Institutionen för didaktik och Pedagogisk Profession

GÖTEBORGS UNIVERSITET

# Undervisning i multiplikation genom systematiskt varierade exempel

*Christina Skodras*

Magisteruppsats i ämnesdidaktik (15hp)

Handledare: Angelika Kullberg

Examinator: Christian Bennet

Rapportnummer: IDPP 2015 MG 03

# Abstract

Uppsats/Examensarbete: 15 hp
Program och/eller kurs: PDA 461
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: Ht 2015
Handledare: Angelika Kullberg
Examinator: Christian Bennet
Rapport nr: xx (ifylles ej av studenten/studenterna)
Nyckelord: Areamodell, Distributiva lagen, Exempel, Matematik, Multiplikation, Variationsteori

Studien undersöker hur uppgifter i multiplikation från läromedlet Muffles´ Truffles ur serien *Context for learning mathematics* är konstruerade samt vad som blir synligt respektive dolt för eleverna i undervisningen när materialet används. Data omfattar fem videoinspelade lektioner i en årskurs 4. Det teoretiska ramverket för studien är variationsteorin. I analysen beskrivs vad som varierade och vad som var invariant i de exempel som användes. Resultatet i denna studie indikerar att väl valda exempel i multiplikation med en inbyggd systematisk variation i kombination med rektangulära bilder av multiplikationsexemplen kan hjälpa eleverna att ta steget från att tänka multiplikation som upprepad addition till att tänka multiplikation som area (två dimensioner). Den föreliggande studiens exempel, där varje undervisningssituation består av 6-8 exempel och där exemplen har ett samband med varandra, skiljer sig från de exempel som vi vanligtvis finner i läroböcker. De serier som studerats har en systematisk variation som gör det möjligt för eleverna att få syn på matematiska idéer inom multiplikation, så som den kommutativa lagen, den associativa lagen och den distributiva lagen. I de fem undervisningssituationerna kan man se att fokus ligger på att eleverna ska förstå och kunna använda främst den distributiva lagen i multiplikation. Exempelvis så kombineras två exempel för att lösa ett annat exempel. Resultatet visar att de systematiskt varierade uppgifterna tillsammans med areamodellen verkar vara en kraftfull kombination som ger eleverna möjlighet att förstå multiplikation på djupet. Areamodellen ger eleverna möjlighet att se både multiplikationen och delprodukterna i multiplikationen. Den kvalitativa förändring som tidigare forskning menar behövs i tänkandet kring multiplikation, för att gå från det additiva till det multiplikativa tänkandet, får eleverna tillgång till genom de (area)modeller på rektanglar som läraren visar.

# Innehåll

# 1. Inledning

De senaste åren har en rad olika rapporter alarmerat om elevers sjunkande resultat i matematik (Skolverket, 2008; Skolverket, 2010). Resultaten från PISA *(Programme for International Student Assessment)* visar att elevers matematikkunskaper har sjunkit (Skolverket, 2010) och TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) 2007 visar på en liknande trend (Skolverket, 2008). TIMSS poängterar att svenska elever har brister vad gäller taluppfattning inom de fyra räknesätten. Orsaken till att eleverna har brister i taluppfattning kan kopplas till att undervisningen i Sverige baseras på att ha mer fokus på enskild räkning i en lärobok i större utsträckning i än andra länder (Skolverket 2008). Fler rapporter lyfter fram att läromedlet styr matematikundervisningen (Skolverket, 2003; Skolinspektionen, 2009) och att det leder till att eleverna inte får den matematikundervisning de har rätt till. Undervisningen fokuserar på enskilt arbete och mekanisk räkning istället för att fokusera på förmågorna så som att resonera, se samband, uttrycka och kommunicera matematik.

I min roll som matematikutvecklare har jag kommit i kontakt med läromedlet Muffles´ Truffles (Cameron & Fosnot, 2007) ur serien *Context for learning mathematics* som ges ut i USA. Detta läromedel skiljer sig från de läromedel jag har mött i Sverige på olika sätt. Läromedlet är en lärarhandledning med matematiska kontexter som främjar en djup begreppsmässig förståelse av grundläggande matematiska idéer, strategier och modeller. Materialet har arbetats fram av professor Cathrine Fosnot och hennes kollegor (Mathematics in the City i New York) i samarbete med Maarten Dolk (Freudentalinstitutet). Läromedelet baseras på Freudenthals idéer om Realistic Mathematics Education (RME). I RME är lärarens roll att successivt leda eleven vidare i en matematisk process så att eleverna kan utveckla bättre och mer effektiva strategier från en informell nivå till en mer abstrakt nivå. Utgångspunkten i denna förflyttningsprocess sker för att eleverna ska få en djupare förståelse av det matematiska innehållet. Detta kallar RME för matematisering (Fosnot & Dolk, 2001). På vilket sätt det beskrivna undervisningsmaterialet kan bidra till undervisning och lärande i en svensk kontext har inte tidigare studerats.

## Syfte/problemformuleringar

Syftet med studien är att skapa kunskap om hur uppgifter i multiplikation ur läromedlet Muffles´ Truffles ur serien *Context for learning mathematics* är konstruerade samt vad som blir synligt respektive dolt för eleverna i undervisningen där materialet används. I föreliggande studie besvaras följande forskningsfrågor:

- Vad ges eleverna möjlighet att lära sig av fem serier sammanlänkade uppgifter i multiplikation?

- Vilka aspekter av innehållet multiplikation görs möjliga att erfara i undervisningen genom de sammanlänkade uppgifterna?

# 2. Tidigare forskning

Nedan ges en översikt av forskning om systematisk användning av exempel i multiplikation samt om areamodellen. Även forskning om matematiska idéer i multiplikation beskrivs. I studien används begreppet uppgifter när det relateras till en serie sammanlänkade exempel och begreppet exempel[1] används när ett exempel ur serien diskuteras.

## Exemplens betydelse i undervisningen

Hösten 2011 trädde den nya läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet (Lgr 11) i kraft (Skolverket, 2011). Det globala målet för matematik (Lampert, Beasley, Ghousseini, Kazemi, & Franke, 2010) har i likhet med kursplanen i matematik, lyft fram att eleverna ska utveckla olika matematiska förmågor såsom problemlösningsförmågan, begreppsförmågan, metodförmågan, resonemangs- och kommunikationsförmågan (Skolverket 2011). Detta innebär att lärarna behöver fundera över hur matematikundervisning ska bedrivas för att eleverna ska ges möjlighet att utveckla dessa förmågor (Lampert et al., 2010). Om eleverna till exempel skall utveckla sin metodförmåga är det grundläggande att läraren ger dem förutsättningar att resonera. Exempel i undervisningen som uppmuntrar denna typ av diskussioner leder till att viktiga matematiska idéer synliggörs samt att procedur och förståelse sammanflätas (ibid.). Författarna skriver vidare att de har funnit fyra uppgiftstyper som rör metodförmågan och då med fokus på förståelse. En av aktiviteterna kallar de för *strings* vilket beskriver en serie sammanlänkade uppgifter.

> *Strings:* The teacher poses several related computational problems, one at a time, in order to scaffold students' ability to make connections across problems and use what they know to solve a more difficult computational problem. This activity is used to target a particular strategy (as compared to eliciting a range of strategies). For example, posing 4 × 4, then 4 × 40, and then 4 × 39 is designed to help students consider how to use 4 × 40 to solve 4 × 39, developing their knowledge of compensating strategies in multiplication (Lampert et al., 2010, s. 136).

Exempel har alltid haft en central roll i matematikundervisningen (Rissland, 1991; Mason, 2006; Watson & Mason, 2006; Rowland, 2008) som förmedlare av viktiga matematiska idéer till eleverna. Rissland (1991) hävdar att det är svårt att bedriva matematikundervisning utan specifika exempel. Thompson, Carlson och Silverman (2007) skriver att man bör konstruera exempel med eleverna i åtanke då uppgifter påverkar elever, eller inte, då eleven accepterar vad som erbjuds, eller inte, detta i samband med hans eller hennes egen förförståelse och intressen. Ett sätt som kan hjälpa eleverna att fokusera på begreppsförståelsen istället för procedur är att låta dem jämföra exempel för att finna samband mellan exemplen istället för att enbart lösa dem (Fosnot & Dolk, 2001; DiBrienza & Shevell, 1998; Ma, 2010). Läromedlet *Context for learning Mathematics* fokuserar på matematiseringsprocessen som innebär att hitta och förstå mönster, hitta likheter och skillnader samt vidareutveckla metoder. I matematiseringsprocessen ska eleverna utveckla både förståelse och färdighet. Lärarens roll

[1] I internationell forskning beskrivs det som vi brukar kalla för uppgifter för exempel (Mason, 2006; Watson & Mason, 2002)

är att lyfta elevernas idéer och tankar för att föra diskussionen framåt och på så sätt stödja elevernas förståelse (Fosnot, 2005).

## Sammanlänkade uppgifter

"Number string is a series of related but bare (devoid of context) computation problems that are specifically designed to elicit quick, efficient and reliable strategies for computation from students" (DiBrienza & Shevell, 1998, s. 21). De sammanlänkade uppgifterna (number strings) är designade på ett sätt där intentionen är att eleverna ska få möjlighet att dels få upptäcka ett mönster (jmf. Lampert et al., 2010) och dels få möjlighet att utveckla metodförmågan utifrån ett konstruktivistiskt synsätt. DiBrienza och Shevell (ibid.) uttrycker att fokus ligger i att eleverna ska fokusera på talen som ingår i exemplet för att avgöra vilken strategi som är lämplig att använda mellan just dessa tal. Syftet är alltså inte att de ska använda en specifik algoritm som strategi, det vill säga en viss procedur utan snarare fokusera på förståelsen av talen, taluppfattningen. Författarna ger ett exempel på subtraktion med utgångspunkt på en traditionell algoritm 4017 - 3998. När elever löser exemplet med algoritmen växlar de ett tiotal från tiotalskolumnen till 10 ental, de utför operationen och växlar återigen men nu från tusentalskolumnen då det inte går att växla från hundratalskolumnen. Sedan växlar de från hundratalskolumnen till tiotalskolumnen och slutligen utför de subtraktioner som behövs för att lösa exemplet. Författarna hävdar att taluppfattningsaspekten saknas i sådana exempel. I klassrum där elever får arbeta med sammanlänkade uppgifter som varieras på ett systematiskt sätt ges eleverna möjlighet att fokusera på relationen inom och mellan exemplen. DiBrienza och Shevell (ibid.) förklarar att det eleven gör i detta sammanhang är att eleven förstår subtraktion på djupet men att eleven även förstår viktiga matematiska idéer så som: att hålla talen hela och inte separera dem, att subtraktion handlar om skillnad vilket gör att eleven även förstår att talet 3998 kan göras om till 4000 för att underlätta huvudräkningen och talet 4017 görs om till 4019 för att hålla samma skillnad som ursprungsexemplet (4019 - 4000). För att träna på dessa viktiga matematiska idéer kan man använda sig av en serie sammanlänkade uppgifter (DiBrienza & Shevell, 1998).

150 – 75
151 – 76
149 – 74

294 – 100
291 – 97
301 – 107

Figur 1. Exempel på en serie sammanlänkade uppgifter i subtraktion.

Figur 1 visar hur de tre första exemplen varierar men differensen är invariant. När eleven ska lösa det andra exemplet kan de relatera till det första exemplet och då upptäcka att differensen är den samma. Skillnaden är att man har adderat ett på varje term. Det samma kan eleven göra med det tredje exemplet. De tre efterföljande exemplen ger eleverna möjlighet att undersöka och pröva ifall de förstår den nya strategin *lika tillägg* (ibid.). Watson och Mason (2006) ger förslag på uppgifter ur ett läromedel som har liknande upplägg som DiBrienza och Shevell (1998) det vill säga uppgifter med inslag av variation. DiBrienza och Shevell nämner inte att uppgifterna har inslag av variation utan poängterar att eleverna ska se ett mönster med hjälp av en serie sammanlänkade uppgifter som presenteras för dem. Kullbergs et al. (2014) studie om sammanlänkade uppgifter i multiplikation och divison tar upp hur lärarna succesivt förfinade exemplen i sin learning study genom variation för att lyfta fram viktiga matematiska idéer. Lärarna gjorde inga större förändringar men även små justeringar påverkade vad som blev möjligt för eleverna att lära sig. Författarna ställer sig frågan ifall matematiklärare utnyttjar de möjligheter som uppgifterna har. En annan viktig slutsats som författarna drar är att innehållet påverkas av den interaktion som sker mellan elever och lärare. Läraren bör således inta en aktiv roll så att den serie sammanlänkade uppgifter ger eleverna möjlighet att se det som var planerat. Slutsatserna som Watson och Mason (2006) drar efter de studier de gjort om konstruktion av exempel handlar också om vikten att variera exemplen för att synliggöra matematiska mönster som kan leda till elevernas möjlighet att generalisera:

> /…/control of dimensions of variation and ranges of change is a powerful design strategy for producing exercises that encourage learners to engage with mathematical structure, to generalize and to conceptualize even when doing apparently mundane questions. (Watson & Mason, 2006 s. 108)

Ett annat sätt att se på designade uppgifter är på det sätt som de kinesiska läromedlen beskriver variationsproblem (Sun 2011a). För de kinesiska läroboksförfattarna men även för de kinesiska lärarna är det en tradition att utgå från centrala aspekter vid uppgiftskonstruktion (Sun, 2011b).

> “One Problem, Multiple Solutions,” (OPMS /…/ varying solutions), Multiple Problems, One Solution” (MPOS /…/ varying presentations) and ”One problem, Multiple Changes “ (OPMC /…/ varying conditions and conclusions) (Sun, 2011a, s. 101).

Sun (2011a) ger exempel på OPMC och OPMS och beskriver att det som är typiskt för variationsproblems exempel under kategorin OPMS är att exemplen alltid presenteras i ett ”set” och inte ett exempel i taget. Syftet med att presentera ett ”set” är att eleven ska få möta en variation för att upptäcka samband mellan olika räknesätt som i exemplet i figur 2 nedan $4 \cdot 6 = 24$, $24 \div 6 = 4$ och $24 \div 4 = 6$ men även andra viktiga matematiska idéer så som likhetstecknets betydelse.

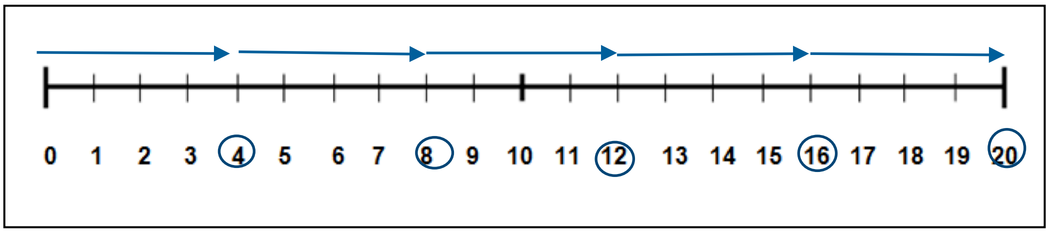

Figur 2. Division introduceras i ett kinesiskt läromedel utifrån ” One problem, Multiple Changes”.

Sun (2011a) påpekar en skillnad mellan västvärldens ”kontextbaserade problem” (egen översättning, ibid. s. 105) och kinesiska variationsproblem. Skillnaden ligger i att variationsproblem fokuserar på flera matematiska idéer samtidigt men fokuserar även på elevlösningar och begreppsutveckling. Det typiska för OPMS är att fokus ligger på elevernas lösningar. OPMS syfte är att exemplet ska generera olika lösningar och representationer som ska leda till att elever och lärare diskuterar och drar slutsatser kring olika lösningar (Sun, 2011a). Watson och Mason (2006) konstaterar att det inte räcker att eleverna får arbeta enskilt med exempel. De menar att eleverna kan få syn på den matematiska idé som ligger bakom exemplen med hjälp av en ”mathematically-aware expert” (Watson & Mason, 2006, s. 108). Utan en ”mathematically-awere expert” finns det risk att eleverna inte utvecklar sin matematiska förståelse. En annan risk som författarna påpekar är att eleverna inte fokuserar på det matematiska utan på kontexten ifall de får lösa exempel själva. Ett sätt att komma tillrätta med det sistnämna är att konstruera uppgifter som erbjuder variation och som fokuserar på struktur, relationer och egenskaper. Watson och Mason (ibid.) framhåller också vikten av att elever får diskutera uppgifterna med läraren annars finns det risk för att de enbart fokuserar på uträkningarna. DiBrienza och Shevell (1998) påpekar vikten av att eleverna får reflektera då detta ger dem möjligheten att tänka efter och förbereda sig att förklara muntligt hur de tänker. När eleverna berättar hur de löser exemplet är lärarens roll att visualisera elevens tankar. På så sätt, menar författarna, får eleverna ta del av varandras sätt att tänka.

Ma (2010) har i sin forskning jämfört hur amerikanska respektive kinesiska lärare använder exempel i sin undervisning. Hon har kommit fram till att de kinesiska lärarna är mer medvetna kring hur de väljer exempel än vad de amerikanska lärarna är. Skillnader finns också i hur lärarna undervisar om innehållet i respektive länder. De amerikanska lärarna har en procedurinriktad undervisning medan de kinesiska lärarna varvar sin undervisning genom att fokuserar på både procedur och förståelse. En annan central skillnad mellan de olika ländernas lärare är att de kinesiska lärarna undervisar en serie sammanlänkande uppgifter med inslag av variation till skillnad från de amerikanska lärarna som visar ett exempel eller flera exempel men som saknar relation till varandra. Detta är i enlighet med vad Sun (2011a, 2011b) också lyfter fram i sin forskning. *Ett* exempel har inte någon effekt på eleverna menar många forskare (Dienes, 1960; Mason & Pimm, 1984; Watson & Mason, 2006). För att eleverna ska se nyttan med exemplet men framförallt göra matematiska framsteg bör exemplet vara ”/…/ a class of problems and a collection of techniques and ways of thinking” (Mason, 2006, s. 224). När eleverna får möjlighet att fokusera på flera exempel kan de upptäcka både det allmänna och det generella i det som undervisas (Mason, 2006; Watson & Mason, 2006). Exempel och variationen i exemplen ska generera att elever kommer i kontakt med matematiska idéer som hjälper eleverna att urskilja det som är betydelsefullt (Goldenberg & Mason, 2008). Traditionella exempel i läroböcker eller i undervisningen kan begränsa utvecklingen av elevernas matematiska utveckling menar Zazkis & Chernoff (2008). Detta betyder att de traditionella exemplen ofta fokuserar på delar vilket leder till att eleverna begränsas i möjligheten att kunna generalisera.

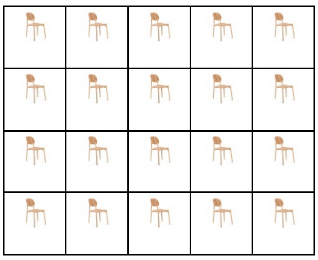
## Uppgifternas betydelse i multiplikation

Multiplikation uppfattas vanligtvis av barn som additivt det vill säga som upprepad addition (Vergnaud, 1983; Billstein, Libeskind & Lott, 2004; Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010). Exemplet ”Ett klassrum är möblerat så att det finns 5 kolumner med 4 stolar i varje kolumn. Hur många stolar finns det i klassrummet?” (Billstein et al., 2004, s. 112, egen översättning) kan lösas med hjälp av upprepad addition $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ vilket kan illustreras på en tallinje (ibid.). Det som händer i denna situation är att samma enhet adderas, 4 stolar + 4 stolar + 4 stolar + 4 stolar + 4 stolar. Den linjära illustrationen nedan (figur 3) visar den additiva strukturen (Vergnaud, 1983).



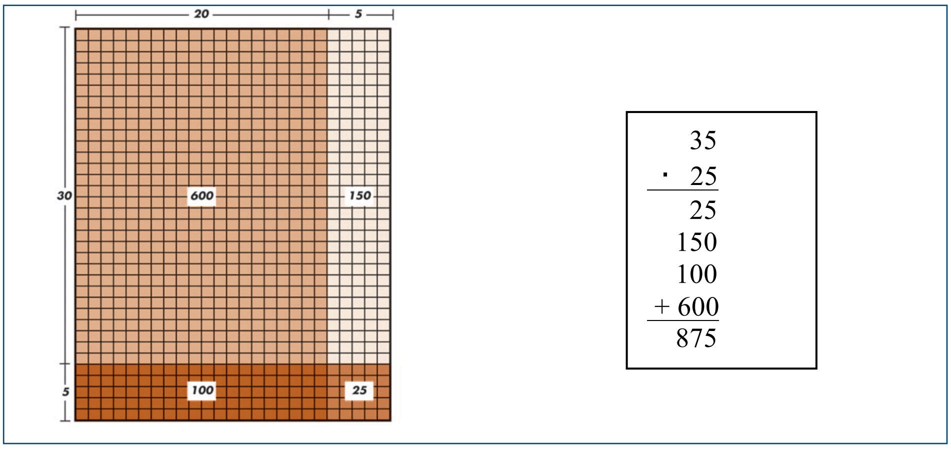

Figur 3. Här visas hur multiplikation ses som upprepad addition.

Genom att illustrera multiplikation som upprepad addition på en tallinje innebär det att eleven ser multiplikation som en linjär dimension (Clark & Kamii, 1996; Young-Loveridge & Mills, 2009). Upprepad addition ger inget djup i vad multiplikation är och är därmed inte tillräcklig för att förstå innebörden av begreppet multiplikation. En kvalitativ förändring behövs i tänkandet kring multiplikation för att gå från det additiva till det multiplikativa tänkandet (Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010). Vergnau (1983) skriver att “Multiplicative structures rely partly on additive structures but they also have their own intrinsic organization which is not reducible to additive aspects” (s. 128). Detta innebär att multiplikation har en multiplikativ struktur vars abstraktionsnivå medför att kunna se antalet grupper samt mängden i varje grupp på samma gång i en multiplikation (Clark & Kamii, 1996). Billstein et al. (2004) illustrerar detta med en tvådimensionell bild, se figur 4 nedan.



