



Det här verket har digitaliserats vid Göteborgs universitetsbibliotek och är fritt att använda. Alla tryckta texter är OCR-tolkade till maskinläsbar text. Det betyder att du kan söka och kopiera texten från dokumentet. Vissa äldre dokument med dåligt tryck kan vara svåra att OCR-tolka korrekt vilket medför att den OCR-tolkade texten kan innehålla fel och därför bör man visuellt jämföra med verkets bilder för att avgöra vad som är riktigt.

This work has been digitized at Gothenburg University Library and is free to use. All printed texts have been OCR-processed and converted to machine readable text. This means that you can search and copy text from the document. Some early printed books are hard to OCR-process correctly and the text may contain errors, so one should always visually compare it with the images to determine what is correct.



**Rapport**

**R75:1985**

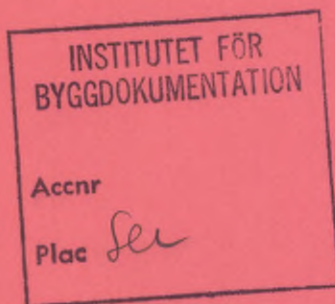
# **Värmeförluster till mark**

**Grundläggning av typen platta på mark**

**Johan Claesson**

**Carl-Eric Hagentoft**

R  
A/W



**Byggeforskningsrådet**

R75:1985

VÄRMEFÖRLUSTER TILL MARK

Grundläggning av typen platta på mark

Johan Claesson  
Carl-Eric Hagentoft

Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 811829-2  
från Statens råd för byggnadsforskning till Lunds Tekniska  
Högskola, Institutionen för byggnadsteknik, Lund.

I Byggforskningsrådets rapportserie redovisar forskaren sitt anslagsprojekt. Publiceringen innebär inte att rådet tagit ställning till åsikter, slutsatser och resultat.

R75:1985

ISBN 91-540-4400-6  
Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

Liber Tryck AB Stockholm 1985

## FÖRORD

I denna rapport behandlas värmeförlusten till mark för en byggnad med grundläggning av typen platta på mark. Byggnader med torpargrund eller källare skall behandlas i en planerad andra del.

De analytiska lösningarna, där så kallad Wiener-Hopf-teknik användes, har utförts av universitetslektor Nils-Olof Wallin. Professor Gunnar Anderlind och civilingenjör Bengt Eftring har deltagit i uppläggningsarna av studien och bidragit med synpunkter under arbetets gång.

Projektet har finansierats av Statens råd för byggnadsforskning (projektnummer 81 189-2).



## INNEHÅLL

1	INTRODUKTION .....	1
2	SUPERPOSITION. SKALNING .....	10
2.1	Superponeringsprincip .....	10
2.2	Randvillkor mot byggnad och markyta .....	17
2.3	Skalning för stationär delprocess .....	20
2.4	Skalning för periodisk delprocess .....	25
2.4.1	Komplex notation .....	26
2.4.2	Endimensionell lösning. Inträngningsdjup $d_0$ .....	29
2.4.3	Skalningsregler .....	31
2.4.4	Skalning för plant tvärsnitt .....	33
2.5	Skalning för temperatursteg hos utetemperaturen .....	35
2.6	Skalning för uppbyggnad av värmekudde .....	39
3	STATIONÄR VÄRMEFÖRLUST .....	42
3.1	Värmeförlustfaktor $h_s$ för rektangulär platta .....	43
3.2	Approximation från teori för optimal isolering .....	45
3.3	Cirkelbågsapproximation .....	48
3.3.1	Kantområde för långsträckt platta .....	48
3.3.2	Tvärsnitt av långsträckt platta .....	51
3.4	Tvärsnitt av långsträckt platta .....	53
3.4.1	Värmeförlustfaktorn $h_s(d/B)$ .....	53
3.4.2	Approximativa formler .....	54
3.4.3	Temperaturprofiler under plattan .....	55
3.5	Approximativ formel för värmeförlustfaktorn för rektangulär platta .....	57
3.6	Värmeförlustens beroende av plattans form .....	58
3.6.1	Värmeförlustfaktor vid konstant area .....	58
3.6.2	Värmeförlustfaktor för cirkulär platta .....	60
3.6.3	Värmeförlust för cirkel kontra kvadrat .....	61
3.6.4	Värmeförlust för några mer oregelbunda former .....	62
4	EFFEKT AV OLIKA KANTISOLERINGAR .....	66
4.1	Platta med extra kantisolering .....	66
4.1.1	Skalning vid extra kantisolering .....	67
4.1.2	Allmän kantvärmeförlustfaktor .....	67

4.2	Kantvärmeförlustfaktor $h_s^e$ som gränsvärde för stora plattor .....	68
4.2.1	Tvärnsnitt av långsträckt platta .....	68
4.2.2	Rektangulär platta .....	70
4.3	Numeriskt beräknade värden på $h_s^e$ .....	73
4.3.1	Inre kantisolering .....	73
4.3.2	Yttre kantisolering .....	74
4.4	Cirkelbågsapproximationer .....	75
4.4.1	Cirkelbågsapproximation för $h_s^e$ .....	75
4.4.2	Cirkelbågsapproximation för $h_s^e$ för kraftig extraisolering .....	77
4.5	Jämförelse mellan inre, yttre och vertikal extra kantisolering .....	78
4.6	Några exempel och analyser .....	79
4.6.1	Variation av kantisoleringen .....	79
4.6.2	Optimal fördelning av värmeisoleringen mellan kantområde och inre område .....	81
5	PERIODISK VÄRMEFÖRLUST .....	84
5.1	Periodisk temperatur under plattan .....	85
5.2	Skalning och kantapproximation för platta på mark .....	90
5.3	Värmeförlustfaktor $h_p$ för kant .....	91
5.4	Allmän värmeförlustformel. Superponering .....	99
5.5	Några exempel och analyser .....	103
5.5.1	Variation av periodtiden $t_0$ .....	103
5.5.2	Variation av markdata .....	104
5.5.3	Värmemotstånd vid markytan .....	105
6	STEGÄNDRING AV UTETEMPERATUREN .....	109
6.1	Temperaturförlopp i marken .....	109
6.1.1	Några temperaturprofiler .....	110
6.1.2	Maximal temperaturstörning in under plattans kant ..	112
6.2	Värmeförlust för temperatursteg vid kant .....	121
6.2.1	Värmeförlustfaktor $h_t^0$ .....	121
6.2.2	Akkumulerad värmeförlust $e_t^0$ .....	123
6.2.3	Värmemotstånd vid markytan .....	125
6.3	Värmeförlust för platta på mark .....	127
6.3.1	Skalning och kantapproximation .....	127
6.3.2	Approximation för korta och långa tider .....	130



