Gymnasieelevers tolkningar avseende matematiska representationer av rätlinjig rörelse

Gymnasieelevers tolkningar avseende matematiska representationer av rätlinjig rörelse

Från händelse till process

Djamshid Farahani

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Licentiate thesis in Mathematics Education at the Department of Pedagogical, Curricular, and Professional Studies, Faculty of Education, University of Gothenburg.

The licentiate thesis in full text can be downloaded from GUPEA – Gothenburg University Publikations – Elektronic Archive: http://hdl.handle.net/2077/41951

This licentiate thesis has been prepared within the framework of the graduate school in educational science at the Centre for Educational and Teacher Research, University of Gothenburg.

In 2004 the University of Gothenburg established the Centre for Educational Science and Teacher Research (CUL). CUL aims to promote and support research and third-cycle studies linked to the teaching profession and the teacher training programme. The graduate school is an interfaculty initiative carried out jointly by the Faculties involved in the teacher training programme at the University of Gothenburg and in cooperation with municipalities, school governing bodies and university colleges.

Abstract

Title: Upper secondary school students' interpretations of analytical and graphical representation of linear motion– From event to process
Author: Djamshid Farahani
Language: Swedish with an English summary
GUPEA: http://hdl.handle.net/2077/41951
Keywords: Mathematical representations, linear motion, intuitive knowledge, conceptual change

The ability to interpret mathematical concepts is a prime concern in science in general and physics in particular. The aim of this licentiate thesis is to investigate and analyze upper secondary school students' interpretation of graphical and analytical representation of linear motion. The report presents a study focused on 17 students from two upper secondary schools, located in two different areas in Gothenburg. Video recording was arranged for documentation of students' activities. The observer was not present during the recording. The collected material consists of about 10 hours video recording divided into 20 sequences about 15 – 50 minutes each.

The task used to approach students' interpretations of graphical representation of linear motion where related to a distance-time graph and symbolic representation of linear motion where related to a distance-time function.

The theoretical framework is based on constructivism, including the theory of concept image and concept definition of Tall and Vinner and models of conceptual change developed by diSessa and Chi.

The result shows that iconic interpretations were most prevalent among students who used only everyday concepts to explain the phenomenon and students who used relevant concepts to the tasks, but did not manage to apply them correctly. The outcome further indicates those students' alternative conceptions about graphical patterns and distance-time graph can be explained by ontological categorization of existing concept. There is evidence to support that iconic interpretations could be stimulated and generated as a result of student categorization of distance-time graph as an event, when in fact graph such as distance – time graph or velocity – time graph are used to

describe and communicate phenomenon or processes. In this case conceptual development could be specified when a concept has to be re-assigned to an ontological lateral category.

Most students are comfortable in using distance function to calculate difference quotient and average velocity in different intervals. Less than half of student used the derivative to determine instantaneous velocity of the object. Students' concept image of the derivative of distance function is related to instantaneous rate of change. Most students in this study have acquired knowledge to link symbols and operations. There were cases where students' concept image was found to be incoherent to establish a link between symbols and concepts in the proceptual - symbolic learning of mathematical concepts.

Förord

Processen att skriva denna licentiatuppsats har varit både krävande och lärorik. Jag vill rikta ett stort tack till min huvudhandledare Thomas Lingefjärd som engagerat hjälpt mig med framtagande av denna text och för allt stöd och förtroende jag fått under min forskarutbildning.

Ett stort tack riktas även till Mona Holmkvist Olander som tydliggjort strukturella frågor.

Jag vill också tacka fysik- matematiklärarna Finn Hjertén och Björn Toresson som hjälpt mig att arrangera videoinspelningar. Ett stort tack till dem som läst och kommenterat det jag skrivit. Det gäller särskilt Åke Ingeman.

Sist men inte minst vill vi tacka mina nära och kära för att de stått ut med mig under dessa år som uppsatsen producerats men också för de tidigare åren.

Innehåll

Kapitel 1 Inledning

Det här arbetet grundas i ett intresse av att få en insikt om svenska gymnasieelevers kunskaper om matematiska representationer av rätlinjig rörelse. Att det finns behov av att studera detta område visar bland annat resultaten från PISA 2012. I den framkommer att svenska elevers kunskaper i bland annat matematik och naturvetenskap fortsätter att försämras. Det stärker behovet av mer forskning för att identifiera möjliga orsaker till resultatnedgången, men även för att studera hur specifika innehåll förstås av eleverna. Med hjälp av vetenskapligt grundade resultat kan vi skaffa kunskaper om elevers lärande som möjliggör att vända den negativa utvecklingen och möta framtida utmaningar.

Matematik är en abstrakt vetenskap som stödjer sig på generella samband och relationer. Matematiska representationer, som till exempel diagram, histogram, funktion, graf, tabell och symboler, underlättar vanligtvis vår förståelse av abstrakta matematiska begrepp. En stor del av den information vi får i vardagen förmedlas via matematiska representationer. Att ha insikt i och kunna använda sig av olika representationer ses som en central aspekt av begreppsförståelse och kunskapsbildning. Matematik och flera naturvetenskapliga ämnen uppfattas ofta som svåra att lära, vilket kan bero på ämnenas karaktär, men också på många sammanhängande abstrakta begrepp inbäddade i olika representationer.

Hur elever tolkar och resonerar kring olika matematiska representationer, som används för att kunna förstå och analysera vår omvärld, är viktigt att studera närmare. Wittmann (2005) menar att representationer i kombination med konkreta material är det bästa sättet att förbereda elever i att applicera matematik på mer generella situationer.

I matematikundervisning arbetar lärarna ofta med olika representationer för att underlätta elevers förståelse av matematiska begrepp. Läromedel i matematik och naturvetenskap innehåller dessutom många illustrationer kopplade till olika begrepp och deras representationsformer. Till exempel

används grafiska framställningar, funktionskurvor och diagram av olika slag. De förekommer bland annat för att introducera nya begrepp eller för att studera samband, beroende och förändring.
Att elever ska lära sig olika representationsformer är något som Skolverket också har tagit fasta på. Det uttrycks i betygsnivåer och kunskapskrav samt i vikten av att eleverna ska kunna kommunicera kring begrepp och växla mellan olika representationsformer. I kursplanerna för skolämnet matematik betonas bland annat vikten av förståelse avseende egenskaper hos representationer av matematiska begrepp. I kunskapskraven för matematikkurser enligt kursplanen Gy2011, Lgr 11 (utbildningsdepartementet, 2011) står följande:

> Eleven kan med viss säkerhet visa innebörden av centrala begrepp i handling samt översiktligt beskriva innebörden av dem med någon annan representation. Dessutom växlar eleven med viss säkerhet mellan dessa representationer.

Undervisning ska syfta till att använda matematiska representationer för att lära eleverna kommunicera matematik och koppla den till sin egen vardag. För att kunna använda matematiken på ett meningsfullt sätt bör elever även kunna tolka samband mellan olika representationer och kunna göra övergångar mellan dem.

Internationellt sett har det genomförts ett flertal olika forskningsstudier med syfte att undersöka elevers konceptuella förståelse av matematiska representationer, genom att bland annat studera hur tidigare kunskaper och erfarenheter inverkar på elevers tolkning av begrepp. Tidigare forskning har strävat efter att identifiera och lyfta fram elevers alternativa tolkningar av fenomen och processer beskrivna genom grafiska representationer. Ett exempel är s-t-graf och v-t-graf vid framställning av rörelse i den klassiska mekaniken. I Sverige har det under de senaste åren bedrivits matematikdidaktisk forskning som bland annat inriktat sig mot gymnasielevers/studenters lärande av specifika begrepp inom bland annat matematisk analys (Juter, 2006; Pettersson, 2008).

Med bakgrund i ovanstående studeras i denna uppsats hur gymnasieelever på det naturvetenskapliga programmet tolkar matematiska representationer av rätlinjig rörelse. Särskilt fokus läggs på den enskilde elevens uttryckta förståelse av grafisk och analytisk representation av rätlinjig rörelse. Analys av elevers arbete med grafiska frågeställningar utgår från Chi & Slottas (1994, 2006, 2012) ontologiska perspektiv på begreppsutveckling samt teorin om intuitiv kunskap utvecklad av diSessa (1993) och Elby (2000).

Analysen av elevers svar på symboliska frågeställningar har gjorts med utgångspunkt i Tall & Vinners teori (1981, 2004, 2008) om begreppsbild och begreppsdefinition. De perspektiv som utgör studiens teoretiska ramverk har utvecklats utifrån en konstruktivistisk syn på lärande och kunskapsbildning.

Studiens empiri utgörs av data från elever i två gymnasieskolor belägna i två olika stadsdelar i en svensk storstad. I studien ingår 17 gymnasieelever som läser det naturvetenskapliga programmet i årskurs två. Datainsamlingen genomfördes under september 2012 – februari 2013.

Uppsatsens disposition innebär att först presenteras studiens syfte med frågeställningar och avgränsningar, därefter uppsatsens teorietiska ramverk. Avslutningsvis följer resultat, analys samt diskussion och slutsatser.

Studiens syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är att undersöka på vilket sätt gymnasieelever uttrycker sin förståelse av matematiska representationer av rätlinjig rörelse. Syftet besvaras via följande frågeställningar:

1. Hur tolkar gymnasieelever grafiska och symboliska representationer av rätlinjig rörelse?
2. Vilka begreppsbilder ger eleverna uttryck för?
3. Finns det urskiljbara samband mellan elevernas tolkningar av grafiska respektive symboliska representationer?

Förtydliganden och avgränsningar

Denna studie är i första hand fokuserad på att finna förklaringsmodeller till varför elever tycks tolka samma specifika begrepp olika, vilket sker genom att elevers tolkningar vid elevgruppers samtal analysera.

I den kvalitativa forskningstraditionen läggs tonvikt vid bland annat att analysera elevers/studenters *tolkningar* och *förståelse* av begrepp. Därför är det av stor betydelse hur forskaren förhåller sig till dessa begrepp. I detta avsnitt följer en redogörelse om hur jag har valt att förtydliga termerna tolkning och förståelse.

Vi människor förefaller vara beroende av tolkningar för att orientera oss i tillvaron. Att tolka ett begrepp kan ses som den enskilde individens försök att reda ut och uttrycka sig om begreppet och om de aspekter som individen anser vara relevanta. En tolkning är beroende av någon slags insikt, någon slags förståelse. För att tolka grönt fält på en karta som vegetation behöver vi ha utvecklat en förståelse för skog. Men skiljelinjen mellan tolkning och förståelse i forskningslitteraturen är inte tydlig, det är en svår distinktion att göra.

Det finns många sätt att beskriva förståelse. Förståelsen enligt diSessa (1993) relaterar till distinktionen mellan omständigheter kring ett problem och vetenskapliga modeller och principer som är relevanta för lösning av problemet. Han argumenterar för vikten av intuitiva tolkningar som en utgångspunkt för utveckling och djupare begreppsförståelse.

För Tall & Vinner (1981) är förståelsen starkt förknippad med utvecklingen av begreppsbilder och att djupare förståelse kan nås då individen konstruerar begreppsbilder som är helt eller delvis koherenta med formella matematiska begreppsdefinitioner.

Min utgångspunkt i analysen av det empiriska materialet är antagandet att elevens begreppsförståelse styrs av begreppsbilder som i sin tur genererar tolkningar som verkar vara trovärdiga för individen i en specifik situation. För att synliggöra elevers begreppsförståelse, genom att lyfta fram och analysera tolkningar eller uttryckta förståelse, krävs att de elevtolkningar som tas upp i analysen har bärkraft i ett specifikt innehåll. Elevtolkningar som analyseras utgörs av elevers utsagor under gruppsamtal vilket dokumenterades genom videoupptagning (cirka 10 timmars videoinspelning, uppdelade i 20 videosekvenser om vardera 15-50 minuter), samt skriftliga svar och anteckningar som eleverna producerade vid gruppsamtalen. Detta innebär att analysen av elevens tolkningar avgränsas till vad den enskilde eleven uttalat sig om och antecknat under ett samtal.

I arbetet används termen alternativa uppfattningar i de fall eleverna uttryckt en uppfattning som inte är densamma som den formella innebörden. Det görs för att undvika termen missuppfattningar som antyder att eleven har ett felaktigt antagande. I detta arbete analyseras inte om eleven har korrekta eller felaktiga antaganden. Det som ska lyftas fram och analyseras är istället olika aspekter av elevers uttryckta förståelse av specifika matematiska innehåll.

Kapitel 2 Teoretiska utgångspunkter

Studiens teoretiska ramverk utgår från ett konstruktivistiskt perspektiv om lärande och kunskapsbildning. Till den konstruktivistiska traditionens grundidéer hör uppfattningen att individen konstruerar kunskaper utifrån sina erfarenheter i ett samspel mellan sinnesintryck och förnuft (Wyndhamn, Riesbeck & Schultz, 2000).

Ramverket utgår dels från teorin om intuitiv kunskap och begreppsutveckling utarbetad av diSessa (1993) samt Chi & Slotta (1994, 2013) och dels från Tall & Vinners (1981) teori om begreppsbild och begreppsdefinition samt Tall & Grays (1994) om tre matematiska världar.

Presentationen av teoretiska ansatser kompletteras dessutom med vägval i studien i kombination med att terminologin förtydligas. Syftet är inte att innefatta alla aspekter av de presenterade teoretiska ramverken. Texten ska ses som en presentation av de delar som är relevanta för uppsatsens teoretiska grund.

Begreppsutveckling, intuitiv kunskap och grafiska representationer

Avsnittet behandlar de teorier som ligger till grund för analys av elevers arbete med grafiska och symboliska frågeställningar. Med utgångspunkt i konstruktivistiska ansatser redogör jag för hur jag valt att förhålla mig till och presentera teorier för begreppsutveckling, intuitiv kunskap och grafiska representationer.

Begreppsutveckling

Enligt Ernest (1998), grundas den konstruktivistiska synen på människans lärandeförmåga och kunskapsbildning delvis på Piagets (1929, 1930, 2006) antaganden om att kunskap konstrueras aktivt av individen genom att tolka nya erfarenheter utifrån ett redan existerande kognitivt schema. Piaget var bland annat intresserad av hur begrepp utvecklas hos barnet, därför kallas hans teori enligt Arfwedson (1998) internationellt för *genetisk epistemologi* (på svenska genetisk strukturalism). Termen epistemologi härstammar enligt

Hartman (2003) från grekiskans *episteme*, vilket översätts med kunskap. Ordet *genetisk* har här betydelsen uppkomst eller ursprung.

De grundläggande mekanismerna för lärande och kunskapsutveckling för Piaget var mekanismen för *adaption* eller anpassning. Stensmo (2007) beskriver att Piaget använder termen adaptation för att beskriva hur människan genom en aktiv kognitiv process anpassar sig till förändringar och nya erfarenheter. Adaption innefattar två sammankopplade kognitiva processer; *assimilation* och *ackommodation*. Genom assimilation införlivar individen alltmer kunskap med sina bifintliga tankestrukturer (schema) utan att tankestrukturerna själva behöver förändras. Ackommodation innebär att strukturerna omstruktureras så att de blir mer anpassade för att hantera nya erfarenheter på ett sätt som inte var möjligt med tidigare tankescheman. Genom upprepade ackommodation upprätthålls jämvikt.

diSessa et. al. (1994) skriver om Piagets kvalitativa intervjuer med barn i åldrarna 4 – 13 år och deras tankar och idéer om bland annat naturfenomen:

> Following Piaget's repeated demonstrations that children think about the world in very different ways than adults, educational researchers in the late 1970s began to listen carefully to what students were saying and doing on a variety of subject-matter tasks. (diSessa et. al. 1994, sid. 4)

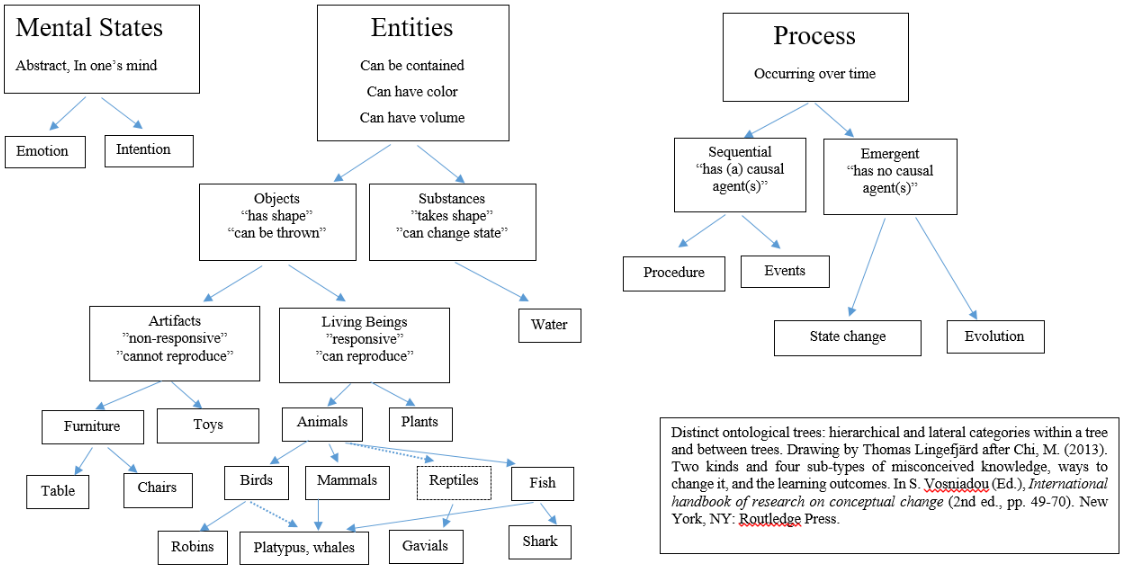
Dessa studier visade att barn inte tänker så strukturerat och utvecklat som läraren förmodar, utan utvecklar, utifrån sina egna referensramar, andra sätt för att förstå och beskriva hur världen fungerar. Insikterna kom att fånga många forskares intresse och det blev början till den forskning som bland annat handlar om att ge beskrivningar av begreppsutveckling och dess status.

Begreppsutveckling har varit ett starkt inslag i forskningen om lärande av vetenskapliga begrepp (Treagust & Duit, 2008). Forskning om begreppsutveckling har bland annat rört grundläggande frågor om vad ett begrepp egentligen avser och vad som förändras.

Begreppet *begrepp* hör till vetenskapliga teorins grundelement och är väsentligt inom såväl teoretiska som praktiska områden. Inom naturvetenskap används begrepp för att etablera en grund för vetenskapligt resonemang och teorier som syftar till att förklara naturfenomen. Holton hävdar att ”A concept is useless if it does not appear in relation to other concepts, or if we fail to support it with clear definitions, ”(Holton 1952, sid. 221). Holton argumenterar för vikten av begreppens definition och hävdar att

begreppsdefinitionen används av vetenskapsmän för att kommunicera och nå gemensam förståelse. Galili & Lehavi (2006) skriver att naturvetenskap tolkar världen i termer av begrepp sammankopplade inom teorier som syftar till att förklara naturfenomen.
Inom ett begreppsinriktat perspektiv på lärande återfinns olika teoretiska inriktningar och ansatser. De perspektiv som inkluderats i studiens teoretiska ramverk är; det epistemologiska, det metafysiska samt det kognitivistiska perspektivet, Chi (2013).

Det epistemologiska perspektivet på begreppsutveckling tar sin utgångspunkt i kriterier för skillnad. Vår uppfattning om hur världen är beskaffad och hur vi förstår oss på den omfattar tre ontologiska ”*laterala*” kategorier; mentala tillstånd, materia och processer, Chi (2013), se figur 1.



Figur 1 Begreppsutvecklingens ontologiska antagande Chi (2013)

Människan skapar, i ett tidigt skede, grundläggande ontologiska uppfattningar om hur världen är uppbyggd. Genom iakttagelser av företeelser utvecklar hon ett schema där begrepp får sin innebörd och ontologisk tillhörighet. Vi lär oss inte bara en massa begrepp utan även begreppens ontologiska kategoritillhörighet. Frågan ”Hur mycket väger VM i fotboll?” låter helt apart. Hur mycket ett föremål väger uppfattas som en materialegenskap som tillhör kategorin *Entities*, medan VM i fotboll kategoriseras som en händelse *Event*. De tillhör olika kategorier och kan inte skapa ett begripligt sammanhang.

Chi & Slotta (1994) refererar till tidigare studier som har visat att närliggande underkategorier i en och samma gren uppfattas som ontologiskt skilda laterala kategorier. Till exempel har de flesta barn (5-6 år gamla) en uppfattning om skillnaden mellan artefakter och levande ting. Begreppsutveckling, utifrån ett epistemologiskt perspektiv, beskrivs som en process genom vilken vi tilldelar begrepp skilda ontologiska kategorier. Denna ständigt pågående process sker inom oss och strävar efter att tolka nya situationer och göra dem begripliga.

Det metafysiska perspektivet på begreppsutveckling betonar vikten av vår uppfattning om de vetenskapliga begreppens natur. Chi (1994, 2005) hävdar att elevernas svårighet att lära sig naturvetenskapliga begrepp kan sökas ur laterala kategoriers ontologiska karaktär. Ett väldokumenterat fenomen är elevuppfattningar som kategoriserar ljus eller elektrisk ström som materia. De vetenskaplig beprövade teorierna beskriver däremot elektrisk ström och ljus som processer Chi (2013, sid. 57).

> Misconceptions result from commitments to an inappropriate ontology. It is difficult through any stages of mental transformation to change one's fundamental conception from a substance to a process (Chi & Slotta, 2006, sid. 263)

Begrepp förstås utgående från de kategorier som de ingår i. När ett begrepp tilldelas en viss kategori övertar det alla egenskaper som hör till den kategorin. Vissa alternativa uppfattningar är extremt resistenta mot förändringar vilket kan bero på felaktigt kategorisering av begrepp.

> Thus, we propose that, in order to achieve radical conceptual change, we need students to make a category shift by assigning a concept to an alternative lateral category so that concept can inherit the dimensions of this alternative category. (Chi, 2013, sid. 59)

Begreppsutveckling, utifrån det metafysiska perspektivet, beskrivs som omstrukturering av begrepp över ontologisk laterala (icke hierarkiska) kategorier. Förståelse av vetenskapliga begrepp är speciellt svårt eftersom processen ibland kräver en förändring av begreppets tillhörighet tvärs igenom skilda kategorier Chi & Slotta (1994).

Ibland kan en kognitiv konflikt skapa förutsättning för en sådan omstrukturering. En kognitiv konflikt uppstår på grund av att individens uppfattning eller det denne har lärt sig visar sig vara otillräckligt för att förklara en specifik situation eller att uppfattningen leder till en paradox. Med en konstruktivistisk terminologi kan kognitiva konflikter ses som brytpunkten mellan assimilation och ackommodation. En kognitiv konflikt ses ofta som positiv och öppnar för nya idéer då individen ifrågasätter sin nuvarande tolkning.

Limón (2001) sammanställer forskning om eventuella samband mellan konfliktbaserade tester/undervisningsmetoder och lärande av begrepp och hävdar att angreppssättet kan ha positiva effekter vilket främjar djupare förståelse av matematiska och naturvetenskapliga begrepp.

Det kognitivistiska perspektivet på begreppsutveckling tar sin utgångspunkt i identifierbara kvalitativa skillnader mellan individens (alternativ tolkningar, kunskapssystem) och vetenskapliga modellers eller expertens beskrivning av ett fenomen.

Svaret på frågan om vad elektrisk ström egentligen är, utifrån det metafysiska perspektivet, kan uppfattas som individens beskrivning av ett vetenskapligt begrepp. Frågan om varför ett föremål faller till jorden berör däremot individens uppfattning av en företeelse. Den senare frågeställningen fokuserar inte på ett specifikt vetenskapligt begrepp och avslöjar inte vilket eller vilka begrepp som är relevanta. Den efterlyser istället individens tolkning av ett fenomen och individens åberopande av de resurser som denne har tillförfogande för att förklara fenomenet.

Utifrån ett kognitivistiskt perspektiv kan begreppsutveckling ses som en process som strävar efter en gradvis ökning i överensstämmelse mellan alternativa idéer och vetenskaplig beprövade teorier (diSessa, Elby & Hammer, (2002). Elevers/studenters uppfattningar om kraft och Newtons lagar i klassisk mekanik är bland de mest dokumenterade. Andersson (2001) nämner som exempel att det är vanligt att elever uppfattar att kraft alltid är riktad efter hastighetsriktning eller att gravitationskraften inte har några effekter på stillastående föremål eftersom de inte rör sig.

Carey (1985 & 1999) föreslår standardmodellen för begreppsutveckling. Modellen föreslår två olika faser; svag omstrukturering (weak restructuring) eller stark omstrukturering (strong restructuring), med rötter i kognitiv psykologi. Svag omstrukturering sker när ny kunskap läggs till den befintliga kunskapsbasen. Denna typ av begreppsförståelse innebär inte rekonstruktion av kunskapsstrukturen utan är ett sätt att berika den. Enligt Carey, så kan svag omstrukturering innebära ny ordning eller ny relation mellan redan existerande begrepp. Denna fas av begreppsuppfattning anses inte leda till en förändring av begreppets innebörd och definition utan leder snarare till en förändring av begreppets tillämpbarhet och relationen till andra närliggande begrepp.

Ibland, för att kunna tolka nya erfarenheter, krävs en rekonstruktion av befintlig kunskapsstruktur. Denna form av begreppsutveckling anses vara en mer fundamental, betydande förändring, Careys term för denna form av förändring är stark omstrukturering och hon menar att lärande av naturvetenskapliga begrepp i litteraturen ofta beskrivs som just stark omstrukturering. Tabell 1 är en sammanställning av ovan nämnda perspektiv på begreppsutveckling.

Tabell 1 Jämförelse mellan Chis, Careys och Piagets perspektiv på typ (grad) av begreppsutveckling

Typ av begreppsutveckling	Chi & Slotta (1994, 2005)	Carey (1985)	Piaget (1929, 1930, 2006)	Situation
Svag begreppsutveckling	Tilldelning av begrepp över ontologiska kategorier Begreppets ontologiska tillhörighet skiftas mellan närliggande underkategorier	Kunskaps-ackumulation som inte behöver omstrukturering Det sker en svag omstrukturering som kan leda till en ny ordning eller ny relation mellan redan existerande begrepp	Individen införlivar kunskap med sina bifintliga tankestrukturer utan att tanke-strukturerna själva behöver förändras (assimilation).	Barnet uppfattar att när man multiplicerar två tal fås ett resultat som är större än båda talen(schema) exempelvis $3 \cdot 4 = 12$ 12 är större än både 3 och 4.
Stark begreppsutveckling	Begreppets ontologiska tillhörighet skiftas mellan skilda laterala kategorier	Det sker en fundamental stark omstrukturering förändring av befintlig kunskaps-struktur	Befintliga strukturer omstrukturerar sig själva så att de blir mer anpassade för hantering av nya erfarenheter på ett sätt som inte var möjligt med tidigare tankescheman (ackommodation).	Senare behöver barnet utveckla en förståelse för multiplikation med tal mellan noll och ett

Min utgångspunkt, mot bakgrund av de teoretiska perspektiv som har redovisats ovan, är att intuitiva idéer är ett återkommande inslag i individers interaktion med grafiska representationer av rörelseförlopp. Dessa idéer är en följd av kognitiva aktiviteter som genererar och tvingar fram de nödvändiga *teorier* som individen sedan använder sig av som förklarningsinstrument i en viss situation.

