

STATENS KOMMITTÉ FÖR BYGGNADSFORSKNING

Nr 3

Meddelanden

1945

**Vridning och vridningsinspänning
vid betongkonstruktioner**

*Torsion and Torsional Restraint by
Concrete Structures*

Av Henrik Nylander

STOCKHOLM

Seni 7 Beupstium 1947

Vridning och vridningsinspänning
vid betongkonstruktioner

*Torsion and Torsional Restraint by
Concrete Structures*

Teknologie doktor Henrik Nylander

Innehållsförteckning

Förord	5
I. <i>Bärförmågan hos betongbalk, enbart åverkad av vridande moment</i>	7
A. Inledning	7
B. Drag- och tryckhållfasthet	7
C. Bestämning av bärförmågan vid åverkan av vridande moment ur draghållfastheten	11
II. <i>Normaltryck och vridning</i>	17
A. Inledning	17
B. Försök	18
III. <i>Samtidigt verkande böjande och vridande moment</i>	38
Inledning	38
A. Försök med balkar med överstark armering	39
B. Försök med balkar med låg och ordinär armeringsprocent	61
C. Spänningsoptisk undersökning av påkänningsfördelningen vid vridning av balk med böjsprickor	70
D. Diskussion av resultaten till undersökningarna över inverkan av böjande moment. Uppställande av dimensioneringsformel	72
IV. <i>Samtidig avskärning och vridning</i>	77
A. Inledning	77
B. Försök	77
V. <i>Vridningsinspänning</i>	86
A. Inledning	86
B. Försök	89
C. Sammanfattning	104
VI. <i>Beräkning av brobaneplatta, inspänd längs långsidorna genom vridningsmotståndet hos huvudbalkar</i>	105
Inledning	105
A. Platta, belastad med jämnt fördelad last, fritt upplagd efter två motstående kanter och inspänd genom vridningsmotståndet hos huvudbalkar längs de två övriga ..	105
B. Inverkan av inspänningen vid kortsidorna	116
C. Beräkning med förutsättning av att plattan består av smala strimlor i tvärled utan sammanhang i längsled. Linjelast	117
Bil. <i>Vridningströghetsmoment och skärpåkänningar enligt elasticitets- och plasticitetsteorien</i> ..	121
A. Vridningströghetsmoment	121
B. Skärpåkänningar	128
Summary	131

Förord

Laboratorieproven i föreliggande undersökning ha utförts på Byggnadsstatiska laboratoriet, Tekniska högskolan i Stockholm, föreståndare Professor Carl Forssell.

Undersökningen har möjliggjorts genom anslag från Statens Kommitté för Byggnadsforskning.

Såsom närmare framgår av följande redogörelse ha vissa av laboratorieproven utförts i examensarbeten vid Tekniska Högskolan i Stockholm under 1944 av nuvarande civilingenjörerna Göran Bjursten, Carl-Gösta Krook, Rune Lundström, Lars-Erik Nevander, Bengt Norén, Olof Palmborg och Svante Widing under författarens ledning.

Vid provningarna och vid bearbetningen och renritningen har jag dessutom haft bistånd av fru Ulla Blomqvist, civilingenjörerna Hans Holst, Lars-Erik Nevander, Ants Rethlane och Preben Wistisen.

Till alla dessa ber jag att för allt bistånd i form av ekonomiskt understöd, arbete och intresse få framföra mitt värdsamma tack.

Stockholm i september 1945

HENRIK NYLANDER

I. Bärförmågan hos betongbalk, enbart åverkad av vridande moment

A. Inledning

Vid enbart vridning av en betongbalk kan man med stor säkerhet påstå, att brottet består i rent dragbrott genom att de huvuddragpåkänningar, som åtfölja de av vridningen framkallade skärpåkänningarna, uppnå sitt brottvärde. Om man hade att göra med ett ideellt material, som till brott följde förutsättningarna för den klassiska elasticitetsteorien, så att materialet vore isotropt, homogent och följde Hooke's lag, skulle den av Saint Venant utvecklade vridningsteorien giva möjlighet att ur betongens draghållfasthet, som är lägre än skärhållfastheten, bestämma bärförmågan.

I ett par viktiga avseenden uppfyller emellertid betong ej dessa förutsättningar.

För det första äro de verksamma "elasticitetskurvorna" även vid påkänningar avsevärt lägre än brottpåkänningarna olika för tryck och dragning och dessutom på grund av plasticeringen böjda.

För det andra är även dragbrott hos betong förenat med en i förhållande till övriga deformationer ej försumbar brottöjning, om såsom vid vridningen av en massiv balk de mest ansträngda partierna stödjas av partier, som äro mindre belastade. Förutom en utjämning av påkänningsfördelningen över tvärsnittet kan dessutom en förhöjning av draghållfastheten i de mest ansträngda partierna gentemot hållfastheten vid ren dragning anses möjlig.

Då den rena draghållfastheten är betydligt mer provad än bärförmågan vid vridning, är det på sin plats att den förstnämnda beröres och att något nämnes om sambandet mellan drag- och tryckhållfasthet.

B. Drag- och tryckhållfasthet

När man jämför drag- och tryckhållfasthet, bör man ha i minnet, att den rena draghållfastheten i mer utpräglad grad än tryckhållfastheten är beroende på graden av uttorkning i olika delar av betongen. De värden, som kunna återfinnas i litteraturen, avvika därför i rätt utpräglad grad från varandra. Vidare är ett rent dragprov på grund av svårigheterna

att undvika excentriciteter och spänningskoncentrationer försöksmässigt ett av de svåraste prov, som kan företagas. Slutligen är draghållfastheten liksom tryckhållfastheten beroende på längden hos provet och av tvärsnittets utformning, vilket tydligt framgår av resultaten av kontrollproven till försöken i avd. II.

Vid Byggnadsstatiska Institutionen, Tekniska Högskolan, Stockholm har förf. som 1:e assistent hos Professor Carl Forssell haft tillfälle att taga del av resultat från kontrollprov på betong av olika hållfastheter.¹ Vid en serie förelåg exempelvis 15 prov, tagna ur 8 olika satser, gjutna av singelbetong med sammansättningen i torra viktsdelar cement:sand:sten 1:3,4:4,3 och vc-talet 0,75. Cementen var specialcement, och proven lagrades efter gjutningen i fuktighetsmättad luft med temperatur +20° C under en vecka och därefter i torkrum med temperaturen +20° C och 55 % fuktighet under de återstående två veckorna före provningen. Kubhållfastheten bestämdes ur 34 prov till 264 kg/cm² ± 5,2 %, där medelfelet är beräknat ur formeln

$$m = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n-1}}$$

Draghållfastheten bestämdes ur 15 prov till 18,8 kg/cm² ± 13,1 %, där medelfelet bestämts ur ovanstående formel. Den fria draglängden var 64 cm. Vid dessa dragprov kom brottet endast vid några prov i närheten av infästningarna, varför medelfelet kan anses som tämligen ordinärt för betong med liknande sammansättning. Om man på grundval av ovanstående söker skaffa sig en uppfattning om storleken på draghållfastheten vid en fri längd av 4 cm, vilken längd förekommer i de i avd. II skildrade kontrollproven, erhålles med utgångspunkt från medelfelet 13,1 % en förhöjning av draghållfastheten med 25 %.² Detta medelfel 13,1 % utgör dock en undre gräns för medelfelet vid de korta proven, varför förhöjningen av draghållfastheten bör vara större än 25 %. Det anförda ger anvisning om inverkan av dragkroppens längd på hållfastheten. Tvärsnittets storlek har liknande betydelse. Dessutom tillkommer här, att förhållandet mellan maximal stenstorlek och minsta tvärsnittsmått troligen inverkar på draghållfastheten. För dragprov har, författaren veterligt, inga systematiska undersökningar härav utförts. Däremot har detta gjorts vid tryckprov. Sålunda fann McMillan, att vid tryckprov med cylindrar

¹ Dessa kontrollprov ha utförts som komplement till andra undersökningar. Publicerandet av resultaten sker här med professor Forssells medgivande.

² Denna förhöjning av 25 % erhålles med utgångspunkt från medelfelet 13,1 % och från ett antagande av normal spridningsfördelning hos strövärdena. Om den fria draglängden skulle väljas så liten som 2 cm, skulle en på sannolikhetskalkyl grundad beräkning vid medelfelet 13 % ge en förhöjning av draghållfastheten med 33 % jämfört med dragprov med den fria draglängden = 64 cm.

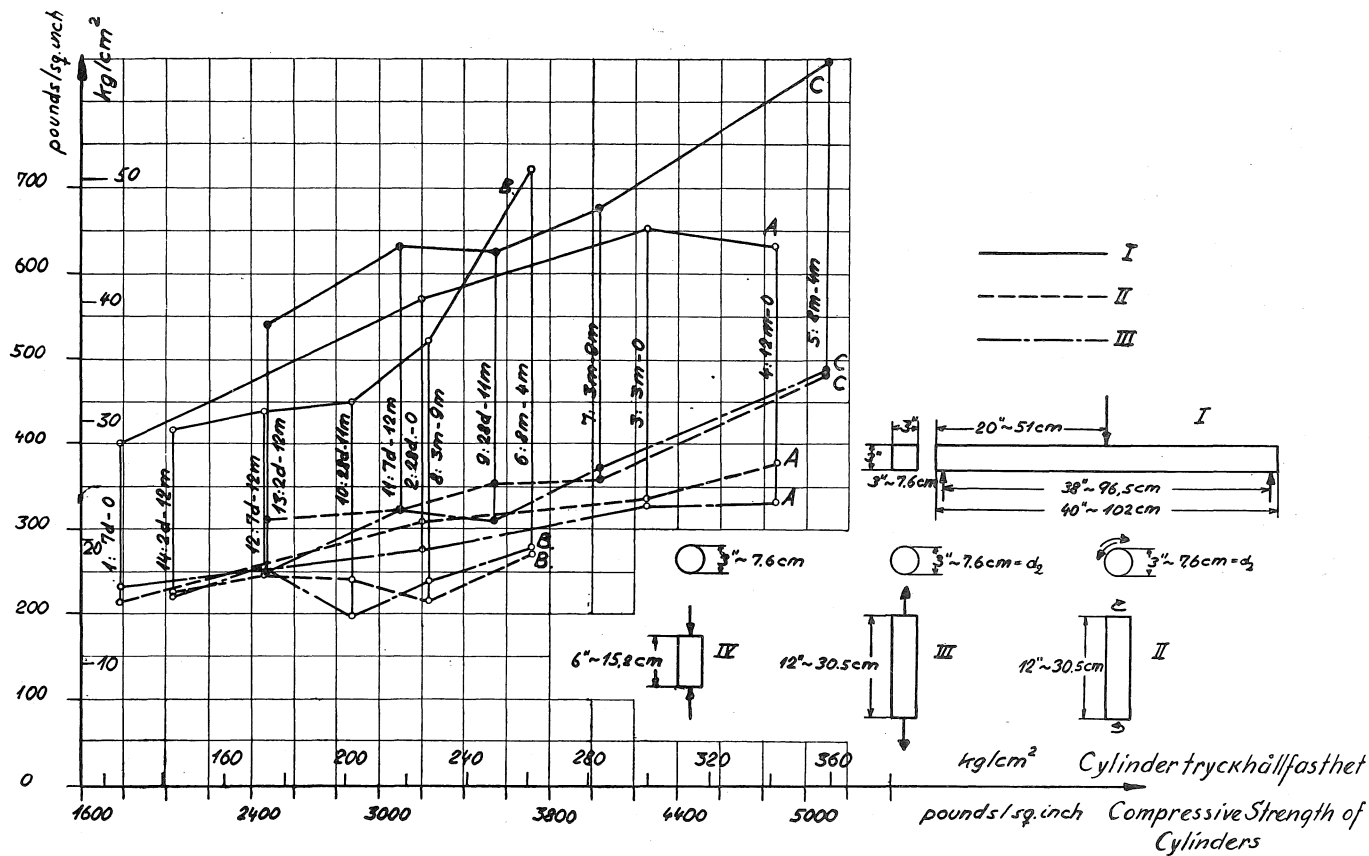


Fig. 1. Sammanställning av försöksvärden enligt Gilkey (se not 2 s. 10). Böj- (I), vrid- (II) och drag (III)-hållfasthet som funktion av tryckhållfasthet (IV). Varje markerat värde anger medeltalet av 2 prov; vid tryckcyklindrarna dock 5 prov. Betongsammansättning, cement : grus 1 : 3,25 efter vikt. Max. stenstorlek $\frac{3}{8}$ " \approx 1 cm. V.-C.-tal 1,00. De på de vertikala linjerna angivna tidsuppgifterna avse: den första siffran tiden för fuktig lagring, den andra tiden för torr lagring. De prov, som efter torr lagring provades i vått tillstånd B, blötades 24 timmar före provningen. C provades i torrt tillstånd.

Fig. 1. Summary of results of bending, torsional, tensile, and compressive tests made by Gilkey (see Note 2 on page 10). The bending (I), torsional (II), and tensile (III) strengths are plotted as functions of the compressive (IV) strength. Each value plotted in the graph represents an average of 2 tests with the exception of the compressive tests on cylinders where the average is given for 5 tests. Concrete mix, cement : gravel 1 : 3,5 by weight. Maximum size of coarse aggregate $\frac{3}{8}$ " \approx 1 cm. Watercement ratio 1,00. The figures at the vertical lines have the following significance: the first figure gives the time of moist curing and the second figure gives the time of dry curing. Those specimens which were tested in moist condition after dry curing (B) were wetted for 24 hours prior to the test. The specimens C were tested in dry condition.

hade den maximala stenstorleken ej någon betydelse, om den ej överskred $\frac{1}{4}$ av cylinderdiametern.¹ Liknande resultat erhöles vid undersökningar, utförda av Bureau of Reclamation². Man skulle med ledning av detta kunna fastslå som övre gräns för maximala stenstorleken $\frac{1}{4}$ av minsta tvärmått även vid dragprov. Det viktiga vid jämförelse mellan resultaten från olika belastningsprov är, att provkropparna i stort sett ha samma dimensioner.

Även lagringsförhållandena ha inflytande på förhållandet mellan draghållfasthet och tryckhållfasthet. Upplýsande är i detta avseende en undersökning, relaterad av Gilkey³. Denna undersökning omfattade bl. a. en mängd kontrollprov av betong med olika hållfasthetsegenskaper vid olika ålder och lagringar. Resultaten, hämtade från Gilkey's tabeller, ha sammanställt i diagram i fig. 1 på så sätt, att böjdraghållfasthet, draghållfasthet och vridhållfasthet uppritats såsom funktioner av cylinderhållfastheten. Viktigare data beträffande betongsammansättning och provkropparnas form framgå av figuren. För detaljer i provningsförfarandet i övrigt hänvisas till utförlig beskrivning i Arch Dam Investigations Volume II, May 1934, Sub-Committee on Model Tests.

Tre olika lagringar förelågo. Vid de med A betecknade kurvorna lagrades proven i fuktigt tillstånd från gjutning till provning. I de med B betecknade kurvorna varierade för olika serier förhållandet mellan tiderna för lagring i fuktigt och torrt tillstånd, såsom angives i figuren. Provningen skedde här i vått tillstånd. I de med C betecknade kurvorna varierade även förhållandet mellan lagringstiderna, men här skedde provningen i torrt tillstånd. Kurvorna över böjdraghållfastheterna kunna i detta sammanhang lämnas utan avseende. Till vridhållfastheterna återkommes senare.

Det är som synes en markerad skillnad mellan resultaten vid de olika lagringsförhållandena.

Förhållandet $\frac{\text{draghållfasthet}}{\text{tryckhållfasthet}}$ blir störst för växel-lagring och provning i torrt tillstånd (enligt kurva C)⁴.

Om man såsom ett medeltal för draghållfastheten vid de olika lagringsbetingelserna antar 29,5 kg/cm² vid cylinderhållfastheten 360 kg/cm² och 15 kg/cm² vid cylinderhållfastheten 120 kg/cm² blir förhållandet $\frac{\text{draghållfasthet}}{\text{cylinderhållfasthet}}$ 1:12 resp. 1:8. Om cylinderhållfastheten översattes till kubhållfasthet genom division med 0,8⁵, blir det nämnda förhållandet 1:15 och 1:10 för kubhållfastheterna 450 resp. 150 kg/cm². Jämfört med andra prov med större provkroppar är draghållfastheten väl hög. Vid de kontrollprov, som utförts vid Byggnadsstatiska laboratoriet med tryckhållfastheten

¹ F. R. McMillan: "Suggested Procedure for Testing Concrete in which the Aggregate is More Than One-Fourth of the Diameter of Cylinders". Proc. A.S.T.M. part I vol 30, 1930, s. 521.

² R. F. Blanks och C. C. Mc Namara: "Mass Concrete Tests in Large Cylinders". Proc Amer. Concrete Inst., vol 31, 1935, s. 280.

³ Se Gilkey's inlägg i diskussion till artikel av Paul Andersson: "Experiments with concrete in torsion", Transactions of the American Society of Civil Engineers. Vol 100, 1935, s. 949.

⁴ Med tanke på att krympspänningarna i de fuktighetslagrade proven borde vara mindre än i de växellagrade är detta faktum svårförståeligt. Andra faktorer, vilka sammanhånga med brottmekanism vid tryckprov och dragprov, måste här ha spelat in.

⁵ Detta värde utgör ett medelvärde av förhållandet mellan cylinder- och kubhållfasthet vid normala hållfastheter och torde med all sannolikhet variera inom det här betraktade registret. Systematiska undersökningar över denna variation föreligga, författaren veterligt, ej, varför medelvärdet användes.

bestämd genom kuber med sida 15 cm och draghållfastheten bestämd ur dragprismor med tvärsnitt 15×15 cm och fri draglängd 64 cm, har det motsvarande förhållandet varit ca 1:18 och 1:13.¹

C. Bestämning av bärförmågan vid åverkan av vridande moment ur draghållfastheten

Vid vridförsök med betongbalkar intar brottsprickan alltid 45° lutning i förhållande till längsaxeln. Detta tyder på att brott inträder, när huvuddragpåkänningarna uppnå brottvärdet. Huvuddragpåkänningarna skulle kunna beräknas ur den klassiska vridningsteorien eller Saint Venants teori, vilken såsom nämndes i inledningen utgår ifrån elasticitetsteoriens förutsättningar. Emellertid medföra de i förhållande till andra deformationer stora töjningarna före dragbrott en omlagring av påkänningsfördelningen från påkänningstillståndet vid små belastningar, som innebär en utjämnning av dragpåkänningarna över tvärsnittet.²

I stället för att uppfatta betong som ett material, vilket följer förutsättningarna för den klassiska elasticitetsteorien, synes det mer befogat att betrakta det som ett plastiskt material, för vilket plasticitetsvillkoret skulle lyda:

Påkänningsfördelningen över tvärsnittet blir sådan, att huvuddragpåkänningarna anta ett konstant värde, som är lika med betongens draghållfasthet.

Med beaktande av förutsättningen, att normalkraften är lika med noll, ligger det nära till hands att göra antagandet, att normalpåkänningarna över hela tvärsnittet äro lika med noll.

Plasticitetsvillkoret blir då formulerat på samma sätt som för konstruktionsstål, nämligen:

¹ Lagringen har här varit: 1 vecka i fuktighetsmättad luft med $+20^\circ$ C temperatur och återstående tiden till provningen, varierande mellan 2 och 3 veckor, i torkrum med $+20^\circ$ C temperatur och 55 % relativ fuktighet. Om man vill omsätta dessa värden i formel av typen

$$\sigma_{dr} = k \sqrt[3]{(\sigma_{kub})^2}$$
 erhålles för $\sigma_{kub} = 150$ och förh. $\frac{1}{13}$ $k = 0,41$ och för $\sigma_{kub} = 450$ och förh. $\frac{1}{18}$ $k = 0,42$. Ifrågavarande formel har angivits av Stig Giertz-Hedström: "Rationellare metoder för bestämning av hållfastheten hos cement", IVA, Stockholm, 1934: 1. Giertz-Hedström har härlett denna formel ur försök med cementbruk; vid tillämpning på betong verkar det dock

som om relativt entydiga resultat skola erhållas.

² I "Statische Auswertung der Versuchsergebnisse" till "Verdrehungsversuche zur Klärung der Schubfestigkeit von Eisenbeton" i Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens H. 258, Berlin 1922, har Mörsch sökt att med utgångspunkt från olikheterna mellan på kontrollprov uppmätta elasticitetstal för dragning och tryck härleda tillvägagångssätt för bestämning av vridhållfastheten hos betong. Bortsett från att vid redogörelsen för de försök, på vilka han grundar sin teori, belastningshastigheterna ej redovisats vid bestämning av elasticitetstalen för tryck och dragning — belastningshastigheten har troligen varit större vid tryckproven — har hans teori värde för beskrivandet av påkänningsfördelningen endast vid laster avsevärt under brottlasten, emedan han ej beaktat de stora töjningarna före brott.

Påkänningsfördelningen blir sådan, att skärpåkänningarna över hela tvärsnittet anta ett konstant värde lika med draghållfastheten.

Härigenom erhållas enkla formler för bärförmågan vid olika utseenden på tvärsnitten, och en sådan utformning av plasticitetsvillkoret har i huvudsak samma innebörd som den ovan först formulerade, nämligen en utjämning av påkänningarna över tvärsnittet.

Vid tolkandet av försöksresultaten har man i de i litteraturen skildrade undersökningarna huvudsakligen använt sig av formler, uppbyggda på elasticitetsteorien. Nedan följer en granskning av tillgängliga undersökningsresultat på basis av plasticitetsteorien, varvid även värden på skärpåkänningarna, erhållna ur elasticitetsteorien, medtagas för jämförelsens skull. Angående beräkning av skärpåkänningarna se bilaga.

I tabell 1 äro resultaten från en vridningsundersökning av Bach och Graf sammanställda.¹ Denna undersökning är den noggrannaste med största antalet kontrollprov av dem som förf. funnit skildrade i litteraturen. Värden för τ_{brott} enligt elasticitetsteorien och plasticitetsteorien samt olika hållfasthetsvärden för den använda betongen äro sammanställda i tabellen.

Förhållandet mellan τ enligt plasticitetsteorien och σ_{dragning} avviker mycket litet från 1,0 utom för rörsektionen. Det minsta tvärmåttet i denna är emellertid blott 7,5 cm, varför detta prov knappast är jämförbart med de övriga.²

Vid de undersökningar av Gilkey, som skildrades på s. 10, gjordes parallellt vrid- och dragprov. Resultaten framgå av fig. 1, där τ är beräknat enligt plasticitetsteorien. Överensstämmelsen med draghållfastheten är såsom framgår av de inritade kurvorna utomordentligt god.

Den av Gilkey själv angivna förhöjningen med 25 % gentemot den rena draghållfastheten hos det enligt elasticitetsteorien beräknade τ_{brott} bör enligt hans försöksresultat sättas lika med 33 %, vilket procenttal anger skillnaden mellan bärförmågan vid åverkan av vridande moment enligt plasticitetsteorien och elasticitetsteorien vid *cirkeltvärsnitt*. (Denna skillnad är vid kvadratisk tvärsnitt 60 %, vid rektangulärt med sidoförhållandet 2:1 69 % och vid rektangel med den minsta sidan mycket liten 54 %.)

De ovan skildrade vridundersökningarna av Bach och Graf och av Gilkey äro de enda av de i litteraturen skildrade, som förf. påträffat, där någorlunda rikligt antal kontrollprov — framför allt avses dragprov — å betongen tagits. Dessa undersökningar bestyrka påfallande hypotesen,

¹ Se Bach & Graf: "Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Beton und Eisenbeton gegen Verdrehung", Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, Heft 16.

² I detta sammanhang kan nämnas, att samtliga provkroppar från gjutning till provning lagrades fuktigt.

Vridprov			Dragprov		Tryckprov		$\frac{\tau_1}{\sigma_1}$	$\frac{\tau_2}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_2}{\tau_1}$	$\frac{\sigma_2}{\tau_2}$
Prov-kroppens format	τ_1 ($\tau_{el.}$) vid brott enl. el-teorien kg/cm ²	τ_2 ($\tau_{pl.}$) vid brott enl. plasticitetsteorien kg/cm ²	Prov-kroppens format	σ_1 ($\sigma_{dragn.}$) vid brott kg/cm ²	Prov-kroppens format	σ_2 ($\sigma_{tryck.}$) vid brott kg/cm ²				
Prisma Tvärsnitt Kvadrat 30 cm sida Längd 115 cm	35,6 31,0	22,2 19,4			Kub 30 cm sida	237 256 247 235				
	Med. 33,3	Med. 20,8				Med. 244				7,3 11,7
Cylinder Diameter 40 cm Längd 115 cm	25,7 27,3 23,7	19,3 20,5 17,8	Prisma Tvärsnitt Kvadrat 20 cm sida Längd 145 cm	18,6; 21,0 18,4; 15,4 19,4; 18,9 Med. 18,6	Kub 30 cm sida	Med. av 18 prov 248 Min.-värde 218 Max.-värde 268	1,37	1,03	kub 9,7 12,9	
	Med. 25,6	Med. 19,2			Prisma Tvärsnitt Kvadrat 20 cm sida Höjd 80 cm	204 195 209 210 210 198 Med. 204			prisma 8,0 10,6	
Rör Utv. diam. 40 cm Inv. diam. 25 cm Längd 115 cm	17,8 15,6 18,0	15,0 13,2 15,1	»	»	»	»	0,92	0,78	kub 14,5 17,2	
	Med. 17,1	Med. 14,4							prisma 11,9 14,2	
Prisma Tvärsnitt Kvadrat 30 cm sida Längd 115 cm	30,4 30,2 30,7	19,0 18,8 19,2	»	»	»	»	1,63	1,02	kub 8,2 13,0	
	Med. 30,4	Med. 19,0							prisma 6,7 10,7	
Prisma Tvärsnitt Rektangel 42 × 21 cm Längd 115 cm	32,9 31,8 32,9	19,4 18,8 19,5	»	»	»	»	1,75	1,03	kub 7,6 12,9	
	Med. 32,5	Med. 19,2							prisma 6,3 10,6	

Tabell 1. Sammanställning av hållfasthetsvärden, beräknade ur undersökning av Bach och Graf.

Betongsammansättning i volymdelar: 1 d. Portlandcement : 2 d. Rhensand 0—7 mm : 3 d. Rhenkis 7—20 mm. 9 % vatten i vikt av torra material.

att man vid enbar vridning av betong kan bestämma bärförmågan genom att sätta τ beräknat enligt plasticitetsteorien¹ lika med betongens rena draghållfasthet.

Av övriga undersökningar kan nämnas den av Graf och Mörsch beskrivna². De intresserande resultaten återfinnas i tab. 2, där de olika hållfastheterna beräknats och sammanställts på samma sätt som i tab. 1.

Vridprov			Dragprov		Tryckprov		$\frac{\tau_1}{\sigma_1}$	$\frac{\tau_2}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_2}{\tau_1}$	$\frac{\sigma_2}{\tau_2}$		
Prov-kroppens format	τ_1 ($\tau_{el.}$) vid brott enl. el.-teorien kg/cm ²	τ_2 ($\tau_{pl.}$) vid brott enl. plasticitetsteorien kg/cm ²	Prov-kroppens format	σ_1 (σ_{drag}) vid brott kg/cm ²	Prov-kroppens format	σ_2 (σ_{tryck}) vid brott kg/cm ²						
Cylinder Diameter 40 cm Längd 115 cm	19,6	14,7	Prisma Tvärsnitt Kvadrat 20 cm sida Längd ej uppgiven troligen 145 cm	11,0 12,2 11,3 Med. 11,5	Kub 30 cm sida	157	1,62	1,21	kub			
	20,2	15,1				149			8,1	10,8		
	15,9	11,9				144			6,7	8,9		
	Med. 18,6	Med. 14,0				144			prisma			
						172						
						169						
Rör Utv. diam. 40 cm Inv. diam. 25 cm Längd 115 cm	14,4	12,1					Prisma Tvärsnitt Kvadrat 20 cm sida Höjd 80 cm	151	1,20	1,01	kub	
	15,1	12,7			140	10,9		13,0				
	12,0	10,1			151	9,1		10,8				
	Med. 13,8	Med. 11,6			135	prisma						
					Med. 151							
					132							
		119										
		123										
		Med. 125										

Tabell 2. Sammanställning av försöksresultat enligt Graf och Mörsch.

Betongsammansättning i volymdelar Portlandcement: Rhensand: Rhenkis 1:2:3.

Vatten 9 vikt-% av torra beståndsdelar.

Det är att märka, att resultat från endast tre dragprov föreligga. Vidare är förhållandet mellan kubhållfasthet och draghållfasthet så stort som 13,1. Kubhållfastheten är 151 kg/cm². Vid Bachs och Grafs försök var kubhållfastheten 248 kg/cm² och förhållandet mellan kubhållfasthet och draghållfasthet 13,3. Man har då anledning att förvänta ett mindre förhållande mellan kubhållfasthet och draghållfasthet än 13,1 vid kubhållfastheten 151 kg/cm². Med tanke på att endast tre dragprov utförts av Graf och Mörsch och någon beskrivning av arrangemangen vid dragproven ej finnes i redogörelsen för försöken, synes det därför vara riktigast att ej tillmäta deras resultat alltför stort värde. Såsom framgår av tabell 2 erhålles förhållandet mellan τ enligt plasticitetsteorin och $\sigma_{dragning}$ till 1,21 vid cylinder och 1,01 vid rör. Båda värdena äro sannolikt för höga. Beträffande avvikelserna mellan de två provkropparna gäller vad som nämnts vid diskussionen av Bachs och Grafs försöksresultat.

¹ Plasticitetsvillkoret skulle, som ovan nämndes, bestå i att skärpkänningen över tvärsnittet är konstant.

² Se O. Graf och E. Mörsch: "Verdrehungsversuche zur Klärung der Schubfestigkeit von Eisenbeton", Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. H. 258.

En undersökning av Turner och Davies ger vissa upplysningar om bärformågan vid åverkan av vridande moment.¹ Även denna brister i avseende på kontrollprovets tillförlitlighet och antal. Så till exempel redovisas endast draghållfastheter, som dessutom variera starkt. Undersökningen är emellertid av speciellt intresse, emedan även T-balkar provats.

Tre olika balktyper med två balkar av vardera typen provades med avseende på vridhållfastheten. Tvärsnitt hos de provade balkarna se fig. 2 och 3.

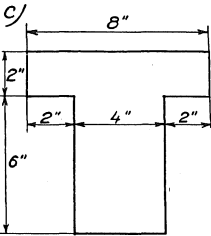
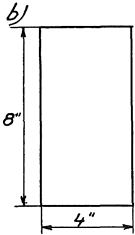
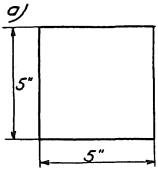


Fig. 2. Tvärsnitt hos de av Turner och Davies provade balkarna.

Draghållfastheten, utrönt genom prismor med 3" × 3" tvärsnitt, bestämdes till 21,0, 15,5, 14,7, 17,8, 14,8, 24,9, 15,0 och 10,9 kg/cm² eller i medeltal 17,0 kg/cm². Som synes är det en utomordentligt stor spridning på draghållfasthetsvärdena, vilket tyder på att arrangemangen vid provningen voro otillfredsställande. Sannolikt var draghållfastheten större än 17,0 kg/cm².

Om τ vid brott beräknas enligt plasticitetsteorien, erhålles för de två balkarna enligt fig. 2 a $\tau_{pl.} = 18,6$ resp. 20,8 med medelvärdet 19,2.

$$\text{Förhållandet } \frac{\tau_{pl.}}{\sigma_{dragn.}} \text{ blir } 1,13.$$

För balkarna enligt fig. 2 b erhålles $\tau_{pl.} = 15,9$ resp. 22,5 kg/cm² med medelvärde 19,2 kg/cm².

$$\text{Förhållandet } \frac{\tau_{pl.}}{\sigma_{dragn.}} = 1,13.$$

För T-balkarna enligt fig. 2 c erhålles $\tau_{pl.} = 18,0$ och 20,8 kg/cm² med medeltal 19,3 hg/cm².

$$\text{Förhållandet } \frac{\tau_{pl.}}{\sigma_{dragn.}} = 1,13.$$

I samtliga balkar med tvärsnitt enligt fig. 2 var $\frac{\tau_{pl.}}{\sigma_{dragn.}} > 1$. Turner och Davies utförde även en serie för att studera inverkan på brottmomentet av voüter vid T-balkar. Utseendet av de provade balkarna framgår av fig. 3. Balkarna götos av betong med liknande sammansättning som den, som användes till balkarna enligt fig. 2. Kontrollprov på betongen relateras emellertid inte i försöksredogörelsen. Man kan antaga, att draghållfastheten var i stort sett densamma som hos balkarna enl. fig. 2.

För beräkning av τ -påkänningarna enligt plasticitetsteorien hänvisas till bilaga .

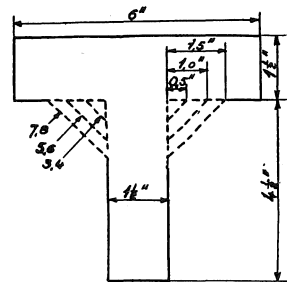


Fig. 3. Tvärsnitt hos de av Turner och Davies provade T-balkarna.

Fig. 3. Sections of the T-beams tested by Turner and Davies.

¹ Se Turner, L. och Davies, V. C.: "Plain and reinforced concrete in torsion, with particular reference to reinforced-concrete beams". The Institution of Civil Engineers. Selected engineering papers No. 165, London 1934.

Brottmoment i LBS-inches och beräknad påkänning enligt plasticitetsteorin i kg/cm² äro i fig. 4 uppritade som funktioner av voutstorleken i tum. Plasticitetsteorin ger uppenbart entydiga resultat vid olika utseenden på tvärsnittet. Anmärkningsvärt är, att den under förutsättning av elastiska förhållanden rådande påkänningskoncentrationen i övergång mellan liv och fläns saknar all betydelse för storleken på brottmomentet.

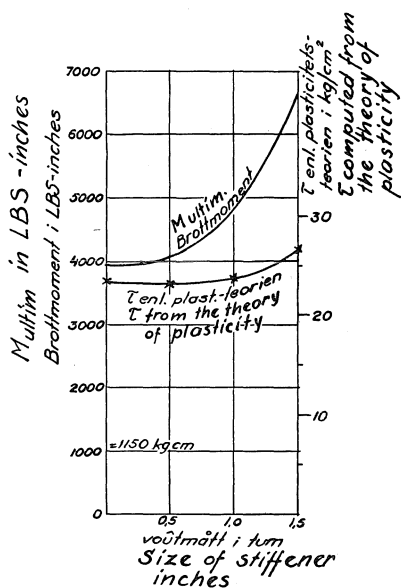


Fig. 4. Vridhållfasthet hos de i fig. 3 återgivna balkarna.

Fig. 4. Multim. and the shearing stresses computed from the theory of plasticity for various corner fillets of T-beams (the dimensions for the beams are given in fig. 3).

Bland övriga undersökningar, där bärformågan vid vridning av betong studerats, kunna nämnas den av Paul Andersen i American Soc. of Civil Eng., Transactions 1935 skildrade samt de till denna undersökning gjorda diskussionsinläggen av Russel, Turner, Fischer, Gilkey och Eremin.¹ Vid dessa undersökningar, utom de av Gilkey anförda, ha kontrollproven på betongen ej varit tillräckliga, för att man skall kunna draga någon bindande slutsats om förhållandet mellan beräknad skärpåskänning vid vridbrott och draghållfasthet.

Bland övriga undersökningar, där bärformågan vid vridning av betong studerats, kunna nämnas den av Paul Andersen i American Soc. of Civil Eng., Transactions 1935 skildrade samt de till denna undersökning gjorda diskussionsinläggen av Russel, Turner, Fischer, Gilkey och Eremin.¹ Vid dessa undersökningar, utom de av Gilkey anförda, ha kontrollproven på betongen ej varit tillräckliga, för att man skall kunna draga någon bindande slutsats om förhållandet mellan beräknad skärpåskänning vid vridbrott och draghållfasthet.

Sammanfattning

De vridningsförsök av klass, som skildrats i litteraturen, bestyrka arbetshypotesen, att bärformågan vid åverkan av vridande moment kan beräknas genom att skärpåskänningen vid brott, beräknad enligt plasticitetsteorin,² sättes lika med betongens draghållfasthet. Formler för skärpåskänningen vid olika tvärsnittstyper anges i bilaga 1.

För rektangulära balkar innebär beräkningen enligt plasticitetsteorin ett värde på M_{vbr} som är ca 60 % högre än vid beräkning enligt elasticitetsteorin. Om man sätter τ_{max} erhållet ur elasticitetsteorin lika med draghållfastheten, erhålles alltså vid enbart vridning av betongbalk en beräknad bärformåga, som är ca 40 % lägre än den verkliga.

¹ Se Paul Andersen: "Experiments with concrete in torsion", Trans. of the Am. Soc. of Civ. Eng., 1935 s. 949.

Bland övriga undersökningar kan nämnas: Paul Andersen: Rectangular Concrete Sections Under Torsion, Journal of the American Concrete Institute, Vol. 9, 1937, s. 1.

² Plasticitetsvillkoret uttryckes härvid på samma sätt som för konstruktionsstål, nämligen: "Påkänningsfördelningen blir sådan, att skärpåskänningarna över hela tvärsnittet anta ett konstant värde, lika med brottvärdet."

II. Normaltryck och vridning

A. Inledning

Belastning med enbart vridande moment förekommer ytterst sällan i verkligheten. I allmänhet är balken dessutom belastad med böjande moment och åverkad av avskärningskraft. För att ernå en grundval för studiet av samtidig böjning och vridning har förf. utfört en undersökning av inverkan av normaltryck på vridningsföreteelserna.

Det framgår ur olika hållfasthetsprovningar på betong, att huvuddrag-påkänningarna vid de flesta belastningsfall, där brottet ej består i renodlat tryckbrott, om ej uteslutande så dock i väsentlig grad bestämma brottet.

I en stav, som åverkas av vridande moment, är enligt vridningsteorien för ett homogent, fullständigt elastiskt material $\sigma \perp$ längsaxeln (z-axeln), dvs. σ_x och σ_y lika med noll. Detta kan ej förändras nämnvärt av avvikelserna vid betong från de ideella förutsättningarna, emedan normal-påkänningarna mot begränsningsytorna äro lika med noll.

I en godtycklig punkt av tvärsnittet kan τ av det vridande momentet beräknas. Detta kan då ske antingen efter elasticitetsteorien eller plasticitetsteorien. Man kan ur det faktum, att brottet vid åverkan av enbart vridande moment bäst beskrives av plasticitetsteorien, på förhand ej draga den slutsatsen, att detta också skall gälla vid samtidig åverkan av normaltryck. Vid tolkningen av försöksresultaten räknas därför i det följande både enligt elasticitets- och plasticitetsteorien.

Följande beteckningar införs (se fig. 5):

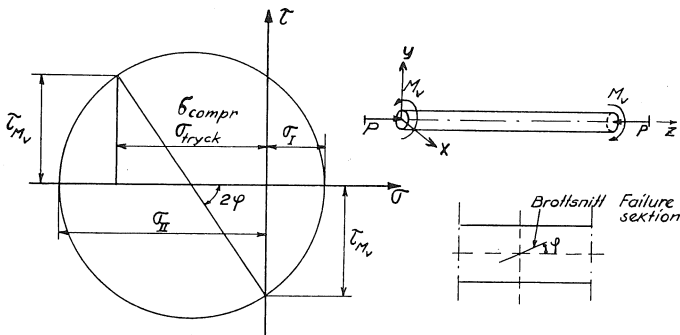


Fig. 5. Mohr's påkänningscirkel vid normaltryck och vridning.

Fig. 5. Mohr's circle diagram for compound compressive and torsional stress.

- M_v = vridande moment
 P = normalkraft
 $\sigma_{tryck} = \frac{P}{A}$ (A = tvärsnittsarean)
 $\tau_{M_v el}$ = maximal skärpå känning av vridning i snitt \perp z-axeln, beräknat enligt elasticitetsteorien
 $\tau_{M_v pl}$ = skärpå känning av vridning i snitt \perp z-axeln, beräknat enligt plasticitetsteorien
 σ_I = huvuddragpå känning
 σ_{II} = huvudtryckpå känning.

För $\tau_{M_v el}$ och $\tau_{M_v pl}$ användes dessutom den sammanfattande beteckningen τ_{M_v} . Vidare användas på vissa ställen de kortare beteckningarna τ_{el} och τ_{pl} .

Såsom arbetshypotes förutsättes, att brott inträffar, när huvuddragpå känningen σ_I blir lika med betongens rena draghållfasthet, σ_{dr} . Ur Mohrs på känningscirkel (se fig. 5) erhålles

$$\sigma_I = \sqrt{\tau_{M_v}^2 + \frac{1}{4} \sigma_{tryck}^2} - \frac{1}{2} \sigma_{tryck} \dots \dots \dots (1)$$

Ekv. (1) anger, att M_v vid brott, som är proportionellt mot τ_{M_v} , ökas vid på förande av normaltryck på staven.

B. Försök (Serie I och II)

a. Omfattning, betongsammansättning

De nedan skildrade försöken utfördes i examensarbete i Byggnadsstatik av nuvarande civilingenjörerna Carl Krook och Lars-Erik Nivander under författarens ledning.

Två serier, I och II, utfördes.

Serie I.

Serie I bestod av 8 satser, vardera innehållande en vridbalk jämte erforderliga kontrollprov. Dessa senare utgjordes i varje sats av 4 tryckkuber (sida 15 cm), 2 långa dragprismor ($15 \times 15 \times 90$ cm³) för bestämning av draghållfastheten samt i varannan sats två tryckprismor ($15 \times 15 \times 90$ cm³) för bestämning av tryckelasticitetskurvan, och i varannan sats två böjbalkar ($15 \times 15 \times 90$ cm³) för bestämning av böjdraghållfastheten. I vardera av de två sista satserna i denna serie götos dessutom 2 korta dragprismor ($15 \times 15 \times 30$ cm³).

Betongen hade sammansättningen i viktsdelar A-cement:sand:sten 1:3,4:4,3. Vattencementtal var 0,69. Eftersträvad konsistens var slumpmått ca 5 cm.

Sanden var natursand från Stockholmstrakten.