6.4	Sträckvis konstant utetemperatur.....	132
6.4.1	Allmän värmeförlustformel enligt kant- approximation .....	133
6.4.2	Köldknäpp. Ackumulerad värmeförlust .....	137
7	UPPBYGGNAD AV VÄRMEKUDDE .....	142
7.1	Temperaturförlopp i marken .....	143
7.2	Värmeförlust för rektangulär platta .....	144
7.3	Värmeförlust under en första tid .....	151
7.3.1	Endimensionell approximation .....	151
7.3.2	Kantvärmeförlust .....	152
8	VARIABEL INNETEMPERATUR .....	158
8.1	Periodiskt varierande innetemperatur .....	158
8.1.1	Endimensionell approximation .....	158
8.1.2	Kantvärmeförlust .....	160
8.2	Stegändring av innetemperaturen .....	166
9	BERÄKNING AV ENERGI- OCH EFFEKTBEHOV. SAMMANFATTNING .....	172
9.1	Dimensionerande utetemperaturvariation .....	172
9.2	Värmeförlust under eldningssäsongen .....	173
9.3	Effektmaximum under vintern .....	174
9.4	Kommentarer. Komplikationer .....	176
10	EXEMPEL OCH JÄMFÖRELSER .....	178
10.1	Total värmeförlust för grundfallen A, B och C.....	178
10.2	Jämförelse med Svensk Byggnorm .....	182
10.2.1	Momentan värmeförlust .....	182
10.2.2	Stationär värmeförlust .....	184
10.2.3	Ackumulerad värmeförlust under eldningssäsongen .....	186
10.2.4	Maximal värmeförlust .....	187
11	EFFEKT AV TJÄLE OCH SNÖ .....	189
11.1	Tjäle .....	190
11.2	Snö .....	192
	BETECKNINGAR .....	197
	REFERENSER .....	201
	Appendix 1. Ekvationer, superponering och skalning för rektangulär platta på mark .....	202



## 1 INTRODUKTION

Byggnader och andra uppvärmda konstruktioner i kontakt med marken får ett värmefflöde och härmed en värmeförlust till marken. Det är komplicerat att beräkna denna värmeförlust, eftersom den beror på det tredimensionella, tidsvariabla temperaturförloppet som man får i marken under och runt byggnaden.

I denna studie analyseras och anges metoder för att beräkna dessa värmeförluster i olika situationer. Värmeförlusterna erhålls med hjälp av formler, diagram och tabeller.

Genom att uppdelat det totala temperaturförloppet i marken i enklare delprocesser, vilka behandlas och analyseras var för sig, får man en bättre förståelse av temperaturprocesserna. Vid analys av delprocesserna utnyttjas både numeriska metoder och analytiska lösningar. Genom systematisk skalning och behandling i dimensionslös form kan värmeförlustformlerna ges i en enkel och generell form.

Temperaturförloppen analyseras med hjälp av tre mer renodlade fall: Stationärt förlopp, periodiskt förlopp och stegändring. Det verkliga temperaturförloppet i marken och härmed värmeförlusterna erhålles genom en överlagring - superponering - av lämpligt valda, renodlade fall.

Den stationära, dvs tidsberoende, delen ger temperaturförloppet då årsmedeltemperaturen råder vid markytan utanför byggnaden. Överlagrat på detta har man en periodiskt varierande del vilken styrs eller drivs av att temperaturen vid markytan varierar runt sitt årsmedelvärde. Den viktigaste temperaturkomponenten är den rena cosinus/sinusvariationen med periodtiden ett år. På denna grundkomponent kan andra bidrag med periodtider från några timmar upp till ett halvår överlagras.

De förlopp som drivs av utetemperaturens variation runt årsmedelvärdet kan också analyseras med så kallade stegsvarslösningar. Utgångspunkten är det temperaturförlopp som man får i marken vid och under byggnaden vid en stegändring av temperaturen vid markytan. Härigenom kan t ex det tidsvariabla värmeutflödet vid en köldknäpp beräknas på ett förhållandevis enkelt sätt.

Under de första åren byggs en värmekudde upp under byggnaden. Denna process drivs av en stegändring av temperaturen vid byggnadens golv från ostörd marktemperatur till innetemperaturen.

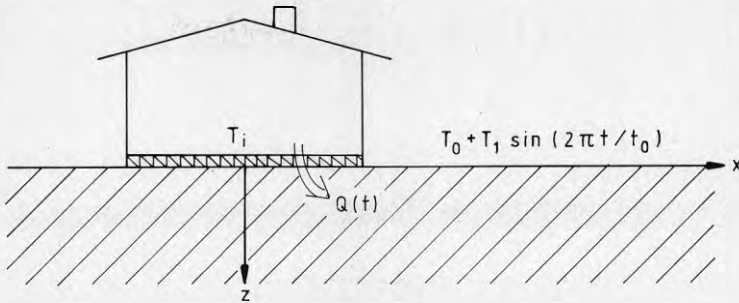
Många härledningar av analytiska lösningar, skalningsregler m m redovisas ej i rapporten. I appendix 1 behandlas dock skalningsregler för platta på mark relativt detaljerat. För övrigt ges härledningarna i andra skrifter.