Empiriska material analyseras utifrån olika perspektiv på begreppsutveckling. Det epistemologiska perspektivet används när elevernas ontologiska begreppskategoriseringar analyseras. Det metafysiska perspektivet används i syfte att identifiera eventuella alternativa elevuppfattningar som möjligen kan förklaras genom felkategorisering av begreppens ontologiska tillhörighet. Det kognitivistiska perspektivet används för att ge en möjlig beskrivning av elevers arbete i ljuset av alternativa idéer och för att förklara eventuella kvalitativa skillnader i elevers svar på uppgifter.

Intuitiv kunskap

Forskning har visat att individen genom vardagserfarenheter utvecklar alternativa referensramar om den fysiska världen som omger oss (McCloskey, 1983; Clement, 1985; diSessa, 1993; Smith, diSessa & Roschelle, 1993; Arons 1997). Fram till 2004 har över 6000 studier dokumenterats som visar på elevers/studenters alternativa och delvis resistenta föreställningar inom matematik och naturvetenskap (se Duit, 2004), och vikten av att, exempelvis genom undervisning, konfrontera elevers alternativa uppfattningar (Slotta& Chi, 2006 sid. 262). Vidare framkommer att alternativa idéer ibland kan vara inkompatibla med vetenskapliga modeller och teorier (McDermott, 80 & 81; diSessa, 1983; diSessa, 1988; Minstrell, 1992; Pfundt & Duit, 1993; Hammer 1996, Hammer 2000; Andersson, 2001; McDermott 2005; Andersson 2008).

Internationellt finns det många olika benämningar på individens alternativa uppfattningar om vardagsfenomen, bland annat barns vetenskap, alternativa idéer, intuitiva idéer och sunda förnuft. I *Towards an EpistemologyofPhysics* (1993), föreslår diSessa ett teoretiskt ramverk för beskrivning av intuitiva representationer av vardagsfenomen. Källan till våra vardagsföreställningar, enligt diSessa utgörs av en rad välutvecklade intuitiva idéer om företeelser, som diSessa kallar för ”*Phenomenological primitives*” eller p-prim. P-prims är generaliserbara och på så sätt skiljer de sig från våra minnen av händelser. P-prims är också annorlunda än kunskap om vetenskapliga teorier då detta innebär en medvetet avsiktlig handling med ett mål i sikte. Nämligen att lära sig teorin medan p-prims byggs upp och utvecklas omedvetet, mindre formellt, intuitivt och utan att ha ett specifikt mål.

En p-prim kan vara mer eller mindre fungerande, den kan med andra ord vara delvis kompatibel med vetenskaplig beprövade teorier. Att cykla i motvind är mer ansträngande (p-prim: man måste anstränga sig mer när motståndet blir större). Eller rörelse med konstant hastighet kräver konstant kraft (p-prim: det verkar alltid en kraft i föremålets rörelseriktning, vilket inte är i linje med Newtonska mekaniken). Gravitation verkar endast på föremål i luften (p-prim: ingen rörelse ingen kraft, inte heller är överensstämmande). En p-prim är generaliserbar eftersom den används av individen i olika sammanhang. Utan att ha varit med om en jordbävning kan vi lätt avgöra att vi inte skulle vilja vara med om en jordbävning på nära håll (p-prim: desto närmare en källa man kommer desto större blir effekten av den). En p-prim kan vara korrekt men användas i fel sammanhang. Att det blir varmare på sommaren betyder inte att jorden kommer närmare solen vilket är ett vanligt förekommande svar när människor ombeds att förklara temperatur relativt årstider. En samling p-prims utgör första och mest elementära kunskapssystemet som diSessa kallar för ”*the intuitive physical sense of mechanism*”.

> The intuitive sense of mechanism contributes substantially to understanding school physics. (diSessa 1993, sid. 105).

diSessa hävdar att alla p-prims är värdefulla och nödvändiga och att ingen av dem är missuppfattningar som behöver tas bort. Ibland behöver en p-prim modifieras, förstärkas eller generaliseras. Han använder sig också av beteckningen kunskapsbitar, intuitiva uppfattningar eller svårpåverkade falska intuitioner som synonymer till p-prims.

Grafiska representationer

I litteraturen förekommer varierande beskrivningar om vad en representation avser. Enligt Wittmann (2005) är representationer, vanligen strukturerade system med starka kopplingar till teorier. De kan ses som konstruktioner vilka länkar samman abstrakt och konkret matematik. En representation är en slags konfiguration, som helt eller delvis motsvarar, symboliserar eller representerar någonting annat (Janvier 1987; Goldin & Kaput, 1996; Goldin, 1987). En representation är ”något som står för något annat” (Duval 2006, s.103). Ett föremåls hastighet eller acceleration som framställs genom en s-t- graf kan bestämmas från grafens lutning, något som inte explicit framgår av den grafiska representationen.

Grafiska representationer som till exempel funktionskurvor och diagram ger elever upplysningar om sambandet mellan två eller flera variabler. Grafer används också för att studera specifika situationer där olika villkor förekommer (Leinhardt, Zaslavsky& Stein, 1990). Ibland stöter elever på begrepp som är rent grafiska till sin natur, såsom punkter, linjer, extrempunkter, intervall eller specifika begrepp som beskrivs genom grafen. Färdigheten att tolka grafer är därför en viktig förutsättning för att kunna förstå ett ämnesområde och för att kunna relatera det till specifika situationer (Berg & Smith, 1994).

Friel et al. (2001) använder beteckningen within-context för grafiska representationer där koordinataxlarna är exempelvis mätbara storheter. Friel refererar till Cerpenter och Shah som föreslår att förståelse för grafen kan ses som en integrerad sekvens av flera processer: (a) perceptuella processer för igenkänning av grafiska mönster; (b) perceptuella processer som opererar på grafiska representationer och skapar kvalitativ/kvantitativ mening (c) konceptuella processer som översätter de visuella attribut som förekommer i form av storheter, skalor och symboler till relevanta begrepp. Perception eller sinnesåskådning är ett psykologiskt begrepp som används för att beskriva och tolka sinnesintryck. Perceptionsprocessen omvandlar våra sinnesintryck till begriplig och hanterbar information.

Friel hävdar att dataanalys med hjälp av grafiska representationer där eleven själv tar sina mätvärden och placerar dessa i en graf kan främja djupare, mer flexibel och generaliserbar förståelse av grafen och dess tillämpningar.

> Graph instruction within a context of data analysis may promote a high level of graph comprehension that includes flexible, fluid, and generalizable understanding of graphs and their uses. (Friel et al., 2001, sid 133)

Friel argumenterar för tre olika nivåer av individens förståelse vid interaktion med grafiska artefakter; läsa data, läsa mellan data och läsa bortom data. Att läsa data kan innebära avkodning av symboler och förkortningar för enheter och storheter. Att läsa mellan data innebär att individen har förmåga att relatera storheter/begrepp på koordinataxlarna till varandra och kan skapa en uppfattning om sambandet mellan aktuella begrepp. Att läsa bortom data är att sätta grafen i ett verkligt sammanhang, översätta data, skapa nya representationer samt förmåga att växla mellan olika representationer inom samma kontext.

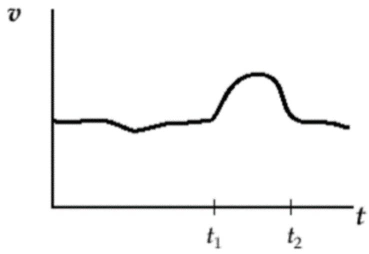
Ett flertal studier har gjorts i syfte att identifiera och beskriva elevers/studenters uppfattningar av grafiska artefakter. Forskning har visat att intuitiva uppfattningar är vanligt förekommande vid tolkning av grafiska framställningar inom matematikämnet (Janvier, 1978; Clement, 1985; Goldberg, 1989; Nemirovsky & Rubin, 1992; diSessa, 1991; Beichner, 1994; Berg & Philips, 1994; Nemirovsky, 1994; Graham & Sharp, 1998; Goldin, 1998; Elby 2000, Sherin, 2001; Teuscher& Reys, 2010). Duval (2006) hävdar att intuitiva föreställningar kan utgöra en del eller delar av individens uppfattning av en representation, exempelvis en graf. Dessa tolkningar och föreställningar kan synliggöras när de uttrycks verbalt eller skriftligt.

Janvier (1987) argumenterar för vikten av att kunna utföra transformationer mellan representationer i matematik, och menar att det huvudsakligen finns fyra olika typer av representationer; text, tabeller, grafer och formler (symboler). Representationer används för att kommunicera och för att vidareutveckla matematiska kunskaper.

Elby (2000) argumenterar för en speciell form av p-prim som vanligen aktiveras vid interaktion med grafiska framställningar. Elby kallar denna kunskapsform för ”What-you-see-is-what-you-get”, eller WYSIWYG:

> In my view, that's because the hill mistake and similar iconic interpretations spring, in part, from the activation of a cognitive structure, specifically, an intuitive knowledge element I call What-you-see-is-what-you-get, (Elby, 2000, sid. 483)

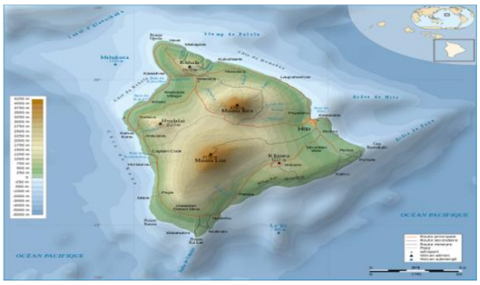
Elby hävdar att ikoniska uppfattningar beror delvis på aktivering av en kognitiv struktur, en speciell intuitiv kunskapsform som han kallar för WYSIWYG (intuitiv kunskap om representationer, min översättning).
I en studie, Elby (2000), ombeds eleverna beskriva en v-t-graf som visar en cyklists färd. Se figur 2.



Figur 2 En cyklist färd. (Elby, 2000, sid. 487).

Vissa elever i denna studie framförde att cyklisten trampar cykeln över en kulle. Grafen visar att cyklistens hastighet varierar under det givna tidsintervallet. Först ökar hastigheten vid tiden t_1, därefter minskar den och vid tiden t_2 har cyklisten samma hastighet som tidigare. Det kan exempelvis vara då cyklisten kör om en annan cyklist.

Människans förmåga att abstrahera information ur grafiska artefakter kan verka framgångsrikt då vi till exempel tolkar kartor. Bilden nedan visar en topografisk karta av Hawaii vilken illustrerar bland annat terrängens höjdskillnader och vegetation.



Figur 3 En topografisk karta över ön Hawaii (Wikipedia).

De flesta barn 10-12 år gamla, har en välutvecklad förmåga att tolka och förstå abstrakta grafiska artefakter, exempelvis ytors fysiska former i topografiska kartor. Vissa representationer inkluderar dessutom speciella attribut som snabbt fångar upp vår uppmärksamhet. Elby kallar dessa egenskaper för *Compelling visual attributes.* Dessa refererar till alla visuella egenskaper och nyanser som är inbäddade i grafiska representationer till exempel hörn, kanter, konturer etc.

> My claim is that, even though what-you-see-is-what-you-get is not cued strongly in all contexts, it is cued strongly with respect to the compelling visual attribute of a representation. (Elby, 2000. sid. 484)

Vilka av dessa visuella egenskaper som uppmärksammas först är starkt kontextberoende. Elby menar att intuitiv kunskap om representationer är nödvändig att ha och verkar i de sammanhang där till exempel grafiska representationer förekommer (Elby, 2000. sid. 483). Kohl (2001) betonar att WYSIWYG är en speciell form av p-prim som aktiveras vid interaktion med grafiska representationer:

> The over-literal readings call to mind the "what you see is what you get" (WYSIWYG) knowledge element proposed by Elby (2000), where students interpret a representation in the simplest, most literal way possible (a bump on a graph corresponds to a hill). This WYSIWYG element is a representational analog of the phenomenological primitives (or p-prim) described by diSessa (1993) which include such basic reasoning elements. (Kohl, 2001. sid 107)

Elbys WYSIWYG uppfattar jag som en utvidgad beskrivning av diSessas p-prim, det vill säga ett speciellt kunskapselement som vi människor utvecklar genom åren för att tolka och förstå diagram, kartor, ritningar, kurvor, etcetera.

Begreppsbild och begreppsdefinition

Tall och Vinner (1981) använder beteckningen begreppsbild för hela den kognitiva strukturen som är associerad med begrepp.

> "We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. (Tall & Vinner 1981. sid.152)

Definitionen inrymmer individens tolkningar och förståelse av begrepp. Den innefattar alla de processer, egenskaper samt mentala bilder som individen associerar till begreppet. Även individens intuitiva idéer om begreppet ifråga innefattas i strukturen. Intuition enligt Tall (1991) är kognitiva strukturer influerade av individens tidigare erfarenheter.

> Intuition is a global resonance in the brain and it depends on the cognitive structure of the individual, which in turn is also dependent on the individual's previous experience. (Tall, 1991. sid 5)

Begreppsdefinition (concept definition) är enligt Tall & Vinner (1981) en beskrivning av ett begrepp i sitt språkliga uttryck, en fras som matematiker eventuellt använder för att specificera ett begrepp. "We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept"(Tall & Vinner, 1981. sid. 152). Måhända använder sig någon av fel fras för att definiera eller beskriva ett begrepp. De begreppsbilder vi använder oss av för att hantera matematiska begrepp skiljer sig ofta från formella matematiska definitioner.

Vidare menar Tall & Vinner att varje individ genererar en begreppsdefinition för sin egen begreppsbild, begreppsdefinitıonsbild (concept definıtıon image). Den betecknar en individs definıtion av begrepp. Enligt Tall & Vinner är denna definitıon en del av en mer omfattande begreppsbild. Vanligtvis har individen skapat en begreppsbild innan han/hon stöter på något begrepp och det är inte alls säkert att elever/studenter någonsin tar till sig den formella begreppsdefinitionen. Det kan, enligt Tall och Vinner, försvåra förståelse av mer abstrakta matematiska begrepp längre fram. Elever och studenter har i regel med sig icke matematisk förförståelse av de begrepp de stöter på i matematiken. Denna förförståelse kan vara väldigt varierande och har starka kopplingar till erfarenheter.

Tall & Vinners teori om begreppsbild och begreppsdefinition är ett relevant analysverktyg för att undersöka elevers begreppsbilder av de begrepp som tas upp i denna uppsats. Detta kan möjligen synliggöra hur väl begreppsdefinitioner är integrerade i elevers begreppsbilder, vilket enligt Tall & Vinner är nödvändigt för att specificera och förstå begrepp. En möjlighet är att undersöka i vilken utsträckning eleverna behärskar definitionen av de begrepp de använder sig av, till exempel graf, lutning, funktion och derivata, samt hur elevernas förståelse av begreppsdefinitioner påverkar deras resonemang och slutsatser.

Tall (1991) hävdar att matematiskt tänkande är helt relaterat till de kognitiva processer som ger upphov till matematisk kunskap. Begreppsutveckling ses som förändring av individens begreppsbild. Tall (2004) föreslår modellen tre matematiska världar, i syfte att beskriva den kognitiva utvecklingen som gestaltar matematisk förståelse. Grunden till modellen är två egenskaper hos människan som Tall kallar för set-before och met-before. Set-before är egenskaper som vi har i generna när vi föds.

> I use the term 'set-before' to refer to a mental structure that we are born with, which may take a little time to mature as our brains make connections in early life. (Tall, 2008. sid 12)

Enligt Tall (2008) så ger set-before oss förmåga att

- Känna igen mönster, likheter och skillnader
- Repetera sekvenser och handlingar tills dessa blir automatiserade.
- Kunna beskriva företeelser språkligt samt för att kunna förfina metoder som vi använder då vi resonerar kring dessa företeelser.

Med met-befores menar Tall de samlade erfarenheter och kunskaper som individen har inför en ny situation. Hur vi tolkar en situation beror på vilka met-befores vi har. ”I define a met-before to be ‘a current mental facility based on specific prior experiences of the individual.”(Tall, 2008. sid. 12)

Met-befores skiljer sig framför allt mellan individer genom den kognitiva nivå som individen har uppnått och som kommer till uttryck i en specifik situation. En cirkel exempelvis, kan uppfattas som ett runt objekt, som mängden av alla punkter som satisfierar villkoret $x^2 + y^2 = r^2$, i det kartesiska koordinatsystemet eller som ett kägelsnitt med excentriciteten $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 0$, där a är ellipsens storaxel och b är lillaxeln samt villkoret a = b är uppfyllt.

Tre matematiska världar grundar sig på antagandet att lärande av matematiska begrepp kan ske på olika sätt och olika nivåer, den perceptionella, den symboliska och den axiomatiska (Tall, 2004). Den första världen är *conceptual - embodiedworld*, det vill säga den perceptionsgrundade, den visuella-spatiala matematiska världen. Den kan beskrivas som den matematik som vi kan uppleva och förstå, antingen genom verkliga upplevelser och erfarenheter eller genom att visualisera. De flesta av oss har en begreppsbild av till exempel en cirkel, att den är rund, den kan vara stor eller liten och den kan vara röd eller blå. Vi har inte lärt oss detta genom skolundervisning utan genom att röra oss i den fysiska världen och observera. Denna matematiska värld innefattar de begrepp som vi har upptäckt genom våra iakttagelser i den reella världen, det vill säga kunskap som vi skaffat oss genom betraktelse med hjälp av våra sinnen. Den innefattar även mentala föreställningar av begrepp som inte existerar till exempel punkt som saknar dimension eller linje som saknar tjocklek.

Den andra världen är, *proceptual – symbolicworld*, den proceptuella-symboliska matematiska världen. Den består av symboler och handlingar som vi utför då vi till exempel manipulerar inom algebra och analys. Centralt i denna värld är begreppet *procept* som består av första delen av process och slutet av concept.

Tall & Gray (1994) inför begreppet procept för att beskriva en central del i förståelse av matematiska begrepp. Det är förmåga att samtidigt kunna uppfatta matematiska symboler både som begrepp och som delar i en process.

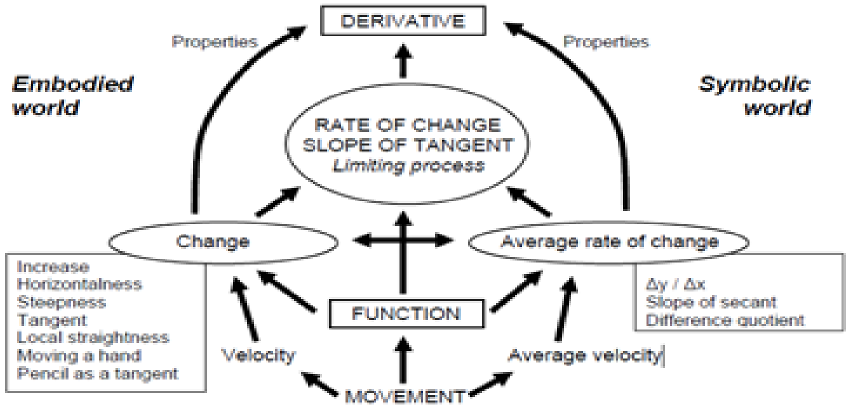
> An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. (Tall & Gray 1994. sid 12)

Enligt Tall & Gray (1994), så kan 2+3 uppfattas som en process (addition) eller som ett begrepp (summa). Då individen befinner sig i denna värld kan han/hon använda sig av och/eller reflektera över matematiska symbolspråkets funktion, innebörd och tillämpning.

Den tredje världen är den formella matematiska världen. Här är det axiom, satser och bevis som står i fokus. Utifrån givna antagande om förhållande och relationer mellan matematiska objekt byggs axiombaserade strukturer upp vilka ligger till grund för matematiska teorier. Tall & Vinner samt Tall & Grays teori om kognitiv utveckling av matematiska kunskaper är i många avseenden jämförbar med den historiska utvecklingen av matematik som en axiomatisk vetenskapsdisciplin.

Matematik utvecklades utifrån elementära uppfattningar och enkla antagande. Senare, med ökad kunskapsmängd har behovet av att formalisera, generalisera och strukturera matematiska strukturer vuxit fram. Tre olika matematiska världar förutsätter inte att individen går igenom världarna i någon speciell ordning för att nå en högre nivå av begreppsförståelse. Modellen delar matematiska kunskaper i tre ”kategorier” utan någon hierarkisk relation till varandra (Tall, 2008)

Hähkoniemi (2006) har tillämpat teorin om tre matematiska världar i syfte att undersöka elevers uppfattning av begreppet derivata. Hähkoniemi erbjuder ett hypotetiskt lärandeschema för derivata som bygger på en klassificering eller ”sortering” av representationer som vanligtvis förekommer i samband med introduktionen av derivata. Se figur 4.



Figur 4 The learning path to the derivative (Hähkoneimi 2006, sid.74).

I modellen beskrivs lärande av begreppet derivata i den konceptuella-förkroppsligade världen genom olika representationer, bland annat lutning, tangent, tangentens lutning, växande och avtagande. Dessa representationer av derivata kan åskådliggöras genom att visa med en hand längs en graf eller genom att placera en penna som tangent. I allmänhet får eleverna bekanta sig med derivata genom att först lära sig genomsnittlig förändringshastighet och differenskvot över olika intervall (Hähkoniemi, 2006). Detta motsvarar begreppsutveckling i den proceptuella-symboliska världen. Dessa operationer leder eleverna vidare till begreppet momentanhastighet och problemet att bestämma den. Detta skapar ett behov av gränsvärdedefinitionen av differenskvot och därmed den formella definitionen av derivata.

Hähkoniemi (2004) undersökte finska elevers begreppsbilder av derivata. Han undervisade eleverna och introducerade begreppet derivata dels genom tangentens lutning där en penna fick representera tangenten. På så vis undersökte eleverna hur brant grafen var. Den genomsnittliga förändringshastigheten beräknades genom differenskvot och sekantens lutning. Till slut definierades derivatan som gränsvärdet av differenskvoten. Hähkoniemi menar att många elever identifierar derivata med tangentens lutning, en tolkning som har sin hemvist i den perceptuella matematiska världen.

Studiens teoretiska ramverk utgår bland annat från Tall & Vinners begreppsbild/begreppsdefinition. Jag har valt att tillämpa Hähkoniemis *Learning path* eftersom modellen, med utgångspunkt i Tall & Vinners tre matematiska världar, ger en samlad skiss över lärande av flera närliggande matematiska begrepp och de representationer som tillhör begreppet.

Studiens forskningsfrågor berör delvis elevers begreppsbilder av funktion, differenskvot och momentan förändringshastighet. Elevers tolkningar av dessa begrepp härrör från den proceptuella-symboliska matematiska världen. Det innebär att huvudsakligen kommer Tall & Vinners samt Tall & Grays teori som tre matematiska världar att utnyttjas med beskrivningar gällande begreppsutveckling i den proceptuella-symboliska världen vilket möjligen delvis kan avslöja elevers begreppsbilder och eventuella indikationer på var olika elever befinner sig.

Kapitel 3 Metod

Denna studie stödjer sig på kvalitativa ansatser gällande metod och analys. Något som kännetecknar den kvalitativa undersökningsmetoden är att den skapar möjlighet att göra en närmare analys av hur eleven uppfattar en viss situation eller ett visst begrepp. Enligt Glaser & Strauss (1979) är kvalitativa metoder motsatsen till hypotestestandeansatser vilka huvudsakligen inriktar sig på verifiering. Det centrala i kvalitativa metoder skulle vara att forskaren försöker finna de trovärdiga förklarningar som bäst beskriver något fenomen eller sammanhang i omvärlden.

Enligt Holme & Solvang (1997) får forskaren genom kvalitativa metoder en djupare förståelse för de fenomen som studeras. Ahrne (2011) framhåller att undersökaren i kvalitativa studier är intresserad av att beskriva, förklara och tolka för att få svar på frågor som ”hur” och ”varför”. Min avsikt är att genom analys av kvalitativ data skapa en förståelig och empiriskt baserad beskrivning av elevers uppfattningar avseende matematiska representationer av rätlinjig rörelse.

Pilotstudie

För att göra det möjligt att precisera innehållet och omformulera frågeställningar inför huvudstudien genomfördes inledningsvis en pilotstudie under perioden februari-mars 2012. Sexton gymnasieelever på naturvetenskapliga programmet intervjuades. Elever i pilotstudien ombads att svara på fyra frågor gällande hastighetstillståndet för ett föremål i rätlinjig rörelse genom att tolka en grafisk representation vilken utgjordes av en s-t-graf. Dokumentation och datainsamling gjordes genom ljudinspelning. Pilotstudien genererade värdefullt underlag om begränsningar och möjligheter med intervjuteknik som jag senare använde för vägval i huvudstudien. Att som datainsamlingsmetod intervjua elever visade sig ha vissa begränsningar. När en lärare/forskare intervjuar en elev händer det ofta att eleven förväntar sig att läraren ska ge respons på elevens svar enligt rätt eller fel. Ofta sökte eleverna i pilotstudien efter att jag skulle uttrycka gillande eller ogillande, bekräftade eller ifrågasättande av deras svar. Eleverna föreföll att under intervjun konstruera och rationalisera sina svar för att vara den intervjuade läraren till lags. Det fanns tidpunkter under intervjuerna då samtalet nästan kändes som ett förhör, vilket inte gjorde det lätt för eleven att obehindrat uttrycka sig inför en okänd person. För att generera ett mer användbart och analyserbart empiriskt forskningsunderlag har jag därför valt att arrangera videoinspelning där elever i små grupper utan närvarande observatör svarar på mina frågor rörande grafisk och analytisk framställning av rätlinjig rörelse.

Att undersöka hur elever uttrycker sin förståelse av begrepp vid problemlösning är en komplex fråga som kan problematiseras och analyseras utifrån en mängd olika perspektiv. Efter pilotstudien har jag valt att inkludera de teoretiska ansatser som jag finner relevanta vid analys av elevgruppers arbete med frågeställningar.

Urval och deltagare

Med tanke på studiens syfte var det ett krav att undersöka gymnasieelever som har läst om grundläggande begrepp i matematik och fysik. Samtliga elever i denna studie läser det naturvetenskapliga programmet i årskurs två. Undersökningen gjordes på två gymnasieskolor i två olika stadsdelar i en svensk storstad.