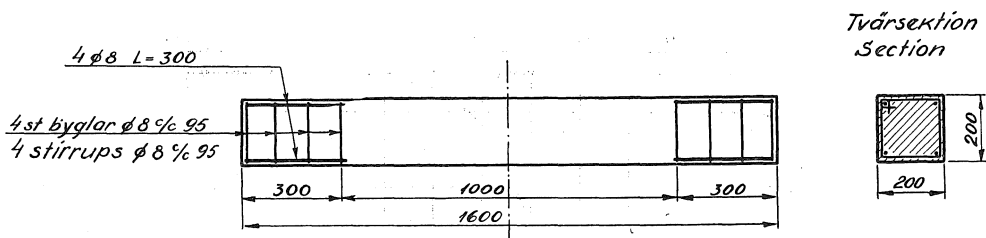


Fig. 7. Dimensioner och armering hos provbalkar i serierna I och II (normaltryck och vridning).

Fig. 7. Dimensions and reinforcement of the beams used for the test series I and II (compressive and torsional tests).

var i sin ände fäst vid en betongklump, som tjänstgjorde som motvikt, och på den andra hävarmen påfördes belastning av vikter. Provbalken var upplagd på kullager vid båda ändarna, varigenom den blev fritt vridbar. Vid den ände, där det belastande momentet påfördes, var kullagret dessutom placerat på rullager, varigenom balkändarna blevo inbördes rörliga i längsled, och normalkrafter, som eljest skulle framkallas av balkens vridning, undvekos. Vridningsaxeln går genom kulledernas centra och ej genom balkens centrumlinje. När såsom vid försöken balkens centrumlinje vid båda ändarna har möjlighet att oberoende av yttre tvång ställa in sig fritt i sidled — detta åstadkoms vid motviktsänden genom att motviktsbalkens förankrande kraft överfördes till motvikten genom klena rundjärn (ϕ 6) med i detta sammanhang försumbart böjningsmotstånd — bliva vridningsföreteelserna identiska vid godtyckligt läge på vridningsaxeln.

Av fig. 8 framgår provningsanordningen vid samtidigt verkande normaltryck. Vid vardera provbalksänden fanns ett mothåll, bestående av 2 st. UNP 22. De båda mothållen voro förbundna med 2 st. rundjärn ϕ 40. Normaltrycket åstadkoms genom 2 st. hydrauliska domkrafter (maximal kapacitet vardera 20 ton), anbringade enligt figuren. Mellan domkrafterna och provbalk voro för fixerande av normalkraftens riktning insatta kulleleder. Vid den andra provbalksänden var mellan balk och led insatt ett axialkullager, varigenom åstadkoms, att provbalkens vridning skedde utan att någon nämnvärd del av det vridande momentet upptogs av anordningen för åstadkommandet av normaltrycket. Arrangemangen vid båda provbalksändarna framgå av foto fig. 9.

Belastningshastigheten var:

1. Höjning av det vridande momentet 60 kgm på 1 minut motsvarande τ -påkänning, beräknad enligt plasticitetsteorien av 2,25 kg/cm² och enligt elasticitetsteorien 3,5 kg/cm²;
2. Konstanthållande av lasten under 2 min, varefter höjning med 60 kgm på 1 min osv.

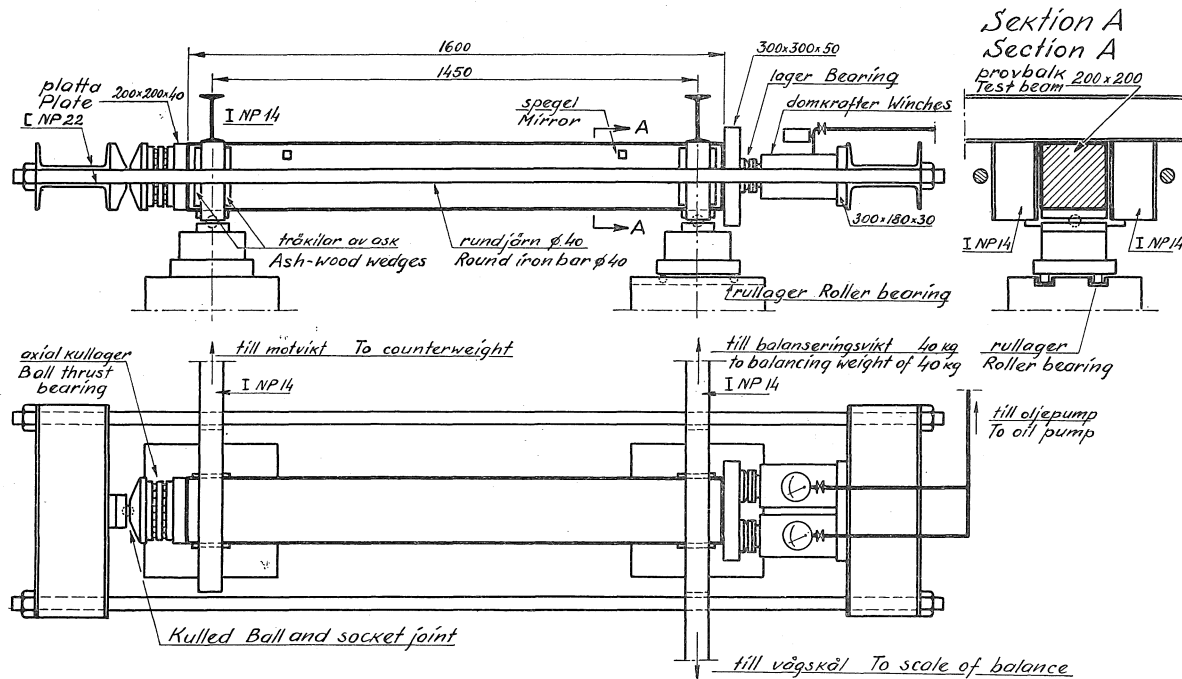
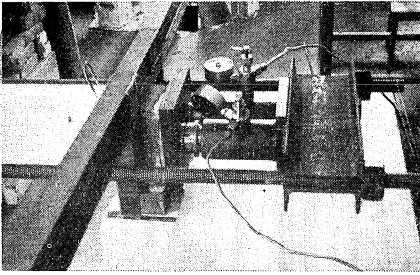
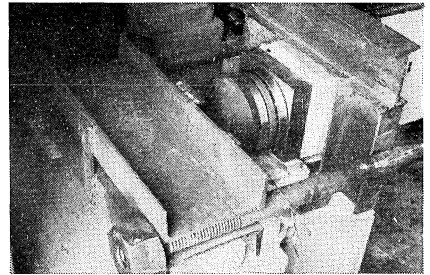


Fig. 8. Provningsanordning vid serierna I och II (normaltryck och vridning).
 Fig. 8. Testing arrangements for the test series I and II (compressive and torsional tests).



a

Fig. 9. Foto av arrangemangen vid balk-
ändar i serierna I och II (normaltryck
och vridning).



b

a) Anordnandet av domkrafterna för åstad-
kommandet av tryck. b) Lagring vid
motsatt ände.

På mätlängd av 1 m mättes vridningsvinkeln med kikare och skala samt med hjälp av på provbalken fastsatta speglar. Avläsning företogs omedelbart före och efter varje belastningshöjning.

Kontrollprov.

Tryckkuberna planades två dagar före provningen och trycktes med en belastningshastighet av ca $4,5 \text{ kg/cm}^2$ i sekunden.

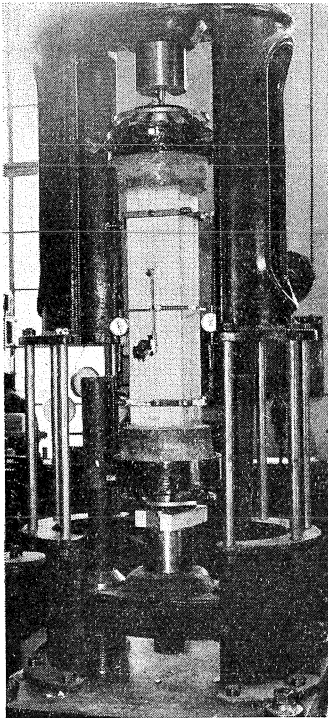


Fig. 10. Arrangemang vid
dragprov.

Dragprismorna provades med hjälp av den på s. 2 nämnda anordningen. Utseendet av provningsanordningen framgår av foto i fig. 10. Den fria draglängden (mellan infästningarna) var vid de långa dragprismorna 64 cm och vid de korta dragprismorna 4 cm.

Vid dragprismorna mättes töjningen med tensometrar med 20 cm mätlängd och med zeissklockor med 50 cm mätlängd (se fig. 10), vid tryckprismorna mättes sammantryckningen med zeissklockor med 50 cm mätlängd.

Böj balkarna, vilka hade tvärsnittet $15 \times 15 \text{ cm}^2$, hade den fria spännvidden 80 cm och belastades med två punktlaster på 15 cm avstånd från upplagen. Belastningshastigheten hos kontrollproven motsvarar belastningshastigheten hos huvudproven. Den framgår av tabell 3 och elasticitetsdiagrammen.

c. Brottvärden

Serie I.

Huvudprov.

Resultaten till serie I äro sammanställda i tabell 3.

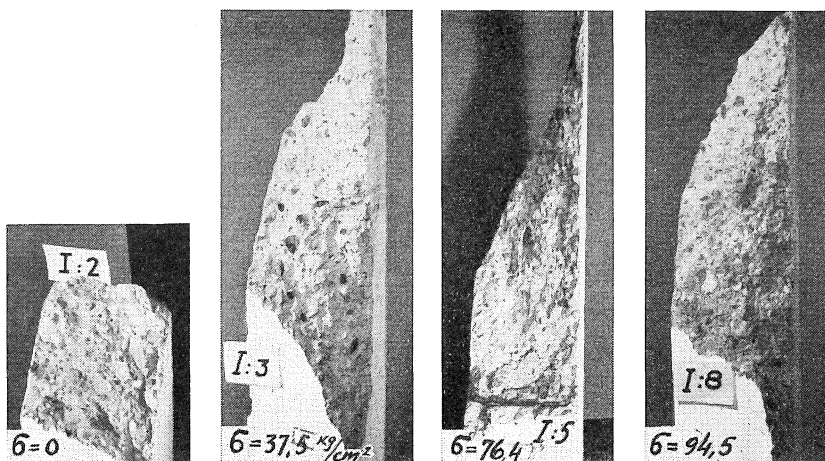


Fig. 11. Utseende vid brott av balkar i serie I åverkade av normaltryck och vridning.
 Fig. 11. Failures of the beams subjected to compression and torsion in the test series I.

Dimensionerna för de olika provkropparna äro angivna under tabellen.

Med avseende på beteckningarna till vridproven hänvisas till fig. 5. σ_{tryck} betecknar den påförda axiella tryckpåkänningen, σ_I huvuddragpåkänningen, σ_{II} huvudtryckpåkänningen, τ_{M_v} beräknat τ av vridningen enbart. τ_{M_v} har beräknats både enligt elasticitets- och plasticitetsteorin, vilket medför olika värden på σ_I och σ_{II} .

Såsom framgår av tabell 3 varierade normaltrycket från 0 till 94,5 kg/cm². Vid det största normaltrycket var det vridande moment, som balken kunde upptaga, 2,35 gånger så stort som vid normaltrycket noll.

Som synes av tabellen ger för denna serie antagandet, att brottet bestämmas av storleken på maximala huvuddragpåkänningen, god överensstämmelse med verkligheten, om τ_{M_v} beräknas enligt plasticitetsteorin. Medelvärde på $\sigma_{I_{pl}}$ är 21,1, lägsta värde 19,4 och högsta värde 23,3 kg/cm². Om τ_{M_v} beräknas enligt elasticitetsteorin blir överensstämmelsen ej fullt så god. Medelvärde på $\sigma_{I_{el}}$ är 41,5; lägsta värde 31,4 och högsta värde 45,3 kg/cm². I de tre sista kolumnerna i tabell 3 äro angivna uppmätta samt enligt plasticitets- och elasticitetsteorin beräknade brottvinklar φ (se fig. 5). Det ligger i sakens natur, att de uppmätta värdena äro något osäkra. Det är dock påtagligt, att de uppmätta brottvinklarna i likhet med de beräknade avtaga med det ökade normaltrycket.

I fig. 11 återfinnas foton av balkarna i serie I efter brott. Vid växande normaltryck bli brotten spetsigare samtidigt som brottytans karaktär av spiralyta åtminstone i de renare fallen framträder tydligare än vid normaltrycket noll.

Sats Group Nr	Vol. vikt Volume Weight kg/l	Sätt- mått Stump cm	K o n t r o l l p r o v C o n t r o l T e s t s										$\frac{\sigma_p}{\sigma_B}$	$\frac{\sigma_{dL}}{\sigma_B}$	$\frac{\sigma_{bd}}{\sigma_B}$
			Tryck- kuber ¹ Compr. Strength of Cubus ¹ σ_B kg/cm ²	Dragprov ² Tensile Strength ²		Dragprov ³ Tensile Strength ³		Böjprov ⁴ Bending Strength ⁴		Tryckprisma ⁵ Compr. Strength of Prisms ⁵					
				σ_{dL} kg/cm ²	Tid Time until Failure min.	σ_{dK} kg/cm ²	Tid Time until Failure min.	σ_{bd} kg/cm ²	Tid Time until Failure min.	σ_p kg/cm ²	Tid Time until Failure min.				
I: 1	2,37	5	320	18,6	13 : 00					251	105 : 06 117 : 54	0,77	0,059		
			314 309							232					
			314	18,6						242					
I: 2	2,34	5,5	307	19,7	1 : 37				35,2	2 : 50		0,066	0,120		
			304 309	20,7	1 : 26			38,9	2 : 55						
			307					37,0							
I: 3	2,34	2,5	318	17,3	3 : 50						15 : 45 120 : 00	0,077	0,054		
			304 296 319	16,2	2 : 10					242 236					
			309	16,8						239					
I: 4	2,35	3,5	308	17,4 (14,5)	3 : 50						3 : 15 2 : 10	0,057	0,116		
			305 309 294		9 : 50				42,6 28,0						
			304	17,4				35,3							

I: 5	2,33	5,5	308	(15,5)	3 : 05					236	178 : 20	0,77	0,058	
			306	17,4	3 : 30				228	13 : 01				
			302	17,4										
I: 6	2,32	5,5	269	18,4	4 : 05					27,6	2 : 05		0,069	0,108
			270	18,7	14 : 50				30,2	2 : 15				
			267	18,5					28,9					
I: 7	2,32	4,5	320	17,3	12 : 20	21,8	3 : 45				235	185 : 10	0,76	0,056
			323	17,8	4 : 30	20,8	3 : 25				236	13 : 55		
			300											
			304											
			312	17,6		20,3				236				
I: 8	2,33	4,5	318	17,2	4 : 15	25,8	4 : 10						0,057	0,094
			306	18,0	3 : 50	23,9	4 : 40	26,3	2 : 05					
			318							32,3	2 : 40			
			302											
			311	17,6		24,8			29,3					
Medeltal Average of all Tests	2,34	4,5	303	18,0		22,5			32,6		237	0,77	0,060	0,110

¹ 15 × 15 × 15 cm. — ² Tvärsnitt Section 15 × 15 cm. fri draglängd Clear length in Tension 64 cm. — ³ Tvärsnitt Section 15 × 15 cm. fri draglängd Clear length in Tension 4 cm. — ⁴ 15 × 15 × 90 cm. — ⁵ 15 × 15 × 90 cm.

Tabell 3. Resultat av serie I. Table 3. Results of Test Series I.

Betongsammansättning — cement : sand : singel 1 : 3,4 : 4,3 260 kg/m³ A cem.
Concrete Mix — Cement : Sand : Gravel $\frac{W}{C} = 0,69$

Forts. av tab. 3. *Table 3 continu'd.*

Vridprov ⁶ Torsional Tests ⁶											
Sats <i>Group</i>	Mv_{Brott} $Mv_{ultim.}$	σ_{tr}	τ_{el}	τ_{pl}	σ_{Ipl}	σ_{IIpl}	σ_{Iel}	σ_{IIel}	Brottvinkel <i>Angle between the Failure Cracks and the Axis</i>		
									Beräknad enl. <i>Computed from</i>		Upp- mätt
Nr	kg. cm	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	pl. teorin <i>the Theory of Plas- ticity</i> grad <i>Degrees</i>	el. teorin <i>the Theory of Elas- ticity</i> grad <i>Degrees</i>	grad <i>Degrees</i>
I: 1	54000	0	31,4	19,4	19,4	— 19,4	31,4	— 31,4	45	45	46
I: 2	60000	0	34,3	21,3	21,3	— 21,3	34,3	— 34,3	45	45	47
I: 3	106500	37,5	61,1	37,7	23,3	— 60,9	45,1	— 82,7	32	36	30
I: 4	96000	39,5	59,0	36,4	21,6	— 61,2	42,4	— 82,0	31	36	34
I: 5	126000	76,4	73,4	45,4	21,1	— 97,5	44,5	— 120,9	25	31	25
I: 6	126000	75,7	72,5	44,7	20,7	— 96,5	43,9	— 119,7	25	31	25
I: 7	132000	93,5	76,7	47,6	20,0	— 113,6	45,1	— 136,7	23	29	33
I: 8	135000	94,5	76,6	49,3	21,0	— 115,6	45,3	— 139,9	23	30	24
Medeltal <i>Average of all Tests</i>					21,1		41,5				

⁶ 20 × 20 × 160 cm.

Serie I.

Kontrollprov.

Resultaten av kontrollproven framgå av tabell 3. De inbördes förhållandena mellan de olika hållfasthetstalen äro ordinära.

Förhållandet mellan kubhållfasthet och draghållfasthet, erhållen ur de långa dragprismorna, är i medeltal 16,7 motsvarande ett värde på k lika med 0,40 i den i not 1 sid. 11 nämnda formeln. Motsvarande förhållande med draghållfastheten, erhållen ur de korta dragprismorna, är 13,8.

I de serier, där korta dragprismor provades, är förhållandet mellan de två draghållfastheterna =

$$= \frac{\sigma_{a_K}}{\sigma_{a_L}} = \frac{22,5}{17,6} = 1,28$$

Om man på samma sätt, som nämndes på s. 8 med utgångspunkt från spridningen hos hållfasthetsvärdena för de långa dragprismorna (medeltal 6 %; endast 6 korta dragprismor provades, varför medelfelet måste beräknas ur värdena för de långa dragprismorna) beräknar förhållandet mellan de korta och långa prismornas hållfasthet, erhålles detta lika med 1,11. Detta värde är, emedan spridningen hos de korta dragprismorna är större och det är denna spridning som bestämmer förhållandet, med säkerhet för litet. Jämför nästa serie.

Förhållandet $\frac{\sigma_{I_{pl}}}{\sigma_{a_L}}$ är i medeltal = $\frac{21,1}{18,0} = 1,17$ och förhållandet $\frac{\sigma_{I_{pl}}}{\sigma_{a_K}}$ i medeltal = $\frac{21,1}{22,5} = 0,94$.

Serie II.

Huvudprov.

Resultaten till serie II äro sammanställda i tabell 4.

Serien utfördes som komplement till serie I. Kubhållfastheten var lägre (193 kg/cm² mot 303 kg/cm² i serie I) men största normaltrycket samma som i serie I.

Angående beteckningarna gäller samma som för serie I.

Normaltrycket varierade från 0 till 94,0 kg/cm². Det största brottmomentet (vid $\sigma_{tryck} = 93,2$ kg/cm²) var 2,26 gånger så stort som det minsta brottmomentet (vid $\sigma_{tryck} = 0$). Antagandet, att brottet bestämmes av storleken på maximala huvuddragpåkänningen, ger god överensstämmelse med verkligheten. Medelvärde på $\sigma_{I_{pl}}$ är 14,4, lägsta värde 12,4 och högsta värde 17,8 kg/cm². Motsvarande värden för $\sigma_{I_{el}}$ äro 27,5, 23,9 och 34,5 kg/cm². Spridningen i kubhållfasthetsvärdena var här större än i serie I.

Uppmätta och beräknade brottvinklar överensstämma tämligen väl.

II: 5	2,29	4,5	212	13,9	3 : 09	16,8	4 : 00			138	150 : 09	0,69	0,077	0,094	
			195	15,8	4 : 25	19,3	4 : 40			123	6 : 00				
			182												
			208												
			193	14,9		18,1									
II: 6	2,28	4,5	182	14,5	10 : 37	16,1	4 : 30	25,1	1 : 50			0,080	0,151	0,089	
			178	13,6	2 : 56	15,5	3 : 30	28,2	2 : 04						
			175												
			172												
			177	14,1		15,8		26,7							
II: 7	2,28	5	197	13,3	2 : 55	17,4	3 : 50			132	6 : 25	0,73	0,067	0,075	
			193	13,8	3 : 05	12,7	2 : 55			158	148 : 17				
			202												
			216												
			202	13,6		15,1				145					
II: 8	2,29	5	211	14,7	10 : 12	16,8	4 : 15	27,8	1 : 50			0,073	0,140	0,083	
			197	13,9	3 : 10	15,7	3 : 45	27,4	2 : 00						
			190												
			190												
			197	14,3		16,3		27,6							
Medeltal Average of all Tests	2,29	5	193	13,5	15	15,3		25,5		138		0,70	0,071	0,138	0,079

¹ 15 × 15 × 15 cm. — ² Tvärsnitt Section 15 × 15 cm. fri draglängd Clear Length in Tension 64 cm. — ³ Tvärsnitt Section 15 × 15 cm. fri draglängd Clear Length in Tension 4 cm. — ⁴ 15 × 15 × 90 cm. — ⁵ 15 × 15 × 90 cm.

Tabell 4. Resultat av serie II. Table 4. Results of Test Series II.

Betongsammansättning — cement : sand : singel 1 : 5,2 : 5,6 180 kg/m³ A cem.
Concrete Mix — Cement : Sand : Gravel $\frac{W}{C} = 1,00$

Forts. av tabell 4. *Table 4 continued.*

Vridprov ⁶ <i>Torsional Tests</i> ⁶											
Sats <i>Group</i>	M_{vBrott} $M_{vultim.}$	σ_{br}	τ_{el}	τ_{pl}	σ_{Ipl}	σ_{IIpl}	σ_{Iel}	σ_{IIel}	Brottvinkel <i>Angle between the Failure Cracks and the Axis</i>		
									Beräknad enl. <i>Computed from</i>		Uppmätt
Nr	kg. cm	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	pl. teorin <i>the Theory of Plasticity</i> grad <i>Degrees</i>	el. teorin <i>the Theory of Elasticity</i> grad <i>Degrees</i>	Observed grad <i>Degrees</i>
II: 1	84000	29,9	47,2	29,2	17,8	— 47,8	34,5	— 64,5	31,5	36	30
II: 2		Balken gick sönder. <i>The beam broke.</i>									
II: 3	90000	70,6	51,9	32,2	12,5	— 83,1	27,5	— 98,1	21	28	26
II: 4	90000	71,3	52,6	32,7	12,7	— 84,0	27,9	— 99,2	22	28	21
II: 5	48000	0	27,2	16,8	16,8	— 16,8	27,2	— 27,2	45	45	51
II: 6	42000	0	23,9	14,8	14,8	— 14,8	23,9	— 23,9	45	45	48
II: 7	108000	92,4	61,8	38,2	13,8	— 106,8	25,6	— 118,0	20	27	27
II: 8	96000	94,0	56,1	34,9	12,4	— 106,4	26,2	— 120,2	19	25	22
Medeltal <i>Average of all Tests</i>					14,4		27,5				

⁶ 20 × 20 × 160 cm.

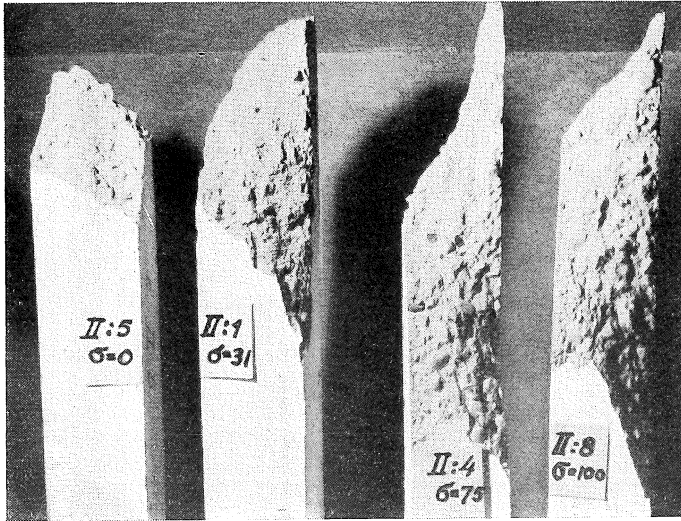


Fig. 12. Utseende vid brott av balkar i serie II åverkade av normaltryck och vridning.
 Fig. 12. Failures of the beams subjected to compression and torsion in the test series II.

Liksom vid serie I bli brotten spetsigare, och framträder spiralytan bättre vid ökat normaltryck (se fig. 12).

Serie II.

Kontrollprov.

Resultaten av kontrollproven framgå av tabell 4. De inbördes förhållandena mellan de olika hållfasthetstalen äro ordinära. Förhållandet mellan kubhållfasthet och draghållfasthet, erhållen ur de långa dragprismorna, är i medeltal 14,2, vilket motsvarar ett värde på k i den i not 1, s. 11 nämnda formeln lika med 0,40.

Förhållandet mellan hållfastheterna vid de korta och långa dragprismorna är lika med

$$\frac{15,3}{13,5} = 1,13.$$

Med utgångspunkt från medelfelet för de korta dragprismorna, som var 11,6 %, erhålles ett beräknat förhållande 1,19.

Förhållandet $\frac{\sigma_{Ipl}}{\sigma_{dL}}$ är i medeltal $= \frac{14,4}{13,5} = 1,06$ och förhållandet $\frac{\sigma_{Ipl}}{\sigma_{dK}}$ i medeltal $= \frac{14,4}{15,3} = 0,94$.

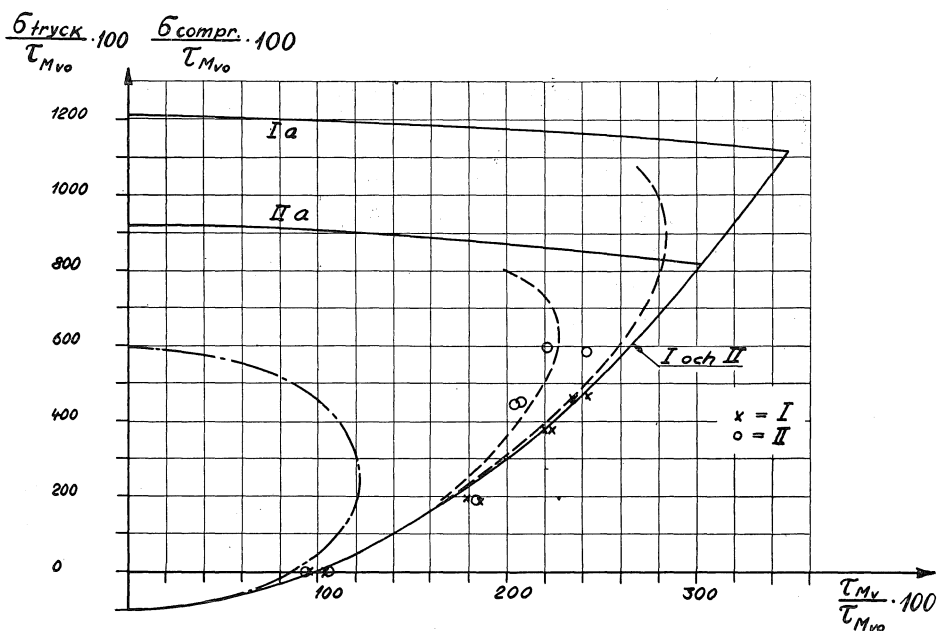


Fig. 13. Samband mellan normaltryck och τ_{Mv} , beräknat enligt plasticitetsteorien vid serierna I och II.

Fig. 13. A comparison between observed and computed values of strength in compression and torsion. The curves I and II give the calculated strength in the case where the principal tensile stress is equal to the tensile strength of the concrete (see Equation (I), p. 00). The curves Ia and II a give the calculated strength in the case where the principal compressive stress is equal to the compressive strength of the concrete. τ_{Mv_0} = computed shearing stress at failure in the tests where compression = 0

τ_{Mv} = computed shearing stress in the tests where compression $\neq 0$. The shearing stresses are computed from the theory of plasticity.

Diskussion och sammanfattning.

I diagramform kunna resultaten av försöken sammanfattas såsom skett i fig. 13.

Diagrammet illustrerar ekv. 1 s. 18. Med utgångspunkt från att brottet bestämes av huvuddragpåkänningen, d. v. s. att σ_I är konstant vid brott, har τ_{Mv} i % av τ_{Mv_0} (utan normaltryck) angivits som funktion av normaltrycket i % av τ_{Mv_0} . τ_{Mv} har beräknats enligt plasticitetsteorien, vilken enligt ovan ger entydigare resultat än elasticitetsteorien och dessutom möjliggör, att bärförmågan direkt kan uttryckas i rena draghållfastheten. Den beräknade grundkurvan är den heldragna, betecknad med I och II. Kurvorna Ia och IIa ange det ifrågasvarande sambandet, när brottet bestämes av att σ_{II} är lika med prismahållfastheten, och bestämma därigenom en spekulativt möjlig begränsning av grundkurvan. Serie I hör ges större vikt, emedan spridningen vid de flesta proven är avsevärt mindre än i serie II.

Den i serie II erhållna och i serie I med all sannolikhet förefintliga men ej helt verifierade avrundningen av den spekulativa spetsen vid övergång från I och II till Ia resp. IIa visar, att betongbrottet vid tryckpåkänningar i närheten av prismahållfastheten är beroende av såväl tryck- som dragpåkänning.

Avrundningen är beroende av storleken på prismahållfastheten. Av figuren framgår, att upp till en tryckpåkänning ungefär lika med halva prismahållfastheten gäller utan alltför stort fel arbetshypotesen, att brottet bestäms av storleken på huvuddragpåkänningen.

De erhållna resultaten belysa på ett intressant sätt giltigheten av andra uppställda teorier för betongbrottet. Exempelvis ger antagandet, att brottet bestäms av största töjningen ett samband mellan normaltryck och τ_{M_v} enligt den streckprickade kurvan i fig. 13.¹ (Det bör i detta sammanhang observeras, att τ_{M_v} beräknats enligt plasticitetsteorien. Förhållandena bli emellertid likartade, om τ beräknas enligt elasticitetsteorien.) Det framgår med all tydlighet, att maximala töjningsteorien ger ett mycket otillfredsställande resultat.

Resultaten visa det orimliga i att försöka förklara två så olikartade brottyper som tryck- och dragbrott ur samma brotthypotes. Vid tryckbrottet är den karakteristiska företeelsen den, att förbandet mellan de enskilda betongpartiklarna successivt upplöses tills en spjälkning äger rum, under det att brottet vid ren dragning består i en direkt avslitning av betongen.

d. Elasticitetsmätningar

1. Kontrollprov.

På tryck- och dragprismorna gjordes med zeissklockor och tensometrar uppmätning av sammantryckningen respektive töjningen. Dessutom mättes på tryckprismorna töjningen i tvärlängd. I fig. 14 återfinnes typexempel på elasticitetsdiagram för tryckprismorna och i fig. 15 typexempel på dragelasticitetsdiagram.

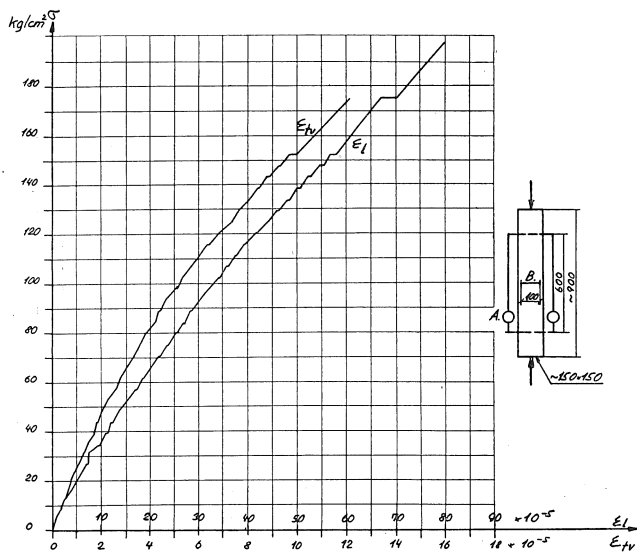


Fig. 14. Typexempel på tryckelasticitetsdiagram.

¹ Såsom utgångsvärden har valts brotttöjningen vid det rena dragprovet. Poisson's tal m har satts konstant lika med 6, vilket innebär en schematisering av verkligheten, då m varierar med påkänningen.

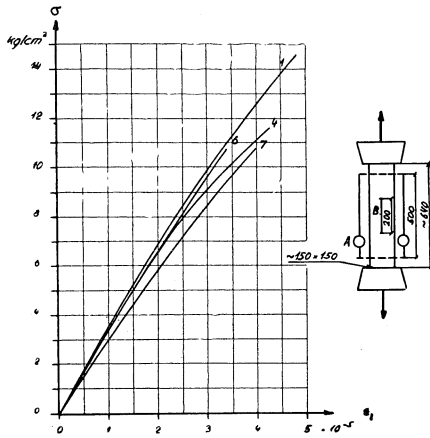


Fig. 15. Typexempel på dragelasticitetsdiagram.

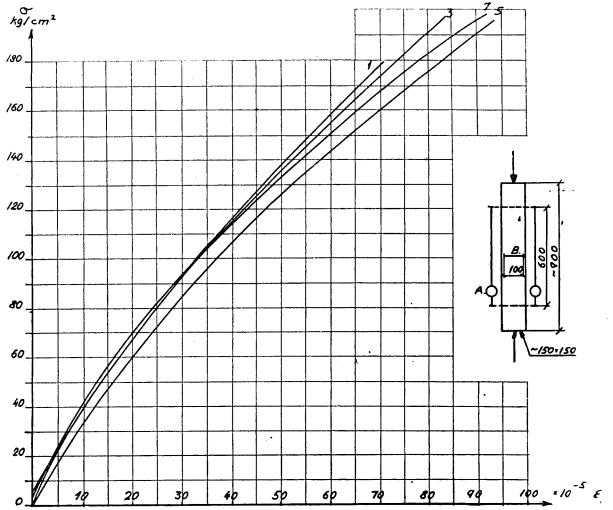


Fig. 16. Sammanställning av tryckelasticitetsdiagram för serie I. A: klocka. Belastningshastighet: Last påfördes under 1 min. Vila 2 min. $0 < \sigma < 35 \text{ kg/cm}^2$: Lastökning $\approx 3,5 \text{ kg/cm}^2$ $35 < \sigma < 153 \text{ kg/cm}^2$: Lastökning $\approx 4,5 \text{ kg/cm}^2$. $153 < \sigma < \sigma_{\text{Brott}}$: Lastökning = $22,6 \text{ kg/cm}^2$.

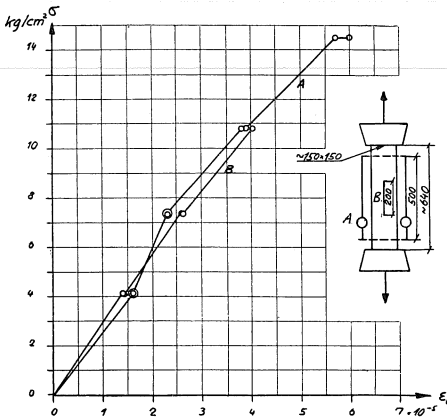


Fig. 17. Sammanställning av dragelasticitetsdiagram för serie I. Resultaten äro medelvärden av mätningar med klockor A och tensometrar B. Belastningshastighet: ökning av dragpåkänning $3,5 \text{ kg/cm}^2$ på en min., konstanthållande av lasten under 2 min. osv.

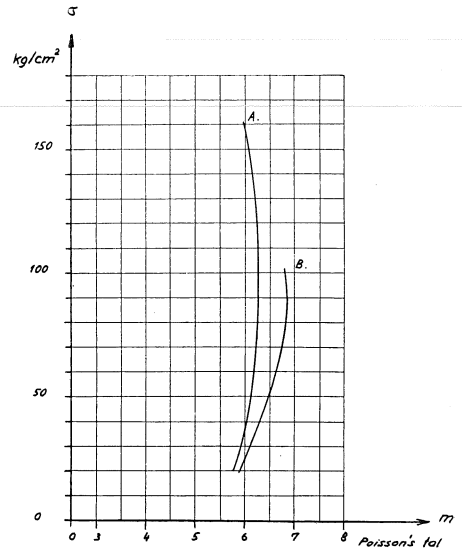


Fig. 18. Diagram över Poissons tal vid tryck vid serierna I (kurva A) och II (kurva B).

I fig. 16 äro tryckelasctiitetsdiagrammen för serie I (serie II likartat) sammanfattade genom kontinuerliga kurvor, i fig. 17 återfinnas motsvarande dragelasticitetsdiagram samt i fig. 18 de ur tvärtöjningsmätningarna erhållna värdena på Poisson's tal som funktion av tryckpåkänningen vid serierna I och II.

För tryck- och dragprismorna erhålles sekantmodulen ur elasticitetsdiagrammen. Resultaten äro sammanställda i tabell 5.

Serie I.

	Tryckprisma $\sigma = 10-50 \text{ kg/cm}^2$	Dragprisma $\sigma = 0-8 \text{ kg/cm}^2$
	$320 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$	$334 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$
	328 » »	314 » »
	324 » »	318 » »
	316 » »	(277) » »
	349 » »	
Medeltal	$325 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$	$322 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$

Serie II.

	Tryckprisma $\sigma = 20-50 \text{ kg/cm}^2$	Dragprisma $\sigma = 0-8 \text{ kg/cm}^2$
	$(182) \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$	$258 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$
	268 » »	277 » »
	236 » »	263 » »
	260 » »	285 » »
Medeltal	$255 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$	$271 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$

Tabell 5. Sekantmodulerna, erhållna ur tryck- och dragelasticitetsdiagrammen vid serierna I och II.

Anmärkas bör att sekantmodulen vid tryck beräknats för högre påkänningsintervall än vid dragning¹, vilket medför, att tryck- och dragmodulerna ej äro alldeles jämförbara. Resultaten visa dock, att de ej äro väsentligt olika.

2. Vridprov.

Typexempel på de med kikare och skala uppmätta vridningsvinklarna återfinnes i fig. 19. I fig. 20 och 21 äro de stegformiga diagrammen sammanfattade genom kontinuerliga kurvor för de olika proven. Normaltrycket har uppenbart ej påverkat lutningen på vridningskurvan. I fig. 22 återfinnes de ur medelkurvorna till serie I och II beräknade skjuvmodulerna

¹ Att sekantmodulen för tryck beräknats för så stort intervall som mellan 10 och 50 kg/cm^2 beror på att mät noggrannheten vid de små påkänningarna varit relativt dålig.

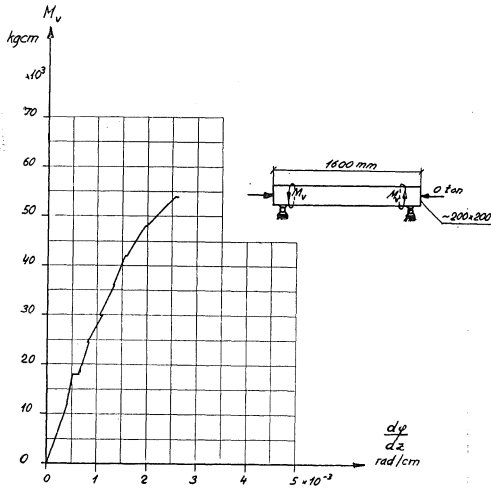


Fig. 19. Typexempel på kurva över uppmätt vridningsvinkel.

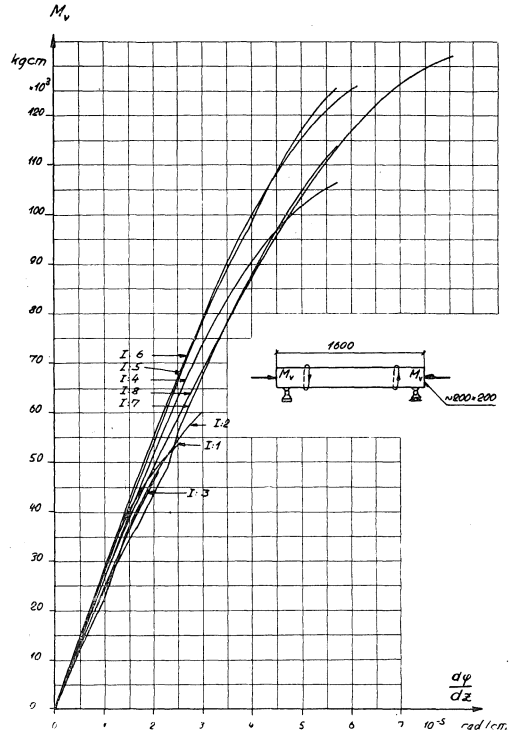


Fig. 20. Samband mellan M_v och uppmätt vridningsvinkel, uttryckt i rad/cm i serie I (varierande normaltryck, se tabell 3). Belastningshastighet: lasten ökas med 6000 kgcm under 1 min. Vila 2 min.

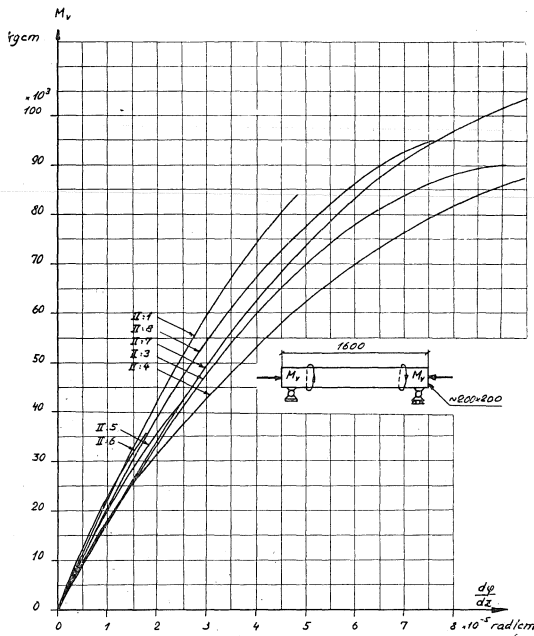


Fig. 21. Samband mellan M_v och vridningsvinkel i rad/cm i serie II (varierande normaltryck, se tabell 4). Belastningshastighet: Lasten ökades med 6000 kgcm under 1 min. Vila 2 min.