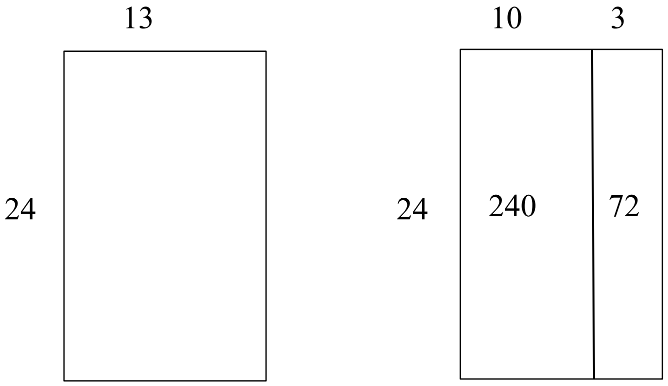
Figur 4. Bilden ovan visar rader och kolumner. Fyra stolar i varje kolumn. Stolen till exempel i rutan längst upp till vänster har alltså en dubbel innebörd d.v.s. både som 1stol/rad och som en stol av fyra.

Den inledande multiplikationsundervisningen upp till $10 \cdot 10$ bidrar till att eleverna uppfattar multiplikation som upprepad addition då multiplikation illustreras och förklaras som grupper (Lampert, 1986). När multiplikation inom högre talområden presenteras slutar lärarna oftast att illustrera multiplikation med grupper då det inte är hanterbart. Därmed förloras kopplingen till det konkreta. När multiplikation av slaget $82 \cdot 152$ ska räknas ut introduceras eleverna till en algoritm där upprepad addition inte längre är grunden. Syftet med en algoritm är att minska ner antalet delberäkningar till färre uträkningar för att det ska bli effektivt att räkna ut (ibid). Detta leder till att de matematiska idéerna så som den associativa och distributiva lagen vad gäller multiplikation inte blir synliga för eleven (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003), algoritmen används då som en procedur (Lampert, 1986). En svårighet när det gäller multiplikation med flersiffriga tal är "/…/ what and how the place values of the digits in the factors affect the place values of the partial products" (Fuson & Beckmann, 2012/2013, s. 22). Författarna menar att förståelsen för var man ska skriva de olika siffrorna för att få de olika delberäkningarna kan synliggöras med hjälp av den tvådimensionella areamodellen (jmf. Billstein). Areamodellen måste undervisas då detta inte sker naturligt av eleverna (Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder & Thompson, 1998; Jacob & Willis, 2001). Om eleverna får förståelse för den distributiva lagen har de lättare att se hur de kan lösa exemplet även om de glömmer proceduren i en algoritm. Eleverna kan till exempel lösa exemplet $268 \cdot 47$ genom den distributiva lagen för multiplikation $268 \cdot (40 + 7) = (268 \cdot 40) + (268 \cdot 7)$ (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, s. 134). Ännu tydligare blir det ifall eleverna kan rita upp multiplikationen i areamodellen. Areamodellen kan synliggöra den kommutativa-, associativa- och distributiva lagen i multiplikation (Nunes & Bryant, 2009; Young-Loveridge, 2005; Young-Loveridge & Mills, 2009). Ball, Hill och Bass (2005, s. 20) visar hur man kan illustrera exemplet $35 \cdot 25$ enligt areamodellen nedan, se figur 5. De menar att det är viktigt att läraren kan göra kopplingen mellan areamodellen och algoritmen. De nämner också att läraren behöver skriva fram alla delprodukten i algoritmen, i en så kallad lång algoritm för att få eleverna att förstå den korta algoritmen och dess delprodukter.




Figur 5. Den vänstra figuren illustrerar multiplikationen $35 \cdot 25$ i en areamodell och den vänstra figuren presenterar kopplingen mellan areamodellen och algoritmen.

DiBrienza och Shevell (1998) menar att den distributiva lagen, men även den kommutativa lagen och associativa lagen i multiplikation kan synliggöras med en serie sammanlänkade uppgifter. Den distributiva lagen kan representeras visuellt i form av en areamodell (ibid.) se figur 6. Ifall lärarens syfte är att eleverna ska få en djupare förståelse för multiplikation är areamodellen en viktig modell att presentera för eleverna. Areamodellen kan användas inom andra talområden så som multiplikation med decimaler och multiplikation med bråk.




Figur 6. Den distributiva lagen illustreras när två tvåsiffriga tal multipliceras med varandra (24· 13) (DiBrienza & Shevell, 1998, s. 25).

Bilden nedan (se figur 7) visar en serie sammanlänkade uppgifter som presenteras en i taget (DiBrienza & Shevell, 1998) och hur exemplen i serien leder eleverna i att tänka utifrån den distributiva lagen (11 · 10) = ((10 + 1) · 10) = (10 · 10) + (1 · 10). Även de tre nästkommande exemplen leder till den distributiva lagen. De två sista exemplen utmanas eleverna i att använda den distributiva lagen själva för att visa ifall de har förstått och kunnat generalisera.

$10 \cdot 10$

$1 \cdot 10$

$11 \cdot 10$

$11 \cdot 3$

$11 \cdot 13$

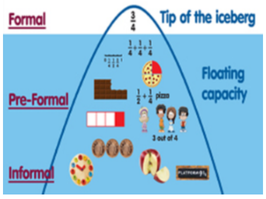
$12 \cdot 10$

$12 \cdot 14$

Figur 7. En serie sammanlänkade uppgifter som fokuserar på distributiva lagen (DiBrienza & Shevell, 1998, s. 25)

# Matematiska uttrycksformer

Det finns ett gap mellan den informella matematiken och den formella matematiken (Webb, Boswinkel & Dekker 2008). Isbergsmodellen som illustreras i figur 8 har arbetats fram av Freudenthal Institutet i Nederländerna och har använts av lärare i USA. Isbergsmodellen arbetades fram för att stötta lärarna i hur elever behöver möta modeller för att närma sig den formella matematiken. Isbegsmodellen har visat sig vara ett kraftfullt sätt att illustrera att flera olika modeller behövs mellan det konkreta och formella så att gapet mellan dessa ska överbryggas.




Figur 8. Isbergsmodellen från den konkreta till den formella matematiken.

Olika uttrycksformer i matematik kan till exempel vara material, språk eller skrivna symboler (Hiebert et al., 1997). Detta är vad som i dagens kursplan i matematik skrivs fram som uttrycksformer (Skolverket, 2011). Modeller är verktyg som används för att förstärka elevers matematiska aktivitet och kommunikation Hiebert (ibid). Författarna menar att modeller kan hjälpa eleverna att hantera svåra tankeprocesser samt synliggöra dolda idéer och tankar som inte blir synliga annars. Slutligen kan en modell gestalta de tankar en elev har. Hiebert (ibid) lyfter fram två viktiga aspekter vad gäller modeller. Den ena aspekten är att man som lärare inte får ta för givet att alla elever lär sig det som är tänkt att lära bara för att de använder en modell. Den andra aspekten är vikten av att läraren är medveten om vad modellen synliggör för eleverna men även vad modellen kan dölja för eleverna.

Inom RME används modeller såsom tallinjen och areamodellen för att främja utvecklingen av formell matematik. Undervisningen börjar med att återspegla en konkret modell, en *modell-av* något som senare ska övergå till att modellen kan användas som ett verktyg för att stödja ett matematiskt resonemang, *modell-för* något. Syftet är att gå från det konkreta till det allmänna och generaliserbara (Gravemeijer, 1999). Övergången från *modell-av* till *modell-för* sker enligt Gravemeijer i fyra steg. Till en början är modellen knuten till exemplets karaktär, *task settings*, och används således för att förstå exemplet. Sedan övergår modellen till att referera till exemplet, *referential*. När modellen övergår till att inte vara knuten till exemplet blir den mer allmän, *general*. Det är mellan de två sistnämnda stegen som *modell-av* skiftar till *modell-för*. Det sista steget kallas för *formal* och är inte beroende av någon modell.

> As children model and represent their strategies, and as they develop generalized mental models of the part/whole relations for situations and operations, they construct *mental maps* that can eventually become tools to think with (Fosnot, 2005, s. 12).

Att gå från *modell-av* till *modell-för* fordrar att eleverna får möta aktiviteter som gynnas av att en viss modell används som förklaringsmodell (Fosnot & Dolk, 2001). Vad gäller multiplikation är areamodellen en modell som används för att synliggöra den kommutativa-, associativa- och distributiva lagen. Det är dock viktigt att eleverna förstår rad-kolumn-strukturen (Battista, Clements, Arnhoff, Battista & Van Auken Borrow, 1998). Författarna fann i sin studie som gjordes i en årskurs 3 att eleverna utvecklar rad-kolumnstrukturen i fyra steg. Det första steget är att eleverna ser areamodellen som en dimension. När de bad eleverna att rita rutor 3x7 ritade eleverna endast rutor runt omkring. Det andra steget är att eleven kan urskilja antingen rader *eller* kolumner till exempel genom att relatera till upprepad addition och pekar på raderna men reflekterar inte hur många rader det är. Här sker heller ingen koppling till kolumnerna. I det tredje steget kan eleverna identifiera att rutorna indikerar rader *och* kolumner. I detta steg brottas eleverna med att förstå att en ruta är en del av en rad och en kolumn. Slutligen kan eleverna se en ruta som både en rad och en kolumn. Fosnot & Dolk (2001) menar att denna svårighet att se en ruta som både en rad och en kolumn är samma svårighet som när eleverna ska förstå att till exempel sex objekt samtidigt kan vara en grupp.

# 3. Teoretiskt ramverk

Utifrån mitt forskningsintresse och mina frågeställningar har jag valt variationsteorin som analytisk redskap för att analysera mina data och för att få svar på mina frågor. I denna del redogörs centrala delar av variationsteorin. Avsikten är inte att redogöra variationsteorin i sin helhet, utan att lyfta fram delar som kommer att använda i analysen.

## Fenomenografi och variationsteori

Enligt variationsteorin, *konstitueras,* världen av den lärande genom en relation mellan denne och världen. Variationsteorins syn på världen kan beskrivas som en icke-dualistisk ontologi. Marton och Booth (2000) skriver ”vi kan inte beskriva en värld som är oberoende av våra beskrivningar eller av oss som beskriver den. Vi kan inte skilja den som beskriver från beskrivningen” (ibid., s. 148-149). Människan och världen ses som ett och inte som två separata delar (Marton & Booth, 2000; Emanuelsson, 2001). Marton och Booth (2000) menar att det finns en värld som vi erfar men varje individ erfar världen på sitt sätt.

Variationsteorin har utvecklats utifrån forskningsansatsen fenomenografi. Fenomenografin har utvecklats av Marton (1981) och ordets etymologi är *fenomeno* som betyder ser/erfar och *grafi* som betyder skriva (egen översättning) det vill säga fenomenografin beskriver det som individen ser eller erfar. Studier inom fenomenografi fokuserar på att beskriva individers uppfattningar av samma fenomen, till exempel hur olika individer förstår begreppet ”pris/prisbildning” (Alexandersson, 1994, s. 47). Studier inom variationsteorin fokuserar på lärande och på undervisningssituationer till exempel vad som görs möjligt för eleverna att urskilja av lärandeobjektet (Pang, 2003). Denna studie kommer att fokusera på vad som görs möjligt för eleverna att lära sig under fem undervisningstillfällen.

## Medvetande, urskiljning, samtidighet och variation

Enligt Marton & Booth (2000) finns det vi erfar i världen i vårt medvetande, men allt är inte samtidigt i vårt fokala medvetande. Vi har något i fokus och resten har vi i bakgrunden. Vad som är i fokus beror på situationen vi befinner oss i vilket innebär att *medvetandet* är beroende av tid och rum. Då vi erfar nya saker ändras vår medvetenhet, alltså är medvetandet även beroende av vad vi erfar (Runesson, 1999). Marton och Booth (2000) applicerar det vi erfar till lärande. De menar att det vi lär oss beror på vårt medvetande, vad vi har i fokus (*urskilt*), vad vi har i bakgrunden och vad har vi urskiljer samtidigt (*simultant*) genom den variation som är möjlig att erfara.

För att vi ska kunna urskilja något måste variation erfaras inom en dimension av variation (DoV). När du kör är du inte medveten om allt du erfar: miljön du passerar, bilar du ser, ljudet från radion, ljudet från bilmotorn mm. Om en förändring sker till exempel att motorn börjar låta mer än vanligt är det det som urskiljs och som du fokuserar på. Då hamnar allt annat i bakgrunden och du börjar troligtvis att fundera på varför motorn krånglar (Marton & Booth, 2000). Urskiljning kan också handla om att kunna urskilja del från en helhet (Marton, Runesson, & Tsui, 2004).

Marton och Pang (2006) skriver:

> To discern an aspect, the learner must experience potential alternatives, that is, variation in a dimension corresponding to that aspect, against the background of invarience in other aspects of the same object of learning. (One could not discern the color of things, for instance, if there was only one color.) (s. 193)

Det författarna skriver ovan är att det finns dimensioner av variation. Två personer kan till exempel erfara olika dimensioner av en kopp som står på bordet. Dessa dimensioner är olika aspekter av koppen som kan variera så som färg, form och material (Marton et al., 2004). Ett annat sätt att  förstå citatet ovan  är att säga det i termer som att veta vad något *är* och vad något *inte är*. För att jag ska förstå vad tungt är måste jag erfara vad lätt är, med andra ord måste jag erfara att ett föremåls massa kan variera (Runesson, 1999).

## Variationsmönster

Marton, Runesson och Tsui (2004) har identifierat fyra mönster av variation, nämligen *separation, kontrast, generalisering och fusion*. I Lo och Marton (2012) ses separation som ett resultat av kontrast och generalisering.

*Kontrast* innebär att se urskilja vad något *är* och vad något *inte är* genom att hålla något invariant och variera det man vill ska bli synligt. Det som urskiljs är skillnader istället för likheter.  Om man vill lära  sig vad till exempel ”tre” är behöver man erfara vad ”tre” inte är så som ett, två, fyra etc (Marton et al., 2004). Enklast att se vad något är är att kontrastera det mot ett annat objekt (Lo, 2014).

*Generalisering*: För att verkligen förstå innebörden av vad  ”tre” är  behöver man erfara tre äpplen, tre bilar tre böcker ”to be able to grasp the ´threenes´” (Marton et al., 2004, s. 16)

*Fusion*: Om det finns flera aspekter som är viktiga att synliggöra i en lärandesituation måste dessa aspekter erfaras samtidigt genom fusion.

## Lärandeobjekt och läranderymd

Om vi tänker på en undervisningssituation är det inte svårt att förstå att eleverna lär sig olika saker från en och samma lektion då de riktar sin uppmärksamhet mot olika aspekter. Det innebär att läraren bör ha den insikten för att kunna planera en undervisning som möjliggör att eleverna ser det som är syftet med undervisningen (Lo & Pong, 2005). Studier visar att det har stor betydelse för eleverna hur ett specifikt innehåll presenteras och hur läraren organiserar och möjliggör lärandet (Marton & Tsui, 2004).  Ifall läraren kan hjälpa eleven att erfara lärandeobjektet är det troligt att eleverna når de lärandemål som är avsedda för lektionen. Lärandeobjekt har två aspekter, enligt Lo (2014), en generell och en specifik aspekt. Den generella aspekten avser de förmågor vi vill att eleverna ska utveckla när de arbetar med ett innehåll och de specifika aspekterna avser de ämneskunskaper eleverna ska lära sig i ämnet. Lärande beskrivs som förändring i hur man "ser något", man ser fenomenet på ett nytt sätt. Att se något på ett nytt sätt innebär enligt variationsteorin att se något med hjälp av begreppen *urskiljning* och *samtidighet* (Marton, Runesson & Tsui, 2004). Författarna skriver att det är de kritiska aspekterna av det som ska ses som måste framträda genom variation och samtidigheten. Författarna ställer sig frågorna: "How do we know what dimensions of variation we should look for? How do we know what critical features there are for a certain class of situations to be seen in a certain way? How can we characterize the nature of a certain capability?" (s. 23). Författarnas svar på dessa frågor är att variation är det som är centralt. De menar att det är svårt att urskilja något om det inte varieras. De kritiska aspekterna kan vara olika för olika personer. För att ta reda på vilka kritiska aspekter som just den elevgruppen behöver få syn på kan läraren diskutera eller intervjua eleverna (ibid). Lo (2014) skriver att det är viktigt att undervisningen är ”en medveten handling som syftar till att skapa strukturer” (s. 101) för att ge eleverna möjligheten att urskilja.

Lo och Pong (2005) skriver att läraren kan hjälpa eleverna att erfara innehållet på ett mer kraftfullt sätt. De menar att det är viktigt att fundera på vilken variation och vilka strategier man bör använda för att eleverna ska komma så nära lärandemålet som möjligt till exempel.

> What kind of pattern of variation can best be used to help students discern the critical aspects and their relationships?
> /…/
> What methods or teaching strategies are required to facilitate the students in achieving the general aspect of a certain object of learning that is importend for the learning?
> /…/
> What kind of activity would best bring out the patterns of variation to help students learn? (Lo & Pong, 2005, s. 23-24)

**Variationsrymd**

I en undervisningssituation riktas uppmärksamheten på ett lärandeobjekt och dess dimensioner av variation (DoV). Runesson (1999) kallar detta för variationsrymd. Hon menar att det är variationsrymden, de olika DoV som varierar, som bestämmer vad eleverna kommer att erfara. ”Variationsrymden konstitueras då olika aspekter av undervisningsobjektet lyfts fram, fokuseras eller tematiseras och då olika DoV öppnas.” (ibid., s. 41).

Enligt variationsteorin innebär lärandet en förändring i sättet att se något. Det innebär att man ser lärandeobjektet på ett annat sätt, ett djupare sätt då man urskiljer fler aspekter av lärandeobjektet. Om eleven i en undervisningssituation inte lärt sig det som var syftet med lektionen kan det bero på att eleven inte urskilt de kritiska aspekterna eller dragen i lärandeobjektet (Lo, 2014). Antingen har eleven inte uppmärksammat dem på lektionen och då missat de kritiska aspekterna eller så har läraren inte gjort det möjligt för eleven att urskilja och erfara kritiska aspekter och drag.

# 4. Metod

Metod väljs, enligt Schoenfeld (2002), först när man har en idé vad man vill studera. Schoenfeld menar att metoden kan liknas en lins som ett fenomen ska studeras genom. Han menar att det är fenomenet som ska studeras som styr val av metod i en studie. Val av metod kommer i sin tur att påverka vad vi kommer att se. Syftet med denna studie är att få kunskap om hur fem serier sammanlänkade uppgifter i multiplikation ur läromedlet Muffles´ Truffles (Cameron & Fosnot, 2007) är konstruerade samt vad som blir synligt respektive dolt för eleverna i undervisningen. Studien är en kvalitativ studie som kännetecknas av observerade lektioner som ger information om människors beteende och handlingar (Sharma, 2013). Förutom videoinspelningar kommer de fem serierna sammanlänkade uppgifter att analyseras. I denna studie är fokus att undersöka vad fem serier sammanlänkade uppgifter ur läromedlet kan ge eleverna för möjlighet att lära från undervisningen. Studiens frågeställningar faller väl inom den variationsteoretiska ansatsen vilken därmed har använts som ett analysverktyg (Marton, 2006; Lo, 2014). Variationsteorin har använts av andra forskare då de har forskat om vad som är möjligt att lära från undervisning i klassrummet (Marton & Pang, 2006; Runesson, 1999; Lo, 2014).

## Studiens bakgrund och förutsättningar

Studien är en del av projektet ROMB[2]. Tio lektioner spelades in i multiplikation i syfte att observeras och diskuteras. Lektionerna baserades på läromedlet som heter Muffles´ Truffles (Cameron & Fosnot, 2007) ur serien *Context for learning mathematics*. De tio lektionerna har inslag av grupparbeten, redovisningar/respons samt inslag av serier sammanlänkade uppgifter som läraren och klassen löser och diskuterar tillsammans vid tavlan.

### Urval

Under våren 2014 hade jag en del av min tjänst i en grundskola. När val av klass och lärare kom upp enades projektgruppen om att jag skulle undervisa min dåvarande årskurs 4 med femton elever enligt *Context for learning mathematics* då vi ansåg att det var en förutsättning att läraren vi skulle filma var insatt i materialet. Hartman (1998) kallar denna typ av urval för bekvämlighetsurval eller tillfällighetsurval. Enligt författaren innebär detta att man väljer de individer som finns tillgängliga inom räckhåll. Fördelen med detta urval är, enligt författaren, dess enkelhet och nackdelen är att urvalet inte är representativt. Att urvalet inte är representativt behöver dock inte alltid vara en nackdel (ibid.). Han menar, ifall man ”redan från början kan säga att resultatet inte borde påverkas av vem man väljer kan bekvämlighetsurvalet vara ett möjligt sätt att göra ett urval” (s. 210). Detta diskuterades inom ROMB och slutsatsen blev att studien inte borde påverkas av vilken klass eller lärare som skulle väljas. I studien övergavs ”kravet på representativitet, för att på ett annat sätt ge

[2] Projektet ROMB (Reflekterande och Matematiserande Barn) vid Göteborgs Universitet initierades hösten 2013. Tillsammans med kollegor vid Göteborgs Universitet startades, våren 2014, ett lokalt utvecklingsarbete där syftet var att undersöka på vilket sätt undervisningsmaterialet *Context for learning mathematics* (Fosnot & Dolk, 2001) kan bidra till undervisning och lärande i en svensk kontext.

hypotesen som skall testas ett bättre stöd" (Hartman, 1998, s. 212). Författaren skriver att kvalitativa urval ofta är av detta slag då man är intresserad av att hitta personer som kan ge den information man eftersöker.