För att genomföra studien tog jag via e-post och telefon kontakt med rektorer samt fysik-/matematiklärare på de gymnasieskolor som hade relativ stora elevgrupper på det naturvetenskapliga programmet. Fyra gymnasieskolor tillfrågades, två gymnasieskolor uttryckte intresse och deltog i studien medan två gymnasieskolor avböjde medverkan.

Undersökningen genomfördes vid två tillfällen, i september 2012 samt i januari 2013. Vid första tillfället medverkade sammanlagt 17 gymnasieelever, tio flickor och sju pojkar. Sex av de 23 tillfrågade eleverna avböjde sin medverkan. Samtliga elever blev tillfrågade av sin matematik-/fysiklärare om de ville delta i denna forskningsstudie.

Tabell 2 Deltagande elever vid första datainsamlingstillfälle

Datainsamling I	Grupp 1	Grupp 2	Grupp3	Totalt antal elever
Skola A	Arman Alexander Gideon	Linn Pia Saeed	Narwe Dorentina	8
Skola B	Christoffer Fanny Josefin	Jakob Linnea Maria	Johanna Maria Johan M	9
Totalt antal elever				17

Vid andra tillfället medverkade 21 gymnasieelever, tio flickor och elva pojkar. Sammanlagt 25 elever tillfrågades, fyra avböjde medverkan.

Tabell 3 Deltagande elever vid andra datainsamlingstillfälle

Datainsamling II	Grupp 1	Grupp 2	Grupp3	Grupp 4	Totalt antal elever
Skola A	Arman Gideon	Linn Pia Faiza	Alexander Saeed	Narwe Dorentina	9
Skola B	Fanny Josefin Maria	Jakob Johan M Christoffer	Johan D Gustav Alex	Maria Johanna Erik	12
Totalt antal elever					21

Samtliga elever från första tillfället medverkade även vid andra tillfället. Eleverna bildade inte exakt samma grupper eftersom de själva fick bilda grupperna. Dessutom tillkom fyra nya elever vid andra tillfället som meddelat sitt intresse för att medverka i undersökningen. Att det var fler elever som ville engagera sig i min studie uppfattade jag som något positivt vilket förmodligen hänger samman med elevers attityder till studier, intresse för matematik och fysik eller eventuell tilltro till utbildningsvetenskaplig forskning.

Datainsamling och genomförande

I arbetet används gruppdiskussion som datainsamlingsmetod. Gruppdiskussion innebär ett ”aktivt samspel mellan ett begränsat antal personer som löser en gemensam uppgift, utför ett arbete, leker eller håller på med någon annan verksamhet tillsammans” (Stensaasen & Sletta 2000, s. 32). Nilsson (1993) argumenterar att individen i allmänhet presterar bättre i grupp än individuellt och att grupparbete gör enskilda prestationerna synliga.

Skolverket inkluderar gruppsamtal som en aktivitet i syfte att stödja lärare vid bedömning av elevers förmågor och prestationer i bland annat matematikämnet. Forskningsmetoden som valts innebär att eleverna befinner sig i en situation som de är förtrogna med i sitt ordinarie skolarbete.

En eventuell nackdel med gruppdiskussion kan vara gruppens sammansättning och deltagarnas eventuella bekvämlighet med varandra. Eleverna i denna studie fick själva bilda grupper, vilket möjligtvis gynnar gruppens interna dynamik och känsla av trygghet. En annan aspekt av gruppsamtal som datainsamlingsmetod är att metoden kan generera mycket analysmaterial, mer än det som uppnås med individuella intervjuer, och att det därigenom kan bli svårare för forskaren att nå fram till generaliserbara resultat eller dra slutsatser. Här är det viktigt att det görs tydliga avgränsningar som underlättar identifiering av de enskilda elevernas tolkningar och uttryckta förståelse av begrepp.

En annan viktig aspekt av gruppsamtal, enligt Granström (2003), är att elevers utsagor ibland modifieras under den sociala situation som en diskussion innebär. Elever kan ibland vara konflikträdda och håller därför med varandra istället för att uttrycka egen förståelse.

Dessutom kan en gruppdiskussion leda till kognitiva konflikter eller motsägelsefulla påståenden (Limón, 2001). Barnes och Todd (1995) hävdar att i ett elevsamtal i små elevgrupper är det oftast tillåtet att tveka och omtolka idéer och uppfattningar.

För att skapa förutsättningar för eleverna att obehindrat och utan stress svara på frågeställningar har jag valt att arrangera gruppsamtal utan lärarens närvaro. Gruppdiskussion som datainsamlingsmetod har potential att generera material som synliggör hur enskilda elever förhåller sig till ett problemområde, utan påverkan av lärare. Den kan också lyfta fram fler olika perspektiv på samma fråga än vad som kunde ha blivit fallet med en individuell intervju. Jag har valt att arrangera gruppsamtal för att få en så bred representation av data under en så begränsad tid som möjligt.

De två gymnasieskolorna som ingått i studien kommer hädanefter i texten att benämnas med A-gymnasiet och B-gymnasiet. Undersökningen genomfördes vid två tillfällen i september 2012 samt i januari 2013. Vid det första tillfället, i september 2012, medverkade sammanlagt 17 gymnasieelever (N=17) i sex grupper, tre grupper från A-gymnasiet; A1 (tre elever), A2 (tre elever), A3 (två elever) samt tre grupper från B-gymnasiet; B1 (tre elever), B2 (tre elever) och B3 (tre elever). Eleverna ombads att svara på tio uppgifter, 1a-4c, med anknytning till en s-t-graf. Se bilaga 1.

Vid det andra tillfället, i januari 2013, involverades 21 (N=21) gymnasieelever som bildade åtta elevgrupper, fyra grupper från A-gymnasiet; A1 (två elever), A2 (tre elever), A3 (två elever) och A4 (två elever), samt fyra grupper från B-gymnasiet; B1 (tre elever), B2 (tre elever), B3 (tre elever) och B4 (tre elever). Vid detta tillfälle fick eleverna svara på tre uppgifter, 5a-5c, med anknytning till en avståndsfunktion. Se bilaga 1.

För att samla in elevers skriftliga svar på uppgifterna delades anteckningsblad ut med rubricerade uppgifter till var och en av eleverna, Se bilaga 3. Varje enskild elevgrupp svarade på samtliga uppgifter. Videoupptagningar genomfördes, vid båda tillfällen, i en av skolans lugna och tysta lokaler. Anledningen till det var att undvika störande ljud och för att eleverna skulle känna sig trygga i miljön. Samtliga elevgrupper fick disponera så mycket tid de behövde för att svara på uppgifterna. När gruppens medlemmar var nöjda med sina svar kom de och hämtade mig och videoinspelningen avslutades.

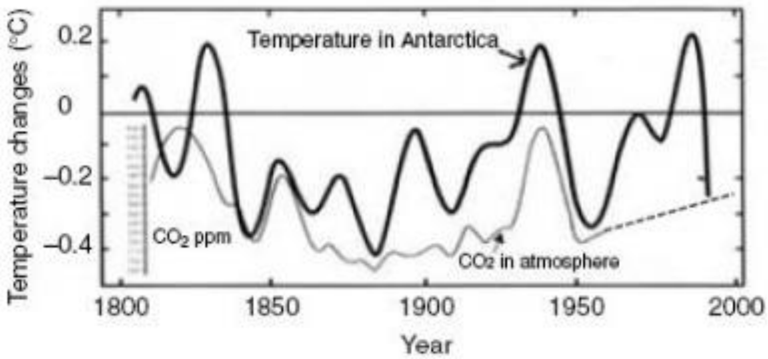
Val av uppgifter

För att synliggöra elevers tolkningar genom att analysera deras samtal kring matematikppgifter krävs att uppgiften aktualiserar tolkningar som är relevanta för studiens syfte. Frågeställningar bör ha ett innehåll som eleverna är bekanta med och samtidigt bör de vara utmanande på en så lagom nivå att arbetet med uppgiften blir meningsfullt. Dessutom bör uppgiften vara av sådant slag att lösningen kräver att eleven för ett resonemang kring egna uttalanden.
Studiens forskningsfrågor berör gymnasieelevers uppfattningar av matematiska representationer. De två representationsformer som studeras är;

den grafiska representationen vilket utgörs av en s-t-graf och den symboliska representationen som problematiserar en avståndsfunktion.

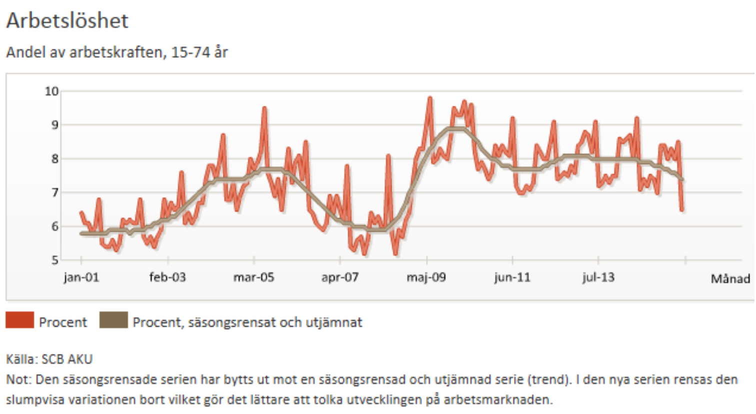
En s-t-graf beskriver sambandet mellan sträcka och tid för ett föremål. Den kan bland annat relateras till föremålets hastighet, det vill säga ändring i sträcka dividerat med ändring i tid. Dessa begrepp, sträcka, tid och hastighet kan uppfattas som fysikaliska storheter med stark koppling till SI-systemet och studien om elevers tolkningar av s-t-graf kan därför anses höra hemma i det fysikdidaktiska fältet.

Liknande resonemang leder till antagandet att en studie om elevers uppfattningar av sambandet mellan koncentrationen av CO_2 och temperaturen i Arktis troligtvis kan kategoriseras som kemididaktisk eller möjligen biologididaktisk eller miljödidaktisk forskning. Se Figur 5.



Figur 5 Medelvärdet av temperaturen i Arktis. Average surface temperature in Antarctica (1800-1999). The upper line represents the average surface temperatures at five locations in Antarctica between 1800 and 1999, as reconstructed from stable isotope measurements of ice. The lower line represents direct CO_2 measurements in the atmosphere. The dashed line is data from Mauna Loa, Hawaii. Från Jaworowski, Z. (2007), sid. 24.

Inom ekonomi används grafiska representationer för att visa ekonomisk information om till exempel räntor, aktier etcetera. Figuren nedan visar andel arbetslösa i procent under perioden 2001-2013. Se figur 6. En studie om elevers uppfattningar om grafen i figuren nedan kan antas höra hemma ekonomididaktiska domänen.



Figur 6 Andel arbetslösa I Sverige under perioden 2001-2013

Källa: http://www.ekonomifakta.se/sv/Fakta/Arbetsmarknad/Arbetsloshet/Arbetsloshet/ hämtad 2015 03 22

Även om dessa grafer visar på olika innehåll, involverar olika begrepp från olika vetenskaper och leder till olika slutsatser, har de ändå mycket gemensamt. De förmedlar ett innehåll som konstrueras, tolkas och kommuniceras på matematiska vägar och utifrån gemensamma elementära matematiska förklaringsmodeller.

Ett annat gemensamt särdrag för dessa grafiska representationer, och s-t-grafen i frågeställningen, berör de gemensamma egenskaper som finns tillgängliga att studera. Ett exempel är grafens lutning och hur den är orienterad i förhållande till koordinatsystemet som är ett värdefullt kunskapsinnehåll i alla grafiska representationer.

En annan gemensam egenskap ligger i själva idén med grafisk representation och den miljön där den utspelar sig ur ett historiskt perspektiv. Dessa grafer framställs och tolkas utifrån de gällande villkor för kartesiskt koordinatsystem som infördes av franske filosofen och matematikern Réne Decartes under första halvan av 1600-talet. Det infördes för att lösa geometriska problem med algebraiska metoder bland annat genom att studera projiceringar av punkter i planet på x- och y-axel. Under de senare århundraderna har matematiken utvecklats till ett verktyg för en lång rad av ämnen, särskilt för naturvetenskapliga ämnen och de tekniska vetenskaperna. I naturvetenskapen tillämpas matematiken för att skapa en enhetlig allmängiltig teoriram för förståelsen av företeelser och naturfenomen. Matematiklärande handlar därför en hel del om att lära sig att tillämpa och förstå tillämpad matematik inom bland annat naturvetenskap.

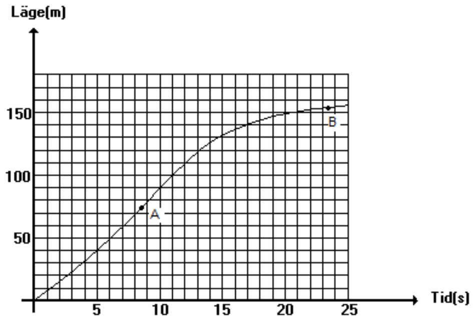
I denna studie undersöks gymnasieelevers tolkningar gällande matematiska representationer inom området klassisk mekanik. Min avsikt är att synliggöra och studera gymnasieelevers uppfattning av elementära matematiska begrepp som förekommer vid interaktion med grafiska och symboliska representationer.

Grafens lutning i exempel ovan är associerad till olika begrepp inom olika områden men den bestäms och tolkas efter samma matematiska definition. Det innebär att utifrån hur, och i vilken utsträckning, eleven uppfattar och tillämpar matematiska begrepp då han/hon tolkar företeelser inom ett specifikt ämnesområde får jag tillgång till värdefull kunskap om begreppsutvecklingens status hos den enskilde eleven inom det aktuella området i matematik.

Uppgifter som gavs till eleverna berör grafisk och analytisk framställning av rätlinjig rörelse. Inom den klassiska mekaniken, kallas rörelse längs en rät linje i rummet för *rätlinjig rörelse,* se exempelvis Pålsgård, Kvist & Nilson (2011). Detta rörelsetillstånd kan bland annat framställas som en grafisk representation exempelvis genom en s-t-graf eller som en matematisk funktion.

Grafiska frågeställningar, sammanlagt åtta uppgifter 1a-4, problematiserar en s-t-graf som beskriver ett tågs färd mellan olika stationer. Tolkning av rörelsediagram inrymmer ett flertal intressanta begrepp. Grafens lutning är naturligtvis ett centralt begrepp i detta sammanhang. Uppgifterna är avsedda för att lyfta fram olika aspekter av elevers förståelse för s-t-grafens egenskaper. Särskilt fokus har lagts på elevers tolkningar av medellutning (medelhastighet) i olika intervall, sambandet mellan grafens lutning och föremålets färdriktning samt elevers förmåga att konstruera en v-t-graf utifrån en s-t-graf.

Som nämndes i föregående kapitel, har forskning visat på elevers alternativa idéer om grafiska representationer. En del anses vara ikoniska tolkningar, såsom att antagandet att position är detsamma som lutning vilket gör att eleven drar slutsatsen att hastigheten i punkt B är högre än hastigheten i punkt A. Se figur 7.



Figur 7 En graf som beskriver ett föremåls läge som funktion av tid

Genom delfrågor ”Hur kan du veta det?” ville jag försöka lyfta fram tolkningar som delvis avslöjar elevers förståelse för lutning samt hur de utnyttjar begreppet för att resonera, beskriva och lösa problem. Syftet med uppgifterna var inte att i första hand se om eleverna svarade rätt eller fel, utan att analysera elevernas olika sätt att uttrycka sin förståelse.

Symboliska frågeställningar problematiserar rörelse genom en avståndsfunktion. Dessa uppgifter, 5a-5c (se bilaga 1), anses vara av standartyp vad gäller att tolka funktion, differenskvot och derivata. En del elever känner förmodligen igen situationen och kommer exempelvis ihåg att funktionen ska deriveras. Genom att komplettera uppgift 5c med deluppgift ”Hur vet du det?”, försöker jag skapa mer utrymme för elevers argumentation och resonemang vilket delvis skulle kunna visa på elevers begreppsbild av derivata.

Dokumentation och transkribering

Elevers samtal kring frågeställningar dokumenterades genom videoupptagning, detta för att säkra möjligheterna att avgöra vem som säger vad, och vad som sägs, eftersom jag inte deltar i diskussionerna och därmed inte påverkar samtalets riktning. Dokumentation genom videoinspelning möjliggör också återblick till detaljer som vid första tillfället inte verkar vara av värde. Syftet med att arrangera videoupptagning var att skapa ett underlag som genom analys kan leda till trovärdiga beskrivningar av elevers begreppsbilder som förekommer i elevers utsagor.

Figurer, grafer och lösningsskisser som producerades av eleverna har samlats in och utgör en del av studiens empiri. För att kunna avgöra vem som skrivit vad använde eleverna utdelade anteckningsblad som de skrev namn och placering på. Det gjorde det möjligt att identifiera eleven och elevens arbetsmaterial när videosekvensen studeras.

Inspelat material utgörs av cirka 10 timmars videoupptagning, uppdelade i 20 videosekvenser om vardera 15-50 minuter. Enligt Kvale (1997) kan transkribering av inspelat material ses som ett första steg i analysarbetet. Transkribering ”är tolkande konstruktioner som fungerar som användbara verktyg för givna syften” (Kvale 1997, s. 152). Kvale & Brinkmann (2009) menar att transkribering är en översättning av talspråk till skriftspråk. Denna del i bearbetningsprocessen innebär en reducering av studiedata. Den transkriberade texten bör återge samtalet så noggrant som möjligt för att analysen skall kunna leda till ett giltigt resultat (Polit & Beck, 2010). Transkribering av allt insamlat videomaterial utfördes av en professionell transkriberare. Detta för att minimera risken att tappa bort relevant information och för att få så ordagrann transkribering som möjligt.

För att transkriptionen skall underlätta analys av datamaterial måste den vara selektiv till sin karaktär (Linell 1994). Beroende på studiens upplägg har jag valt att inte ta hänsyn till exempelvis kroppsgester och tonfall. Transkriberingen har däremot utformats som skriftspråkliga konstruktioner och stor vikt har lagts vid noggrann återgivning av elevernas uttalande. Detta skapar homogen data med jämn kvalitet som underlättar analysarbetet. I enlighet med Linell (1994), har jag valt att betrakta transkriptionerna som öppna analysenheter, vilket innebär att jag har möjlighet att utelämna eller inkludera konventioner och/eller symboler utifrån studiens karaktär.

Norrby (1996) hävdar att transkriptionen kan variera alltifrån en ganska skriftspråksanpassad grov återgivning till en talspråksanpassad och mycket detaljerad transkription. Två rekommendationer som Norrby (1996) ger är att ”man utgår från normal ortografi och att graden av autenticitet måste avgöras av syftet med studien och vilken typ av talsituation som ska undersökas” (Norrby 1996, Lagerholm 2010, s. 35). Utifrån Norrbys rekommendationer har jag valt en skriftspråksanpassad transkribering. Detta för att underlätta läsningen men ändå behålla upplevelsen av talspråk. Jag är mer intresserad av det som uttrycks innehållsmässigt under samtalet därför ligger vikten vid vad som sägs och inte hur det sägs. I enlighet med Norrbys (1996) rekommendationer, har symboler, tidsangivelser och pauser, vilka gör texten svårläst. utelämnats.

Min utgångspunkt inför analys av insamlad data har varit att transkriptionerna, i möjligaste mån, ska ge en rättvisande bild av samtalets innehåll och elevernas sätt att uttrycka sig. Jag använder mig av transkriberat material som ett hjälpmedel för att lyfta fram och tydliggöra de enheter som behöver en närmare analys. En transkription lyckas sällan eller aldrig fånga och återge mångdimensionella karaktären av ett samtal. Därför skall transkriptionen i denna studie ses som en representation av språkliga uttrycksformer som delvis avspeglar elevers begreppsförståelse.

Analysmetod

Det finns en mängd metoder för analys av kvalitativ data. (Christensen et al. 2001, s. 297). Westlander (1993) beskriver kvalitativ analysmetod som:

> ”Kvalitativ analysmetod betyder dock i allmänhet att de data som man ursprungligen erhåller skall abstraheras så att en syntes uppstår. De måste följaktligen reduceras och transformeras för att komma fram till kvalitetsbegrepp på en högre abstraktionsnivå” (Westlander, sid. 22).

Widerberg (2002) framhåller att valet av analysmetod beror på undersökarens intresse, teoretiska perspektiv, materialets utseende samt hur resultatet redovisas (Widerberg 2002, s. 133ff). Trost (1997) hävdar att det inte finns några bestämda regler för hur analysprocessen ska utformas och att valet av analysmetod till stor del beror på undersökarens personliga uppfattningar (Trost 1997, s. 112f).

Enligt Hartman (1998) kan analysprocessen vanligtvis indelas i två steg. Först organiseras materialet genom att reducera den till en relevant, användbar och hanterbar datamängd. Detta underlättar arbetet med att identifiera de mest intressanta delarna som är relevanta för studiens syfte. Det görs också en sortering av de identifierade utsagorna utifrån deras egenskaper och karaktär. Därefter genomförs en analys som mynnar ut i trovärdiga slutsatser.

Denna studie genomförs utifrån kvalitativa ansatser i den meningen att den är beskrivande och hjälper till att lyfta fram aspekter av elevens begreppsuppfattningar. Analysmaterialet utgörs av videoupptagningar samt elevers skriftliga svar. Det är den transkriberade videoinspelningen och elevers skriftliga svar och anteckningar som är föremål för analysarbetet.

Efter genomgång av allt insamlat material har jag utelämnat delar av materialet som inte hade någon större inverkan på analysarbetet, exempelvis tillfällen då elever pratar om något helt annat eller då de skojar med varandra under samtalets gång. För att underlätta analysen har jag valt ut elevutsagor som är intressanta utifrån studiens innehållsspecifika syfte. Fokus har lagts på tolkningar som avspeglar elevers uttryckta förståelse av begrepp. Därefter genomfördes en kvalitativ analys som delvis innebar en omvandling av data till begripliga och trovärdiga slutsatser.

Etiska överväganden

Vid genomförandet av studien har eleverna informerats om studiens syfte och att deltagandet i studien är frivilligt och på intet sätt påverkar deras betyg i de kurser de följer. Eleverna blev informerade om att de kan avbryta sin medverkan i studien när så de önskar. Ingen av inspelningarna har genomförts med elever där jag har varit inblandad i undervisningen. Tidpunkter för inspelningar bestämdes i samråd med elever och deras lärare. För att förhindra identifiering av de medverkande anges det inte i presentationen av studien vid vilka gymnasieskolor den är genomförd.

Validitet och reliabilitet

I kvantitativ och kvalitativ forskning uttrycks vetenskaplig kvalitet i termer av reliabilitet och validitet. Reliabilitet handlar om mätinstrumentets kvalitet och pålitlighet. Validitet handlar om att mäta det som är avsikten att mäta (Widerberg, 2002, s. 18). Flertal forskare, bland annat, Widerberg (2002) och Trost (1997), menar att validitet och reliabilitet är starkt förankrade i den kvantitativa forskningstraditionen och att det är problematiskt att använda båda begreppen inom kvalitativa studier. En rekonstruktion av begreppen är nödvändig för att passa den kvalitativa undersökningens karaktär (Widerberg, 2002, s. 188).

Studiens reliabilitet kan bedömas bland annat utifrån kvaliteten i urval och frågeställningar. I denna studie ingår 21 gymnasieelever som läser det naturvetenskapliga programmet i årskurs två. Dessa gymnasieelever bör ha relevant kunskap i relation till studiens frågeställningar eftersom eleverna vid datainsamlingstillfället hade introducerats inför de nödvändiga begreppen inom matematik och fysik genom exempelvis undervisning.
Uppgifterna utformades så att samtliga inblandade elever i möjligaste mån uppfattade frågorna så som jag avsåg. Detta framgår dels av videoinspelningarna och dels av att alla elever svarade på samtliga uppgifter.

Andra kriterier relevanta för studiens reliabilitet är valet av teoretiskt ramverk och tydlighet i beskrivning av studiens genomförande och dokumentation. Trovärdighet i studiens slutsatser kan också ses som en variabel som kan ha betydelse för reliabiliteten.

Det är flera elevgrupper som svarar på samma uppgifter, det vill säga samma material användes på samtliga elevgrupper. Dessutom fick samtliga elevgrupper så mycket tid de behövde för att svara på uppgifter vilka gynnar studiens reliabilitet. Citat från elevgrupperna ger också möjlighet att bedöma tillförlitligheten i iakttagelser. Datainsamlingen har gjorts inom en kort tidsperiod vilket också kan ha betydelse för studiens reliabilitet.

Studiens validitet kan bedömas utifrån kvalitativa kriterier gällande datainsamlingsmetoden och om den genererar information som behövs för att får svar på forskningsfrågorna. Frågorna till eleverna har utformats på ett sätt som, ”tvingar fram” tolkningar gällande matematiska representationer av rätlinjig rörelse, vilket har stor betydelse för studiens resultat och därmed trovärdigheten i slutsatser.

Insamlat material, totalt tio timmar videoinspelning och elevers skriftliga svar, är omfattande och innehållsrikt. Elevers samtal kring frågorna ledde vid många tillfällen till intressanta slutsatser av olika kvalitativa nivåer, vilket delvis synliggör olika perspektiv på elevers uttryckta förståelse av de begrepp som förekommer i frågeställningar.

En annan aspekt som har betydelse för validitet är om studiens resultat stämmer överens med resultatet från tidigare forskning gjorda av andra men med en annan metod. Studiens resultat är i stort sett i linje med tidigare studier som visar på elevens alternativa referensramar när det gäller tolkning av grafiska framställningar. Några elever i denna studie ger uttryck för en rad ikoniska tolkningar. Dessa tolkningar kan uppfattas som alternativa beskrivningsmodeller som argumenteras fram under samtalet.

Ytterligare kriterier som har betydelse för validiteten är studiens bidrag och huruvida den kunskap studien erbjuder är användbar. Kvale (1997) menar att såvida en metod undersöker det den ska undersöka eller om resultaten passar in i den verkliga världen, så är den kvalitativa forskningen en giltig (valid) vetenskaplig forskning.

Ett av studiens bidrag är en ökad förståelse för varför en del elever ibland ger uttryck för ikoniska beskrivningsmodeller då de försöker tolka grafiska representationer. Studien erbjuder också en fördjupad insikt om olika kvalitativa nivåer av begreppsutveckling hos gymnasieelever.

Kapitel 4 Resultat

Resultatdelen presenterar vad som framkommit i relation till studiens syfte att undersöka på vilket sätt gymnasieelever uttrycker sin förståelse av matematiska representationer av rätlinjig rörelse. De tre frågeställningar som ska besvaras är:

1. Hur uttrycker gymnasieelever sin förståelse för grafiska och symboliska representationer av rätlinjig rörelse?

2. Vilka begreppsbilder ger eleverna uttryck för?

3. Finns det någon urskiljbar skillnad mellan elevernas uttryckta förståelse av grafiska respektive symboliska representationer?

