra bråk mer levande och öka förståelsen för rationella tal hos elever, samt att koppla undervisningen mer till vardagen där eleverna oftast stöter på problem kring bråktal.

8. Diskussion

I följande avsnitt kommer jag diskutera de texter jag valt att ha med i arbetet samt svara på de frågeställningar som ligger till grund för arbetet.

- Hur ser undervisningen inom rationella tal ut idag?
- Kan man anpassa den undervisning som sker i skolan idag mer till vardagen?

Vid en jämförelse av synen på matematik förr och nu finns det tecken på att den har förändrats en del. Förr sågs matematikundervisning som något som bidrog till bättre matematiskt tänkande, men undervisningen sågs även som något som formade eleven till en mer självständig människa. Genom att gå igenom de analyser som finns har dagens matematikenundervisning mer övergått i att välja en av dessa ingångar. Antingen ses undervisningen som en grund för fortsatta matematikstudier, eller så ses den som något som formar eleven. Idéerna om att undervisningen ska vara formad efter praktiska livet och att matematiken är något att använda för att utveckla elevernas förståelse har enligt mig till viss del försvunnit. Tanken om en matematikundervisning som förbereder elever för livet utanför skolan finns nog fortfarande kvar, dock finns det många andra krav på dagens undervisning på grund av till exempel nationella prov, då eleverna förväntas prestera och undervisningen bör därför då anpassas efter dessa. De nationella proven ska vara formade efter läroplanen men jag tror ändå en del av ”lärandet för livet” av matematikundervisningen gått förlorad nu eftersom inte alla lärare har den formande effekten av undervisningen i baktanke utan istället de nationella proven. I äldre texter om matematik står det bland annat att eleverna ska lära sig att tänka själva genom matematikundervisningen, men frågan är om det är möjligt i samma utsträckning nu som då. Om undervisningen istället skulle kopplas mer till vardagen och till sådant som eleverna känner igen istället för endast procedurer kanske mer av självtänkandet dyker upp. Går det att anpassa ”lärandet för livet”-förmågan på rationella tal eller gäller det generellt för matematiken? Så som det ser ut idag känns kopplingen mellan rationella tal och vardagen liten och om denna koppling gjorts mer tydlig i undervisningen kanske även kunskap om bråktal och decimaltal kan bidra till en utveckling av samhället.

Syftesbeskrivningar i läroplanen anser jag tyder på att undervisningen i skolan bör kopplas mycket till vardagen. Den första syftesbeskrivningen, ”undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen och inom olika ämnesområden”, visar tydligt att undervisningen om rationella tal bör föras närmare det eleverna får ta del av i vardagliga livet. Även den andra syftesbeskrivningen om att elever ska ges kunskaper om att tolka och beskriva vardagen tyder på att eleverna bör få undervisning som de har nytta av i vardagen. Undervisningen kring rationella tal bör då vara mer anpassad till samhället. Procenträkning är ett innehåll som till stor del även är en del av vardagen och om då undervisningen kan relateras till detta kanske även förståelsen för innehållet blir större. Detsamma gäller för bråktal såsom 1/4 som är mindre än 1 då dessa ofta syns i vardagen, matskedar, deciliter och andra mått är bra exempel. Därmed kan eleverna föra sina kunskaper från vardagen vidare genom undervisning i skolan. Syftesbeskrivningen om att undervisningen ska ge elever kunskaper i att kommunicera matematik inom både vardagliga och matematiska sammanhang visar också att undervisningen i skolan måste vara mer anpassad till vardagen. Enligt mig gäller detta även för rationella tal då det finns mycket i vardagen att anpassa undervisningen på och relatera till som elev. Vardagsanpassningen existerar i svenska skolan, både i ett undervisande syfte och genom att ge metoder till att lösa vardagsproblem. Dock anser jag att det kan finnas mer anknytning till vardagen eftersom många lärare planerar sin undervisning efter nationella proven istället. Enligt mig borde lektionsplaneringen fokusera mer på vardagsanknytning än nationella prov eftersom vardagen nämns mer i läroplanerna.