**Videodata**

De första fyra lektionerna filmades av medarbetare i ROMB. Dessa tillfällen filmades lektionerna med en kamera och stativ. Läraren hade en mygga som fångade upp det som sades under undervisningstillfället. Kameran följde i första hand läraren men fångade givetvis även upp den interaktion som var mellan elever och läraren och ibland även mellan elever. De övriga fem lektionerna, vilket är de fem lektionerna studien fokuserar på, fanns inte tiden och möjligheten för ROMB att filma. Läraren fick själv filma resterande lektioner med hjälp av en ipads kamerafunktion. Ipaden placerades på ett bord eller en stol och filmade de tillfällen undervisningen var vid tavlan. De tillfällen läraren gick runt och interagerade med eleverna hade läraren med sig ipaden och filmade just den undervisningssekvensen. Det som skrivits på tavlan har fotograferats utom en gång, lektion nr 5. Efter avslutad lektion sparades filmen ner på en extern hårddisk. Alla lektioner förutom lektion 2 genomfördes under förmiddagen.

Videofilmade lektioner förefaller vara ett flexibelt och kraftfullt instrument att samla data där både visuell och verbal information fångas (Powell, Francisco & Maher, 2003) och har förekommit i stora forskningssammanhang så som TIMSS Video study Classroom (jmf. Stiegler & Hiebert, 1999). Det matematikdidaktiska forskningsfältet har de senaste två decennierna använt videoinspelning som en metod för att fånga upp elevers och lärares interaktion både vad gäller det verbala och det visuella (Powell et al., 2003). Metodens fördelar är att en film fångar två flöden, tal och bild. Andra viktiga aspekter som metoden har är att forskaren ges möjlighet att analysera filmerna om och om igen, backa, se om vissa sekvenser för att få möjlighet att observera både det som sägs och görs i filmen noggrant (Powell et al., 2003; Scataglini-Belghitar & Mason, 2012; Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006). Dock är det inte helt oproblematiskt med videoinspelningar då en film bara fångar vissa händelser, alltså får vi inte en avbild av verkligheten utan bara en "bild" av den (Bjørndal, 2002). För att få med fler händelser bör flera kameror användas vid ett och samma inspelningstillfälle (Jordan & Henderson, 1995). I denna studie var ipaden i lektion 5 och 6 placerad på ett bord till vänster om läraren och fångade läraren och tavlan. Läraren som skötte inspelningen ändrade på vinkeln på ipaden under lektion 5 för att få med resterande anteckningar som fanns dokumenterade på tavlan därav är det två filmer på denna lektion. Övriga tre lektioner är ipaden placerad rakt framför tavlan på en stol och fångar vad läraren och eleverna säger samt det som antecknas på tavlan. I studiens fem lektioner ser man väldigt lite av eleverna. Författarna (ibid.) skriver att det är avgörande för kvaliteten var kamerorna är placerade. I denna studie är detta en brist att inte fler kameror/ipads använts vid datainsamlingen samt att kameran i lektion 5 är placerad med en vinkel som inte fångar upp allt på tavlan vilket leder till att läraren avbryter och justerar ipaden. Lektion 7 fångar inte upp de sista tre minuterna och läraren ber eleverna att förklara igen det som inte fångades upp av ipadens filmfunktion. Detta har begränsat vad som har fångats in både vad gäller det visuella och det som sagts i undervisningen. Lektion 9 stoppar läraren ipadens filmfunktion och slår på igen för att försäkra sig om att allt kommer med på film då minnet i ipaden indikerat att det snart är fullt. Ytterligare en aspekt som kan vara problematisk är inspelningens kvalitet som påverkar analysen av datainsamlingen (Powell et al., 2003). Kvaliteten påverkas också av hur avslappnade läraren och eleverna man filmar är (Mackay, 1995). Det är svårt att veta i denna studie hur väl avslappnad läraren och eleverna var under de inspelade lektionerna. Sharma (2013) menar också att forskarens värderingar och kunskap kan påverka datainsamlingen vilket är viktigt att ha med sig när man läser denna studie. Denna studies lektionsinspelningar kompletterades varken med lärarintervju eller med elevintervjuer. Intervju med läraren var inte aktuellt då det är den faktiska undervisningen studien är intresserad av att undersöka. Ifall studien hade fokuserat att intervjua eleverna skulle det eventuellt kommit fram intressant information som inte går att fånga med videoinspelning (Sharma, 2013). Studien har inte i syfte att undersöka ifall eleverna lärt sig det som undervisningen syftade till därför valdes även elevintervjuer bort som metod.

# Genomförande

## Avgränsningar

Som tidigare har nämnts har datamaterialet inslag av grupparbeten, redovisningar/respons samt inslag av serier sammanlänkade uppgifter som läraren och klassen löser och diskuterar tillsammans vid tavlan. I denna studie har fem av tio filmer valts ut för att studeras och fokus ligger på implementeringen av uppgifterna. I dessa fem lektioner presenterar läraren ett exempel i taget. Till skillnad från de första fyra lektionerna sitter nu eleverna i en halvcirkel framme vid tavlan. Lärarens roll skiljer sig från de första fyra lektionerna. I studiens lektioner illustrerar läraren elevernas tankar på tavlan med hjälp av en areamodell. I de första fem lektionerna har läraren en annan roll nämligen att hjälpa och stötta eleverna i grupparbetet samt sammanfatta tillsammans med eleverna vad de har kommit fram till. Den tionde lektionen var en sammanfattning av temat Muffles´ Truffles. Lektionerna i denna studie är mellan ca 30 och 50 minuter långa. Lektion 5, 7 och 9 består av två till tre filmer då ipaden stoppades och startades om, se sammanfattningen nedan (tabell 1).

| Lektion | Serie | Tid |
|---|---|---|
| 5 | 1 | 32:40 min |
| 6 | 2 | 29:58 min |
| 7 | 3 | 30:14 min |
| 8 | 4 | 48:12 min |
| 9 | 5 | 36:57 min |
| | Totalt: | 177:59 min |

Tabell 1. De fem inspelade lektionernas tidsomfattning i minuter.

**Analysprocessen**
Alla fem lektionerna har transkriberats. I transkriberingen har tal men även det som antecknats på tavlan skrivits ner. När läraren pekat på tavlan har det noterats och satts inom parentes och kursiverats. Det samma har gjorts i de fall då det har varit tyst och eleverna tänker samt när något har varit underförstått har detta skrivits ut för att förtydliga för läsaren. Transkriberingen har varit en start i analysarbetet. På ett kollegieblock gjordes små korta noteringar om sådant jag uppmärksammat som skulle kunna vara av intresse i min studie. När alla transkriberingar var gjorda läste jag igenom dem och tittade på de noteringar jag gjort och började analysera en film i taget. Enligt Sharman (2013) handlar kvalitativ forskning om att söka mönster, kategorier och teman. För att kunna söka dessa mönster, kategorier och teman har jag i denna studie haft fokus på följande frågor vid analysen: Vad varieras? och Vad hålls invariant? när uppgifterna implementeras. För att hålla en röd tråd i progressionen som finns från första serien sammanlänkade uppgifter till femte serien sammanlänkade uppgifter har studien valt att behålla serierna som kategorier. De mönster som uppkommit inom och mellan serier lyfts upp i analysen. Efter varje lektion har en sammanfattning av de dimensioner av variation som öppnats upp sammanställts.

För att underlätta transkriberingen har vissa förkortningar använts när det gäller att skriva ut läraren och eleverna. Läraren har antecknats som L och eleverna som E1, E2 etc. För varje nytt exempel som diskuteras startar numreringen på eleverna från 1. Detta innebär att E1, E2 etc. inte är samma elev under samma lektion och inte mellan lektionerna.

## Validitet och reliabilitet

Viktiga kriterier för en studies kvalitet är dess validitet och reliabilitet (Bryman, 2004). Validitet handlar ifall studien mäter det man planerat att mäta (Bryman, 2004). I denna studie används videoinspelningar för att analysera vad eleverna ges för möjlighet att lära sig av fem serier sammanlänkade uppgifter i multiplikation samt vilka aspekter av innehållet multiplikation som görs möjliga att erfara i undervisningen. De videoinspelade lektionerna ger en rikare bild än vad enbart ljudupptagning eller observation ger. De videoinspelade lektionerna ger forskaren möjlighet att analysera samma lektion flera gånger om. Den föreliggande studiens analys har gjorts utifrån min 13-åriga erfarenhet som grundskollärare och 4-åriga erfarenhet som lärarutbildare.

Vad gäller genomförandet av denna studie har även detta redovisats så noggrant som möjligt. Reliabilitet handlar om mätinstrumentets tillförlitlighet. Tillförlitligheten i föreliggande studie handlar om att forskaren har varit så noggrann som möjligt vad gäller både insamlandet av videoinspelningar samt transkribering och analys (Bryman, 2004). Studien redovisar och analyserar alla exempel i detalj i varje serie som filmats. Dessutom kompletteras alla exempel med autentiska bilder från undervisningstillfällena samt med nio citat vilket ger läsaren möjlighet att granska analysen. Intentionen har varit att ge läsaren en helhet av vad som hände på lektionerna för att lättare förstå hur de olika dimensionerna av variation öppnades upp. Både den muntliga kommunikationen och det som skrivits på tavlan har transkriberats i sin helhet. Analyserna utgår från både den muntliga kommunikationen och från det som ritats på tavlan. Tavelbilder har använts för att förtydliga och komplettera analysen men även för att visa hur exemplen i en lektion hänger samman. Tavelbilderna har haft en central del i analysen för att förstå vad eleverna fått erfara i undervisningen. Det som varierats och det som bibehållits konstant har analyserats genom det sagda och utifrån tavelbilderna. Efter varje lektion har en sammanfattning av de dimensioner av variation som öppnats upp sammanställts. Det är första gången jag har använt mig av variationsteorin som analysverktyg. Om jag hade haft erfarenhet av variationsteorin sedan tidigare hade kanske aspekterna och dimensionerna av variation blivit ännu tydligare i studiens genomförande av lektionerna. Resultatet hade kanske inte blivit det samma ifall samma undersökning hade gjorts om. Med ett annat urval av elever skulle kanske andra dimensioner av variation synliggjorts eller blivit dolda. En annan lärare kanske skulle ha uppmärksammat andra aspekter av elevernas svar än vad studiens lärare gjorde. Bedömningen av studiens resultat är således kopplat till det urval som föreliggande studie har gjort.

Det finns kritik om att kvalitativa studiers resultat inte kan generaliseras (Sharma, 2013). Författaren skriver att syftet med kvalitativ forskning inte är att generalisera utan snarare att förstå en situation eller ett fenomen. Denna studie har heller inte till avsikt att generalisera (till en större population) resultaten då det enbart är en lärare och klass som studien baseras på. Istället vill denna studie ge en bild av vad eleverna ges för möjlighet att lära sig av fem serier sammanlänkade uppgifter i multiplikation samt vilka aspekter av innehållet multiplikation som görs möjliga att erfara i undervisningen genom de sammanlänkade uppgifterna. Detta beskriver Stake och Trumbull (1982) som en naturalistisk generalisering. Melrose (2010) menar att:

> The goal of naturalistic generalization is not for researchers to prescribe conclusions. Rather readers can gauge how and in what ways the particular details and stories presented in case studies may be applicable to their own situations. Sample sizes need not be large. Practical insights from narrative descriptions can evolve naturally and then be transferred or generalized to comparable situations. (s. 600).

Att forskaren i studien är samma person som läraren i studien som har analyserats är en viktig aspekt att lyfta fram som har med studiens validitet och reliabilitet att göra. Det finns forskningsstudier där forskaren har varit läraren i studien. I artikeln: *Working on the inside: Using one´s own practice as a site for studying mathematics teaching and learning* skriver Ball (2000) om att vara både forskaren och läraren. Hon ger exempel från sina egna forskningsstudier men nämner även andra forskare inom fältet som har utgått från den egna undervisningen såsom Lampert *Inquiry into elementary mathematics teaching*, Heaton *Inquiry into changing one´s practice* och Simon *Inquiry into mathematics teacher Education*. Denna studie kan inte jämföra sig med ovan nämnda studier men vill framhålla att flera framgångsrika forskare har undersökt den egna praktiken. Det finns givetvis både fördelar och nackdelar med att vara både läraren och forskaren i samma studie.

> What most clearly distinguishes first-person inquiry from other approaches to the study of teaching and learning is that it deliberately uses the position of the teacher to ground questions, structure analysis, and represent interpretation. In contrast, other research on

> teaching deliberately divides the work of practice from the undertaking of inquiry. /…/ As outsider, they can see and hear things that insiders take for granted. On the other hand, as outsiders they cannot completely understand local meanings, language, norms, and practices. They miss nuances, make faulty connections, and inappropriately infer motives. (Ball, 2000, s. 365 - 366).

Ball (2000) använder begreppet *insider* då hon syftar till att forskaren är läraren och *outsider* när forskaren enbart har sin roll som forskare. I denna studie är fördelarna att jag som lärare redan känner till det material som används, jag känner eleverna och jag vill både pröva materialet men även uppleva hur detta material faller ut i undervisningen. Nu är inte syftet mina upplevelser av materialet utan vad materialet och i synnerhet vad de fem serierna sammanlänkade uppgifter ger eleverna för möjlighet att lära sig. Precis som citatet ovan nämner vet jag inte i dagsläget vad jag har tagit för givet i denna undersökning utan låter läsaren fundera på detta. I denna studie är inte läraren, det vill säga forskaren, i fokus utan undervisningen. Med undervisningen menar jag den interaktion som sker mellan lärare och elev utifrån lärandeobjektet. Jag vill lyfta fram att det kan tolkas som att det är läraren som undersökningen fokuserar på då det i datainsamlingen har skrivits fram att kameran och ipaden har fångat lärarens agerande och tal. Syftet med att fokusera på läraren är just för att fånga vad som driver lektionen framåt och i studiens syfte vilka dimensioner av variation som öppnas upp. Fortsättningsvis skriver Ball att det är viktigt att distansera sig när man ska analysera sin egen forskning. I resultat- och diskussionsdelen har jag valt att skriva om mig i tredje person nämligen som *läraren*. På så sätt tar jag bort fokus från mig och fokuserar istället på vad undervisningen ger eleverna för möjligheter att lära (Ball, 2000). Fram till dess skriver jag i första person om mig.

# Etiska överväganden

God etik är en viktig egenskap i vetenskapliga studier (Vetenskapsrådet, 2011). Min roll som forskare är att ta hand om den information jag får på ett respektfullt sätt. Forskarens roll är också att skydda de inblandade i studien. De etiska överväganden som gjorts i denna studie överensstämmer med hur Hermerén (2007) och Vetenskapsrådet (2011) beskriver att en forskare ska ta hand om forskningsmaterialet. Denna studie har avanonymiserat skolan och deltagarnas namn. Ett hinder i avanonymiseringen är att de som vet var jag arbetade just den perioden studien filmades kan spåra både skola och eventuellt klass.

I samråd med rektorn på skolan informerades föräldrar och elever. Ett informationbrev skrevs och överlämnades vid ett föräldramöte där deltagande föräldrar fick möjligheten att ge sitt samtycke skriftligt ifall deras barn fick filmas eller ej. De föräldrar som inte var närvarande mailades informationsbrevet till dem. I brevet gavs även information om att deltagarna kunde avbryta studien när som helst. Enligt Vetenskapsrådet (u.d.) finns det fyra ”allmänna huvudkrav på forskningen” (s. 4) nämligen informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Genom att informera rektor, föräldrar och elever om studiens syfte och upplägg innan genomförandet av Muffles´ Truffles samt att deltagarna kunde avbryta sitt deltagande när de ville har informationskravet följts. Genom att föräldrarna skrev på att de tillät sina barn att delta i studien följdes samtyckeskravet. Alla föräldrar lät sina barn delta i projektet. Konfidentialitetskravet följdes då studien utlovade att elevernas namn skulle vara anonyma vilket har följts då elevernas namn har bytts ut mot E1, E2 etc. Videoinspelningarna har laddats ner på en extern plats och förvaras på säker plats. Endast forskaren har tillgång till filmerna. Vad gäller nyttjandekravet har föräldrar och elever informerats att deras uppgifter, det vill säga namn och klass, inte kommer att spridas.

# 5. Resultat

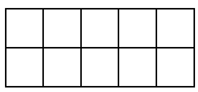
Analysen av de fem serierna sammanlänkade uppgifter har gjorts med hjälp av variationsteorin. De dimensioner av variation (DoV) som öppnas upp i multiplikation och vad som görs möjligt att urskilja har analyseras genom att jämföra exemplen och studera vad som varieras och vad som hålls invariant. Inledningsvis kommer de fem undervisningssekvenserna att redogöras för var för sig med fokus på vad som görs möjligt för eleverna att urskilja från de exempel som implementeras. Varje serie avslutas med en sammanfattning med fokus på vilka aspekter av innehållet multiplikation som synliggörs i undervisningen (se tabell 2 nedan). Följande uppgifter implementeras:

| Första serien | Andra serien | Tredje serien | Fjärde serien | Femte serien |
|---|---|---|---|---|
| 2 · 5 | 2 · 5 | 2 · 5 | 10 · 5 | 10 · 10 |
| 1 · 5 | 1 · 5 | 4 · 5 | 4 · 5 | 12 · 10 |
| 4 · 5 | 3 · 5 | 4 · 10 | 14 · 5 | 12 · 9 |
| 5 · 5 | 5 · 4 | 10 · 4 | 14 · 10 | 12 · 19 |
| 2 · 10 | 4 · 5 | 10 · 6 | 14 · 9 | 14 · 9 |
| 4 · 10 | 5 · 5 | 6 · 10 | 14 · 19 | 14 · 21 |
| | | 10 · 12 | 12 · 19 | |
| | | 10 · 18 | | |

Tabell 2. De fem seriernas sammanlänkade uppgifter implementeras vid fem olika lektioner.

## Första serien sammanlänkade uppgifter

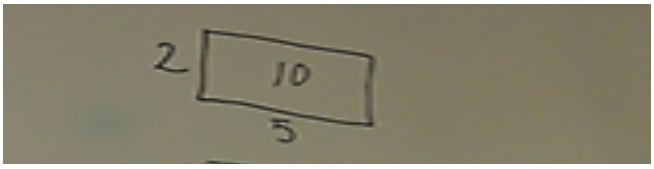
Första exemplet läraren introducerar för eleverna är (2 · 5). Detta exempel är ett känt exempel för eleverna sedan tidigare då exemplet ingår i en kontext som handlar om en (2 · 5)-låda som rymmer tio stycken objekt (tryfflar). Tillsammans med läraren har eleverna pratat om att (2 · 5) innebär två rader och fem kolumner och att produkten är tio. Denna lektion håller läraren upp rektangulära bilder av papper på alla exempel som ingår i första seriens uppgifter. Bilderna visas tillräckligt länge för att kunna uppfattas men inte så länge så att eleverna har chans att räkna alla rutor. Några elever berättar hur många tryfflar det får plats i en låda samt beskriver hur lådan ser ut. Multiplikationen (2 · 5) visas (se figur 9a) och läraren ritar representation på tavlan utan några rutor (se figur 9b). Läraren sätter senare ihop fler bilder med tejp vilket eleverna kan se när hon håller upp bilderna vilket gör det möjligt för eleverna att bli trygga med att (2 · 5)-lådan innebär två rader, fem kolumner och att produkten är tio. Bilden läraren visar och representationen av bilden (areamodellen) på tavlan syftar till att hjälpa eleverna att konstruera egna areamodeller. När ett nytt exempel ska förklaras och ritas suddas inte föregående exempel bort.



Figur 9a

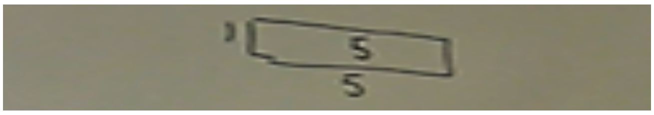
Figur 9b

**DoV som öppnas upp när faktorerna varieras och/eller hålls invariant.**
Läraren inleder lektionen med att snabbt visa en bild på exemplet (2 · 5). Eleverna får möjlighet att fundera och rita ner det de ser. Läraren frågar hur många tryfflar de tror det får plats i lådan och ber eleverna att förklara hur de vet det. En elev förklarar att hen ser två rader och fem kolumner och läraren ritar upp elevens förklaring på tavlan (se fig 10). Elevens förklaring i kombination med bilden som visats öppnar upp en DoV nämligen att multiplikation kan illustreras som en *area*– en rektangel.



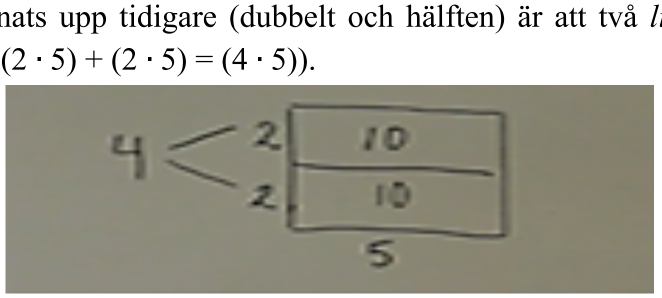

Figur 10. Första serien, exempel 1 - inledande exemplet (2 · 5).

Nästa bild som läraren visar (snabbt) för eleverna är exemplet (1 · 5). När den första faktorn varieras till hälften och den andra faktorn hålls invariant får eleverna möjlighet att urskilja två aspekter av hälften. En elev beskriver multiplikationen som hälften av den föregående lådan. Två andra elever förtydligar att det är hälften av raderna, se figur 11. Detta öppnar upp en DoV i förhållande till det första exemplet nämligen att *helheten kan variera,* i detta fall varieras den till *hälften* av helheten (2 · 5) genom att raderna har halverats.