I Resultatet presenteras varje frågeställning för sig. Avslutningsvis sammanfattas resultaten för att redogöra för om och på vilket sätt studiens syfte uppfyllts. Analysen utgår dels från elevers skriftliga svar och anteckningar som producerades under inspelningen, dels från transkriberad videoinspelning. Det som står i fokus är den enskilda elevens uttryckta förståelse och resonemang kring grafisk och symbolisk representation av rätlinjig rörelse. Resultatet av analysen presenteras i kategorier av utryckta svar för respektive uppgift. De utsagor som utgör exempel på uppfattningar inom en kategori presenteras också.

Grafisk representation

Inom temat grafisk representation har fyra olika kategorier av elevers förståelse framkommit i analysen. Först görs en sammanfattning av samtliga kategorier som identifierats. Därefter presenteras varje kategori var för sig med exemplifierande citat från elevernas arbeten som uttrycker vad som kännetecknar de olika kategorierna samt vad som skiljer dem åt.
De presenteras kortfattat nedan, från den mest utvecklade till den minst utvecklade uppfattningen.

Kategori A: Tolkningar som visar på konceptuell förståelse och en sammanhängande begreppsbaserad matematisk förklarningsmodell som möjliggör konstruktion av och överföring mellan nya grafiska representationer

Kategori B: Tolkningar som följer en matematisk förklarningsmodell men där det förekommer alternativa tolkningar gällande konstruktion av nya grafiska representationer

Kategori C: Tolkningar som inledningsvis bygger på matematiska begrepp men efterhand övergår de i ikoniska uppfattningar

Kategori D: Vardagsbaserade tolkningar, uttryckta ikoniska uppfattningar som stödjer sig enbart på vardagsbegrepp utan några referenser till relevanta matematiska begrepp

Kategori A:

Denna kategori kännetecknas av att innefatta tolkningar baserade på en sammanhängande matematisk terminologi. Utsagorna i denna tolkningskategori stödjer sig på matematiska begrepp som vidareutvecklas till en koherent helhetstäckande matematisk beskrivningsmodell. Denna kategori utmärks av elevtolkningar som ger uttryck för elevens begreppsuppfattning om relationer och proportioner vilket är en nödvändigt redskap för konstruktion av en ny grafisk representation.

Nedan följer elevers skriftliga svar på uppgift 1. Denna uppgift består av tre delfrågor, 1a-1c. Se bilaga 1. Här betraktas dessa tre frågor som en enda uppgift och resultaten redovisas för alla tre. Uppgiften är avsedd att synliggöra elevens uttryckta förståelse om grafens lutning i relation till tågets största hastighet.

Elevernas skriftliga svar uppgift 1:

Jakob

1a) När kurvan lutar som mest

1b) Längst sträcka på kortast tid

1c) Nej, ett tillfälle

Linnea

1a) När kurvan lutar som mest

1b) Längst sträcka avverkad på kortast tid $\rightarrow$ högst hastighet

1c) Ett tillfälle

Maria

1a) När kurvan är som snävast

1b) Längst sträcka på kortast tid

1c) Ett tillfälle

Elevernas skriftliga svar ovan, visar på aktuella kategorins särdrag, nämligen identifiering och tillämpning av relevanta matematiska begrepp och samband. Därefter sätter eleverna begreppet lutning i relation till frågeställningen. Citatet nedan följer hur eleverna, genom att utnyttja proportionerna hos grafen, drar slutsatser gällande tågets hastighet.
Citat från transkriberat videomaterial uppgift 1:

> JAKOB ... och en ruta uppåt är ju en femtedel, alltså det är 20 km, så här åker han ju 20 km på kort tid, här åker han ju 20 km på lång tid…
>
> MARIA ... mm ja så den är snabbast ...
>
> LINNEA Den är snabbast när den lutar som mest för det är ju inte liksom hur långt han kör, utan det är verkligen hastigheten, momentan hastigheten, okej men då kan vi svara på 1a.

En kvalitativ aspekt av elevers förståelse av avstånd – tid graf finner vi i Jakobs beskrivning. Han presenterar en strategi för bestämning av grafens lutning. Han jämför förhållandet mellan avstånd och tid i olika intervall, vilket är ett effektivt sätt att ta reda på proportioner hos grafen. Elevernas samtal tyder på att de på ett tydligt sätt skiljer mellan avstånd och hastighet som exempelvis Linnea uttrycker i citatet ovan.

Elevers förhållningssätt till grafiska frågeställningar upprätthålls och styrs genom olika uttrycksformer. Eleverna här visar på en framträdande vetenskaplig argumentation vilket styr deras diskussioner och leder till slutsatser. I gruppens samtal kring tågets rörelse förekommer en matematisk förklarningsmodell med utgångpunkt i begrepp såsom *positiv*- och *negativ lutning* samt hur dessa begrepp hänger samman med *momentanhastigheten* i den aktuella frågeställningen.

Nedan följer ett utdrag från elevers arbete med uppgift 2. Se bilaga 1. Uppgiften är avsedd att aktualisera elevers begreppsbilder gällande relationen mellan grafens lutning och tågets minsta hastighet i det givna intervallet. Här behöver eleverna reda ut hur förändring av grafens lutning ska tolkas och vad det innebär gällande tågets hastighetsförändring.

Elevernas skriftliga svar på uppgift 2:

> Jakob
>
> 2a) När lutningen är noll
>
> 2b) Eftersom sträckan inte förändras
>
> 2c) Ja, flera tillfällen existerar
>
> Linnea
>
> 2a) När lutningen på grafen är noll
>
> 2b) Sträckan förändras inte trots tiden går
>
> 2c) ja, vid tre olika tillfällen
>
> Maria
>
> 2a) När lutningen är noll
>
> 2b) Sträckan förändras inte
>
> 2c) ja, tre olika tillfällen

Eleverna återigen ger uttryck för uppfattningar om sambandet mellan grafens lutning och tågets hastighet. De identifierar också områden där grafen lutar som minst. Citaten nedan följer elevers resonemang kring grafens lutning och hur den är relaterad till hastighet.

Citat från transkriberat videomaterial uppgifter 2:

> JAKOB Ja varje gång den inte lutar måste den stå still.
>
> MARIA För att den kör ju till en punkt och sedan kör den tillbaka och då står den still här i en viss tid.

Jakob, Maria och Linnea i citatet ovan visar hur grafens lutning hänger samman med tågets rörelsetillstånd genom att exempelvis identifiera och tolka områden där grafen lutar som minst.

Uppgift 3 behandlar relationen mellan teckenväxling hos grafens lutning och förändring i tågets färdriktning. Se bilaga 1. Här får eleverna tillfälle att uttala sig om hur tåget faktiskt rör sig. Det som står i fokus i denna uppgift är relationen mellan en graf och den situation grafen presenterar.

Elevernas skriftliga svar på uppgift 3:

> Jakob
>
> Vi får negativ sträcka vilket betyder att den (tåget) åker tillbaka men bara ungefär halva vägen.
>
> Linnea
>
> Sträckan minskas, det vill säga blir negativ måste alltså tåget åka tillbaka i samma riktning
>
> Maria
>
> Sedan åker han tillbaka i motsatt riktning (bara cirka halva sträckan tillbaka)

Elevsvaren ovan presenterar en sammanhängande beskrivningsmodell för tågets rörelsetillstånd med utgångpunkt i variationen av grafens lutning. Eleverna kan på ett tydligt sätt skilja på positiv och negativ lutning samt hur denna behöver tolkas i den aktuella situationen.

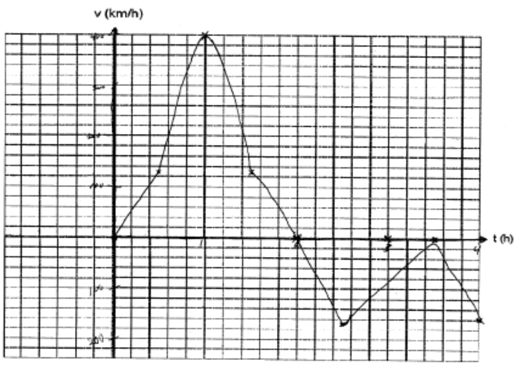
Citat från transkriberat videomaterial uppgift 3:

> JAKOB Den backar eller kör tillbaka.
>
> MARIA Och här stannar den också, så den står still på tre ställen…

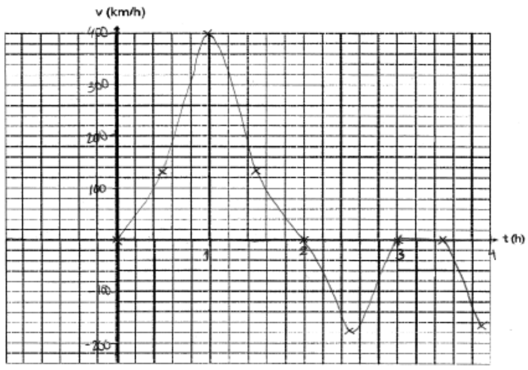
Elevernas arbete kring uppgift 3 ledde till helhetsbeskrivningar med utgångspunkt i grafens lutning samt vad variationen av grafens lutning innebär gällande färdriktningen.

Nästa fråga, uppgift 4 är avsedd att synliggöra elevers begreppsförståelse gällande konstruktion av nya representationer. Här ombeds eleverna att, med utsångspunkt i s-t-grafen i frågeställningen, konstruera en v-t-graf.

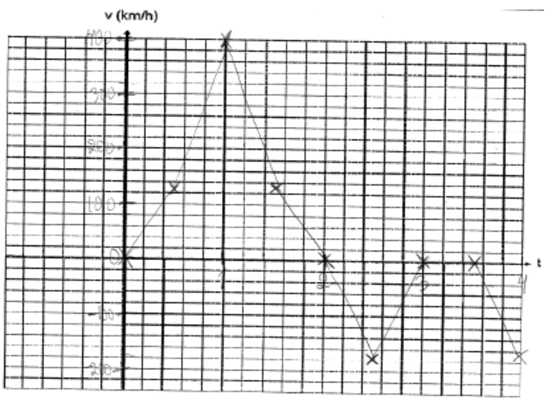
Elevers skriftliga svar på uppgift 4:



Figur 8 Jakobs svar på uppgift 4



Figur 9 Linneas svar på uppgift 4



Figur 10 Marias svar på uppgift 4

Grafkonstruktioner ovan, se figur 8, 9 och 10, kräver att eleven har förmåga att på matematiska vägar modellera situationen genom att identifiera viktiga aspekter i en graf, exempelvis extrahera och skapa mening kring grafens lutning vilket inte explicit framgår av grafiska representationen. Dessutom behöver eleven ha utvecklat strategier för att läsa av och tolka storheter på axlarna, hämta värden ur grafen, utföra beräkningar, tolka erhållna värden och dra slutsatser. Eleven behöver också kunna stödja sig på vetenskapliga begrepp och med egna ord beskriva vad grafen presenterar. Janvier (1978) hävdar att grafkonstruktion är en mångsidig och komplex process som kräver konceptuell förståelse för graf och dess egenskaper.

Sammanfattningsvis visar elevtolkningar i denna kategori på kvalitativa aspekter gällande elevers begreppsbilder Tall & Vinner (1981) av s-t-graf. Med utgångspunkt i matematiska begrepp, presenterar eleverna en beskrivningsmodell och tolkar relevanta egenskaper hos den grafiska representationen. Av elevcitaten som presenterades framgår att eleverna på ett tydligt sätt kan skilja på hur grafen ser ut och vad den faktiskt representerar. Det mest karakteristiska särdraget av elevers begreppsförståelse i denna kategori är uppfattningar som leder till framställning av en v-t-graf. Att konstruera en grafisk representation på matematiska vägar har identifierats som den mest utvecklade uppfattningen som har framkommit i denna studie, vilket, enligt Friel med flera (2001), kan ses som att eleven har utvecklat en förståelse för att *läsa data*, *läsa mellan data* och *läsa bortom data.*

Kategori B:

Elevuppfattningar i denna kategori, i likhet med föregående kategori, är uppbyggda utifrån en matematisk förklaringssmodell. En annan likhet mellan utsagorna i denna kategori och kategori A är tillämpning av relevant matematisk terminologi. En identifierbar skillnad mellan tolkningskategorierna A och B är uppfattningar som leder till konstruktion av nya representationer.

Elevers skriftliga svar på uppgift 1 bär på likartade kvalitativa aspekter som föregående kategori. Begreppet lutning uppmärksammas och tolkas utifrån olika villkor som förekommer i frågeställningen.

Elevernas skriftliga svar på uppgift 1:

> Christoffer
>
> 1a) Hastigheten är som störst efter en timme
>
> 1b) Just där är lutningen på kurvan som skarpast uppåt lutad. Man får göra en ögonbedömning.
>
> 1c) Någonstans mellan 120-140 km är hastigheten som störst, eftersom att kurvan inte är så exakt ser man inte ifall den höga hastigheten inträffar flera gånger under intervallet 120 – 140. Men vi tror att den höga hastigheten en gång och det är någonstans där emellan.
>
> Fanny
>
> 1a) När lutningen på kurvan är skarpast uppåt, vid ca 1 timme
>
> 1b) Lutningen på kurvan är störst.
>
> Kraftig lutning $\Rightarrow$ hög hastighet
>
> ”Liten” lutning $\Rightarrow$ låg hastighet
>
> Mycket sträcka delas på så lite tid som möjligt

1c) Någonstans mellan 120-140 km är hastigheten som störst. Ett tillfälle! Kan finnas fler tillfällen men genom att bara titta på diagrammet är det bara vid ett tillfälle

Josefin

1a) När lutningen på kurvan är som skarpast uppåt vid ca 1 h

1b) Lutningen på kurvan är som störst (brantast uppåt).

Brant lutning $\rightarrow$ hög hastighet

Liten lutning $\rightarrow$ låg hastighet

1c) Någonstans mellan 120-140 km är hastigheten som störst. Men den är inte lika hög i något annat intervall.

Elevers skriftliga svar ovan tyder på en liket mellan elevers tolkningar i denna kategori och kategori A. Eleverna identifierar lutning som relevant begrepp eller möjligen som en matematisk redskap för att undersöka egenskaper hos grafen. Eleverna visar också att de på ett tydligt sätt kan relatera grafens lutning till tågets hastighet. Från citatet nedan framgår hur eleverna genom att studera olika förhållanden och proportioner söker sig fram till slutsatser gällande tågets färd.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 1. Se bilaga 1.

FANNY Ja alltså om man tänker antal metrar eller antal kilometrar ska ju delas på så lite tid som möjligt liksom så det blir störst hastighet.

JOSEFIN mm precis…

FANNY Så det är det största.

CHRISTOFFER Ja det skulle vara i så fall runt 1 timma, efter en timma men…

FANNY En timma ja, typ där någonstans…

CHRISTOFFER ... precis…

Elevers tolkningar som presenteras i citatet ovan, i likhet med kategori A, lyfter fram och fokuserar på samma egenskap. Eleverna förefaller vara överens om att hastighet är avhängig grafens lutning och att det finns endast ett tillfälle då tåget har störst hastighet.

Elevernas skriftliga svar på uppgift 2:

Christoffer

2a) Det står still i intervallet 1,48 h – 2,12 h samt i intervallet 3 h – 3.30 h

2b) Då lutningen på kurvan är 0 är hastigheten noll.

2c) Japp, det finns två ställen där tåget står stilla, (eventuellt) även i början då tiden är 0

Fanny

2a) Då tåget står still

2b) Då lutningen är noll är hastigheten noll

2c) Finns två ställen! Man kan också räkna med i början dock är tiden då noll!

Josefin

2a) Tåget har som lägst vid 2 tillfällen då $v = 0$, detta är vid intervallet 1,48 h – 2,12 h samt vid intervallet 3 h – 3,30 h

2b) Då lutningen är noll hastigheten är noll

2c) Det finns 2 ställen. Eventuellt i början också räknar innan den startat vid tiden 0

Elevers skriftliga svar ovan visar på uppfattningar gällande relationen mellan grafens lutning och tågets minsta hastighet. Samtliga tillfällen då tåget har minst hastighet identifieras av eleverna. Utdraget nedan följer elevers resonemang kring grafens lutning och hur de identifierar intervallen där grafens har minst lutning.

Citat från transkriberat videomaterial uppgifter 2:

FANNY När har tåget som lägst hastighet? (Eleven läser frågan högt)

JOSEFIN Det är ju när lutningen är som minst…

FANNY Ja det är ju det, men det är ju... hallå... Den står ju still typ, där, den står ju still.

CHRISTOFFER Nej.

FANNY Jo den står ju still mellan tre timmar och 3,5 timma, 3 timmar och 20 minuter. Och så står den still mellan typ 1,50 och två.

CHRISTOFFER Alltså det här innebär ju att den åker tillbaka va?

JOSEFIN Ja det gör den men det är väl stationerna antagligen.

Fanny och Josefins uttalande synliggör deras förståelse av begreppet lutning och hur den ska relateras till tågets hastighet. Det visar också på en likhet mellan uppfattningar i denna kategori och kategori A vilket berör förståelse för relationen mellan graf och den process grafen beskriver.
Christoffer förefaller tveksam, men senare uttrycker han sig … *den åker tillbaka*… I nästa uppgift försöker eleverna sammanfatta tågets rörelse under det givna intervallet genom att göra en helhetstolkning av grafen.

Elevernas skriftliga svar uppgift 3:

Christoffer

Man kan säga att tåget åkt 30 mil, vi kan ur diagrammer utläsa till en punkt där det sedan har påbörjat sin resa tillbaka till startdestinationen

Fanny

Vi kan utläsa ur diagrammet att tåget åkt 30 mil till en punkt. Därefter har tåget vänt och åkt tillbaka. Detta kan vi veta eftersom sträckan minskar.

Josefin

Vi kan ur diagrammet utläsa att tåget först åkt 300 km åt ett hål i 2 h till en punkt där den sen påbörjar sin resa tillbaka mot start punkten.

I skriftliga svaren ovan uttrycker sig eleverna om relationen mellan grafens lutning och förändring i tågets hastighetsriktning. Eleverna tolkar grafen och försöker ge beskrivningar om hur tåget egentligen rör sig. I följande citat uttalar sig eleverna om kopplingen mellan grafen och den situation grafen beskriver.

Citat från transkriberat videomaterial uppgifter 3:

CHRISTOFFER Ja men sen åker den ju tillbaka för det här är ju inte att. ...

JOSEFIN Jo men precis, för här är typ startpunkter och sen så kommer den tillbaka till startpunkten här igen. Ja. Den åker tillbaka.

FANNY Vad då åker till… det behöver inte betyda att den åker tillbaka?

CHRISTOFFER Jo den går tillbaka…

JOSEFIN Jo, kolla här är ju 300 kilometer, sen så åker den nedåt igen.

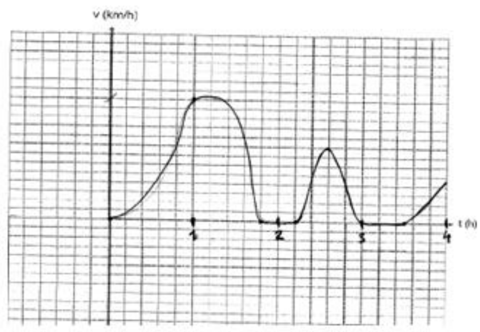
FANNY Alltså han kom i typ 160 kilometer här och så åkte han tillbaka 140…

CHRISTOFFER Då är det här avståndet…

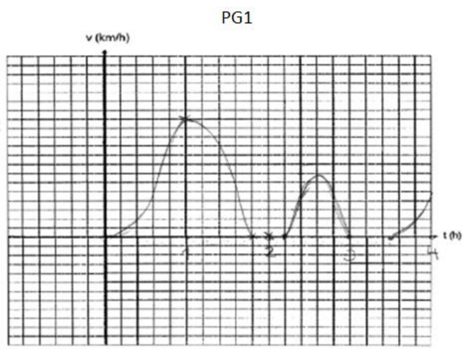
Christoffer och Josefin argumenterar att tåget vänder vid 2 timmar. Fanny är tveksam i början men hon förefaller vara övertygad när hon säger … *så åkte han tillbaka 140* … Förutsättning för att eleven ska kunna uttala sig om tågets färdriktning på ett vetenskapligt sätt är att eleven har utvecklat en begreppsbild Tall & Vinner (1981) som tolkar variationen av lutningen samt vad det innebär beträffande tågets färdriktning.

Elevernas skriftliga svar på uppgift 4:

Figur 11 Christoffers svar på uppgift 4



Figur 12 Fannys svar på uppgift 4



Figur 13 Josefins svar på uppgift 4

Elevers resonemang kring uppgift 4 resulterar i en v-t-graf med tre maximipunkter vilka eleverna tolkar som tre tillfällen då hastigheten ökar. Se figur 11, 12 och 13. För att konstruera en hastighet - tid graf krävs att eleven kan dra slutsatser om hastighetens storlek och riktning genom att tolka s-t-grafens lutning. Eleven behöver också identifiera tillfällen då hastigheten ökar och tillfällen då tåget står still. Han/hon behöver också ha utvecklat förmåga att argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar, slutsatser samt åskådliggöra förloppet grafiskt. Att ett föremåls hastighet kan växa negativt visar sig vara en högre kvalitativ aspekt av begreppsutveckling i det aktuella området. Nemirovsky (1994) och Nemirovsky & Rubin (1992) framhåller att elever har svårt att förstå negativ hastighet. Här visar eleverna svårighet med att framställa negativ hastighet grafiskt. Förmodligen beror det på att eleven har svårt att acceptera att grafen kan gå under tidsaxeln. Att konstruera en v-t-graf är den enda kvalitativa aspekten av elevers tolkningar som identifierades i denna studie och som skiljer denna tolkningskategori från kategori A.

Kategori C

Denna kategori kännetecknas av att omfatta tolkningar som inledningsvis är uppbyggda på matematiska begrepp men längre fram i samtalet förekommer också vardagsbegrepp och ikoniska uppfattningar i elevers utsagor vilket utgör en tydlig skillnad mellan denna tolkningskategori och kategori A och B.
Elevers utsagor i denna kategori, åtminstone inledningsvis, i likhet med kategori A och B stödjer sig på begreppet lutning.

Nedan presenteras elevernas skriftliga svar på uppgift 1. Se bilaga 1.

Linn

1a) Efter 1 timma på grund av störst lutning

1b) På grund av lutningen

$$\frac{100}{1} = 100\, km/h$$

$$\frac{200}{1{,}2} \approx 200\, km/h$$

$$\frac{300}{2} = 150\, km/h$$

1c) Finns ett enda tillfälle

Pia

1a) Efter en 1h på grund av störst lutning

1b) $v = \frac{s}{t} = \frac{100}{1} = 100\, km/h$

$$v=\frac{s}{t}=\frac{200}{1{,}2}\approx 200\,km/h \Rightarrow \text{störst hastighet}$$

Jo, det lutar mest

1c) Det finns bara ett enda tillfälle

Saeed

1a) Efter en timme på grund av lutning

1b) $v=\frac{s}{t}=\frac{100}{1}=100\,km/h$

$$v=\frac{s}{t}=\frac{200}{1{,}2}\approx 200\,km/h \Rightarrow \text{störst hastighet}$$

$$v=s=\frac{300}{2}=150km/h$$

1c) Bara ett enda tillfälle

Eleverna försöker, genom att undersöka medelhastigheten i olika intervall, identifiera de områden där hastigheten är som störst. Citatet nedan följer elevernas resonemang kring tågets hastighet. Både Linn och Pia lyfter fram grafens lutning som relevant begrepp och försöker bestämma och jämföra lutningen över olika intervall.
Citat från transkriberat videomaterial uppgift 1:

LINN Ja det är beroende på lutningen också mycket ju.

PIA Ja.

LINN Det är ju lutningen som avgör...

PIA Vi börjar med 100, 200, 300 för att se vilken hastighet, vilken sträcka vi ska använda och vilken tid vi använder, så då tar vi 100 delat på 1.

LINN 2, 4, 6 ... 20 … alltså efter 1 timme och 20 minuter.

PIA 1,2 då.

Pia delar Linns uppfattning som kommer med påståendet att *Ja men det är beroende på lutningen också mycket ju…* Eleverna förefaller vara överens om att det är lutningen som avgör hur snabbt tåget rör sig. Situationen verkar delvis ha aktiverat elevernas begreppsbild Tall & Vinner (1981) av lutning som de sedan sätter i relation till frågeställningen. Citatet ovan, i likhet med tolkningskategorierna A och B tyder på en förståelse av begreppet lutning. Som tidigare nämndes så förekommer i denna kategori även uppfattningar som delvis refererar till ikoniska idéer associerade till tidigare erfarenheter och upplevelser. Nedan följer elevers arbete med att ta fram och utveckla en tolkningsmodell för tågets minsta hastighet.

Elevernas skriftliga svar uppgifter 2. Se bilaga 1.

Linn

2a) Mellan 3,6 – 4 timmar

2b) Inget svar

2c) Bara ett tillfälle

Pia

2a) Under intervallet 3,6 - 4,0 h

2b) Har diskuterat

2c) Finns bara ett enda tillfälle

Saeed

2a) 3,6 - 4 h

2b) Inget svar

2c) Bara ett

I föregående uppgift identifierade både Linn och Pia det intervall där tågets hastighet var som störst genom att tolka lutningen hos grafen. Men här ger de uttryck för idén att hastigheten är lägst i ett intervall där grafen är avtagande. Som tidigare nämndes, det som kännetecknar elevtolkningar i denna kategori är nämligen att de, inledningsvis involverar relevanta matematiska begrepp, medan de längre fram i diskussionen kan övergå i andra tolkningar av ikonisk karaktär. Citatet nedan exemplifierar en sådan övergång.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 2:

PIA 2,4,6 mellan 3,6 timmar till 4 timmar.

SAEED Vad då menar du 3,6 till 4?

PIA Intervallet när den hade som lägst lutning eller när lutar den som minst, lägst hastighet mellan den här, inte bara där.

Pia identifierar intervallet *3,6 timmar till 4 timmar* där grafens har *lägst lutning* eller minst lutning. Hon kopplar också detta till *lägst hastighet*. Av citatet framgår att Pia uttalar sig om ett samband mellan lutning och hastighet men hon identifierar inte rätt intervall där grafens lutning och därmed hastigheten är lägst. Uppfattningen att desto lägre desto mindre, kan kategoriseras som intuitivt och ikoniskt. Vidare i samtalet uttalar sig Pia om varför hon inser att hastigheten är lägst i intervallet *3,6 timmar till 4 timmar*:

SAEED Okej, det där är…

LINN Inte bara där ... hela ... Där lutar det lite så det är mellan den här tidpunkten. Vi satte ju 4 timmar och sen ...