I kapitel 2 behandlas superponering av olika temperaturförlopp. Vidare diskuteras skalningsregler och dimensionsanalys med tonvikt på skalning av värmeförluster. I kapitel 3 behandlas den stationära värmeförlusten för en rektangulär platta på mark med jämntjock värmeisolering. Även andra former på plattan behandlas. Effekten av extra värmeisolering längs plattans kant studeras i kapitel 4. Temperaturförloppet och värmeförlusten för periodiskt varierande utetemperatur behandlas i kapitel 5. Värmeförlusten vid en stegändring av utetemperaturen behandlas i kapitel 6. Superponering av stegändringar och speciellt en köldknäpp behandlas också. Kapitel 7 behandlar uppbyggnaden av värmekudden under huset, medan kapitel 8 behandlar värmeförluster beroende på variation av innetemperaturen. En sammanfattning av de olika formlerna för värmeförlusten ges i kapitel 9. I kapitel 10 ges några exempel, där formlerna tillämpas. Slutligen studeras i kapitel 11 effekten av tjäle och snö.

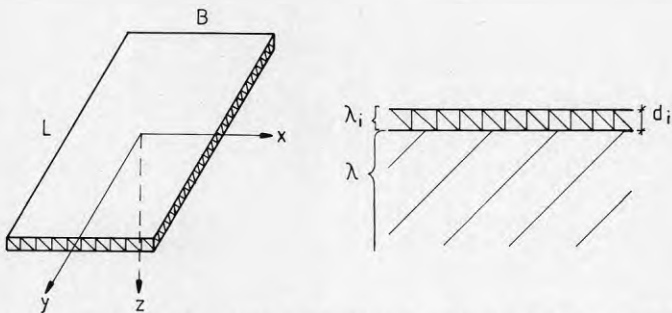
### Introducerande exempel

De fullständiga metoderna för hur värmeförlusterna skall beräknas anges i kapitel 9. För att ge läsaren en överblick redovisas redan här ett komplett exempel. Figurerna 1.1 och 1.2 visar en byggnad med grundläggning av typen platta på mark. Den rektangulära plattan har bredden  $B$  och längden  $L$ . Värmeisoleringen är jämntjock med tjockleken  $d_i$  och värmeledningsförmågan  $\lambda_i$  ( $W/mK$ ). Markens värmeledningsförmåga är  $\lambda$  och dess värmediffusivitet  $a$  ( $m^2/s$ ). Ovanför värmeisoleringen hålls innetemperaturen  $T_i$ . Vid markytan råder den renodlade temperaturen  $T_0 + T_1 \cdot \sin(2\pi t/t_0)$ . Värmeövergångstalet mellan markyta och luft betecknas  $\alpha$  ( $W/m^2K$ ). Periodtiden  $t_0$  är ett år, medan  $T_0$  och  $T_1$  är utetemperaturens årsmedelvärde respektive amplitud. Effekten av en överlagrad köldknäpp behandlas nedan.

Ingen hänsyn tages till tjälbildning och snö. Effekten av dessa komplikationer studeras i kapitel 11.



Figur 1.1 Värmeförlust  $Q(t)$  (W) för hus av typen platta på mark. Stationär och periodisk del.



Figur 1.2 Rektangulär platta på mark med jämntjock värmeisolering ( $d_i$ ,  $\lambda_i$ ).

Värmeförlusten från byggnaden betecknas  $Q(t)$  (W). Den innehåller enligt avsnitt 2.1 en stationär del  $Q_s$  och en periodisk del  $Q_p(t)$  enligt formel 2.1.6:

$$Q(t) = Q_s + Q_p(t) \quad (1.1)$$

Den stationära värmeförlusten ges av formel 3.1.1:

$$Q_s = \lambda(T_i - T_0)L \cdot h_s(L/B, d/B) \quad (1.2)$$

Den dimensionslösa värmeförlustfaktorn  $h_s$  ges av figur 3.1.1. Längden  $d$  är ett mått på värmeisoleringen storlek enligt formel 2.2.4:

$$d = \frac{\lambda d_i}{\lambda_i} \quad (1.3)$$

Den periodiska komponenten av värmeförlusten ges av formel 5.4.1:

$$Q_p = -\lambda T_1 (2L + 2B) \cdot \left| h_p^0 \right| \sin[2\pi(t/t_0 - \phi_p^0)] \quad (1.4)$$

Här är  $\left| h_p^0 \right|$  och  $\phi_p^0$  funktioner av  $d/d_0$ , där  $d_0$  är den periodiska svängningens inträngningsdjup ner i marken (2.4.18):

$$d_0 = \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} \quad (1.5)$$

Dessa två funktioner ges av figur 5.3.3. I slutet av detta kapitel ges data för tre grundexempel, vilka kommer att användas genomgående i de följande kapitlen.

Exempel 1.1 Data enligt (1.10A) för exempel A användes.

Detta ger:

$$\lambda(T_i - T_o)L = 270 \text{ W} \quad d = 3.0 \text{ m}$$

Figur 3.1.1 ger  $h_s$ :

$$h_s(12/8, 3/8) = h_s(1.5, 0.375) \approx 1.58$$

$$Q_s = 270 \cdot 1.58 = 427 \text{ W}$$

För den periodiska delen fås:

$$(2L + 2B)\lambda T_1 = 600 \text{ W}$$

$$d_0 = 2.74 \text{ m} \quad d/d_0 = 1.095$$

Figur 5.3.3 ger:

$$\left| h_p^0 \right| \approx 0.247 \quad \phi_p^0 \approx 0.093$$

$$Q_p(t) = -148 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.093)) \text{ (W)}$$

Den totala värmeförlusten vid tiden  $t$  blir nu:

$$Q(t) = 427 - 148 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.093)) \text{ (W)} \quad (1.6)$$

Det maximala utflödet inträffar vid tiden

$t = 3t_0/4 + 0.093 t_0$ . Flödet ligger fördröjt med tiden:

$$0.093 \cdot t_0 = 0.093 \text{ år} = 34 \text{ dagar.}$$

Maximal värmeförlust,  $427 + 148 = 575 \text{ W}$ , inträffar en månad efter lägsta vintertemperatur. Mitt i sommaren är lägsta värmefflödet  $427 - 148 = 279 \text{ W}$ . Utetemperatur och värmefflöde visas i figur 1.3.