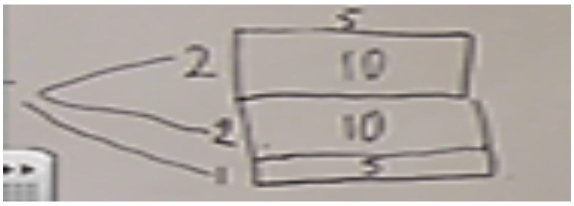

Figur 11. Första serien, exempel 2, (1 · 5).

Nästa exempel som läraren visar (snabbt) för eleverna är (4 · 5). I detta exempel varieras första faktorn till dubbelt av det inledande exemplets (2 · 5) första faktor medan den andra faktorn hålls invariant. Bilden som visas är två (2 · 5)-enheter som sitter ihop vertikalt (se figur 12). Areamodellen läraren ritar på tavlan (figur 12) utifrån en elevs förklaring visar att raderna har varierats till dubbelt medan kolumnerna är invarianta vilket öppnar upp två DoV. Den DoV som öppnas upp är samma som i föregående exempel, att *helheten kan variera,* i detta fall varieras den till *dubbelt av helheten* genom att raderna har dubblerats. Den andra DoV som öppnas upp (när första faktor varieras och den andra faktorn är invariant) i kontrast till de DoV som öppnats upp tidigare (dubbelt och hälften) är att två *likadana enheter* kan *kombineras* vertikalt ((2 · 5) + (2 · 5) = (4 · 5)).



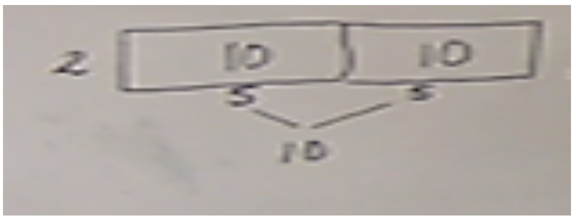

Figur 12. Första serien, exempel 3, (4 · 5).

Det fjärde exemplet läraren visar (snabbt) för eleverna är (5 · 5). Den första faktorn varierar genom att den ökar med ett i relation till föregående exempel (4 · 5) och den andra faktorn är invariant. Den DoV som öppnas upp av en elev i detta exempel är att man kan *kombinera* *olika enheter* med varandra för att lösa (5 · 5). En elev förklarade till exempel att *(4 · 5) och (1 · 5)* kan kombineras för att lösa uppgiften. Eleven förklarar att hen använder informationen från exempel 3, (4 · 5), och sätter ihop det med exempel 2, (1 · 5). Läraren ritar inte upp vad eleven förklarat utan ritar upp två (2 · 5)-enheter och en halv enhet till en ny rektangel vilket visar att man även kan kombinera *fler än två enheter* med varandra. Läraren fokuserar på enheten (2 · 5) istället för det som eleven uttryckte (4 · 5) se figur 13. Ett annat sätt som diskuteras är att uppgiften kan lösas genom att fokusera på de fem rader och de fem kolumner som urskiljs av areamodellen.



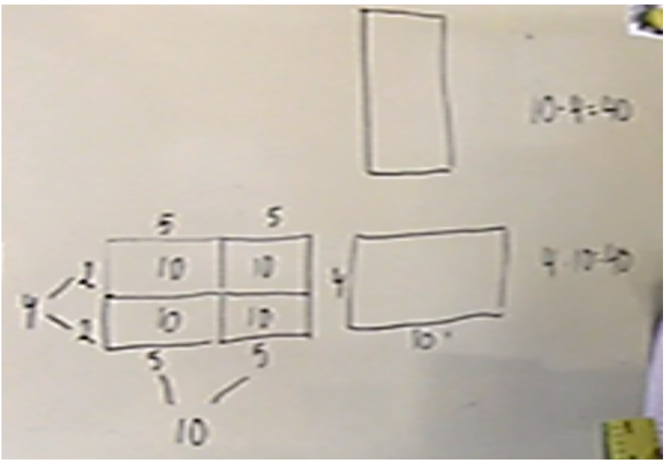

Figur 13. Första serien, exempel 4, (5 · 5).

Läraren har i nästa exempel, (2 ·10) (exempel 5 se figur 14), satt ihop två (2 · 5)-enheter horisontellt som hon visar upp för eleverna. I kontrast till exempel 1, (2 · 5), håller detta exempel första faktorn invariant men varierar den andra faktorn till dubbelt. Den DoV som öppnas upp är att eleverna kan urskilja att *helheten kan variera* på ännu ett sätt, det vill säga genom att två *likadana enheter kombineras* horisontellt ((2 · 5) + (2 · 5) = (2 · 10)). En elev beskriver multiplikationen att två tior sitter ihop, se figur 14. När läraren frågar hur många rader och hur många kolumner det är svarar eleven att det är två rader och tjugo kolumner. Tillsammans med två andra elever reder de till slut ut att det är tio kolumner. Exemplet (2 ·10) har även en relation till exemplet (4 · 5) där båda faktorerna varieras. Den första faktorn halveras och den andra dubbleras. I kontrast till att *produkten fördubblas* när man jämför exempel (2 ·10) med (2 · 5), öppnar jämförelsen mellan exemplet (2 ·10) och (4 · 5) en ny DoV som eleverna kan urskilja nämligen *ekvivalens*. Ekvivalensen bygger på den associativa lagen för multiplikation det vill säga att (2 · 2 · 5) = ((2 · 2) · 5)) = (2 · (2 · 5)). Läraren uppmärksammar att första faktorn i (4 · 5) har halverats i relation till (2 · 5) det vill säga ((2 · 2) · 5)) och att andra faktorn har dubblerats i (2 ·10) det vill säga (2 · (2 · 5)) i relation till (2 · 5). Ytterligare en aspekt som görs möjlig att erfara av tavelbilden är vad tio står för. Tio återfinns dels som antalet objekt (tryfflar) i (2 · 5)-enheten men även som antalet kolumner. Areamodellen på tavlan illustrerar båda aspekterna. En annan aspekt som görs möjlig att erfara mellan exempel 4 och exempel 5 är att de första fyra exemplen har ensiffriga faktorer mellan talområdet 1-5 men från exempel 5 övergår den andra faktorn till att vara 10.




Figur 14. Första serien, exempel 5, (2 · 10).

Sista exemplet i serien visar läraren snabbt upp bilden av (4 · 10) för eleverna. Detta exempel har precis som föregående exempel en relation till inledande exemplet (2 · 5). Båda faktorerna i exemplet (2 · 5) varieras till det dubbla det vill säga (4 ·10). Att båda faktorerna varieras öppnar upp för en ny DoV att *helheten kan kombineras både vertikalt och horisontellt samtidigt* vilket leder till att produkten blir fyra gånger så stor. En elev har urskiljt detta och hen beskriver det genom att säga att enheten (2 ·5) upprepar sig fyra gånger och får då svaret 40. Exemplet (4 ·10) har även en koppling till föregående exempel (2 ·10) där första faktorn varieras till dubbelt medan den andra hålls invariant. Denna koppling uppmärksammas av läraren. En annan elev urskiljer de fyra raderna och säger att hen vet att det är mer än en enhet horisontellt och löser uppgiften genom att multiplicera (4 ·10). Läraren gör en koppling till att raderna i exemplet (2 · 10) har fördubblats. En sista aspekt kommer fram när läraren frågar ifall det finns något annat sätt man kan lösa uppgiften på. En elev svarar (10 · 4). Läraren ritar upp areamodellen av multiplikationen på tavlan som öppnar upp en ny DoV, att *helheten roterar 90°* då faktorerna skiftar plats med varandra i areamodellen (se figur 15). Eleverna får möjlighet att urskilja en annan aspekt av multiplikationen, den kommutativa lagen (10 · 4) = (4 · 10). Det som eleverna också får möjlighet att urskilja är hur den kommutativa lagen kan representeras både horisontellt och vertikalt. Eleverna får möjlighet att urskilja faktorernas roll nämligen att när faktorerna är invarianta men byter plats med varandra förblir produkten invariant. Alltså har eleverna möjlighet att erfara aspekter av multiplikation såsom ekvivalens (oförändrade produkter och kongruens (areamodellen, rektanglarna är lika stora).



Figur 15. Första serien, exempel 6, (4 ·10).

I excerpt 1 nedan visas exempel på när *helheten kan kombineras både vertikalt och horisontellt samtidigt* vilket leder till att produkten blir fyra gånger så stor när fyra stycken (2 ·5)- enheter kombineras. Lärarens illustration på tavlan visar (se excerpt 1 rad 7) på att det är fyra stycken av enheten (2 · 5) som sitter ihop och markerar att raderna tillsammans blir fyra och kolumnerna 10. Eleverna får här möjlighet att urskilja en aspekt av multiplikation nämligen att om båda faktorerna dubbleras blir produkten fyra gånger så stor. Ingen koppling görs till vad som sker med produkten när båda faktorerna fördubblas.

Excerpt 1

Rad

1 L: Då såg du en $2 \cdot 5$ låda här. *(Visar och ritar på tavlan. Fortsätter så med övriga tre lådor.)* Hur många såg denna låda som E1?

2 E2: Jag såg att det var 4 rader och så visste jag att du hade mer än en låda.

3 L: Satte du ihop två lådor då?

4 E2: Nja

5 L: Såg du det direkt att det var $4 \cdot 10$? *(ritar på tavlan).*

6 E2: Ja, jag visste att det var tio för du har inte gjort på något annat sätt.

7 L: Vi får se här, det är ju faktiskt samma sätt. *(Ritar ut att 2+ 2 rader är 4 rader och 5+ 5 kolumner är 10 kolumner. Pekar på den vänstra bilden och säger)* $4 \cdot 10$ det är 40 och pekar sedan på den högra bilden och säger $4 \cdot 10$ det är 40. Är det någon som tänker på något annat sätt?

## Sammanfattning

Genom att första eller andra faktorn varieras eller hålls invariant med hälften eller dubbelt samt genom att eleverna får se bilder av multiplikationerna både konkret och på tavlan öppnas det upp DoV och eleverna får möjlighet att erfara flera aspekter av multiplikation. De DoV som öppnas upp i den första serien ger eleverna möjlighet att erfara:

- den kommutativa lagen för multiplikation när helheten roterar 90°
- ekvivalens utifrån den associativa lagen för multiplikation samt
- den distributiva lagen för addition (även när exemplet $(5 \cdot 5)$ implementeras).
- multiplikation som area (två dimensioner)

Den kommutativa lagen för multiplikation får eleverna urskilja i det sista exemplet när rektangeln ritas med 90° vridning $(4 \cdot 10) = (10 \cdot 4)$. Ekvivalensen blir synlig när exemplet $(2 \cdot 10))$ implementeras $(2 \cdot 2 \cdot 5) = ((2 \cdot 2) \cdot 5)) = (2 \cdot (2 \cdot 5))$ men även när den kommutativa lagen diskuteras. Den tredje aspekten som blir synlig i implementeringen av första serien är att två exempel kan kombineras vilket leder till att den distributiva lagen för addition används som i exemplet $(4 \cdot 5) = ((2 + 2\ ) \cdot 5) = (2 \cdot 5) + (2 \cdot 5)$. Bilderna som visas snabbt och areamodellerna (rektanglarna) som ritas upp på tavlan av läraren belyser ytterligare en aspekt inom multiplikation. Aspekten som eleverna får möjlighet att erfara då är att multiplikation kan illustreras som en areamodell med två dimensioner i form av en rektangel där det inte görs någon skillnad på multiplikator och multiplikand.

Resultatet visar att läraren även fokuserar på andra aspekter så som:

- multiplikationens två dimensioner (rader och kolumner),
- produkten 10 (med fokus på $(2 \cdot 5)$),
- hälften av raderna och produkten i exempel 2 $(1 \cdot 5)$
- delar kan kombineras som i
  - exempel $(4 \cdot 5)$ där *två* $(2 \cdot 5)$-enheter kombineras vertikalt samt
  - exempel $(5 \cdot 5)$ där *flera än två enheter* kan kombineras $(2 \cdot 5) + (2 \cdot 5) + (1 \cdot 5)$,
- samt den kommutativa lagen och dess ekvivalens och kongruens i sista exemplet,

men låter bli att fokusera på följande aspekter

- dubbelt av raderna och produkten i exempel 3 och 5
- ekvivalenta produkter mellan (4 · 5) och (2 · 10)
- produkten blir fyra gånger så stor (4 · 10) av inledande exemplets (2 · 5) produkt.

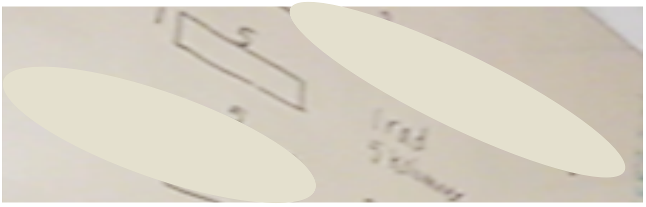
## Andra serien sammanlänkade uppgifter

Implementeringen av den andra serien sammanlänkade uppgifter följer liknande mönster som första serien sammanlänkade uppgifter. Läraren visar upp rektangulära bilder snabbt (där alla rutor syns) som representerar de multiplikationer som finns i serien. Några elever förklarar hur de kommer fram till svaret och läraren ritar på tavlan med hjälp av areamodellen. När ett nytt exempel förklaras och ritas suddas inte föregående exempel bort.

**DoV som öppnas upp när faktorerna varieras och/eller hålls invariant.**
Läraren inleder även denna lektion med att visa en bild (snabbt) på exemplet (2 · 5). Eleverna får möjlighet att rita det de ser. Läraren frågar hur många tryfflar eleverna tror att det får plats i lådan och ber eleverna att förklara hur de vet det. En elevs förklaring ritas upp på tavlan och läraren skriver på tavlan 2 rader och 5 kolumner samt multiplikationen 2 · 5 (se figur 16). Elevens förklaring i kombination med bilden som visats öppnar upp en DoV att multiplikation är en representation av en *area* – en rektangel på samma sätt som i första serien i exempel 1.

Figur 16. Andra serien, inledande exempel , (2 · 5).

Nästa bild läraren visar (snabbt) är på exempel (1 · 5) precis som i första serien sammanlänkade uppgifter. Elevens förklaring till exemplet öppnar upp en DoV att *helheten kan varieras* såsom *hälften av* helheten (2 · 5). När den första faktorn varieras till hälften och den andra faktorn hålls invariant får eleverna möjlighet att urskilja två aspekter av hälften precis som i föregående serie nämligen hälften av produkten och hälften av raderna (se fig 17). Läraren skriver även upp en rad och fem kolumner.

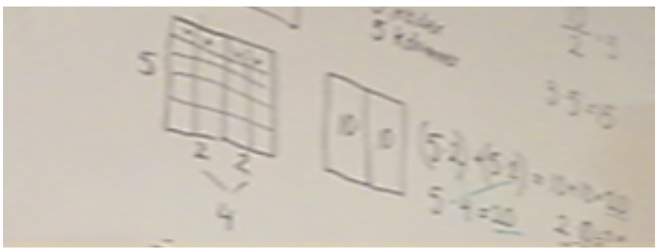


Figur 17. Andra serien, exempel 2, (1 · 5).

En bild på det tredje exemplet (3 · 5) visas (snabbt) för eleverna. I exemplet varieras den första faktorn genom att öka föregående exemplets första faktor med ett medan den andra faktorn hålls invariant. Detta leder till att DoV, att *kombinera olika delar vertikalt* öppnas upp (se figur 18) precis som i föregående serie. När exemplet förklaras av en elev ritar läraren bilden på tavlan. Eleven kombinerar de två föregående exemplen med varandra för att lösa det tredje exemplet. Den bakomliggande matematiska idé är den *distributiva lagen för addition* då (2 · 5) + (1 · 5) = (3 · 5). Precis som i föregående exempel noteras rader och kolumner på tavlan se figur 18.

Figur 18. Andra serien, exempel 3, (3 · 5).

Det fjärde exemplet introduceras på samma sätt genom att läraren visar en bild av multiplikationen (5 · 4) snabbt för eleverna där två (5 · 2)-enheter sitter ihop horisontellt. I exemplet varieras placeringen på faktorerna och talet fem är invariant. Fem står nu för antal rader i kontrast till tidigare exempel där fem stått för antalet kolumner. Två elever förklarar på två olika sätt (se figur 19). Den första eleven visar en bild för läraren att hen har adderat två stycken (5 · 2)-enheter horisontellt. Läraren påpekar att den första ”lådan” har 5 rader och 2 kolumner och att den andra ”lådan” också har fem rader och två kolumner. Den andra eleven fokuserar på (5 · 2)-enhetens produkt när exemplet förklaras, nämligen 10 + 10. Läraren sammanfattar vad eleverna uttrycker genom att skriva på tavlan (5 · 2) + (5 · 2) = 10 + 10 = 20. En tredje elev säger att hen såg det som (5 · 4) = 20 vilket också skrivs upp på tavlan. Läraren frågar ifall eleverna uppmärksammat något på tavlan. En fjärde elev svarar att alla representationerna på tavlan ger samma svar samt att alla representationer har ett samband med femmans multiplikationstabell. Läraren uppmärksammar att fyran i (5 · 4) fås genom att kombinera tvåorna i (5 · 2). Det som inte lyfts fram är varför femmorna inte adderas vilket några elever ifrågasätter när nästa exempel diskuteras. Variationen av faktorernas placering samt variationen av olika sätt att representera multiplikationen i bild och i skrift öppnar upp DoV som gör att eleverna ges möjligheten att urskilja *produkternas ekvivalens (*10 + 10 = 20, (5 · 2) + (5 · 2) = 20 och (5 · 4) = 20 och precis som i föregående serie kan två likadana enheter (5 · 2) *kombineras horisontellt* (se figur 19).



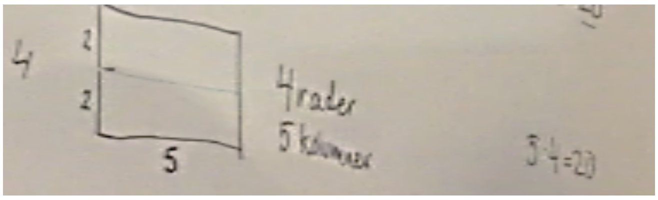
Figur 19. Andra serien, exempel 4, (5 · 4).

I excerpt 2 funderar elev 5 (rad 1) på relationen mellan (5 · 4) och (5 · 2) + (5 · 2). I resonemanget tidigare kom läraren och eleverna fram till sambandet mellan tvåorna och fyran i (5 · 2) + (5 · 2) och i (5 · 4). Excerpt 2 visar att det inte är självklart för eleverna vad som varierar och vad som förblir invariant. Elev 6 (rad 3) säger ”*Vadå, 10 · 4 är inte 20”.* Eleven verkar ha funderat på det som sades innan att (5 · 2) + (5 · 2) är lika med 20. Eleven förstår troligen inte varför raderna inte varierar till det dubbla. Denna fundering har troligen ett samband med att läraren gör kopplingen mellan uttrycket (5 · 2) + (5 · 2) och (5 · 4). Läraren går inte vidare med att förklara varför första faktorn, de fem raderna i detta fallet, är invariant medan kolumnerna varierar när hon i förra uppgiften försökte förklara relationen mellan (5 · 4) och (5 · 2) + (5 · 2). Läraren gör inte jämförelsen att det i de övriga exemplen var tvärtom det vill säga att femman tidigare var kolumner och då var det kolumnerna som var invariant. Detta leder till att elev 6 ställer frågan *"Vadå, 10 · 4 är inte 20"* (rad 3). Läraren använder areamodellen för att illustrera varför raderna är invariant och kolumnerna varierar men hon lyfter inte fram detta explicit det vill säga att raderna är invariant och det är därför femmorna inte varieras.

Excerpt 2

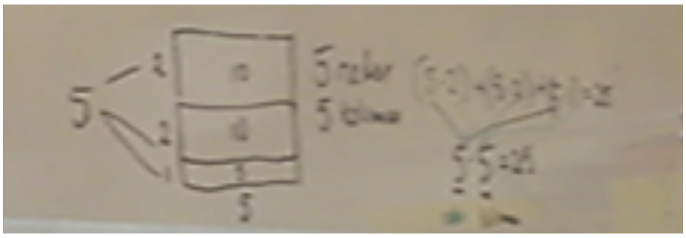
| Rad | |
|---|---|
| 1 E5: | Den där förra *(uppgiften 5 · 4)* borde man inte plussa ihop femmorna också? |
| 2 L1: | Hm... Vad är det jag egentligen gör här? Det är en intressant fråga E5 ställer. |
| 3 E6: | Vadå, 10 · 4 är inte 20. |
| 4 E5: | Nä men det borde det vara. |
| 5 L: | Fem, vad är fem någonting? Det är fem rader *(Läraren pekar på bilden och ritar så att de fem raderna blir synliga.)* De ska vara lika stora raderna, men det blev de inte här nu. |
| 6 E1: | Aha, nu fattar jag. |
| 7 L1: | För varje rad så har jag två *(Delar in lådan i två kolumner).* Vad är det jag har gjort här? *(pekar på (5 ·2) + (5 ·2))* Jo, jag har adderat den här tvåan *(kryssar i översta radens två kolumner)* och den här tvåan *(kryssar i den andra lådans övre två kolumner).* Det är en väldigt bra fråga som E5 har ställt som jag vill att ni är med på och funderar. |

Femte exemplet är (4 · 5) och läraren visar snabbt en bild för eleverna. I exemplet varieras båda faktorernas placering men talen är invarianta. En elev förklarar exemplet och läraren ritar areamodellen på tavlan och skriver fyra rader och fem kolumner (se figur 20). DoV som öppnas upp gör det möjlighet för eleverna att urskilja en aspekt av multiplikationen, den kommutativa lagen (5 · 4) = (4 · 5). Det som eleverna också får möjlighet att urskilja, precis som med implementeringen av den första serien sammanlänkade uppgifter, är hur den kommutativa lagen kan representeras horisontellt och vertikalt då areamodellen vrids 90°. Även i detta exempel får eleverna möjlighet att urskilja faktorernas betydelse, det vill säga att produkten förblir invariant - ekvivalent, när faktorerna byter plats med varandra. Läraren uppmärksammar att areamodellen har roterat 90° och att produkten är den samma oavsett hur man skriver eller ritar (5 · 4) = (4 · 5) (se figur 20).