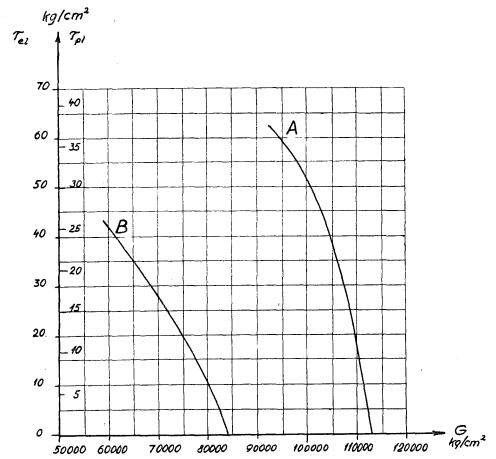


Fig. 22. Diagram över den verkamma skjuvmodulen som funktion av τ vid serierna I (kurva A) och II (kurva B).

(sekantmodul $G_{sek.}$). Det är att märka, att vid små värden på τ har avläsningsnoggrannheten vid mätningen av vridningsvinklarna varit jämförelsevis dålig, varför värdena på skjuvmodulen från ungefär 0 till 12 kg/cm² äro osäkra. Detta belyses för övrigt därav, att förhållandena mellan skjuvsekantmodulerna och sekantmodulen vid tryck och dragning äro osedvanligt små. Vid serie I erhålles $\frac{113}{323} = 0,35$ och vid serie II $\frac{83}{263} = 0,32$.

III. Samtidigt verkande böjande och vridande moment

Inledning

I en konstruktion sammanfalla ofta lägena för de maximala böjande och vridande momenten. Exempelvis är detta fallet över stöd vid kontinuerlig balkbro, där de vridande momenten uppstå genom brobanep Plattans inspänning i huvudbalkarna på grund av dessas vridningsmotstånd. Samtidigt har också ofta avskärningskraften sitt maximivärde. Här undersöks först inverkan av böjande moment och därefter av avskärningskraft på bärförmågan vid vridning.

Vid böjning och vridning måste man räkna med att det böjande momentet har en sådan storlek, att betongen spricker upp i den dragna zonen. Härigenom störes den fördelning av skärpåkänningarna genom det vridande momentet, som är rådande i partierna mellan sprickorna. Påkänningstillståndet kompliceras av att böjarmeringen upptar skärkrafter och av att man dessutom kan förvänta, att krafter överföras genom friktion mellan betongdelarna på ömse sidor om sprickorna.¹ Att strängt härleda dimensioneringsformler ur en beräkning eller genom försök bestämd påkänningsfördelning torde därför vara ogörligt. För att komma fram till dimensioneringsformler har förf. i stället i stort sett följt följande försöksprogram, som vuxit fram under försökens gång.

A. Inledande försök med balkar med överstark armering. Vid dessa försök studeras i huvudsak betongbrotten.

B. Försök med balkar med låg och ordinär armeringsprocent.

Med försöken avsågs att få fram dimensioneringsformler för böjarmeringen, som vid samtidig böjning och vridning är utsatt för dragning och avskärning.

C. Spänningsoptiska försök. För att få förklaring på brottfenomenen vid de under A och B nämnda försöken utfördes en spänningsoptisk studie med vridning av balk med uppskurna böjsprickor.

Såsom arbetshypotes tjänade det extremt ogynnsamma antagandet, att varken den genom böjningen spruckna delen av balken eller järnen

¹ Denna överföring av avskärningskrafter genom friktion i sprickorna är beroende av ett flertal praktiskt taget obestämbara faktorer, av vilka kunna nämnas storleken av brottdeformationerna, tryckfördelning mellan böjarmeringen och betongen på ömse sidor om sprickorna och betongens plasticering.

medverka vid upptagandet av det vridande momentet — vilket innebär, att man beräknar vridningsansträngningen för en balk, vars höjd är lika med den ospruckna delens höjd. Ur resultaten till försöken i avsnitt II kan man då beräkna det vridande moment, som balken minst kan upptaga.

A. Försök med balkar med överstark armering

Det rektangulära tvärsnittet enligt fig. 23 a ställer sig vid tillämpning av ovannämnda arbetshypotes gynnsammare än T-tvärsnittet enligt fig. b, emedan vid samma σ_{tryck} en betydligt större del är sprucken vid T-sektionen och emedan det är livet, som är den sektionedel, som i huvudsak skall upptaga det vridande momentet.

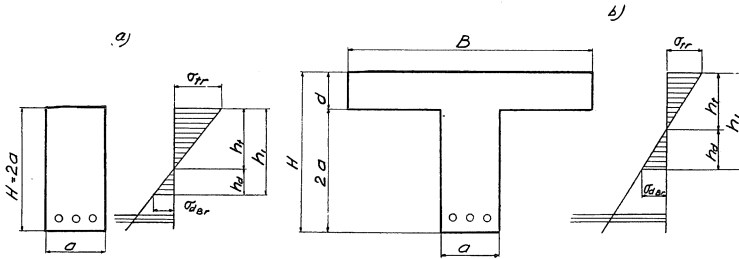
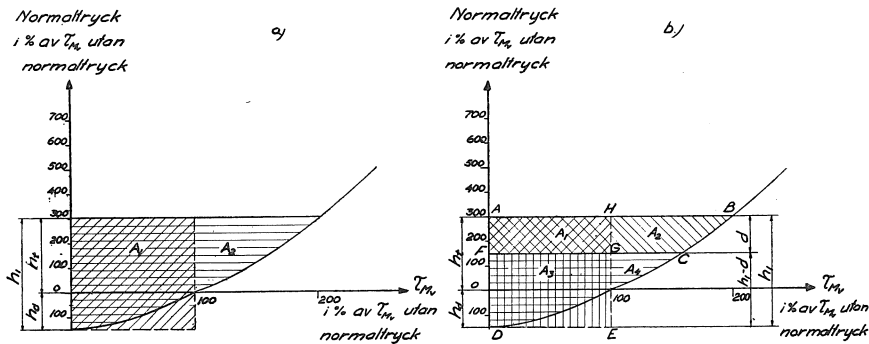


Fig. 23. Beteckningar och antagen påkänningsfördelning vid beräkning av vridande brottmoment vid samtidig böjning och vridning.

Vi antaga, att påkänningsfördelningen är rätlinjig, vidare att draghållfastheten, eftersom det är fråga om böjning av armerad balk, utgör 150 % i stället för 100 % av τ_{M_v} utan normaltryck ($\tau_{M_v_0}$). (τ_{M_v} beräknas i enlighet med resultaten från avdelningarna I och II ur plasticitetsteorien.)

Genom inpassning av påkänningsdiagrammet enl. fig. 23 a i grundkurvan enligt fig. 24 a, vilken anger inverkan av normaltryck på bärförmågan



Inpassning av påkänningsdiagrammen enl. fig. 23 i grundkurvan vid samtidigt verkande tryck och vridning enl. fig. 13.

vid vridning, erhållen ur arbetshypotesen, att huvuddragpåkänningen bestämmer brottet, erhålles vid rektangulär sektion det vridande brottmomentet genom att multiplicera det vridande brottmomentet hos en balk, ej åverkad av böjande moment med bredden a och höjden h_1 , med förhållandet mellan de horisontellt och de snett sektionerade ytorna i fig. 24 a. Härigenom har inverkan av det varierande normaltrycket bringats till uttryck.

Vid T-sektion bli förhållandena något mer komplicerade. Formeln för T-balks vridhållfasthet, vars härledning utföres i bilaga, lyder

$$M_v = \tau_{M_v} \left[\frac{1}{2} d^2 \left(B - \frac{d}{3} \right) + \frac{1}{2} a^2 \left(H - d - \frac{a}{3} \right) + 0,43 \frac{d \cdot a^4}{a^2 + d^2} \right]$$

Den första termen i detta uttryck anger den del av det vridande momentet, som upptages av plattan, den andra den del, som upptages av livet, och den tredje förhöjningen av det vridande momentet genom sammanbindningen mellan platta och liv.

- I fig. 24 b betecknar
 A_1 arean A—F—G—H
 A_2 „ A—B—C—F
 A_3 „ F—G—D—E
 A_4 „ F—C—D

Man erhåller då det vridande brottmomentet vid samtidig böjning ur

$$M_{v_{brott}} = \tau_{M_{v_0}} \left[\frac{1}{2} d^2 \left(B - \frac{d}{3} \right) \cdot \frac{A_2}{A_1} + \frac{1}{2} a^2 \left(h_1 - d - \frac{a}{3} \right) \cdot \frac{A_4}{A_3} + 0,43 \frac{d \cdot a^4}{a^2 + d^2} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FG}} \right]$$

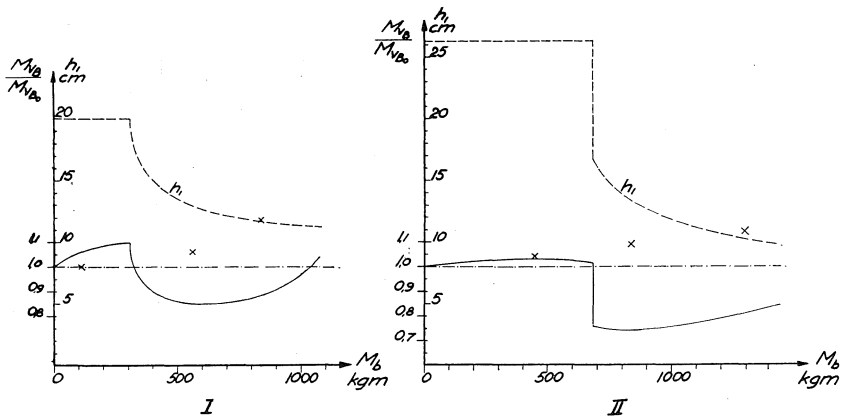


Fig. 25. Med ledning av resultaten från serierna I och II beräknade vridande brottmoment som funktion av det böjande momentet vid balksektionerna enligt fig. 26 o. 27. De med x markerade punkterna ange försöksvärden. $M_{v_{B_0}}$ anger vridande brottmomentet vid det böjande momentet M_B lika med noll. Lägena på diskontinuitetspunkterna äro beroende av storleken på betongens draghållfasthet (jämför de inritade kurvorna för h_1).

När $a > h_1 - d$ skrives i stället för den andra termen

$$\frac{1}{2} (h_1 - d)^2 \left[a - \frac{1}{3} (h_1 - d) \right] \frac{A_4}{A_3}$$

För de nedan beskrivna försöksbalkarna med rektangulärt och T-formigt tvärsnitt erhållas de beräknade vridbrottmomenten för olika böjande moment enligt diagrammen i fig. 25.

a. **Omfattning, betongsammansättning**

De nedan skildrade försöken utfördes i examensarbete i Byggnadsstatik av nuvarande civilingenjörerna Carl Krook och Lars-Erik Nevander (del av serie III) samt av nuvarande civilingenjörerna Göran Bjursten, Bengt Norén och Svante Widing (del av serie III och serie V).

Serie III.

I serien göts fyra satser, vardera innehållande två vridbalkar samt kontrollprov, bestående av fyra tryckkuber, ett tryckprisma samt två dragprismor. Dimensionerna på kontrollproven voro desamma som i serie I och II.

Betongen hade sammansättningen i torra viktsdelar A-cement:sand:singel 1:4,3:4,6. Vattencementtal var 0,85.

Sand och singel voro av samma kvalitet som vid serierna I och II.

Serie V.

Serie V bestod av 8 satser med 1 vridbalk och 6 tryckkuber i varje sats samt 2 satser med kontrollprov, bestående av 8 tryckkuber, 1 tryckprisma, och dessutom i den ena satsen 4 dragprismor ($15 \times 15 \times 90$), i den andra 4 dragprismor ($15 \times 15 \times 30$) + 3 böjbalkar.

Betongen hade sammansättningen i torra viktsdelar: A-cement:sand:singel 1:3,7:4,3. Vattencementtal var 0,75. Sand och singel var av samma sort, som användes till serie III.

Provkropparna lagrades i fuktighetsmättad luft med temperatur av $+20^\circ \text{C}$ under en vecka och återstående tid före provningen i 18-gradig luft med 55 % fuktighetshalt. Ålder vid provningen var 28 dygn.

b. **Provning**

Huvudprov.

Vridbalkarnas dimensioner och armering framgå av fig. 26 och 27. Liksom vid serie I och II voro balkarna vid ändarna, där de vridande momenten angreps, armerade med byglar och längsgående järn mot vridning för undvikande av lokala brott vid momentangreppen. Böjarmeringen var dimensionerad så, att järnpåkänningen vid de största böjande momenten ej

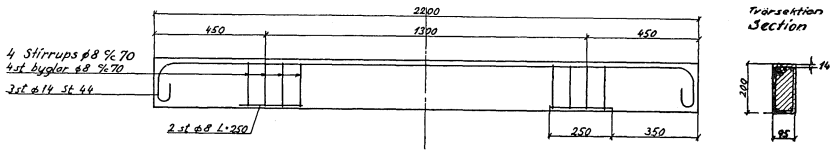


Fig. 26. Dimensioner och armering hos provbalkar i serie III.

Fig. 26. Dimensions and reinforcement of the beams used for the test series III.

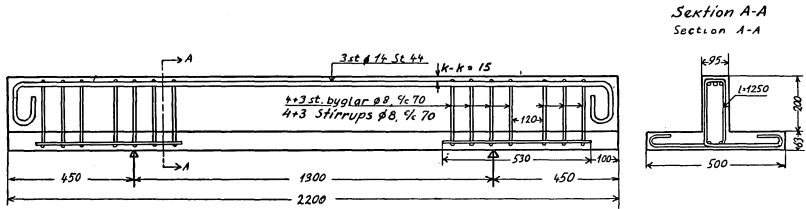


Fig. 27. Dimensioner och armering hos provbalkar i serie V.

Fig. 27. Dimensions and reinforcement of the beams used in the test series V.

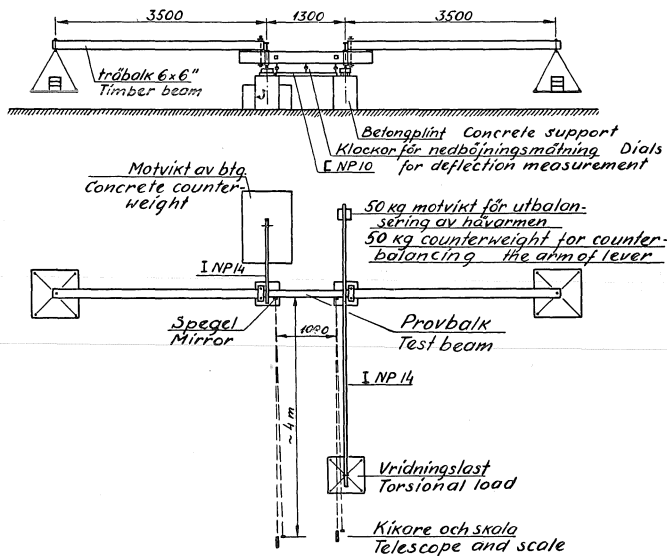


Fig. 28. Provningsanordning vid samtidig böjning och vridning vid serierna III och V.

Fig. 28. Testing arrangements for the test series III and V (bending and torsional tests).

skulle anta så högt värde, att någon risk för störningar på grund av höga järnpåkänningar skulle föreligga. I serie V voro dessutom ändarna armerade mot skjuvning. De vridande momenten applicerades på samma sätt som vid serierna I och II. De böjande momenten vid ändarna åstadkommas genom att träbalkskonsoler, som voro fastsatta vid provbalken med koppel av två bultar och järnplatta, belastades med vikter på vågskål i de fria ändarna. Arrangemangen framgå av fig. 28. Balkens nedböjning

mättes med zeissklockor mot järnbalk upplagd på betongfundamenten, och vridningen mättes med kikare och skala på samma sätt som i serierna I och II. I varannan balk voro armeringsjärnen blottlagda för mätning av järnpåkänningarna.

Vid provningen påfördes först det böjande momentet till sitt fulla belopp. Under hela vridförsöket kvarstod detta böjande moment. Innan det vridande momentet påfördes, fick balken "vila" så lång stund, att ökningen av nedböjningen per tidsenhet blev försumbar jämfört med nedböjningsökningen vid laststegringen. Därefter påfördes det vridande momentet.

Kontrollprov.

Kontrollproven behandlades på samma sätt som vid serierna I och II.

c. Brottvärden

Serie III.

Huvudprov.

Resultaten äro sammanställda i tabell 6. Samma beteckningar gälla som för serierna I och II. Dessutom beteckna k_{bH} resp. k_{bh} ideella kantpåkänningarna (ex. $k_{bh} = \frac{M_b \cdot 6}{b \cdot h^2}$) av det böjande momentet.

Vid beräkning av τ_{el} och τ_{pl} , förkortning av $\tau_{M_{vel}}$ och $\tau_{M_{vpl}}$, har hänsyn ej tagits till järnen.

Som framgår av tabell 6 varierade beräknat k_{bh} från 0 till 160 kg/cm² eller det böjande momentet från 0 till 838 kgm.

Upp till det böjande momentet 558 kgm ($k_{bh} = 108$ kg/cm²) är det vridande brottmomentet oberoende av storleken på det böjande momentet. Vid det största värdet på M_b (838 kgm) ($k_{bh} = 161$ kg/cm²) är $\frac{M_{vB}}{M_{vBo}} = 1,19$. Enligt fig. 25 a skulle, om den spruckna delen av betongen och järnen ej medverkade vid upptagandet av det vridande momentet, både vid $k_{bh} = 108$ och 161 en sänkning med 15 resp. 12 % av det vridande brottmomentet på grund av det böjande momentet äga rum. Då den motsatta tendensen här uppenbart gör sig gällande, är det tydligt, att den gjorda förutsättningen, att järnen och den dragna betongen ej medverka vid upptagandet av det vridande momentet, ej har giltighet, utan att avskärningskrafter överföras vid sprickorna.

Vid balkarna III: 2 hade inga böjsprickor slagit upp, innan det vridande momentet påfördes. Ej heller slogo vridbrotsprickorna upp successivt med den ökade belastningen, utan brottet yttrade sig i att sprickor med i stort sett samma utseende som vid rent vridbrott slogo upp på en gång över hela balken. En svag tendens i utseendet på dessa brotsprickor kunde möjligen anses föreligga med en flackare lutning hos brotsprickan

Sats Group	Vol. vikt Volume Weight	Sätt- mått Slump	Kontrollprov <i>Control Tests</i>						Vridprov ⁵ <i>Torsional Tests</i> ⁵						
			Tryck- kuber ¹ <i>Compr. Strength of Cubes</i> ¹	Dragprov ² <i>Tensile Strength</i> ²		Tryckprisma ⁴ <i>Compr. Strength of Prisms</i> ⁴		$\frac{\sigma_p}{\sigma_B}$	$\frac{\sigma_{dI}}{\sigma_B}$	M_b	M_{vbr}	k_{bH}	k_{bL}	τ_{el}	τ_{pl}
				σ_B	σ_{dL}	Tid Time until Failure	σ_p								
III: 1	2,30	3,5	244 253 222 229	15,4 15,5	3 : 41 9 : 41	179	87	0,73	0,065	0	15000	-0,6	-0,8	34,3	20,3
			237	15,4		179				0	15000	-0,6	-0,8	34,1	20,2
III: 2	2,31	3,5	256 259 248 229	12,4 15,1	9 : 00 3 : 20	182	86	0,71	0,056	10690	15000	16,4	20,2	33,7	19,9
			248	13,8		182				10600	15000	16,9	21,1	34,5	20,4
III: 3	2,31	3,5	240 250 230 230	15,6 13,6	10 : 04 2 : 53	160	137	0,65	0,061	55760	16500	87,2	108,0	37,1	21,9
			238	14,6		160				55760	16000	87,2	108,8	35,4	20,9
III: 4	2,32	3,5	245 217 234 220	15,4 (2,6)	9 : 22 0 : 37	180	140	0,77	0,068	83750	19000	132,1	166,4	43,0	25,4
			227	15,4		180				83750	18000	125,2	155,2	38,4	22,6
Medelv. Average	2,31	3,5	238	14,8		175		0,72	0,062						

Sats Group	Tryck- kuber <i>Compr. Strength of Cubes</i>	Böjprov ³ <i>Bending Strength</i> ³	
	σ_B kg/cm ²	σ_{bd} kg/cm ²	Tid Time min.
III: 5	260	25,7	2 : 12
	252	24,0	1 : 53
	259	28,0	2 : 00
	241	26,7	2 : 05
	257	27,9	1 : 42
	259	30,5	1 : 48
	255	27,1	
	$\frac{\sigma_{bd}}{\sigma_B} = 0,106$	$\frac{\sigma_{bd}}{\sigma_{dL}} = 1,83$	

¹ 15 × 15 × 15 cm.

² Tvärsnitt
Section 15 × 15 cm.
fri draglängd
Clear Length in Tension 64 cm.

³ 15 × 15 × 90 cm³.

⁴ 15 × 15 × 90 cm.

⁵ 9,5 × 20 × 220 cm.

Tabell 6. Resultat av serie III. Table 6. Results of Test Series III.

Betongsammansättning — cement : sand : singel 220 kg/m³ A cem.
Concrete Mix — Cement : Sand : Gravel 1 : 4,29 : 4,61 $\frac{W}{C} = 0,85$

Forts. på tabell 7. *Table 7 continued.*

Sats — Group	Volymvikt Volume Weight	Sättmått Slump cm	Tryckkuber Compr. Strength of Cubes			Dragprov Tensile Tests		Tryckprisma Compr. Strength of Prisms		Böjprov Bending Tests		$\frac{\sigma_d}{\sigma_B}$	$\frac{\sigma_p}{\sigma_B}$	$\frac{\sigma_{bd}}{\sigma_B}$								
			σ_B kg/cm ²	σ_d kg/cm ²	Tid Time until Failure min.	σ_p kg/cm ²	Tid Time until Failure min.	σ_{bd} kg/cm ²	Tid Time until Failure min.													
a	2,32	4,5	282	16,5	9 : 35	205	86					0,060	0,76									
			282	15,3	9 : 10																	
			284	16,6	9 : 40																	
			262																			
			269																			
			272																			
			249																			
262																						
			270	16,1																		
b	2,32	6,0	280	23,2						33,2	2,0	0,081		0,133								
			281	20,0						40,7	2,5											
			276	22,6						36,1	2,5											
			270	23,2																		
			276																			
			277																			
			281																			
			277																			
										276	22,3							36,6				

Kontrollprov — Control Tests

Tryckkuber — Size of Cubes for Compressive Tests 15 × 15 × 15 cm.

Dragprov — Size of Prisms for Tensile Tests 15 × 15 cm.

Fri draglängd — Clear Length of Prisms for Tensile Tests (a) 64 cm, (b) 4 cm.

Tryckprismor — Size of Prisms for Compressive Tests 15 × 15 × 90 cm.

Böjbjalkar — Size of Beams for Bending Tests 15 × 15 × 90 cm.

sprickorna. Detta styrker den ovan med ledning av brottvärdena dragna slutsatsen, att vridbrottet är tämligen oberoende av sprickbildningen genom böjningen.

Serie III.

Kontrollprov.

Resultaten framgå av tabell 6.

Förhållandet mellan kubhållfasthet och draghållfasthet, erhållen ur de långa dragprismorna, är i medeltal 16,1, vilket motsvarar ett värde på k av 0,39 i den i not 1, s. 11 nämnda formeln.

Serie V.

Huvudprov.

Resultaten till serie V äro sammanställda i tabell 7.

Samma beteckningar gälla som i serie III. Balkarna V:5 voro helt utan böjarmering.

Som framgår av tabell 7 varierar böjande momentet M_b för de olika serierna från 0 till 1 300 kgm. I fig. 25 b äro försöksvärdena inlagda. Liksom i serie III med rektangulär sektion ange försöksvärdena i motsats till den beräknade kurvan ökning av M_{vB} med M_b . Förklaringen härtill är densamma som vid serie III, nämligen att järnen och den dragna betongen uppenbarligen medverkat vid vridningen. Vid $M_b = 880$ kgm ligger försöksvärdet 45 % över och vid $M_b = 1 300$ kgm 42 % över det beräknade värdet.

T-sektionen utgör ett i förevarande avseende ogynnsamt tvärsnitt, emedan vid böjningen den del, som huvudsakligen upptar vridningen, nämligen livet, försvagas genom sprickbildning, som vid försöken med det största böjande momentet på sina ställen sträckte sig över nästan hela livet. *Då trots detta vid försöken en förhöjning av det vridande brottmomentet vid växande M_b kunde iakttagas, kan man draga den slutsatsen, att vid samtidig böjning och vridning av betongbalk med överstark armering har det böjande momentet snarare gynnsamt än ogynnsamt inflytande på vridhållfastheten.*

Vid balkarna V:2 slogo inga sprickor upp, innan det vridande momentet påfördes. Till skillnad mot balkarna V:1 slogo dock vridsprickorna upp successivt vid den ökade belastningen. Sprickbildningarna framgå av fig. 31 (balkar V:1) och fig. 32 (balkar V:2). Karakteristiskt för brottet är att en triangel i de flesta fall lösgjordes från plattan vid brott, varvid den av begränsningssprickorna, som fortsatte med samma lutning över livet, tydligen varit av primär, den andra av sekundär natur.

Vid balkarna V:3 fortsattes böjsprickorna, som innan det vridande momentet påfördes sträckte sig ungefär över livets halva höjd, av vridsprickor med 45°-lutning, som vid den ökade vridbelastningen sträckte sig över hela livet upp till plattan (se fig. 33).

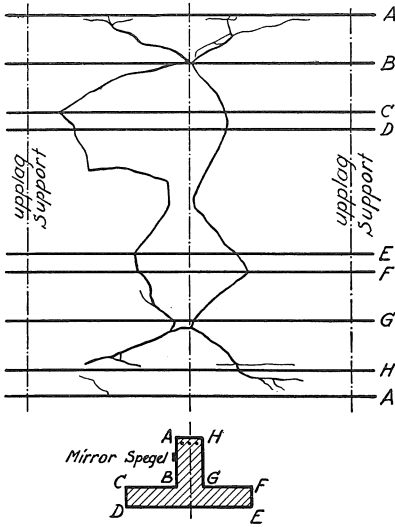


Fig. 31. Sprickbildning vid balk V: 1.
Fig. 31. Crack development in the beam V. 1.

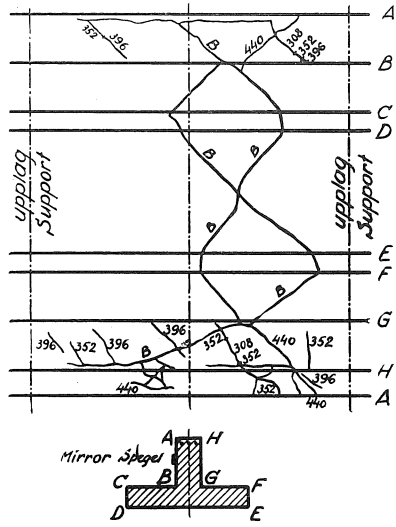


Fig. 32. Sprickbildning vid balk V: 2.
Fig. 32. Crack development in the beam V. 2.

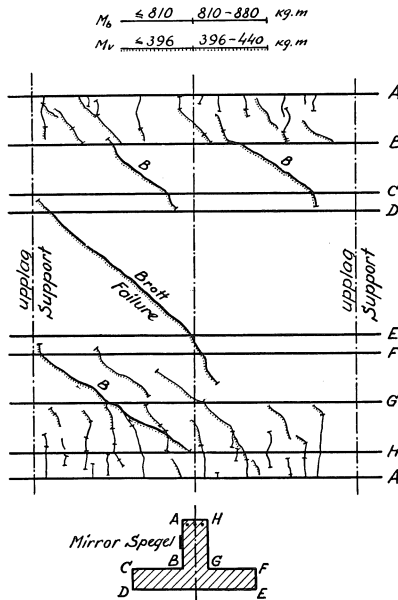


Fig. 33. Sprickbildning vid balk V: 3.
Fig. 33. Crack development in the beam V. 3.

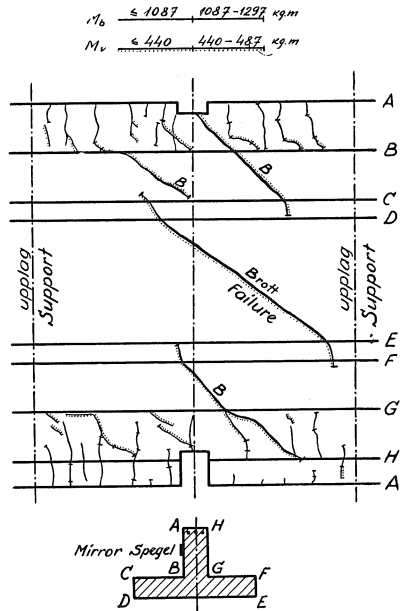


Fig. 34. Sprickbildning vid balk V: 4.
Fig. 34. Crack development in the beam V. 4.

Vid balkarna V:4 slogo böjsprickorna upp nästan över hela livet och fortsattes på samma sätt som vid balkarna V:3 av sneda vridsprickor upp till plattans underkant (se fig. 34).

Liksom vid serie III skar den slutliga vridbrottsprickan på sina ställen över böjsprickorna och tidigare uppslagna vridsprickor, vilket även här styrker slutsatsen, att vridbrottet är tämligen oberoende av sprickbildningen genom böjningen.

Serie V.

Kontrollprov.

Resultaten framgå av tabell 7. Förhållandet mellan kubhållfasthet och draghållfasthet, erhållen ur de långa dragprismorna, är i medeltal i kontrollsatsen lika med 16,7, och värdet för k i formel i not 1 s. 11 blir $= 0,39$. Förhållandet mellan draghållfastheterna för de korta och långa prismorna är 1,38.

d. Deformations- och elasticitetsmätningar

1. Kontrollprov.

Liksom vid serierna I och II utfördes elasticitetsmätningar på tryck- och dragprismorna. Tryck- och dragelasticitetsdiagrammen äro av samma typ som i serierna I och II. De ur diagrammen erhållna sekantmodulerna äro sammanfattade i tabell 8.

	<i>Serie III.</i>		<i>Serie V.</i>	
	Tryckprisma 20—50 kg/cm ²	Dragprisma 0—8 kg/cm ²	Tryckprisma 20—50 kg/cm ²	Dragprisma 0—8 kg/cm ²
	263000 kg/cm ²	286000 kg/cm ²	237000 kg/cm ²	245000 kg/cm ²
	238000 »	271000 »	265000 »	
	300000 »	311000 »		
	300000 »	296000 »		
Medeltal	275000 kg/cm ²	291000 kg/cm ²	251000 kg/cm ²	245000 kg/cm ²

Tabell 8.

2. Huvudprov.

a. Nedböjningsmätningar.

I fig. 35 återfinnas resultaten från nedböjningsmätningarna i serie III. Nedböjningen i balkmitt är återgiven som funktion av det höjande momentet M_b och det vridande momentet M_v , varvid det böjande momentet är konstant på den del, där det vridande momentet varierar. Inverkan av krypningen har i rimlig grad eliminerats genom att balken fått "vila" under det största böjande momentet, så att ökningen per tidsenhet av ned-

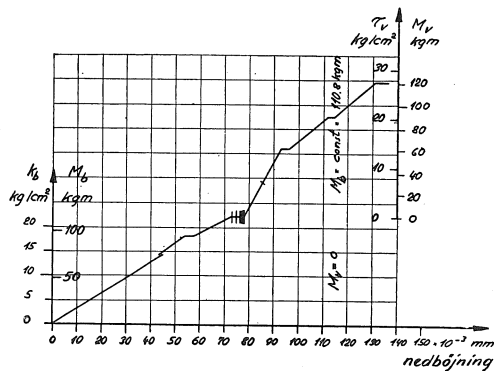
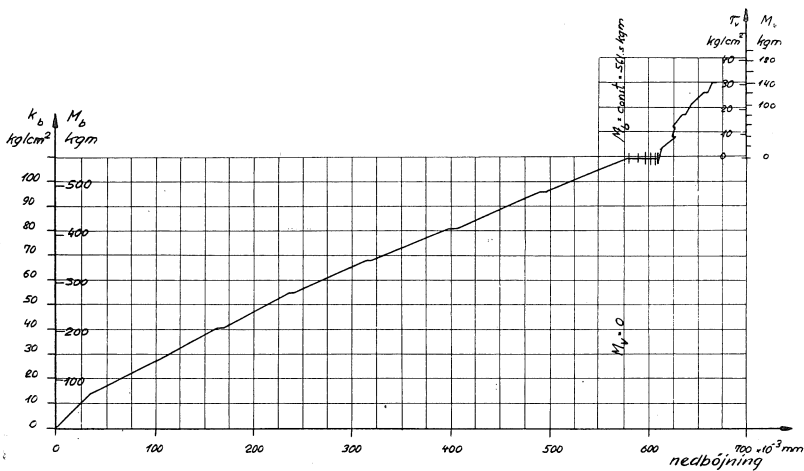
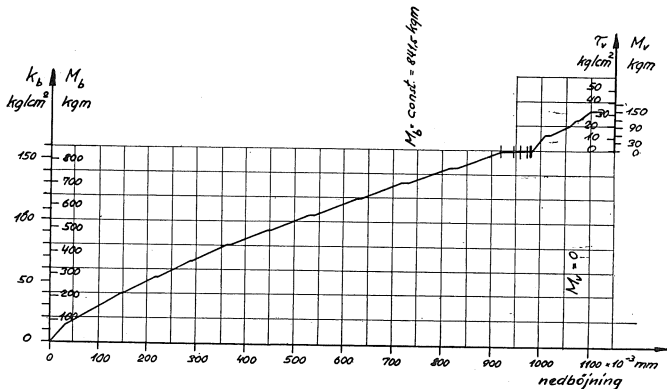


Fig. 35. Uppmätta nedböjningar i balkmitt i serie III.
 Belastningshastighet: Lasten påfördes under 1 min. Vila 2 min.
 a) III: 2 b; $M_{vBrott} = 150$ kgm.



b) III: 3 b; $M_{vBrott} = 160$ kgm.



c) III: 4 b; $M_{vBrott} = 180$ kgm.

Efter det maximivärdet på det böjande momentet uppnått, hölls lasten konstant innan det vridande momentet påfördes. Avläsningar av nedböjningar företogs härvid med intervaller på 5 min. Varje avläsning är markerad med ett vertikalt streck.

böjningen blivit relativt obetydlig. Ökningen av nedböjningen genom det vridande momentet varierar från 20 till 100 tusendels mm. Denna ökning är störst vid det största böjande momentet. Detta stämmer överens därmed, att vridsprickorna före brott finga den största spridningen vid balkarna med det största böjande momentet. Procentuellt är minskningen av den reella böjstyvheten genom det vridande momentet ej försumbar vid små värden på det böjande momentet.

Detsamma gäller T-sektionen, för vilken resultaten från nedböjningsmätningarna framgå av fig. 36.

I fig. 37 återges variationen med k_b (eller M_b) av sekantmodulen vid serie III, beräknad ur nedböjningsmätningarna. Sekantmodulen S har beräknats med utgångspunkt från totala tvärsnittets tröghetsmoment och utan hänsyn till järnen. I samtliga fall avtar den reella böjstyvheten vid växande k_b från ett värde på k_b av ca 20, motsvarande ett värde på, under förutsättning av samverkan mellan järn och betong och med $n = 10$, beräknad betongdragpåkänning av ca 10 kg/cm². Att böjstyvheten faller markerat redan vid så låg betongdragpåkänning är anmärkningsvärt och strider i viss mån mot de erfarenheter förf. gjort vid annan undersökning, nämligen av betongramar, åverkade av invändigt tryck.¹ I registret för tillåtna betongpåkänningar ($k_b = 50—100—150$ kg/cm²) håller sig sekantmodulen S omkring 200 000 kg/cm². Anmärkas bör, att det rör sig om ett korttidsprov med relativt snabb laststegring. Det i jämförelse med värdena i tabell 8 för kontrollproven stora värdet på sekantmodulen vid små belastningar förklaras delvis av skillnaden i belastningshastighet (här huvudsakligen 13,7 kg/cm² per tre min, vid kontrollproven 4,0 kg/cm² per tre min) samt av att armeringen på grund av den relativt stora armeringsprocenten (2,7 %) höjt böjstyvheten. (S är räknat utan hänsyn tagen till armeringen.)

I fig. 38 återfinnes sambandet mellan sekantmodul och böjande moment vid serie V (T-balkarna). Här sjunker sekantmodulen från i medeltal 300 000 kg/cm² vid de lägsta belastningarna till ca 100 000 kg/cm² vid beräknat $\sigma_j = 1\,000$ kg/cm².²

Av intresse är att jämföra de erhållna värdena på S med de värden, som man skulle fått, om man räknade med sprucken sektion.

I tabell 9 äro tvärsnittens tröghetsmoment, beräknade under olika förutsättningar, sammanfattade.

Det tröghetsmoment, som legat till grund för beräkningen av den i

¹ Se H. Nylander: »Betongramar, utsatta för invändigt övertryck». Betong h. 3 1945. Vid dessa betongramar var förhållandet mellan ramtjocklek och fri spännvidd 1:4 och 1:2. Dessutom medförde belastningssättet, att ramsidorna blevo excentriskt dragna. Dessa avvikelser i förutsättningarna gentemot de här skildrade belastningsförsöken torde betinga den nämnda olikheten.

² σ_j är liksom för serie III beräknat under förutsättning att betongen ej kan uppta dragning och att $n=15$.

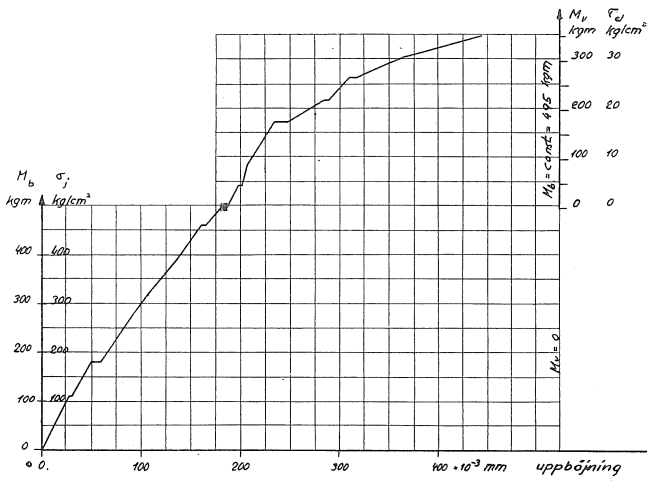
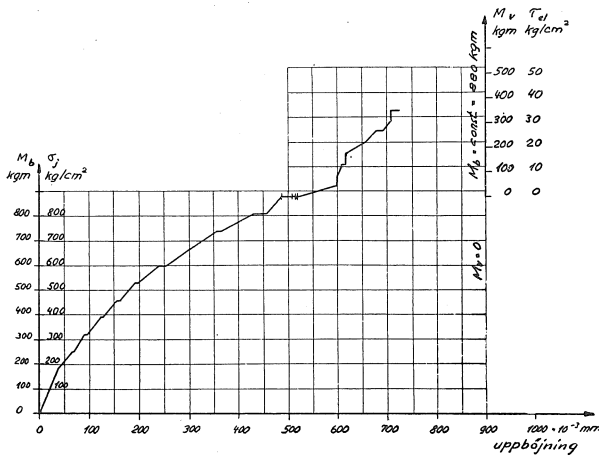


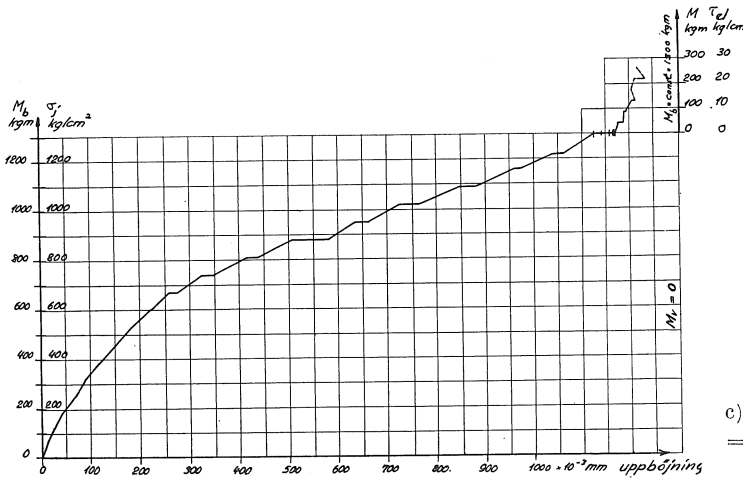
Fig. 36. Uppmätta nedböjningar i balkmitt vid serie V: Belastningshastighet: Lasten påfördes under 1 min. Vila 2 min.

Lastökning: $\Delta M_b = 70$ kgm. $\Delta M_v = 44$ kgm.

a) V: 2 b; $M_{vBrott} = 396$ kgm.



b) V: 3 b; $M_{vBrott} = 466$ kgm.



c) B: 4 b; $M_{vBrott} = 484$ kgm.

$n = \frac{E_j}{E_b}$	Rektangulärt tvärsnitt enl. serie III			T-tvärsnitt enl. serie V		
	Betongen upptar dragning. Järnen samverkande 1	Betongen upptar ej någon dragning 2	Tröghetsmom. räknat på tot. arean. Hänsyn toges ej till järnen 3	Betongen upptar dragning. Järnen samverkande 4	Betongen upptar ej någon dragning 5	Tröghetsmom. räknat på tot. arean. Hänsyn toges ej till järnen 6
10	8500	5800	6350	37340	18230	30700
15	9300	7380		42020	25350	

Tabell 9. Tröghetsmomenten hos tvärsnitten enl. serierna III och V, beräknade under olika förutsättningar.

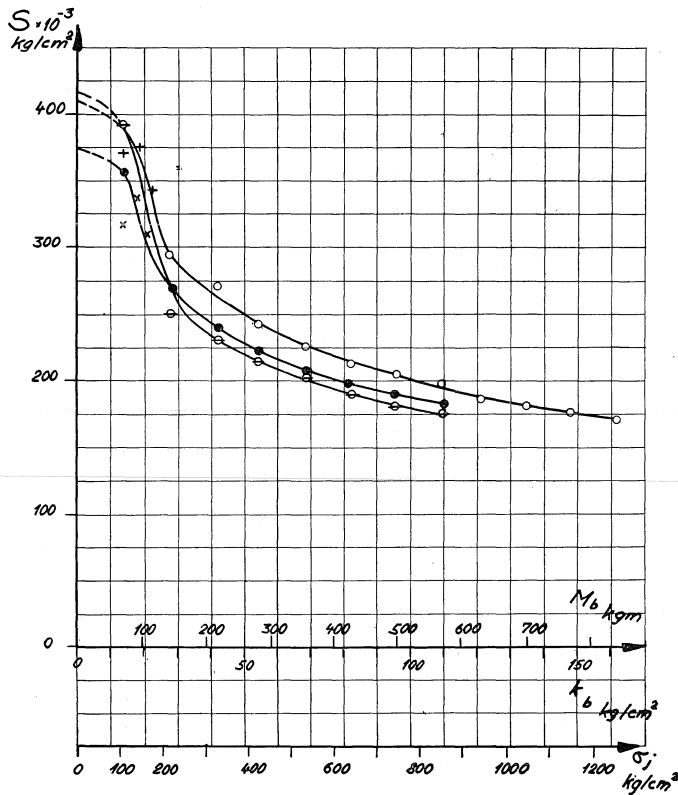


Fig. 37. Variationen av sekantmodulen S med M_b och k_b i serie III. Belastningshastighet: Lasten påfördes under 1 min. Vila 2 min.