SAEED Och där är 3,6 och 4.

PIA 3,6 till 4.

SAEED 3,6 till 4.

PIA Ja under … 3,6 till 4,0 säger vi, timmar, så. Hur kan man veta det? Och det diskuterade vi ju innan att ett, det har minst lutning, och två, använd sunt förnuft, så är det så att tåget minskar som mest när det är på gång, när det ska snart stanna.

LINN Jo men… man kan inte bara liksom…

Linn ställer sig tvivlande till Pias resonemang men hon preciserar inte vad i Pias modell som hon inte anser fungera. Pia tolkar återigen avtagande delen av s-t-grafen, det vill säga intervallet 3,6-4 h, som minst lutning och lägst hastigheten:

PIA Nej men jag förstår vad du menar men man kan inte förutspå det genom just det här diagrammet så det är omöjligt att säga det, så jag säger att det är just mellan intervallet 3,6 och 4 för att det är ska snart stanna och tåg behöver flera timmar t.o.m. att stanna för att minska hastigheten, man kan inte bromsa direkt, det fortsätter att åka. Det läste jag faktiskt någonstans.

LINN Nej som inte …

PIA Nej det funkar inte som buss … liksom… som i Harry Potter bussen… hehe…

LINN Ska vi ta 3:an då?

PIA Ja 2c…

LINN Ja 2c menar jag.

PIA Jag skulle också säga... Det finns bara ett enda tillfälle.

Pias tolkning leder till slutsatsen att hastigheten minskar succesivt från 3,6 till 4 timmar och att den är som lägst vid 4 timmar vilket stämmer helt överens med *sunt förnuft* enligt henne. Pia grundar sin uppfattning på en intuitiv kunskapsform, som tolkar avtagande delen av grafen som en kontinuerlig minskning av tågets hastighet, vilket möjligen är influerad av uppfattningen desto lägre desto mindre.

Konversationen tyder på att eleven kan gå långt i sitt resonemang som Pia uttrycker … *tåg behöver flera timmar till och med att stanna för att minska hastigheten.* Här försöker hon förklara varför det tar så lång tid för tåget att stanna. Pias uttalande är inte realistiskt, men uppfattningen desto lägre desto mindre, manifesterar sig så övertygande att Pia bryr sig mindre om modellens rimlighet.

De tolkningar som förekommer i denna kategori visar på en relativt utvecklad begreppsförståelse. De visar på förståelse för att identifiera och relatera begreppet lutning till frågeställningen och tolka positiv lutning samt vad det innebär beträffande största hastighet. När det gäller frågor om tågets lägsta hastighet är Linn och Pia dock mindre framgångsrika vilket förmodligen beror på att eleverna har svårighet med att tolka och identifiera intervall där lutningen är som minst. För att Linn och Pia ska kunna tolka grafen i sin helhet krävs också kunskap om hur begreppet lutning ska tolkas då olika villkor förekommer, vilket framhålls av Leinhardt, Zaslavsky & Stein (1990).

Pias uttalande *som i Harry Potter bussen*, är ytterligare exempel på ikoniska beskrivningar som har förekommit i denna kategori. I någon scen i Harry Potter filmen åker någon eller några tåg och hos Pia väcker s-t-grafens utseende associationer till just den scenen i filmen. Här stödjer sig eleven på händelsebeskrivningar som passar in i situationen. Det förefaller att eleverna tolkar s-t-grafen i frågeställningen som en matematisk rekonstruktion av en händelse. Chi & Slottas (1994, 2006, 2012) hävdar att många av elevers alternativa uppfattningar om vetenskapliga begrepp kan förklaras utifrån ett ontologiskt perspektiv på begreppsutveckling, se figur 1, sidan 15.

Frågeställningen beskriver en tågfärd på fyra timmar vilket kan uppfattas som en händelse *event*. Men en tågfärd och den matematiska beskrivningsmodellen som åskådliggör tågfärden i form av en s-t-graf delar inga gemensamma ontologiska attribut. Felkategorisering av begrepp på ett ontologiskt plan kan ses som mekanismen bakom alternativa ikoniska tolkningar som förekommer i denna kategori.

Saeed förefaller vara avvaktande i sin roll i grupparbetet, han väljer att lyssna på Linn och Pias argumentation utan att ge egna argument. Saeed uttrycker sig försiktigt när han över huvud taget säger något. Han formulerar och ställer frågor som hjälper honom att förstå Linns och Pias resonemang.

Utdraget nedan följer elevers samtal kring tågets färdriktning. En konflikt som uppstår här är att Pias beskrivning av grafen som en kulle kommer i konflikt med hennes tidigare uttalande att störst hastigheten inträffar efter 1,2 h (då tåget åker uppförsbacke). Modellen kan inte skapa ett förståeligt sammanhang för henne.

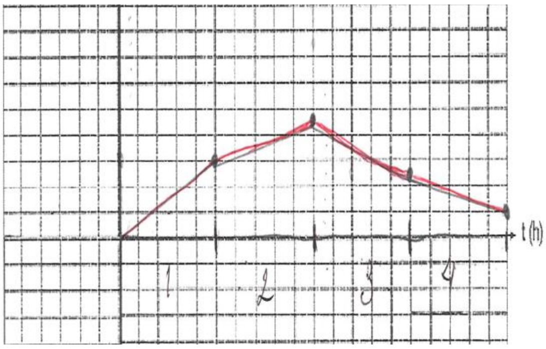
Citat från transkriberat videomaterial uppgift 3:

> PIA Nej, hastigheten, då ökar ju farten, man gasar ju på när man går upp för en kulle för man vill komma över den…
>
> LINN Jo men det går ändå...
>
> PIA… så hastigheten ökar…
>
> SAEED Men hastigheten när du går nerför…
>
> PIA Då bromsar man hastigheten för den kommer ändå att rulla ner.
>
> SAEED Ja precis ja.
>
> LINN Men man ser, alltså ja man ser, det krävs alltså mer kraft för att ta sig upp för en backe.
>
> PIA Ja men det är just det, nu har du sagt t.ex. just det jag sa, att ju högre, ju större hastighet, det står olika riktningar, och går den upp för en kulle så ser tåget, om det ens är möjligt, då krävs det ju en större hastighet för att komma upp, då måste de gasa på som du säger.

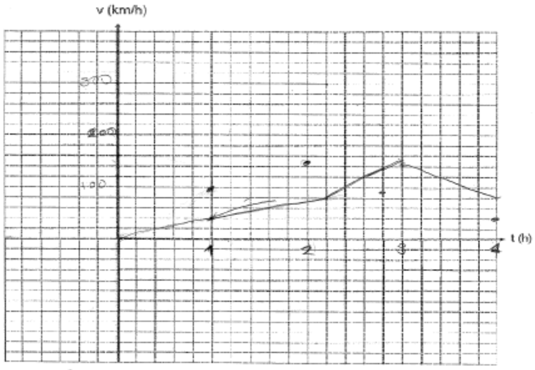
Pia tolkar grafen som en *kulle* och att i början ökar hastigheten för att *man gasar ju på när man går upp för en kulle för man vill komma över den*. Med denna tolkning försöker hon argumentera för tidigare uppfattningen att hastigheten är störst *Efter en timme på grund av störst lutning*. Pias argumentation bygger inte längre på begreppet lutning utan på vad grafen liknar. Linn verkar ha svårt att förstå resonemanget ”det krävs alltså mer kraft för att ta sig upp för en backe.” Den konflikt som har uppstått beror på att *ju högre, ju större* modellen passar inte riktigt in i *kulle* modellen men för Pia, är den ett självklart komplement till tidigare uppfattningen att ”ju lägre desto mindre”.

Grafens utseende aktiverar en speciell kunskapsstruktur WYSIWYG, hos eleverna i denna kategori som fokuserar på visuella egenskaper hos problemställningen, *Compelling visual attributes* (påfallande visuella egenskaper, min översättning) Elby (2000). Denna kunskapsform förstärker den visuella framställningen och genererar enkla snabba lösningar genom att identifiera likheter och dra paralleller till det verkliga livet. Att kunna se och identifiera likheter är i sig är en viktig kognitiv förmåga som bland annat möjliggör förståelsen av ritningar, kartor etc. Det är förmodligen denna kunskapsform eleverna utnyttjar och som kommer till uttryck i elevers tolkningar. I nästa uppgift, ombeds eleverna framställa grafen till tågets hastighet.

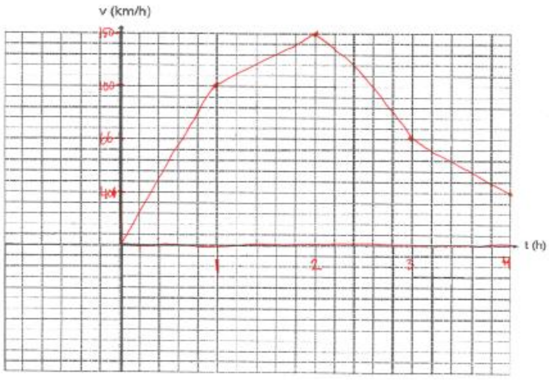
Elevernas skriftliga svar på uppgift 4:



Figur 14 Linns svar uppgift 4



Figur 15 Pias svar uppgift 4



Figur 16 Saeeds svar uppgift 4

Linn, Pia och Saeed tecknar v-t-graf som är ganska identisk s-t-grafen i frågeställningen. Eleverna förefaller identifiera likhet mellan s-t-graf och v-t-graf. En annan fördel med dessa grafkonstruktioner, utifrån elevens perspektiv är att de stämmer väl överens med deras tidigare tolkning nämligen att hastighet ökar först för att avta sedan.

Sammanfattningsvis kan elevupptolkningar i denna kategori, ses vara baserade på matematiska begrepp, men också ikoniska idéer som träder fram och tar stort utrymme i samtalet.

Kategori D

Tolkningar i denna kategori karakteriseras av att vara ikoniska. Det innebär bland annat att grafen tolkas utifrån något den i verkligheten liknar. Kategorin innesluter elevtolkningar som är helt influerade av vardagsbegrepp och vardagshändelser. Dessa tolkningar, till skillnad från kategori A, B och C saknar några hänvisningar till matematiska begrepp och beskrivningsmodeller.

Elevernas skriftliga svar uppgift 1. Se bilaga 1.

> ARMAN
>
> 1a) Tåget har störst hastighet vid 2 timmar.
>
> 1b) Den är på högsta punkten vid två timmar.
>
> 1c) Hastigheten varar i 24 minuter.
>
> ALEXANDER
>
> 1a) Den har som störst hastighet på 2 timmar
>
> 1b) För att den är på sin största punkt då
>
> 1c) Ja, på 1,48 och 2,12
>
> GIDEON
>
> 1a) Tåget har störst hastighet när 2 timmar har gått
>
> 1b) För att den ligger på sin högsta punkt i diagrammet.
>
> 1c) Hastigheten varar i 24 min

Eleverna anser att hastigheten är störst där grafen har sin *högsta punkt*. Uppfattningen, desto högre desto större, leder till att eleven inte skiljer på läge och hastighet. En tydlig skillnad mellan denna tolkningskategori och kategori A, B och C är att utsagorna i denna kategori inte stödjer sig på begreppet lutning. Eleverna förefaller fokusera på andra attribut än grafens lutning.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 1:

> ALEXANDER När den har som störst, alltså den är på högsta punkten här uppe.
>
> ARMAN Här är det typ att det går ner för en backe, här är det att det typ går upp för en backe, här åker den rakt sen upp för en backe igen, det är typ kolla så här… hehe...
>
> ALEXANDER Nej ska vi skriva om backar också, det kan vara att den åker uppförsbacke och nerförsbacke också, skriv bara alternativt backar…
>
> GIDEON Jag tror aldrig jag har sett ett tåg åka så där uppförsbacke och…

> ARMAN Jag har sett…
>
> GIDEON Har du sett seriöst? Alltså riktiga sådana där..?
>
> ARMAN Ja... berg, alltså det typ går upp så här skitstort, alltså det går upp runt berg och grejer..
>
> GIDEON Kanske som Lisebergsbanan eller något…
>
> ALEXANDER Hehe… Balder…
>
> ALEXANDER I San Francisco de har sådana vagnar utan dörrar, de bara hänger…

Arman framhåller att störst hastighet inträffar efter 2 timmar. Hans tolkning av grafen bygger på uppfattningen att grafen visar ett tåg som *går uppför en backe* och *går nedför en backe*. Eleverna har olika referenser, pratar om olika platser, om olika händelser och exemplifierar på olika sätt för att göra situationen begriplig. Alexander delar uppfattningen att hastigheten är störst *på högsta punkten här uppe* och att tåget åker *uppförsbacke* och *nerförsbacke.* Hos Alexander väcker grafen associationer till *San Fransiscos* gator. Gideon, efter viss tveksamhet uttrycker sig om grafen som *Lisebergsbanan*.

Elevers alternativa ikoniska tolkningar av grafiska representationer är väl dokumenterat i litteraturen, se till exempel Janvier, 1978; Nemirovsky & Rubin, 1992; Beichner, 1994; Nemirovsky, 1994; Graham & Sharp, 1998; Elby 2000; Teuscher & Reys, 2010). Elevers uppfattningar av s-t-grafen i frågan kan ses som en alternativ beskrivningsmodell som eleven använder sig av för att begripliggöra situationen

Vanlig förekommande uttrycksformer i elevgruppens konversation är vardagsbegrepp såsom uppåt, nedåt, uppförsbacke och nedförsbacke vilket karakteriserar uppfattningar i denna kategori. Dessa begrepp är meningsbärande och effektiva vad gäller kommunikation i vardagslivets sammanhang men de har också brister och begränsningar då de används för att tolka en situation framställd genom matematiska representationer.

En möjlighet är att dessa elever, efter genomgång av Matematik 1 och 2, har stött på begreppet lutning och utvecklat en förståelse för begreppet som en egenskap eller något som kan beräknas hos räta linjer och grafer. Men under den långa diskussionen kom det fram att denna begreppsbild av lutning inte tilläts.

Alexanders beskrivning *I San Francisco har de sådana vagnar utan dörrar, de bara hänger…*, eller som Arman uttrycker sig *Ja ... berg, alltså det typ går upp så här skitstort, alltså det går upp runt berg och grejer* ..., är exempel på intuitiva idéer vilka förefaller vara djupt rotade i föreställningsvärlden. Det är egentligen inte trovärdigt att ett tåg skulle kunna köra uppför en så brant backe. Att tolka och skapa ett sammanhang kring grafen verkar vara mer angeläget för de tre eleverna än att fundera över modellens rimlighet vilket kan ses ett bidragande faktor till att alternativa idéer förblir resistenta mot förändringar.

Enligt Chi & Slottas (1994, 2006, 2012) perspektiv på begreppsutveckling kan dessa alternativa uppfattningar av s-t-grafen i frågeställningen tolkas utifrån ett ontologiskt perspektiv på begreppsutveckling, se figur 1, sidan 15. Frågeställningen beskriver hur ett tåg rör sig under fyra timmar och en tågfärd kan uppfattas bland annat som en händelse *event*. Men en tågfärd som händelse och en s-t-graf som en matematisk framställning av tågets rörelse tillhör inte samma ontologiska kategori. Det kan vara ett möjligt hinder för eleven som försvårar djupare förståelse av grafiska representationer.

Nedan följer elevernas arbete med uppgift 2. Se bilaga 1. Uppgiften är avsedd för att aktualisera elevens förståelse gällande grafens lutning i relation till tågets lägsta hastighet.

Elevernas skriftliga svar uppgift 2:

ARMAN

2a) De första tolv minuterna

2b) Den är på lägsta värde vid de första tolv minuterna

2c) De första tolv minuterna

Alexander

2a) På 12 minuter

2b) För att det är den lägsta punkten

2c) Nej, bara på första 12 minuterna

Gideon

2a) I de 12 första minuterna

2b) Genom att kolla på hur långt ner...(struken av eleven)

Den är på lägsta punkten.

2c) De 12 första minuterna

Eleverna förefaller hålla sig till samma beskrivningsmodell. Om hastigheten är störst *högst upp* så måste den vara minst i den *lägsta punkten*. Utsagorna med stark vardagsanknytning utvecklas så småningom till en sammanhängande beskrivningsmodell för eleverna. Utdraget nedan följer hur eleverna resonerar kring minsta hastigheten.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 2. Se bilaga 1.

ARMAN första 12 minuterna … den är ju lägst... hehe ...

ALEXANDER Jag trodde det skulle vara tvärsvårt…

ALEXANDER Bara det är den lägsta punkten...

ARMAN Hur kan man veta det vilken... skriv den är på lägsta värden de första 12 minuterna och så där nere kan du skriva de första 12 minuterna.

Alexander upplevde frågan som enkel när han säger *Jag trodde att det skulle vara tvärsvårt*. För honom, tolkningen *Bara det är den lägsta punkten* …, är självklar och stämmer väl överens med sunt förnuft. Eleverna anger tillfredsställande svar *första 12 minuterna*, ett av tre tillfällen där hastigheten är låg. Men tolkningen bygger inte på förståelse av grafens lutning utan på uppfattningen att … *det är den lägsta punkten*, vilket är i linje med elevernas tidigare tolkning att *den är snabbast här uppe* … Nedan presenteras elevernas skriftliga svar uppgift 3. Se bilaga 1. Uppgiften behandlar relationen mellan s-t-grafens lutning och förändring i tågets färdriktning.

Arman

Från starten är en rak sträcka så tåget accelererar till en hastighet vid 300 km/h. Sedan retarderar för flera svängningar, vid den första svängen kommer han i hastigheten på 300 km/h, för andra svängen har han hastigheten 200 km/h

Alexander

Från starten till andra timmen är det rak sträcka, och från andra timmen till fjärde timmen så börjar den svänga lite vilket gör att den måste retardera. Alternativ uppförs/nedförs backar.

Gideon

> Från starten till den 2:a timmen är det en rak sträcka. Diagrammet visar sedan att tåget saktar ner, vilket kan betyda att den ändrar riktning från 2 timmar-3 timmar. Från 3-4 timmar åker tåget med konstant hastighet

Av elevers skriftliga svar ovan framgår att eleverna försöker uttala sig om grafen i sin helhet och ge en beskrivning av tågets rörelse och eventuella förändringar hos tågets färdriktning.

Nedan följer ett utdrag från elevers samtal kring uppgift 3. Se bilaga 1. Samtalet leder gradvis till en konflikt som uppstår då elever uttrycker sig om tågets färdriktning. Att tolka grafen som *berg- och dalbana* visar sig ha en svaghet, den kan inte förklara tågets färdriktning.
Citat från transkriberat videomaterial uppgift 3:

> ARMAN Kan man säga något om riktningen hos tågets färd genom att tolka diagrammet, vad i så fall? (Arman läser uppgiften högt.)
>
> ALEXANDER De menar väl typ uppförsbacke och nerförsbacke.
>
> ARMAN Jag tror faktiskt det, typ här är...
>
> ARMAN Här är det typ att det går ner för en backe, här är det att det typ går upp för en backe, här åker den rakt sen upp för en backe igen, det är typ kolla så här… hehe ...

Gideon uppehåller sig vid det problematiska med tågets färdriktning:

> GIDEON Men... riktningen alltså ni snackar ju alltså nerförsbacken på diagrammet, de menar ju riktningen med tåget alltså...
>
> ARMAN Alltså jag tror inte man kan det egentligen...

Eleverna verkar ha svårt att uttala sig om tågets färdriktning, möjligen beror det på att ett sådant påstående kommer i konflikt med den tidigare tolkningen nämligen att grafen förställer *uppförsbacke* och *nedförsbacke*:

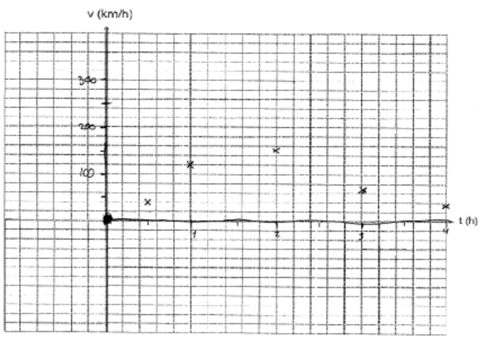
> ALEXANDER I och för sig det går ju i viss riktning, typ här har den rak riktning, sedan är det svängning så sakta ner, det kan vara här... när den… vad heter det? När den åker långsammare så typ…
>
> ARMAN Men riktning, det är väl åt vänster och höger, jag tror inte det är uppåt nedåt…

Eleverna försöker tolka grafen utifrån sina egna intuitiva idéer och göra situationen mer begriplig. De kommer från var sitt håll med en modifierad tolkning för att lösa konflikten som har uppstått. Arman drar slutsatsen att tåget i diagrammet rör sig åt höger och vänster och inte uppåt och neråt. Denna tolkning bygger på idén att grafen förställer en *karta*, alltså tåget rör sig utmed grafen på ett horisontellt plan. Fördelen med karta-modellen är att den gör det möjligt att motivera och förklara tågets färdriktning. Fallet Arman tyder på att eleven kan relativt lätt inom loppet av några minuter överge *berg- och dalbana*-modellen som var så övertygande och ersätter den med *karta*-modellen. Detta beror möjligen på att berg- och dalbana modellen visade sig ha brister, den kunde inte förklara tågets färdriktning. Konflikten initierade en process som ledde till en förändring av elevens beskrivningsmodell som i sin tur kunde generera en mer anpassad och trovärdig tolkning.

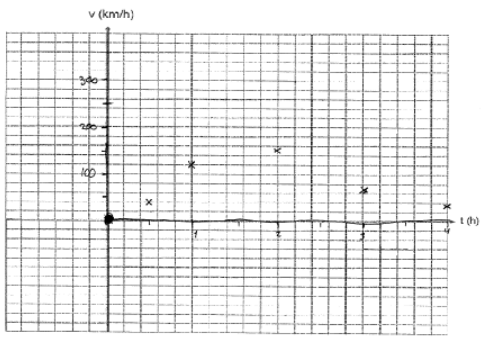
För att eleven ska kunna tolka s-t-grafens egenskaper krävs att eleven har utvecklat en förståelse för bland annat begreppet lutning och att denna begreppsstruktur aktualiseras av frågan som sedan relateras till problemet. Eleverna verkar ha blandat ihop hastighetsändring och ändring i hastighetens riktning, *saktar ner* tolkas som *ändrar riktning*. Att *tåget svänger från andra timmen*, är inte helt fel, men elevernas resonemang bygger inte på teckenväxlingen hos grafens lutning.

Att dessa elever kunde skapa två beskrivningsmodeller på relativ kort tid tyder på att elevers intuitiva idéer kan verka i olika situationer och är flexibla i den meningen att de anpassar sig till situationen.

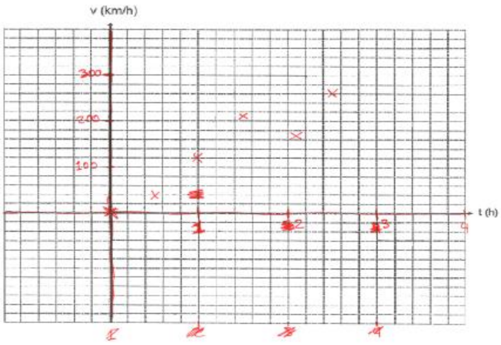
Nedan presenteras elevernas skriftliga svar uppgift 4. Se bilaga 1. Här ombeds eleverna att framställa grafen till tågets hastighet genom att tolka avstånd – tid graf. Uppgiften är avsedd för att synliggöra elevers begreppsförståelse då den kommer till uttryck i framställning av ny grafisk representation.



Figur 17 Armans svar uppgift 4



Figur 18 Alexanders svar uppgift 4



Figur 19 Gideons svar uppgift 4

Elevernas arbete med uppgift 4 i denna kategori synliggör intressanta aspekter av elevers uppfattningar avseende egenskaper hos en s-t-graf. Alexander, Arman och Gideon tecknar en parabelliknande v-t-graf i punktform. Elevers konstruktion av v-t-grafen förefaller uppfylla ett viktigt kriterium, den stämmer väl överens med uppfattningen att tågets hastighet ökar först för att därefter minska, vilket har förekommit under samtalet.

Elevers uttryckta förståelse i denna kategori kan kategoriseras som ikoniska med tydliga referenser till tidigare erfarenheter. Utsagorna i sin helhet är präglade av vardagsbegrepp och vardagshändelser. Dessa tolkningar saknar några hänvisningar till relevanta matematiska begrepp och samband.

Symbolisk representation

Inom temat symbolisk representation har tre kategorier av elevers förståelse framkommit i analysen. Först görs en sammanfattning av samtliga kategorier som identifierats. Därefter presenteras varje kategori var för sig med exemplifierande citat från elevernas arbeten som uttrycker vad som kännetecknar kategorierna samt vad som skiljer dem åt. Dessa presenteras kortfattat nedan, från den mest utvecklade till den minst utvecklade uppfattningen.

Kategori A: uppfattningar som bygger på en proceptuell förståelse av matematisk symbolism

Kategori B: uppfattningar som delvis bygger på proceptuell förståelse

Kategori C: uttryckta förståelse som endast länkar samman matematiska symboler och processer

Kategori A:

Uppfattningar inom denna kategori kännetecknas av att ha sin hemvist i den andra matematiska världen, den proceptuella-symboliska matematiska världen, Tall & Gray (1994). Det innebär att elevens begreppsbild har en sådan status som relaterar matematiska symboler till processer och begrepp samtidigt.

Inom temat symbolisk representation ombeds eleverna att svara på tre uppgifter 5a-5c. Se bilaga 1. Frågeställningarna behandlar elevers förståelse av funktion som en matematisk representation av ett samband eller en relation. Första deluppgiften, 5a, är avsedd för att synliggöra elevers förståelse av differenskvoten till en given funktion. Eleverna ombeds att beräkna och tolka differenskvoten $\frac{s(5)-s(3)}{5-3}$ till funktionen $s(t)=2t^2+t$, där $0 \le t \le 10$.

Elevernas skriftliga svar uppgift 5a:

Christoffer

$2 \cdot 5^2 + 5 = 55$

$2 \cdot 3^2 + 3 = 21$

$s = \frac{34}{2} = 17 m/s$

Medelhastigheten mellan 3-5 sekunder är 17 m/s

Jakob

$(2 \cdot 5^2) + 5 = 55$

$(2 \cdot 3^2) + 3 = 21$

$$s = \frac{34}{2} = 17m/s$$

Medelhastigheten mellan 3 och 5 sekunder.