Antag nu att man får en köldknäpp mitt i vintern. Utetemperaturen representeras av ovan antagna stationära och periodiska del samt av en överlagrad temperaturpuls. Temperaturpulsen har storleken  $-T_2$  °C. Den startar vid tiden  $t_1$  och varar under en tid  $t_2$ . I figur 1.3 visas utetemperaturen. Härvid ges temperaturpulsen av den streckade kurvan.

Före tiden  $t_1$  ges värmefflödet av uttrycken ovan. Efter denna tid får man ett bidrag  $Q_t(t)$  (temperatursteg) från den kalla temperaturpulsen:

$$Q(t) = Q_s + Q_p(t) + Q_t(t) \quad (t > t_1) \quad (1.7)$$

Under den tid då pulsen varar ges  $Q_t(t)$  enligt (6.3.3):

$$Q_t(t) = (2L + 2B) \cdot \lambda T_2 \cdot h_t^0(\tau) \quad (1.8)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{a(t-t_1)}}{d} \quad (0 < t - t_1 < t_2)$$

Funktionen  $h_t^0(\tau)$  ges av figur 6.2.2 och tabell 6.2.1. Efter pulsen har man ett avklingningsförlopp enligt 6.4.6.

$$Q_t(t) = (2L + 2B) \cdot \lambda T_2 \cdot \left\{ h_t^0\left(\sqrt{a(t - t_1)}/d\right) - h_t^0\left(\sqrt{a(t - t_1 - t_2)}/d\right) \right\} \\ (t > t_1 + t_2) \quad (1.9)$$

Exempel 1.2 Data enligt (1.10A) för exempel A användes.

Detta ger:

$$(2L + 2B) \cdot \lambda T_2 = 900 \text{ W}$$

$$\frac{d^2}{a} = \frac{3 \cdot 0^2}{0.75 \cdot 10^{-6}} \text{ s} = 139 \text{ dagar}$$

För t ex  $t - t_1 = 7$  dagar erhålles

$$\tau = \sqrt{(t - t_1)/(d^2/a)} = \sqrt{7/139} = 0.224$$

Figur 6.2.2 ger:

$$h_t^0(0.224) \approx 0.112$$

$$Q_t(t) = 101 \text{ W}$$

För  $t - t_1 = 14$  dagar fås:

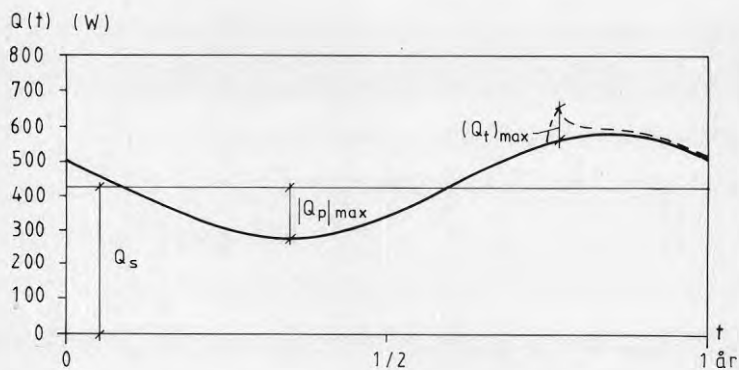
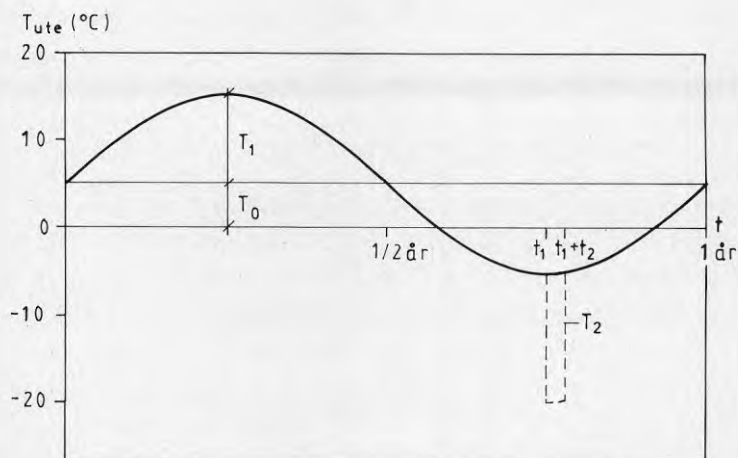
$$Q_t(t) = 900 \cdot \left\{ h_t^0\left(\sqrt{14/138.9}\right) - h_t^0\left(\sqrt{7/138.9}\right) \right\} = \\ = 900 \cdot \left\{ 0.152 - 0.112 \right\} = 36 \text{ W}$$

Nedanstående tabell ger flödet  $Q_t(t)$  för olika tider:

$t - t_1$ (dagar)	0	$\frac{1}{24}$	1	2	7	8	14	50
$Q_t(t)$ (W)	0	9	41	57	101	66	36	13



Värmeflödet  $Q_t(t)$  visas av den streckade linjen i figur 1.3.



Figur 1.3 Utetemperatur och värmeförlust för exempel 1.1. Streckad kurva representerar en köldknäpp enligt exempel 1.2.

### Data för grundexempel A, B och C

För kommande referens anges här data för tre grundexempel. Dessa tre fall kommer att användas genomgående i de följande kapitlen.