- litt III: 4 b
 - litt III: 3 a
 - ⊙ litt III: 3 b
 - + litt III: 2 a
 - × litt III: 2 b
- $k_b = 13,7 \text{ kg/cm}^2$ per 3 min.
- $k_b = 4,8 \text{ kg/cm}^2$ per 3 min.

Fig. 37. Variation of the effective (secant) modulus of elasticity in bending (S) with the bending moment M_b and k_b in the test series III. Rate of loading: The load was applied for 1 minute. The period of rest was 2 minutes.

diagrammen återgivna sekantmodulen S, har varit för det rektangulära tvärsnittet 6 350 cm⁴ och för T-tvärsnittet 30 700 cm⁴. Med utgångspunkt från de olika värdena på tröghetsmomenten enligt tabell 9 har sekantmodulen beräknats vid låg och normal belastning (σ_j , räknat på traditionellt sätt med $n = 15$ och under förutsättning, att betongen ej upptar dragning, sättes lika med 100 resp. 1 000 kg/cm²). Resultaten äro sammanfattade i tabell 10.

Tröghetsmom. beräknat enl. kolumn i tabell 9	Rektangulärt tvärsnitt		T-tvärsnitt	
	$\sigma_j = 100$ kg/cm ²	$\sigma_j = 1000$ kg/cm ²	$\sigma_j = 100$ kg/cm ²	$\sigma_j = 1000$ kg/cm ²
1 resp. 4 n = 10	280000		280000	
1 resp. 4 n = 15	255000		248000	
2 resp. 5 n = 10		200000		170000
2 resp. 5 n = 15		155000		120000
3 resp. 6	375000	180000	340000	100000

Tabell 10. Ur nedböjningsmätningarna erhållna värden på sekantmodulen S, beräknade med utgångspunkt från de olika värdena på verksamma tröghetsmomenten enligt tabell 9.

Vid tryckprismorna erhöles enligt tabell 8 i registret 20—50 kg/cm² sekantmodulerna: för rektangulärt tvärsnitt 275 000 kg/cm² och för T-tvärsnitt 250 000 kg/cm², vilket ungefär motsvarar 300 000 resp. 275 000 för $\sigma = 0$ och 250 000 resp. 225 000 för $\sigma = 100$ kg/cm².

Jämfört med värdena i tabell 10 anger detta, att man vid mycket små belastningar vid bestämning av verksamma tröghetsmomentet för provbalkarna bör räkna med full sektion och med järnen samverkande och vid normal belastning ($\sigma_j = 1\ 000$ kg/cm²) bör räkna med att betongen ej upptar dragning. I båda fallen bör vid korttidsbelastning och någorlunda ordinär betong räknas med $n = 10^1$. Denna slutsats är naturligtvis endast bestyrkt för balkar med liknande dimensioner och armering som de provade. De faktorer, som i huvudsak torde inverka på effektiva höjstyvheten, äro

¹ I en uppsats: "Några beräkningsfrågor vid armerade betongkonstruktioner", T. T. V. o. V. 1910, s. 9 har professor Carl Forssell utarbetat metod för beräkning av momentfördelningen vid kontinuerliga T-balkar, som bygger på beräknad tröghetsmomentfördelning i det stadium, då betongen spruckit. Ställt i belysning av ovanstående — visserligen knapphändiga — försöksresultat synes det som om en sådan metod jämfört med den vanliga, där man vid momentfördelningen ej tar hänsyn till böjsprickor, vore överlägsen vid bestämning av momentfördelningen vid tillåten last.

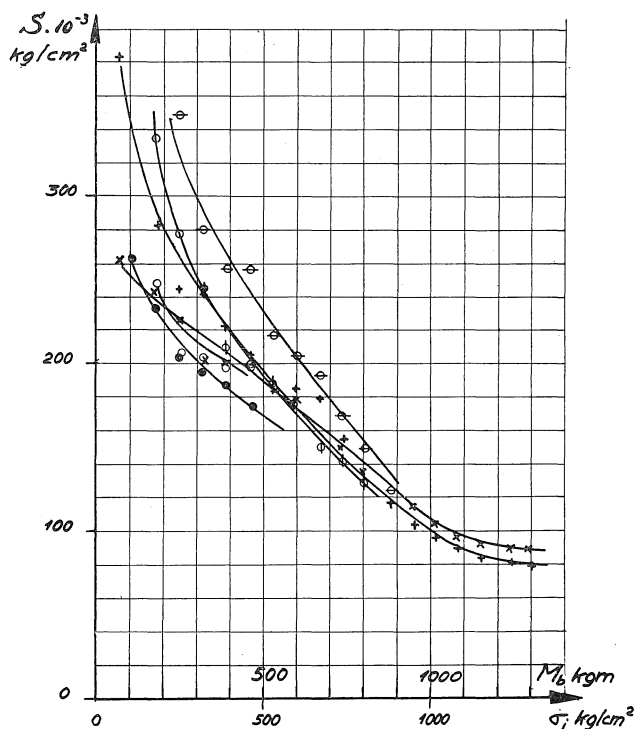


Fig. 38. Variation av sekantmodulen S med M_b i serie V.
 Belastningshastighet: Lasten påfördes under 1 min. Vila 2 min. M_b ökas med 70 kgm per 3 min.
 ● V: 2 a, ○ V: 2 b, ⊙ V: 3 a, ⊕ V: 3 b × V: 4 a, + V: 4 b.

Fig. 38. Variation of the effective (secant) modulus of elasticity in bending (S) with the bending moment M_b and k_b in the test series V.
 Rate of loading: The load was applied for 1 minute. The period of rest was 2 minutes. M_b increased at the rate of 70 kgm per 3 minutes.

armeringsprocenten, järnens diameter, beskaffenheten hos järnnytan och förankringen samt betongkvaliteten.²

b. Järnpåkänningen vid vridningen.

I fig. 39 och 40 äro återgivna de med tensometer uppmätta järndrag-påkänningarna som funktion av det böjande momentet och — när detta hålles konstant — av det vridande momentet.

Vid de rektangulära balkarna är ökningen i järnpåkänning med det vridande momentet ungefär lika stor vid det böjande momentet 558 kgm som vid 838 kgm, i båda fallen ca 130 kg/cm². Denna ökning är uppenbart betingad av böjsprickornas spridning på grund av det vridande momentet och saknar betydelse för dimensioneringen av järnen, emedan påkänningen i dessa beräknas med utgångspunkt från att betongen ej kan upptaga

¹ Jämför C. A. Maney: »Relation between Deflection and Deformation in Reinforced Concrete Beams». Proc. of the Am. Soc. for Testing Materials, p. 310, 1914 och Å. Holmberg: »Böjningsstyvheten hos balkar av armerad betong» Betong h. 2, 1945.

dragning. Detsamma gäller för T-balkarna. Vid dessa är ökningen av järnpåkänningen vid det minsta böjande momentet 495 kgm ca 250 kg/cm² och väsentligt större än vid det böjande momentet 880 kgm (ökn. 130 kg/cm²) och vid det böjande momentet 1 300 kgm (ökning 70 kg/cm²). Förklaringen härtill ligger däri, att sprickbildningen vid det böjande momentet 495 kgm helt och hållet satt in först vid påförandet av det vridande momentet. Såsom framgår av fig. 31 över sprickbildningen, upptäcktes de första sprickorna vid M_v lika med ca 300 kgm. I fig. 40 återspeglas detta av den kraftiga ökningen i järnpåkänningen från $M_v =$ ca 200 kgm.

Genom försöken har alltså visats, att någon nämnvärd ökning av dragpåkänningen i järnen ej äger rum genom balkens vridning. Om förhöjningen av det vridande brottmomentet genom ökning av det böjande momentet skall kunna förklaras, måste man däremot förutsätta, att skärpåkänningar kunna uppstå, vilka kunna bli av betydelse för dimensioneringen.

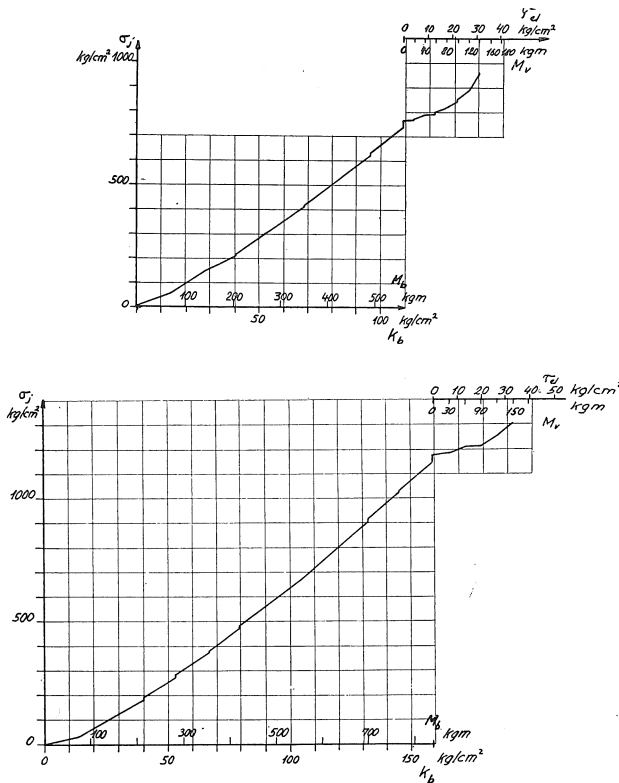
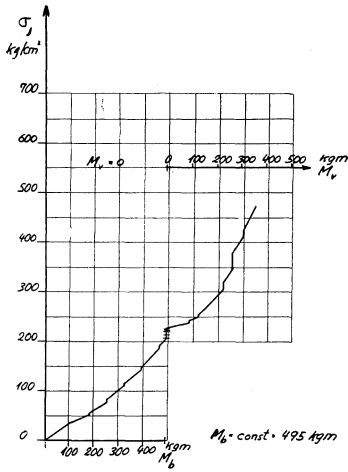
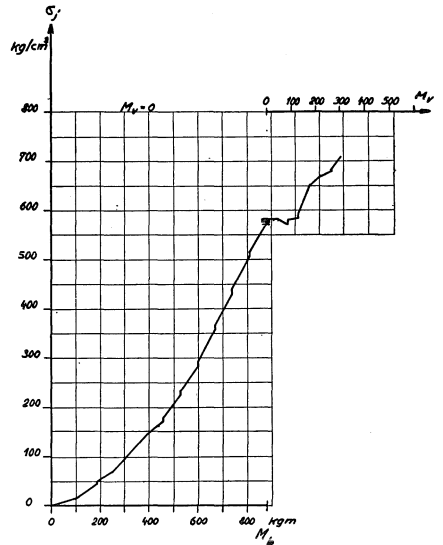


Fig. 39. Uppmätta dragpåkänningar i järnen i serie III.
a) III: 3 b; $M_{vBrott} = 160$ kgm., b) III: 4 b; $M_{vBrott} = 180$ kgm.

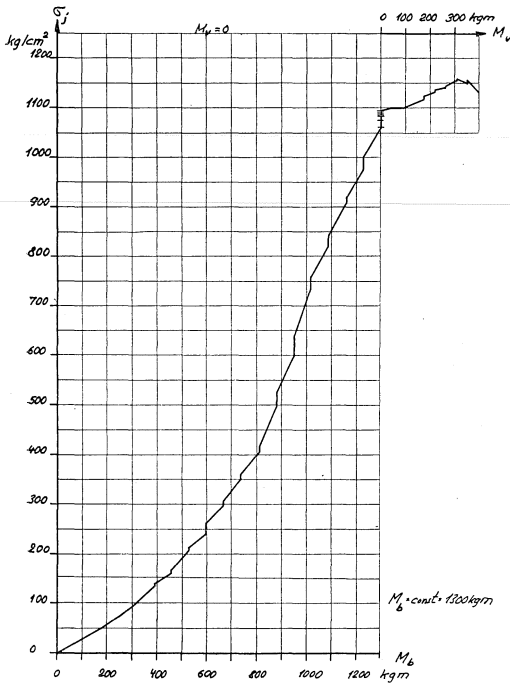
Fig. 39. Tensile stresses in the reinforcement (σ_j) measured in the test series III.
 $M_{vultum} = 160$ kgm ($M_{vultum} =$ twisting moment at failure).



a) V: 2 a; $M_{vBrott} = 440$ kgm,



b) V: 3 b; $M_{vBrott} = 466$ kgm,



c) V: 4 a; $M_{vBrott} = 484$ kgm.

Fig. 40. Uppmätta dragpåkänningar i järnen vid serie V.

Fig. 40. Tensile stresses in the reinforcement (σ_j) measured in the test series V.

$M_{vultim} = 440$ kgm ($M_{vultim} =$ twisting moment at failure).

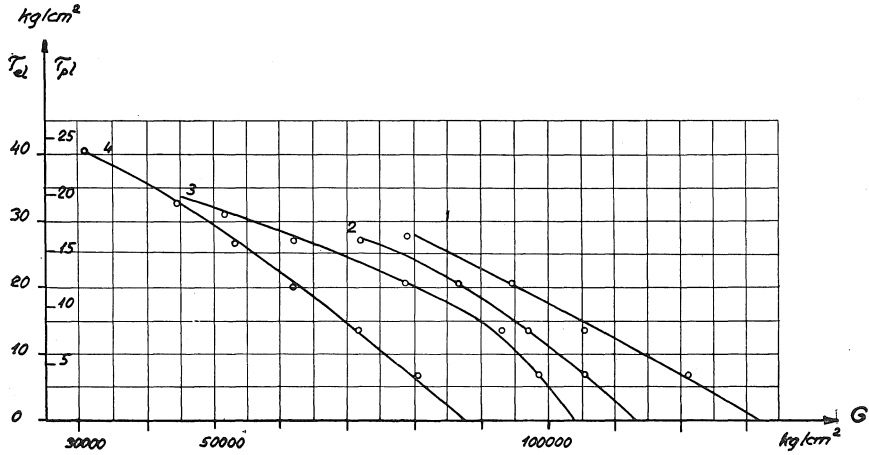


Fig. 41. Skjuvmodul G (sekantmodul) som funktion av τ_{pl} vid olika böjande moment i serie III.
 1: $k_b = 0$, 2: $k_b = 17 \text{ kg/cm}^2$, 3: $k_b = 87 \text{ kg/cm}^2$, 4: $k_b = 128 \text{ kg/cm}^2$.

Fig. 41. Effective (secant) modulus of elasticity in shear (G) as a function of τ_{pl} at various bending moments in the test series III.

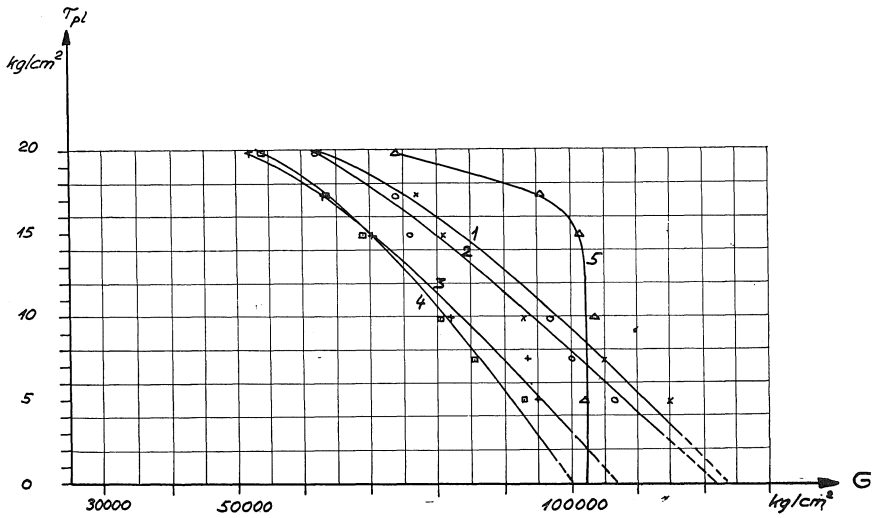


Fig. 42. Skjuvmodul G (sekantmodul) som funktion av τ vid olika böjande moment i serie V.
 1: $M_b = 0$, 2: $M_b = 456 \text{ kgm}$, 3: $M_b = 842 \text{ kgm}$, 4: $M_b = 1295 \text{ kgm}$, 5: $M_b = 0$ oarmerad.

Fig. 42. Effective (secant) modulus of elasticity in shear as a function of τ at various bending moments in the test series V.

c. Uppmätning av vridningsvinkeln.

De ur mätningarna beräknade verksamma skjuvmodulerna återges i fig. 41 och 42. Både vid den rektangulära balken och T-balken är skjuvmodulen (sekantmodul) mindre vid de större böjande momenten. Vid den rektangulära balken är den procentuella minskningen av G vid tillväxt i τ större vid de större böjande momenten, då den däremot för T-balken är ungefär densamma vid de olika böjande momenten. Strax före brott utgör G 35—60 % i serie III och 50—60 % i serie V av värdet vid $M_v = 0$.

Av intresse för dimensionering är förhållandet mellan verksam skjuvmodul vid vridningen och verksam elasticitetsmodul vid böjningen. Värdet på detta förhållande blir enligt figurerna 41, 42, 37 och 38 vid tillåten belastning ($\tau_{pl} \approx 6 \text{ kg/cm}^2$; $k_b \approx 70$ à 80 kg/cm^2) vid den rektangulära sektionen $\approx \frac{90000}{200000} \approx 0,45$ och vid T-sektionen ($\tau_{pl} \approx 6 \text{ kg/cm}^2$; $\sigma_{f_böjn} \approx 1200 \text{ kg/cm}^2$) $\approx \frac{85000}{85000} \approx 1,0$.

Böjningsmotståndet är i betydligt högre grad än vridningsmotståndet känsligt för böjarmeringsprocenten. Om man därför vill ange ett för vridningsinspänningsberäkningar normerande värde på förhållandet $\frac{G}{E}$, bör man skilja på olika armeringsprocenter. Detta värde bör dessutom anges för tillåten belastning. Då denna emellertid också är beroende av om man armerat balken mot vridning, i vilket fall den tillåtna skjuvpåkänningen, räknad på hela arean utan hänsyn till järnen, är större, är det så många faktorer, som inverka på värdet av $\frac{G}{E}$, att man ej rimligen kan förelägga konstruktören regler, där inverkan av de olika variablerna ingår. Det är emellertid uppenbart, att den i litteraturen i allmänhet lämnade uppgiften, att man bör räkna med $\frac{G}{E} = 0,40$ à $0,45$ för tillåtna påkänningar, har giltighet endast under begränsade förutsättningar.

I avsnitt V, som behandlar vridningsinspänning, skall frågan om vilket värde, som bör ges förhållandet $\frac{G}{E}$, uppställas i sitt rätta sammanhang. Det kan emellertid vara på sin plats, att det framhålles, att ett bestämt fastläsande av ett värde för $\frac{G}{E}$ till 0,4 à 0,45 och samtidig beräkning av tröghetsmomenten ur bruttosektionerna utan hänsyn till armeringen innebär beräkning enligt passningsmetod på en godtycklig grundval.

B. Försök med balkar med låg och ordinär armeringsprocent

a. Omfattning, betongsammansättning

Två serier balkar provades med tvärsnitten av sådan form, att relativt stora avskärningskrafter i böjarmeringen genom vridningen kunde förväntas.

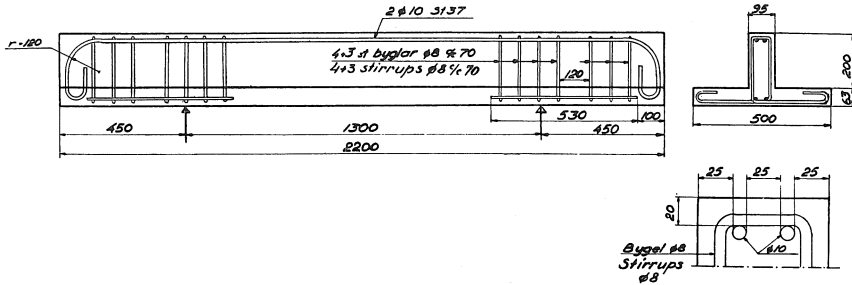


Fig. 43. Dimensioner och armering hos provbalkar i serie VII.

Fig. 43. Dimensions and reinforcement of the beams used for the test series VII.

1. Serie VII.

I serien göts 6 satser, vardera innehållande 4 tryckkuber och en vridbalk av T-sektion med dimensioner och armering enligt fig. 43.

Betongen hade sammansättningen i torra viktsdelar A-cement:sand: singel 1:3,7:4,0. Vattencementtal var 0,70. Sand och singel var av samma kvalitet som vid serierna III och V. Lagringsförhållandena och ålder vid provningen voro även desamma som vid serierna III och V.

Serie VIII.

I serien göts 5 satser, vardera innehållande 6 tryckkuber och två vridbalkar med kvadratisk sektion och med dimensioner och armering enligt fig. 44. Två olika armeringsprocenter provades, $\mu = 0,44\%$ och $\mu = 0,87\%$ med $\mu = 0,44\%$ i satserna 1, 2 och 5 samt $\mu = 0,87\%$ i satserna 3 och 4.

Betongen hade sammansättningen i torra viktsdelar A-cement:sand: singel 1:3,3:4,1. Vattencementtal var 0,69. Sand- och singelkvalitet samt lagringsförhållanden och ålder vid provningen se serierna III och V.

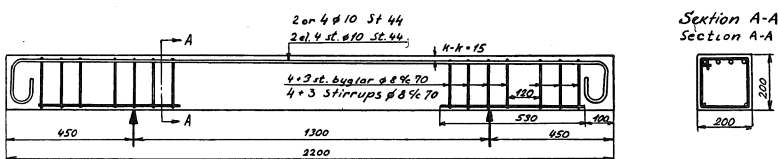


Fig. 44. Dimensioner och armering hos provbalkar i serie VIII.

Fig. 44. Dimensions and reinforcement of the beams used for the test series VIII.

Sats Group	Kubhåll- fasthet <i>Compressive Strength of Cubes</i> kg/cm ²	Balk litt. <i>Beam Nr</i>	M_v kg. m	τ_{pl} kg/cm ²	M_{bbr} kg. m	$M_{b_{1:a spr.}}$ $M_{b_{ult.}}$ kg. m	Brott- fenomen <i>Failure</i>	σ_{jberbr}^1 $\sigma_{s calc.}^1$ kg/cm ²	$\sigma_{jmätt}^2$ $\sigma_{s obs.}^2$ kg/cm ²	σ_{jstr} ur kontrollprov σ_s <i>Yield Point of Control Tests</i> kg/cm ²	σ_v kg/cm ²
1 & 2	314 304 309 333 290	VII: 1	0	0	1158	512	Sträckgräns i järnen <i>Yield Point of Reinfor- cement</i>	3110		2790	3110
	282 274 261	VII: 2	0	0	1088	512		„	2870	2588 (1018)	
	296										
3 & 4	284 276 280 308 304	VII: 3	225	10,6	1158	512	Sträckgräns i järnen <i>Yield Point of Reinfor- cement</i>	3040		2750	3140
	287 272 280	VII: 4	225	10,9	1088	426		„	2840	2658 (1018)	
	286										
5 & 6	300 297 292 316 284	VII: 5	315	15,3	878	340	Vridsprickor <i>Torsional cracks</i>	2260		2780	2940
	280 278 284	VII: 6	270	12,9	948	340		„	2460	2498 (948)	
	291										

¹ σ_j är beräknat under förutsättningarna 1. $n = 15$, 2. rätlinjig påkänningsfördelning och 3. betongen tar ej dragning.
 σ_j was calculated on following assumptions, viz. 1. $n = 15$, 2. Stright-line distribution of unit stresses 3. The tensional resistance of concrete is ignored.
² Värdet inom parentes anger storleken på det böjande moment i kgm, vid vilket uppmätningen av järnpåkänningen företagits.
The value in brackets gives the magnitude of the bending moment in kgm at wich the stress in the reinforcement was measured.

Tabell 11. Resultat av serie VII. Table 11. Results of Test Series VII.

b. Provning

Serie VII.

Balkarna provades i grupper på två st. på så sätt, att det vridande momentet först påfördes till sitt slutliga värde, varefter belastning företogs med böjande moment tills brott uppstod. Belastningsanordningarna voro desamma som vid serierna III och V. Böjningen mättes med zeissklockor mot järnbalk, och vridningen mättes med kikare och skala på samma sätt som vid serierna III och V. Med tensometrar mättes dessutom på varannan balk påkänningarna i böjarmeringen.

2. Serie VIII.

I denna serie provades balkarna så, att det böjande momentet först påfördes till sitt slutliga värde, varefter belastning företogs med det vridande momentet tills brott uppstod. I övrigt voro arrangemangen desamma som vid serie VII.

c. Resultat

1. Serie VII.

Brottvärden.

Resultaten äro sammanställda i tabell 11.

Balkarna tillhörande satserna 1 och 2 provades utan vridande moment. Brottorsak var här, att sträckgränsen nåddes i järnen. Avvikelsen mellan beräknat σ_j vid brott och $\sigma_{j_{str}}$ förklaras dels av att betongen upptar en del dragning, dels av att den inre hävarmen ökas något vid sträckgränsens uppnående samt slutligen vid balkarna utan ursparingar för tensometermätningar möjligen av att sträckgränsen för dragning blir, förhöjd när järnen äro inbäddade i betongen.

Balkarna tillhörande satserna 3 och 4 belastades med ett vridande moment av 225 kgm motsvarande ett τ_{pl} av 10,6 resp. 10,9 kg/cm². Även här var brottorsaken uppenbarligen, att sträckgränsen uppnåddes i böjarmeringen. Sedan sträckgränsen nåtts, yttrade sig dock brottet som ett vridbrott.

Vid satserna 5 och 6, där vridande momenten voro 315 resp. 270 kgm med $\tau_{pl} = 15,3$ resp. 12,9 kg/cm², yttrade sig brottet närmast som ett vridbrott. Vridsprickorna och förskjutningarna mellan betongstyckena på ömse sidor om sprickorna blevo emellertid så stora, att sträckgränsen med nödvändighet måste ha uppnåtts i järnen.

Balkarnas utseenden efter brott framgå av fig. 45. Siffrorna vid sprickorna ange storleken av det böjande momentet i kgm, dividerat med 3,75.

Resultaten diskuteras närmare på s. 72.

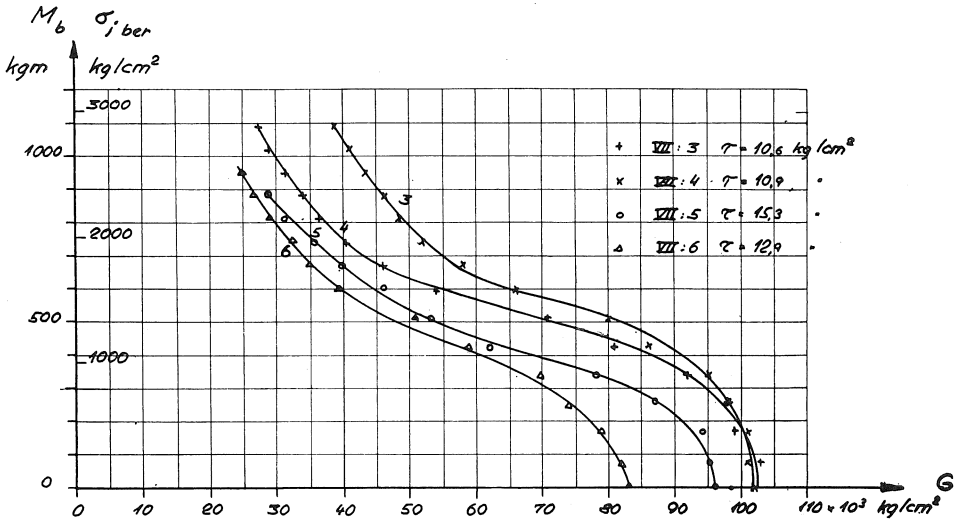


Fig. 46. Skjuvmodul G som funktion av böjande moment vid olika vridande moment serie VII.
 Fig. 46. Effective (secant) modulus of elasticity in shear (G) as a function of the bending moment M_b and the computed stress in reinforcement σ_j at various twisting moments in the series VII.

SJ

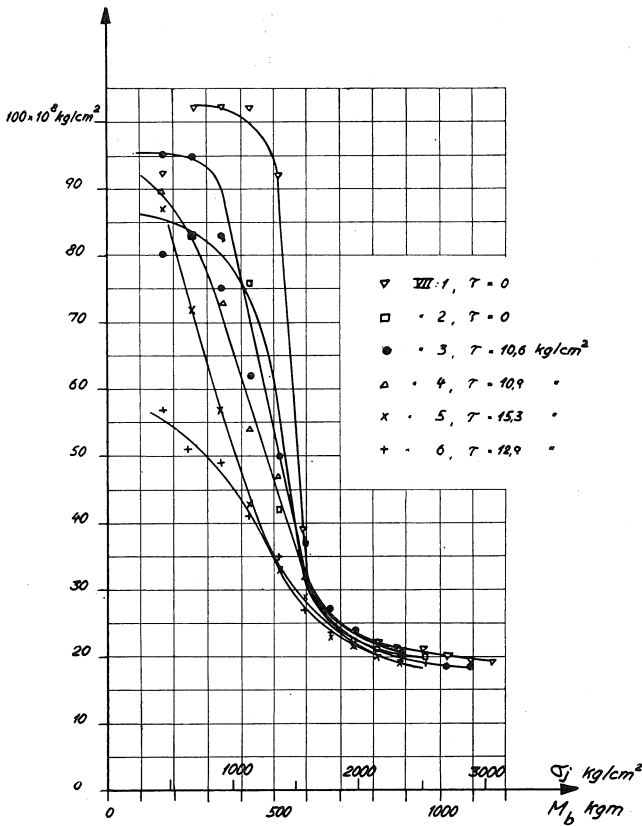


Fig. 47. Bøjstyheden som funktion av böjande momentet vid olika vridande moment i serie VII.

Belastningshastighet: $M_b = 80$ kgm påfördes under 1 min. Vila 2 min.

Fig. 47. Flexural rigidity as a function of the bending moment at various twisting moments in the test series VII.

Rate of loading: $M_b = 80$ kgm was applied for 1 minute. The period of rest was 2 minutes.

Deformationsmätningar.

Resultaten av deformationsmätningarna framgå av diagrammen i fig. 46, 47 och 48.

I fig. 46 återges skjuvmodulen som funktion av det böjande momentet eller σ_j vid olika vridande moment. Kurvan över detta samband har en karakteristisk S-form, som förklaras av att ett snabbt fall i skjuvmodul äger rum, när de första böjsprickorna slå upp. Vid $\sigma_j = 1\ 100$ utgör verksam skjuvmodul ca 60 % av värdet vid $\sigma_j = 0$ och vid $\sigma_j = 2\ 000$ ca 40 %.

I fig. 47 återges böjstyvheten som funktion av böjande moment och σ_j vid olika vridande moment. Karakteristiskt är böjstyvhetens snabba avtagande vid uppkomsten av första böjsprickorna eller rättare något innan de första böjsprickorna iakttagits. Vid $\sigma_j = 1\ 500\text{ kg/cm}^2$ har reella böjstyvheten fallit till ca 35 % av ursprungsvärdet och vid $\sigma_j = 2\ 000\text{ kg/cm}^2$ till ca 25 %. Den stora spridningen i värdena på böjstyvheterna vid små belastningar förklaras av att mätnoggrannheten är relativt dålig vid små deformationer.

Liksom vid serie V ger beräkning av tröghetsmomentet med hänsynstagande till betongens uppsprickning betydligt förnuftigare resultat, än om man beräknar detta ur den ospruckna bruttosektionen utan hänsyn till järnen. Vid $\sigma_j = 1\ 800\text{ kg/cm}^2$ (ber. ur ant. $n = 15$) erhålles sålunda

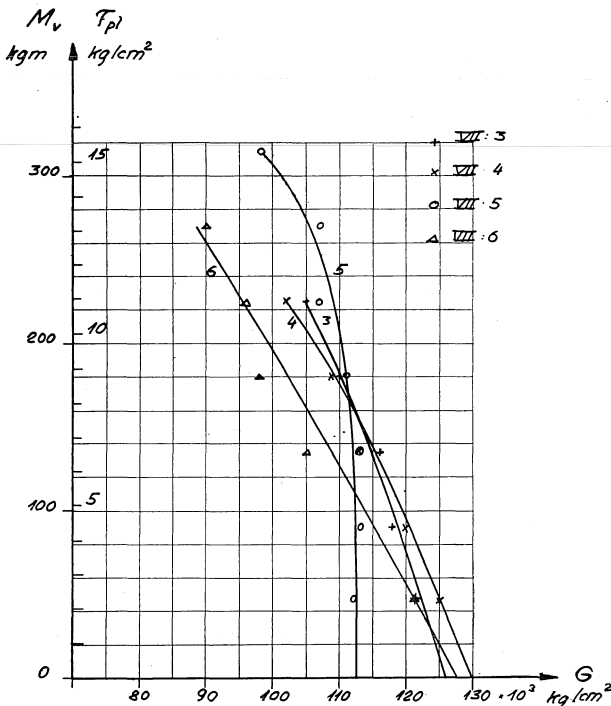


Fig. 48. Skjuvmodulen som funktion av vridande moment vid olika böjande moment i serie VII.

Belastningshastighet: $M_v = 45$ kgm påfördes under 1 min. Vila 2 min.

Fig. 48. Effective (secant) modulus of elasticity in shear as a function of the twisting moment at various bending moments in the test series VII.

Rate of loading: $M_v = 45$ kgm was applied for 1 minute. The period of rest was 2 minutes.

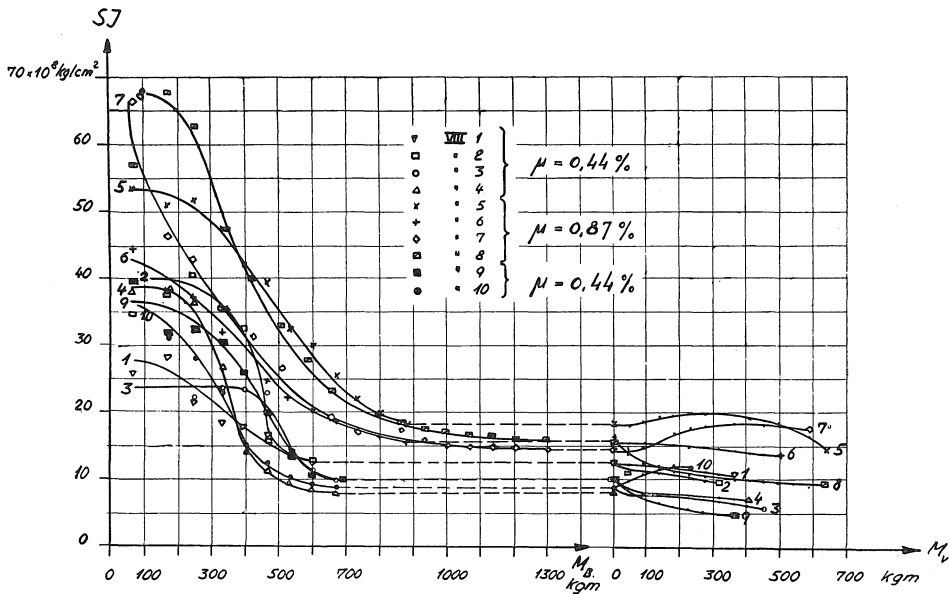


Fig. 49. Böjstyvheten som funktion av böjande och vridande moment i serie VIII. VIII: 5 till och med VIII: 9 har 4 \odot 10, resten 2 \odot 10.

Fig. 49. Flexural rigidity as a function of the bending and twisting moments in the test series VIII. The beams VIII: 5 to VIII: 9 were reinforced with 4 bars 10 mm in diameter, and the other beams with 2 bars 10 mm in diameter.

med beräkning av tröghetsmomentet ur stad. II och med $n = 10$ ett värde på sekantmodulen $S = 270\,000 \text{ kg/cm}^2$, då beräkning på bruttosektionen ger $S = 73\,000 \text{ kg/cm}^2$. I fig. 48 återges variationen hos skjuvmodulen, erhållen ur vinkelavläsningarna, som funktion av det vridande momentet och τ_{pl} .

2. Serie VIII.

Brottvärden.

Resultaten äro sammanställda i tabell 12.

I satserna 1, 2 och 5 var armeringsprocenten 0,44 % och i satserna 3 och 4 0,87 %.

I samtliga provade alternativ voro brottfenomenen vridsprickor. Avvikelsen mellan uppmätt och beräknat σ_j har samma förklaring som i serie VII.

Resultaten diskuteras närmare på s. 00.

Deformationsmätningar.

Endast resultaten av nedböjningsmätningarna medtagas här, emedan avläsningarna av vridningsvinklarna blevo otillförlitliga, på grund av att ett flertal omställningar av skalorna måste företagas under försökets gång.

4	296	VIII : 7	1270	588	585	22,0	}Vridsprickor }Torsional }cracks	2570	—	3300	3270
	302										
	300										
	309	VIII : 8	1270	588	630	23,8	}	}	}	}	}
	274										
	248								2070 (3120)	3240	
	288										
5	286	VIII : 9	669	397	360	13,5	}Vridsprickor }Torsional }cracks	2620		2720	2870
	300										
	248										
	284	VIII : 10	669	329	225	8,5	}Vridsprickor }och sträck- }gräns i }järnen }Torsional }cracks and }Yield Point }in reinforce- }ment		2500	2600	
	278										
	278										
	279										

¹ Det första värdet är den uppmätta medeljärnpåkänning, sedan det böjande momentet enbart påförts till sitt fulla belopp. Värdet inom parentes är den största uppmätta järnpåkänningen, sedan det vridande momentet påförts till sitt slutliga värde.

¹ The first figure in this column is the average observed stress in the reinforcement, measured after the bending moment alone has been applied to its full extent. The figure in brackets is the maximum stress in the reinforcement measured after the twisting moment has been brought to its ultimate value.

Tabell 12. Resultat från serie VIII. Table 12. Results of Test Series VIII.

I fig. 49 är böjstyvheten SI avsatt som funktion av det böjande och vridande momentet. Om I räknas på bruttosektionen ($I = \frac{1}{12} \cdot 20^4$), skall SI divideras med $1,33 \cdot 10^4$, för att den verksamma sekantmodulen vid böjningen skall erhållas. Av figuren framgår, att vridningen påverkar den effektiva böjstyvheten relativt obetydligt samt vidare, att armeringsprocenten har en väsentlig inverkan på böjstyvhetens storlek.

Vid en beräknad järnpåkänning av $2\,000\text{ kg/cm}^2$ är reella böjstyvheten 30% större vid armeringsprocenten $0,87$ än vid $0,44$.

C. Spänningsoptisk undersökning av påkänningsfördelningen vid vridning av balk med böjsprickor

En undersökning av de påkänningar, som åtfölja vridningen, innebär en undersökning av ett rympåkänningstillstånd. Den s. k. konserveringsmetoden med belastning av modellen i värme och avkylning, under det att lasten kvarstår användes vid försöken.¹ Provbalken, som utfördes i isolon (ett phenolkonstharts), hade dimensionerna enligt fig. 50. I B och C

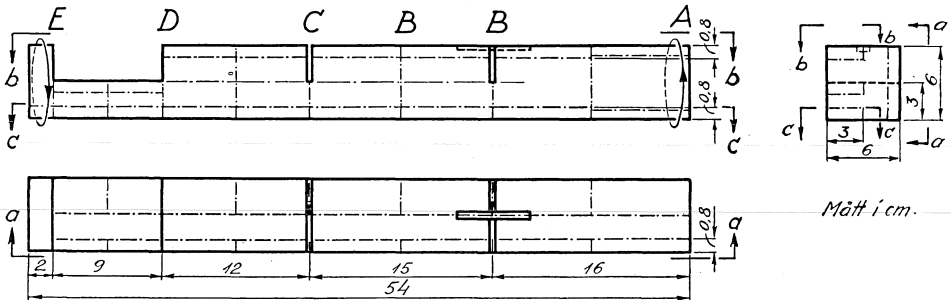


Fig. 50. Dimensionering och uppskäring av isolonbalk, vid den spänningsoptiska undersökningen av vridföreteelserna i sprucken balk.

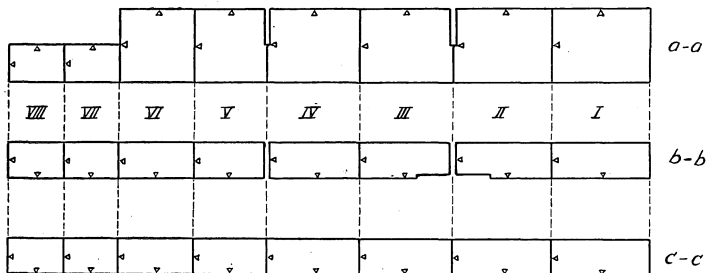
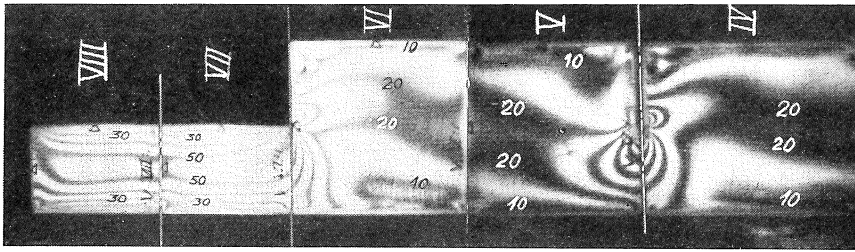
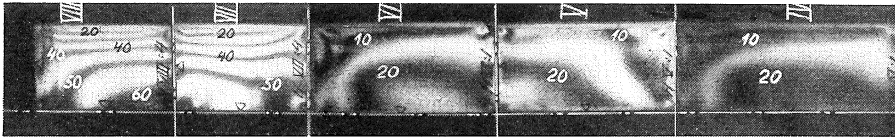


Fig. 51. Schema för beteckning av provkroppar.