Figur 20. Andra serien, exempel 5, (4 · 5).

Sista exemplet (5 · 5) visas också snabbt som en bild av läraren. I exemplet varieras första faktorn medan den andra faktorn är invariant i kontrast till föregående exempel (4 · 5). En elev förklarar att hen ser multiplikationen som tio, tio och en femma. Eleven adderar de två första exemplen med varandra och uttrycker produkterna av dessa multiplikationer när hen förklarar. Läraren ritar upp en areamodell men skriver även upp (2 · 5) + (2 · 5) + (1 · 5) = 25 och (5 · 5) = 25 på tavlan, se figur 21. Den DoV som öppnas av detta exempel är att *flera än två enheter kan adderas*. Den distributiva lagen för addition belyses på så sätt av både areamodellen och den algebraiska representationen. Läraren frågar vad femmorna i (5 · 5) står för och en elev svarar att den första femman är raderna och den andra femman är kolumnerna, vilket läraren markerar genom att dra streck mellan de olika uttrycken på tavlan. Inte heller i detta exempel fokuserar läraren på att en av femmorna är invariant (kolumnerna) utan nöjer sig med elevens förklaring. Varken läraren eller eleverna uppmärksammar att exemplet även skulle kunna lösas genom att hålla raderna invarianta och variera kolumnerna.



Figur 21. Andra serien, exempel 6, (5 · 5).

**Sammanfattning**

Denna serie sammanlänkade uppgifter startar också med exemplet 2 · 5. Första faktorn i alla exempel varieras systematiskt och i exempel 4 och 5 varieras även den andra faktorn. Det finns en variation vad gäller placeringen av talet fem. Talet fem hålls invariant i andra faktorn i alla exempel utom i exempel 4 där talet fem istället återfinns i första faktorn. Eleverna får även i denna serie se bilder av multiplikationerna både konkret och på tavlan. De DoV som öppnas upp i den andra serien ger eleverna möjlighet att erfara:

- multiplikation som area (med två dimensioner)
- den distributiva lagen för addition och då med fokus på att man kan addera rader (kombinerar enheter horisontellt) eller kolumner (kombinerar enheter vertikalt) i exempel 3 – exempel 6
- den kommutativa lagen för multiplikation, ekvivalens (exempel 4 - exempel 5)

Multiplikation som area får eleverna möjlighet att erfara när bilden av multiplikationerna visas av läraren, när läraren ritar areamodellen på tavlan och när läraren nämner och skriver antal rader och kolumner på tavlan. Exempel 1, (2 · 5), och exempel 2, (1 · 5), verkar inte vara slumpmässigt valda utan de varierar på ett sätt som genererar att eleverna kan använda informationen från dessa exempel för att lösa exempel tre. Eleverna får möjlighet att urskilja att (2 · 5) och (1 · 5) kan kombineras för att få (3 · 5).

Resultatet visar att läraren fokuserar på ytterligare aspekter som kommer fram, såsom:

- multiplikation som area med två dimensioner (rader och kolumner),
- två enheter som kan adderas vertikalt eller horisontelt som i exempel (4 · 5) där två (2 · 5)-enheter adderas vertikalt och exempel (5 · 4) där samma enheter adderas horisontellt
- samt den kommutativa lagen och dess ekvivalens och kongruens,

men låter bli att ta upp dessa aspekter

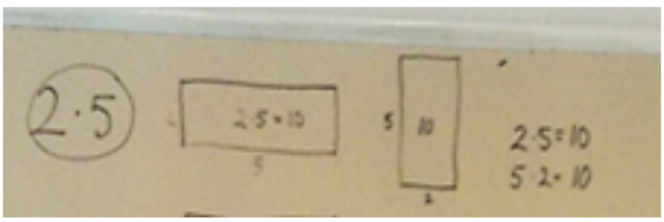
- hälften av raderna och produkten i exempel 2 (1 · 5)
- att sista exemplet (5 · 5) har fler aspekter dels att adderar horisontellt flera enheter (5 · 2) + (5 · 2) + (5 · 1) och dels att exemplet har ekvivalenta produkter (2 · 5) + (2 · 5) + (1 · 5) = (5 · 2) + (5 · 2) + (5 · 1).

## Tredje serien sammanlänkade uppgifter

När den tredje serien sammanlänkade uppgifter implementeras skriver läraren upp multiplikationen på tavlan till skillnad från tidigare då hon snabbt visat bilder på multiplikationsexempel. Läraren uppmanar eleverna att ”se” och förklara multiplikationen som en ”låda”– en rektangel. Precis som i de två föregående lektionssekvenserna är det några av eleverna som förklarar hur de kommer fram till svaret och läraren ritar på tavlan med hjälp av areamodellen. Föregående exempel suddas inte bort när ett nytt exempel ritas upp och/eller skrivs på tavlan.

**DoV som öppnas upp när faktorer varieras och/eller hålls invariant.**

Läraren inleder med exemplet (2 · 5) precis som i de två föregående lektionssekvenserna. Skillnaden i denna lektionssekvens är att läraren inte visar någon bild utan hon skriver upp (2 · 5) på tavlan. Två elever förklarar att de ser multiplikationen (2 · 5) som rader och kolumner och läraren ritar upp areamodellen på tavlan (vänstra bilden på tavlan). Läraren undrar ifall någon har ritat på ett annat sätt. En tredje elev förklarar att hen ser samma låda fast stående som högra bilden i figur 22 visar. Elevernas sätt att se på multiplikationen varierar vilket gör att en DoV öppnas upp, att multiplikationen (2 · 5) samtidigt kan ses som en (2 · 5)-låda som har roterat 90° till (5 · 2) (som i serie 1 exempel 6 där det också roterar 90°), det vill säga att rad och kolumn har skiftat plats (figur 22).



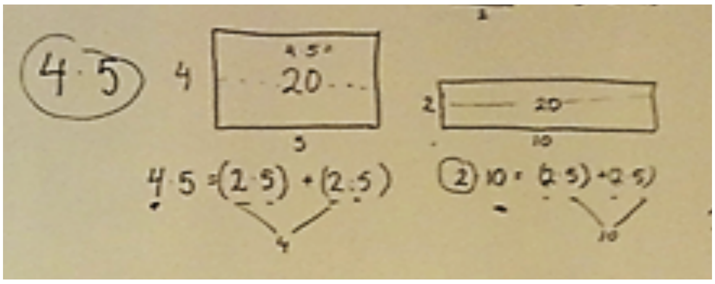

Figur 22. Tredje serien, inledande exempel 1, (2 · 5).

Läraren undrar hur multiplikationen till den roterade lådan ska skrivas. Elev 3 (se excerpt 3) säger att multiplikationen som motsvarar lådan han beskrivit är $(2 \cdot 5) = 10$. När läraren frågar ifall klassen håller med elev 3 kan vi se att eleverna är osäkra (rad 8-9). Elev 6 förklarar (rad 11) att multiplikationen till den roterade lådan bör vara $(5 \cdot 2)$ istället. Läraren fokuserar på rader och kolumner (rad 12) och påpekar att produkterna i de två lådorna $(2 \cdot 5)$ och $(5 \cdot 2)$ är ekvivalenta. Hon påpekar också att multiplikationen skrivs på olika sätt när lådan roterar 90° genom att skriva på tavlan $(2 \cdot 5) = 10$ och $(5 \cdot 2) = 10$.

Excerpt 3

1 L: Är det någon som har ritat en låda på ett annat sätt? *(lång paus)* Ja! Du har ritat en låda på ett annat sätt X.
2 E3: Hm... A, det har jag.
3 L: Hur har du ritat?
4 E3: Samma låda fast stående.
5 L: Du har ritat den så här? (*Ritar på tavlan).* Hur har du skrivit då 2 · 5? Eller hur har du skrivit?
6 E3: 2 · 5 är lika med 10.
7 L: *(Skriver upp detta på tavlan)* Håller ni med?
Hm...
8 E4: Nä...
9 E5: Några säger ja och andra säger nej. Vad säger du E6?
10 L: *(Vill gå upp och visa något annat).* Vi är kvar på min fråga Håller ni med?
Nej, för då blir det 5 · 2.
11 E6: Jaha, för du ser att vi tar raderna först *(skriver 5 bredvid raderna)* och
12 L: kolumnerna sen *(skriver 2 under raderna)?* 5 · 2 *(skriver upp multiplikationen på tavlan).* Håller ni med E? Lådan är värd 10 precis som den första men jag har bara vridit den och i och med att vi skriver rader och kolumner så skrivs multiplikationen på olika sätt.

Det andra exemplet läraren skriver upp på tavlan är $(4 \cdot 5)$. Det som varierar från förra exemplet är att första faktorn dubbleras medan den andra faktorn hålls invariant. Den DoV som öppnas när den första faktorn varieras till det dubbla är att *kombinera två stycken (2 · 5) enheter* precis som i serie 1 och serie 2. En elev kombinerar två stycken $(2 \cdot 5)$ vertikalt så att det stämmer med multiplikationen $(4 \cdot 5)$ men precis som i föregående exempel finns det en elev som istället kombinerar två $(2 \cdot 5)$ horisontellt. Troligtvis vet eleven att två $(2 \cdot 5)$ är tjugo precis som $(4 \cdot 5)$ men reflekterar inte eller vet inte hur lådorna bör placeras så att areamodellen motsvarar multiplikationen. Variationen i hur de två eleverna ser och presenterar multiplikationen gör det möjligt att urskilja relationen hälften-dubbelt i $(4 \cdot 5)$ och $(2 \cdot 10)$ det vill säga att produkten förblir invariant ifall jag utgår från $(4 \cdot 5)$ och halverar första faktorn men dubblerar andra faktorn. Då aspekten att även kombinera horisontellt kommer fram ges det även möjlighet att urskilja ekvivalensen mellan de olika lådorna utifrån den den *associativa lagen* $2 \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 2) \cdot 5$. Läraren gör en koppling mellan elevernas olika sätt att förklara exemplet genom att skriva upp två matematiska uttryck $(4 \cdot 5 = (2 \cdot 5) + (2 \cdot 5)$ samt $2 \cdot 10 = (2 \cdot 5) + (2 \cdot 5)$ (se figur 23) och diskuterar vilka faktorer som varierar och vilka som förblir invarianta.



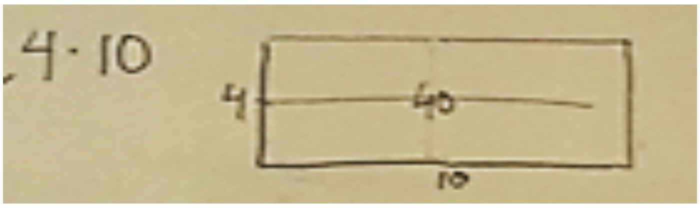

Figur 23. Tredje serien, exempel 2, (4 · 5).

Läraren gör ett försök att jämföra vad som varieras och vad som hålls invariant när eleverna kombinerar (2 · 5) på två olika sätt. Hon undrar hur två stycken (2 · 5) kan vara (4 · 5) = (2 · 5) + (2 · 5) men även att två stycken (2 · 5) kan vara (2 · 10) = (2 · 5) + (2 · 5) och frågar vad som har ”adderats” (rad 3), ”/…/vad har jag behållt och vad har jag adderat?” (rad 5). Båda eleverna och läraren är noga med att tala om vad som varieras,”adderas” och vad som hålls invariant. I (4 · 5) varieras raderna (tvåorna) i (2 · 5) + (2 · 5) och kolumnerna hålls invarianta medan i (2 · 10) varieras kolumnerna (femmorna) i (2 · 5) + (2 · 5) och raderna hålls invarianta. Detta leder till att den associativa lagens diskuteras 2 · (2 · 5) = (2 · 2) · 5. Det som inte tas upp av varken eleverna eller läraren är hälften-bubbeltaspekten.

Excerpt 4

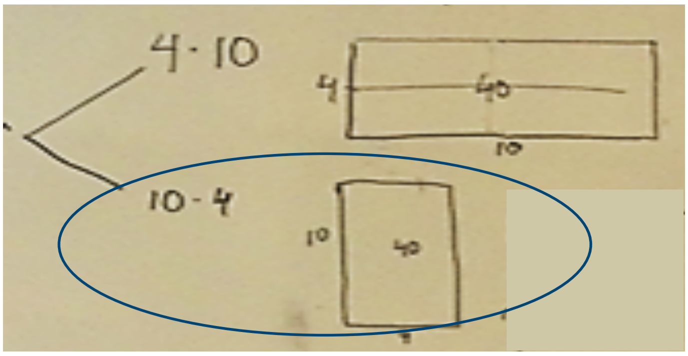
| Rad | |
|---|---|
| 1 L: | Mm... Men om jag tittar på siffrorna här *(pekar på faktorerna)* hur kan jag få 4 · 5 här och 2 · 10 här genom att titta på och använda mig av siffrorna som representerar lådorna ((2 · 5) + (2 · 5))? Vad är det jag adderar och får 4 *(pekar på multiplikationen 4 · 5)* och vad är det jag adderar för att få det till 10 här *(pekar på 2 · 10)* ser ni? Hur får vi 4 här och 10 här? Vi känner igen den här 2:an från någonstans *(ringar in tvåan).* Du (E4) sa innan vad 2:an var för någonting. |
| 2 E4: | Raderna |
| 3 L | 2 rader. Vad är det då jag har adderat? *(pekar på 2 · 10)* |
| 4 E4: | Kolumnerna. |
| 5 L: | Ja, jag har adderat dom här *(drar streck från 5:orna och skriver 10).* Ser ni? Raderna är kvar men jag har adderat dom. Vad har hänt här då? *(Pekar på den vänstra bilden).* Vad har jag behållit och vad har jag adderat? |
| 6 E5: | Du har adderat raderna och behållit kolumnerna. |
| 7 L: | Ja, jag har adderat raderna två plus två och behållit kolumnerna. *(Visar och drar streck från tvåorna och skriver fyra)* och femman är kvar det är den vi känner igen. Mmm... Vi går vidare. |

Det tredje exemplet läraren skriver upp på tavlan är (4 · 10). Exemplet håller den första faktorn invariant och varierar den andra genom att dubblera den. Exemplet öppnar upp DoV att *multiplicera med 10* men eleven som svarar 40 förklarar att hen har ritat fyra rader och två femmor (kolumner). Läraren skriver ut 40 och markerar där lådorna skulle ha varit då eleven i sin bild gjort samma markering (se figur 24). Läraren uppmärksammar hur övriga elever ritat och ser att några har ritat ut alla rader och kolumner och diskuterar ifall det behövs.



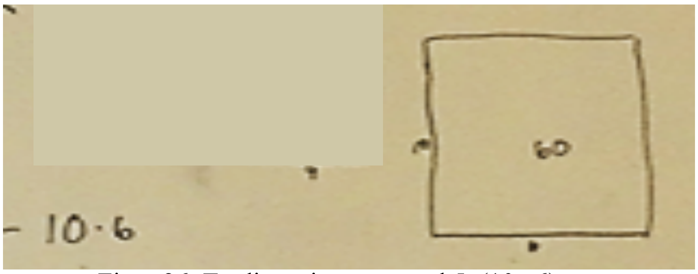

Figur 24. Tredje serien, exempel 3, (4 · 10).

I exempel 4, (10 · 4), hålls talen invarianta men byter plats med varandra vilket leder till att båda faktorerna varierar i relation till föregående exempel. Variationen öppnar upp DoV att *helheten roterar 90°* då faktorerna skiftar plats. En elev förklarar att det ska vara 10 rader och 4 kolumner och en annan elev säger att det är samma men att hen ändrar på ”ställningen” (se figur 25). Eleverna får möjlighet att erfara den kommutativa lagen (4 · 10) = (10 · 4) att rad och kolumn skiftar plats men att produkten förblir den samma, ekvivalent. I detta exempel är det ingen elev som förklarar genom att kombinera fyra (5 · 2)-lådor.




Figur 25. Tredje serien, exempel 4 (10 · 4).

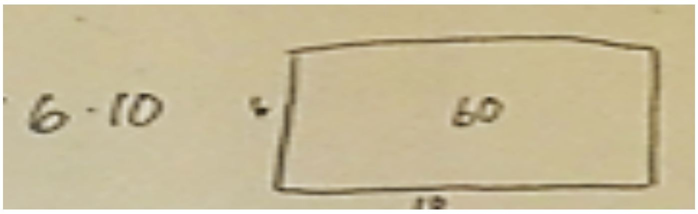
Nästa exempel, (10 · 6), påminner om exempel (10 · 4). Det som har varierats här är att den andra faktorn har ökat med två. De DoV som öppnas upp här är samma som i de två föregående exemplen multiplikationens två dimensioner med rader och kolumner samt multiplikation med 10. Eleven som förklarat detta exempel använder sig enbart av rader och kolumner utan att göra någon koppling till enheten (2 · 5). Ingen annan elev förklarar på något annat sätt (se figur 26).




Figur 26. Tredje serien, exempel 5, (10 · 6).

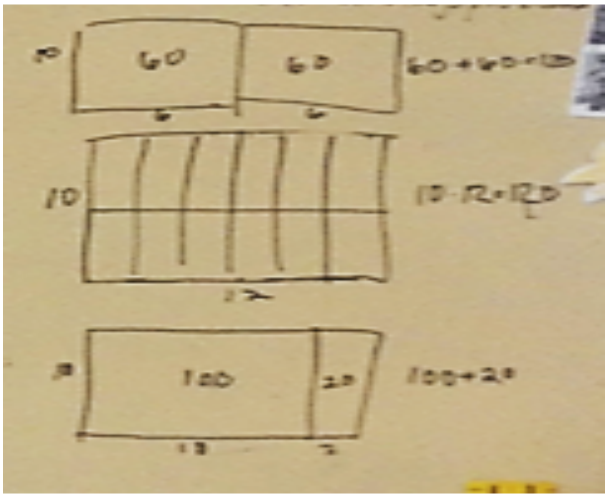
I exempel 6, (6 · 10), hålls talen invarianta men byter plats med varandra precis som mellan exempel 3 och 4. Detta innebär att båda faktorerna varierar i relation till föregående exempel. Variationen öppnar samma DoV som tidigare att *helheten roterar 90°* då faktorerna skiftar plats med varandra men även aspekten att *multiplicera med 10*. En elev förklarar att hen använder exemplet (10 · 6) och roterar pappret 90° vilket belyser den kommutativa lagen (10 ·

6) = (6 · 10). Läraren låter eleverna fundera på relationen mellan (4 · 10) och (10 · 4) samt (10 · 6) och (6 · 10). En elev ser att produkten förblir det samma (ekvivalenta produkter) i respektive par och att lådorna är parvis likadana (kongruenta areor).




Figur 27. Tredje serien, exempel 6, (6 · 10).

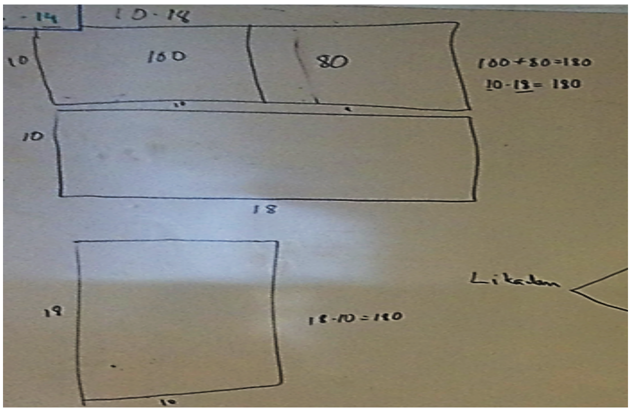
När exempel 7 och 8 implementeras har ipaden slutat filma. Då läraren upptäcker detta ber hon de två elever som förklarat exempel 7, (10 · 12), att återberätta vad som sades tidigare. Båda faktorerna i exemplet varieras men tian hålls invariant. Den andra faktorn som är tolv har varierats genom att talet sex från föregående exempel har dubblerats. För första gången multipliceras nu två tvåsiffriga faktorer med varandra. Flera DoV öppnas upp när (10 · 12) presenteras. En DoV är att *två (10 · 6) kan kombineras horisontellt* då (10 · 6) är hälften av (10 · 12). En annan DoV som öppnas upp är upprepning det vill säga att *upprepa (2 · 5) tolv gånger* och då ligger fokus på *multiplikation med 10*. En tredje DoV som öppnas upp är att *helheten (andra faktorn) kan delas upp i (10 · 12)* kan delas upp i (10 + 2) vilket ger oss en *ny* behändig *enhet (10 · 10)* och (10 · 2). Dessa kan i sin tur adderas horisontellt. Exemplet (10 · 12) förklaras på de tre sätten (se figur 28). Läraren visar att exemplet kan lösas genom att tänka dubbelt av (10 · 6), en elev förklarar att hen tänkt 10, 20, 30 …120 med enheten (2 · 5). Slutligen förklaras exempel 7 av den andra eleven genom att utgå från (10 · 10) och sedan addera (10 · 2). Den distributiva lagen för addition har synliggjorts genom två olika additiva uppdelningar av faktorerna (10 · (6 + 6)) samt (10 · (10 + 2)). Då denna sekvens är återberättad förloras den diskussion som läraren eventuellt hade med eleverna och vi vet inte vad läraren fokuserade på när de olika sätten presenterades.




Figur 28. Tredje serien, exempel 7, (10 · 12).