Gymnasiets kursplan i Matematik 1a har en del centralt innehåll med beskrivningar om att undervisningen ska innehålla till exempel beräkning av räntor och ammorteringar för lån. Detta är ett exempel på hur matematiken i undervisningen kan kopplas mer till vardagen. Det centrala innehållet på högstadiet skiljer sig här från gymnasiets kursplaner, här får läraren själv välja hur det centrala innehållet ska presenteras medan gymnasiekursplanerna innehåller tydliga exempel på hur undervisningen ska kopplas till samhället. Det står även i läroplanerna att de reella talen ska skrivas på olika former som används inom vardagslivet, så även här är en tydlig koppling till vardagen, dock finns det inte några exempel på hur detta ska göras utan det är upp till läraren. Under kategorin ”problemlösning” i det centrala innehållet i Matematik

1a står det även att undervisningen ska kopplas till andra ämnen i gymnasieskolan vilket också tyder på att det är viktigt att förankra undervisningen i annat än just detta fallet rationella tal.

Precis som Bergqvist m.fl. beskriver så är läroplaner i svenska skolan kortfattat skrivna och saknar tydliga specificeringar. Det som är viktigt att ha i åtanke när denna text läses är att den är utformad för de läroplaner som fanns innan Lgr 11 och Lgy 11 kom. Jag anser dock att den fortfarande är relevant och ifrågasätter dagens kursplaner på ett bra sätt. Den fråga som dyker upp vid läsning av läroplanerna tillsammans med denna genomgång är att det kanske inte är eleverna och undervisningen som brister utan det kanske är läroplanerna som behöver ha mer explicit innehåll så att lärare och arbetslag lättare kan göra planeringar efter läroplanernas ändamål. Genom att studera läroplanen i årskurserna 7-9 och läroplanen på gymnasiet anser jag att läroplanen på gymnasiet har bättre specificeringar av ändamålen med exempelvis räkning med räntor och budgetar. I läroplanen för grundskolan finns det inte lika många specificeringar. Specificering med koppling till framför allt vardagen tror jag bidrar till att fler elever får undervisning som de kan ha användning av i vardagslivet. Detta kan i sin tur ge ett större intresse för räkning med rationella tal.

Bergqvist tar också upp att verklighetsanknytningen inom matematikundervisningen delas in i tre olika typer beroende på vilken lärare som undervisar. Det som kan diskuteras kring det är att alla lärare inte anser att matematikundervisningen är till för att förbereda eleverna för livet och vardagen utanför skolan. En del lärare tolkar istället läroplaner som att undervisningen främst är till för att eleverna ska förstå matematik och de metoder som används, vilket kan ses som förberedelse för vardagen.

Målet med denna uppsats är att studera kopplingen mellan undervisning i matematik i skolan med samhället och vardagsproblem. Ett problem som dyker upp är då om lärare inte tolkar det centrala innehållet i läroplaner på det sättet. Lärarna själva kanske inte tycker att det är relevant med vardagsmatematik och därmed gör de inte lika uppenbara kopplingar. Kanske hade även mer koppling av undervisning av matematik till vardagen bidragit till mer kreativitet i arbetet med den, vilket flera lärare nämnde att det fanns för lite av inom skolmatematiken. Att låta lärare arbeta mer tillsammans kring läroplaner kan vara en fördel då de gemensamt kan komma fram till hur matematiken ska läras ut. Dessutom får de ta del av varandras idéer vilket kan leda till att alla tre typer av verklighetsanknytning som lärarna undervisar representeras. Samarbetet mellan lärare med konkretisering av kursplanen kan öka både kreativiteten i arbetet och framför allt kanske kopplingen av skolmatematiken till vardagen blir större då alla lärare arbetar mot samma mål och tillsammans lyfter fram kopplingen. Som Bergqvist m.fl. förklarar är det många lärare som påverkas av de nationella proven när de planerar sin undervisning. Även om de nationella proven innehåller en del uppgifter där elever kan se en koppling till vardagen anser jag att proven tar för mycket tid från undervisningen så att eleverna ändå inte ser någon användning av matematiken då den ofta lärs ut för att eleverna ska prestera så bra som möjligt på proven. Resultatet av analysen visar att procedurhantering är mycket vanligt i klassrummet, vilket även har en stark positiv korrelation med lärobokshantering. Detta arbetar negativt mot utvecklingen av andra kompetenser som exempelvis problemlösning. Min tanke är att detta kan leda till att procedurhanteringen tar plats från andra kompetenser som är mer kopplade till vardagen, vilket leder till att kopplingen till samhället blir mindre än vad den redan är. Om läroboksanvändningen och procedurhanteringen begränsades till förmån för andra kompetenser kanske istället kopplingen till vardagen blir större.