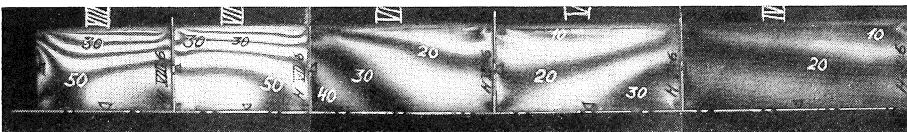
¹ Se Nylander, H.: "Några spänningsoptiska undersökningar", Tekniska skrifter nr 101, Red. av Teknisk tidskrift, Stockholm 1944.



a—a) yttersta vertikalskiva,



b—b) översta horisontalskiva,



c—c) understa horisontalskiva.

Fig. 52. Isochromater, erhållna vid den spänningsoptiska vridningsstudien.
Se vidare fig. 50 och 51.

voro sprickor, som skulle motsvara böjsprickor, uppskurna till ett djup av 3 cm.

Den inlagda armeringen blev tyvärr ej på grund av de lokala deformationerna vid anläggningen på ömse sidorna om sprickorna verksam. De spänningsoptiska effekterna blevo därför desamma vid spricka B som vid spricka C. Resultaten redovisas därför endast för området B¹—E.

Efter konserveringen av påkänningstillståndet hos den elastiska delen av isolonbalken — isolonets verkningar vid konserveringsmetoden förklaras av att det består av en elastisk, temperaturoberoende del och en plastisk del, som veknar vid uppvärmning — skars balken upp i tunna skivor med 5 mm tjocklek enligt schema i fig. 51. Över- och underskivorna samt sidoskivorna, samtliga utskurna parallellt med balkens längdriktning, undersöktes.

I fig. 52 återges de vid den spänningsoptiska undersökningen erhållna isokromaterna på partiet B¹—E. Fig. a visar isokromaterna för yttersta vertikalskiva, fig: a b och c för övre resp. undre horisontalskiva. Enfärgat ljus användes vid isokromatupptagningen. Isokromaterna ange storleken på maximala skärpåkänningen. Av fig. a framgår, att starka påkänningskoncentrationer uppträda vid sprickans slut. Störningen av påkännings-

tillståndet är dock mycket lokal — på ett avstånd från sprickan lika med provbalkens halva höjd har påkänningstillståndet stabiliserats. På del D—E med höjden 3 cm är maximala skärpåkänningen $2\frac{1}{2}$ gånger så stor som i de av sprickorna opåverkade delarna av balken, där höjden är 6 cm.

Av fig. b, som visar halva översidan, kan samma slutsats angående inverkan av sprickorna som för sidoskivorna dragas, nämligen att störningen av påkänningstillståndet vid sprickan är av lokal karaktär med verkan upptill ett avstånd av ca halva tvärsnittsmåttet. Av fig. c, som visar isokromaterna för halva undersidan, framgår, att maximala skärpåkänningen på undersidan vid sprickan endast är ca 50 % större än maximala skärpåkänningen på den av sprickan opåverkade delen av balken. På del D—E däremot där höjden är 3 cm är maximala skärpåkänningen 3 gånger så stor som på den ospruckna delen av balken med höjden 6 cm.

Resultaten av den spänningsoptiska undersökningen kunna sammanfattas enligt följande.

Vid den uppskurna sprickans slut uppträder vid vridningen starka påkänningskoncentrationer av lokal karaktär. Begränsningen i inverkan från sprickan för med sig, att maximala skärpåkänningen i balkens undersida endast är obetydligt större vid sprickan än på den övriga delen av balken (vid det spänningsoptiska försöket ca 50 %), då maximala skärpåkänningen däremot på den del av balken D—E där balkhöjden var konstant = 3 cm, är ca 3 gånger så stor som vid delen med höjden 6 cm. Då påkänningskoncentrationer vid betong äro av relativt ofarlig karaktär, ger den spänningsoptiska undersökningen till resultat, att den uppställda arbetshypotesen — vilken enligt ovan innebär, att vridningsansträngningen beräknas för en balk, vars höjd är lika med den ospruckna delens höjd — jämfört med verkligheten måste ge utomordenligt ogynnsamma resultat.

D. Diskussion av resultaten till undersökningarna över inverkan av böjande moment. Uppställande av dimensioneringsformel

Den spänningsoptiska undersökningen visade, att bortsett från påkänningskoncentrationerna vid böjsprickans slut ökas den maximala skärpåkänningen endast relativt obetydligt (tvärsnittet hos den provade balken hade en i förhandenvarande ogynnsam form). Ökningen i skärpåkänning kompenseras av den genom bøjtryckpåkänningen ökade förmågan hos betongen att upptaga skärpåkänningar. I överensstämmelse härmed stå resultaten till samtliga av de ovan skildrade försöken, där dragpåkänningen i järnen av det böjande momentet varit relativt låg men där det böjande momentet ändå haft en sådan storlek, att tydliga böjsprickor slagit upp. Vid dessa försök har nämligen bärförmågan vid vrid-

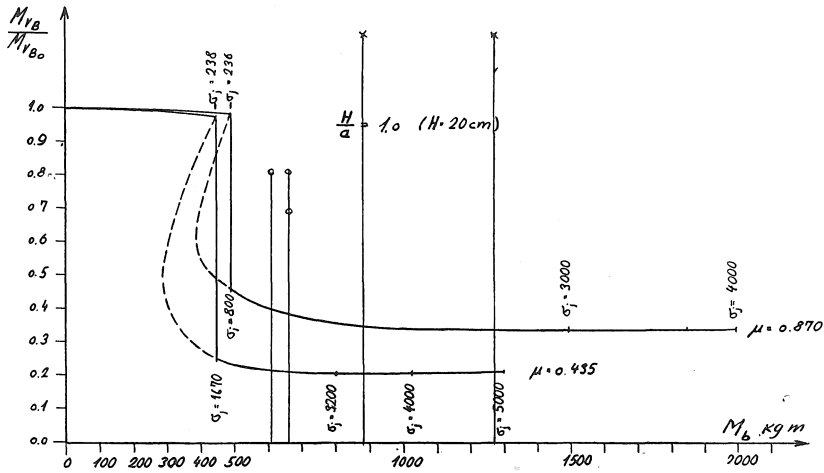


Fig. 53. Ur arbetshypotesen beräknat vridande brottmoment som funktion av böjande moment vid serie VIII.

0 försöksvärden för $\mu = 0,435$. \times försöksvärden för $\mu = 0,870$.

ning varit lika stor som vid försöken utan böjande moment. Vid större böjande moment med relativt stora järnpåkänningar har däremot en minskning av bärförmågan vid åverkan av vridande moment konstaterats. Det enligt arbetshypotesen beräknade vridande brottmomentet är i fig. 53 återgivet som funktion av det böjande momentet för det i för handen varande avseende ogynnsammaste av de provade tvärsnitten (serie VIII). $M_{v_{b_0}}$ anger det vridande brottmomentet vid det böjande momentet M_b lika med noll. ($M_{v_{b_0}}$ = tidigare och nedan använd beteckning M_{v_0}).

Försöksvärdena äro inlagda. Som synes ger arbetshypotesen utomordentligt ogynnsamma resultat. Av brottfenomenen att döma har emellertid både vid serie VII och serie VIII sträckgränsen nåtts i järnen före brott i de flesta av de provade balkarna. Det är därför uppenbart, att ansträngningen i armeringen av den kombinerade böjningen och vridningen orsakat sträckgränsens uppnående. Vid det spänningsoptiska försöket var det en märkbar förskjutning i balköverkant mellan styckena på ömse sidor om den uppskurna sprickan. Vid den armerade betongbalken måste alltså böjarmeringen bli utsatt för avskärning. På den spruckna delen av betongen samverka järnen och friktionen mellan betongstyckena på ömse sidor om sprickan till upptagande av den avskärningskraft, som orsakas av vridningen. En noggrann bestämning av hur stor del, som upptages av järnen, leder till oproportionerligt besvärliga kalkyler och formler, vilka ej äro berättigade med tanke på att ett fel i storleken på skärpåkänningen i järnen med storleksordningen 10 % vid i praktiken vanligen använda dimensioner saknar dimensionerande betydelse för den kombinerade

ansträngningen i järnen. Med ledning av resultaten från undersökningarna i avd. II över inverkan av normaltryck på bärförmågan vid vridning kan man på sätt, som åskådliggöres av fig. 24 och 25, beräkna hur stor del av M_{v_0} , d. v. s. det vridande brottmomentet vid $M_b = 0$, som kan upptagas av den ospruckna betongen. Denna del benämnes $\beta \cdot M_{v_0}$. Övrig del av det vridande momentet, d. v. s. $M_v - \beta M_{v_0}$ ger avskärningskraften i järnen.

Man får då skärpkänningen i järnen ur

$$\tau_j = 1,25 \cdot \frac{M_v - \beta M_{v_0}}{\varrho \cdot A_j} \dots \dots \dots (a)$$

där ϱ betecknar hävarmen för avskärningskraften.

Här antages $\frac{\varrho}{1,25} = \frac{h}{2}$, vid vilket antagande man torde vara på den säkra sidan vid ordinära balkar.

Man erhåller då

$$\tau_j = \frac{M_v - \beta M_{v_0}}{\frac{1}{2} h \cdot A_j} \dots \dots \dots (b)$$

Risken för sträckgränsens uppnående bedömes ur Huber-Beltramis arbetshypotes.

Den påkänning, σ_v , som skall jämföras med sträckgränspåkänningen vid ren dragning, erhålles då ur

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_j^2 + 3 \tau_j^2} \dots \dots \dots (c)$$

Formeln tillämpas på försöksserierna VII och VIII.

För försöksserie VII (T-balkar) erhålles med $\tau_{br} = 20 \text{ kg/cm}^2$.

$M_{v_0} = 38\,800 \text{ kgcm}$

Balkarna 3 och 5 utan ursparingar för tensometermätningar kontrollräknas enligt formlerna (b) och (c) där σ_j betecknar järnpåkänningen på grund av det böjande momentet.

För balk 3 erhålles med β ur tab. 13 = 0,42 $\sigma_j = 3\,040 \text{ kg/cm}^2$ $M_v - 0,42 M_{v_0} = 22\,500 - 0,42 \cdot 38\,800 = 6\,200 \text{ kgcm}$.

$$\tau_j = \frac{6\,200}{\frac{1}{2} \cdot 17,5 \cdot 1,57} = 450 \text{ kg/cm}^2$$

och

$$\sigma_v = \sqrt{3040^2 + 3 \cdot 450^2} = 3\,140 \text{ kg/cm}^2$$

På motsvarande sätt erhålles för balk 5 $\sigma_v = 2\,940 \text{ kg/cm}^2$.

I tabell 11 återfinnes σ_v i sista kolumnen.

Vid det större vridande momentet (balk 5) överensstämmer σ_v bättre med σ_{str} än vid det mindre vridande momentet. Detta är förklarligt med

tanke på att i balk 3 brottet i huvudsak var ett böjbrott med förstoring av inre hävarmen på grund av de plastiska brottdeformationerna.

Vid serie VIII blir med $\tau_{brott} = 20 \text{ kg/cm}^2$ $M_{v_0} = 53\,000$.

Beräkningen återges för balk 3:

$$\begin{aligned}\sigma_j &= 2\,620 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_j &= \frac{45\,000 - \frac{1}{2} \cdot 53\,000}{9 \cdot 1,57} = 1\,310 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_v &= \sqrt{2\,620^2 + 3 \cdot 1\,310^2} = 3\,480 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

För de övriga balkarna utan ursparingar för tensometermätningar utföres beräkningen på samma sätt. I sista kolumnen i tabell 12 återges σ_v .

σ_v är större än σ_{str} för samtliga balkar utom 5 och 7, vid vilka brottet av brottfenomenen och det höga värdet på τ att döma består i rent vridbrott.

Resultaten av undersökningen över bärförmågan vid samtidigt böjande och vridande moment kunna sammanfattas sålunda.

Vid låg järnpåkänning på grund av böjningen inverkar böjande moment i allmänhet gynnsamt på vridhållfastheten. Vid utnyttjad böjarmering skall armeringen dimensioneras för en påkänning σ_v , som sättes lika med σ_{till} .

σ_v bestämmas av formeln

$$\sigma_{till} = \sigma_v = \sqrt{\left(\frac{M_b}{\varrho \cdot A_j}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_v - \beta M_{v_0}}{\frac{1}{2} h \cdot A_j}\right)^2} \dots \dots \dots (d)$$

vilken ger

$$A_{j_{erf}} = \frac{1}{\sigma_{till}} \sqrt{\left(\frac{M_b}{\varrho}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_v - \beta M_{v_0}}{\frac{1}{2} h}\right)^2} \dots \dots \dots (e)$$

där M_b = böjande moment;

ϱ = inre hävarmen, d. v. s. avstånd mellan tryck- och dragcentrum, i den armerade betongbalken;

A_j = järnarea;

M_v = vridande moment;

M_{v_0} = vridande brottmoment när balken ej åverkas av böjande moment;

h = avstånd från dragjárnens centrum till tryckt kant.

Vid dimensioneringen kan man lämpligen utföra beräkningen i två etapper. Först utföres dimensioneringen för det böjande momentet, varvid ett bestämt värde för ϱ erhålles. Detta värde på ϱ förändras ej nämnvärt av ökningen i järnarea på grund av ekv. (e) (avvikelsen från verkligheten är på den säkra sidan), varför man kan sätta in värdet i ekv. (e) för bestämning av $A_{j_{erf}}$.

Utan särskild vridarmering får M_v ej överskrida M_{v_0} .

β är en faktor, vars storlek är beroende på balktvärsnittets utseende och armeringsprocenten. Ju mindre balkhöjden h är i förhållanden till balkbredden och ju mindre μ är, desto mindre del av M_{v_0} kan den vid böjningen ospruckna delen av balken upptaga.

För rektangulära balkar anges med stöd av försöksresultaten och av beräkningar utförda på samma sätt som för försöksbalkarna (se fig. 25 och 53) utrönta lämpliga värden för β i tabell 13.

$\frac{h}{b}$ \ μ	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
≥ 2	0,55	0,60	0,70	0,75	0,80	0,85
1,5	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
1,0	0,45	0,50	0,50	0,55	0,60	0,65
0 (platta)	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,55

Tabell 13. Värden för den ekv. (d) och (e) ingående faktorn β vid olika μ och förhållanden h/b vid rektangulär sektion.

Om $M_v \leq \beta \cdot M_{v_0}$, eller — vilket är detsamma — om τ av vridning $\leq \beta \cdot \tau_{till}$, behöver man vid dimensioneringen av böjarmeringen ej taga hänsyn till det vridande momentet. Om exempelvis för $\frac{h}{b} = 2$, $\mu = 1,0$, $\tau_{M_v} = 0,7 \cdot \tau_{till}$ ger det vridande momentet ej någon ökning av böjarmeringen.

För T-balk med tryckt fläns blir det på grund av de olika variablernas mångfald synnerligen omständligt att uppställa motsvarande tabell för β . Antingen kan man använda värdena, gällande för platta ($\frac{h}{b} = 0$) i tabell 13 med μ lika med det procenttal, som järnarean utgör av livtvärsnittet, eller räkna T-sektionen för vridning utan hänsyn till flänsen, alltså som rektangulär balk, och använda tabell 13 i dess helhet. T-balk med dragen fläns räknas med avseende på vridning som balk med rektangulär sektion.

IV. Samtidig avskärning och vridning

A. Inledning

Vid enbart vridning erhöles tillfredsställande överensstämmelse med verkligheten, om man antog skärpåkänningen enligt plasticitetsteorien jämnt fördelad över tvärsnittet och vid brott satte den lika med betongens draghållfasthet. Påkänningsfördelningen vid ren avskärning torde ej kunna anses strängt utklarad. Bl. a. torde den på grundval av förutsättningen, att betongen ej kan upptaga dragning, härledda konstanta fördelningen av skärpåkänningarna över spruckna delen med parabolisk avslutning till noll i tryckzonen ej särskilt väl motsvara verkligheten. Då denna påkänningsfördelning emellertid ligger till grund för nuvarande dimensioneringsformler, som giva betryggande säkerhet mot brott, användes den i det följande vid tolkandet av försöksresultaten. Vid samtidig vridning och avskärning adderas skärpåkänningarna av de två belastningsfallen och därigenom även huvuddragpåkänningarna på ena sidan. På den andra sidan av balken äro dessa huvuddragpåkänningar av avskärningen och vridningen motriktade. Såsom arbetshypotes göres antagandet, att brott inträder, när den sammanlagda huvuddragpåkänningen (och därigenom även skärpåkänningen) av vridningen och avskärningen uppnår sitt brottvärde, varvid detta brottvärde sättes lika med betongens draghållfasthet.¹

B. Försök (Serie IV)

a. Omfattning, betongsammansättning

De nedan skildrade försöken utfördes i examensarbete i Byggnadsstatik av nuvarande civilingenjörerna Göran Bjursten, Bengt Norén och Svante Widing.

I serien götos fem satser, vardera innehållande två vridbalkar samt kontrollprov, bestående av fyra tryckkuber, ett tryckprisma samt i varannan sats två dragprismor och i varannan två böjbalkar. Betongen hade sammansättningen i torra viktsdelar: A-cement:sand:singel 1:4,3:4,6. Vattencementtal var 0,75. Sand och singel var av samma sort, som användes till serierna III och V.

¹ Vid avskärning enbart är i allmänhet den på ovan angivna grunder beräknade huvuddragpåkänningen vid brott större än betongens rena draghållfasthet, i olika grad alltefter spännvidd och armeringsprocent.

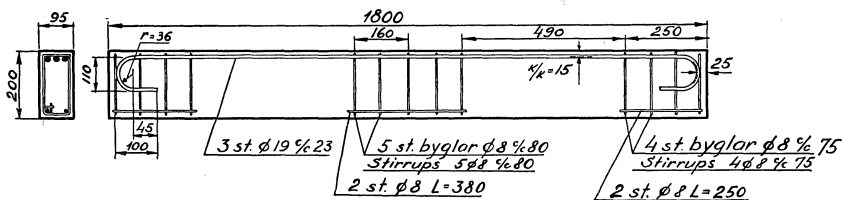


Fig. 54. Dimensioner och armering hos provbalkar i serie IV.
 Fig. 54. Dimensions and reinforcement of the beams used for the test series IV.

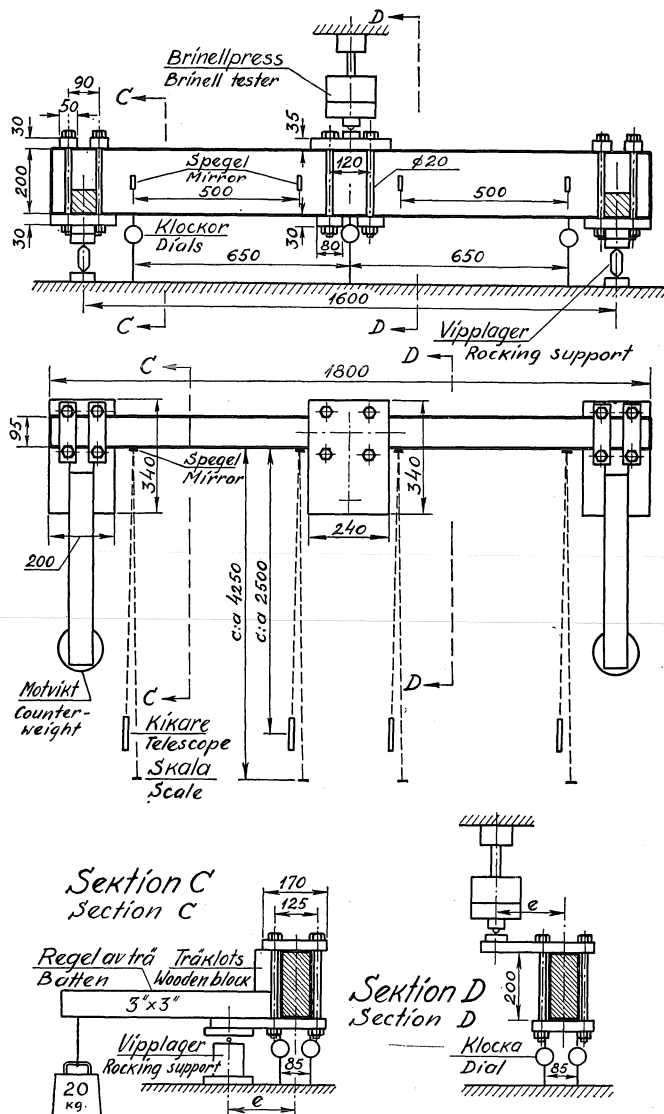


Fig. 55. Provningsanordning vid serie IV.
 Fig. 55. Testing arrangements for the test series IV.

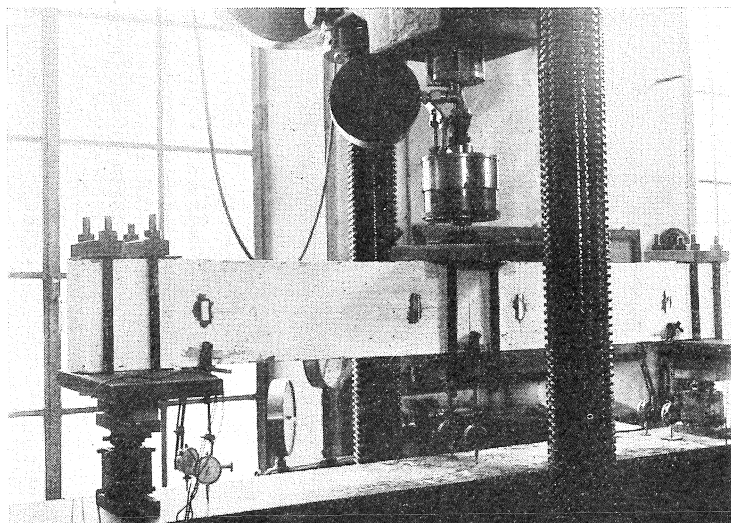


Fig. 56. Provbalk serie IV färdig för provning.

Fig. 56. Beam ready for testing.

Provkropparna lagrades i fuktighetsmättad luft med temperatur av $+20^{\circ}\text{C}$ under en vecka och återstående tid före provningen i 18-gradig luft med 55% fuktighetshalt. Ålder vid provningen var 28 dygn.

b. Provning

Balkarnas dimensioner och armering framgå av fig. 54. Vid upplagen och i mitten var balken såsom framgår av figuren armerad mot vridning och skjuvning. Böjarmeringen var vald överstark ($\mu = 5,0\%$). Förhållandet mellan excentricitet e hos den belastande kraften och balkbredd b varierade vid de fem satsernas balkar från $\frac{e}{b} = 0$ (enbar skjuvning) i sats 1, $0,42$ i sats 2, $1,07$ och $1,66$ i sats 3, $2,17$ i sats 4 till $\frac{e}{b} = \infty$ (enbar vridning) i sats 5.

Anordningen för åstadkommande av den excentriska belastningen framgår av fig. 55. Belastningsplanet går genom de två vipplagren vid balkändarna och vipplagret på mitten av balken. Såsom framgår av fig. 55 överfördes de vridande momenten till balken genom plattjärn på båda sidor om balken, hopskruvade genom bultar. Nedböjningen mättes med mätklockor och vridningen med kikare och skala. Utseendet av den till provning uppgillrade balken framgår av foto, fig. 56.

Belastningen påfördes med hjälp av brinellpress. Kontrollproven behandlades på samma sätt som vid serierna I och II.

Sats Group Nr	Vol. vikt Volume Weight kg/l	Sättnått Slump cm	K o n t r o l l p r o v C o n t r o l T e s t s																		
			Tryck- kuber ¹ Compr. Strength of Cubes ¹ σ_B kg/cm ²	Dragprisma ² Tensile Tests ²		Böjbalk ³ Bending Tests ³		Tryckprisma ³ Compr. Strength of Prisms ³		$\frac{\sigma_p}{\sigma_B}$	$\frac{\sigma_d}{\sigma_B}$	$\frac{\sigma_{bd}}{\sigma_B}$									
				σ_d kg/cm ²	Tid till brott Time until Failure min.	σ_{bd} kg/cm ²	Tid till brott Time until Failure min.	σ_p kg/cm ²	Tid till brott Time until Failure min.												
IV: 1 a	2,36	4,0	268	16,5	9 : 30			196	87 : 10	0,72	0,061										
IV: 1 b			275										15,0	11 : 00						0,055	
			269																		
			272								0,058										
			271	15,7																	
IV: 2 a	2,35	5,0	306	15,6	9 : 30			195	86 : 30	0,74	0,053										
IV: 2 b			284										13,6	7 : 00						0,052	
			266																		
			259								0,053										
			262	14,6																	
IV: 3 a	2,34	6,5	275					178	82 : 10	0,70		0,097									
IV: 3 b			272										26,6	2 : 00							
			273																		
			231																		
			246																		
			238																		
			256					26,1				0,103									

IV: 4 a	2,35	4,0	283				23,4	3 : 30	88	88 : 20	0,79	0,086	
IV: 4 b			263									31,8	0,114
			281										
			279				27,6					0,100	
			277										
IV: 5 a	2,38	4,5	254	13,6	7 : 10			210	86 : 15	0,83		0,054	
IV: 5 b			254	13,9	9 : 20							0,054	
			250										
			260										
			254	13,75								0,054	
Totalt medeltal: Average of all tests:			264	14,7			26,8		207		0,76	0,055	0,102

¹ 15 × 15 × 15 cm.

² Tvärsnitt 15×15 cm fri draglängd
Section 15×15 cm clear Length in Tension 64 cm.

³ 15 × 15 × 90 cm.

Tabell 14. Resultat av serie IV. Table 14. Results of Test Series IV.

Betongsammansättning — cement : sand : singel
Concrete Mix — Cement : Sand : Gravel 1 : 4,29 : 4,61

$$250 \text{ kg/m}^3 \text{ A cem. } \frac{W}{C} = 0,75$$

Forts. på tabell 14. *Table 14 continued.*Huvudprov. *Main tests.*

Sats Group	$M_{v_{brott}}$ $M_{v_{ult.}}$	Tid till brott Time until Failure	$\frac{e}{b}$	τ_{sI}	$\tau_{M_{vel}}$	$\tau_{sI} +$ $+\tau_{M_{vel}}$	τ_{sII}	$\tau_{M_{v_{pl}}}$	$\tau_{sII} +$ $+\tau_{M_{v_{pl}}}$	D:o bel. hast. Rate of Loading	D:o div. med σ_d div. σ_d	Vid $\frac{3}{4}$ av brott At $\frac{3}{4}$ of Load at Failure			Tryck- prisma Compressive Prism E^{11}
												G 10^5 kg/cm ²	E 10^5 kg/cm ²	$\frac{G}{E}$ +10	
Nr	kg. m	min.		kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ²	kg/cm ² min.					
IV: 1 a	—	15 : 00	0	20,1	—	20,1	20,0	—	20,0	6,0	1,36	—	1,38	—	2,15
IV: 1 b	—	15 : 00	0	24,9	—	24,9	24,8	—	24,8	6,1	1,69	—	2,31	—	
IV: 2 a	8,0	14 : 30	0,42	15,5	17,4	32,9	15,5	10,5	26,0	5,2	1,77	1,61	1,91	(0,84)	1,93
IV: 2 b	7,8	12 : 45	0,41	14,8	16,4	31,2	15,0	9,7	24,7	5,0	1,68	1,03	1,80	0,57	
IV: 3 a	11,9	12 : 40	1,07	9,0	26,0	35,0	9,0	15,4	24,4	5,7	1,66	0,75	1,51	0,50	2,06
IV: 3 b	14,7	12 : 30	1,66	7,4	32,8	40,2	7,4	19,9	27,3	5,7	1,86	1,25	2,41	0,52	
IV: 4 a	15,4	34 : 00	2,16	5,9	34,4	40,3	5,9	20,7	26,6	2,1	1,81	1,30	— ¹²	—	2,15
IV: 4 b	15,7	17 : 00	2,18	5,6	33,0	38,6	5,6	19,2	24,8	4,2	1,69	1,37	2,37	0,58	
IV: 5 a	18,0	12 : 25	∞	—	39,6	39,6	—	23,2	23,2	5,2	1,58	1,06	—	—	1,95
IV: 5 b	17,0	12 : 25	∞	—	38,6	38,6	—	22,6	22,6	5,3	1,54	1,04	—	—	
Medelv. Average of all Tests						33,1			24,4						

⁴ Höjd 20 cm, bredd 9,5 cm, längd mellan upplag 160 cm. — *Depth 20 cm, Width 9,5 cm, Length between supports 160 cm.*

⁵ e — lastens excentricitet, b — balkbredd. — e — *Eccentricity of the Load, b — Width of the Beam.*

⁶ τ_{sI} = $\tau_{skjvning}$, stadium I. τ_{Shear} stage I = $1,5 \frac{R}{b \cdot H}$; R — avskärningskraft. *Shearing Force. H — balkhöjd. Depth of the Beam.*

⁷ $\tau_{M_{vel}}$ = $\tau_{vridning}$, elast. $\tau_{Torsion}$, elast. = $\frac{M_v}{C_2 b^2 H}$; för $\frac{H}{b} = 2,1$ är $C_2 = 0,248$. for $\frac{H}{b} = 2,1$ $C_2 = 0,248$.

⁸ τ_{sII} = $\tau_{skjvning}$, stadium II. τ_{Shear} , Stage II = $\frac{R}{bQ} = \frac{1,31 R}{bh}$; h — höjd till armeringsjärnens mitt. h — *Depth to Centre of Reinforcement.*

⁹ $\tau_{M_{v_{pl}}}$ = $\tau_{vridning}$, plast. $\tau_{Torsion}$, plast. = $\frac{M_v}{\frac{1}{2} \cdot b^2 \left(H - \frac{b}{3} \right)}$

¹⁰ $\tau_{sII} + \tau_{M_{v_{pl}}}$

σ_d

¹¹ Verksam el-modul mellan $\sigma = 30$ kg/cm² och $\sigma = 110$ kg/cm². *Effective modulus of elasticity between $\sigma = 30$ kg/cm² and $\sigma = 110$ kg/cm².*

¹² Klockorna borttagna. *Dials removed.*

c. Resultat

Resultaten äro sammanställda i tabell 14.

τ -påkänningarna vid brott av skjuvningen äro beräknade dels under förutsättning av elastiska förhållande och osprucken betong (stadium I), dels på vanligt sätt under förutsättning av sprucken betong (stadium II). Skillnaden mellan de på dessa två olika sätt beräknade skjuvpåkänningarna är obetydlig.

τ -påkänningarna vid brott av vridningen äro beräknade efter elasticitets- och plasticitetsteorien. I tabellen återfinnes sammanlagda τ -påkänningen av avskärningen och vridningen, beräknad dels efter stadium I resp. elasticitetsteorien, dels efter stadium II resp. plasticitetsteorien.

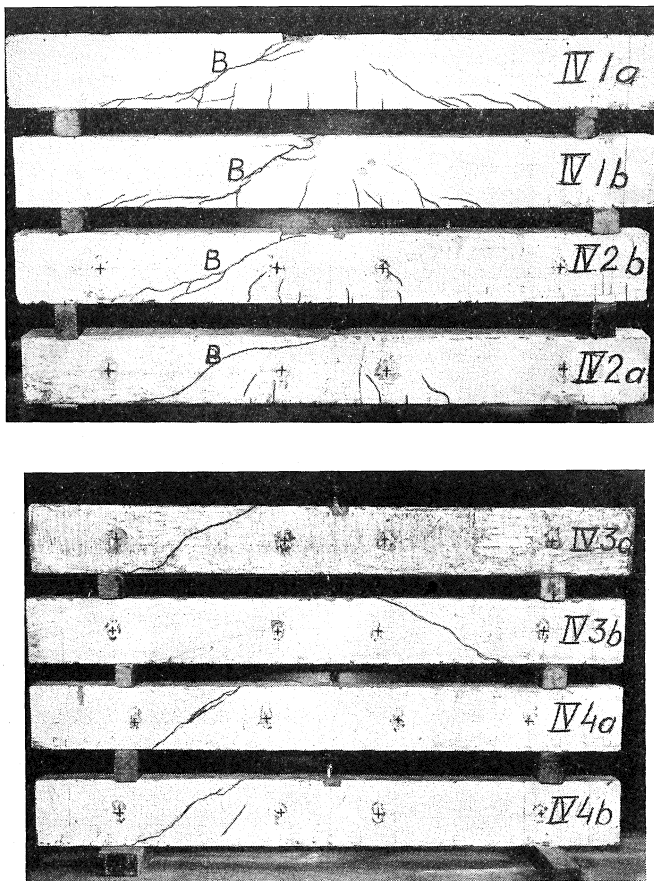
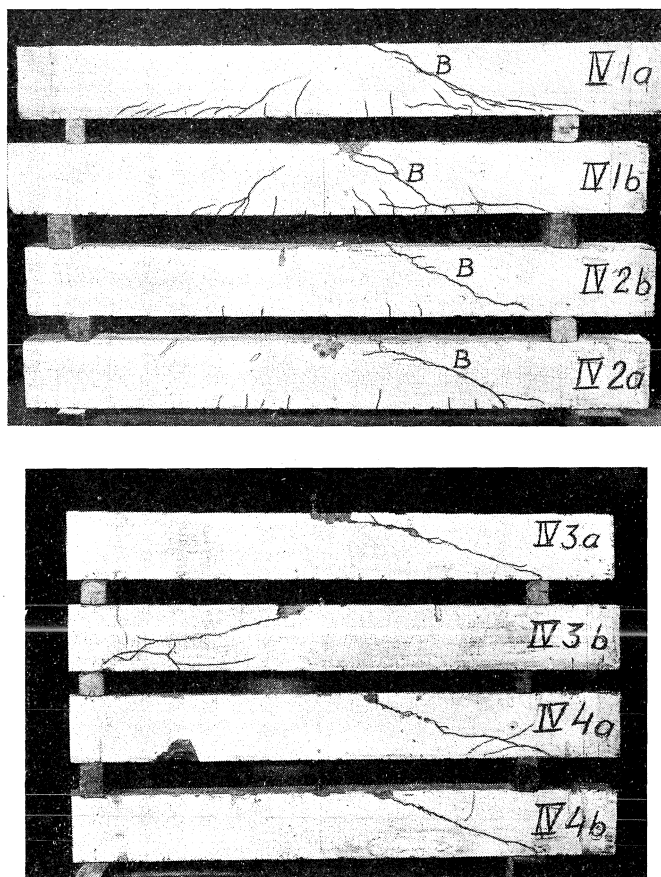


Fig. 57. Utseende av balkar, serie IV efter brott.

a) Sida med sammanfallande riktning hos huvuddragpåkänningarna av vridning och avskärning.

Fig. 57. Failures of the beams in the test series IV.

a) Side on which the directions of the principal tensile stresses due to torsion and shearing coincide.



b) Sida med huvuddragpåkänningarna av vridning vinkelrätt riktade mot huvuddragpåkänningarna av avskärning.

b) Side on which the principal tensile stresses due to torsion are at right angles to the principal tensile stresses due to shearing.

Vidare återfinnes i en kolumn den nämnda summan beräknad på det sistnämnda sättet, dividerad med det ur kontrollproven erhållna medelvärdet på betongens draghållfasthet. Vid $\frac{e}{b} = 0$ (ren avskärning) är detta förhållande lika med 1,52 och vid $\frac{e}{b} = \infty$ (ren vridning) lika med 1,56. För mellanliggande provade värden på $\frac{e}{b}$ är förhållandet praktiskt taget konstant lika med 1,75, dvs. 14 % större än vid extremfallen. De stora värdena på förhållandet vid extremfallen $\frac{e}{b} = 0$ och $\frac{e}{b} = \infty$ förklaras av den starka armeringen (τ -påkänningarna äro såsom framgår av anmärkningarna under tabell 14 beräknade på betongens bruttoarea utan hänsyn till järnen).

Resultaten ge vid handen, att man vid samtidig avskärning och vridning kan beräkna brottbelastningen enligt arbetshypotesen genom att sätta den sammanlagda τ -påkänningen av avskärningen och vridningen lika med betongens draghållfasthet. Härvid beräknas τ -påkänningen av avskärningen på vanligt sätt med utgångspunkt från stadium II och av vridningen enligt plasticitetsteorien.

Utseendet efter brott framgår av foto fig. 57. Det är påtagligt, att brottsprickorna äro likartade vid olika excentriciteter. Vidare framgår av figuren, att böjsprickorna såsom naturligt är avtaga med den ökade excentriciteten. Nedböjnings- och vridningsvinkelmätningar blevo för de små belastningarna något osäkra, varför resultaten här ej medtages. I tabell 14 är förhållandet mellan de ur vridnings- och nedböjningsmätningarna på bruttoarean och utan hänsyn till järnen beräknade sekantmodulerna vid $\frac{3}{4}$ av brottlasten beräknat. Medeltalet av detta förhållande är 0,53.

Resultaten från kontrollproven framgå av tabell 14.

V. Vridningsinspänning

A. Inledning

I ovanstående avdelningar har bärförmågan vid olika kombinationer av belastningar — böjande moment, avskärningskraft och vridande moment — undersökts. Vid de tillfällen, då den yttre belastningen är bekant, äro de regler och formler, som framgått såsom resultat av dessa undersökningar, tillräckliga för dimensionering, om man ej är tvungen att tillgripa särskild vridarmering.¹

För det fall, att det vridande momentet åstadkommes genom inspänningsmoment av en vid den vridna balken inspänd sekundärkonstruktion, blir det vridande momentets storlek beroende av deformationerna hos sekundärkonstruktionen och hos den vridna balken. Att härvid utföra dimensioneringen med utgångspunkt från ett bestämt, konstant förhållande mellan vridstyvhet hos vridbalken och böjstyvhet hos den inspända sekundärkonstruktionen innebär på grund av att detta förhållande varierar med belastningen en schematisering av verkligheten. Beräkning av statiskt obestämd konstruktion av ifrågavarande typ utföres trots detta vanligen med utgångspunkt från de ospruckna sektionernas tröghetsmoment och från ett bestämt värde på förhållandet $\frac{G}{E}$, som bestämts

ur rena vrid- och tryckprov. En på sådant sätt dimensionerad konstruktion utgör i allmänhet ej den mest ekonomiska lösningen, ty antingen blir balken, vars tvärsnittsmått i huvudsak bestämmas av storleken på det böjande momentet eller avskärningskraften, ej fullt utnyttjad i avseende på förmåga att upptaga vridande moment, eller måste den förses med vridningsarmering. I själva verket är momentfördelningen vid brott beroende på de olika konstruktionsdelarnas förmåga att upptaga moment, och även vid tillåten belastning är momentfördelningen bestämd av genom sprickbildningar verkande effektiva böjnings- resp. vridningsmotstånd. Man kan härvid särskilja två huvudfall, nämligen vridningsöverstark huvudbalk och böjningsöverstark sekundärkonstruktion. Jämnstarka anses huvudbalk och sekundärkonstruktion vara, när de speciella brottdeforma-

¹ För detta fall hänvisas till regler i Betonkalender eller i Rausch: Berechnung des Eisenbetons gegen Verdrehung und Abscheren, II. Auflage, Berlin 1938 eller till de i not 1, s. 12, not 1, s. 15 samt not 1, s. 16 nämnda arbetena. Emedan vid balkar med någorlunda ordinära dimensioner förmågan att upptaga vridande moment är i det närmaste proportionell mot tjockleken i kvadrat, är det i många fall ekonomiskt att undvika vridarmering och i stället förtjocka balken.

tionerna ej behöva utbildas för att huvudbalkens vridhållfasthet och sekundärkonstruktionens böjhållfasthet helt skall utnyttjas.

Vid vridningsöverstark huvudbalk är bärförmågan beroende av storleken på brottdeformationerna hos den böjda sekundärkonstruktionen. Böjningsförsök, utförda på olika håll med kontinuerliga balkar, ha visat, att om dimensioneringen utförts så, att det moment, som tvärsnittet kunnat upptaga, ej avvikit med mer än 50 % från det moment, som erhålles vid beräkning enligt elasticitetsteoriens förutsättningar, så ger beräkning av brottbelastningen enligt passningsmetoden god överensstämmelse med verkligheten.¹

Vid inspänning genom vridningsmotstånd hos vridningsöverstarka huvudbalkar äro förhållandena exakt likadana — betingelsen för passningsmetodens tillämpbarhet är i båda fallen, att brottdeformationerna vid böjbrottet äro stora. I föreliggande undersökning har det därför ej ansetts nödvändigt att genom försök bestyrka passningsmetodens användbarhet vid vridningsöverstark huvudbalk. Vid böjningsöverstark sekundärkonstruktion är det ej utan vidare klart, att man kan tillämpa passningsmetoden, vars förutsättning i detta fall är, att vridningsdeformationerna vid brott äro tillräckligt stora, för att den böjda sekundärkonstruktionens momentupptagande förmåga skall kunna utnyttjas. För studiet av dessa förhållanden fordras försök, varför förf. provat en serie med böjningsöverstark sekundärkonstruktion. Innan vi övergå till redogörelsen för dessa försök, skall något nämnas om det effektiva förhållande mellan vridstyvhet C och böjstyvhet B , som bör användas vid kalkyleringen av systemet, om elastiska förhållanden förutsättas.

För det första frågar man sig härvid, huruvida belastningstiden inverkar på samma sätt på storleken hos deformationerna vid vridning som vid böjning. Någon systematisk undersökning med bindande resultat av detta har förf. veterligt ej utförts. Att betongens plasticitetsegenskaper påverka utseendet hos vridningskurvan på likartat sätt, som de påverka verksamma böjningsstyvheten, visa dock försök, som utförts av Paul Andersen.² Här förutsättes därför, att detta tidsberoende är detsamma vid böjning och vridning.

Både vid böjning och vridning är verksamma styvheten hos en betongbalk beroende på ansträngningens storlek. Vid böjningen inverkar härvid både avtagandet av sekantmodulen vid tryck hos betongen och den minskade effektiva sektionen på grund av den dragna betongens upp-

¹ Se bl. a. Moe, A. J.: "Forenklet Beregning af statisk ubestemte Konstruktioner", Bygningsstatistiske Meddelelser, Nr. 5, 1941, Köpenhamn. Værdet 50 % är av Moe angivet som ett forsigtigt undre grænsværdet. I de fleste fall anser han, at avvikelserne kan være væsentligt større utan att brottsækerheten förändras.

² Se Paul Andersen i diskussionsinlägg till Paul Andersen: "Experiments with concrete in torsion". Trans. of the Am. Soc. of Civ. Eng. Vol. 100, 1935. S. 982.

sprickning. Vid vridningen inverkar storleken av vridpåkänningen på likartat sätt som storleken av tryckpåkänningen vid böjningen. Dessutom tillkommer såsom framgått av avsnitt III även en minskning av vridstyvheten genom sprickbildningen på grund av böjande moment. Att noggrant reda ut de olika faktorernas inverkan på böjstyvhet resp. vridstyvhet skulle dels betyda ett mycket kostsamt försöksarbete, dels innebära för praktiskt bruk svårhanterliga formler och regler, vilket i detta fall med tanke på att målet är en utgångspunkt för bestämning av ungefärliga gränser för passningsmetodens tillämpbarhet ej är befogat.