Det åttonde och sista sista exemplet i serien är (10 · 18). Även detta exempel återberättas och filmas igen då ipaden slutat filma tidigare. Exemplet håller första faktorn invariant (talet 10) och varierar den andra faktorn genom att sätta ihop talet tolv från föregående exempel (10 ·

12) med talet sex från exempel 5 (10 · 6) till (10 · 18). Den DoV som öppnas upp är att *helheten* (*andra faktorn) kan delas upp* i (10 + 8). Precis som i föregående exempel är det möjligt att utgå från en (10 · 10)-låda. Av tavelbilden (fig 29 nedan) kan vi se att den sista eleven som förklarar exemplet (10 · 18) troligtvis inte har förstått vilken faktor som är rader och vilken som är kolumner då raderna och kolumnerna skiftar plats med varandra. Produkternas ekvivalens och areornas kongruens blir möjliga att urskilja av areamodellerna.



Figur 29. Tredje serien, exempel 8, (10 · 18).

**Sammanfattning**

Den tredje serien sammanlänkade uppgifter startar även den med exemplet (2 · 5). Till skillnad från serie 1 och 2 visas inga bilder utan multiplikationen skrivs upp på tavlan. Eleverna uppmanas att förklara med en areamodell. Variation i sättet att presentera exemplen på leder till att vissa elever beskriver en areamodell som roterar 90° så att rad och kolumn skiftar plats. Variationen i exemplen (4 · 10) och (10 · 4) samt (10 · 6) och (6 · 10) fokuserar just på att skifta plats mellan faktorerna men behålla talen invarianta. Ytterligare en variation som sker är att ena faktorn är tio och därmed har en tvåsiffrig faktor introducerats. De två sista exemplen, (10 · 12) och (10 · 18), varierar genom att båda faktorerna är tvåsiffriga och de håller sig mellan talområdet 10-20. Talet tio är invariant i alla exempel i serien utom de två första ((2 · 5) och (4 · 5)). De DoV som öppnas upp i den tredje serien ger eleverna möjlighet att erfara:

- multiplikation som area (två dimensioner)
- den associativa lagen och ekvivalens (exempel 2)
- den distributiva lagen för addition och då med fokus på att man kan variera genom att dubblera rader eller kolumner (exempel 2 – exempel 6)
- den kommutativa lagen för multiplikation, ekvivalenta produkter och kongruenta areor (exempel 1, exempel 3 – exempel 8)
- multiplikation med 10 (exempel 3 – exempel 8)
- ny enhet 10 · 10

Eleverna får i denna serie skapa inre bilder av den multiplikation som läraren skriver upp på tavlan. Detta innebär att eleverna nu endast ser multiplikation som area när läraren ritar upp den areamodell de beskriver. Även i denna serie är exemplen noga utvalda. Exemplen (2 · 5) och (4 · 5) är exempel som eleverna har stött på tidigare men i denna serie ska eleverna rita en areamodell själva utifrån den erfarenhet de haft från serie 1 och serie 2. Resultatet visar att det inte är självklart hur areamodellen ska ritas. Osäkerheten vad gäller rad och kolumn hos de elever som förklarat exemplen har gett upphov till att den kommutativa lagen diskuteras i exempel 1 och exempel 8. Exemplen (4 · 10) och (10 · 4) samt (10 · 6) och (6 · 10) ger upphov till en generalisering av den kommutativa lagen och multiplikation med 10. När exemplen (10 · 12) och (10 · 18) diskuteras dyker en ny enhet upp (10 · 10). Elevernas förklaringar på dessa exempel spelades in i efterhand då ipaden slutat filma efter exempel sex. Detta gör att läraren endast filmat vad eleverna svarat vilket innebär att den diskussion som eventuellt skedde när läraren introducerade exemplen första gången inte har fångats upp. Därför är det svårt att uttrycka sig om vad läraren och/eller eleverna uppmärksammade då exemplen diskuterades. Resultatet visar att läraren uppmärksammar och lyfter fram rader, kolumner, ekvivalenta produkter samt kongruenta areor när (4 · 10) och (10 · 4) samt (10 · 6) och (6 · 10) implementeras. Hon uppmärksammar även exempel 2 (4 · 5) när två elever placerar (2 · 5)-lådorna på olika sätt vertikalt och horisontellt.

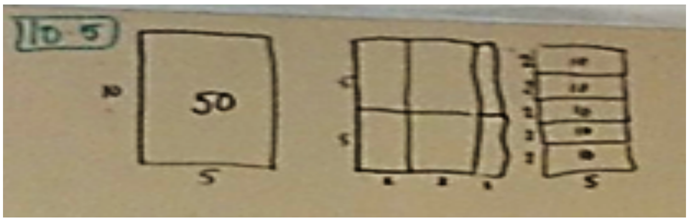
Läraren har inte visat rektangulära bilder av multiplikationen utan eleverna har fått föreställa sig areor av den multiplikation som läraren skrivit på tavlan. Areamodellen verkar ha uppmuntrat eleverna att gå från att vara *modell-av* tänkande till *modell-för* tänkande för eleverna.

## Fjärde serien sammanlänkade uppgifter

Implementeringen av den fjärde serien sammanlänkade uppgifter följer liknande mönster som när den tredje serien sammanlänkade uppgifter implementerades. Läraren skriver upp multiplikationen på tavlan och uppmuntrar eleverna att försöka ”se” och förklara multiplikationen som en ”låda” – en area. Implementeringen skiljer sig från tidigare undervisningssekvenser. Första skillnaden är att läraren inleder lektionen med att uppmuntra eleverna att tänka i *större* areor och låta bli att rita ut alla rader och kolumner. Då studien inte fokuserar på vad eleverna bokför kan vi inte se hur eleverna ritar areamodellerna i sina papper. För det andra skiljer sig denna implementering från föregående vad gäller det inledande exemplet. I den fjärde serien är det inledande exemplet (10 · 5) istället för (2 · 5) Inga exempel suddas ut från tavlan utan eleverna har möjlighet att se alla exempel under hela lektionen.

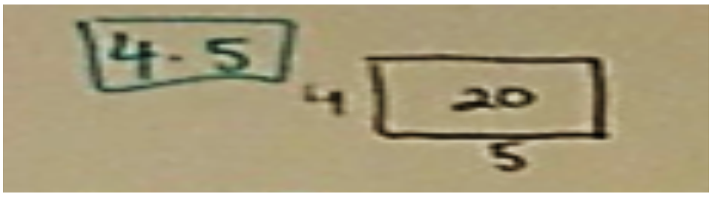
**DoV som öppnas upp när faktorerna varieras och/eller hålls invariant.**

Läraren inleder med exemplet (10 · 5) vilket skiljer sig från första exemplet ur tidigare serier. Exemplet som läraren inleder med utgår från talet tio som var centralt i föregående serie. Talet tio hålls invariant. En DoV som öppnas upp i sekvensen i förhållande till förra undervisningssekvensen är *multiplikation som area – en rektangel* och *multiplikation med 10* i 10 · 5 = 50. Vi ser (se figur 30) att en elev förklarar genom att frångå att rita ut rader och kolumner och fokuserar istället på multiplikationen (10 · 5). En annan DoV är hur *helheten kan kombineras.* Eleven (högra areamodellen) har fokuserat på enheten (2 · 5) = 10 på ett systematiskt sätt medan den andra eleven (mellersta areamodellen) inte kombinerat (2 · 5) på ett systematiskt sätt. De två sista eleverna visar inte just i detta exempel att de kan använda en större modell för att representera (10 · 5) utan är kvar i enheten (2 · 5). Den första eleven visar att hen har gått från *modell-av* till *modell-för.*



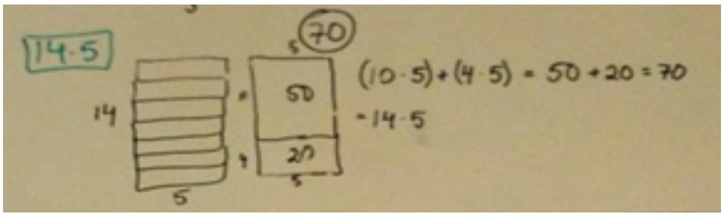

Figur 30. Fjärde serien, inledande exempel 1, (10 · 5).

Det andra exemplet läraren skriver upp på tavlan är (4 · 5). Exemplet håller den andra faktorn invariant och varierar den första faktorn till fyra. Den DoV som öppnas upp när den första faktorn varieras är *multiplikationen som area* (se figur 31).




Figur 31. Fjärde serien, exempel 2, (4 · 5).

Exemplet därefter är (14 · 5). Den andra faktorn hålls invariant igen och det är den första faktorn som varieras genom att öka med 10 det vill säga (4 + 10 ) = 14. Då första faktorn varierar öppnar det upp en DoV och en *kombination av olika enheter (exempel 1 och exempel 2)* är möjlig för eleverna att urskilja. Läraren vill att eleverna ska se sambandet mellan de två föregående exemplen (10 · 5) och (4· 5) och (14 · 5) (se excerpt 6, rad 1). Läraren frågar ifall eleverna kan använda informationen på tavlan (10 · 5) och (4· 5) för att lösa (14 · 5). Den första eleven har sett sambandet mellan exemplen (14 · 5) och (10 · 5), (4· 5) men har svårt att rita en modell som överensstämmer med hur hen tänker. Eleven har ritat areamodellen utifrån sju stycken (2 · 5) enheter (excerpt 6, rad 2 – 3 samt figur 32 vänstra tavelbilden) men förklarar genom att addera exempel 1 och exempel 2 vertikalt (excerpt 6, rad 6 och 8 samt se figur 32 högra tavelbilden). Elev 1 visar att hen kan se sambandet mellan exemplen men att hen har svårt att rita areamodellen som motsvarar hens resonemang. När den andra eleven förklarar skriver läraren upp förklaringen som ett matematiskt uttryck (10 · 5) + (4 · 5) = 50 + 20 = 70 (se figur 32 samt excerpt 6, rad 10). Läraren avslutar exemplet med att påpeka att 14 kan delas upp så att vi får (10 + 4) vilket underlättar uträkningen när vi multiplicerar med 10. Excerpt 6 visar att eleverna har fått möjlighet att erfara den distributiva lagen för addition genom areamodellen och det matematiska uttrycket. Då läraren lyfter fram att 14 kan delas upp i (10 + 4) belyses den distributiva lagen för addition explicit.




Figur 32. Fjärde serien, exempel 3, (14· 5).

Excerpt 6

Rad

1 L: Så, då ska vi se 14 · 5. Hur kan vi rita det? Och skulle vi kunna använda den här informationen *(pekar på föregående uppgifter som är 10· 5 och 4· 5).*

2 E1: Jag ritade den så här. *(visar sitt papper för läraren).*

3 L: Du har ritat så här... få se *här (ritar på tavlan)* du har ritat *(ritar 7 stycken 2 · 5).* Det är 14· 5. Stämmer det? Är det så ni andra har ritat eller har ni ritat på ett annat sätt? Och på vilket sätt har du använt den här informationen*?(Pekar på de två första exemplen).*

4 E1: Det är inte på det sätt som jag ritat utan på det sätt som jag tänkt.

5 L: Och hur tänkte du?

6 E1: Först tänkte jag 10 · 5 det e 50.

7 L: Vänta jag ritar här. 2, 4, 6, 8, 10··· 10 · 5 och det är 50 *(Ritar på tavlan bredvid den föregående bilden)*

8 E1: Aaa. Å då tänkte jag så här att då är ju tio plus fyra 14 och då tänkte jag att (4 · 5) e 20 då borde det bli 50 plus 20 och det blir 70.

9 L: *(Ritar på tavlan).* Då har du använt när du har tänkt ··· det här är hur du har tänkt och pekar på den senaste bilden. Det här är inte hur du hur tänk så din bild borde se ut så här (pekar på den senaste bilden på tavlan). Du vet att 10 · 5 och det är 50 och att 4 · 5 e 20 och det (tillsammans) är den nya lådan och då sätter du ihop det här som då är 70. Den nya lådan är 70. Hur många har tänkt som E2 och använt informationen som finns här *(pekar på exempel 1 (10· 5) och exempel 2 (4 · 5) )?*

10 E2: Jag orkade inte klura ut vad svaret blev så därför tog jag 10 · 5 plus 4 · 5 alltså 50 plus 20.

11 L: Vänta 10 · 5

12 E2: Hm..

13 L: Hur tänkte du sen?

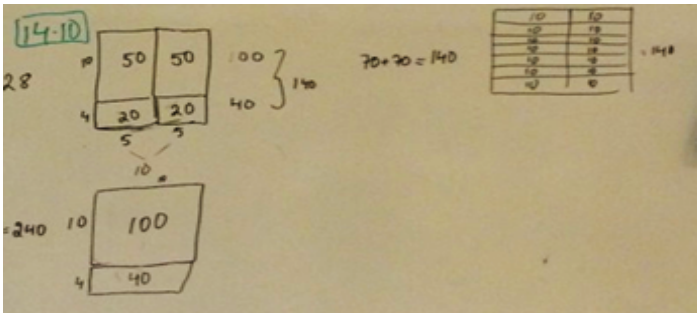
14 E2: Plus 4 · 5 och så räknade jag ihop båda dom

15 L: Jag gör så här *(Sätter klammer runt multiplikationerna för att markera uppdelningen)*

16 E2: Då blir det 50 plus 20 och det är 70 och så tog jag 14 · 5 och det är 70.

17 L: Då vet du att det är samma som 14 · 5. Här får vi ett tydligt exempel på hur man kan skriva på det matematiska språket hur bilden är ritad och hur E1 *(högra bilden)* har förklarat. Och hur 14 kan delas upp så att det blir enkelt att räkna ut. För de flesta kan vad 10 gånger någonting är.

Det fjärde exemplet, (14 · 10) varierar den andra faktorn genom att den dubbleras, den första faktorn hålls invariant. Detta öppnar upp DoV att *helheten (faktorerna)* i exemplet kan *delas upp på olika sätt* som leder till att areamodellerna kombineras antingen *vertikalt eller horisontellt*. Läraren påpekar att eleverna kan använda sig av den information som finns på tavlan. En elev undrar ifall de kan tänka på ett annat sätt, och det får de. Elev 4 i excerpt 7 ser att hen kan använda informationen från exempel (14 · 5). Hen ser också att raderna är invarianta och att kolumnerna har dubblerats och säger ” Det är jätteenkelt för 5 plus 5 är ju 10 så då sätter du dom så och så” (rad 1). Elev 3 bekräftar detta genom att säga att det är två (14 · 5)-lådor som ska sitta ihop (rad 3 och rad 5). Läraren ritar ut hur (14 · 5) är sammansatt av (10 · 5) och (4 · 5) (rad 2 och rad 4). Elevens sätt att förklara visar på att (10 · 5) och (4 · 5) kan adderas horisontellt. Läraren uppmärksammar att flera elever ritat som på högra bilden och jämför den med den vänstra bilden. Hon påpekar för eleverna att (10 · 5) faktiskt återfinns i den högra bilden och resonerar att eleverna inte behöver skriva ut alla (2 · 5). Hon undrar ifall eleverna kan komma på ytterligare ett sätt att rita upp multiplikationen (14 · 10) på. Elev 4 kommer på att man kan lösa exemplet genom att addera (10 · 10) och (4 · 10) vilket visar att delarna kan adderas vertikalt (se figur 33 nedre bilden).




Figur 33. Fjärde serien, exempel 4, (14 · 10).

Excerpt 7

Rad

1 E4: Det är jätteenkelt för 5 plus 5 är ju *10 så då sätter du dom så och så. (Kameran fångar inte in hens gester.)*

2 L: L: Då ska vi se … då menar du att vi tar en 10 · 5 låda här ...

3 E3: En 14 · 5.

4 L: ... ja och en 4 · 5 låda som sitter ihop där. Så det är en 14 · 5 låda. Vi tar en sådan låda *(pekar på föregående bild)*.

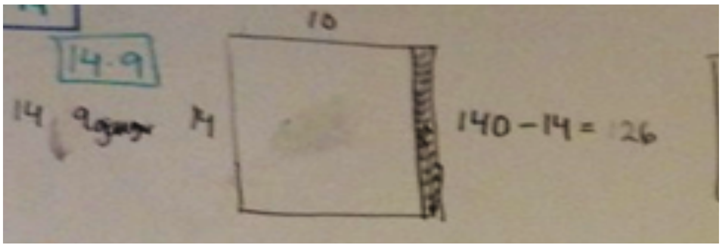
5 E3: A, fast nu lägger du till en till samma fast på sidan.

6 L: *(Ritar på tavlan).*

7 E3: Först trodde jag att det skulle bli 14 · 14, fast det blir det inte.

8 L: Nu vill jag att ni tittar här för att se vad E3 har sagt. E3 så att här uppe *(visar på tavlan)* så använde vi en 14 · 5 låda.14 åt det här hållet *(raderna)* och fem åt det här hållet (kolumnerna Och så tittade hen här ja men 14 den ska vara kvar *(raderna)* men här nere ska vi dubblera det ska inte vara fem *(rader)* utan 10 *(kolumner)* nu. Så det E3 gjorde var att hen tog den här 14 · lådan och la den jämte. Så vad får jag för svar E3?

Exempel 5, (14 · 9) håller första faktorn invariant och varierar den andra faktorn genom att minska andra faktorn med 1 i jämförelse med föregående exempel där andra faktorn var 10. Exemplet öppnar upp en helt ny DoV som inte kommit upp i tidigare serier sammanlänkade uppgifter. Den DoV som öppnas upp när exemplet implementeras är att den andra faktorn är väldigt nära tio viket kan utnyttjas genom att först addera ett för att istället räkna ut (14 · 10) för att sedan *ta bort en del* det vill säga (14 · (10 - 1)) = (14 · 10) - (14 · 1). En elev utgår från (14 · 10) för att lösa exemplet (14 · 9). Eleven förklarar (rad 5) att hen tänker (14 · 10) – (14 · 1) = 140 – 14 = 126. Elev 3 (i excerpt 8) kan förklara, precis som elev 1 (i excerpt 6), hur hen har tänkt men har svårare att visa hur hens tankar ska appliceras i areamodellen. Läraren (rad 6) visar hur elevens förklaring kan illustreras i areamodellen. Areamodellen gör det möjligt för eleverna att urskilja att exemplet kan utgå från kännedom om nollans betydelse i (14 · 10) för att sedan subtrahera den del som man räknar för mycket, det vill säga 14 · (10 – 1) = (14 · 10) – (14 · 1) = 140 – 14 = 126.

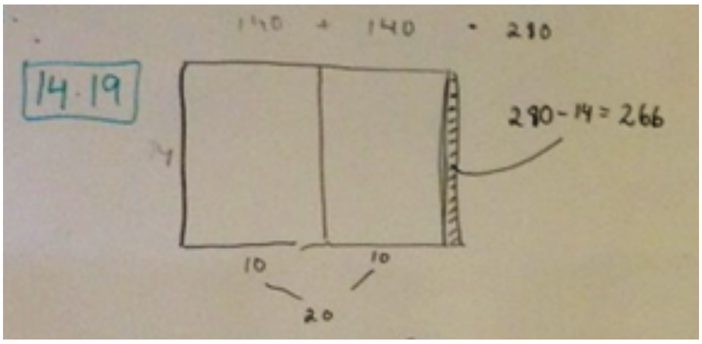


Figur 34. Fjärde serien, exempel 5, (14 · 9).

Excerpt 8

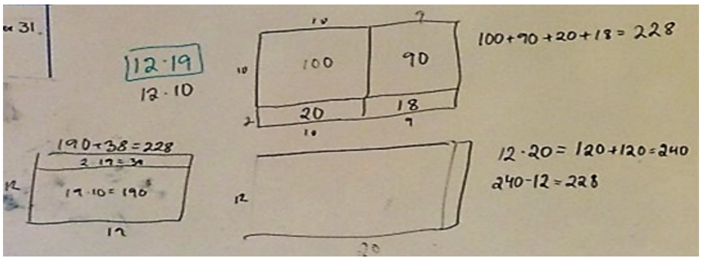
Rad
1 E3: Jag e... jag först ritade jag då att 14 gånger 10 är 140
2 L: Du tänkte att 14 gånger 10 *(ritar på tavlan)* vi vet att det är 140.
3 E3: Och sen så ··· tänkte jag bara 140 minus 14.
4 L: 140 minus 14 Varför?
5 E3: Eftersom att, när det står 10 då tar man 14 tio gånger men när det står 9 så tar man 14 bara 9 gånger.
6 L: 14 nio gånger *(skriver detta på tavlan).* Men vi har tagit en gång för mycket här. Hur kan jag rita det då? *(Ingen elev svarar).* Så här tänker jag *(ritar på tavlan)* att man kan ta bort en rad med 14. Vad får jag för svar då? Vad fick du för svar *(pekar mot E3)?*
7 E3: 126

Näst sista exemplet (14 · 19) håller den första faktorn invariant och varierar den andra faktorn genom att öka med 10. Den andra faktorn var 9 i föregående exempel och i detta exempel är den 19. Detta exempel öppnar dels upp DoV att *multiplicera med 10*, (14 ·10), och dels att *ta bort en del,* (14 ·(20 – 1)). Elev 2 förklarar att (14 · 19) är väldigt nära (14 · 20) och att man då kan addera två stycken (14 ·10) horisontellt för att sedan ta bort den del man tagit för mycket (se figur 35). Eleven verkar vara osäker på vad som ska tas bort och säger först att 19 ska tas bort men ändrar sig till 14 när läraren undrar vad 19 är för något.



Figur 35. Fjärde serien, inledande exempel 6, (14 · 19).