Hur kommer det sig att eleverna i sjätte klass presterade sämre på uppgifter där man antingen delade på bråktal eller hade hela tal eller subtraherade och adderade hela tal till bråktal? En anledning kan vara att eleverna inte kan relatera till hur talen ser ut, då det inte finns något i vardagen som går att anpassa på talet som ska räknas ut. En annan anledning kan vara det som Kilborn beskriver om att mycket av undervisningen av bråktal har övergått till decimalräkning. När eleverna då inte kan översätta bråktalen till decimaltal men ändå måste genomföra räkningen blir det problem. Detta stämmer överens med vissa av de tal som används i undersökningar som PISA och TIMSS. De uppgifter som exempelvis innehåller multiplikation av bråktal med hela tal har eleverna generellt lättare att räkna. Även här stämmer antagligen Kilborns redovisningen om att bråktalen översätts till decimaltal. Här kan eleverna använda sig av översättning till decimaltal men ändå få rätt tal och förståelse för vad för räkning de har genomfört, till skillnad från bråktalen som skulle adderas eller subtraheras med hela tal.

Genom att ta del av Kilborns text om bråkets olika representationsformer förstod jag att det är viktigt att man som lärare har koll på dessa former av bråk för att kunna bygga sin undervisningen kring dessa. Det är också intressant att de två modeller som länge använts för att introducera bråkräkning till elever (brödkakemodellen och chokladkakemodellen) både har en vardagsanknytning. Kanske är det en sådan koppling som behövs för att elever bäst ska ta till sig undervisningen? Den form vardagsanknytning som sker i detta fall är då vardagen används för att ge förklaring av innehållet till eleven. Varken brödkakemodellen eller chokladkakemodellen ger den form av vardagsanknytning där eleven kan använda innehållet till lösning av problem i vardagen.

Clark m.fl tar upp tio råd som ska hjälpa lärare att planera undervisningen så att bråkräkningen i skolan blir mer levande. Att göra bråkräkning mer levande tycker jag har ett tydligt samband med att koppla undervisningen mer till vardagen, vilket dessa råd också gör enligt mig.

Råd 1 anser jag är vettigt då jag tycker att undervisningen ska kopplas mer till vardagen vilket är just det författarna tycker är viktigt. Författarna förklarar att manipulera bråk inte är det enda sättet att arbeta med bråk på, det är framför allt viktigt att få förståelse för vad bråkräkning innebär. Här kan vardagsanknytning ge viktig förståelse för vad bråk innebär med exempel såsom bråkräkning som behövs när man handlar och så vidare.

Råd 2 och 3 kan tyckas fråntagna från frågeställningen men jag tycker ändå att de har en viktig innebörd för förståelsen av bråk och rationella tal hos elever. Rationella tal i vardagen, exempelvis genom att laborera i hemkunskap, kan ge eleverna ett större intresse för bråk. Därefter kan man använda sig av råd 2 och 3 för att ge ytterliggare en dimension till undervisningen så att eleverna har användning av den och kan använda den till vardagliga problem. På så sätt anser jag att vardagen och undervisningen hör ihop och dessa råd underlättar kopplingen mellan vardag och skola.

I råd 4 och 5 ser man enligt mig hur viktigt det är för förståelsen hos eleverna att de får arbeta med aktiviteter istället för procedurräkning. För att eleverna ska få förståelse för något anser jag att det är viktigt att eleverna får dela med sig av sina tankar och idéer och ta sig an uppgifter utan att veta vilken metod de ska använda.