Såsom framgått av försöken i avsnitt III har armeringsprocenten en väsentlig inverkan på böjstyvheten och även men ej lika stort inflytande på vridstyvheten vid samtidigt verkande böjande och vridande moment. I de flesta fall kan man förutsätta, att böjarmeringen utnyttjas både i den inspända sekundärkonstruktionen och i den vridna primärkonstruktionen. Med ledning av försöksresultaten i avsnitt III, där några armeringsprocenter och sektioner behandlats, kan man ange vissa grova regler för vilket värde på $\frac{G}{E}$, som bör användas vid kalkyl enligt elasticitetsteorien, varvid denna kalkyl i enlighet med rådande beräkningspraxis förutsättes ske med utgångspunkt från bruttosektionernas tröghetsmoment utan hänsyn tagen till armeringen.

Vid rektangulära huvudbalkar och sekundärbalkar samt vid rektangulära huvudbalkar och platta äro lämpliga förhållanden mellan verksam skjувmodul och elasticitetsmodul vid en del olika armeringsprocenter återgivna i tabell 15.

Armerings-% μ_1 hos primärbalkar	Armerings-% μ_2 hos sekundärbalkar	
	0,5	1,5
0,5	0,5	0,35
1,5	0,7	0,45

Tabell 15. $\frac{G}{E}$ vid olika armeringsprocenter hos sekundärbalkar och huvudbalkar.

Table 15. $\frac{G}{E}$ at different percentages of reinforcement by secondary beams μ_2 and primary beams μ_1 .

När huvudbalken utgöres av T-sektion med så tunn fläns, att tyngdpunktlinjen faller avsevärt under denna (flänstjockleken $\approx \frac{1}{2} \cdot$ livtjockleken), torde ovanstående värden på förhållandet $\frac{G}{E}$ vara tämligen väl tillämpbara. (Verksamt $\frac{G}{E}$ är i detta fall naturligtvis beroende på fläns-

bredd och livhöjd.) Vid tjockare flänsar (flänstjocklek $> 0,65 \cdot \text{livtjockleken}$) böra de i tabellen återgivna värdena ökas med ca 20 %. Försöken i avsnitt III visa nämligen, att en T-sektion vid samma utnyttjning av dragarmeringen som en rektangulär sektion

har ett större verksamt $\frac{G}{E}$.

Vid T-balkar räknas härvid armeringsprocenten med utgångspunkt från den i fig. 58 sektionerade ytan. Vid T-balkar med dragen fläns räknas $\frac{G}{E}$ som vid rektangulära balkar.

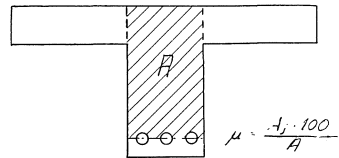


Fig. 58. Beräkning av armeringsprocent μ vid τ -balk med tryckt fläns vid bestämning av $\frac{G}{E}$.

B. Försök

a. Omfattning, betongsammansättning

De nedan skildrade försöken utfördes i examensarbete i Byggnadsstatik under förf:s ledning av nuvarande civilingenjörerna R. Lundström och O. Palmberg.

I serien götos 2 ramar med tillhörande kontrollprov. Dimensioner och armering hos ramarna framgår av fig. 59. De götos i två satser med fyra tryckkuber i varje sats. Till varje ram göts dessutom en kontrollsats, bestående av 4 tryckkuber, 2 kontrollbalkar med utseende enligt fig. 59 med samma mått och i stort sett samma armering som den böjda sekundärbalken samt två oarmerade vridbalkar med samma mått som den vridna huvudbalken. Betongen hade sammansättningen i torra viktsdelar: A-cement:sand:singel 1 : 3,8 : 4,1. Vattencementtal var 0,75. Sand och singel var av samma sort, som användes till föregående försök.

Provkropparna lagrades en vecka i provningssalen under genomfuktade säckar i en temperatur av 18° C och återstående tid före provningen utan fuktning. Ålder vid provningen var 28 dygn.

b. Provning

Huvudprov.

Belastningsanordningen framgår av fig. 60. Den böjda sekundärbalken belastades av två med avseende på centrum symmetriskt belägna vertikala punktlaster. Ramen var i hörnen upplagd på rullager, som voro anordnade så, att upplagskrafterna i hörnen kommo att ligga i vertikala plan parallella med den böjda sekundärbalken. Under dessa rullager voro dessutom placerade axialkullager, så att den vid böjningen av sekundärbalken

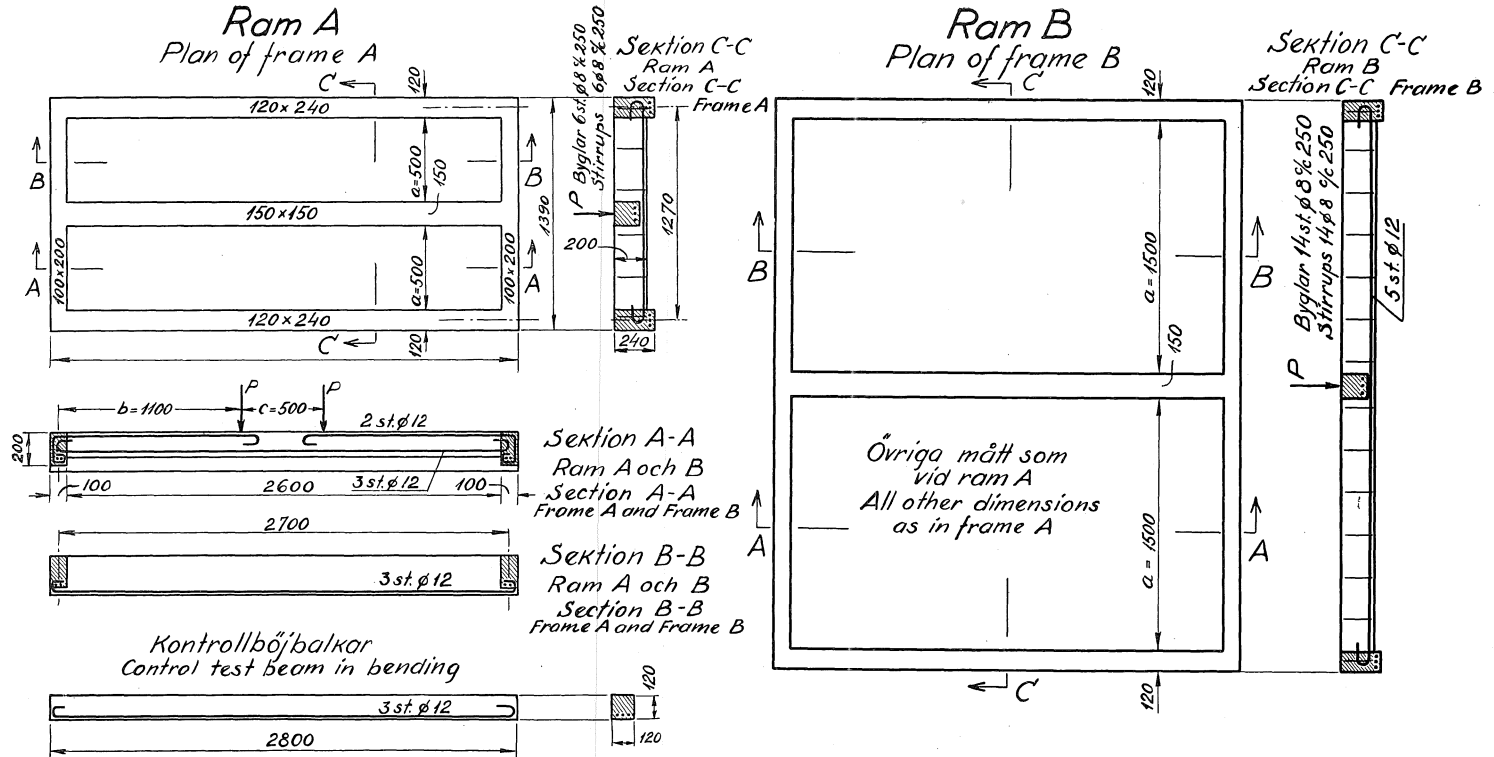


Fig. 59. Utseende av ramar och kontrollböjbalkar.

Fig. 59. Frame and control bending test beams.

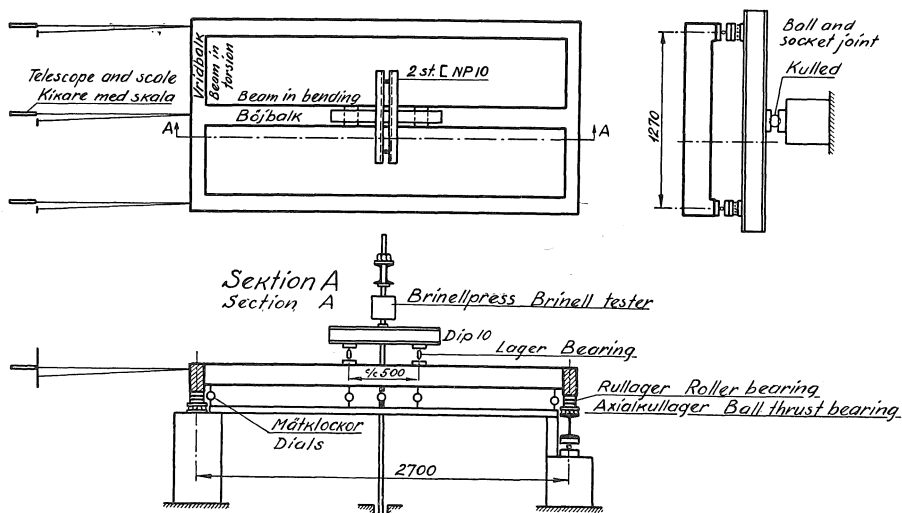


Fig. 60. Belastningsanordning vid undersökning av vridningsinspänning.

Fig. 60. Loading device for torsional restraint tests.

uppstående deformationen i horisontalplanet av de vridna huvudbalkarna ej hindrades av upplagsanordningarna.

Vid försöken mättes med kikare och skala vridningen hos huvudbalken och vidare med zeissklockor nedböjningen hos sekundärbalken samt hos vridbalkarna. Dessutom mättes järnens töjningar med tensometrarna på den del av sekundärbalken, där momentet var konstant. För dessa mätningar voro i balken upptagna ursparingar, vilka lämnade järnen helt fria. Tensometrarna voro liksom vid mätningarna i avd. II anbringade diametralt på järnen, varigenom felaktigheter på grund av järnens böjning eliminerades.

Kontrollprov.

Böjbalkarna belastades på sätt, som framgår av fig. 61. Förutom uppmätning av nedböjningarna företogs på samma sätt som vid huvudprovet mätning av töjningarna hos järnen på det parti, där momentet var konstant.

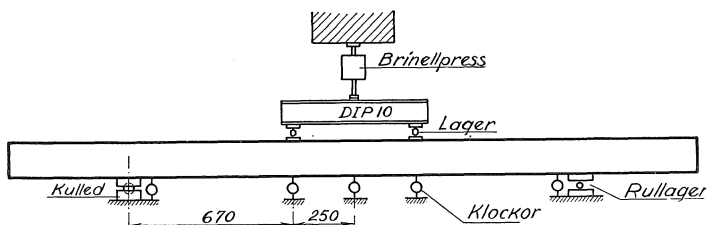


Fig. 61. Belastningsanordning vid böjförsök med kontrollbalkarna.

c. Resultat

1. Beräkning av försöksramarna enligt "elasticitetsteori" och passningsmetod.

Utgångspunkt för bedömning av resultaten utgör beräkningar av systemet dels enligt elasticitetsteori, dels enligt passningsmetod. Här relateras därför först dessa beräkningar för de båda ramarna, som behandlas var för sig.

Ram A.

Beräkning enligt "elasticitetsteorien".

Böjjarmeringsprocenten i vridbalkarna var 1,9 % och i den sekundära böjbalken 1,7 %. Enligt tabell 15 erhålles då verksamt G till 0,45 E .

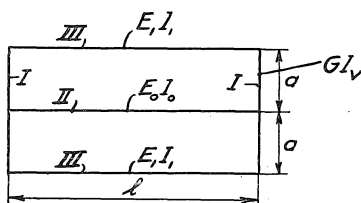


Fig. 62. Beteckningar för olika balkar i försöksramarna.

Enligt fig. 62 beteckna I de balkar, vilka genom vridningsmotståndet ge inspänning av den böjda sekundärbalken II, och III de balkar, som förhindra vridningen av balkarna I vid deras upplag.

Om de vridande momenten i balkarna I betecknas med M_v , är inspänningsmomentet av balk II lika med $2M_v$ (se fig. 63).

Med beteckningar enligt fig. 63 erhålles vinkeländringen φ_{II} vid balk II:s upplag av lasterna P och inspänningsmomenten $2M_v$:

$$\varphi_{II} = \frac{P(b+c)b}{2EI} - \frac{M_v \cdot l}{EI} \dots \dots \dots (a)$$

Vinkeländringen vid balk II:s infästning i balk I genom vridningen av balk I och vinkeländringen av balk III, φ_I , är

$$\varphi_I = \frac{M_v \cdot a}{GI_v} + \frac{M_v \cdot l}{2E_1I_1} \dots \dots \dots (b)$$

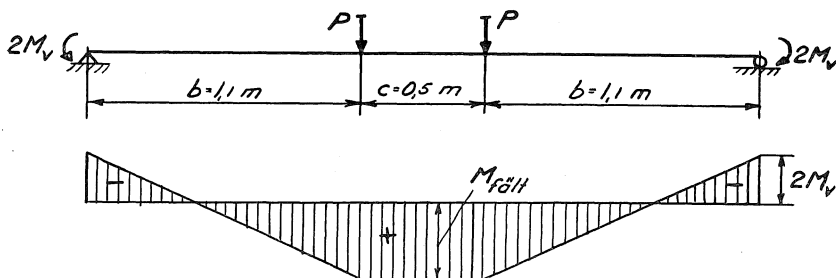


Fig. 63. Beteckningar för moment och momentdiagram i den böjda sekundärbalken.

På grund av villkoret, att φ_I skall vara lika med φ_{II} , erhålles

$$M_v = \frac{0,5 \cdot P (b+c) b}{a \cdot \frac{EI}{GI_v} + l \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{E_1 I_1}\right)} \dots \dots \dots (c)$$

Det i denna ekvation ingående förhållandet $\frac{EI}{2 E_1 I_1}$ är beroende av den med belastningen varierande sprickbildningen i balkarna II och III. Då avsikten med försöket var att studera vridningsinspänningen, insättes i ekv. (c) det ur mätningarna vid försöket för olika laster erhållna medelvärde på $\frac{EI}{2 E_1 I_1}$ (0,115). (Värdena för olika belastningar varierade mellan 0,105 och 0,125.) Med insättning av värdena

$$\begin{aligned} G &= 0,45 E \\ a &= 0,5 \text{ m} \\ b &= 1,1 \text{ m} \\ c &= 0,5 \text{ m} \\ l &= 2,70 \text{ m} \\ I &= 0,42 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \\ I_v &= 0,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

där I och I_v beräknats ur resp. balkars bruttosektioner utan hänsyn till armeringsjärnen, i ekv. (c) erhålles

$$M_v = 0,22 \cdot P \text{ kgm}$$

Brottet inträffar, när sammanlagda huvuddragpåkänningarna på grund av vridningen och avskärningen uppnår betongens draghållfasthet.

Ur kontrollproven erhöles betongens draghållfasthet (bestämd ur vridproven) till 19,8 kg/cm². För bestämning av brottvärdet för P erhålles då ekvationen

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot P_{brott} \cdot 1,21}{10 \cdot 18} + \frac{22 \cdot P_{brott}}{\frac{1}{2} \cdot 100 (20 - \frac{1}{3} 10)} = 19,8 \dots \dots \dots (d)$$

varur

$$P_{brott} = 670 \text{ kg.}$$

Beräkning enligt passningsmetoden.

Konstruktionens bärförmåga anses utnyttjad, när balk II:s momentupptagande förmåga uppnåtts samtidigt som sammanlagda huvuddragpåkänningen i balk I uppnått betongens draghållfasthet. Den momentupptagande förmågan hos balk II bestämmes i huvudsaklig grad av dragpåkänningen i järnen men är även i någon mån avhängig av de plastiska deformationerna i betongtryckzonen, som föregå det slutliga brottet. Alternativt räknas här med det moment $M_{b_{str}}$, som vid kontrollböjbalkarna gåvo sträckgränsuppkänning i järnen (iakttagen genom tensometermät-

ningar) och det moment M_{vbrott} , som vid kontrollböjbalkarna orsakade brott, vilket sekundärt yttrade sig såsom tryckbrott hos betongen.

Ur kontrollproven erhöles värdena

$$\begin{aligned} M_{v_{str}} &= 1,36 \cdot 10^5 \text{ kgcm} \\ M_{vbrott} &= 1,46 \cdot 10^5 \text{ kgcm} \end{aligned}$$

Man erhåller ekvationerna

$$\left. \begin{array}{l} M_{v_{str}} \\ \text{resp.} \\ M_{vbrott} \end{array} \right\} + 2 M_{vbrott} = P_{brott} \cdot b \dots \dots \dots (e)$$

och på grund av brottvillkoret i den vridna balken, (balk I) [jämför ekv. (d)]

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot P_{brott} \cdot 1,21}{10 \cdot 18} + \frac{M_{vbrott}}{\frac{1}{2} \cdot 100 (20 - \frac{1}{3} 10)} = 19,8 \dots \dots \dots (f)$$

Efter eliminering av M_{vbrott} ur ekv. (e) och (f) erhålles

$$P_{brott} = \frac{19,8 + 0,00060 \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_{v_{str}} \\ \text{resp.} \\ M_{vbrott} \end{array} \right.}{0,00336 + 0,00060 \cdot b} \dots \dots \dots (g)$$

Med insättning av värdet på $M_{v_{str}}^1$ ($1,46 \cdot 10^5$) resp. på M_{vbrott}^1 ($1,56 \cdot 10^5$) samt på b (110 cm) erhålles

$$P_{brott_1} = 1\,550 \text{ kg}^2$$

resp.

$$P_{brott_2} = 1\,640 \text{ kg}$$

Ram B.

Beräkning enligt "elasticitetsteorien."

Den under ram A härledda ekvationen (c) har även här giltighet.

Böjjarmeringsprocenten i vridbalkarna (balk 1) var 3,1 % och i den sekundära böjbalken 1,7 %. Verksamt $\frac{G}{E}$ uppskattas till 0,55 och verksamt $\frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{E_1 I_1}$ till 0,12.

Med $a = 1,5$ m och övriga mått som för ram A erhålles ur ekv. (c).

$$M_v = 0,16 \cdot P \text{ kgm}$$

¹ Värdena för $M_{v_{str}}$ och M_{vbrott} ha erhållits ur kontrollböjbalkarna med hänsynstagande till de smärre avvikelserna i dimensioner hos böjbalk i ramen och hos kontrollbalkarna.

² P_{brott_1} betecknar brottlast, beräknad med utgångspunkt från att sträckgränsen skall ge brott. P_{brott_2} betecknar brottlast, beräknad med utgångspunkt från att den slutliga bärförmågan hos betongbalken skall ha nåtts.

Den för ram A gällande ekv. (d) motsvaras här av

$$\frac{\frac{1}{2} P_{brott} \cdot 1,25}{10 \cdot 18} + \frac{16 \cdot P_{brott}}{\frac{1}{2} \cdot 100 (20 - \frac{1}{3})} = 19,8 \dots \dots \dots (d')$$

Härur erhålles

$$P_{brott} = 875 \text{ kg}$$

Beräkning enligt passningsmetoden.

Samma resonemang som för ram A har giltighet.

Man erhåller

$$P_{brott} = \frac{19,8 + 0,00060 \cdot \begin{cases} M_{b_{str}} \\ \text{resp.} \\ M_{b_{brott}} \end{cases}}{0,0036 + 0,00069 \cdot b} \dots \dots \dots (g')$$

Med insättning av värdet på $M_{b_{str}}$ ($1,52 \cdot 10^5$ kgcm) och $M_{b_{brott}}$ ($1,60 \cdot 10^5$ kgcm) erhållna ur kontrollböjbalkarna erhålles

$$P_{brott_1} = 1\ 600 \text{ kg}$$

resp.

$$P_{brott_2} = 1\ 670 \text{ kg}$$

2. Huvudsakliga försöksresultat.

Försöksresultaten äro sammanställda i tabell 16. På s. 96, där beräknade värden enligt elasticitetsteorien och passningsmetoden också äro återgivna, återfinnas resultaten från huvudproven och på s. 97 från kontrollproven.

Iögonfallande är hur väl värdena enligt passningsmetoden överensstämma med försöksvärdena. Anmärkningsvärt och av betydelse för passningsmetodens tillämpbarhet är, att de första vridsprickorna iakttogos vid last, som var avsevärt större än den, som skulle ge brott enligt beräkningarna med elasticitetsteoriens förutsättningar (för ram A 40 % och för ram B 110 %).

3. Deformationer, mätta påkänningar och sprickbildningar.

Ram A med tillhörande kontrollprov.

I fig. 64 är den uppmätta maximala järnpåkänningen i de blottlagda järnen i balk II uppritad som funktion av P (= den halva påförda lasten). Med ledning av motsvarande uppmätning, företagen på kontrollböjbalken, har det böjande fältmomentet i balk II och härur det vridande momentet i balk I beräknats för olika laster. Resultatet är återgivet i diagramform i fig. 65. De två streckade linjerna ange felmarginalen på grund av tänkbart fel vid uppmätning av dimensionerna och järnens

Huvudprov. *Main Tests.*

Ram Frame	Vridbalkar (Balk I) <i>Frame Beams in Torsion (Beam I)</i>						Böjbalkar (Balk II) <i>Beams in Bending (Beam II)</i>				Kuber <i>Cubes</i>
	Sätt- mått Slump cm	P_{str} ber. enl. passn.- metod <i>P_{Yield Point}</i> computed according to the Method of Adjustment kg	P_{str} erh. vid försök <i>P_{Yield Point}</i> observed in the Tests kg	P_{br} ber. enl. elast.- teorin <i>P_{Failure}</i> computed from the Theory of Elasticity kg	P_{br} ber. enl. passn.- metod <i>P_{Failure}</i> computed according to the Method of Adjustment kg	P_{br} erh. vid försök <i>P_{Failure}</i> observed in the Tests kg	Första iakttagna vidspr. vid P <i>First Torsional Crack Noted at P</i> kg	σ_{jstr} vid drag- prov <i>$\sigma_{sYield Point}$</i> obtained from Tensile Tests kg/cm ²	Första iakttagna böjspr. vid P <i>First Bending Crack Noted at P</i> kg	Uppm. σ_j i kg/cm ² vid 1:a böjspr. σ_s <i>Measured</i> at the <i>First</i> Bending Crack kg/cm ²	σ_{B23} kg/cm ²
A	4,0	1550	1500	670	1640	1750	940	3810	590	740	292 281 273 270 280 267 255 <hr/> 274 282 293 306 294 288 280 276 292 <hr/> 289
B	4,5	1600	1670	875	1670	1760	1180	3680	590	1000	

Tabell 16. Resultat från försök med vridningsinspänning. *Table 16. Results of Torsional Restraint Tests.*

Forts. på tabell 16. *Table 16 continued.*

Kontrollprov. *Control Tests.*

Kontrollplats <i>Control Group</i>	Betong <i>Concrete</i>	Vridbalkar <i>Torsional Tests</i>		B ö j b a l k a r <i>B e n d i n g T e s t s</i>				Kuber <i>Cubes</i>	
	Sättmått <i>Slump</i>	M_{vbr} $M_{vull.}$	τ_{plbr} $\tau_{plull.}$	P_{str} $P_{Yield Point}$	σ_{jstr} $\sigma_{sYield Point}$	Första iaktagna böjspr. vid P <i>First Bending Crack Noled at P</i>	Uppmätt σ_j vid 1:a spr. σ_s <i>Measured at the First Bending Crack</i>	σ_B	
Nr	cm	kgm	kg/cm ²	kg	kg/cm ²	P kg	kg/cm ²	kg/cm ²	
a.	3,0			2360	3830	250	580	261	
b.				2050		590	840		
c.		180	22,2						270
d.		150	18,6						259
a.			Med. 20,4					Med. 264	
				2050		590	860	262	
b.	4,0			2250	3780			260	
c.		150	18,2			450	590		
d.		180	20,2						280
				Med. 19,2					274
		150	18,8					Med. 269	
		170	20,3					254	
a.	5,0							276	
b.		164	19,7				275		
c.		160	20,6				271		
d.				Med. 20,2			269		
								Med. 281	

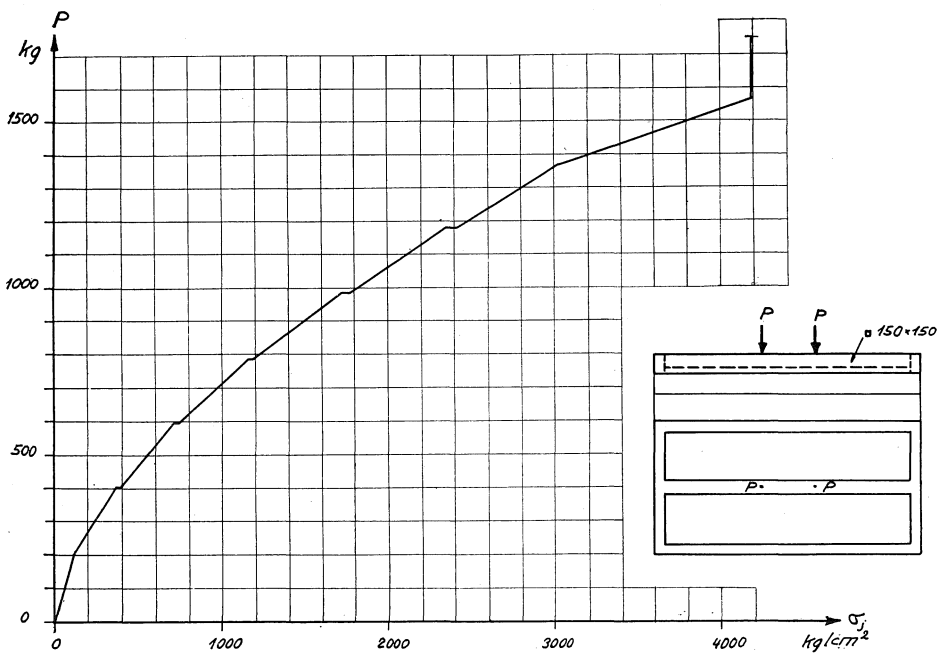


Fig. 64. Uppmätt järnpåkänning i mitten på böjd sekundärbalk (balk II) ram A.
Belastningshastighet: Lastökning 390 kg under 1 min. Vila 3 min.

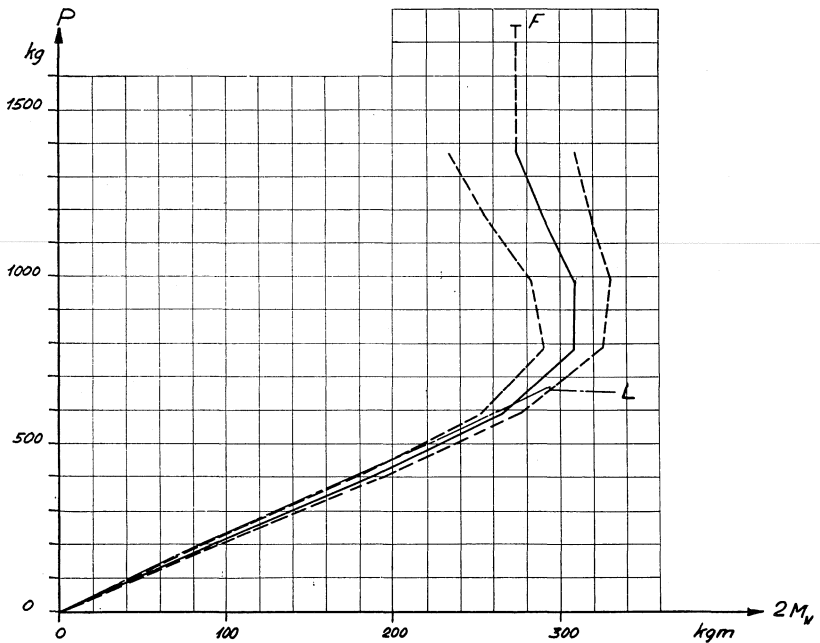


Fig. 65. Ur data från kontrollproven beräknat samband mellan belastning P och vridande moment M_v . L: Brott enligt elasticitetsteorien, vid 670 kg. F: Brott vid försök, samtidigt krossningsbrott i böjbalken och vridningsbrott i vridbalkarna.

Fig. 65. Relation between the load P and the twisting moment M_v , computed from the results of the control tests. Rate of loading: The increase in load was 390 kg during 1 minute. The period of rest was 3 minutes. L: Failure at 670 kg according to the theory of elasticity. F: Failure in the test, simultaneous bending failure of the beam in bending and torsional failure of the beams in torsion.

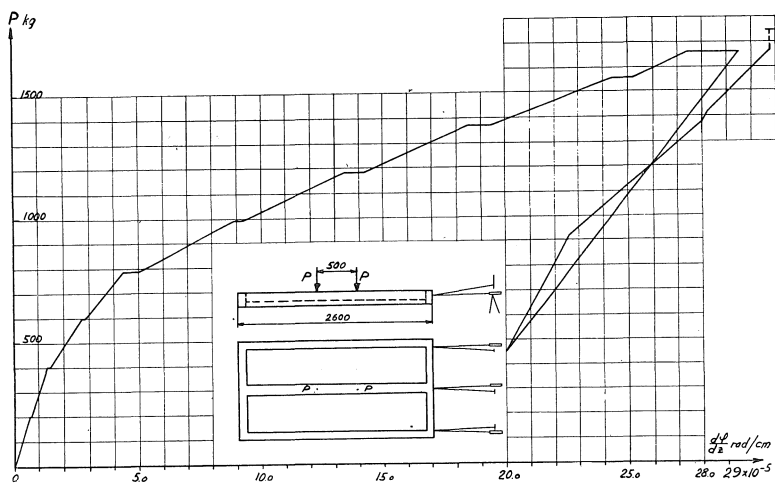


Fig. 66 a. Samband mellan belastning P och uppmätt vridningsvinkel per längdenhet i vridbalk (balk I) vid ram A.

Fig. 66 a. Relation between the load (P) and the angle of torsion per unit length measured on the beam in torsion (beam I) of the frame A.

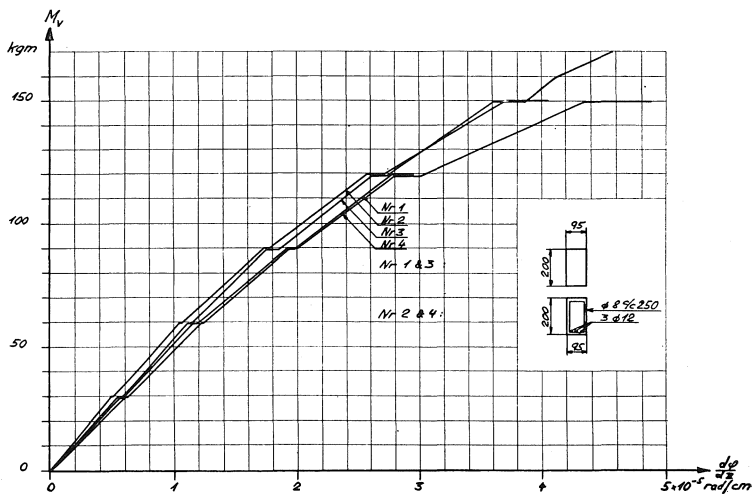


Fig. 66 b. Ur kontrollvridprov erhållt samband mellan vridande moment M_v och vridningsvinkel per längdenhet. Nr 1 och 3 oarmerade. Nr 2 och 4 armerade.

Fig. 66 b. Relation between the twisting moment M_v and the angle of torsion per unit length, obtained from the control tests. Nos. 1 and 3 non-reinforced. Nos. 2 and 4 reinforced.

lägen hos balk II i ram A och hos kontrollböjbalkarna. (Varje uppmätning förutsattes gjord med noggrannhet av ± 1 mm, vilket innebär förutsatt felavläsning, om felet lägges hos en balk, av ± 2 mm.) Den streckprickade linjen anger sambandet mellan P och M_v , om beräkningen utföres enligt elasticitetsteorien. Upptill den enligt elasticitetsteorien beräknade brottlasten ger elasticitetsteorien utomordentlig överensstämmelse med verk-

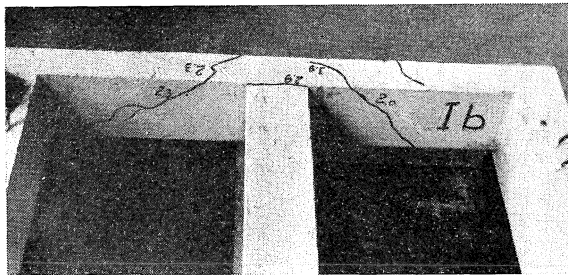
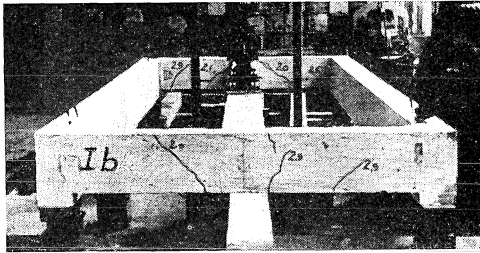
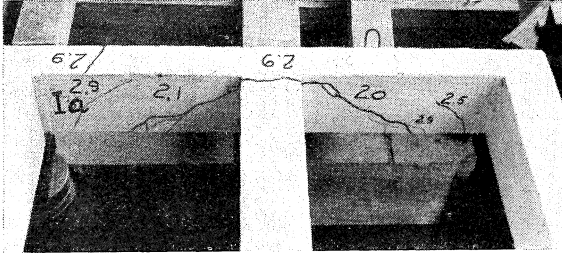
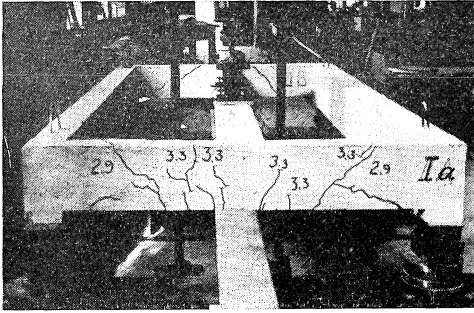


Fig. 67 a och b. Sprickbildning hos huvudbalkar (balkar I a och I b) vid ram A. (Siffrorna markera de laster (2 P) i ton, vid vilka sprickorna iakttogos.)

Fig. 67 a and b. Cracks in the main beams (beams I a and I b) of the frame A. The figures give the loads (2P) in tons at which the cracks were observed.

ligheten. Vid den ökade belastningen tilltog M_v något utöver det brottvärde, som kunde förväntas av resultaten från kontrollproven för att sedan P uppnått ca 1000 kg, falla något. Illustration till konstruktionens verkningssätt ge diagrammen i fig. 66, där i (a) den uppmätta vridningsvinkeln per längdenhet hos balk I i ramen uppritats som funktion av lasten P och i (b) vridningsvinkeln per längdenhet hos kontrollvridbalkarna uppritats som funktion av det vridande momentet

M_v . Vid $P = 800$ kg är $\frac{d\varphi}{dz}$

i diagram (a) ungefär lika stort som värdet vid brott hos kontrollbalkarna. Vid den ökade lasten växa sedan vriddeformationerna till det sexdubbla av brottvärdet vid kontrollproven. Då det framgår av diagram i fig. 65, att balken trots de stora vriddeformationerna har förmåga att upptaga vridande moment, har grundförutsättningen för passningsmetodens tillämpbarhet, som kan uttryckas däri, att brottdeformationerna äro stora jämförda med de elastiska deformationerna, även vid vridningsinspänning visat sig ha giltighet. Att försöken gävo

ett sådant till förmån för passningsmetoden entydigt besked vid ram A, där det böjande momentet i den vridna balken (balk I) var relativt

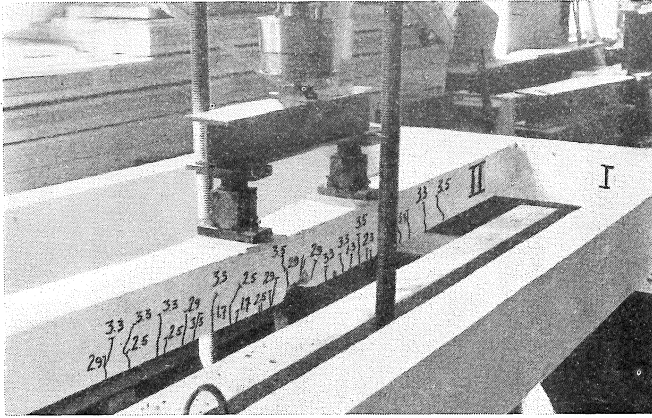


Fig. 68. Sprickor i den böjda sekundärbalken (balk II) vid ram A.

Fig. 68. Cracks in the secondary beam in bending (beam II) of the frame A.

obetydligt — vilket enligt de ovan skildrade grundläggande hållfasthetsundersökningarna skulle betyda en relativt rak vridelasticitetskurva — anger på ett otvetydigt sätt den gynnsamma inverkan av att den böjda sekundärbalken förhindrar vridbrottets slutliga utlösning hos huvudbalken.

Utseendet av brottsprickorna i vridbalken framgår av fig. 67. Sprickorna ha den lutning, som betingas av huvuddragpåkänningarnas riktning med flackare förlopp på insidan, där huvuddragpåkänningarna av vridningen ha samma riktning som av avskärningen, och med brantare förlopp på utsidan, där huvuddragpåkänningarna på grund av vridningen äro vinkelräta mot huvuddragpåkänningarna av avskärningen. Vid den ena vridbalken ha sprickorna slagit upp tvärs över den sekundära böjbalken, vid den andra ha de däremot vid infästningen gått runt om vridbalken. Det olika typutseendet torde förklaras av de olika lägena på de först uppslagna vridsprickorna. I fig. 68 återges sprickbildningen i den böjda sekundär-

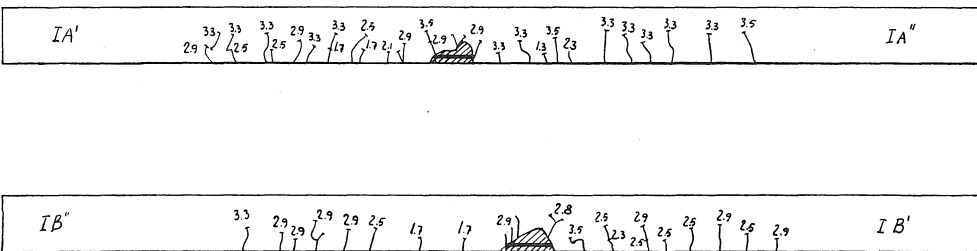


Fig. 69. Uppritade sprickor i kontrollböjbalken, tillhörande ram A. Siffrorna ange de laster (2 P) i ton, vid vilka sprickorna iakttogos.

Fig. 69. Cracks traced on the control test beam in bending of the frame A. The figures give the loads (2P) in tons at which the cracks were observed.

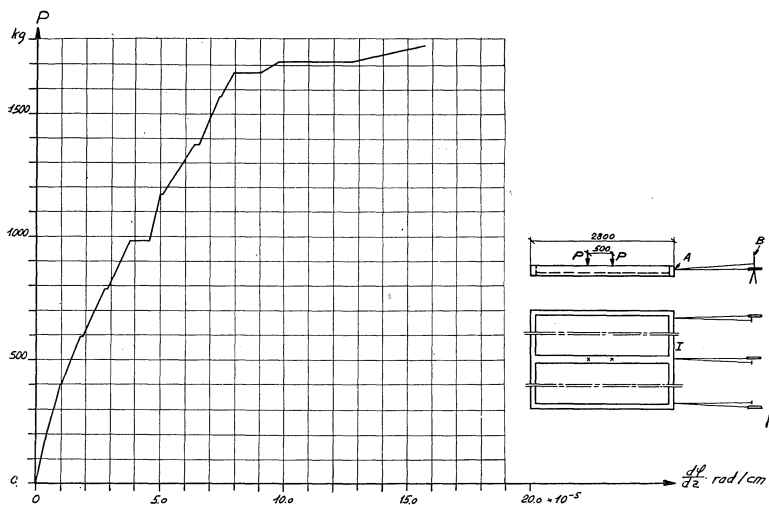


Fig. 70. Samband mellan belastning P och uppmätt vridningsvinkel per längdenhet i vridbalk (balk I) vid ram B. Belastningshastighet: Lastökning 390 kg under 1 min. Vila 3 min. A: spegel. B: skala.

Fig. 70. Relation between the load P and the angle of torsion per unit length measured on the beam in torsion (beam I) of the frame B. Rate of loading: The increase in load was 390 kg during 1 minute. The period of rest was 3 minutes. A: Mirror. B: Scale.

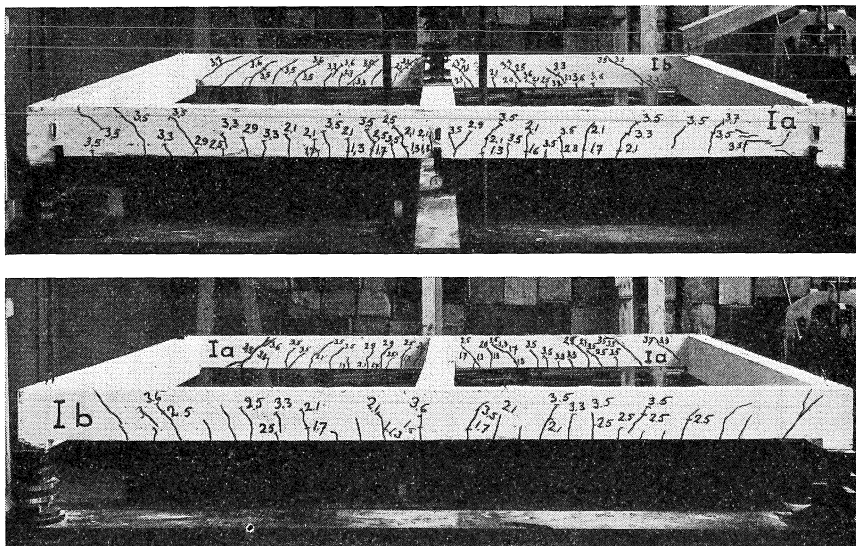


Fig. 71. Sprickbildning hos huvudbalkar (balkar I a och I b) vid ram B. Siffrorna ange de laster $2P$ i ton, vid vilka sprickorna iakttogos.