I det sista exemplet (12 · 19) varieras första faktorn till 12. I föregående exempel var första faktorn 14 och den andra faktorn, 19, hålls invariant. Flera DoV öppnas upp såsom att helheten, det vill säga båda faktorerna, kan delas upp på olika sätt så att räknesätten addition och subtraktion används ((10 + 2) · (10 + 9)), ((10 + 2) · 19) och (12 · (20 -1)). Exemplet förklaras på dessa tre sätt, se figur 36 nedan. En aspekt som kommer fram är att båda faktorerna i (12 · 19) kan delas upp så som ((10 + 2) · (10 + 9)), vilket ger (10 · 10) + (10 · 9) + (2 · 10) + (2 · 9). Elev 2 och 3 i excerpt 9 verkar ha förstått att faktorerna kan delas upp additivt men de är inte riktigt säkra på hur dessa ska kombineras och inte heller hur det ska illustreras med areamodellen. Läraren visar på areamodellen hur de olika kombinationerna (10 · 9) + (2 · 10) + (2 · 9) kan illustreras (se excerpt 9, rad 6, 8 och 14). En annan elev visar ett annant sätt man kan dela upp (12 · 19) på nämligen den vänstra bilden där första faktorn delas upp i (10 + 2) och dessa multipliceras med 19. Areamodellen visar att delarna adderas vertikalt. Ytterligare en annan aspekt kommer upp när en annan elev förklarar, nämligen att man även kan läsa uppgiften genom att subtrahera, så som den högra nedersta areabilden visar i fig 36. Eleven har utgått från (12 · (20 -1)). Då eleven vet att (12 · 20) = (12 · 10) + (12 · 10) = 120 + 120 = 240 har hen använt den informationen för att sedan subtrahera 12 då eleven ser att hen har räknat med en extra kolumn.




Figur 36. Fjärde serien, exempel 7, (12 · 19).

Excerpt 9

Rad
1 E2: 10 gånger 10 ...
2 L: (Ritar)10 åt det här hållet och 10 åt detta hållet? (rader och kolumner)
3 E2: ...det är hundra. Och 2 gånger 9
4 L: Jag fortsätter så här? (ritar på tavlan)
5 E2: Aa...
6 L: Hit? (Stannar strax innan 10) hur tänkte du här? E2 sa 9 var finns den 9:an? (Pekar på rader och kolumner). Här är 12 (rader) och här har vi bara 10 (kolumner). Vad står den 9an för något? Det står ju inte 12 gånger 10 här utan 12 gånger 19.
7 E3: Hm...
8 L: Men här (pekar på bilden) har jag bara 12 gånger 10. Hjälp oss här nu. Du är inne på rätt spår... (Ingen kommer med något förslag): titta här, här är det 12 neråt (rader och här behöver vi 19 (kolumner) och vi har bara 10 (ritar ut de 9 övriga). Titta här var E2 2 gånger 9 är. Den är där. 2 gånger 9 och vad är det sa du?
9 E3: 18
10 L: 18 Ok (skriver in den). Och den var 100 (skriver in det) och det här (visar på 10 gånger 9)
11 E3: 90
12 L: Och vad är 2 gånger 10
13 E3: Det är 20.
14 L: Titta här nu har vi fått all information vi behöver för att räkna ut detta 100 plus 90 plus 20 plus 18 (skriver upp det på tavlan).

**Sammanfattning**

Den fjärde serien sammanlänkade uppgifter startar till skillnad från föregående serie med ett exempel som har *en* tvåsiffrig faktor. Läraren skriver även i denna serie upp multiplikationen på tavlan och uppmuntrar eleverna att förklara med en areamodell. Exemplen (10 · 5), (4 · 5) och (14 · 5) har en systematisk variation av första faktorn som gör att DoV öppnas upp så att de två första exemplen kan kombineras för att lösa det tredje exemplet. Samma systematiska variation har även exemplen (14 · 10), (14 · 9) och (14 · 19) fast här är det andra faktorn som varieras medan den första faktorn hålls invariant. En annan aspekt som kommer fram när exemplen (14 · 5) (14 · 10) och (12 · 19), implementeras är att de *två* tvåsiffriga faktorerna kan delas upp på olika sätt till exempel (14 · 10) = ((4 + 10) · 10) eller till exempel (12 · 19) = (12 · (20 – 1)). Multiplikationen med tians tabell verkar vara en utgångspunkt som eleverna utgår ifrån när de löser exempel med minst en tvåsiffrig faktor inom talområdet 10 – 19. Faktorernas uppdelning syns tydligt i areamodellerna.

De DoV som öppnas upp i den fjärde serien ger eleverna möjlighet att erfara:

- multiplikation som area
- multiplikation med 10 (exempel 1 – exempel 8)
- den distributiva lagen för addition och då med fokus på att man kan addera rader eller kolumner (exempel 3, exempel 4 och exempel 7)
- ny enhet 10 · 10 (exempel 5 - exempel 7)

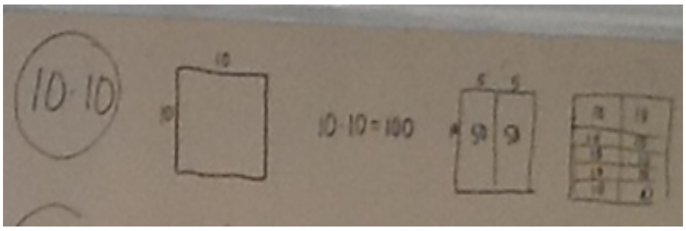
Eleverna får även i denna serie skapa inre bilder av den multiplikation som läraren skriver upp på tavlan. Även i denna serie innebär det att eleverna nu ser multiplikation som två dimensioner när läraren ritar upp areamodellerna eleverna beskriver. Resultatet visar att de elever som svarat har släppt enheten (2 · 5) och tänker i större enheter men att läraren ibland väljer att rita upp mindre lådor. Resultatet visar också att eleverna kan förklara muntligt hur de ser en låda men att de har svårare att förklara hur areamodellen kan se ut. Läraren har i och med detta haft en annan roll i denna serie nämligen att hjälpa eleverna att få en bild av hur den areamodell de beskriver kan se ut. Resultatet av denna serie visar även att läraren fokuserar på att titta på likheterna mellan de olika areamodellerna när eleverna förklarar ett exempel. Likheterna läraren fokuserar på är rader och kolumner och då framför allt när den distributiva lagen i subtraktion implementeras men även när båda faktorerna delas upp additivt.

Precis som i föregående serie har läraren i denna serie inte visat rektangulära bilder av multiplikationen utan eleverna har fått föreställa sig areor av den multiplikation som läraren skrivit på tavlan. Areamodellen verkar uppmuntra eleverna att gå från att vara en *modell-av* tänkande till en *modell-för* tänkande för eleverna.

## Femte serien sammanlänkade uppgifter

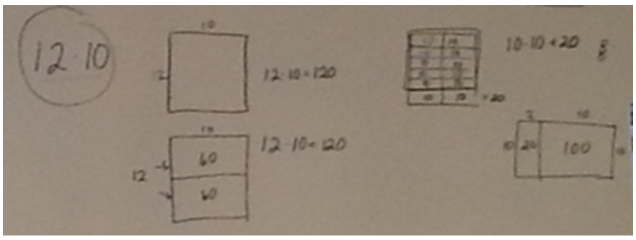
Implementeringen av den sista serien sammanlänkade uppgifter följer samma mönster som de två föregående serierna sammanlänkade uppgifter. Läraren skriver upp ett exempel i taget på tavlan. När det första exemplet skrivs upp uppmanas eleverna att rita den bild de ser av multiplikationen i form av en areamodell. Eleverna förklarar hur de ser multiplikationen och läraren ritar på tavlan den areamodell de beskriver. Inga exempel suddas ut från tavlan. Det som skiljer denna implementering från de övriga är att läraren inleder med ett tvåsiffrigt exempel som eleverna är bekanta med (10 · 10).

**DoV som öppnas upp när faktorerna varieras och/eller hålls invariant.**
Läraren inleder med exemplet (10 · 10) vilket är en variation av ”enheten” (lådan) i relation till föregående lektionssekvens där båda faktorerna nu är tvåssifriga. Den DoV som öppnas upp är multiplikation med 10. En areamodell av en (10 · 10)-låda blir möjlig att urskilja i den vänstra areamodellen (se figur 37) när första eleven förklarar att hen vet att (10 · 10) är lika med 100. Multiplikation med 10 diskuteras även när en annan elev visar att hen har ritat tio stycken (2 · 5) som den högra areamodellen i figur 37 visar. Eleven som förklarar med tio stycken (2 · 5) och den tredje eleven som förklarar att två (10 · 5)-lådor sitter ihop horisontellt vet att (10 · 10) är lika med 100. Alla elever vet att (10 · 10) är 100 men de två sista eleverna väljer att rita ut lådor som sitter ihop för att förtydliga.



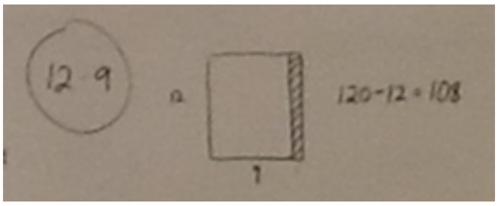
Figur 37. Femte serien, inledande exempel 1, (10 · 10).

Det andra exemplet läraren skriver upp på tavlan är (12 · 10). I exemplet varieras den första faktorn genom att öka faktorn med två medan den andra faktorn hålls invariant. DoV som öppnas upp av den övre vänstra bilden i figur 38 är *multiplikation som area.* En annan DoV som öppnas upp är att *två stycken* (6 · 10)-lådor *kombineras horisontellt* (se nedersta vänstra bilden i figur 38). En tredje DoV som öppnas upp är att *flera* (2 · 5)-lådor *kombineras* som i den högra övre bilden i figur 38. Läraren frågar varför eleverna har ritat två stycken (6 · 10)-lådor som sitter ihop och tolv (2 · 5)-lådor som sitter ihop. Båda eleverna svarade att de visste att (12 · 10) är 120 men att de ville förtydliga precis som eleverna svarade när föregående exempel implementerades. En tredje elev adderar (10 · 10) med (10 · 2), det vill säga (12 · 10) = ((10 + 2) · 10) = (10 · 10) + (10 · 2) och en fjärde elev skiftar plats på rad och kolumn vilket leder till att eleverna nu även kan erfara den kommutativa lagen (12 · 10) = (10 · 12).

Figur 38. Femte serien,


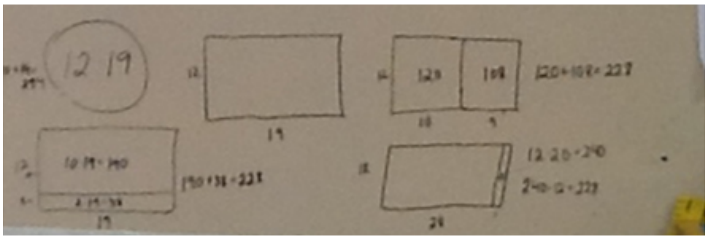
exempel 2, (12 · 10).

Nästa exempel är (12 · 9). Exemplet håller första faktorn invariant och varierar den andra faktorn genom att minska med ett. Detta öppnar upp en DoV att *ta bort en del* (12 · 1) av (12 · 10) vilket är precis det eleven som förklarar gör. Hen utgår från (12 · 10) och subtraherar (12 · 1) (se figur 39). Eleven har svårare att förklara hur areamodellen ska se ut. Läraren ritar och visar på tavlan hur (12 · 9) = (12 · (10 – 1)) kan illustreras som (12 · 10) - (12 · 1).



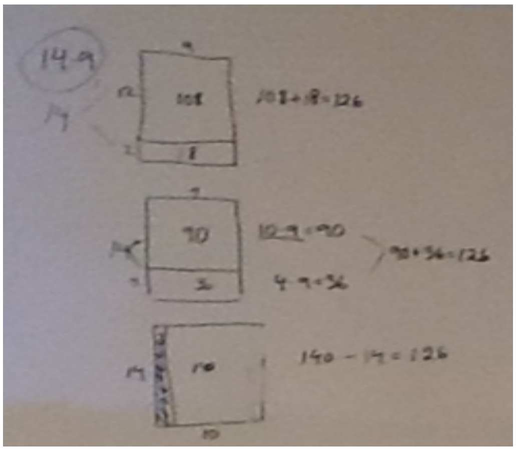

Figur 39. Femte serien, exempel 3, (12 · 9).

Fjärde exemplet (12 · 19) håller första faktorn invariant och varierar andra faktorn genom att addera talet tio och talet nio från föregående två exempel (10 + 9). De DoV som öppnas upp är att *helheten (båda faktorerna) kan delas upp* till exempel ((2 + 10) · 19) eller (12 · (10 + 9), samt att *ta bort en del* (12 · (20 - 1)). Eleven som förklarar areamodellen ner till vänster (se figur 40) förklarar att första faktorn kan delas upp i (2 + 10) och multipliceras med den andra faktorn ((2 + 10) · 19). På liknande sätt förklarar en annan elev att man kan dela upp andra faktorn i (10 + 9) och multiplicera med första faktorn (12 · (10 + 9)) se areamodellen upp till höger i figur 40. En tredje elev förklarar att hen utgår från 12 · 20 och *tar bort en del* hen räknat för mycket (12 · (20 - 1) (se figur 40 nederst till höger). I figur 40 finns en fjärde areamodell upp till vänster som är (12 · 19). Eleven som förklarar denna bild säger att hen vet hur många rader och kolumner man kan rita ut men vet inte hur hen ska angripa och lösa exemplet.



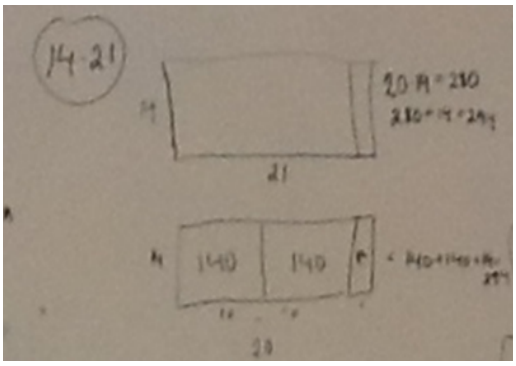

Figur 40. Femte serien, exempel 4, (12 · 19).

Det näst sista exemplet som skrivs på tavlan är (14 · 9). Båda faktorerna varieras i exemplet. Första faktorn ökar med två och andra faktorn minskar med tio. De DoV som öppnas upp är att *helheten (första faktorn) kan delas upp på två olika sätt* och att man kan utgå från (14 · 10) för att sedan *ta bort den del man räknat för mycket* (14 · 9) = (14 · (10 – 1)). Första och andra eleven förklarar genom att dela upp första faktorn på olika sätt. Första eleven delar upp 14 som ((12 + 2) · 9) och använder informationen från exempel (12 · 9) för att lösa detta exempel (se figur 41 areamodellen högst upp). Den andra eleven delar upp den första faktorn på följande sätt ((10 + 4) · 9) och utnyttjar då tians multiplikationstabell (10 · 9) = 90 (se figur 41) areamodellen i mitten). Läraren uppmärksammar att eleverna har använt samma metod men att de har delat upp faktorn på olika sätt. Den tredje elevens förklaringen bygger på att hen lägger till 1 på den andra faktorn för att få ett ”enklare” tal, därefter *tas* (14 - 1) *bort* från produkten för att få svaret (14 · (10 - 1)) (se figur 41 areamodellen längst ner). Utifrån dessa förklaringar får eleverna möjlighet att erfara hur både den distributiva lagen för addition men också för subtraktion kan illustreras.



Figur 41. Femte serien, exempel 5, (14 · 9).

Det sista exemplet som skrivs på tavlan är (14 · 21). Första faktorn hålls invariant och andra faktorn varieras till 21. De DoV som öppnas upp är att det i detta exempel är *helheten (andra faktorn) delas upp additivt på två olika sätt*. Den första eleven delar upp den andra faktorn i (14 · (20 + 1)) och fokuserar då på multiplikation med ett tiotal (14 · 20) medan den andra eleven delar upp den andra faktorn i (14 · (10 + 10 + 1)) och fokuserar på så sätt också multiplikation med 10 (se figur 42).



Figur 42. Femte serien, exempel 6, (14 · 21).

**Sammanfattning**

I den femte serien sammanlänkade uppgifter startar till skillnad från övriga undervisningssekvenser med ett nytt tvåsiffrigt inledande exempel (10 · 10). Precis som i föregående serie sammanlänkade uppgifter visas inga bilder när exemplen implementeras utan multiplikationen skrivs upp på tavlan. En annan skillnad som finns i denna serie i jämförelse med övriga serier är att majoriteten av exemplen har två tvåsiffriga tal. Precis som i tidigare implementeringar suddas inga exempel bort från tavlan.

Exemplen (12 · 10), (12 · 9) och (12 · 19) är uppbyggda på samma sätt som exemplen i föregående serie det vill säga att första och andra exemplet kombineras för att lösa det tredje exemplet. En generalisering sker mellan den fjärde och femte serien. Elevernas förklaring bygger på den distributiva lagen för addition till exempel (12 · 19) = (12 · (10 + 9)) och den distributiva lagen för subtraktion (12 · 19) = (12 · (20 - 1)). Sista exemplet (14 · 21) varieras på ett nytt sätt som inte har förekommit i de övriga serierna, Exemplets andra faktor är inom talområdet 20 -30.

De DoV som öppnas upp i den femte serien ger eleverna möjlighet att erfara:

- multiplikation som area
- multiplikation med 10
- den distributiva lagen för addition och då med fokus på att man kan addera rader eller kolumner
- den distributiva lagen för subtraktion och då med fokus på att man kan subtrahera kolumner
- enhet $10 \cdot 10$

Resultatet visar att de elever som använt enheten $(2 \cdot 5)$ när de förklarat de olika exemplen har använt enheten för att förtydliga hur den skulle kunna användas som förklaring. Läraren har i denna serie ritat det eleverna förklarat utan att rita ut fler mindre lådor i areamodellen. Resultatet visar också att eleverna kan förklara muntligt hur de ser en låda men att de precis som i föregående serie har svårare att förklara hur areamodellen kan se ut. Läraren har även i denna serie rollen att hjälpa eleverna att få en bild av hur den areamodell de beskriver kan se ut. Resultatet av denna serie visar precis som i föregående serie att läraren fokuserar på att titta på likheterna mellan de olika areamodellerna när eleverna förklarar ett exempel. Läraren fokuserar extra mycket på när eleverna väljer att dela upp en faktor där de kan använda tians tabell men även på de andra sätt eleverna valt att dela upp faktorerna på.

Precis som i de två föregående serie har läraren i denna serie inte visat rektangulära bilder av multiplikationen utan eleverna har fått föreställa sig areor av den multiplikation som läraren skrivit på tavlan. Areamodellen verkar uppmuntra eleverna att gå från att vara *modell-av* tänkande till *modell-för* tänkande för eleverna.

# 6. Diskussion

Syftet med studien var att skapa kunskap om hur uppgifter i multiplikation ur ett specifikt läromedel är konstruerade samt vad som blir synligt respektive dolt för eleverna i undervisningen? Studiens forskningsfrågor var:

- Vad ges eleverna möjlighet att lära sig av fem serier sammanlänkade uppgifter i multiplikation?

- Vilka aspekter av innehållet multiplikation görs möjliga att erfara i undervisningen genom de sammanlänkade uppgifterna?

Resultatet av studien visar att det finns likheter mellan denna studie och forskningen vad gäller exemplens betydelse samt vikten av att använda areamodellen i multiplikation för att synliggöra de bakomliggande matematiska idéerna.

Forskning har tidigare visat att *ett* exempel inte har någon effekt på elevernas lärande (Dienes, 1960; Ma, 2010; Mason & Pimm, 1984; Sun 2011a, 2011b; Watson & Mason, 2002). För att eleverna ska se nyttan med exemplet men framförallt göra matematiska framsteg bör exemplet vara ”/…/ a class of problems and a collection of techniques and ways of thinking” (Mason, 2006, s. 224). Ett flertal studier har studerat exempels betydelse för lärandet (DiBrienza & Shevell, 1998; Dienes, 1960; Fosnot & Dolk, 2001; Kullberg et al., 2014; Mason, 2006; Mason & Pimm, 1984; Rowland, 2008; Watson & Mason, 2002; Zazkis & Chernoff, 2008). Denna studie visar att exemplen i studien har en central roll för vad eleverna ges möjlighet att lära sig samt vilka aspekter inom multiplikation eleverna får möjlighet att erfara. När man tittar närmare på de fem undervisningssituationerna kan man se att fokus ligger på att eleverna ska förstå och kunna använda främst den distributiva lagen i multiplikation. Det visar sig genom att exemplen hör ihop i ”set”, eleverna får då möjlighet att först kombinera två exempel för att lära sig att det är möjligt att göra så för att senare kunna generalisera när efterföljande exempel i serien presenteras. Tydliga exempel på ett ”set” som hjälper eleverna att se och använda den distributiva lagen är exempel 1-3 ur serie 2 ((2 · 5), (1 · 5), (3 · 5)), exempel 4-6 ur serie 4 ((14 · 10), (14 · 9), (14 · 19)), och exempel 2-4 ur serie 5 ((12 · 10), (12 · 9), (12 · 19)). Exemplen i denna studie presenteras ett i taget till skillnad från hur Sun (2011a) beskriver att exempel inom *One Problem, Multiple Solutions* (OPMS) presenteras. Då exemplen inte suddas bort från tavlan kan eleverna se dem som ett ”set” av lösningar som hör ihop, vilket leder till en likhet mellan hur Sun beskriver OPMS och hur exemplen i studien presenteras för eleverna. Exemplen som följer efter ett ”set” skapar tillfällen för eleverna att kunna generalisera vad gäller den distributiva lagen i exempel 4 ur serie 2 (5 · 4), exempel 7 ur serie 4 (12 · 19) och exempel 5 ur serie 5 (14 · 9). Zazkis & Chernoff, (2008) menar att de traditionella exemplen i läroböcker eller i undervisningen ofta fokuserar på små delar som begränsar eleverna i att kunna generalisera men även begränsar elevernas matematiska utveckling. Den föreliggande studien skiljer sig i detta avseende då varje serie består av 6-8 exempel där exemplen har samband med varandra till skillnad från traditionella exempel i läromedel och i undervisningen.