Johan M

$$\frac{s(5)-s(3)}{5-3} = \frac{(2\cdot 5^2+5)-(2\cdot 3^2+3)}{5-3} = \frac{55-21}{5-3} = \frac{34}{2} = 17m/s$$

Medelhastigheten i intervallet 3 till 5 sekunder är 17 m/s

Elevernas skriftliga svar visar hur elever genom en sekvens av algebraiska/aritmetiska operationer beräknar värdet av differenskvoten. De tolkar det erhållna värdet som medelhastighet.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5a:

JOHAN Alltså s av 5 är ju hur långt den har kommit efter 5 sekunder och 3 är hur långt den har kommit upp till 5 sekunder…

CHRISTOFFER Då borde det vara sträckan mellan 5 och 3 sekunder…

JOHAN Ja ... 5 minus 3 i tiden, alltså 2 sekunder, så det är väl helt enkelt…

CHRISTOFFER Medelhastigheten under den tiden…

Eleverna tolkar den matematiska symbolismen som förekommer i frågeställningen. Differenskvoten behandlas genom en sekvens av operationer (process) som leder till ett svar. Därefter tolkar eleverna det erhållna värdet som medelvärde av hastighet (begrepp), eller som Christoffer uttrycker i citatet ovan ”medelhastighet under den tiden”. Att ha utvecklat begreppsbilder kring matematiska symboler både som processer och begrepp, är något som karakteriserar enligt Tall & Gray (1994) lärande i den proceptuella-symboliska matematiska världen. Elevers uttalande i citatet ovan visar på en sammanhängande matematisk terminologi vilket delvis framgår av hur eleverna presenterar ett nätverk av matematiska begrepp såsom ”intervall”, ”medelhastighet” eller som Johan uttrycker ”Alltså s av 5 är ju …”.

Elevernas skriftliga svar uppgift 5a:

Fanny

$$\frac{(2\cdot5^2+5)-(2\cdot3^2+3)}{5-3}=\frac{34}{2}=17$$

Medelhastigheten mellan 3 och 5 sekunder är 17 m/s

Josefin

$$\frac{2\cdot25+5-(2\cdot3^2+3)}{2}=\frac{55-21}{2}=17$$

Medelhastigheten mellan 3 och 5 sekunder är 17m/s

Maria

$$\frac{2\cdot25+5-2\cdot3^2+3}{2}=\frac{55-21}{2}=17$$

Medelhastigheten mellan 3 och 5 sekunder är 17 m/s

Fanny, Josefin och Marias skriftliga svar ovan bygger på samma resonemang. Eleverna beräknar differenskvoten genom olika operationer och tolkar därefter det erhållna värdet som medelhastighet.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5a:

JOSEFIN Ja men efter 5 sekunder har den rört sig blablabla sträcka.

FANNY Ja precis och så delar man med… nu är det räknat…

FANNY Ja men det är väl alltså hastigheten, medelhastigheten under de sekunderna.

JOSEFIN 34, jag tar 17 då.

JOSEFIN Medelhastigheten mellan 3 och 5 sekunder

Differenskvoten beräknas och tolkas som medelhastighet vilket återigen visar på elevers proceptuella uppfattning av en differenskvot. Citatet ovan tyder på att både Fanny och Josefin uppfattar uttrycket både som process (beräkning av differenskvot) och begrepp (medelhastighet).

Elevernas skriftliga svar uppgifter 5b:

Christoffer

$s(8)=2\cdot8^2+8=136$ meter

Jakob

Sätt t som 8

$s(8) = (2 \cdot 8^2) + 8 = 136m$

Johan M

$s(8) = 2 \cdot 8^2 + 8 = 2 \cdot 64 + 8 = 136m$

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5b:

JOHAN... Hur långt har bilen rört sig efter 8 sekunder… (eleven läser uppgiften högt)

CHRISTOFFER Så ... 2 x 64 är 128 plus 8 är 136 ...

Uppgift 5b var ingen större utmaning för eleverna. De bestämmer värdet av funktionen i den givna punkten vilket de tolkar som den sträcka föremålet har färdats efter 8 sekunder.

Elevernas skriftliga svar uppgifter 5b:

Fanny

Sätt $t = 8 \Rightarrow 2 \cdot 8^2 + 8 = 136$, bilen har rört sig 136 meter

Josefin

Sätt $t = 8$ detta ger $s(8) = 2 \cdot 8^2 + 8 = 136\,m$

Bilen har rört sig 136 m efter 8 sekunder.

Maria

Sätt $t = 8$ detta ger $s(8) = 2 \cdot 64 + 8 = 136m$

Bilen har rört sig 136 m

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5b:

FANNY Beräkna, sätt in…

MARIA Det går bra med 8...ja…

JOSEFIN ... 136…

FANNY 136 meter…

JOSEFIN Bilen har rört sig 136 meter

Eleverna följer ett liknande resonemang, 8 sekunder sätts i funktionsuttrycket och erhållna värdet tolkas som sträcka.

Nästa uppgift, 5c, behandlar objektets hastighet efter tiden 8 sekunder. Se bilaga 1. Denna uppgift kan lösas på en mängd olika sätt beroende på vilka utgångspunkter och egenskaper som fokuseras. Här behöver eleverna presentera ett metodförslag. Dessutom ombeds eleverna att motivera varför de har valt en viss metod.

Elevernas skriftliga svar uppgifter 5c:

Christoffer

$s(t) = 2t^2 + t$

$s^{'}(t) = 4t + 1$

$s^{'}(8) = 4 \cdot 8 + 1 = 33$

Genom att derivera uttrycket får vi förändringshastigheten, ersätt t med 8 så fås hastigheten vid 5 sekunder.

Jakob

$s(t) = 2t^2 + t$

Derivera $s^{'}(t) = 4t + 1$ sätt $t = 8$

$s^{'}(8) = (4 \cdot 8) + 1 = 33 m/s$

Vi får förändringshastigheten i punkten då $t = 8$ vilket i detta fall blev 33 m/s.

Johan

$s(t) = 2t^2 + t$

Derivera $s^{'}(t) = 4t + 1$

$s^{'}(8) = 4 \cdot 8 + 1 = 33 m/s$

Derivera ersätt t med 8 fås hastigheten efter 8 sekunder.

I sina skriftliga svar ovan, väljer eleverna att beräkna och tolka derivatan av funktionen s(t) och därefter beräknar de värdet av funktionens derivata i punkten 8 sekunder. Eleverna motiverar metoden med att ”vi får förändringshastigheten”. Citatet nedan följer elevers resonemang kring valda metoden.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5c:

JOHAN Hur snabbt har den rört sig, det är väl derivata ...

CHRISTOFFER Ja för den … där…

JOHAN Ja för då får man ju vad heter det …

CHRISTOFFER: ... förändringshastigheten…

JOHAN Ja.

CHRISTOFFER Då är det 4 t.

JOHAN Alltså om man deriverar får man ju … alltså enhet ... meter per sekund t.ex.

JAkOB Det … hastigheten då, 33 meter per sekund...

Johans omformulering av uppgift 5c visar på att han på ett tydligt sätt kan skilja på medelhastighet och momentanhastighet. Därefter föreslår han en möjlig lösning, nämligen derivata. Även hos dessa elever är förändringshastigheten en återkommande beskrivning av derivata och en dominant uppfattning. Gray & Tall (1994) hävdar att: “We characterize proceptual thinking as the ability to manipulate the symbolism flexibly as process or concept” (Gray & Tall 1994, sid. 7). Dessa elevers arbete tyder på att symbolen $s'(t)$ förstås både som en sekvens av operationer (process) och förändringshastighet (begrepp).

Elevernas skriftliga svar uppgifter 5c:

Fanny

$s(t) = 2t^2 + t$

$s^{'}(t) = 4t + 1$, sätt $t = 8 \Rightarrow$Bilen har hastigheten 33m/s efter 8 sekunder. Derivatan av en funktion i en viss punkt ger oss förändringshastigheten i just den punkten

Josefin

5c) $s(t) = 2t^2 + t \Rightarrow 4t + 1$

$s^{'}(8) = 4 \cdot 8 + 1 = 33m/s$

Bilen har hastigheten 33m/s efter 8 sekunder. Derivatan av en funktion i en viss punkt ger oss förändringshastigheten i den punkten

Maria

$s^{'}(t) = 4t + 1$ och $t = 8$ ger $s^{'}(t) = 4 \cdot 8 + 1 = 33m/s$

Derivatan av en viss funktion i en viss punkt ger förändringshastigheten i den punkten.

I elevers skriftliga svar ovan kan ett identiskt resonemang identifieras. Även här väljer eleverna derivera funktionen och beräkna värdet av derivatan i punkten 8 sekunder. Eleverna uttrycker sig om derivata som en lokal egenskap vilket framgår av exempelvis Fannys uttalande ”… förändringshastigheten i just den punkten.”

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5c:

JOSEFIN Vilken hastighet har bilen efter 8 sekunder? Hur vet du det? (Eleven läser frågan högt)

FANNY 4 t ...

JOSEFIN Skriv 4 t bara. Plus 1, t:t blir ju en etta.

MARIA Ja men kom igen nu tjejer…

FANNY Ja men sluta stressa oss så ...

MARIA Ja men skriv...

FANNY 4 x 8 + 1 är lika med 33…

JOSEFIN Hur vi vet det? För att derivatan av en funktion …

MARIA Ja men … det står ju … hur vet vi det, ja men vi säger ju det! Ja…

MARIA Ska vi skriva ner det…

FANNY Nej vi säger det nu. Vi skriver då derivatan ... av… funktion … är en ... viss punkt…

JOSEFIN Ja... punkt… ger oss… så! Ja vi är väl klara nu.

Hos Fanny och Josefin väcker frågeställningen associationer till deriveringsregler. Fanny säger spontant ”4t” medan Josefin uttalar att ”t:t blir ju en etta”. Det indikerar att deriveringsregler, hos Fanny och Josefin, är den del av begreppsbilden som förefaller att aktiveras och uttryckas först. Det kallar Tall & Vinner (1981) för e*voked concept image* (partiell aktiverad begreppsbild, min översätttning)
För övrigt visar eleverna att de sammankopplar process (derivera funktion genom tillämpning av deriveringsregler) och begrepp (förändringshastighet) vilket enligt Tall & Gray (1994) karakteriserar som lärande i den proceptuella-symboliska matematiska världen.

Kategori B:

Tolkningar inom denna kategori är delvis baserade på proceptuell förståelse. I likhet med kategori A bär elevuppfattningar i denna kategori på en förståelse av symboler och hur de ska avkodas genom matematiska operationer.

Elevernas skriftliga svar uppgifter 5a: på uppgift 5a

Linn

$$s(t) = 2t^2 + t$$

$$s(5) = 2 \cdot 5^2 + 5 = 55$$

$$s(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 = 21$$

$$\frac{55-21}{5-3} = \frac{34}{2} = 17m/s$$

Pia

$$\frac{s(5)-s(3)}{5-3} \Rightarrow 17m/s$$

Faiza

$s(t) = 2t^2 + t$

$s(5) = 2 \cdot 5^2 + 5 = 55$

$s(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 = 21$

$\frac{55-21}{5-3} = \frac{34}{2} = 17m/s$

Uppställningen är ganska identisk med elevsvaren från kategori A. Eleverna tolkar symboler som algebraiska operationer på reella tal såsom addition, division och kvadrering. Därefter tolkar de vad det värde de har räknat fram innebär. Pia använder sig av symbolen $\Rightarrow$ i sitt svar vilket indikerar problemet med att skilja på implikation och ekvation.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5a:

> LINN Inom det här intervallet måste det ... 17 meter per sekund.
>
> FAIZA Vad ska vi tolka det som... detta …
>
> LINN Jag tror det är det som tolkningen är att det är hastigheten…
>
> FAIZA Ska vi inte säga momentana hehe... förändringshastigheten ... vad heter det momentan, heter det genomsnittliga förändringshastigheten…

Eleverna förefaller inte ha större svårighet med att beräkna värdet av uttrycket för differenskvoten vilket återigen visar på begreppsbilder som länkar samman matematiska symboler och processer (Tall & Gray 1994). Linn tolkade det erhållna värdet som ”hastighet”, medan Faiza går ett steg vidare och uttrycker sig ”den genomsnittliga förändringshastigheten”. I likhet med uppfattningar i kategori A ger eleverna uttryck för en begreppsbild som länkar samman symboler och begrepp.

Elevernas skriftliga svar uppgift 5b:

Linn

$s(8) = 2 \cdot 8^2 + 8 = 136$

Pia

$s(8) \Rightarrow 136m$

Faiza

$$s(8) = 2 \cdot 8^2 + 8 = 136$$

Pia använder sig återigen av symbolen för implikation vilket visar på hur eleven uppfattar komplexiteten i matematisk symbolism.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5b:

LINN … 8 sekunder … men sätt in 8 sekunder…

PIA På t plats…

FAIZA 8 x 8 är 64, 64 x 2 är 128 plus 8, 136 ...

LINN 128 + 8… ja... 136…

Elevers resonemang i citatet ovan visar hur elever hanterar frågan genom att ersätta t i funktionen med 8. Därefter genomför de matematiska operationer av olika slag som leder vidare till ett svar. Detta visar återigen på en utvecklad begreppsbild hos dessa elever som möjliggör tolkning av symboler som processer Tall & Gray (1994).

I uppgift 5c ombeds eleverna att använda en metod för bestämning av momentanhastighet. Eleverna ger uttryck för uppfattningar som avspeglar deras begreppsbilder av matematiska begrepp.

Elevernas skriftliga svar uppgifter 5c:

Linn

$$\frac{136}{8} = 17m/s$$

Pia

$$\frac{s}{t} = \frac{136}{8} \Rightarrow 17m/s$$

Faiza

$$\frac{136}{8} = 17m/s$$

Från de skriftliga svaren ovan framgår hur eleverna tolkar hastigheten efter 8 sekunder, det vill säga momentanhastigheten, som medelhastighet under de första 8 sekunderna. Eleverna delar sträckan 136 m från uppgift 5b med tiden 8 sekunder. Utdraget nedan följer Linns resonemang kring denna metod.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5c:

> LINN Vilken hastighet har föremålet efter 8 sekunder... det blir 136 genom 8 ... 136 genom 8 ... är det verkligen ett ... Vi kan bara skriva hur vi vet, vi tar sträckan genom tiden…

Som tidigare nämndes kännetecknas tolkningar i denna kategori av att vara delvis uppbyggda utifrån en matematisk beskrivningsmodell. Här ger eleven uttryck för uppfattningar som inte skiljer mellan momentan värde och medelvärde. Möjligen kan det bero på att ” sträckan genom tiden” är dominerande och en lättaktiverad del av begreppsbilden som ger sig till känna här. Hähkiöniemi (2006) hävdar att “distance-time functions may help them to activate their past experiences.” (Hähköniemi (2006), sid. 75). Linn, Pia och Faiza hade haft genomgång på derivata men frågeställningen förefaller inte kunnat aktivera del eller delar av dessa elevers begreppsbild av derivata eller någon annan metod för bestämning av momentanvärdet.

Kategori C:

Denna kategori omfattar uppfattningar som endast länkar samman det matematiska symbolspråket och algebraiska operationer. Det som skiljer tolkningar i denna kategori och föregående kategorier A och B, är avsaknad av en länk mellan symboler och begrepp i den proceptuella-symboliska matematiska världen (Tall & Gray 1994). Nedan följer elevernas skriftliga svar på uppgift 5a.

Arman

$s(5) = 2 \cdot 5^2 + 5 = 55 \qquad s(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 = 21$

$\frac{55-21}{2} = \frac{34}{2} = 17$

Sträckan vid 5 sekunder är 55 m, sträckan vid 3 sekunder är 21 m. Kvoten av de två resultaten blir 17

Gideon

$s(5) = 2 \cdot 5^2 + 5 = 55 \qquad s(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 = 21$

$$\frac{55-21}{2}=\frac{34}{2}=17$$

När sträckan vid 5 sekunder är 55m. När sträckan vid 3sekunder är 21m. Sedan subtraherar man funktionerna och dividerar dem på två, vilket blir 17.

Eleverna beräknar värdet av differenskvoten vilket visar på deras förståelse för symboler som operationer. De har dock svårighet med att tolka vad det värdet de fick betyder i den aktuella situationen. Det kan tolkas som att elevernas begreppsbilder inte länkar samman symbolspråket i differenskvoten och begreppet medelvärde.

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5a:

ARMAN Jag är på 5a, försöker komma ihåg hur man räknar ut det. 5 gånger 5 är 25 va eller?

GIDEON Aj aj ... Liggande stolen och det…

GIDEON Det blir 2 ... så där … för det blir 34 här uppe skriv s lika med 34 eller skriv här under…

ARMAN 17…

GIDEON ... ja... jo 17…

ARMAN Kan man inte göra 5b…

Både Arman och Gideon kunde relativt lätt bestämma värdet av uttrycket för differenskvoten. De uttryckte ikoniska uppfattningar om grafen i temat grafisk representation, men här visar de ha de nödvändiga kunskaper som krävs för att beräkna uttrycket för en differenskvot till en given funktion.

Arman och Gideon resonerar sig fram till ett möjligt tillvägagångssätt. De utnyttjar sina kunskaper i matematik och utför adekvata beräkningar av olika slag för att räkna fram ett svar. De använder också lämpliga enheter. Arman och Gideon kunde räkna ut värdet av uttrycket men de visste inte riktigt hur det erhållna värdet ska tolkas. Arman undviker att förklara närmare vad ”17” betyder beträffande föremålets rörelse när han säger ”kan man inte göra 5b…”.

Hähkoniemis modell av Talls (2004) och Tall & Grays(1994) teori om tre matematiska världar inkluderar differenskvot som ett led i lärande av derivata i den proceptuella-symboliska världen. När Arman och Gideon beräknar värdet av differenskvoten i uppgift 5a befinner de sig i denna värld. Det som karakteriserar lärande av matematiska begrepp i denna matematiska värld är förmågan att samtidigt kunna tolka matematiska symbolspråket både som begrepp och process. Uttrycket s(5) kan dels betyda en process (reella talen 5 sätts in i uttrycket och därefter beräknas differensen och kvoten), dels ett begrepp (värdet av en funktion för ett givet variabelvärde i funktionens definitionsmängd). Både Arman och Gideon vet hur symbolspråket i uttrycket ska hanteras, med andra ord hjälper deras begreppsbilder dem att tolka differenskvoten som en algoritm eller en sekvens av operationer. Detta uppfyller det ena kriteriet för matematisk begreppsförståelse i den proceptuella-symboliska världen. Men Arman och Gideon verkar sakna komponenter i begreppsbilden som länkar samman symboler och begrepp, i det här fallet medelhastighet.

Elevernas skriftliga svar uppgifter 5b:

Arman

5b) $s(8) = 2 \cdot 8^2 + 8 = 136m$

Gideon

5b) $s(8) = 2 \cdot 8^2 + 8$

$s(8) = 136$

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5b:

ARMAN Men om man ska skriva in 8:an i formeln, lägger man i båda eller..?

GIDEON ... mm... Ja det är båda. Skriv av den här först, den första. Sedan lägg i 8:an bara.

Arman tolkar avståndsfunktionen som en ”formel” som han kan använda för att ”skriva in” ett tal för att sedan räkna ut ett annat tal. Detta uttalande kan tolkas som Armans begreppsdefinitionsbild av en funktion vilket enligt Tall & Vinner (1981) avser individens beskrivning av ett begrepp i språklig bemärkelse. Begreppsdefinitionsbilden är en del av individens begreppsbild som ibland kan vara inkompatibel med den formella definitionen.

Vinner och Dreyfus (1989) visade att elever ibland uppfattar en funktion som en operation som ger ett tal från ett annat tal eller som en formel i form av ett algebraiskt uttryck. Eisenberg (1991) menar att historiska och psykologiska aspekter gör det svårt att introducera funktionsbegrepp på ett sådant sätt att studenter/elever får en djup förståelse och kan transferera begreppet till andra områden. Många begrepp inom matematik uppfattas som symbolisk och icke-visuell. Funktion är ett sådant begrepp. Detta utgör ett hinder för lärande.

Arman är inte riktigt säker på vilket uttryck ska 8 sättas i. Frågeställningen verkar ha skapat viss osäkerhet:

> ARMAN 8 x 2 är 48 va?
>
> GIDEON 64.
>
> ARMAN ... 64…
>
> GIDEON varför har du 48…
>
> ARMAN ... jag är inte så bra på gångertabellen.
>
> ARMAN 64 x 2 är ju … 124 …
>
> GIDEON ... 128…
>
> ARMAN ... 128 ja…
>
> GIDEON Skriv enhet också.
>
> GIDEON Skriv 136 här…

Arman verkar ha problem med grundläggande operationer vilket försvårar för honom att räkna ut värdet av funktionen i uppgift 5b. I Gideons uttalande återfinns indikationer på förståelse av symboler som processer, ”lägg i 8:an bara”.
I uppgift 5c ombeds eleverna att bestämma föremålets hastighet efter 8 sekunder. Denna uppgift är avsedd att aktualisera elevers begreppsbilder av derivata. Uppgiften avslöjar inte vilket matematiskt verktyg som möjligen kan användas utan eleven får själv presentera ett tillvägagångssätt. Se bilaga1.

Elevernas skriftliga svar uppgifter 5c:

> Arman

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{136}{8} = 17m/s$$

Gideon

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{136}{8} = 17m/s$$

Citat från transkriberat videomaterial uppgift 5c:

> GIDEON Så här är svaret ... sträckan ... där har du sträckan och tiden står där. Det hör ihop med detta bara så du vet, det hör ihop med detta absolut.
>
> ARMAN Nu är det division, jag kan inte heller. Kan du hjälpa mig med liggande stolen?
>
> GIDEON Skriv 136 här ... 8 här på sidan och så ett streck ... nej streck under.. 8 bara.. så..
>
> ARMAN … streck 8…
>
> Efter cirka 3 minuters diskussion kommer eleverna fram till att:
>
> GIDEON Skriv typ svar 17 det ska vara enhet också 17 meter per sekund.

Det eleverna, förmodligen omedvetet, har räknat ut är medelhastigheten under de första åtta sekunderna. Arman och Gideon skiljer inte på medelhastighet och momentanhastighet på ett tydligt sätt vilket möjligen kan bero på att eleverna inte lyckades tolka uttrycket $\frac{s(5)-s(3)}{5-3}$ som medelhastighet under tiden tre till fem sekunder.

Kapitel 5 Diskussion och slutsatser

Avsikten med den här studien var att synliggöra och analysera gymnasieelevers uppfattningar avseende matematiska representationer av rätlinjig rörelse. Jag anser, att uppgifterna jag har valt att undersöka eleverna med, väl överensstämmer med vad gymnasielever inom det naturvetenskapliga programmet kan förväntas kunna tolka efter genomgång av matematik 3. Inom temat grafisk representation användes åtta uppgifter som problematiserade en s-t-graf. Uppgifterna som gavs till eleverna var mångfacetterade och visade sig ha potential att aktualisera och lyfta fram olika aspekter av elevers begreppsförståelse vilket har betydelse för hur studiens syfte har uppfyllts.

Gruppdiskussion som datainsamlingsmetod genererade värdefull analysdata med stor variation i svarskvalitet. Samtliga gymnasieelever i studien engagerade sig frivilligt vilket gjorde gruppsamtalen både livliga och innehållsrika.

Jag inkluderade flera lärandeperspektiv i det teoretiska ramverket vilket berodde på karaktären hos de matematiska representationer som studien behandlar. De enskilda teoretiska ramverken innesluter en gemensam kärna av uppfattningar om hur individen utvecklar begreppsförståelse och vilka mekanismer som påverkar och styr denna utveckling. Strukturen i detta kapitel kommer i stort sett att följa den ordning som forskningsfrågorna står i.

Frågan om hur gymnasieelever tolkar en s-t-graf som en matematisk representation besvaras genom identifiering och redovisning av fyra kvalitativa kategorier. Dessa kategorier visade på ett stort gap mellan elevers förståelse av grafisk representation vilket presenterades i resultatkapitlet från den mest utvecklade uppfattningen (kategori A) till den minst utvecklade uppfattningen (kategori D).

Gymnasieelever i denna studie presenterade olika typer av tolkningsmodeller gällande s-t-graf. Inom tolkningskategorierna A och B förekom uppfattningar som byggde på ett sammanhängande nätverk av matematiska begrepp som sedan utnyttjades av eleven som verktyg i det aktuella området. Dessa tolkningskategorier visade i stort sett på identiska kvalitativa aspekter.

Uppfattningar i dessa kategorier kunde på ett tydligt sätt skilja mellan begreppen läge och lutning. Eleverna kunde obehindrat tillämpa begreppet lutning och dra korrekta slutsatser om hastighetens storlek och riktning, *Lutningen är noll så hastigheten är noll*. Elevtolkningar om negativ lutning och negativ hastighet och hur den är relaterad till föremålets rörelsetillstånd kan ses som en indikation på en väl utvecklad begreppsbild hos elever i kategori A och B.

En annan viktig aspekt av tolkningskategorierna A och B inom temat grafisk representation är uppfattningar om kopplingen mellan det grafen presenterar och den process den beskriver. Det kan enligt Friel med flera, (2001) innebära att elever både kan läsa *mellan data* och läsa *bortom data*. Att läsa bortom data kan innebära länken mellan grafens utseende, beskrivningsmodell och hur tåget egentligen rör sig. Relationen mellan en graf och den process den beskriver är en av de centrala aspekterna av grafiska representationer och också en av de mest utvecklade uppfattningar som förekom i denna studie.

Vardagsbegrepp och ikoniska uppfattningar förekom aldrig i elevernas uttalande under deras inspelade samtal. Istället valde eleverna att stödja sig på matematiska begrepp såsom lutning, medelhastighet, förändringshastighet, positiv och negativ hastighet. Att ikoniska tolkningar inte förekom inom tolkningskategorierna A och B kan bero på att eleven har kommit så långt i begreppsutvecklingsprocessen och att begreppsbilden Tall & Vinner (1981) är så utvecklad att han/hon inte känner behov av det.

Det förefaller som, då en elev tolkar en graf, exempelvis en s-t-graf, att ju längre i begreppsutvecklingen eleven kommer desto mindre blir förekomsten av vardagsbegrepp och ikoniska föreställningar. Ju mer eleven lär sig tillämpa vetenskapliga begrepp desto mindre blir behovet av intuitiva tolkningar. Det kan tolkas som en möjlig indikation på en relation mellan begreppsförståelse och intuitiv kunskap.

Inom tolkningskategorierna A och B förekom också uttalanden som visade på elevers uppfattning av relationer och proportioner. Att eleverna kunde tolka hur mycket grafen ändrade sig per lika långa tidsintervall underlättade bestämning och tolkning av grafens lutning.

Den enda kvalitativa skillnaden mellan tolkningskategorierna A och B som nämndes i resultatet kunde identifieras i elevers arbete med uppgift 4. Se bilaga 1. Här förekommer alternativa tolkningar i kategori B som berör den grafiska konstruktionen av negativ lutning och negativ hastighet. Detta kan bero på att eleverna har svårt att acceptera att grafen kan gå under tidsaxeln. Dessutom tenderar eleverna i kategori B att konstruera en v-t-graf som begränsas i första kvadranten vilket stämmer överens med placering av s-t-grafen i frågeställningen. Problemet har i denna uppgift främst bestått av att framställa en ny representation (v-t-graf) med utgångpunkt i den ursprungliga representationen. Här behöver eleven ha utvecklat en konceptuell förståelse av den grafiska representationen och kunna läsa av ett innehåll och dess struktur för att kunna utföra nödvändiga operationer.