Fig. 71. Cracks in the main beams (beams I a and I b) of the frame B. The figures give the loads ($2P$) in tons at which the cracks were observed.

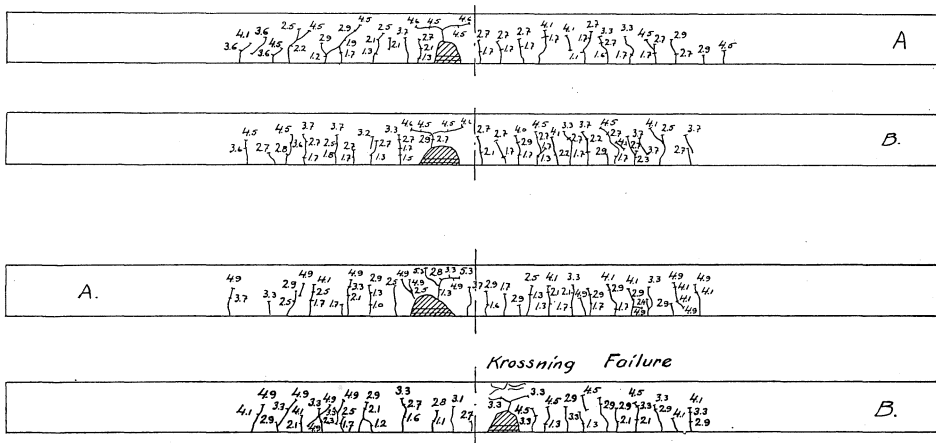


Fig. 73. Uppritade sprickor i kontrollbøjbalk. Siffrorna ange den last i ton, vid vilken sprickorna iakttogos.

Fig. 73. Cracks in the control test beam in bending. The figures give the load in tons at which the cracks were observed.

C. Sammanfattning

Genom ovan beskrivna typexperiment har det framgått, att passningsmetoden bildar en tillförlitlig grundval för dimensionering vid böjningsöverstark sekundärbøjbalk. Visserligen ha endast två ramar provats och dessutom endast med statisk belastning. Genom mätningarna har emellertid konstaterats, att den viktigaste förutsättningen för passningsmetodens giltighet är uppfylld, nämligen att vridbrottet är segt, när den vridna balken uppstödes av böjd sekundärkonstruktion. Vridbrottdeformationerna utbildades till den grad, som var nödvändig för det fullständiga utnyttjandet av konstruktionen — både med avseende på förmågan hos sekundärbalken att upptaga böjande moment och förmågan hos huvudbalken att upptaga vridande moment. Härvid blevo vridbrottdeformationerna 6 resp. 3 ggr större än vid vridkontrollbalkarna.

Av dessa siffror kan man draga den slutsatsen, att växelbelastning, vars farliga inverkan vid betong återspeglas av de ökade deformationerna, endast bör betyda en av försiktighetsskäl motiverad begränsning av passningsmetodens användning. En sådan begränsning erhålles, om man i likhet med vad Moe föreslår vid tillämpning av passningsmetoden på kontinuerliga balkar och stångsystem maximerar avvikelserna från momenten enligt elasticitetsteorien till 50 %¹. Detta skulle gälla som huvudregel. Vid många tillfällen — exempelvis vid husbyggnader, där större delen av den maximala lasten utgöres av egenvikt — kan man tillåta större avvikelse, men en förutsättning härför är, att konstruktören har verkningssättet hos konstruktionen klart för sig.

¹ Moe se not s. 87.

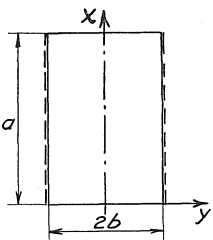
VI. Beräkning av brobaneplatta, inspänd längs långsidorna genom vridningsmotståndet hos huvudbalkar

Inledning

Vid en mångfald konstruktioner förekommer det, att en böjd sekundärkonstruktion är inspänd i balkar, vilkas vridningsmotstånd orsaka inspänningen. Med utgångspunkt från de grundläggande ekvationerna för böjning och vridning kan man i de flesta fall relativt enkelt utföra den elasticitetsteoretiska beräkning, vilken bestämmer begränsningen av passningsmetodens giltighet. I det följande skall anges en teori för beräkning av platta, inspänd längs långsidorna genom vridningsmotståndet hos huvudbalkar, en konstruktionstyp, som är vanlig vid balkbroar av betong. I motsats till tidigare angivna teorier¹ tas hänsyn till den fullständiga plattverkan hos brobaneplattan, vilket medför en betydelsefull minskning av de dimensionerande storheterna (se nedan). Fallet med jämnt fördelad last och fri uppläggning längs kortsidorna behandlas först.

A. Platta, belastad med jämnt fördelad last, fritt upplagd efter två motstående kanter och inspänd genom vridningsmotståndet hos huvudbalkar längs de två övriga

1. Härledning av uttryck för dimensionerande moment



Till grund för beräkningen lägges antagandet, att plattan består av ett homogent, isotropt och fullständigt elastiskt material och vidare, att den ordinära plattekvationen har giltighet, nämligen i detta fall

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \dots \dots \dots (a)$$

Fig. 74. Beteckningar och koordinatsystem.

Koordinatsystemet är inlagt enligt figur 74.

¹ Den första behandlingen av problemet har efter vad förf. kunnat finna gjorts av S. Kasarnowsky: »Berechnung statisch unbestimmter Eisenbetonkonstruktionen mit Berücksichtigung der Torsionsspannungen», Schw. Bauztg., Bd LXIX 1917. Uppsats av Andr Aas Jacobsen i Beton und Eisen 1935 »Torsionsmomente bei Balkenbrücken mit zwei Hauptträgern» innebär intet principiellt nytt utöver Kasarnowsky's behandling, men inspänningen vid balkbroar är utförligare behandlad.

I ekv. (a) betecknar
 w plattnedböjningen,
 q den jämnt fördelade belastningen per ytenhet,

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \text{ plattböjningsmotståndet;}$$

vidare h plattjockleken,
 E elasticitetsmodulen

och ν Poisson's konstant, som i detta fall sättes lika med noll.¹

Plattan är längs kanterna $x = 0$ och $x = a$ fritt upplagd och längs kanterna $y = \pm b$ elastiskt inspänd genom vridningsmotståndet hos kantbalkarna.

Vid kanterna $x = 0$ och $x = a$ kunna gränsvillkoren på grund av den fria uppläggnings skrivas

$$x = 0; w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (a)$$

$$x = a; w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (\beta)$$

Vidare är nedböjningen längs kanterna $y = \pm b$ lika med noll. Alltså
 $y = \pm b; w = 0 \quad \dots \dots \dots (\gamma)$

Vridningsinspänningen uttryckes genom villkoret, att summan av inspanningsmomentet längs kanterna $y = \pm b$ skall vara lika med det på balken verkande vridande momentet, dvs.

$$M_{v_x} = \int_{\frac{a}{2}}^x (m_y)_{y=b} dx \quad \dots \dots \dots (b)$$

Med beaktande av att

$$(m_y)_{y=b} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b}$$

och

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} = -\frac{1}{C} \cdot M_{v_x}$$

där $C = G \cdot I_v =$ kantbalkens vridningsmotstånd erhålles efter insättning i ekv. (b) och efter derivering av denna med avseende på x

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=b} = \frac{D}{C} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} \quad \dots \dots \dots (\delta)$$

vilken ekvation uttrycker det fjärde gränsvillkoret.

¹ Vid andra värden på Poisson's konstant kunna de nedan erhållna resultaten utnyttjas med hjälp av regler och formler, som härletts i Nylander, H.: "Några problem rörande bjälklagsplattor och liknande konstruktioner." Byggmästaren 1944, h. 24.

w i ekv. (a) ansättes i två delar w_1 och w_2 , vilka tillsammans skola uppfylla ekv. (a) och gränsvillkoren (α)—(δ). För w_1 göres ansatsen

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \dots \dots \dots (c)$$

gällande som fourierutveckling av uttrycket

$$w_1 = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x)$$

vilken ekv. betyder nedböjningen av strimla med jämnt fördelad last q , fritt upplagd i $x = 0$ och $x = a$. Utan vidare inses, att ekv. (a) satisfieras av w_1 , varför w_1 utgör en partikulär lösning till denna ekvation.

Ansatsen w_2 skall då tillsammans med w_1 uppfylla gränsvillkoren och dessutom ekv.

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = 0 \dots \dots \dots (d)$$

w_2 ansättes i formen

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \dots \dots \dots (e)$$

För att ekv. (d) skall uppfyllas, måste Y_m satisfiera ekvationen

$$\frac{\partial^4 Y_m}{\partial y^4} - 2(\alpha_m)^2 \frac{\partial^3 Y_m}{\partial y^2} + (\alpha_m)^4 Y_m = 0 \dots \dots \dots (f)$$

$$\text{där } \alpha_m = \frac{m \cdot \pi}{a}$$

Lösningen till ekv. (f) blir efter multiplikation med konstanten $\frac{q \cdot a^4}{D}$:

$$Y_m = \frac{q \cdot a^4}{D} \left[A_m \cosh (\alpha_m y) + B_m \alpha_m y \sinh (\alpha_m y) + \right. \\ \left. + C_m \sinh (\alpha_m y) + D_m \alpha_m y \cosh (\alpha_m y) \right] \dots \dots \dots (g)$$

Emedan Y_m på grund av symmetrin är en jämn funktion, måste C_m och D_m vara lika med noll.

På grund av typen hos de gjorda ansatserna äro gränsvillkoren (α) och (β) uppfyllda.

Insättning i gränsvillkoren (γ) och (δ) av uttrycken för w_1 och w_2 enl. ekv. (c) och (e) med Y_m i (e) bestämt ur (g) ger värdena på A_m och B_m

$$A_m = \frac{4 \left[\alpha_m^2 b + \frac{2D}{C} + \left(\alpha_m + \alpha_m b \frac{D}{C} \right) \operatorname{tgh} \alpha_m b \right]}{\pi^5 m^5 \left[\sinh \alpha_m b \left(\alpha_m^2 b \operatorname{tgh} \alpha_m b - \alpha_m \right) - \cosh \alpha_m b \left(\alpha_m^2 b + \frac{2D}{C} \right) \right]} \dots (h)$$

$$B_m = - \frac{4 \left[\frac{D}{C} + \alpha_m \operatorname{tgh} \alpha_m b \right]}{\pi^5 m^5 \left[\sinh \alpha_m b \left(\alpha_m^2 b \operatorname{tgh} \alpha_m b - \alpha_m \right) - \cosh \alpha_m b \left(\alpha_m^2 b + \frac{2D}{C} \right) \right]} \dots (i)$$

De storheter, som äro av speciellt intresse, äro

$$(m_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0}, \quad (m_y)_{x=\frac{a}{2}, y=b}, \quad (m_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0},$$

$$(m_x)_{x=0, \text{3a}, y=0} \quad \text{sam} \quad (M_v)_{x=0}.$$

Uttryckt i funktioner av deformationskomponenten w kunna dessa storheter tecknas:

$$m_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$m_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

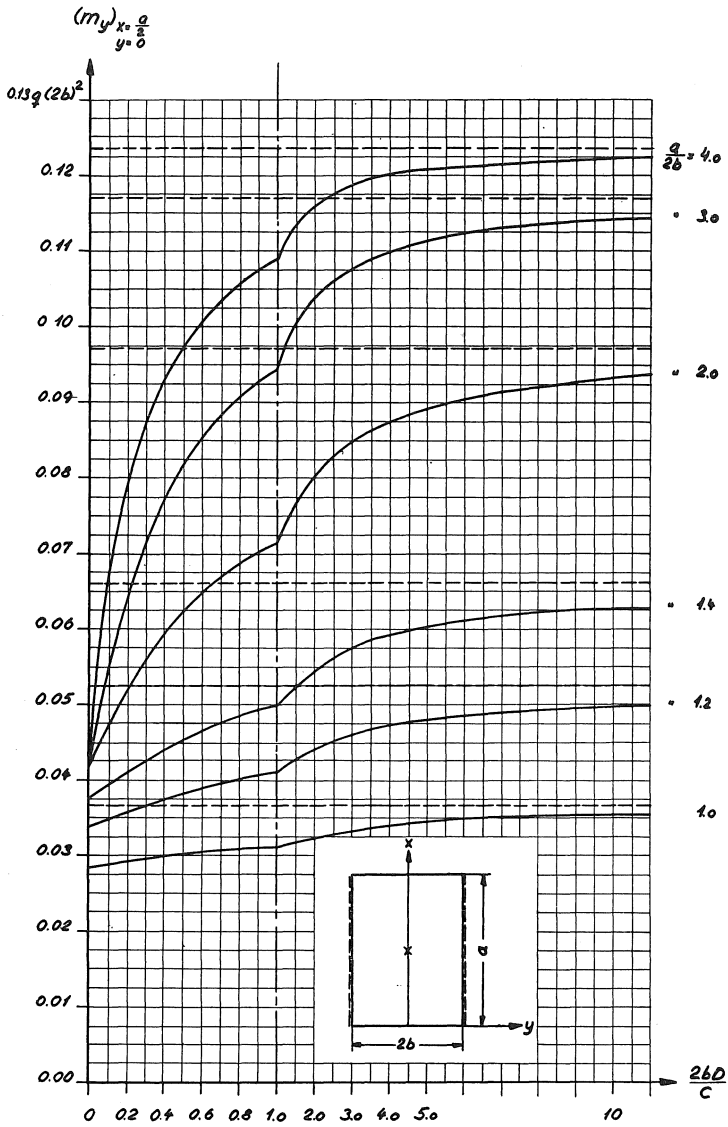
$$(M_{v_x})_{x=0} = \int_{x=0}^{\frac{a}{2}} (m_y)_{y=b} dx$$

där $w = w_1 + w_2$.

Med A_m och B_m enligt (h) och (i) insatta i uttrycket (e) och (g) för w_2 erhålles efter derivering och integrering de sökta storheterna.

Samtliga dessa storheter äro framställda såsom funktioner av $\frac{2b \cdot D}{C}$ vid olika värden på $\frac{a}{2b}$ i figurerna 75 a—d.

I diagrammen för de böjande momenten m_x och m_y äro inlagda asymptotvärdena, när $\frac{2D \cdot b}{C} \rightarrow \infty$, dvs. fri uppläggning vid kanterna $y = \pm b$.



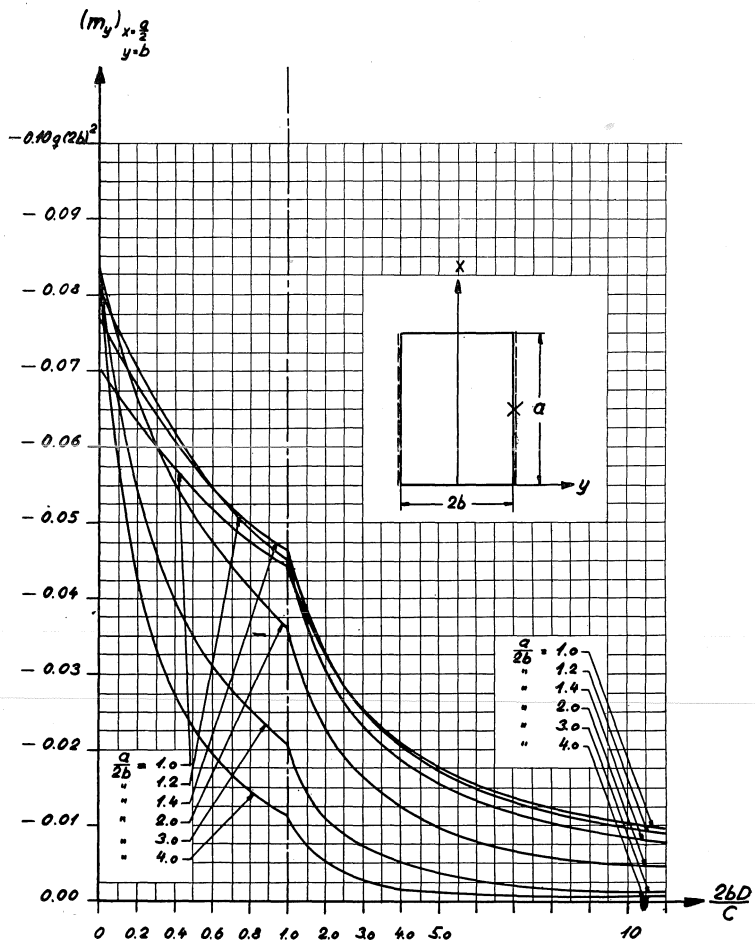


Fig. 75 b.

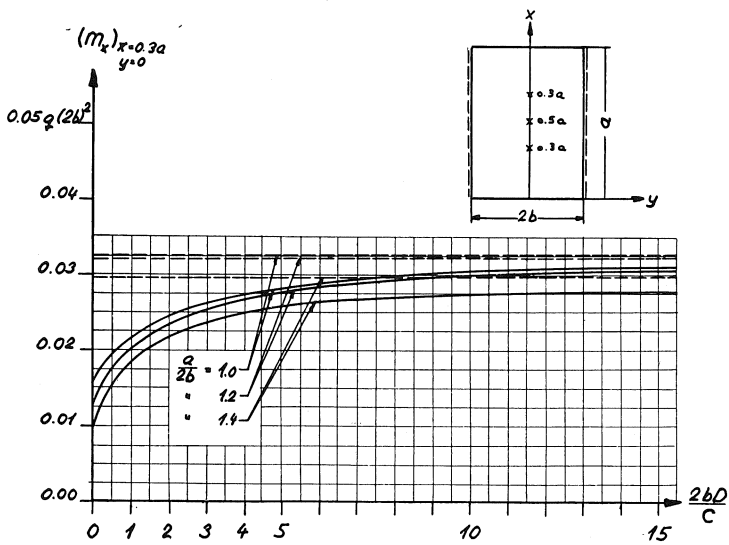
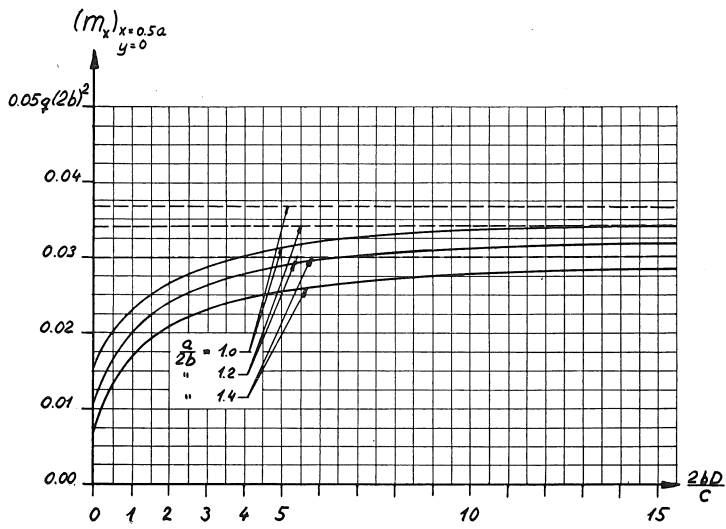


Fig. 75 c.

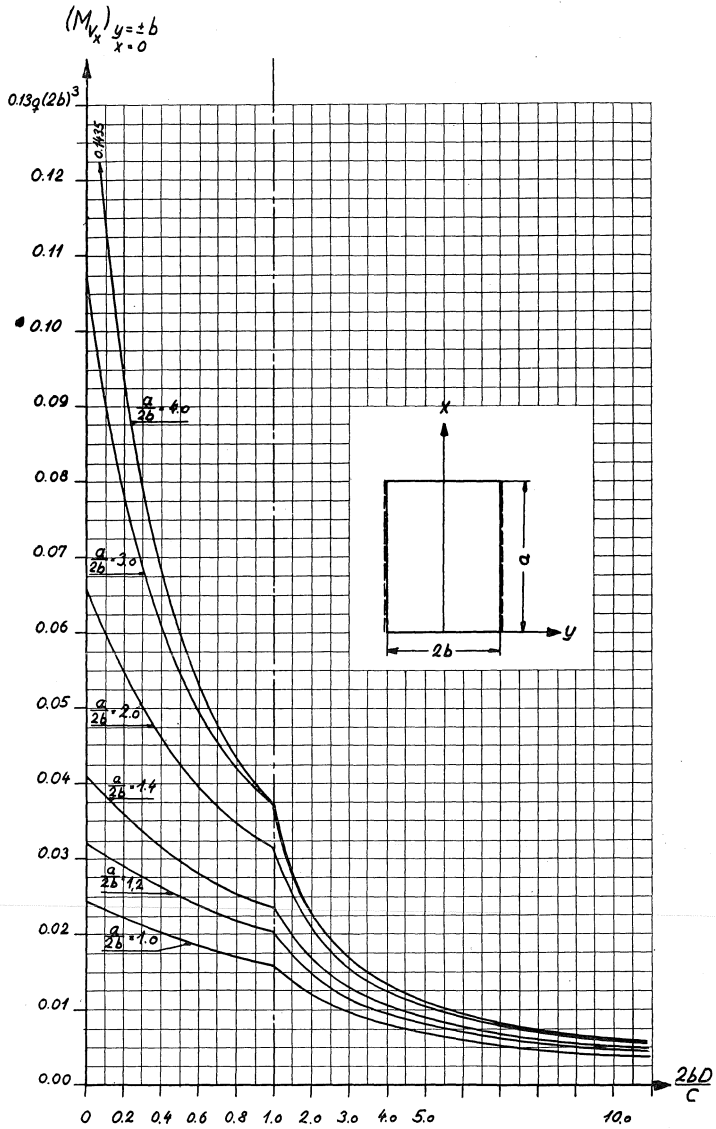


Fig. 75. Diagram för bestämning av dimensionerande moment vid platta elastiskt vridinspänd vid långsida och fritt upplagd vid kortsida, belastad av jämnt fördelad last q .

Fig. 75. Diagram for determining the moments to be used in design of a slab with the longer sides subjected to elastic torsional restraint and with the shorter sides on free supports. The slab is subjected to an uniformly distributed load.

C = vridningsmotstånd hos huvudbalkar $y = \pm b$.

D = plattböjningsmotstånd.

C = Torsional rigidity of beams along the sides $y = \pm b$.

D = Flexural rigidity of slab.

2. Dimensionering

a. Elastiska förhållanden

Inspänningsmomentet har sitt maximivärde i punkten $(x = \frac{a}{2}; y = b)$ endast vid små värden på $\frac{2D \cdot b}{C}$. Vid $C = \infty$, dvs. vid $\frac{2D \cdot b}{C} = 0$, har inspänningsmomentet fördelningen enligt fig. 76. Om man förutsätter,

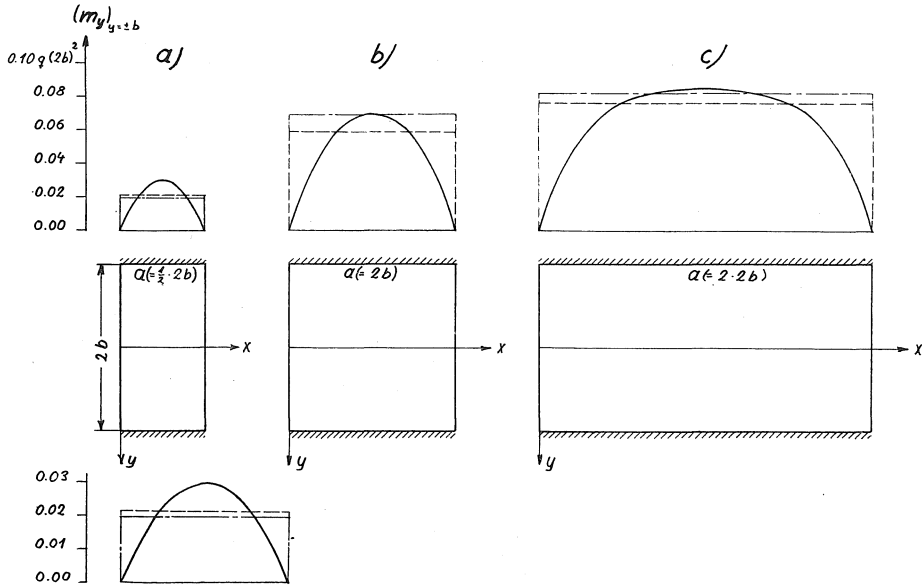


Fig. 76. Fördelning av stödmomenten vid fast inspänning av två motstående kanter och fri uppläggning längs de två övriga.

att inspänningsarmeringen inlägges jämnt fördelad utefter hela stödbalkens längd, bör den bestämmas av inspänningsmomentets medelvärde med en viss förhöjning på grund av den ojämna fördelningen. Detta medelvärde är lika med $\frac{(M_{v_x})_{x=0}}{\frac{1}{2}a}$. Om vi låta förhöjningen komma till synes genom en faktor a , som är större än 1, erhålles det för stödarmeringen dimensionerande momentet $a \cdot \frac{(M_{v_x})_{x=0}}{\frac{1}{2}a}$.

Vid minskning av kantbalkarnas vridstyvhet uppträder i stället för ett momentmaximum i mitten två stycken maxima, som ligga symmetriskt med avseende på kantbalkens mitt och som vid ytterligare minskning av kantbalkarnas vridstyvhet, dvs. ökning av $\frac{2bD}{C}$, vandra mot huvudbalkarnas ändar. Det visar sig vid ett närmare studium av inspän-

ningsmomentets fördelning längs kantbalkarna, att denna fördelning är jämnast vid relativt små värden på $\frac{2bD}{C}$ och vid spännviddsförhållandet $\frac{a}{2b} = 2,0$.

$\frac{2bD}{C} \backslash \frac{a}{2b}$	1,0	2,0	3,0	4,0
0	1,2	1,15	1,10	1,05
0,5	1,15	1,05	1,10	1,15
1,0	1,10	1,05	1,15	{0,7 1,4
2,0	1,05	1,05	{0,7 1,4	{0,75 1,50
4,0	1,05	1,10	{0,75 1,50	—
10,0	1,10	1,15	—	—

Tabell 17. Värden på faktorn a , ingående i uttrycket för bestämning av stödarmeringen, vid olika $\frac{2bD}{C}$ och $\frac{a}{2b}$. I de fyra fall, där två värden angivits, armeras för det större stödmomentet i de närmast kortändarna belägna fjärdedelspartierna (vardera partiets bredd = $\frac{1}{4}a$) och för det mindre stödmomentet i mittpartiet (med bredd = $\frac{1}{2}a$).

I tabell 17 äro för olika värden på $\frac{2bD}{C}$ och $\frac{a}{2b}$ sammanställda värden för koefficienten α , vilka beräknats på grundval av stödmomentens fördelning, varvid tillsetts, att det dimensionerande momentet ej för något fall är mindre än 80 % av maximala momentet.

Sammanfattningsvis kan utsägas, att stödarmeringen, som inlägges jämnt fördelad längs balken, bestämmes av värdet

$$\alpha \cdot \frac{(M_{v_x})_{x=0}}{\frac{1}{2}a}$$

där α erhålles ur tabell 17.

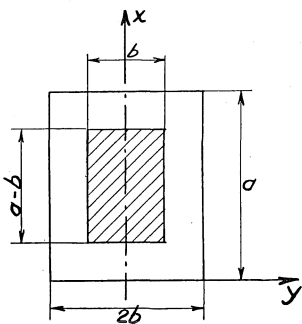


Fig. 77. Område (sektionerat) för full fältarmering.

I fältet armeras i y -riktningen för momentet $(m_y)_{x=\frac{a}{2}}$ i den sektionerade ytan i fig. 77 (jämför $y=0$ Marcus) och halva momentet i återstående del.

För momentet i x -riktningen armeras också lämpligen för största momentet i den sektionerade delen och för halva momentet i återstående del.

Balken dimensioneras med avseende på vridning med utgångspunkt från värdet $(M_{v_x})_{x=0}$.

b. *Modifikationer på grund av brottdeformationer (passningsmetod).*

Emedan dimensionerna hos balkarna bestämmas även av andra faktorer än det vridande momentet (böjande moment och avskärningskraft), kan det inträffa, att huvudbalkarna bli över- eller understarka i jämförelse med plattan, räknat med utgångspunkt från elastiska förhållanden.

I det förra fallet, då huvudbalkarna äro vridningsöverstarka, kan detta utnyttjas till minskning av fältarmeringen, varvid stödarmeringen samtidigt ökas. Räkнемässigt utföres dimensioneringen på så sätt, att man med utgångspunkt från det vridande momentet, uttryckt i $q(2b)^3$, som huvudbalken kan upptaga, går in i diagram i fig. 75 d med en horisontell linje, som skär kurvan för det ifrågakvarande sidoförhållandet i en punkt med ett ideellt värde för $\frac{2D \cdot b}{C}$. Med utgångspunkt från detta ideella

värde på $\frac{2D \cdot b}{C}$ erhålles därefter ur fig. 75 a $(m_y)_{x=\frac{a}{2}}$. Fältarmeringen

bestämnes av mittmomentet och stödarmeringen av värdet

$$a \cdot \frac{(M_{v_o})_{till}}{\frac{1}{2}a}, \text{ där } (M_{v_o})_{till}$$

betecknar det tillåtna vridande moment, som kantbalken kan upptaga.

Förfarandet innebär ett användande av passningsmetoden. Denna bör dock, som ovan i sammanfattningen till avdelning V påpekades, försiktigtvis ges en begränsad giltighet vid betongkonstruktioner, så att största avvikelser från momenten, beräknade med utgångspunkt från elastiska förhållanden, sättes till 50 %. Om det vridande moment M_{v_o} , som huvudbalken kan upptaga, överstiger $1,5 \times$ det vridande moment, som erhålles ur inspänningsberäkningen på grundval av elastiska förhållanden, så tillgodogöra vi oss ej av överskottet i det vridande momentet, dvs. vi räkna maximalt med ett vridande moment $= 1,5 \cdot M_{v_{oel}}$.

När kantbalkarna äro vridningsunderstarka skulle man, om den elastiska momentfördelningen vore bestämmande, vara tvungen att tillgripa vridningsarmering. Även här kan emellertid passningsmetoden, såsom framgår av de ovan skildrade försöken, tillämpas. Vriddeformationerna växa vid kantbalkarnas ändar, när M_{v_o} uppnår brottvärdet. Vid ytterligare ökad last på plattan förmå kantbalkarna ej upptaga något ytterligare vridande moment. Däremot inverka de utjämnande på inspänningsmomentet. En noggrann kalkyl av kantbalkarnas inverkan skulle ge för komplicerade resultat för att medgiva praktisk tillämpning. I huvudsak kan man i stället komma åt problemet genom att för den del av lasten, som överstiger det värde, vilket beräknat med utgångspunkt

från elastiska förhållanden ger vridbrott i kantbalkarna, beräkna momenten i plattan med förutsättning av fri uppläggning längs alla kanterna. Plattan dimensioneras alltså vad beträffar inspänningsmomenten av värdet

$a \cdot \frac{M_{v_{otill}}}{\frac{1}{2}a}$ där $M_{v_{otill}}$ betecknar det vridande moment, som huvudbalkarna kunna upptaga.

Det dimensionerande fältmomentet bestämmes såsom summan av det fältmoment enligt fig. 75, som erhålles för den del av lasten, som under förutsättning av elastiska förhållanden ger värdet på det vridande momentet i kantbalkarna lika med $M_{v_{otill}}$, och det fältmoment, som erhålles vid fri uppläggning längs kantbalkarna för den övriga delen av lasten.¹ Begränsningen i användningen av passningsmetoden blir i detta fall, att om beräkning med förutsättning av elastiska förhållanden för den totala lasten ger ett värde på M_{v_o} , som överstiger $1,5 \cdot M_{v_{ov}}$, så måste huvudbalkens förmåga att upptaga vridande moment höjas, vilket kan ske antingen genom anbringande av vridningsarmering eller genom ökning av dimensionerna — helst tjockleken — i vilket senare fall förnyad beräkning av momenten är erforderlig.

B. Inverkan av inspänning vid kortsidorna

I det ovan behandlade fallet har det förutsatts, att plattan är fritt upplagd längs kortsidorna. I praktiken förekommer ofta, att plattan är fast inspänd över stöden. Inverkan härav är svår att beräkna exakt med elasticitetsteoriens förutsättningar i det allmänna fallet med godtyckligt värde på kantbalkarnas vridstyvhet. Ur i litteraturen tillgängliga lösningar för det fall att plattan är fast inspänd längs huvudbalkarna kan man emellertid uppskatta inverkan av stödmomentet vid kortsidan. Detta moment ger minskning av mittfältmomentet i den korta riktningen $(m_y)_{x=\frac{a}{2}}$ och för stora vridstyvheter hos kantbalken även minskning

av inspänningsmomentet vid mitten av kantbalken $(m_y)_{x=\frac{a}{2}}$. Vid liten

vridstyvhet hos kantbalken är däremot en ökning av inspänningsmomentet i mitten möjlig. För dimensioneringen har emellertid, som ovan påpekats, mittinspänningsmomentet ingen större betydelse, utan stöd-
armeringen i plattan bestämmes av summa-momentet längs den inspända

¹ Beräkningen av fältmomentet kan även liksom vid överstark kantbalk utan större fel utföras med utgångspunkt från ett ideellt värde på $\frac{2bD}{C}$, erhållet ur diagram i fig. 75 d som abscissa för skärningspunkten mellan en horisontell linje, utgående från $M_{v_{otill}}$, och kurvan för det aktuella sidoförhållandet.

kanten, dvs. av $(M_{v_x})_{x=0}$. Detta summamoment minskas också av inspänningsmomentet över det korta stödet. Om man förutsätter full inspänning längs kantbalkarna (vilket är detsamma, som att deras vridningsmotstånd är oändligt stort i förhållande till plattans böjningsmotstånd), erhålles förhållandet mellan summamoment längs långsidorna vid fast inspänning och fri uppläggning längs kortsidorna ur i litteraturen tillgängliga värden på momenten vid fast inspänning¹ och ur fig. 75 d, som ger summamomentet vid fri uppläggning längs kortsidorna. I tabell 18 är nämnda förhållande uppställt för olika sidoförhållanden.

Sido- förhållande $a/2b$	Summa-moment längs långsidan vid fast inspänning längs alla kanter
	Summa-moment längs långsidan vid fast inspänning längs långa kanterna och fri uppläggning längs kortsidorna
1 : 1	0,63
2 : 1	0,82
3 : 1	0,89
4 : 1	0,92
6 : 1	0,95

Tabell 18.

I de fall, där plattorna armerats med större armering i närheten av kantbalkarnas upplag företages minskning på grund av kontinuiteten över tvärbalken i denna större armering.

Utan alltför stort fel kan man anse, att de i tabellen angivna kvoterna kunna användas även när elastisk vridningsinspänning föreligger.²

C. Beräkning med förutsättning av att plattan består av smala strimlor i tvärled utan sammanhang i längsled. Linjelast.

Ibland utformas de vridningsförhindrande tvärbalkarna vid balkbroar så, att ett mellanrum erhålles mellan brobaneplatta och tvärbalk. I sådant fall kan man med skälig approximation betrakta plattan såsom bestående av smala strimlor i tvärriktning utan sammanhang i längsled. I litteraturen

¹ Se Marcus: Die Theorie elastischer Gewebe, Berlin 1924 och Timoshenko, S.: Theory of plates and shells, London och New York 1940.

² I de flesta fall torde detta antagande vara på den säkra sidan. Tänkbart är, att summamomentet vid vissa vridstyheter ej minskas i samma mån som vid full inspänning. Med tanke på att avvikelser ej kan vara stora och att man har en jämnare fördelning av inspänningsmomentet vid elastisk vridinspänning kunna dock tabellvärdena tillämpas med nöjaktig säkerhet.

återfinnas beräkningar av vridningsinspänningen för olika belastningsfall, utförda på grundval av detta antagande.¹

För det ovan behandlade fallet med jämnt fördelad last erhålles med tidigare använda beteckningar (koordinatsystem se fig. 74)

inspänningsmomentet i plattmitt $(m_y)_{x=\frac{a}{2}}$ ur
 $y=b$

$$(m_y)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{q \cdot (2b)^2}{12} \cdot \frac{1}{\cosh kl} \dots \dots \dots (j)$$

fältmomentet i plattmitt $(m_y)_{x=\frac{a}{2}}$ ur
 $y=0$

$$(m_y)_{x=\frac{a}{2}} = \frac{q \cdot (2b)^2}{8} - (m_y)_{x=\frac{a}{2}} \dots \dots \dots (k)$$

vridande moment i kantbalk vid tvärbalkanslutning

$$(M_{v_x})_{x=0} = \frac{q \cdot (2b)^2}{24} \cdot \frac{\operatorname{tgh} kl}{k} \dots \dots \dots (l)$$

i vilka ekvationer beteckningen

$$k = \sqrt{\frac{D}{4b \cdot C}} \dots \dots \dots (m)$$

införts.

Vid dimensionering av broar antages ofta den rörliga lasten bestå av linjelaster. För det fall att tvärbalkarna äro sammangjutna med plattan kan visserligen beräkningen utföras på i avd. A angivet sätt med hänsynstagande till den fullständiga plattverkan. För att få praktisk användning måste dock resultatet vara framställda i diagram- eller tabellform. Det räknearbete, som är förenat härmed, kan undvikas, om man förutsätter, att inverkan av plattans kontinuitet i längsriktningen är densamma vid jämnt fördelad last som vid linjelaster. Man behöver då blott med ledning av kvoterna mellan de dimensionerande storheterna vid jämnt fördelad belastning, beräknade å ena sidan med förutsättning av full plattverkan och å den andra med förutsättning av att plattan är uppdelad i tvärgående strimlor, korrigera de relativt lättillgängliga värdena vid godtycklig linjebelastning och i tvärstrimlor uppdelad platta.²

¹ Se Kasarnowsky, S.: not 1 s. 105, vidare Schjött, R.: "Einspannung durch Torsion", Det Kgl. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter, 1934, Nr 8. För dubbelflänsiga huvudbalkar återfinnas motsvarande beräkningar i uppsats av förf. Se Nylander, H.: "Inspänning genom torsion...", Tekniska skrifter nr 111.

² Uträkning av värdena vid godtycklig linjelast när plattan tänkes uppdelad i tvärgående strimlor kan ske enligt principer, angivna av Kasarnowsky (se not 1 s. 105) och av Hj. Granholm i uppsats i Betong med titeln "Om lastfördelning mellan balkar med särskild hänsyn till farbaneplattans inverkan". Professor Granholms betraktelsesätt medger dessutom studium av inverkan av variabelt tröghetsmoment hos plattan i tvärlid.

I kompendium i Brobyggnad vid KTH har Professor Georg Wästlund angivit metod att undersöka även inverkan av variabel sektion hos huvudbalkarna.

I nedanstående tabeller äro dessa kvoter sammanställda för fältmomentet i plattmitt i den korta riktningen $(m_y)_{x=\frac{a}{2}}$ och för det vridande momentet vid tvärbalkanslutningen. Kvoterna äro uträknade för aktuella spännviddsförhållanden och värden på $\frac{2bD}{C}$.

$\frac{2bD}{C} \backslash \frac{a}{2b}$	1,0	2,0	3,0	4,0
0	0,68	1,0	1,0	1,0
0,5	0,59	0,88	0,91	0,95
1,0	0,53	0,82	0,89	0,94
2,0	0,46	0,78	0,89	0,96
4,0	0,39	0,76	0,90	0,97
10,0	0,33	0,75	0,92	0,98

Tabell 19. Förhållande mellan $(m_y)_{x=\frac{a}{2}}$ vid jämnt utbredd last, beräknad å ena sidan med förutsättning av full plattverkan med fri uppläggning vid kortsidorna och å den andra med förutsättning av att plattan är uppdelad i oändligt smala strimlor i tvärlid utan sammanhang i längsled.

$\frac{2bD}{C} \backslash \frac{a}{2b}$	1,0	2,0	3,0	4,0
0	0,60	0,79	0,86	0,90
0,5	0,50	0,66	0,72	0,74
1,0	0,44	0,60	0,65	0,65
2,0	0,38	0,51	0,55	0,55
4,0	0,30	0,42	0,45	0,45
10,0	0,22	0,31	0,32	0,32

Tabell 20. Förhållande mellan $(M_{v_x})_{x=0}$ vid jämnt utbredd last, beräknat å ena sidan med förutsättning av full plattverkan med fri uppläggning vid kortsidorna och å den andra med förutsättning av att plattan är uppdelad i oändligt smala strimlor.

Sammanfattningsvis blir gången vid beräkningen av inverkan av linjelast

1. Ur ekvationerna (j)—(m) beräknas de dimensionerande momenten. Vid variabel sektion hos huvudbalkarna eller voûter hos brobaneplattan utföres beräkningen enligt metoder, återgivna i litteraturen (se not 2 sid. 118).

2. För det fall, att brobaneplattan är hopgjuten med tvärbalkarna, multipliceras de enligt 1. erhållna momenten med de i tabellerna 19 och 20 återgivna faktorerna. Tabell 19 gäller för fältmoment i korta riktningen

och tabell 20 för inspänningsmoment och huvudbalkarnas vridande moment ävensom för de moment, som angripa tvärbalkarna vid ändarna.

3. På grund av kontinuiteten över tvärbalkarna för det fall, att plattan är hopgjuten med tvärbalkarna, minskas inspänningsmoment och vridande moment genom multiplikation med faktorn i tabell 18.

4. Liksom vid jämnt fördelad last särskiljes två huvudfall, nämligen a) vridningsöverstark huvudbalk och b) vridningsunderstark huvudbalk. Metodiken vid den slutliga dimensioneringen dvs. vid tillämpandet av passningsmetoden blir densamma, som i avd. B beskrivits vid jämnt fördelad last.

Vridningströghetsmoment och skärpåkänningar enligt elasticitets- och plasticitetsteorin

A. Vridningströghetsmomentet

Vridningströghetsmomentet I_v definieras av ekvationen

$$M_v = G \cdot I_v \cdot \frac{d\varphi}{dz} \dots \dots \dots (a)$$

där

M_v = vridande momentet

G = skjuvmodulen

$\frac{d\varphi}{dz}$ = vridningsvinkelns förändring pr längdenhet.

$C = G \cdot I_v$ benämnes vridningsstyvhet (jämför beteckningen


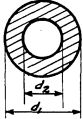
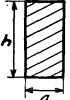


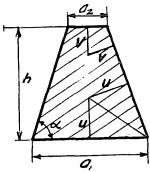
$B = E \cdot I =$ böjningsstyvhet).