Råd 6 påpekar vikten av att träna de förmågor som används i vardagen. Undersökningar visar att metoder som inte används i undervisningen är de metoder som elever använder för att lösa uppgifter. Varför inte integrera dessa i undervisningen så att eleverna kan lära sig behärska dessa på ett bättre sätt och så att alla kan få ta del av dem? Detta råd och undersökningen visar att min frågeställning går att svara på. Det finns tecken på att elever använder metoder de själva kommit på för att lösa uppgifter i skolan som går att återfinna i vardagen. Om man istället kan låta eleverna använda dessa metoder som referenssystem och uppskattning av återstoden även i undervisningen får eleverna lösningsmetoder till räkning av bråk både i undervisningen men också i vardagen.

Råd 7 visar att elever löser vardagliga problem, som uppdelning av pizza, med metoder som inte lärs ut så mycket om i skolan. Genom att arbeta med fler divisionsproblem i skolan kan eleverna bli mer förberedda för de problem de kommer möta utanför skolan, som i många fall är divisionsproblem där eleverna exempelvis behöver dela upp saker mellan varandra. De divisionsproblem som eleverna behöver arbeta med är oftast av den sorten att de liknar vardagsproblem, vilket är ytterliggare en anledning till att föra undervisningen i skolan och vardagen närmare varandra på flera plan inom de rationella talen.

Råd 8 skiljer sig lite från vad andra rapporter visar, där översättningen mellan bråktal till decimaltal inte är en eftertraktad förmåga. I råd 8 beskrivs att växlingen mellan bråktal och decimaltal bör uppmuntras medan andra tycker att det är en dålig förmåga att översätta från bråktal till decimaltal. Undersökningar visar att elever har svårt att lösa standarduppgifter av bråktal och en anledning kan vara att de inte kan räkna bråktal utan först måste översätta de till decimaltal. Dock kan man tänka att råd 8 står för att översättningen mellan former av rationella tal bör uppmuntras och inte att bråktal ska översättas till decimaltal direkt utan att elever förstår vad de gör. Om eleverna istället för öva på att översätta mellan olika former kanske översättningen från bråkform till decimalform inte sker för att eleverna inte kan behärska någon annan form utan för att eleven självmant förenklar förståelsen. Då används översättning som ett hjälpmedel och de kan fortfarande behärska de andra formerna även om de använder en annan.

Råd 9 är ett tydligt exempel på att det är viktigt att prata matematik med eleverna och dessutom låta de berätta sina tankar. Detta tycker jag är ett exempel på hur man som lärare kan frångå den undervisning som genomförs i dagens skola. Genom att låta eleverna prata om matematik anser jag att undervisningen kopplas mer till vardagen och ger eleverna förståelse för framtida problem och hur de ska angripa dessa.

Råd 10 handlar om att låta eleverna arbeta med uppgifter som handlar om att resonera kring rationella tal. Flera av de uppgifter som tas upp har en koppling till vardagen som exempelvis Hängbron som både handlar om att eleverna ska få arbeta visuellt men också att de får se bilder på broar som faktiskt existerar. Författarna tycker att dessa uppgifter är bra för att få elever att förstå samband kring rationella tal och man kan då anta att en del av den förståelsen uppkommer eftersom eleverna förstår kopplingen till vardagen och samhället.

Dessa tio råd visar tillsammans att undervisningen i skolan kan förbättras till förmån för elevernas förståelse för bråktal och rationella tal. Råden visar att en starkare koppling till vardagen ger mer mening av bråkräkning för eleven som hen också kan se en användning av i framtiden. Genom att titta på de undersökningar som finns gällande svenska elevers resultat vid bråkräkning finns det mycket som hade kunnats förbättras om eleverna fått ta del av undervisning anpassad efter dessa 10 råd. Exempelvis hade kanske fler elever förstått bråks storlek om de inte bara räknat procedurräkning utan istället arbetat med vad bråk innebär.