Enligt Wittmann (2005) kan grafiska representationer ses som konkretiseringar av abstrakta matematiska begrepp. En s-t-graf kan betraktas som en konkret beskrivning av abstrakta begreppet rörelse. För att förstå det konkreta i grafiska representationer krävs ibland att eleven har utvecklat en förmåga att uppfatta det abstrakta i det konkreta. I konkreta s-t-grafen döljer sig en abstrakt egenskap i form av grafens lutning vilket förmodligen inte implicit framgår av grafen. För att få en djupare förståelse av matematiska begrepp behöver eleven tillgodogöra sig olika representationer och även kunna göra översättningar mellan dem (Duval, 2006 och Kirsh, 2010). Den som har tillgång till flera olika representationer för beskrivning av samma begrepp har troligtvis en rikare och mer användbar begreppskunskap. Att kunna vandra fritt mellan olika representationer är något som forskning menar starkt bidrar till begreppsförståelse (Friel, 2001; Lingefjärd, 2014).

Den mest utvecklade uppfattning som framkom i denna studie handlade om konstruktionen av en matematisk representation. Det framgår av v-t-grafen som eleverna i kategori A har framställt (se sid. 50). Förmågan att kunna härleda och framställa en v-t-graf baserad på en s-t-graf visade sig vara den mest utmanande uppgiften, åtminstone med tanke på studiens svarsfrekvens. Att konstruera en graf, och att obehindrat kunna växla mellan olika representationer, visade sig vara en större utmaning och en högre nivå av begreppsutveckling än att tolka en graf.

Tolkningskategori C visade på andra kvalitativa aspekter av gymnasieelevers tolkningar gällande en s-t-graf. Eleverna relaterar begreppet lutning till frågeställningen och lyckas föra ett resonemang som leder till slutsatsen att tågets största hastighet inträffar efter 1,2 timmar. Negativ lutning visade sig vara mer svårtolkad än positiv lutning. Följaktligen förlitar sig, exempelvis Linn och Pia, på sina ikoniska idéer och tolkade grafen som en *kulle*, *backe* eller

Harry Potter bussen. Dessa tolkningar uppfattar jag som uttalanden som delvis synliggör elevers begreppsbilder i den aktuella situationen vilket besvarar den andra forskningsfrågan.

Här återfinns identifierbara uttryck från kategorin *event* i elevers tolkningar, se Figur 1 sidan 16, vilket möjligen kan innebära att eleven har utvecklat uppfattningen att s-t-graf är matematikens sätt att rekonstruera en händelse. Att det rör sig om en tågfärd förstärker förmodligen denna begreppsbild eftersom en tågfärd kan uppfattas som en händelse.

Även om frågeställningen inkluderar komponenter från kategorin *event* så finns det inga gemensamma attribut som förenar denna kategori med kategorin *process*. Det kan försvåra förståelsen av grafiska representationer i allmänhet och s-t-grafer i synnerhet. Det kan vara betydelsefullt för elevens begreppsutveckling att han/hon blir uppmärksam på att en tågfärd och de matematiska konstruktioner som beskriver tågets rörelse tillhör olika ontologiska kategorier. Detta kan i sin tur leda till en förändring som innebär ett begreppsskifte från kategorin *event* till kategorin *process*. För att möjliggöra en sådan förändring behöver eleven konfronteras på det ontologiska planet.

Att tolka variationen av grafens lutning och vad den innebär beträffande hastighet och färdriktning visade sig vara en kvalitativ nivå av begreppsförståelse. Det mer utvecklingsbara begreppet lutning försvinner så småningom helt ur beskrivningsmodellen och ersätts av uppfattningarna *ju högre, ju större* och *ju lägre, desto mindre*.

Det som möjligen också försvårar förståelsen för eleverna i kategori C är uppfattningen att negativ lutning uppfattas som lägre hastighet. Det är förmodligen inte ovanligt att elevers utsagor och argumentationer vid ett första påseenden förefaller helt riktiga men att det vid ett längre samtal visar sig vara uppbyggda utifrån icke adekvata definitioner.

Grafens utseende styr eleverna att inrikta sina tankar mot erfarenheter och upplevelser som inte är vetenskapligt relevanta för sammanhanget. Det är förmodligen inte slutmålet att eleven relaterar begrepp till situationen, som exempelvis i det här fallet, relaterar s-t-grafens lutning till tågets hastighet. För att ge en helhetsbeskrivning krävs även en uppfattning om innebörden av teckenväxlingen hos grafens lutning. Det som Linn och Pia, i kategori C, förmodligen har svårt att reflektera över är sambandet mellan variationen av grafens lutning och tågets färdriktning och identifiering av de intervall där lutningen är som minst.

I utsagorna stöter vi bland annat på … *och tåg behöver flera timmar t.o.m. att stanna för att minska hastigheten*. Det tyder på att intuitiva ikoniska tolkningar förefaller väldigt övertygande och eleven därför kan gå långt i sitt resonemang och kommer med tolkningar som inte är trovärdiga. Kan eleven använda sig av relevanta matematiskt begrepp och framföra ikoniska tolkningar vid interaktion med samma grafiska material och vid samma tillfälle? Svaret är tydligen ja när det gäller uppfattningar i denna kategori. En möjlig förklaring är att de båda eleverna, åtminstone i början, var övertygade om att det är ”lutningen som avgör” hur snabbt tåget rör sig. Deras förståelse av lutning räckte dock inte till en helhetsbeskrivning av tågets färdriktning. När lutning som egenskap visar sig vara svårhanterlig och klumpig prövar Linn och Pia andra alternativa idéer.

Att alternativa idéer är resistenta mot förändringar är ett väl dokumenterat fenomen, (se till exempel McCloskey, 1983; Clement, 1985; diSessa, 1993; Hammer 1996; Andersson 2008). Det förekommer även i denna studie, exempelvis i fallet Linn och Pia. Ikoniska tolkningar fortsätter att finnas kvar i elevens tankestruktur även efter det att eleven har stött på grafiska representationer i bland annat matematik och naturämnen. Det anmärkningsvärda är att ikoniska tolkningar hos Linn och Pia gjorde en stark återkomst när de inte lyckades få grepp om hur negativ lutning ska tolkas. Detta stimulerade i sin tur andra kognitiva förmågor och kunskapsformer som kunde leda till snabbare och mer övertygande slutsatser.

För att förstå en grafisk representation, exempelvis en s-t-graf, behövs kunskaper om hur grafen ska tolkas i termer av det som grafen representerar. Här behöver eleven veta vilka aspekter av grafen som kan beskrivas med de begrepp som är relevanta för den aktuella representationen. Saknas dessa komponenter i begreppsbilden kan associationer och ikoniska tolkningar utgöra huvuddelen av elevens argumentation.

Den v-t-graf som Linn och Pia från kategori C har framställt är ganska identisk s-t-grafen i frågeställningen. Eleverna förefaller föredra det enklaste alternativet. Dessutom stämmer v-t-grafen väl överens med uppfattningen att tågets hastighet ökar i början för att minska i slutet. Att se och identifiera likheter är en betydelsefull och användbar kunskapsform som verkar framgångsrik i många olika sammanhang, till exempel när vi tolkar kartor, ritningsskisser, med mera. Det är förmodligen denna kunskapsform som Linn och Pia utnyttjar.

Kategori D presenterades i föregående kapitel som den minst utvecklade uppfattningen i denna studie. Elevers tolkningar i denna kategori dominerades av vardagsbegrepp så som *höger*, *vänster*, *uppåt*, *nedåt*, etcetera. Vardagsbegrepp är väsentliga för att kommunicera eller förmedla erfarenheter och upplevelser men de är ineffektiva för att exempelvis beskriva riktning som en variabel. En liknande uppfattning kan identifieras hos Linn, Pia och Saeed i kategori C. Dessa elever samtalar vardagligt och förefaller inte kunna tränga djupare in i ämnet. Vardagliga uttrycksformer är olämpliga för att användas som förklarningsinstrument eftersom de brister i tydlighet, noggrannhet och allmängiltighet.

De matematiska-naturvetenskapliga begreppen kännetecknas av att vara exakta med specifika definitioner (Holton 1952; Galili & Lehavi 2006). Det ligger i den matematiska naturvetenskapliga metodens idé att begrepp ges en avgränsad och entydig definition som beskriver dess innebörd.

Vardagsbegreppen handlar i stort sett om hur människor använder sig av språket för att konstituera verkligheten. De är fyllda med erfarenheter från iakttagelser, företeelser och upplevelser medan vetenskapliga begrepp i allmänhet är mer strukturerade, generaliserbara och lagbundna (Andersson, 2001). Vad eleven säger eller skriver avspeglar delvis elevens förståelse av de begrepp som eleven använder sig av för att förklara en specifik situation. Arman, Alexande och Gideon använder i stort sett inte matematiska eller naturvetenskapliga termer och begrepp under samtalet eller i sina anteckningar. Lärande av matematiska begrepp handlar delvis om att bli förtrogen med såväl tolkningsram som teoribildning.

Eleverna uttalar sig om att grafen föreställer bland annat en *berg- och dalbana*, *Lisebergsbanan*, gatorna i *San Fransisco* eller andra exempel på ikoniska föreställningar. De uppfattas som självklara lösningsalternativ av eleven. Dessa tolkningar är exempel på begreppsbilder eleverna ger uttryck för i den aktuella frågeställningen vilka besvarar den andra forskningsfrågan.

Dessa uppfattningar har sina fördelar; de är bekväma och lätta att komma ihåg och förefaller vara realistiska eftersom eleverna kan identifiera och utnyttja likheter. På så sätt erbjuder elevers alternativa tolkningar den kortaste vägen till en möjlig förklaring och stämmer väl överens med *sunt förnuft*. Dessutom känner eleven sig trygg i sitt vardagsspråk när han/hon vill berätta om vardagshändelser.

I denna studie var alternativa uppfattningar mest förekommande hos elever som använde sig mest av vardagsbegrepp i formulering av sina utsagor. Vardagsbegreppens begränsningar och ineffektivitet gör dem olämpliga för att beskriva fenomen och processer. Begreppet riktning, i matematiska termer, är mer generell och användbar än höger, vänster eller upp och ner.

En möjlig förklaring till varför eleverna inte reflekterar över sambandet mellan sträcka och tid på ett matematiskt sätt, är att den mentala berg- och dalbanan saknar tidsdimension och snarare är en sträcka-sträcka graf, vilket liknar hur en berg- och dalbana rör sig både i sidled och höjdled.

S-t-grafen i frågeställningen beskriver en linjär rörelse för ett föremål (rörelse i en dimension), men grafen ser ut som att den rör sig i ett tvådimensionellt plan. Detta är en viktig aspekt av begreppsförståelse gällande grafisk representation som har förekommit i denna studie. Här är det viktigt att eleven utvecklar en förståelse för grafer som matematiska representationer som beskriver samband eller beroende och att en del grafer, exempelvis s-t-graf, är tidsberoende.

Tolkningskategori D förefaller sakna en förståelse för s-t-graf som ett tidsberoende förlopp. Detta kan ses som en barriär för lärande av grafiska representationer och en alternativ uppfattning som behöver konfronteras. Trots att eleverna i kategori D säkerligen har hört talas om exempelvis lutning och förmodligen utvecklat en förståelse för linjens eller grafens lutning, så aktiveras inte denna kunskapsstruktur av den grafiskt illustrerade frågan i detta fall.

Chi (1994 & 2013) hävdar att elevers alternativa tolkningar delvis beror på felkategorisering av begrepp på ontologiska planet. Elevernas utsagor präglades av händelsebeskrivningar som de fann relevanta för situationen och som de kunde stödja sig på. Uppfattningar i denna kategori, i likhet med kategori C, visar på idén att en s-t-graf är ett sätt att beskriva en händelse, ett *event*. Se figur 1 sid. 15. Dessa elever har med andra ord kategoriserat en s-t-graf som en matematisk rekonstruktion av en verklig händelse. Många av elevens alternativa resistenta uppfattningar kan förklaras genom felkategorisering av begrepp på ontologisk nivå snarare än på en specifikt ämnesteoretisk nivå.

> …then many robust misconceptions can be interpreted as a mismatch between conception and reality at the ontological level, rather than (and in addition to) at the concept-specific and theory-specific level. In this view, robust misconceptions are mis-categorizations across ontological boundaries. (Chi 2005, sid.164)

Med detta perspektiv på begreppsutveckling, som en växling av begreppets tillhörighet över ontologisk laterala kategorier, så kan dessa elevers ikoniska uppfattningar identifieras som en samling händelsebeskrivningar. En möjlighet är att eleven tolkar grafen som en matematisk framställning av en händelse. Händelser som de själva varit med om, sett på film, läst om i en bok eller har hört talas om. Grafen däremot, kategoriseras som en sekventiell process, en process där ett föremåls hastighet varierar under fyra timmar. Elevers utsagor är rumsliga vilket är ett karakteristiskt inslag i beskrivning av en händelse. Det är i *San Fransisco* som man kan åka tåg uppför en backe eller det är på *Liseberg* man kan åka *Balder*. Matematiska beskrivningsmodeller däremot, till exempel en differential ekvation som beskriver en kropps avsvalning, är oberoende av när och var den används. Till skillnad från händelser är processer oberoende av tid och rum.

En process kan brytas ner till mindre förklarbara enheter. S-t-grafen i frågeställningen kan till exempel delas in i mindre intervall, vid tiden t=0 står tåget stilla, sedan accelererar tåget och hastigheten ökar till cirka 150 km/h och så vidare. I beskrivningen av en process är det väsentligt i vilken ordning delprocesser sker. Men det är ganska ointressant att dela in händelsen att åka *Lisebergsbana* i mindre exakta delhändelser är och ännu mindre intressant i vilken ordning den sker eller beskrivs.

Elevers utsagor i tolkningskategori D, och delvis kategori C, kan tolkas som felkategorisering av begrepp och att begreppsutveckling möjligen kan innebära en växling av begrepp mellan ontologiska kategorier, från underkategorin *event* till underkategorin *process*. Chi & Slotta (1994) argumenterar att svag begreppsutveckling kan innebära en växling av begrepp mellan två närliggande underkategorier i samma gren, exempelvis mellan underkategorierna djur, *animals* och växter, *plants*. Stark begreppsförståelse sker då begreppens ontologiska tillhörighet behöver växlas tvärs igenom trädet över ontologiskt laterala kategorier, exempelvis från kategorin materia till kategorin process. Men gäller dessa kriterier och övergångar alla kategorier?

Jag vill argumentera för processkategorins speciella särdrag och att omkategorisering av begrepp mellan närliggande underkategorier i processkategorin kan innebära en stark begreppsutveckling för eleven. Ett exempel kan belysa svag begreppsutveckling i kategorin *materia*. I denna kategori finns bland annat underkategorier djur och växter. Det kan hända att en person uppfattar att begreppet korall beskriver en växt och därmed kategoriserar koraller som växter. Men efter hand läser personen en artikel i en populärvetenskaplig tidsskrift där det står att korall är ett djur. Begreppet korall behöver nu hänföras till en ny kategori, från den ursprungliga underkategorin växter till underkategorin djur. Genom denna process etablerar individen ett nytt förhållningssätt till begreppet som kan ses som en växling av begrepp mellan två underkategorier i samma träd. Denna typ av begreppsutveckling kan ses som en förändring av begreppets ontologiska tillhörighet, en förändring som framförallt inte skapar större missnöje eller konflikt med nuvarande förklarningsmodellen.

Elevers utsagor i denna kategori tyder på uppfattningen att en s-t-graf är en matematisk konstruktion för beskrivning av en händelse. Skulle det räcka om Arman, Alexander, Gideon eller elever med liknande ikoniska uppfattningar läser i en tidskrift att en s-t-graf är ett matematiskt verktyg för att representera en process? Förmodligen räcker detta inte, för processer involverar en eller flera begrepp, och för att förstå processer krävs en djupare begreppsförståelse genom upprepad exponering. För att kunna förklara varför himlen är blå krävs att individen är förtrogen med ljusets brytning som en process. För att förstå denna process krävs det att man är förtrogen med bland annat geometrisk optik.

En möjlig beskrivning av en djupare begreppsförståelse som elever med ikoniska tolkningar behöver uppnå, kan innebära en växling av begrepp mellan två närliggande underkategorier i processkategorin; från händelse till process. Carey (1985) beskriver svag omstrukturering som en ny ordning eller en ny relation mellan redan existerande begrepp. Denna typ av begreppsutveckling kräver inte en förändring av den befintliga begreppsstrukturen utan är ett sätt att berika den. Personen blir inte missnöjd med sin uppfattning att korall är en växt utan han/hon lär sig att förhålla sig till koraller på ett annat sätt eller etablerar en ny relation till begreppet korall.

Stark omstrukturering innebär enligt Carey (1985) däremot en mer radikal förändring som kan jämföras med Chis & Slottas (1994) perspektiv på stark begreppsutveckling.

Intuitiva idéer hos vissa elever i denna studie, särskilt hos Arman, visade sig vara en flexibel kunskapsform när en ny uppfattning kommer i konflikt med föreliggande förklaringsmodellen. I litteraturen beskrivs Armans resonemang som en kognitiv konflikt som uppstår då berg- och dalbana-modellen visade sig vara otillräcklig för att förklara tågets färdriktning. En central fråga inom forskning om begreppsutveckling är mekanismen kognitiv konflikt, se Posner et al., (1982); Limón, (2001); Duit et al., (2008).

En kognitiv konflikt uppstår då eleven upplever ett missnöje med den egna förståelsen genom att möta nya situationer eller förklaringar som presenteras genom troliga vetenskapliga modeller. Berg- och dalbana-modellen kunde helt enkelt inte förklara tågets färdriktning vilket ledde till en omstrukturering av föreliggande förklarningsmodellen.

Då ny kunskap inte passar in i ett gammalt schema kan det i konstruktivistiska termer uppstå en kognitiv konflikt vilken kan resultera i att befintliga kunskapsstrukturen måste rekonstrueras, se Hewson & Hewson (1984); Limón, & Carretero (1999). Enligt Tall & Vinner (1981) avser potentiella konfliktfaktorer den del av begreppsbilden som kan komma i konflikt med en annan del av begreppsbilden eller begreppsdefinitionen.

> ... We shall call a part of the concept image or concept definition which may conflict with another part of the concept image or concept definition a potential conflict factor. (Tall & Vinner 1981, sid.152)

När eleven exempelvis konfronteras med motstridiga påståenden utifrån sina tolkningar kan potentiella konfliktfaktorer, enligt Tall & Vinner, övergå i kognitiva konflikter:

> When a learner meets a new mathematical concept, it may be invested with implicit properties arising from the context, producing an idiosyncratic concept image which may cause cognitive conflict at a later stage. (Tall & Vinner 1981, sid. 153)

Hos Arman förefaller potentiella konfliktfaktorer bestå i Armans berg- och dalbanatolkning och dess oförmåga att förklara situationen med tågets färdriktning. Denna tolkning ersattes av en annan ikoniserad tolkning, nämligen en tolkning som bygger på en karta och som var mer anpassad, mer trovärdig och som kunde skapa jämvikt mellan den nya tolkningen och situationen. Konflikten ledden inte till en mer fördjupad förståelse eller en mer koherent begreppsbild men är förmodligen en indikation på troliga effekter av sådana konflikter.

Det anmärkningsvärda är svårigheten att på djupet få elever att strukturera om sitt sätt att tänka (Limón 2001). I själva verket kan elever som konfronteras med konflikter reagera på flera olika sätt: exempelvis genom att ignorera dem, genom att avfärda dem, genom att tolka om dem, eller genom att förändra teorin. Limóns sammanfattning av forskning om kognitiva konflikter visar dock på en viss potential i angreppssättet.

Avsikten med min studie var inte att framkalla kognitiva konflikter genom exempelvis motstridiga påstående. Inte heller var min avsikt att undersöka eventuella effekter av sådana konflikter på elevers begreppsutveckling. Den konfliktfyllda tolkningssituation som Arman, Gideon och Alexander upplevde uppstod helt spontant under samtalet och visade att sådan spontan konflikt kan framtvinga en förändring av en befintlig kunskapsstruktur.

Studien behandlar två skilda domäner av matematiska representationer vilket kan avspegla och lyfta fram eventuella karakteristiska särdrag i elevers resonemang och begreppsuppfattning från olika områden. Inom temat symbolisk representation identifierades tre tolkningskategorier vilka redovisades i resultatet från den mest utvecklade uppfattningen (kategori A) till den minst utvecklade uppfattningen (kategori C). Även här presenterar elever tolkningsmodeller av varierande kvalitativa nivåer.

Symboliska frågeställningar, uppgifter 5a-5c, se bilaga 1, väckte inga omedelbara associationer till vardagshändelser i samma utsträckning som grafiska frågeställningar. Den matematiska representationens karaktär hos den grafiska representationen skiljer sig från den symboliska representationen i den meningen att symbolisk representation inte påminner eleven om vardagserfarenheter, upplevelser eller platser. Intuitionen spelar förmodligen en mindre betydelsefull roll i det här fallet. Många begrepp inom matematik uppfattas som symboliska och icke-visuella. Tal är ett ofta icke-visuellt exempel medan däremot funktioner ofta presenteras med både symboliska och grafiska representationer. Den symboliska representationen saknar den grafiska representationens visuella information och anses ibland vara mer abstrakt och svårare att förstå. Det kan utgöra ett hinder för lärande (Eisenberg 1991).

Symboliska representationen gav hos studenterna upphov till helt skilda uppfattningar. Samtalet kring grafiska frågeställningar var starkt förknippad med en vardagsdiskurs. Symboliska frågeställningar väckte istället andra associationer och kunskapsformer som saknade tecken på vardagsupplevelser.

Min första forskningsfråga besvaras genom att synliggöra elevernas uttryckta förståelse av symboliska frågeställningar. Det hänger delvis samman med deras förståelse av begreppen funktion, differenskvot och derivata samt hur den symboliska representationen tolkas av eleven i den proceptuella - symboliska världen, Tall (2004); Tall & Gray (1994).

Inom tolkningskategori A förekom uppfattningar som visade på en proceptuellt utvecklad begreppsbild som tolkar matematiska symboler både som process och begrepp. Fannys spontana reaktion ”4t” på uppgift 5c eller Josefins uttalande ”t:et blir ju en etta” kan tolkas som att deriveringsregler förefaller vara starkt associerad till nyckelordet ”hastighet” i frågeställningen och att både Fanny och Josefin spontant tillämpar specifika deriveringsregler innan de nämner derivata. Deriveringsregler, visade sig i denna studie vara en väl implementerad och lättaktiverad del av elevers begreppsbild av derivata. Vad deriveringen innebär kommer senare i elevernas samtal.

Fanny, Josefin och Christoffers uttalanden var också exempel på uppfattningar som beskriver derivata som förändringshastighet i en punkt. Det kan uppfattas som att elevernas begreppsbild har en sådan status att den kan länka samman medelvärdet av grafens lutning, grafens lutning i en given punkt och derivata enligt Hähkoniemis (2004) modell av Tall & Grays (1994) tre matematiska världar. Uppfattningar i kategori A visade också på en tydligt skiljlinje mellan medelhastighet och momentanhastighet.

Eleverna i denna kategori förefaller ha hunnit etablera en länk mellan ”Average of change”, och ”Rate of Change”. De finner derivata som ett relevant verktyg, kan applicera deriveringsregler och tolkar derivata som förändringshastighet. Dessa elever har utvecklat en begreppsbild av symbolen s´(t) både som en process (tillämpning av relevanta deriveringsregler) och som ett begrepp (momentanhastighet), vilket karakteriserar lärande i den andra matematiska världen, den proceptuella-symboliska världen, Tall (2004) och Tall & Gray (1994).

Sammanlagt nio elever i studien använde sig av derivata för bestämning av tågets momentanhastighet. I beskrivningen av hur dessa elever uppfattade derivatan till en funktion finner vi bland annat ”förändringshastighet i en punkt”. Elevers tolkning av derivata som en lokal egenskap hänger förmodligen samman med deras förståelse av begreppet momentanvärde.

Inom tolkningskategori B förekom delvis andra kvalitativa uppfattningar. Linn, Pia och Faizas arbete med uppgifterna 5a-5c visade bland annat på deras förståelse för matematiska symboler både som process och begrepp. Övergången mellan genomsnittlig förändringshastighet (sekantens lutning) och momentan förändringshastighet (tangentens lutning) visade sig vara en högre nivå av begreppsutveckling gällande symbolisk representation.

Dessa elever befinner sig, enligt Tall (2004), i den proceptuella-symboliska matematiska världen. De uppfattar symboler som en sekvens av operationer vilket tvingar fram andra kunskaper av mer elementär och operationell karaktär, till exempel kvadrering och dividering. Eleverna i tolkningskategori B uppfattar också symboler som begrepp, i det här fallet ”medelhastighet” och ”genomsnittliga förändringshastigheten” vilket är karakteristiskt för förståelse av matematiska begrepp i den proceptuella-symboliska världen.

Alla elever i denna studie hade haft genomgång av derivata i matematikkurser inom det naturvetenskapliga programmet samt övat med procedurer relativt derivata. Men frågeställningen kunde förmodligen inte aktivera dessa elevers begreppsbilder av derivata i denna kategori. Enligt Hähkiöniemi är ”Average of change” en möjlig ingång till ”Rate of change” som leder vidare till förståelse av derivatabegreppet. Här krävs att eleven på ett tydligt sätt kan skilja på medelvärde och momentanvärde vilket inte framgår av uppfattningar i denna kategori. Andra möjliga alternativa vägar till derivata, enligt modellen i figur 4, går via tangentens lutning eller via definitionen av gränsvärde. Men ingen av dessa alternativa vägar kan spåras i elevernas resonemang i denna kategori.

Tolkningskategori C karakteriserades av bland annat svårigheter med elementära operationer av aritmetisk/algebraisk karaktär vilket kan försvåra en djupare förståelse av mer abstrakta begrepp såsom funktion och derivata. Gideon och Alexander visar en relativ god förståelse för symbolspråket i funktionsuttrycket och differenskvoten. De förefaller behärska grundläggande algebraiska algoritmer som krävs för att beräkna värdet av differenskvoten.

Förståelse för matematiska symboler, både som processer och begrepp, utgör enligt Gray & Tall (1994) och Tall, (2004) huvuddraget i lärande av matematiska begrepp i den proceptuella- symboliska världen. Dessa elever har hunnit tillgodogöra sig kunskaper som binder samman symboler och processer. Eleverna i denna kategori kunde beräkna värdet av differenskvoten uppgift 5a, se bilaga 1, men de kunde inte precisera vad det erhållna värdet betyder. Vid detta tillfälle förefaller eleverna sakna de komponenter i begreppsbilden som associerar symboler till begrepp.