Vridningströghetsmomentet är en tvärsnittskonstant, vars definition är beroende av förutsättningarna, att materialet är homogent, isotropt och fullständigt elastiskt, det sistnämnda innebärande att Hooke's lag har giltighet. Då de plastiska deformationerna hos betong äro av väsentlig betydelse, är I_v strängt taget ej en definierad tvärsnittskonstant vid betong. För att undvika alltför besvärliga komplikationer har vridstyvhetsens variation uttryckts genom ett med belastning och andra faktorer variabelt värde på G och med $I_v =$ konstant = den tvärsnittskonstant, som erhålles med elasticitetsteoriens förutsättningar.

Vid de flesta tvärsnitt stöter en noggrann beräkning av I_v på grundval av de ekvationer, som erhålles ur vridningsteorien, på betydande svårigheter av matematisk art. Man kringgår dessa svårigheter, om man utnyttjar den av Prandtl formulerade membran-analogien.¹ Med utnyttjande av att samma ekvation har giltighet för en på speciellt sätt definierad vridningsfunktion och för nedböjningen av en tunn membran, som spännes över en öppning med samma form som den vridna stavens

¹ Se L. Prandtl i Zeitschrift für Physik 1910. Intresserade hänvisas till kompendium av förf. över det elasticitetsteoretiska underlaget till vridning, utgivet av Tekniska Högskolans kompendiekomité, där även härledningen av de grundläggande ekvationerna för vridning och membran deformationer äro återgivna.

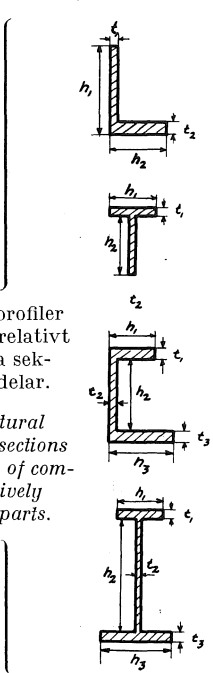
Tabell 1a. *Table 1a.*

Tvärsnitt <i>Section</i>	Vridningströghetsmoment I_v $I_v \left(= \frac{C}{G} \right)$ $C = \text{Torsional rigidity}$ $G = \text{Modulus of elasticity in shear}$	Maximal skärpåkning enligt elasticitetsteorien <i>Maximum shearing stress calculated from the theory of elasticity</i>		Skärpåkning enligt plasticitetsteorien <i>Shearing stress calculated from the theory of plasticity</i>					
		Storlek <i>Magnitude</i>	Läge <i>Location</i>						
	$\frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$\frac{M_v}{\frac{\pi}{16} \cdot d^3}$	Längs omkretsen <i>At the circumference</i>	$\frac{M_v}{\frac{\pi}{12} \cdot d^3}$					
	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$	$\frac{M_v \cdot D}{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)}$	Längs yttre omkretsen <i>At the outer circumference</i>	$\frac{M_v}{\frac{\pi}{12} (D^3 - d^3)}$					
	$c_1 \cdot a^3 \cdot h$	$\frac{M_v}{c_2 \cdot a^2 \cdot h}$	I mitten på långa sidan <i>In the middle of the longer side</i>	$\frac{M_v}{\frac{1}{2} \cdot a^2 \left(h - \frac{1}{3} \cdot a \right)}$					
$n = \frac{h}{a} =$	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
c_1	0,140	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
c_2	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
  	$\frac{a^4}{46,2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} \frac{h(a_1^4 - a_2^4)}{a_1 - a_2} \\ - 0,105(a_1^4 + a_2^4) \end{array} \right.$ Giltiga för $h > 4a_1$ Fel < 5 % <i>These formulae hold for $h > 4a_1$ Error < 5 per cent</i>	$\frac{M_v}{\frac{1}{20} \cdot a^3}$ $\approx \frac{M_v}{I_v} \cdot a_1$	I mitten på sidorna <i>In the middle of the sides</i> På långsida i närheten av sidan a_1 <i>On the longer side near side a_1</i>	$\frac{M_v}{\frac{1}{12} \cdot a^3}$ M_v $\frac{2}{3}(a_1 u^2 + a_2 v^2) + \frac{2}{3}x(u^2 + 2v^2)$ $u = \frac{a_1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2}; v = \frac{a_2}{2} \cot \frac{a}{2}$ $x = \frac{h}{\sin a} - \frac{u}{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} - \frac{v}{\cot \frac{a}{2}}$ villkor condition } $h > \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$					

Tabell 1. Vridningströghetsmoment och skärpåkningar beräknade enligt plasticitetsteorien för olika i praktiken förekommande tvärsnitt.

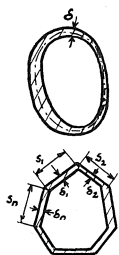
Table 1. Moment of inertia in torsion and shearing stresses computed from the theory of plasticity for various sections used in practice.

Tabell 1 b. Table 1 b.

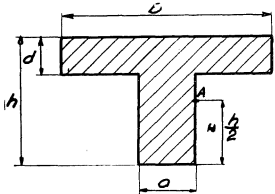
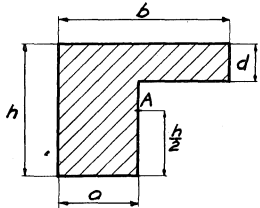
Tvärsnitt Section	Vridningströghetsmoment I_v $I_v = \left(\frac{C}{G}\right)$ <i>C = Torsional rigidity</i> <i>G = Modulus of elasticity in shear</i>	Maximal skärpåkning enligt elasticitetsteorien <i>Maximum shearing stress calculated from the theory of elasticity</i>		Skärpåkning enligt plasticitetsteorien <i>Shearing stress calculated from the theory of plasticity</i>
		Storlek Magnitude	Läge Location	
 <p>Järnprofiler med relativt tunna sektionsdelar. <i>Structural steel sections made of comparatively thin parts.</i></p> <p>svetsade profiler och Dip-profiler. <i>Welded sections and Dip sections.</i></p> <p>INP-profiler <i>INP sections.</i></p>	$C \sum_j \frac{t_j^3 h_j}{3}$	$\frac{M_v}{I_v} \cdot t_{max}$ <p>Förhöjningen av skärpåkänningen genom påkänningskoncentrationer vid sektionsdelarnas förbindningar saknar betydelse. <i>The increase in shearing stress due to stress concentrations at she joints of the section parts is of no importance.</i></p>	<p>På den tjockaste sektiondelen. <i>In the thickest part of section</i></p>	$\frac{M_v}{\frac{1}{2} \sum_j h_j \cdot t_j^2}$
	$C = 1,0$			„
	$C = 1,1$			„
	$C = 1,1$			„
	$C = 1,15$			„
$C = 1,3$ INP-profiler I NP sections.				

Angående exakt beräkning av I_v för sammansatta tvärsnitt se Lyse, I. och Johnston, G.: Structural beams in torsion, American Society of Civil Engineers. Transactions Nr, 1936.

Regarding the exact calculation of I_v for composite sections, see Lyse, I., and Johnston, G., Structural Beams in Torsion, American Society of Civil Engineers, Transactions, 1936.

	$\frac{4 \cdot F^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$ <p>F=ytan inom streckprickade medellinjen. <i>F=area bounded by the dash-dot central line.</i></p> $\oint \frac{ds}{\delta} = \frac{s_1}{\delta_1} + \frac{s_2}{\delta_2} + \dots + \frac{s_n}{\delta_n}$	$\frac{M_v}{2 F \delta_{min}}$	<p>På den tunnaste delen av väggen. <i>In the thinnest wall section.</i></p>	<p>Samma som enligt elasticitetsteorien. <i>The same as that computed from the theory of elasticity.</i></p>
---	--	--------------------------------	--	--

Tabell 1 c. Table 1 c.

Tvärsnitt Section	Vridningströghetsmoment I_v $I_v \left(= \frac{C}{G} \right)$ $C = \text{Torsional rigidity}$ $G = \text{Modulus of elasticity in shear}$	Maximal skärpåkänning enligt elasticitetsteorien <i>Maximum shearing stress calculated from the theory of elasticity</i>		Skärpåkänning enligt plasticitetsteorien <i>Shearing stress calculated from the theory of plasticity</i>
		Storlek Magnitude	Läge Location	
	<p>Appr. med uppskattning av förhöjningen genom förbindningen med hjälp av membrananalogen.</p> <p><i>Approximate formula based upon an estimate of the increase due to the connection of the parts of the section made by means of the membrane analogy.</i></p> $a^3 (0,33 h - 0,21 a) + d^3 (0,33 b - 0,17 a - 0,21 d)$	$\frac{M_v}{I_v} \cdot a$ <p>Spänningskoncentrationer försummas.</p> <p><i>The stress concentrations are neglected.</i></p>	<p>Vid A</p> <p>at A</p>	$M_v: \left[\frac{1}{2} d^2 \left(b - \frac{1}{3} d \right) + \frac{1}{2} a^2 \left(h - d - \frac{1}{3} a + 0,86 \frac{a^2 \cdot d}{a^2 + d^2} \right) \right]$
	<p>Appr. med uppskattning av förhöjningen genom förbindningen med hjälp av membrananalogen.</p> <p><i>Approximate formula based upon an estimate of the increase due to the connection of the parts of the section, made by means of the membrane analogy.</i></p> $a^3 (0,33 h - 0,21 a) + d^3 (0,33 b - 0,25 a - 0,11 d)$	$\frac{M_v}{I_v} \cdot a$ <p>Spänningskoncentrationer försummas.</p> <p><i>The stress concentrations are neglected.</i></p>	<p>Vid A</p> <p>at A</p>	$M_v: \left[\frac{1}{2} d^2 \left(b - \frac{1}{3} d \right) + \frac{1}{2} a^2 \left(h - d - \frac{1}{3} a + 0,79 \frac{a^2 \cdot d}{a^2 + d^2} \right) \right]$

tvärsnitt och åverkas av samma dragspänning per breddenhet (S) i alla riktningar samt belastas med en jämnt fördelad belastning q per ytenhet vinkelrätt mot membranens plan, erhålles sambandet mellan I_v och membran deformationen

$$I_v = 4 \frac{S}{q} \int z dF \dots \dots \dots (b)$$

där z betecknar membranens nedböjning och integrationen utföres över tvärsnittet, vid vars kontur nedböjningen är lika med noll.

Ekv. (b) utsäger, att vridningströghetsmomentet är proportionellt mot volymen mellan den belastade membranen och ett plan genom tvärsnittskonturen.

I tabell 1 a återfinnes I_v för en del vanliga tvärsnittsgrundtyper. I tabell 1 b äro återgivna formlerna för tvärsnitt, bestående av sammansatta tunna sektiondelar, av typ, som förekommer vid järnbalkar. I dessa formler har hänsyn till förhöjningen av vridningströghetsmomentet genom de olika sektiondelarnas förbindningar tagits genom införandet av en multiplikationsfaktor framför summan av de enskilda sektiondelarnas vridningströghetsmoment.¹

Vid de massiva sammansatta tvärsnitt, som äro vanliga vid betongbalkar enligt tab. 1 c ha de approximativa formlerna för sammansatta tunnflänsiga profiler enligt tabell 1 b ej giltighet. Ej heller kan man för dessa tvärsnitt utnyttja de i litteraturen skildrade experimentella undersökningar, som stödjade sig på membranalogien, då dessa undersökningar främst tagit sikte på förhållandena vid järnbalkar med förhållandet mellan flänstjocklek och livtjocklek > 1 .² Nedan härledes därför approximativa formler för de i tabell 1 c visade sammansatta massiva tvärsnitten.

T-sektionen enligt fig. 1 a med total höjd h , total flänsbredd b , livtjocklek a och flänstjocklek d delas enligt fig. 1 b upp i två rektangulära delar, den ena med höjd h och tjocklek a , den andra med höjd $b-a$ och tjocklek d . Vridningströghetsmomentet för den sammansatta sektionen är lika med summan av vridningströghetsmomenten för livdel och flänsdel med en förhöjning på grund av förbindningen. Denna uppdelning har valts, för att korrektionsfaktorn genom förbindningen skall bliva så liten som möjligt.

¹ Värdena på denna multiplikationsfaktor ha erhållits ur Föppl, A.: "Versuche über die Verdrehungssteifigkeit der Walzeisensträger". Sitzungsbericht der Bayr. Akad. d. W. 1921.

² Se Trayer, G. och March, H. W.: "The Torsion of Members having Sections common in Aircraft Construction", Technical Report at the Advisory Committee for Aeronautics, N. 349. Författarna till denna utredning ange felaktigt, att deras resultat kunna användas även vid de fall, då flänstjockleken är mindre än livtjockleken.

Se vidare Lyse, I. och Johnston, B. G.: "Structural beams in Torsion", Proceedings, American Society of Civil Engineers, oct. 1936, Transactions Number part 2.

För livdelen erhålles vridningströghetsmomentet I_{v_1} enligt formel för rektangulär sektion till

$$I_{v_1} = \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot h - 0,21 \cdot a^4 \dots \dots \dots (c)$$

och för flänsdelen

$$I_{v_2} = \frac{1}{3} \cdot d^3 (b-a) - 0,21 \cdot d^4 \dots \dots \dots (d)$$

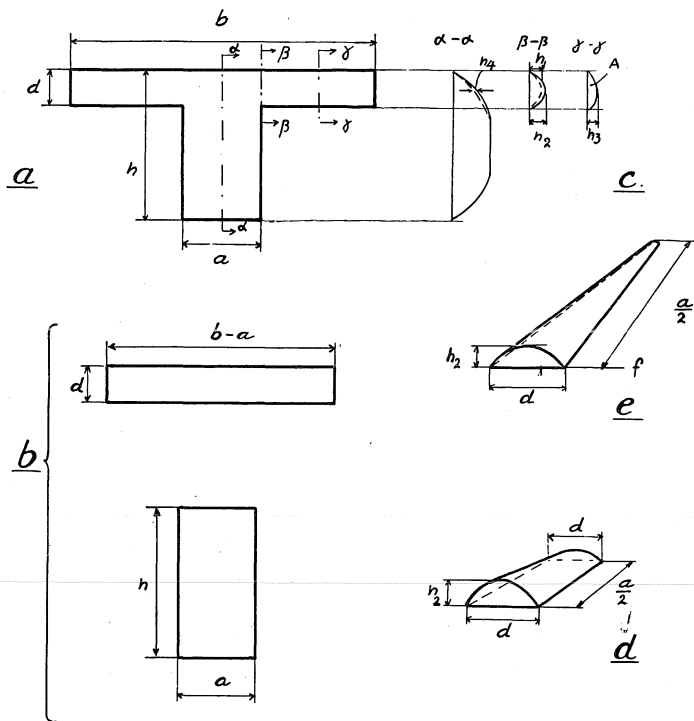


Fig. 1. Härledning av vridningströghetsmoment vid T-balk.

I fig. 1 c äro typutseendena av skärningarna mellan olika plan \perp plan genom tvärsnittskonturen och den yta, som vridningsspänningfunktionen representerar eller — vilket är detsamma — den vid belastning av jämnt fördelad last deformerade membranen, som är spänd över öppning av tvärsnittets utseende. I snitt $a-a$ återger den heldragna linjen skärningslinjens troliga utseende och den streckade linjen den skärning, som erhålles, om man ej tar hänsyn till inverkan av sammanbindningen, utan livdelen vrides för sig. I snitt $\beta-\beta$ återger den heldragna linjen den troliga skärningen och den streckade den skärning, som erhålles med membranen över flänsdelen, om delarna äro skilda enligt fig. 1 b. För livdelen

har membranen ingen nedböjning i detta snitt. I snitt $\gamma\text{-}\gamma$ återges slutligen en skärning på så stort avstånd från flänskant och liv, att inga störningar därifrån erhållas på membrandeformationen. Genom lösning av ekv. (b) för en membran, överspänd en oändligt lång rektangel med bredd d , erhålles ett vridningströghetsmoment per längdenhet $= \frac{1}{3} \cdot d^3$.¹ I fig. 1 d är volymstillskottet på grund av sammanbindningen vid relativt litet förhållande $\frac{a}{d}$ schematiskt återgiven. I fig. 1 e återfinnes motsvarande vid stort förhållande $\frac{a}{d}$. Det principiella utseendet på den term, som anger förhöjningen blir med i fig. 1 använda beteckningar vid litet $\frac{a}{d}$

$$\Delta I_v = 2 \cdot \frac{h_2 + h_4}{2h_3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot d^3 = \frac{h_2 + h_4}{h_3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot d^3 \dots \dots \dots (e)$$

och vid stort $\frac{a}{d}$

$$\Delta I_v = 2 \cdot \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot d^3 = \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot d^3 \dots \dots \dots (f)$$

Nu är h_2 alltid större än h_3 och $h_2 + h_4$ också alltid större än h_3 . ΔI_v blir då i de två extremfallen, uttryckta genom (e) och (f), alltid större än $\frac{1}{6} \cdot a \cdot d^3$ resp. $\frac{1}{9} \cdot a \cdot d^3$. Vad som eftersträvas är en enkel formel med försumbart fel.

Om man sätter $\Delta I_v = \frac{1}{6} \cdot a \cdot d^3$ blir för en balk med $h = 3a$, $b = 10d$ och $a = d$ vridningströghetsmomentet 2,5 % mindre än beräknat enligt Lyse-Johnston eller Trayer-March, vilkas värden ha giltighet för $\frac{a}{d} \leq 1$.

Vid $a = 2d$, $h = 3a$ och $b = 10d$ utgör korrektionsfaktorn 2 % av totala vridningströghetsmomentet. Härigenom inses, att man med för användning på fall i praktiken tillätlig approximation kan sätta tillskotts termen $= \frac{1}{6} \cdot a \cdot d^3$. Det sammanlagda uttrycket för vridningströghetsmomentet blir då (erhålles ur (c) och (d)) $I_v = \frac{1}{3} \cdot a^3 h - 0,21 \cdot a^4 + \frac{1}{3} \cdot d^3 \cdot (b-a) - 0,21 \cdot d^4 + \frac{1}{6} \cdot a \cdot d^3 = a^3 (0,33 \cdot h - 0,21 \cdot a) + d^3 (0,33 \cdot b - 0,17 \cdot a - 0,21 \cdot d)$.

¹ Härledning se på sid. 121 nämnda komp. av förf. s. 17.

För kantbalk med tvärsnittsmått enligt fig. i tabell 1 c erhålles efter motsvarande överbäganden

$$I_v = a^3 (0,33 \cdot h - 0,21 \cdot a) + d^3 (0,33 \cdot b - 0,25 \cdot a - 0,11 \cdot d).$$

B. Skärpåkänningar

Även vid beräkning av skärpåkänningarna enligt elasticitetsteorien kan man utnyttja membranalogien. Den största skärpåkänningen motsvaras av den största lutningen hos den på ovan beskrivet sätt belastade membranen. I tabell 1 återfinnes i andra kolumnen enligt elasticitetsteorien för en del olika tvärsnittsformer beräknad maximal skärpåkänning. För sektionerna med inåtgående hörn ha spänningskoncentrationerna vid dessa hörn försummats, då de ha mycket ringa betydelse för brotthållfastheten vid statisk belastning vid de flesta byggnadsmaterial. Vid betong har man ej, såsom framgår av ovanstående utredning, någon användning av värdena för den maximala skärpåkänningen, beräknade enligt elasticitetsteorien. De medtagas dock här för fullständighetens och

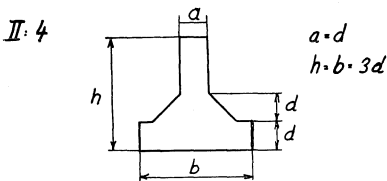
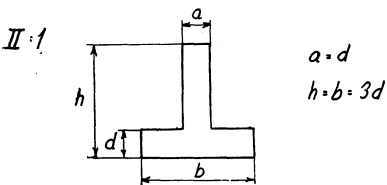
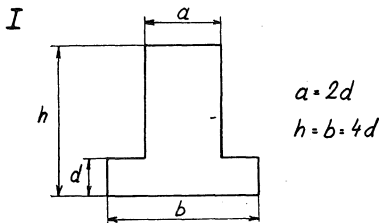


Fig. 2. Tvärsnitt hos de av Turner och Davies provade balkarna.

jämförelsens skull, då beräkning enligt elasticitetsteorien för närvarande rekommenderas i de flesta handböcker och bestämmelser.

Däremot erhålles, såsom utredningen ovan givit vid handen, god överensstämmelse med verkligheten, om skärpåkänningen beräknas enligt plasticitetsteorien och vid brott sättes lika med betongens rena draghållfasthet. Liksom vid vridning av ett elastiskt material kan vridningsföreteelserna åskådliggöras med hjälp av en spänningsfunktion, som i detta fall är så beskaffad, att dubbla volymen mellan den yta, som den representerar, och nollplanet, är lika med det vridande momentet, samtidigt som ytans lutning, som motsvarar skärpåkänningen, har samma storlek över hela tvärsnittet — det antages i plasticitetsteorien, att genom de stora deformationerna en utjämning av påkänningarna inträder före brott.¹

¹ Se den matematiska formuleringen i ovannämnda kompendium, eller Nádai, A.: "Der bildsame Zustand der Werkstoffe", Berlin 1927, s. 95.

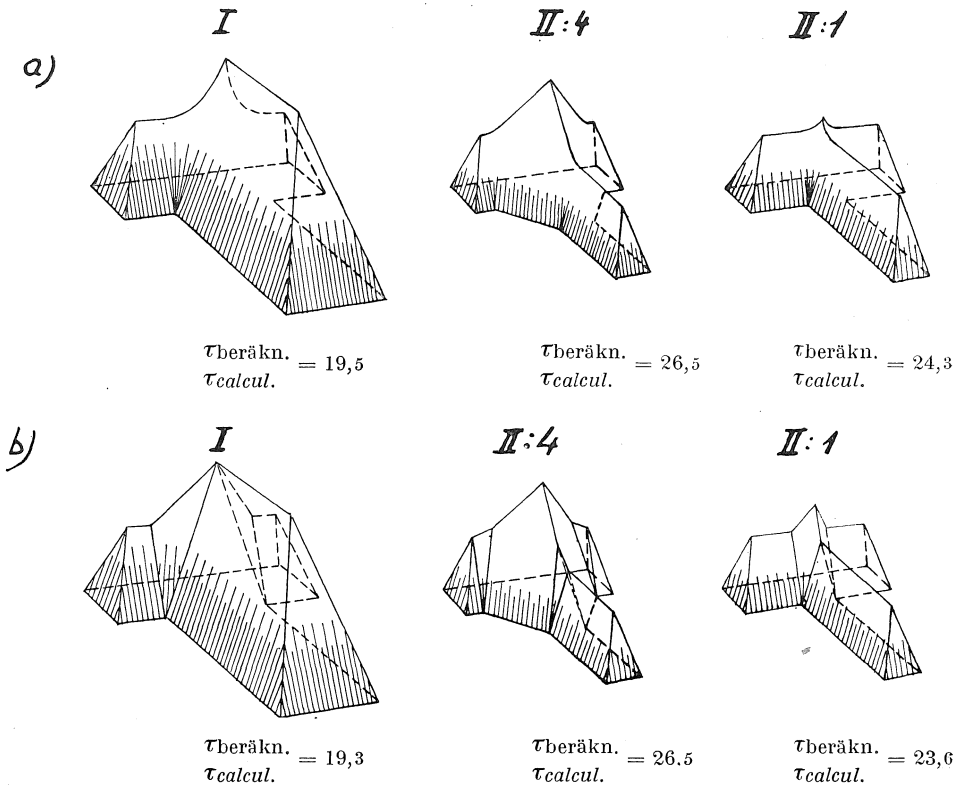


Fig. 3. Utseende av spänningsytorna enligt plasticitetsteorien för de i fig. 2 visade tvärsnitten.
 Fig. 3. Stress surfaces plotted according to the theory of plasticity for the sections of the beams shown in fig. 2.

För de i fig. 2 visade tvärsnitten, vilka äro desamma som de i ovannämnda utredning av Turner och Davies¹ redovisade, har spänningsytan utseendet enligt fig. 3. a) visar utseendet av spänningsytan, om den strängt bestämes av villkoret, att största lutningen överallt har samma storlek. Vid de inåtgående hörnen erhålles här en konisk yta, som sammanbinder de två lutande plan, som begränsa livdel och flänsdel. Då man emellertid ej här har att göra med ett idealplastiskt material, kunna spänningskoncentrationer uppträda vid hörnen, så att τ -påkänningen där på grund av betongens förmåga att upptaga påkänningskoncentrationer blir större än brottvärdet för den övriga delen. Under sådana förhållanden får spänningsytan utseendet enligt fig. b) med lutande plan sammanbindande begränsningsplanen för fläns och livdel så, att planens skärningslinjer falla i plan, som äro vinkelräta mot grundplanen. De beräknade τ -värdena, som återfinnas under figurerna och

¹ Se not s. 15.

som hänföra sig till de brottmoment, som Turner och Davies erhöllo, visa mycket obetydlig skillnad för de två olika fallen (max. 3 %). Då den av enbart plana ytor bestående spänningssytan för betong kan anses som lika befogad som den av plana och i övergångarna koniska ytor sammansatta, har beräkning enligt modell b) lagts till grund för uppställning av de approximativa formler för τ -påkänningarna, vilka återfinnas i sista kolumnen i tabell 1 c. Uträkningen av dessa formler har tillgått så, att dubbla volymen mellan grundplan och spänningssyta uttryckts i tvärsnittsmått och ytans lutning, vilken är lika med τ -påkänningen, med i första hand försummande av förhöjningen av det vridande brottmomentet genom upphöjningen av spänningssytan vid tvärsnittsdelarnas förbindning (heldragen linje i fig. 4) varefter en korrektionsterm på grund av tillskottet genom förbindningen tillfogats (streckprickad linje i fig. 4). De approximativa formlerna ge vid någorlunda ordinära tvärsnittsformer avvikelse maximalt = 3 % från de med utgångspunkt från ovannämnda förutsättningar beräknade stränga värdena.

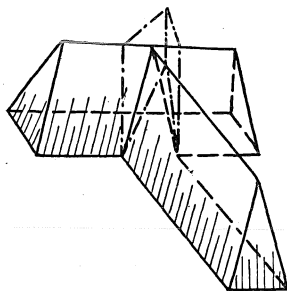


Fig. 4. Den geometriska motsvarigheten till tillskottstermen genom förbindning av liv och fläns i den approximativa formeln för skärpåkänningen enligt plasticitetsteorien.

Summary

The purpose of this investigation is to elucidate the principles of design of structural concrete members subjected to twisting moments. The investigation does not touch upon the problems which arise in those cases where the concrete member is provided with special torsional reinforcement. The reason why these problems are not included is that in the quantitatively predominant category of buildings, that is, houses and factories, the necessary torsional strength can in most cases be secured by shaping the cross-sections of the concrete beams so as to obtain the requisite torsional resistance at a lower cost than by providing the beam with torsional reinforcement which, according to the present designing practice, must be calculated so as to be able to take by itself the total twisting moment. A further reason for avoiding torsional reinforcement in some cases is that the assumptions required for the applicability of the method of adjustment¹ hold good also in those cases where the ends of the member in bending are restrained by members in torsion, this circumstance allows certain scope for proportioning the structure with respect to twisting moments which generally are of secondary importance as compared with bending moments.

In those cases where torsional reinforcement must be resorted to, the results of this investigation are nevertheless of importance since they provide general principles for determining that load which can be regarded as permissible in order to avoid cracking due to torsional stresses.

The investigation comprises six main divisions.

Part I

Part I makes a study of the laws which govern the load-bearing capacity of concrete beams subjected to pure torsion. In view of the character of failures observed in concrete beams subjected to pure torsion — the failure cracks are located at an angle of 45 degrees to the longitudinal axis of the beam — it may be assumed with fairly great certainty that this failure is a tensile failure which takes place when the principal tensile stresses which accompany the shearing stresses due to torsion reach the ultimate

¹ The method of adjustment is a name for the method of design, which consists in adjusting the moments determining the dimensions to the load-bearing capacity of the structural members. A necessary condition for the applicability of this method is that the deformations at failure are large.

strength value. The classical theory of torsion set up by Saint Venant is based on assumptions which deviate from reality in the case of concrete too widely to give reliable results in the practical applications of the theory.

Instead of regarding concrete as an elastic material, it appears justified to consider it as an ideal plastic material in view of the fact that the plastic elongation at failure cannot be neglected when, as in the case of a massive beam, those parts which are subjected to the maximum stresses are supported by parts that are loaded to a smaller extent. In addition to an equalization of the stress distribution over the cross-section of the beam, an increase in tensile strength in the most heavily stressed sections as compared with the strength in pure tension, can be regarded as possible.

In view of the assumption that the normal force in the longitudinal direction is zero, we obtain from the condition that the principal tensile stress over the whole cross-section shall have a constant value equal to ultimate tensile strength, a condition for plasticity which can be formulated in the same manner as in the case of structural steel, viz.

The stress distribution is such that the maximum shearing stresses over the whole cross-section have a constant value equal to the tensile strength.

The formulae derived from this condition are comparatively simple in structure.

These formulae are given in Table 1 in the Appendix. For the sake of completeness, this table also includes the values of the maximum shearing stress computed from Saint Venant's theory. In the calculation of the load-bearing capacity of members subjected to torsion, the value of τ computed from the theory of plasticity is taken to be equal to the tensile strength of concrete.

In examining those tests described in the literature which have been made with a sufficient degree of accuracy it was found that the results obtained by means of this method of computing the load-bearing capacity in torsion agree very closely with the test results. The tests made by the Author also corroborate the reliability of the formulae derived from the theory of plasticity. The torsional tests made on T-beams serve as conclusive evidence for the theory of plasticity and against the theory of elasticity since it follows from the theory of elasticity that the stresses at the inner corners between the web and the flange become very large, and even infinite, if the corners are sharp, with the results that the load-bearing capacity computed from this theory is small, whereas the shearing stresses computed from the theory of plasticity are constant over the whole cross-section with the results that the load-bearing capacity computed from the latter theory is independent of the local concentrations of stresses

which are to be expected under elastic conditions.¹ The results of the tests on T-beams made by the Author as well as those described by Turner and Davies, see e. g. figs. 3 and 4, clearly confirm the applicability of the theory of plasticity.

Since the strength in pure tension is the deciding factor in determining the load-bearing capacity of members subjected to twisting moments, the Author has assembled in Part I some data on the tensile strength and on the relation between compressive and tensile strength. For defining both the tensile and the compressive strength, it is necessary to specify the dimensions and the curing conditions of the test specimens. In the case of tensile tests, special attention should be paid to the clear length of the specimens, which affects the results in a manner that can be determined by the methods of the calculus of probabilities. If the tensile strength is determined on prisms of square cross-section or on cylinders having a circular base, the clear length of the specimens being equal to 4 times the side of the square cross-section or the diameter of the base, and the compressive strength is measured on cubes with the edge equal to the side of the square cross-section of the prism; and if, furthermore, the least cross-sectional dimension is larger than 4 times the maximum size of coarse aggregate, and assuming, moreover, that the specimens used for the compressive and tensile tests are cured under equal conditions, the tendency manifested in the great majority of the test series mentioned in the literature is that the ratio of tensile stress to compressive strength of cubes decreases as the compressive strength of cubes increases. The same trend is indicated by the formula set up for cement mortar by Giertz-Hedström, viz.

$$\sigma_{tens.} = k \sqrt[3]{(\sigma_{cube.})^2}$$

which gives a value of k about 0,40 when applied to the tests dealt with in this paper. Both the application of this formula and the value of k shall be taken with all proper reserve in view of the fact only a small number of test results is available, and considering, moreover, that such factors as shrinkage, rate of loading, and quality of aggregate act differently on the tensile and the compressive strength in a manner which has not yet been elucidated.

Part II

Part II deals with the influence of normal pressure on the load-bearing capacity in torsion. The investigations carried out in this part are of fundamental importance to the study of simultaneous bending and torsion.

¹ A plain idea of the stress distribution computed from the theory of plasticity is conveyed by fig. 3 in the Appendix, in which the stress function whose maximum slope represents the shearing stress is plotted for T-beams of various sections.

Moreover, these investigations give an idea of the validity of the various theories of concrete failures in the case of combined stresses. The tests made by the Author confirm the hypothesis, according to which rupture occurs when the principal tensile stress σ_I becomes equal to the tensile strength of concrete provided that the principal compressive stress is at the same time lower than 50 to 60 per cent of the compressive strength of prisms. That the principal tensile stress decides the load at failure only for principal compressive stresses lower than 50 to 60 per cent of the compressive strength of prisms agrees with the observations that the compressive and tensile failures are completely different in character. The dimensions and the reinforcement of the test beams are shown in fig. 7, and the arrangement of the tests in fig. 8. The results of the tests are given in Tables 3 and 4, p 24 and p 28. The deviation of the test results from the mentioned hypothesis is shown in fig. 13. In accordance with the results obtained in Part I, τ_{M_v} in this figure is computed from the theory of plasticity. A similar relation is obtained when τ_{M_e} is computed from the theory of elasticity. The dash-dot curve in fig. 13 is calculated on the assumption that the rupture is determined by the maximum per cent elongation. Irrespective of the value of Poisson's ratio — provided that it is included within reasonable limits adapted to the actual conditions, this curve cannot be brought to agreement with the test results.

The appearance of the beams after failure is shown in figs. 11 and 12.

The demonstrated increase in the load-bearing capacity of members in torsion on account of the normal pressure is of direct practical importance, for instance, in the design of pre-stressed concrete structures.

Part III

Part III examines the influence of bending moments on the load-bearing capacity of members subjected to torsion.

If a beam in bending is at the same time exposed to torsion, the distribution of the torsional stresses is disturbed in the vicinity of the bending cracks. In order to elucidate the modus operandi in this case, the Author has carried out tests according to the following schedule which emerged in the course of the investigation.

A. Initial tests made on beams with excessively strong reinforcement for the special purpose of studying concrete failures.

B. Tests made on beams with a low and an ordinary ratio of reinforcement for the purpose of studying the failures of the bending reinforcement which is subjected to tension and shear in the case of simultaneous bending and torsion.

C. Photoelastic tests made for the purpose of obtaining a pattern of stress distribution in the beam with bending cracks.

The tests arrangements are illustrated in fig. 28. The dimensions and the reinforcement of the test beams are shown in figs. 26 and 27 for the test series A, in figs. 43 and 44 for the test series B, and in fig. 50 for the test series C. The results of the deformation measurements are summarized in figs. 37 to 41, 46, 47, 48, and 49. The crack development is shown in figs. 29 to 34 and 45. The values of the ultimate strength are given in Tables 6, 7, 11, and 12.

In the case of low stress in the reinforcement due to bending, the bending moments exert in general a favourable effect on the torsional strength. If the bending reinforcement is to be utilized, it shall be proportioned for a stress σ_v which is put equal to the permissible stress σ_p .

σ_v is computed from the formula

$$\sigma_p = \sigma_v = \sqrt{\left(\frac{M_b}{\rho \cdot f_s}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_v - \beta M_{v_o}}{\frac{1}{2} h f_s}\right)^2}$$

which gives

$$f_s = \frac{1}{\sigma_p} \sqrt{\left(\frac{M_b}{\rho}\right)^2 + 3 \left(\frac{M_v - \beta \cdot M_{v_o}}{\frac{1}{2} h}\right)^2}$$

where

M_b = Bending moment.

ρ = Inner arm of lever, i. e. distance from centre of compression to centre of tension in a reinforced concrete beam.

f_s = Area of the reinforcement.

M_v = Twisting moment.

M_{v_o} = Permissible twisting moment in those cases where the beam is not subjected to any bending moment.

h = Distance from the centre of tensile reinforcement to the edge in compression.

If no special torsional reinforcement is used, M_v shall not exceed M_{v_o} .

β is a coefficient whose magnitude depends on the shape of the beam section and the ratio of reinforcement μ . The smaller the depth of the beam h in comparison with the width b of the beam, and the smaller μ , the smaller will be that portion of M_{v_o} which can be taken by the part of the beam that does not crack in bending.

Appropriate values of β for beams of rectangular section, determined by means of the test results and calculations made in the same manner as in the case of the test beams, (see figs. 25 and 53) are given in Table 13,

p. . . .

If $M_v \leq \beta \cdot M_{v_o}$, or — which is the same — if τ in torsion due to M_v is $\leq \beta \cdot \tau_{permiss.}$, the twisting moment need not be taken into account in designing by dimensioning the bending reinforcement. If, for instance,

for $\frac{h}{b} = 2$, we have $\mu = 1,0$, and $\tau_{M_v} = 0,7 \cdot \tau_p$, the twisting moment does not require any increase in bending reinforcement.

In the case of T-beams with the flange in compression, the computation of a corresponding table for β becomes extremely complicated on account of the large number of variables. The bending reinforcement in these beams can be designed either by using the values applying to flat slabs ($\frac{h}{b} = 0$) in Table 13 or by proportioning the T-section for torsion without taking the flange into account, that is, by considering it as a beam of rectangular section and using Table 13 as a whole. The bending reinforcement in T-beams with the flange in tension is calculated in respect of torsion as in beams of rectangular section whose depth is equal to the depth of the T-beam, and whose width is equal to the thickness of the web of the T-beam.

Part IV.

Part IV deals with the load-bearing capacity in the case of combined simultaneous action of a shearing force and a twisting moment. A series of beams provided with excessively strong bending reinforcement was tested under an eccentric concentrated load applied in the middle of a beam on free supports, the eccentricity of the load on the several beams varying from 0, i. e. pure shear, to ∞ , i. e. pure torsion. The dimensions and the reinforcement of the test beams are shown in fig. 54, and the test arrangements are illustrated in figs. 55 and 56. The values of the ultimate strength are given in Table 14, and the appearance of the beams after failure is shown in fig. 57. The results of the tests show that the load at failure in the case of combined shear and torsion can be computed according to the working hypothesis in this investigation, viz. by putting the combined shearing and torsional stress τ equal to the tensile strength of concrete. In this case, τ due to shearing was computed as usual, taking the stage II as a point of departure, and τ due to torsion was calculated from the formulae of the theory of plasticity, see Table I in Appendix.

Part V.

Part V examines the case of torsional restraint in concrete structures, that is, the case where the ends of members in bending are restrained by members in torsion. Since the calculation of statically indeterminate structures on the basis of the theory of elasticity with the aid of moments of inertia of non-cracked members and values of the elasticity constants determined by pure compressive, tensile, or torsional tests, hardly can be assumed to give an idea of the actual load-bearing capacity of the structure, several authors have recommended in the literature to use

the method of adjustment (see foot-note on p. 87 (1)) for calculating statically indeterminate structures subjected to *bending*.

A necessary condition for the applicability of the method of adjustment is that the deformations of the most heavily stressed parts of the structure prior to failure shall be sufficiently large to permit complete utilization of the load-bearing capacity in the critical section of the structure. In the case of a continuous beam, this implies that the real flexural rigidity shall decrease before failure. An effective decrease in flexural rigidity takes place even before the appearance of the first bending crack, that is, in most cases already at the permissible load. Under such circumstances, the method of adjustment can provide greater safety against *detrimental* cracking than the calculations made on the basis of the theory of elasticity, in which the values of the flexural rigidity are computed from a constant value of the modulus of elasticity and from moments of inertia referred to the gross cross-sectional area, without taking account of the reinforcement.

In the case of torsional restraint, the range of application of the method of adjustment should be restricted in such a manner that the moments used in design do not deviate by more than 50 per cent from the values that are obtained by calculating the structure on the basis of a ratio of flexural rigidity to torsional rigidity, which is probable at permissible load. The values of the ratio $\frac{G}{E}$ which should be used in such cases for rectangular beams, estimated by the aid of the tests dealt with in Part III, are given in Table 15 which is based on the assumption that the moments of inertia are computed from the cross-section without taking account of the reinforcement. If the main beam is of T section, and the flange is thick, that is, $\gtrsim 0,6$ times the web, the values given in the table must be increased by about 20 per cent.

In the case of primary beams having excess torsional strength, the Author did not consider it necessary to check the applicability of the method of adjustment for the reason that the deformations of the secondary beam prior to failure certainly are large enough for the utilization of the primary beam in torsion.

In the tests made on secondary beams of excess bending strength it was found that the method of adjustment can be regarded as a reliable basis of design. It is true that two frames only were tested, and no other loads except static were applied, but the measurements showed that the most important condition for the applicability of the method of adjustment was satisfied, viz. that the torsional failure is tough when the beam in torsion is supported by a secondary structure in bending. The torsional deformations were at failure developed to that degree which was necessary

for the utilization of the structure — as regards both the capacity of the secondary beam to take bending moments and the capacity of the primary beam to withstand twisting moments. The torsional deformations at failure were 6 and 3 times respectively as large as those of the control test beams in torsion.

The dimensions and the reinforcement of the test frames are shown in fig. 59, and the arrangement of the tests is illustrated in fig. 60. The main results of the tests are given in Table 16. The relation between the load P and the twisting moment M_v for the frame A , computed from the results of the measurements, is shown in fig. 65. The relation between the load and the measured angle of torsion per unit length for the main beams in torsion in the frames A and B is shown in figs. 66 a and 70 respectively. The relation between the twisting moment and the angle of torsion per unit length, observed in the torsional control tests is shown in fig. 66 b. The cracks developed in the test specimens are illustrated in figs. 67, 68, and 69, 71, 72 and 73.

Part VI.

Part VI deals with a case of torsional restraint which is often met with in practice, namely, a bridge deck slab restrained at the longer sides by the torsional rigidity of the main beams.

In contradistinction to the formerly advanced theories, regard is paid in this case to the complete slab effect of the bridge deck slab, with the result that the quantities used in design, that is, in the first place, the twisting moments acting on the main beams, are substantially reduced. To begin with, a study is made of the case in which the slab is simply supported at the short sides. The results of this study are given in fig. 75 a to d. An estimate is then made of the influence of the restraint at the shorter sides of the slab, and, finally, a method is evolved for the calculation of loads uniformly distributed along a straight line.

In conclusion, an account is given of a designing procedure based on the modified method of adjustment whose applicability was confirmed in Part V.

Appendix.

The Appendix develops the formulae for the torsional rigidity and shearing stresses given in Table 1 in so far as these formulae have not formerly been published in the literature.

**MEDDELANDEN FRÅN
STATENS KOMMITTÉ FÖR BYGGNADSFORSKNING**

1. *Tengvik, Nils*. Byggnadsforskningen i Sverige. En sammanställning. 1945.
Kr. 3:—.
2. *Friberger, Erik*. Mekaniserad bostadsproduktion. En- och tvåvåningshus.
1945. Kr. 2:—.
3. *Nylander, Henrik*. Vridning och vridningsinspänning vid betongkonstruk-
tioner. Torsion and torsional restraint by concrete structures. 1945.
Kr. 5:—.

Pris kr. 5:— exkl. oms.

Distribueras av
AB Tidskriften Byggmästaren
Stockholm