Temperaturen  $T_i$  i byggnaden ovanför värmeisoleringen är  $20^{\circ}\text{C}$ . Årsmedelvärdet  $T_o$  för utetemperaturen är  $5^{\circ}\text{C}$ . Detta är ett rimligt medelvärde för Sverige. Marken antas homogen med värmeledningsförmågan  $\lambda = 1.5 \text{ W/mK}$  och temperaturledningstalet  $a = 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Värmeövergångsmotståndet vid markytan försummas ( $\alpha = \infty \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $d_1 = 0$ ). Värmeisoleringens värmeledningsförmåga  $\lambda_i$  är  $0.04 \text{ W/mK}$ . För exempel A och B antas en rektangulär platta med längden 12 m och bredden 8 m. Värmeisoleringens tjocklek är 8 respektive 16 cm. Exempel C gäller en större platta med längden 30 m och bredden 15 m samt med 8 cm värmeisolering. För de tre fallen antas en periodisk temperatur med amplituden  $T_1 = 10^{\circ}\text{C}$  och periodtiden  $t_o = 1$  år. Vidare har man en eventuell köldknäpp som startar mitt i vintern ( $t_1 = 3 t_o/4$ ) och varar en vecka ( $t_2 = 1$  vecka). Köldknäppen har storleken  $15^{\circ}\text{C}$ . Utetemperaturen med stationär del, periodisk del och köldknäpp visas i den övre bilden i figur 1.3.

Detta ger följande data för exempel A, B och C:

$$\begin{aligned} T_i &= 20^{\circ}\text{C} & T_o &= 5^{\circ}\text{C} \\ \lambda &= 1.5 \text{ W/mK} & a &= 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & (1.10) \\ d_1 &= 0 \text{ m } (\alpha = \infty) & \lambda_i &= 0.04 \text{ W/mK} \end{aligned}$$

Exempel A:

$$L = 12 \text{ m} \quad B = 8 \text{ m} \quad d_i = 0.08 \text{ m} \quad (1.10A)$$

Exempel B:

$$L = 12 \text{ m} \quad B = 8 \text{ m} \quad d_i = 0.16 \text{ m} \quad (1.10B)$$

Exempel C:

$$L = 30 \text{ m} \quad B = 15 \text{ m} \quad d_i = 0.08 \text{ m} \quad (1.10C)$$

Periodisk utetemperatur:

$$T_1 = 10^{\circ}\text{C} \quad t_0 = 1 \text{ år} \quad (1.10)$$

Köldknäpp:

$$T_2 = 15^{\circ}\text{C} \quad t_2 = 1 \text{ vecka} \quad (1.10)$$

$$t_1 = 3 t_0/4$$

## 2 SUPERPOSITION. SKALNING

### 2.1 Superponeringsprincip

Temperaturförloppen i marken under och kring en byggnad är tämligen komplicerade, eftersom de allmänt är tidsvariabla och tredimensionella. Ett värdefullt hjälpmedel vid analys av dessa förlopp är superponeringsprincipen för linjära värmeledningsförlopp. Det totala temperaturförloppet uppdelas härvid i enkla delprocesser. För var och en av delprocesserna kan värmeförlusten anges. Med hjälp av skalningsregler enligt avsnitt 2.3-2.6 uttryckes dessa förluster i sin mest kompakta form. Den totala värmeförlusten erhålles genom superposition som en summa av de olika delkomponenterna.

Superponeringen kräver att värmeledningsprocessen är linjär. Detta innebär att om två temperaturförlopp var för sig uppfyller värmeledningsekvationen så uppfyller också summan värmeledningsekvationen. Kraven för att temperaturförlopp i fasta material skall vara linjära så att superposition kan användas är att termiska parametrar ( $\lambda$ ,  $\rho c$ ) ej beror på temperaturen och att randvillkoren ej är beroende av temperaturnivån.

Vid värmeledning i mark kan värmeledningsförmågans och värmekapacitetens temperaturberoende försummas utom vid tjälbildning. Superponeringsprincipen kan därför användas i torra jordar där tjälbildningen är försumbar. I jordar med hög vattenhalt kan superposition användas om temperaturen hela tiden ligger över  $0^{\circ}\text{C}$ .

I denna studie försummas eventuell tjälbildning. Härigenom kan superposition utnyttjas. Tjälen inverkan på värmeförlusterna behandlas i avsnitt 11.1. Man finner att tjälen ökar värmeförlusterna med några procent.

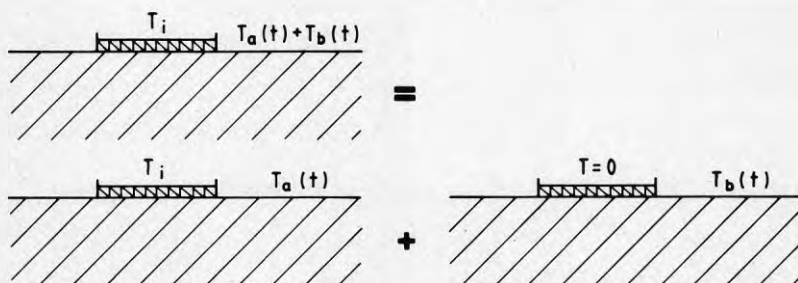
Temperaturen i byggnaden ovanför värmeisoleringen mot marken är väsentligen konstant. Denna temperatur skall betecknas  $T_i$  (innetemperatur). Normalt ligger  $T_i$  runt  $20^{\circ}\text{C}$ . I kapitel 8 behandlas fall där innetemperaturen varierar med tiden.

Vid den fria markytan utanför huset har man ett värmeövergångstal  $\alpha$  ( $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ ) (eller ett värmemotstånd  $1/\alpha$ ) mellan markyta och luft.

Detta värmeövergångstal beror bl a på vindförhållanden och vegetation. I denna studie antas att  $\alpha$  är konstant. I den fria luften har man en given tidsvariabel temperatur. I slutet på nästa avsnitt visas att värmemotståndet vid markytan ofta kan försummas i de här aktuella tillämpningarna. Som randvillkor vid markytan har man då den givna lufttemperaturen.

En komplikation är eventuell snö. Värmemotståndet mellan markytan under snön och luften kan ej försummas. Normalt bortses dock från snö i denna studie. Värmeförlusterna blir härigenom större än om man tagit hänsyn till snön, eftersom denna verkar värmeisolerande.