Frågan om urskiljbara samband mellan elevernas tolkningar av grafiska respektive symboliska representationer hänger samman med tolkningskategoriernas innehåll och karaktär. En eventuell ingång i diskussionen berör frågan om förhållandet mellan elevens begreppsbilder och tolkningar av en s-t-graf och en symboliskt representerad avståndsfunktion. Om man ger en grupp av elever ett test som behandlar grafisk och symbolisk representation av en process så är det troligt att det förekommer urskiljbara samband mellan resultaten på dessa tester. Det är dock viktigt att poängtera att sådana samband inte är generaliserbara eftersom det endast rör ett få antal individer. Frågan om ett eventuellt samband mellan elevers förståelse av representationer som förekommer i denna studie är komplex och svårt att påvisa. Inom ramen av studiens resultat är det dock möjligt att jämföra elevers uttryckta förståelse och dra slutsatser vad gäller elevers uppfattningar av dessa representationer.

Arman, Alexander, Gideon, Linn, Pia och Saeed, är exempel på elever i denna studie som var mindre framgångrika i att integrera matematiska begrepp i sina tolkningar kring s-t-grafen. Deras uttryckta förståelse tyder ändå på en ganska utvecklad begreppsbild associerad till symboliska frågeställningar. Studien visar att elever ibland kompenserar en mindre utvecklad förmåga att tolka grafisk representation genom att istället hantera symboliska representationer av samma fenomen på ett mer framgångsrikt sätt.

Eleverna i denna studie visade ett bättre resultat på temat symbolisk representation. Att grafiska frågeställningar var mer utmanande kan bero på intuitiva idéer som ibland dominerar begreppsbilden. En graf kan likna en kulle men inte en funktion som ett abstrakt matematisk konstruktion. Däremot förekom också uppfattningar såsom funktion är en ”formel” som genererar tal. Elever med de mest utvecklade uppfattningar inom temat grafisk representation uttryckte också de mest utvecklade uppfattningar inom temat symbolisk representation.

Vikten av att förstå begrepp är ett återkommande inslag i debatten kring elevers kunskaper i matematik och naturvetenskapliga ämnen. Det betonas också i ämnesplan, kursplan och betygskriterier. Med utgångspunkt i studiens resultat föreslår jag följande kvalitativa nivåer av elevers begreppsförståelse inom det aktuella området. Att kunna eller behärska begreppet lutning kan innebära att eleven:

- har stött på begreppet exempelvis genom undervisning
- har utvecklat en förståelse för begreppet och dess sammanhang
- har förmåga att aktualisera delar av begreppsstrukturen vid behov
- har förmåga att relatera specifika begrepp till en specifik frågeställning
- kan tillämpa begreppet, det vill säga kan hantera och tolka det i olika situationer och för olika syften
- drar generella slutsatser om aktuell process eller fenomen med utgångspunkt i kunskapen om begreppets tillämpbarhet
- drar paralleller till reella världen, det vill säga ha en uppfattning om vad representationen presenterar
- kan tillämpa kunskaper om begrepp i andra sammanhang där samma begrepp förekommer
- har förmåga att sätta begrepp i relation till andra begrepp och kunnaskapa nya representationer och göra överföringar mellan dem

Vid analys av enskilda elevers arbete med symbolisk representation förekom uppfattningar av varierade kvalitet vad gäller elevers uttryckta förståelse. De olika faserna av begreppsutveckling gällande symbolisk representation som har identifierats i denna studie är att eleven:

- har stött på begreppen funktion och derivata exempelvis genom undervisning
- har utvecklat begreppsbilder
- har förmåga att delvis aktivera och relatera begreppsbilden vid behov

- har förmåga att uppfatta matematiska symboler som processer det vill säga genomföra sekvens av operationer
- har förmåga att uppfatta symboler både som processer och begrepp samtidigt

Ikoniska tolkningar, som förekom hos vissa elever, kan uppfattas som en alternativ uppfattning, en kunskapsbas som bör aktualiseras, konfronteras och modifieras i samband med undervisning. Detta leder till uppfattningen att olika representationer kan vara lämpliga kontrollinstrument för att identifiera elevers svårigheter med att uppfatta begrepp, men också för att skapa förutsättning för djupare begreppsförståelse. Det kan vara fördelaktigt att läraren i samband med undervisning av grafiska representationer diskuterar denna aspekt så att eleverna blir uppmärksamma på och medvetna om alternativa tolkningar och därmed skapa möjlighet till förändring och utveckling av elevers begreppsförståelse.

Jag anser att studiens syfte är uppfyllt och att studiens resultat ger svar på forskningsfrågor gällande elevers tolkningar och begreppsbilder av matematiska representationer. Studien ger också en möjlig förklaring till varför vissa elever ger uttryck för ikoniska tolkningar och vad begreppsutveckling möjligen skulle kunna betyda i det aktuella området.

Kunskapen om elevers uppfattningar av matematiska begrepp är värdefull, dels ur ett ämnesdidaktiskt perspektiv, men också ur ett lärarperspektiv. Förhoppningsvis bidrar studien till en mer fördjupad insikt hos matematik-fysiklärare avseende alternativa elevuppfattningar och hur dessa möjligen kan identifieras, konfronteras och förändras.

Generaliserbarhet

Generaliserbarhet eller överförbarhet kan ses som utökandet av en hypotes eller en förklarningsmodell som kan gälla inom andra miljöer och grupper. Att studien enbart innefattar 17 gymnasieelever påverkar förstås dess generaliserbarhet. Resultatet förväntas därför inte vara generaliserbart till andra elever utan snarare bidra med en möjlig beskrivning av elevers begreppsbilder. Det finns flera olika kriterier för hur man kan se på överförbarhet av kvalitativa forskningsresultat. Potentialen för överförbarhet kan berikas exempelvis genom att i studien inkludera så varierande fall av samma fenomen som möjligt (Larsson, 2009). Detta resonemang innebär att man inte kan överföra resultaten från ett specifikt fall utan från en mängd av uppfattningar inom samma kategori. Jag tolkar ”varierande fall” som flera olika sätt att problematisera samma fenomen. I denna studie undersöktes hur gymnasielever tolkar grafisk och symbolisk representation beskriven genom en s-t-graf respektive avståndsfunktion vilka fokuserade på olika aspekter av matematiska representationer som i sin tur genererade tolkningar av olika kvalitativa nivåer.

Studiens urval är också betydelsefullt för överförbarhet av resultatet. Önskvärt är, vilket också är fallet i denna studie, att urvalet av försökspersoner ska vara så representativt som möjligt för den population som resultaten ska generaliseras till.

Till fortsatt forskning rekommenderas att studera:

- eventuella effekter av kognitiva konflikter på begreppsförståelse
- eventuell korrelation mellan förståelse av matematiska representationer och fysikaliska begrepp
- vilka undervisningsformer som är lämpliga för att synliggöra och konfrontera alternativa uppfattningar
- möjligheten att undersöka effekten av dynamiska datorprogram på förståelse av processer och exempelvis hur de fria programvarorna GeoGebra och Algodoo kan utnyttjas i samband med undervisning för att representera processer.

Referenser

Ahrne, G. & Svensson, P. *Handbok i kvalitativa metoder*. Malmö: Liber, 2011.

Andersson, B. (2001). *Elevers tänkande och skolans naturvetenskap – Forskningsresultat som ger nya idéer*. Skolverket: Stockholm.

Andersson, B. (2008). KRAFT OCH RÖRELSE. Lund: Studentlitteratur.

Andersson, B. (2008a), *Grundskolans naturvetenskap: helhetssyn, innehåll och progression*. Lund: Studentlitteratur.

Arons, A. B. (1997). *Teaching introductory physics*: Wiley.Beichner, R. J. (1994).Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physics*. 62 (8), 750-762. August 1994.

Arfwedson, G. (1998). *Hur och när lär sig eleven?* Stockholm: HLS Förlag. ISBN 91-756-202-4.

Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs.

Am. J. Phys. 62 (8), 750-762. August 1994.

Benckert, S. & Pettersson, S. (2008). Learning Physics in Small-Group Discussions – Three Examples. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 4(2), 121-134.

Berg, C. A. & Smith, P. (1994). Assessing students' abilities to construct and interpret line graphs: Disparities between multiple-choice and free-response instruments. *Science Education. 78*, 527–554.

Berg, C. & Phillips, D. G. (1994). An investigation of the relationship between logical thinking structures and the ability to construct and interpret line graphs. *Journal of Research in Science Teaching, 31*, 323–344.

Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood.*Cambridge, MA: MIT Press.

Carey, S. (1999). Sources of conceptual change. In E. K. Schlonick, K. Nelson, S. A. Gelman & P. H. Miller (Eds.), *Conceptual development: Piaget's legacy*, (pp.293-326). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Chi, M. T. H. (2005). Common sense conceptions of emergent processes: Why some misconceptions are robust. *Journal of the Learning Sciences, 14,* 161–199.

Chi, M. T. H., Slotta, J.D., & de Leeuw, N. (1994). From things to processes: A theory of conceptual change for learning science concepts. Learning and Instruction, 4, 27–43.

Chi, M. T. H., Roscoe, R, Slotta, J., Roy, M., &Chase, C. C. (2012).Misconcieved causal explanations for emergent processes. Cognitive Science, 36, 1-61.

Chi, M. T. H., Slotta, J. (2006). Helping Students Understand Challenging Topics in Science Through Ontology Training. Cognition and Instruction, *24*(2), 261–289.

Chi, M. T. H., (2013).Two kinds and four sub-types of misconceived knowledge, ways to change it, and the learning outcome.International Handbook of Research on Conceptual Change

Clement, J. (1985).Misconception in graphing. In the Proceedings of the Ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, The Netherlands..

Christensen, Lars et al (1985). Marknadsundersökning: en handbok. Studentlitteratur: Lund.

diSessa, A. A. (1993). Toward an epistemology of physics.Cognition & Instruction, *10*(2/3), 105-226.

diSessa, A. (1988). Knowledge in pieces. In G. Forman, & P. B. Pufall, Constructivism in the computer age (pp. 49–70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

diSessa, A. A., & Sherin, B. (1998). What changes in conceptual change? International Journal of Science Education, 20, 1155–1191.

diSessa, A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In D. Gentner and A. Stevens (Eds.), Mental models (pp. 15-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

diSessa, A. A., Hammer, D., Sherin, B., & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: meta-representational expertise in children. Journal of Mathematical Behavior, 10 (2), 117–160.

diSessa, A. A., Elby, A., & Hammer, D. M. (2002). J's epistemological stance and strategies. In G. M. Sinatra & P. R. Pintrich (Eds.), *Intentional conceptual change* (pp. 237-290). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

diSessa, A. A., Smith, J. &Roschelle, J. (1994). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition.College of Education. Michigan State University (517) - 355-6682.

Driver, R., & Easley, J. (1978). Pupils and paradigms: A review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education, 5*, 61-84.

Duit, R. (2004). *Bibliography: Students' and teachers' conceptions and science education database*. Kiel, Germany: University of Kiel.

Duit, R., Treagust, D. F., & Widodo, A. (2008). Teaching science for conceptual change: Theory and practice. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (pp. 629-646). New York: Routledge.

Duval, R. (2006).A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Elby, A. (2000).What students' learning of representations tells us about constructivism.*Journal of Mathematical Behavior*, Volume 19, issue 4 (4th quarter, 2000), p. 481-502.

Elby, A. (2000).What students' learning of representations tells us about constructivism.*Journal of Mathematical Behavior*, Volume 19, issue 4 (4th quarter, 2000), p. 481-502.

Ernest, P. (1998).Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, Albany, New York: SUNY Press.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001) Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications: *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 124- 158.

Galili, I. &Lehavi, Y. (2006).Definitions of Physical Concepts: A study of physics teachers' knowledge and views *Vol. 28, No. 5, 14 April 2006, pp. 521–541*

Glaser, B. &Strauss, A. (1979).*The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research.* New York: Aldine, 1979.

Graham, T. & Sharp, J. (1998). An Investigation into Able Students' Understanding of Motion Graphs.Teaching mathematics and its applications. Volume 18, No. 3, 1999

Goldberg, F. M., & Anderson, J. H. (1989). Student difficulties with graphical representations of negative values of velocity. *The Physics Teacher*, *4*, 254 260.

Granström, K. (2003). Förändring av roller och arbetsrelationer. Ur: G. Berg & H-Å Scherp (red). (2003) Skolutvecklingens manga ansikten. Myndigheten för för skolutveckling. Liber Distribution Stockholm. S 179 - 208

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 116 - 140.

Goldin, G. A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving.In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (ss. 125–145). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Goldin, G. A. (1998). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics.*Journal of Mathematical Behavior, 17,* 137–165.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics.In L. P. Steffe& P. Nesher (Eds.), *Theories of Mathematical Learning*.Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hammer, D. (2000). Student resources for learning introductory physics.American Journal of Physics, 67 (Physics Education Research Supplement), S45-S50.

Hammer, D. (1996). Misconceptions or p-prims. How might alternative perspectives of cognitive structure influence instructional perceptions and intentions.*Journal of the Learning Sciences 5(2)*, 97–127.

Hartman, J. (1998). Vetenskaplig tänkande. Studentlitteratur, Lund.

Hartman, J. (2003). Filosofi lexikonet, filosofer och filosofiska begrepp från A till Ö. Uppsala: Almqvist & Wiksell tryckeri AB. ISBN: 91-37-11151-5-5

Hewson, P. W., & Hewson, M. G. (1984). The role of conceptual conflict in concep-tual change and the design of science instruction. *Instructional Science, 13*, 1-13.

Holme, I. & Solvang, B. (1997). Forskningsmetodik, Studentlitteratur, Lund, upplaga 2.

Holton, G. (1952). *Introduction to concepts and theories in physical science.*Reading, MA: Addison- Wesley.

Hähkiöniemi, Markus (2006): The Role of Representations in Learning The Derivative. Avhandling från University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics.

Hähkiöniemi, Markus (red.) (2004). *Perceptual and Symbolic Representations as a Starting Point of the Acquisition of the Derivative.* International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28th, Bergen, Norway, July 14-18, 2004. 8 pp

Jaworowski, Z. (2007). CO2, The greatest scintific scandal of our time. In 21st CENTURY Science & Technology Spring/Summer 2007, pp 14-28.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.*Université du Québec à Montréal. Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation. (1987). Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1978). The interpretation of complex Cartesian graphs representing situations -studies and teaching experiments. (Doctoral Dissertation, University of Nottingham, England).

Janvier, C. (1987c). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (ss. 27–32).Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Johansson, T. (2009). Språk och diskurser i pedagogisk forskning om lärande.

Pedagogisk Forskning i Sverige 2009 årg 14 nr 4 s 277–292 issn 1401-6788. Filosofiskainstitutionen, Uppsala universitet

Juter, K. (2006). Limits of functions: university students' concept development. Doctoral thesis / 2006:08.

Kirsh, D. (2010). Thinking with external representations.*AI & Society* 25, 441-454.

Kohl, B. (2001).Towards an Understanding of how Students Use Representations in Physics Problem Solving. B.S, Western Washington University.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitative forskningsintervjun.* Oslo: ad Notam Gyldendal.

Kvale, Einar & Brinkmann, Svend. (2009). *Den kvalitative forskningsintervjun.* Oslo: Gyldendal Norsk Förlag AS.

Larsson S. (2009). A pluralist view of generalization in qualitative research. International Journal of Research & Method in Education 2009;32:25-38.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, Learning and Teaching. *Review of Educational Research, 60*, 1-64. Learning and instruction 11 (2001) 357–380.www.elsevier.com/locate/learninstruc.

Lagerholm, P. (2010). *Språkvetenskapliga uppsatser*. Studentlitteratur: Lund.

Limón, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. Learning and Instruction, vol. 11, sid. 357-380.

Limón, M. & Mason, L. (2002).*Reconsidering Conceptual Change. Issues in theory and practice.* Amsterdam: Kluwer.

Limón, M., & Carretero, M. (1999). Conflicting Data and Conceptual Change in His-tory Experts. In W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds.), *New perspec-tives on conceptual change* (pp. 137-159). Amsterdam: Pergamon.

Linell, P. 1994. Transkription av tal och samtal: Teori och praktik. Arbetsrapporter från Tema K, 1994: 9.

Lingefjärd, T. (2014). Representationer och uttrycksformer. Matematikundervisning i praktiken. NämnarenTema 10, 192-196.

McCloskey, M. (1983).Naive theories of motion.In D. Gentner&A. L. Stevens (Eds.), *Mental models* (pp. 299–324). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

McDermott, L. C., & Trowbridge, D. E.(1981). Investigation of student understanding of the concept of acceleration in one dimension.*American Journal of Physics, 49*(3), 242-253.

McDermott, L. C., & Trowbridge, D. E.(1980). Investigation of student understanding of the concept of velocity in one dimension.*American Journal of Physics, 48*(12), 1020-1028

McDermott, L. C. and Peter S. Shaffer (2005). A research-based approach to improving student understanding of the vector nature of kinematical concepts.*American Journal of Physics, 73*(10), 921-931

McDermott, L.C., M.L. Rosenquist, and E.H. van Zee, (1987). "Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics," *Am. J. Phys.***55** (6) 503.

Minstrell, J. (1992). Facets of students' knowledge and relevant instruction. In R. Duit& F. Goldberg and H. Niedderer (Eds.), Research in Physics Learning: Theoretical Issues and Empirical Studies, Proceedings of an International Workshop, Bremen, Germany 1991 (pp. 110-128). (Kiel: IPN).

Nemirovsky, Ricardo & Rubin, Andee (1992): *Students' Tendency To Assume Resemblances between a Function and Its Derivative.* Report No: TERCWB292. Cambridge, MA: TERC Communications.

Nemirovsky, R. (1994). On ways of symbolizing: the case of Laura and the velocity sign. *Journal of Mathematical Behavior, 13*(4), 389-422.

Nilsson, B. (1993). *Individ och grupp*. En introduction till gruppsykologi. Lund: Studentlitteratur. ISBN: 91-44-37461-5

Norrby, C. (1994). *Samtalsanalys. Så gör vi när vi pratar med varandra.* Lund: Studentlitteratur.

Pettersson, K. (2008). Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel. Matematiska vetenskaper Chalmers Tekniska högskola och Göteborgs Universitet Göteborg 2008

Pfundt, H., & Duit, R. (1993). Bibliography: Students' alternative frameworks and science education.

Piaget, J. (1929). *The child's conception of the world.*New York: Harcourt Brace. Kiel, FGR: Institute for Science Education.

Piaget, J. (1930). *The child's conception of physical causality.*London: Kegan Paul.

Piaget, J. (2006) *Barnets själsliga utveckling.* Norstedts Akademiska Förlag.

Polit, D & Beck, C (2010) *Essentials of nursing research. Methods, appraisal, and utilization* (7th edition). Philadelphia : Lippincott.

Posner, G. J., Strike, K.A., Hewson, P.W. & Gertzog, W.A. (1982). Accomodation of a Scientific Conception: Toward a Theory of Conceptual Change. *Science Education.*Volym, (66 (2)), 211-227.

Sherin, B. L. (2001). How students invent representations of motion. Journal of Mathematical Behavior 19 (2000) 399–441.

Smith, J. P., diSessa, A. A., &Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. Journal of the Learning Sciences, 3 (2), 115–163.

Schoultz, J. (2002). *"Att utvärdera begreppsförståelse"*, Strömdahl, Helge (red.), *"Kommunicera naturvetenskap i skolan"*, sid 43-56, Studentlitteratur, 2002

Stensaasen, S. & Sletta, O. (2000). *"Gruppprocesser. Om inlärning och samarbete i grupp.* Stockholm: Natur och kultur. ISBN: 91-27-00703-9

Stensmo, C. (2007). *Pedagogisk filosofi.* Studentlitteratur. ISBN 978-91 - 44 - 01890 - 4.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Tall, D. (1991) The psychology of advanced mathematical thinking. I: D. Tall (red), *Advanced mathematical thinking* (s. 65-81). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2004).Thinking Through Three Worlds of Mathematics.*Proceedings of the 28th Conference of PME,* Bergen, Norway, 4, s. 281-288.

Tall, D. (2008).The Transition to Formal Thinking in Mathematics.*Mathematics Education Research Journal,* vol. 20.n 2.

Teuscher, D. &Reys, R. E. (2010). Slope, Rate of Change, and Steepness: Do Students Understand These Concepts? Vol. 103, No. 7 • March 2010 | Mathematics Teacher 519- 524

Treagust, David F. &Duit, Reinders. (2008). Conceptual change: a discussion of theoretical, methodological and practical challenges for science education. *Cultural Studies of Science Education.*3, 297-328

Trost, Jan. (1997).Kvalitativaintervjuer.Studentlitteratur: Lund.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989).Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

Vygotsky, L. (1986). Thought and language (A. Kozulin, Trans.). Cambridge, MA: The MIT Press. (Original workpublished 1934)

Westlander, G. (1993). Socialpsykologi. Tankemodeller om människor i arbete. Göteborg: Akademiförlaget. Widerberg, Karin (2002). Kvalitativ forskning i praktiken. Studentlitteratur: Lund.

Winther-Jorgensen, M. & Phillips, L. (2000). Diskursanalys som teori och metod. Lund: Studentlit-teratur.

Wittmann, E. (2005). *Mathematics as the science of patterns – a guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood.*Mathematical learning from early childhood to adulthood. (Elektroniskresurs) Hämtadfrån: http://irem.u-strasbg.fr/php/publi/annales/sommaires/11/WittmannA.pdf

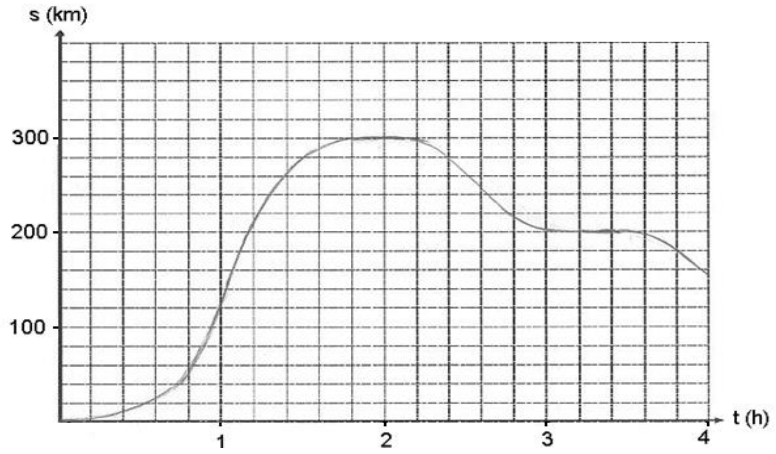
Wyndhamn, Jan, Riesbeck, Eva & Schoultz, Jan, *Problemlösning som metafor och praktik: studier av styrdokument och klassrumsverksamhet i matematik- och teknikundervisningen*,Linköpings Universitet: Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linköping (2000).

Bilagor

Bilaga 1 Elevuppgifter

Tillfälle 1 Grafiska frågeställningar

Diagrammet nedan beskriver hur ett tåg färdas under 4 timmar. Sträcka s är i kilometer och tiden t är i timme.



1a) När har tåget störst hastighet?

1b) Hur kan man veta det?

1c) Finns det ett eller flera tillfällen där tåget har denna höga hastighet?

2a) När har tåget lägst hastighet?

2b) Hur kan man veta det?

2c) Finns det ett eller flera tillfällen där tåget har denna låga hastighet?

3) Kan man säga något om riktningen hos tågets färd genom att tolka diagrammet? Vad i så fall?

4) Rita i ett diagram hur tågets hastighet varierar under 4 timmar.

Tillfälle 2 Symboliska frågeställningar

Ett föremål rör sig enligt $s(t) = 2t^2 + t$, där $0 \le t \le 10$. Sträcka s är i meter och tiden t är i sekund.

5a) Beräkna och tolka $\dfrac{s(5) - s(3)}{5 - 3}$.

5b) Hur långt har föremålet rört sig efter 8 sekunder?

5c) Vilken hastighet har föremålet efter 8 sekunder? Hur vet du det?

Bilaga 2 Lösningsförslag till elevuppgifter

Tillfälle 1 Grafiska frågeställningar

1a) I intervallet 1-1,2 h

1b) Tåget har störst hastighet där grafen lutar mest.

1c) Nej det finns endast ett tillfälle.

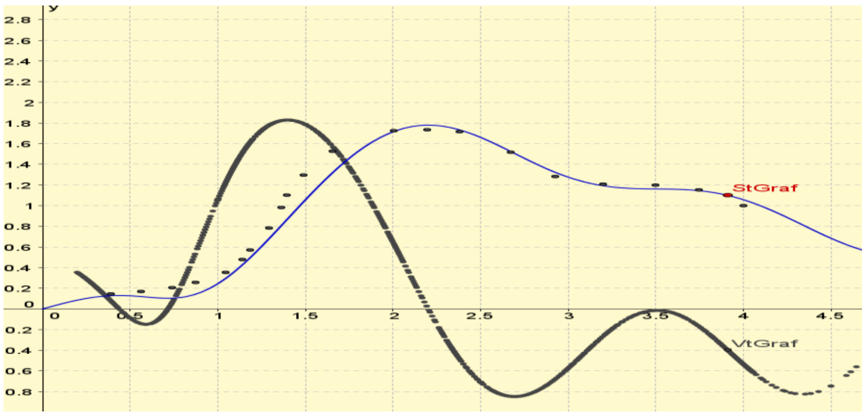
2a) Vid t = 0, 1,8 < t < 2,2 h samt 3 < t < 3,5 h

2b) Grafen lutar minst.

2c) Det finns tre tillfällen.

3) Grafen är växande i intervallet 0 < t < 1,8 h vilket innebär att den har positiv lutning i detta intervall. Tåget vänder efter första uppehållet vid 2 h, därefter är grafen avtagande och lutningen är negativ.

4)



Figur med st-t graf och v-t-graf

Tillfälle 2 Symboliska frågeställningar

5a) $\frac{s(5)-s(3)}{5-3}=\frac{55-21}{2}=17m/s$, medelhastighet mellan 3-5 s.

5b) Föremålets läge efter 8 s ges av $s(8)=2\cdot 8^2+8=136\,m$.

5c) Momentanhastigheten ges av funktionens derivata $s'(8)=4\cdot 8+1=33m/s$. Funktionens derivata kan bland annat tolkas som grafens lutning i en given punkt eller lutningen för tangenten som dras genom punkten. Den kan också ses som förändringshastigheten av avstånd med avseende på tid vilket kan tolkas som momentan hastighet.

Bilaga 3 Anteckningsblad

Deluppgift	
1a	
1b	
1c	