En annan viktig aspekt som forskningen pekar på är att multiplikation bör undervisas så att den tvådimensionella aspekten av multiplikation kommer fram (Vergnaud, 1983; Billstein, Libeskind, & Lott, 2004; Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2010). Den föreliggande studien visar att undervisningen genom exempel bygger på att eleverna ska lära sig att se och uppfatta multiplikation som area. Studien visar också, från och med serie 3, hur eleverna successivt övergår till att se ”inre” bilder av area för att själva illustrera multiplikation som area. Studien visar hur läraren väver samman den preformella matematiken (Hiebert et al., 1997) med den formella matematiken när hon skriver upp delprodukterna som i exemplet (2 · 5) + (1 · 5) = (3 · 5) på tavlan. Med den preformella matematiken och den formella matematiken menas här att undervisningen startar med att visa en bild av en rektangel med rutor till exempel exemplet (3 · 5). Senare skriver läraren även upp det som diskuterats på tavlan på ett formellt sätt (3 · 5) = (2 · 5) + (1 · 5). Hiebert et al. (1997) menar att det behövs modeller mellan den konkreta och den formella matematiken så att gapet mellan dessa kan överbryggas. Areamodellen ger eleverna möjlighet att se både delarna och helheten för att kunna generalisera och lösa till exempel andra exempel såsom (11 · 8). Exemplet (11 · 8) från tredje serien visar *inte* delarna ((10 · 18) + (1 · 18)) för eleven utan eleven utmanas att själv kunna ”se” delarna i helheten (11 · 1 8). Areamodellen har, förutom att vara ett stöd i att gå från det konkreta till det abstrakta tänkandet, även en annan innehållslig aspekt. Den DoV som öppnas upp av att t.ex. exemplet (2 · 5) illustreras som en area där multiplikation har *två dimensioner*. Hade läraren inte visat upp (2 · 5)-rektangeln utan bara skrivit upp (2 · 5) på tavlan hade eleverna troligtvis inte ritat upp en areamodell. Med ganska stor sannolikhet hade eleverna ritat upp multiplikationen som upprepad addition då multiplikation uppfattas som additivt det vill säga som upprepad addition precis som många forskare skriver fram (Vergnaud, 1983; Billstein, Libeskind, & Lott, 2004; Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2010). Resultatet visar att kombinationen mellan de systematiskt varierade uppgifterna och areamodellen verkar vara en kraftfull kombination som ger eleverna möjlighet att förstå multiplikation på djupet. Den kvalitativa förändring som Van Dooren et al. (2010) menar behövs i tänkandet kring multiplikation för att gå från det additiva till det multiplikativa tänkandet får alltså eleverna tillgång till genom de bilder på rektanglar som läraren visar.

Brister i taluppfattning kan kopplas till att undervisningen i Sverige baseras på att ha mer fokus på enskild räkning i en lärobok i större utsträckning än i andra länder (Skolverket 2008) och att läromedlet styr matematikundervisningen (Skolverket, 2003; Skolinspektionen, 2009). Den föreliggande studiens exempel visar att eleverna har getts möjlighet att utveckla taluppfattningen inom multiplikation från två ensiffriga till två tvåsiffriga faktorer. Uppgifterna i läromedlet Muffles´ Truffles är konstruerade på så sätt att exemplen varierar vilket leder till att eleverna har getts möjlighet att upptäcka matematiska mönster. Exempel på samband hittar vi i serie 1 när eleverna får lösa exemplen 1 - 3 (2 · 5, 1 · 5, 4 · 5). Eleverna får möjlighet att se att när första faktorn halveras (1 · 5) i relation till föregående exempel (2 · 5) halveras även produkten till hälften och det samma gäller när första faktorn fördubblas då fördubblas även produkten (jmf 2 · 5 och 4 · 5).

Lampert (1986) menar att när multiplikation inom högre talområden presenteras slutar lärarna oftast att illustrera multiplikation med grupper då det inte är hanterbart och introducerar istället en algoritm. Ett intressant fynd i studien är att trots att eleverna i de sista serierna får arbeta med multiplikationer med två tvåsiffriga faktorer är det ingen elev som vill ställa upp talen och använda en algoritm. Det skulle kunna tolkas som att eleverna är trygga med areamodellen och att de inte är i behov av en algoritm just då. Areamodellen blir också ett verktyg för läraren att använda i multiplikationsundervisningen. En fördel med areamodellen är att den är transparent vilket gör det möjligt att se och därmed också diskutera de bakomliggande lagarna. Detta kan med fördel användas *om* och *när* eleven eller läraren vill börja använda en algoritm för att belysa de centrala matematiska idéerna inom multiplikation. Med den erfarenheten som eleverna har med sig är det troligt att en övergång till algoritmen bli enklare när läraren senare eventuellt introducerar algoritmen. Fördelen av att eleverna har fått möta och förklara med areamodellen är att förståelse och procedur kan sammanflätas.

Precis som Kullberg et al. (2014) ställer sig även denna studie frågan ifall matematikläraren utnyttjar de möjligheter som uppgifterna har. Läraren i denna studie visar att hon inte alltid fångar upp de aspekter som kommer fram när eleverna löser exemplen. De matematiska idéerna i studien blir synliga genom areamodellen men resultatet visar att läraren inte diskuterar dessa på något djupare sätt. Vad läraren gör är att hon bekräftar den kommutativa lagen till exempel genom att be eleverna att jämföra exemplen med varandra ($4 \cdot 5$) och ($5 \cdot 4$), eller att titta på likheter och skillnader mellan hur exemplet har lösts på två olika sätt med den distributiva lagen till exempel serie fem exempel ($12 \cdot 19$). Även den *associativa* lagen uppmärksammas av läraren till exempel när hon jämför ($4 \cdot 5$) med ($2 \cdot 10$). Vad läraren inte gör är att hon inte sätter namn på dessa idéer och inte heller talar hon om att ”det vi just nu har sett är en viktig idé i multiplikation”. Då detta inte har förekommit i studien är det svårt att veta ifall det har påverkat undervisningen på något sätt. Det skulle vara intressant att se hur eleverna hade hanterat detta och hur undervisningen hade utvecklats ifall läraren var tydligare i det avseendet. Resultatet visar också att läraren inte alltid uppmärksammar vad variationen i exemplet öppnar upp för dimensioner av variation. Här är frågan vad som blir synligt för eleverna. I första serien uppmärksammar hon till exempel inte relationen mellan exempel 3 och exempel 5 det vill säga exempel ($4 \cdot 5$) och ($2 \cdot 10$) varken vad gäller variationen mellan faktorerna eller produkternas likhet. I första och i andra serien går vissa saker förbi utan att diskuteras. I tredje serien vet vi inte vad som diskuterades när de sista exemplen implementerades men för övrigt uppmärksammades de matematiska idéerna som dimensioner av variation öppnade upp och det samma gäller serie 4 och 5. Exemplens variation belystes inte alltid av läraren. Vad detta kan bero på är svårt att veta men en förklaring skulle kunna vara att läraren ville att eleverna skulle upptäcka detta själva. En annan förklaring kan vara att läraren själv inte såg den kraft och/eller variation som exemplen har och har då inte kapaciteten att göra den sortens jämförelser. Det väcker nya frågor kring hur resultatet skulle falla ut ifall ovanstående hade tagits i beaktande vid implementeringen.

Marton och Tsui (2004) påpekar att studier visar att det har stor betydelse för eleverna hur ett specifikt innehåll presenteras och hur läraren organiserar och möjliggör lärandet. Lo (2014) skriver att det är viktigt att undervisningen skapar strukturer för att eleverna ska få möjligheten att urskilja. Studien visar att de systematiskt varierade exemplen:

- Öppnar upp olika DoV av multiplikation i samband med areamodellen
- Gör det möjligt för eleverna att upptäcka samband och lagar
- I samband med areamodellen ger eleverna möjlighet att gå från modell-*av* till modell-*för*.

Till skillnad från Thomson et al. (2007) har inte läromedlet som undersökts konstruerat exemplen med studiens elever i åtanke. Utgångspunkten i läromedlet har varit på matematiseringsprocessen som innebär att hitta och förstå mönster, hitta likheter och skillnader samt vidareutveckla beräkningsmetoder (Fosnot, 2005). Eleverna i studien har fått möjlighet att hitta och diskutera mönster då exemplen varierades systematiskt men de har även fått möjlighet att se samma fenomen utifrån ytterligare en representation genom areamodellen. Till skillnad från dessa studier bidrar denna studie med att konkret illustrera hur areamodellen kan undervisas och vikten av att exemplen inte suddas ut från tavlan så att eleverna kan se delarna i helheten för att kunna titta på likheter och skillnader.

## Metoddiskussion

I studien har fem undervisningstillfällen videoinspelats och implementering av exempel i multiplikation ur läromedlet Muffles´ Truffles ur serien *Context for learning mathematics* har analyserats. Materialet som har analyserats består av en till tre videoinspelade filmer per lektion. Varje undervisningstillfälle fokuserar på en serie sammanlänkade uppgifter. Fem undervisningstillfällen är inte tillräckligt för att dra någon slutsats om undervisningen i sin helhet. Däremot får vi en inblick i materialet Muffles´ Truffles ur serien *Context for learning mathematics*. Det vi kan dra en slutsats om är vad vi ser i just de fem undervisningstillfällena.

Urvalet av lärare i studien kan kritiseras då läraren i denna studie är forskaren själv. Då syftet i studien inte är att analysera hur läraren undervisar innehållet i Muffles´ Truffles eller hur läraren interagerar med eleverna då hon undervisar matematikinnehållet borde valet av lärare inte vara avgörande. Givetvis påverkar läraren resultatet beroende på vilka ämneskunskaper läraren har och vad hon lyfter fram som viktigt när eleverna framför sina lösningar. Resultatet hade påverkats oavsett vilken lärare som hade undervisat samma ämnesinnehåll då en annan lärare till exempel skulle stanna upp och diskutera mer på djupet relationen mellan hälften och dubbelt än vad läraren i studien gjorde. Urvalet av elever bör diskuteras. Andra elever skulle kanske se andra aspekter av multiplikation när exemplen varierade än de aspekter som eleverna i denna studie såg. Att undervisningen dokumenterades av en ipad kan också ha påverkat resultatet både positivt och negativt. Eleverna kanske ville visa vad de kunde och på så sätt varit mer aktiva när ipaden filmade undervisningen eller det motsatta att eleverna inte kände sig bekväma när de filmades och därmed inte vågade visa vad de tänkte. Videoinspelningarna skulle kunnat göras på ett ännu mer tliiförlitligt sätt genom att det till exempel alltid var någon som filmade med en riktig kamera där kvalitén på både ljud och bild hade kunnat bli ännu bättre. För tydligare tavelbilder hade det varit lämpligt att fotografera tavlan med en kamera rakt framifrån. Resultatet kan inte generaliseras till en större population främst på grund av få fall, en lärare och en klass. Erfarenheterna och reflektionerna över resultatet kan dock vara värdefulla för fortsatt diskussion i relation till studiens inledande fråga ifall detta material kan fungera i en svensk kontext.

Min roll i denna studie har varit både lärare och forskare. Som lärare i de undervisande tillfällena hade jag fokus på att följa materialet och dess instruktioner vilket också kan ha påverkat resultatet. Min relation till eleverna där jag vet varje elevs behov kan också ha påverkat resultatet. Som forskare har min roll varit att analysera, tolka och reflektera resultatet av den egna undervisningen. Ball (2000) menar att det är viktigt att distansera sig när man ska analysera sin egen forskning. Utmaningen i denna studie har varit att kunna distansera mig från att det är min klass och min undervisning jag ska analysera. Ett sätt att distansera mig från studien har varit att skriva om mig som tredje person (läraren eller (L)) i resultat och diskussionsdelen. På så sätt har jag tagit bort fokus från mig och har istället fokuserat på vad undervisningen ger eleverna för möjligheter att lära (Ball, 2000). Att vara både läraren och forskaren har sina för- och nackdelar. Fördelen kan vara att jag kan förstå vad till exempel lärarens frågor vill leda till men det kan också vara en nackdel att jag som forskare uppfattar något som självklart i min undervisning vilket kan leda till att det inte uppmärksammas i studien.

## Didaktiska implikationer och fortsatt forskning

Resultatet i denna studie indikerar att väl valda exempel i multiplikation med en inbyggd systematisk variation i kombination med rektangulära bilder av multiplikationsexemplen kan hjälpa eleverna att ta steget från att tänka multiplikation som upprepad addition till att tänka multiplikation som area (två dimensioner). Resultatet visar också att de delar som studien fokuserat på i läromedlet Muffles´ Truffles går att applicera i en svensk kontext. Detta skulle kunna betyda att läromedlet kan bidra till att den svenska multiplikationsundervisnings-kulturen skulle kunna förändras. Studiens resultat skulle kunna vara utgångspunkt för lärares kompetensutveckling inom multiplikation eller som ett inslag i lärarutbildningen för studenterna. Det skulle vara intressant ifall fler lärare prövade att undervisa med exemplen eller liknande serier i kombination med stöd av rektangulära bilder för att se de dimensioner av variation som kommer upp när de undervisar samma innehåll.

Nya tankar och funderingar har väckts under studiens gång. Det jag är mest nyfiken på och skulle vilja forska vidare kring är hur elever som möter areamodellen där den distributiva lagen blir synlig förstår multiplikationsalgoritmen i relation till elever som enbart kan multiplikation som upprepad addition. En annan intressant aspekt av det skulle vara att studera vad läraren ser för didaktiska vinningar i att ha startat med areamodellen då multiplikationsalgoritmen kan introduceras. Det skulle också vara givande att titta på fler serier sammanlänkade uppgifter i multiplikation för att diskutera progressionen i exemplen.

# Litteraturförteckning

Alexandersson, M. (1994). Den fenomenografiska forskningsansatsens fokus. I B. Starrin, & P. G. Svensson, *Kvalitativ metod och vetenskapsteori* (s. 111-136). Lund: Studentlitteratur.

Ambrose, R., Baek, J.M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. I A. J. Baroody, & A. Dowker (Red.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. Studies in mathematical thinking and learning* (s. 305-336). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. I A. Kelly, & R. Lesh. (Red.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (s. 365- 402). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade and how can we decide? *American Educator, 29*(3), 14-22, 43-46.

Batista,M.T., Clements, D.H., Arnhoff, J., Batista, K.., & Van Auken Borrow, C. (1998). Students´spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal of Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Red.), *Proc. 30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*(1)*,* s. 126-154. Prague, Czech Republic: PME.

Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. W. (2004). *A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers. Ninth edition.* Boston: Pearson Education.

Bjørndal, C. (2002). *Det värderande ögat. Observation, utvärdering och utveckling av undervisning och handledning.* Stockholm: Liber.

Bryman, A. (2004). *Social research methods.* New York: Oxford University Press.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 41-51.

Cameron, A., & Fosnot, C. (2007). *New YorkMuffles' Truffles- Multiplication and Division with the Array.* Portsmouth: Heinemann.

DiBrienza, J., & Shevell, G. (1998). Number Strings: Developing computational efficiency in a constructivist classroom. *The Constructivist 13(2)*, 21-25.

Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics.* London: Hutchinson Educational.

Emanuelsson, J. (2001). *En fråga om frågor. Hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det nsom undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap. (Göteborg Studies in Educational Sciences, 168).* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Fosnot, C. T. (2005). Constructivim revisited: Implications and reflections. *The Constructivist, 16*(1), 1-17.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing multiplication and division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Fuson, K. C., & Beckmann, S. (Fall/winter 2012-2013). Standard algorithms in the common core states standards. *NCSM Journal*, *14*(2), 14-30.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 183-194.

Gravemeijer, K. (1999). Emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.

Hartman, J. (1998). *Vetenskapligt tänkande. Från kunskapsteori till metodteori.* Lund: Studentlitteratur.

Hermerén, G. (2007). *Hantering av integritetskänsligt material.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., Human, P. (1997). *Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Jacob, L., & Willis, S. (2001). Recognising the difference between additive and multiplicative thinking in young children. I J. Bobis, B. Penny, M. Michelmore, & B. P. J.Bobis (Red.), *Numeracy and Beyond* (s. 306-313). Sydney: MERGA.

Jordan, B., & Henderson, A. S. (1995). Interaction analysis: Foundations and practice. *Journal of the Learning Sciences, 4*(1), 39-103.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, D.C: National Academy Press.

Kullberg, A., Runesson, U., & Mårtensson, P. (2014). Different possibilities to learn from the same task. *PNA, 8(4)*, 139-150.

Lampert, M. (1986). Knowing, doing and teaching multiplication. *Cognition and Instruction , 3*(4), 305-342.

Lampert, M., Beasley, H., Ghousseini, H., Kazemi, E., & Franke, M. (2010). Using Designed Instructional Activities to Enable Novices to Manage Ambitious Mathematics Teaching. I M.K. Stein, & L. Kucan (Red.), *Instructional Explanations in the Disciplines* (s. 129-141). Springer US.

Lo, M.L. (2014). *Variationsteori - för bättre undervisning och lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Lo, M.L., & Pong, W.Y. (2005). Catering for individual differences: Building on variation. I M. L. Lo, W. Y. Pong, & P. P. M. Chik (Red.), *For each and everyone. Catering for individual differences through learning studies.* (s. 1-26). Hong Kong: Hong Kong University press.

Lo, M. L., & Marton, F. (2012). Towards a science of the art of teaching: Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 1*(1)*,* 7-22.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Anniversary Edition, Taylor & Francis.

Mackay, W. (1995): Ethics, Lies and Videotape. *CHI'95 Proceedings: Conference on Human Factors in Computing Systems: Mosaic of Creativity,* Denver, Colorado, USA, s. 138-145.

Marton, F. (1981). Phenomenography- describing conceptions of the world around us. *Instructional Science, 10*(2), 177-200.

Marton, F. (2006). Sameness and Difference in Transfer. *The Journal of the Learning Sciences, 15(4)*, 499-535.

Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., & Pang, M.F. (2006). On some nesesarry conditions for learning. *The Journal of the Learning Sciences, 15(2)*, 193-200.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The space of learning. I F. Marton, & A. Tsui, *Classroom discourse and the space of learning* (s. 3-43). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. I R. Zazkis, & S. R. Campbell, *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects* (s. 41–68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Press.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(3), 227-289.

Melrose, S. (2010). Naturalistic generalization. I A. Mills, G. Durepos, & E. Wiebe (Red.), *Encyclopedia of case study research* (s. 600-602). Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Nunes, T., & Bryant, P. (2009). *Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities*. Key Understandings in Mathematics Learning. Nerladdat 2015-03-10 från http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P3_amended_FB2.pdf.

Pang, M. F. (2003). Two faces of variation. On continuity in the phenomenographic movment. *Scandinavian journal of Educational research*, *47*(2), 145-156.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The Journal of Mathematical Behavior, 22(4)*, 405–435.

Rissland, E. (1991). Examle-based reasoning. I J. Voss, D. Parkins, & J. Segal, *Informal reasoning in education* (s. 187-208). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rowland, T. (2008). The purpose, designe and use of exemples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 149-163.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll. (Göteborg Studies in Educational Sciences, 129).* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Scataglini-Belghitar, G. & Mason, J. (2012). Establishing Appropriate Conditions: students learning to apply a theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(4), 927-953.

Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. I L. English (Red.), *Handbook of international research in mathematics education* (s. 435–488). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sharma, S. (2013). Qualitative Approaches in Mathematics Education Research: Challenges and Possible Solutions. *Education Journal, 2*(2), 55-57.

Skolinspektionen. (2009). *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet.* Stockholm: Skolinspektionen.

Skolverket. (2003). *Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002. Lusten att lära – med fokus på matematik.: Skolverket.* Skolverkets rapport 221. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008). *TIMSS 2007. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.*.Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2010). *Rustad att möta framtiden? PISA 2009 om 15-åringars läsförståelse och kunskaper i matematik och naturvetenskap. Resultaten i koncentrat.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.* Stockholm: Fritzes förlag.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grade. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 127-155.

Stake, R.E., & Trumbull, D. (1982). Naturalistic generalization. *Review Journal of Philosophy and Social Science, 7*(1), 1-12.

Stenbacka, C. (2001). Qualitative research requires quality concepts of its own. *Management Decision, 39*(7), 551-555.

Stiegler,J.W., & Hiebert, J. (1999). *Best ideas from the world´s teachers for improving education in the classroom*. NY: Simon and Schuster.

Sun, X. (2011a). An Insider´s Perspective: "Variation Problems" and Their Cultural Grounds in Chinese Curriculum Practice. *Journal of Mathematics Education, 4*(1), 101-114.

Sun, X. (2011b). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction dividion in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics, 76(1)*, 65-85.

Thompson, P. W., Carlsson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of task in support of teachers´ development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 415-432.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication and ... back. The development of students´ additive and multiplicative reasoning skill. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360-381.

Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-generated examplea in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Sience, Mathematicand Tecnology Education*, 237-249.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: using variation to structure sense-making. *Mathematics Yhinking and Learning, 8(2)*, 91–111.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the Tip of the Iceberg: Using Representations to Support Student Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. I R. Lesh & M. Landau (Red.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (s. 127-124). New York: Academic Press.

Vetenskapsrådet. (2011). *God forskningsed.* Bromma: CM-Gruppen.

Vetenskapstådet. (u.d.). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Nerladdat 2015-02-23 från http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf: Elanders Gotab.

Young-Loveridge, J. (2005). Fostering multiplicative thinking using array - based materials. *Australian Mathematics Teachers, 61*(3), 34-40.

Young-Loveridge, J., & Mills, J. (2009). Teaching multi-digit multiplication using array-based materials. I R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Red.), *Crossing divides* (proceedings of the 32nd annual conference ofthe Mathematics Education Research Group of Australaia s. 635-643). Palmerston North, NZ: MERGA.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a couterexample exemplary? *Educational Studien in Mathematics, 68*(3), 195-208.