9. Slutsats

Genom att studera den utvalda litteratur till examensarbetet med hjälp av de frågeställningar som formulerats har jag kommit fram till att det finns sätt att koppla dagens undervisning ännu mer till vardagen. Undervisingen går att knyta an till vardagen på olika sätt, dels kan vardagsanknytning användas till att ge förståelse för innehållet (exempelvis chokladkakemodellen) och dels kan man få undervisning som bidrar till att man kan lösa problem i vardagen bättre (exempel att man behärskar bråktal och därmed lättare kan läsa recept). Detta skulle i sin tur leda till bättre förståelse för rationella tal hos eleverna samt att eleverna kan få bättre användning av sina kunskaper då de kan anpassa de på vardagsproblem. De olika kopplingarna till vardagen kan också leda till ett större intresse för undervisningen kring rationella tal.

Det finns tydliga tecken på att kopplingen mellan undervisning i rationella tal och vardagen bör finnas, då både läroplanen för grundskolan och läroplanen för gymnasiet antyder detta. Tillsammans med de forskningsrapporter och artiklar jag tagit del av blir en självklar slutsats att kopplingen behövs, men behöver även utvecklas så att eleverna känner att de får användning av matematiken i vardagen men också att de genom relevant vardagsanknytning kan förstå innehållet i undervisningen.

Ett problem som uppkommer även om läroplanerna antyder att vardagsanknytning är viktigt är att lärare kan tolka det centrala innehållet olika och därmed kan kopplingen gå förlorad ändå. Beroende på vilken inställning läraren har till vilken undervisning hen vill bedriva kan läroplanen tolkas olika. En lösning på problemet kan vara att låta lärarna genomgå kompetensutbildning inom att läroplaner kan tolkas på olika sätt så att vardagsanknytningen inte går förlorad. Detta kan göra att undervisningen inom rationella tal blir mer rättvis gentemot eleverna så att alla får ta del av den vardagsanknytning som undervisningen bör innehålla.

Om man som lärare tar till sig de tio råd som Clark m.fl beskriver kan man bättre anpassa undervisningen i rationella tal efter eleverna och de vardagsproblem de kommer stöta på. Jag anser att det är viktigt att man låter eleverna förstå varför de behöver rationella tal och därmed minska synen om att det är något svårt formellt. Rationella tal är ett ämnesområde som eleverna kan ha användning av i vardagslivet men det är också en inkörsport till algebran och fortsatta matematikstudier.

Efter att ha skrivit detta examensarbete kan jag tycka att det är mycket man som lärare behöver göra för att anpassa undervisningen i rationella tal mer till vardagen. Visst kan det tyckas mycket att göra för just ett ämnesområde inom matematiken, men det finns inget som säger att de förberedelser man gör här inte går att generalisera till andra ämnesområden. I bästa fall kan en bättre vardagsanknytning inom rationella tal leda till en bättre förståelse inom andra ämnesområden också.

10. Litteraturförteckning

Bergqvist, E. Bergqvist, T. Boesen, J. Helenius, O. Lithner, J. Palm, T. Palmborg, B. (2010) *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet – Grundskolan våren 2009.* Göteborg: Göteborgs Universitet/NCM.

Clark, D.M., Roche, A., Mitchell, A. (2010) *10 sätt att göra bråk mer levande*. Göteborg: Göteborgs Universitet/NCM.

Kilborn, W. (1999) *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 2. Rationella tal och irrationella tal.* Upplaga 1:3. Stockholm: Liber AB.

Kilborn, W. (2014) *Om tal i bråk och decimalform – en röd tråd.* Göteborg: Göteborgs Universitet/NCM.

Lundin, S. (2008) *Skolans matematik: en kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling.* Diss. Uppsala : Uppsala universitet.

Skolverket. (2011) *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011) *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011) Matematik. *Skolverket.* file:///C:/Users/Karin/Downloads/Matematik%20(1).pdf (2015-03-22).

Vretblad, A. Ekstig, K. (2011) *Algebra och Geometri.* Upplaga 2:4. Malmö: Gleerups.

10.1 Figurförteckning

A. Appendix

<table>
<tr><td colspan="12"></td><td colspan="12"></td></tr>
<tr><td colspan="8"></td><td colspan="8"></td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="6">tärningarna visade</td><td colspan="6">Vad jag färglade</td><td colspan="6">tärningarna visade</td><td colspan="6">Vad jag färglade</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
</table>