Figur 2.1.1 illustrerar superponeringsprincipen. I byggnaden ovanför värmeisoleringen råder temperaturen  $T_i$ . Vid markytan utanför huset råder en tidsvariabel temperatur, vilken uppdelas i två delar,  $T_a(t)$  och  $T_b(t)$ . Det totala temperaturförloppet ges som en summa av två delförlopp. Det första förloppet har temperaturen  $T_i$  innanför värmeisoleringen och temperaturen  $T_a(t)$  vid markytan. Det andra förloppet har då temperaturen noll i huset innanför värmeisoleringen och temperaturen  $T_b(t)$  vid markytan.



Figur 2.1.1 Superponering, där temperaturen vid markytan uppdelas i två komponenter. Innetemperaturen  $T_i$  hänförs till den första komponenten.

Låt  $T^a(x,y,z,t)$  och  $T^b(x,y,z,t)$  vara lösningarna för temperaturförloppen enligt de två undre figurerna i figur 2.1.1. Den totala temperaturen för problemet enligt den övre figuren ges av summan:

$$T^{\text{tot}}(x,y,z,t) = T^a(x,y,z,t) + T^b(x,y,z,t) \quad (2.1.1)$$

Värmeflödet från byggnaden till marken erhålles genom att addera värmeflödet  $Q^a(t)$  och  $Q^b(t)$  för de två delprocesserna:

$$Q^{\text{tot}}(t) = Q^a(t) + Q^b(t) \quad (2.1.2)$$

I vissa fall har man ett begynnelsevillkor, där temperaturen i markytan vid starttiden  $t = 0$  är given. Vid superponeringen skall då summan av delkomponenterna vara lika med den givna begynnelsetemperaturen vid  $t = 0$ . I exemplet ovan kan  $t$  ex begynnelsetemperaturen hänföras till temperaturförloppet  $T^a(x,y,z,t)$ . Den andra delen  $T^b(x,y,z,t)$  skall då starta med noll som begynnelsetemperatur.

Temperaturförloppet i marken styrs av lufttemperaturen  $T_{\text{ute}}$  (och av innetemperaturen  $T_i$ ). Ett viktigt fall är att anta att lufttemperaturen varierar periodiskt under året. Man kan då utveckla  $T_{\text{ute}}(t)$  i en Fourierserie med periodtiden  $t_0 = 1$  år:

$$T_{\text{ute}}(t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \sin(2\pi n t / t_0 + f_n) \quad (2.1.3)$$

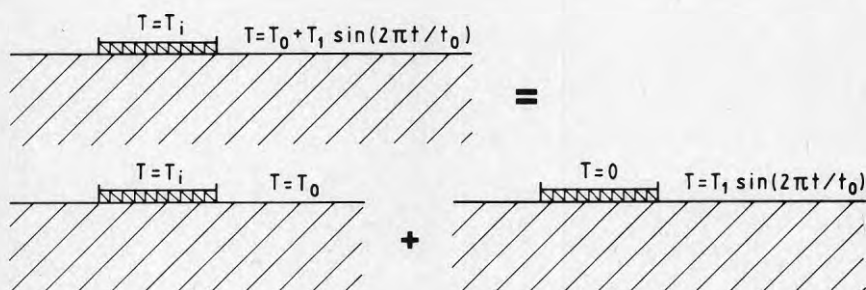
Här är  $T_0$  årsmedeltemperaturen i luften, medan  $T_n$  är amplituden hos den  $n$ :te komponenten. Den  $n$ :te komponenten har periodtiden  $t_0/n$ . Dess fasläge ges av  $f_n$ .

Ofta utnyttjas bara första Fourierkomponenten. Lufttemperaturen ges då av:

$$T_{\text{ute}}(t) = T_0 + T_1 \cdot \sin(2\pi t / t_0) \quad (2.1.4)$$

Fasen  $f_1$  har här satts till noll. Temperaturförloppet i marken kan i detta fall uppdelas i en stationär (tidsberoende) del och en periodisk del. Den periodiska delen innehåller en ren sinuskomponent med

en periodtid  $t_0$ . Denna uppdelning i stationär och periodisk del illustreras i figur 2.1.2.



Figur 2.1.2 Uppdelning av ett temperaturförlopp i en stationär och en periodisk del.

Låt  $T_s(x,y,z)$  vara den stationära temperaturfördelningen i marken för problemet enligt den vänstra, nedre figuren. Förloppet styrs av temperaturen  $T_i$  ovanför isoleringen och av  $T_0$  vid markytan. Den periodiska delen  $T_p(x,y,z,t)$  enligt höger, nedre figur styrs av sinusvariationen vid markytan. För denna del är temperaturen noll ovanför värmeisoleringen eftersom man ej har någon sinuskomponent där. Det totala temperaturförloppet i marken enligt den övre figuren ges som summan av stationär och periodisk del:

$$T(x,y,z,t) = T_s(x,y,z) + T_p(x,y,z,t) \quad (2.1.5)$$

Det totala värmeutflödet från byggnaden,  $Q(t)$  (W), får en stationär och en periodisk komponent:

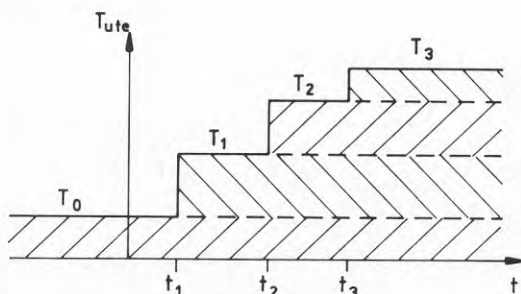
$$Q(t) = Q_s + Q_p(t) \quad (2.1.6)$$

Om så erfordras kan flera periodiska komponenter överlagras.

Utelufttemperaturen har ovan representerats av ett medelvärde  $T_0$  och olika sinuskomponenter. En annan representation som ofta är praktisk är att anta att lufttemperaturen är sträckvis konstant:

$$T_{ute}(t) = \begin{cases} T_0 & t < t_1 \\ T_1 & t_1 < t < t_2 \\ T_2 & t_2 < t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ T_n & t_n < t < t_{n+1} \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (2.1.7)$$

Figur 2.1.3 visar ett exempel med tre steg.



Figur 2.1.3 Exempel på sträckvis konstant utelufttemperatur.

En sträckvis konstant temperatur enligt (2.1.7) kan ses som en summa, där ett rent steg  $H(t)$  användes. Ett temperatursteg  $H(t)$  definieras av:

$$H(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Temperaturen enligt exemplet i figur 2.1.3 ges då av fyra termer:

$$T_{ute}(t) = T_0 + (T_1 - T_0)H(t - t_1) + (T_2 - T_1)H(t - t_2) + (T_3 - T_2)H(t - t_3) \quad (2.1.9)$$



I det allmänna fallet enligt (2.1.7) får man en summa. Under tiden mellan steg  $n$  och steg  $n+1$  måste man ta med  $n$  termer i summan:

$$T_{\text{ute}}(t) = T_0 + \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1})H(t - t_j) \quad (2.1.10)$$

$$(t < t_{n+1})$$

Temperaturförloppet i marken med en lufttemperatur enligt (2.1.10) kan genom superposition ses som en stationär del och  $n$  stycken stegsvar. Den stationära delen har temperaturen  $T_j$  ovanför isoleringen och temperaturen  $T_0$  vid markytan såsom den nedre, vänstra bilden i figur 2.1.2. De  $n$  stycken stegsvaren är alla av samma typ. De startar dock vid olika tidpunkter  $t_j$  och har olika storlek  $T_j - T_{j-1}$ . Den fundamentala processen är det transienta temperaturförlopp som man får i marken vid en stegändring  $H(t)$  av lufttemperaturen. För denna del skall temperaturen i byggnaden ovanför isoleringen vara noll. Processen illustreras i figur 2.1.4. Det bör noteras att temperaturen i marken är noll överallt för  $t < 0$ .



Figur 2.1.4 Temperaturförlopp i marken för ett temperatursteg vid markytan.

I det följande skall temperaturförloppet för ett temperatursteg hos lufttemperaturen beräknas analytiskt eller numeriskt i olika fall. Genom superposition kan då förloppet och i synnerhet värmeförlusten anges för en godtycklig, sträckvis konstant lufttemperatur.

Lufttemperaturen kan representeras av sinuskomponenter eller sträckvis konstanta värden. Man kan givetvis också blanda båda typerna. Ett exempel ges i figur 1.3. Lufttemperaturen ges av ett medelvärde  $T_0$  och en sinussvängning under året med amplituden  $T_1$ . På detta har en köldknäpp överlagrats under den kallaste tiden ( $t_1 < t < t_1 + t_2$ ).

Köldknäppen ges av två temperatursteg:

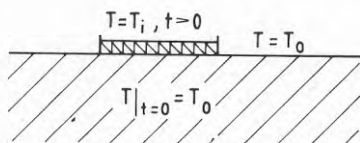
$$-T_2 \cdot H(t - t_1) + T_2 \cdot H(t - t_1 - t_2) \quad (2.1.11)$$

Genom en superposition enligt ovan har temperaturförloppen reducerats till tre fundamentala grundfall:

1. Stationär del enligt den vänstra, nedre bilden i figur 2.1.2.
2. Periodisk del enligt den högra, nedre bilden i figur 2.1.2.
3. Temperatursteg enligt figur 2.1.4.

Den stationära komponenten studeras i kapitel 3 och 4, medan periodisk komponent och temperatursteg behandlas i kapitel 5 och 6.

Under de första åren efter det att en ny byggnad har börjat värmas pågår en uppbyggnad av en värmekudde under byggnaden. I det ovanstående resonemanget har denna del försumrats. Uppbyggnaden av värmekudden kan renodlas och behandlas fristående från de ovanstående processerna om man bortser från yttemperaturens variation under året. Vid markytan är då temperaturen  $T_0$ . Begynnelsetemperaturen i marken vid tiden  $t = 0$  är överallt  $T_0$ . Ovanför värmeisoleringen hålls från  $t = 0$  temperaturen  $T_i$ . Se figur 2.1.5.

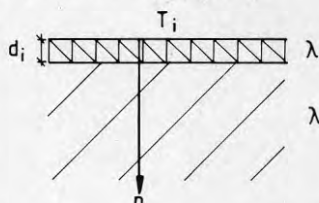


Figur 2.1.5 Uppbyggnad av värmekudde under en byggnad.

Uppbyggnaden av värmekudden kan ses som en process, där man överlagrat på temperaturen  $T_0$  gör ett temperatursteg  $T_i - T_0$  ovanför isoleringen vid tiden  $t = 0$ . Tidigare betraktades temperatursteg vid markytan utanför byggnaden.

## 2.2 Randvillkor mot byggnad och markyta

Byggnaden värmeisolerar i allmänhet mot marken. Låt  $d_i$  vara isolertjockleken och  $\lambda_i$  isoleringens värmeledningsförmåga. Randvillkoret vid värmeisoleringen blir:



$$\frac{\lambda_i (T_i - T)}{d_i} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2.1)$$

Markens värmeledningsförmåga är  $\lambda$ . Derivatans  $\frac{\partial T}{\partial n}$  anger temperaturderivatan i normalriktningen in i marken strax utanför isoleringen.

Isoleringens värmemotstånd är  $d_i/\lambda_i$  ( $K/(W/m^2)$ ). Strängt taget användes enbart värmemotståndet i randvillkoret (2.2.1). Om isoleringen består av olika skikt eller om man skall ta hänsyn till andra värmemotstånd, t ex betongplattans, skall man utnyttja hela värmemotståndet  $m_{tot}$  mellan inneluften med temperaturen  $T_i$  och marken direkt under byggnaden. Randvillkoret (2.2.1) blir då:

$$\frac{T_i - T}{m_{tot}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2.2)$$

Randvillkoret (2.2.1) eller (2.2.2) kan skrivas:

$$T_i = T - d \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2.3)$$

Konstanten  $d$  med dimensionen längd ges av:

$$d = \frac{\lambda d_i}{\lambda_i} \quad \text{eller} \quad d = \lambda \cdot m_{tot} \quad (2.2.4)$$

Längden  $d$  är ett mått på värmeisoleringens storlek. Den anger isolertjockleken, då man räknar i meter mark eftersom:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{d_i}{\lambda_i} \quad \text{eller} \quad \frac{d}{\lambda} = m_{tot} \quad (2.2.5)$$

Ett markskikt med tjockleken  $d$  har således samma värmemotstånd som värmeisoleringen.

För att bestämma värmeisoleringens storlek och randvillkor vid byggnaden räcker det att ange  $d$ . Storheterna  $d_i$  och  $\lambda_i$  behöver ej anges separat. I fortsättningen skall  $d$  användas. I samband med skalning där olika längder utnyttjas kommer detta att vara praktiskt. Längden  $d$  skall kallas ekvivalent isolertjocklek.

Den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  ger ett direkt fysikaliskt mått på hur kraftig värmeisoleringen är för en byggnad med givna dimensioner. Som en illustration betraktas ett långt hus med bredden  $B$ . Följande data gäller:

$$\lambda = 1.5 \text{ W/mK} \qquad \lambda_i = 0.04 \text{ W/mK}$$

Betrakta följande tre fall, varvid  $d$  ges av (2.2.4):

A.	$d_i = 0.08 \text{ m}$	$B = 8 \text{ m}$	$d = 3 \text{ m}$
B.	$d_i = 0.50 \text{ m}$	$B = 8 \text{ m}$	$d = 19 \text{ m}$
C.	$d_i = 0.08 \text{ m}$	$B = 20 \text{ m}$	$d = 3 \text{ m}$

I fall A är isolertjockleken  $d$  i samma storleksordning som skyddande jordskikt under huset (3 m respektive ungefär  $8/2 = 4$  m). I fall B däremot är isolertjockleken mycket större än skyddande jordtjocklek (19 m respektive 4 m). Värmeisoleringen dominerar över markens värmeisolerande förmåga. I fall C är förhållandet det omvända, eftersom ekvivalent isolertjocklek är 3 m, medan halva husbredden är 10 m.

Vid markytan utanför byggnaden har man ett värmeövergångstal  $\alpha$  ( $\text{W/m}^2\text{K}$ ) mellan luften och markytan. Värdet på  $\alpha$  beror på vindförhållanden, strålning (sol, kall himmel), vegetation och avdunstning. Variation på dygnsbasis påverkar ej annat än ytterst marginellt värmeförlusterna från byggnaden. Här används därför ett konstant, lämpligt valt medelvärde för  $\alpha$ . Randvillkoret vid markytan blir då:

$$\alpha(T_{\text{ute}} - T) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (2.2.6)$$

Detta kan skrivas:

$$T_{\text{ute}} = T - d_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2.7)$$

Temperaturerna på högra sidan avser marken precis vid markytan. Utelufttemperaturen  $T_{\text{ute}}$  är en given funktion av tiden. Längden  $d_1$  är ett mått på värmemotståndet vid markytan:

$$d_1 = \frac{\lambda}{\alpha} \quad (\text{m}) \quad (2.2.8)$$

Värdet på  $\alpha$  torde ligga i intervallet 5 till 50 W/m<sup>2</sup>K. Detta ger t. ex.

$$\lambda = 1.5 \text{ W/mK}$$

$$\begin{aligned} \text{A. } \alpha &= 5 \text{ W/m}^2\text{K} & \Rightarrow & \quad d_1 = 0.3 \text{ m} \\ \text{B. } \alpha &= 50 \text{ W/m}^2\text{K} & \Rightarrow & \quad d_1 = 0.03 \text{ m} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Övergångsmotståndet mellan luft och markyta motsvarar således ett jordskikt med en tjocklek från några centimeter upp till några decimeter. Detta innebär att värmeövergångsmotståndet vid markytan i allmänhet kan försummas i dessa sammanhang där värmeförluster från en byggnad studeras. I det följande kommer detta att belysas närmare. Om värmeövergångsmotståndet vid markytan försummas ( $1/\alpha = 0$ ,  $\alpha = +\infty$ ), blir randvillkoret att utemperaturen  $T_{\text{ute}}$  råder vid markytan:

$$T = T_{\text{ute}} \quad (\alpha = +\infty, d_1 = 0) \quad (2.2.10)$$

Längden  $d_1$  är då noll.

Då marken är snötäckt, har man ett förhållandevis stort värmemotstånd över snön. Randvillkoret vid markytan blir då:

$$\frac{(T_{\text{ute}} - T) \lambda_{\text{snö}}}{d_{\text{snö}}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2.11)$$

Här är  $d_{\text{snö}}$  snötäckets tjocklek och  $\lambda_{\text{snö}}$  snöns värmeledningsförmåga. Randvillkoret (2.2.11) kan såsom ovan skrivas:

$$T_{\text{ute}} = T - d_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2.12)$$

Här är  $d_1$  snötäckets ekvivalenta isolertjocklek:

$$d_1 = \frac{\lambda d_{\text{snö}}}{\lambda_{\text{snö}}} \quad (2.2.13)$$

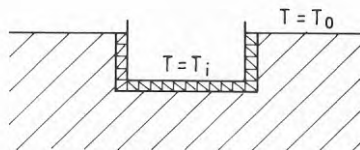
Två exempel:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 1.5 \text{ W/mK} & \lambda_{\text{snö}} = 0.15 \text{ W/mK} \\ d_{\text{snö}} = 0.1 \text{ m} & d_1 = 1 \text{ m} \\ d_{\text{snö}} = 0.5 \text{ m} & d_1 = 5 \text{ m} \end{array} \quad (2.2.14)$$

Randvillkoret mot byggnaden och mot marken ges av längderna  $d$  och  $d_1$  (samt av temperaturerna  $T_i$  och  $T_{\text{ute}}(t)$ ). Då annat ej anges, sättes i det följande  $d_1$  till noll.

### 2.3 Skalning för stationär delprocess

Figur 2.3.1 visar i ett fall förutsättningarna för den stationära delprocessen. För att understryka att skalningen i detta kapitel inte bara gäller för platta på mark visas en byggnad med en värmeisolerad källare.

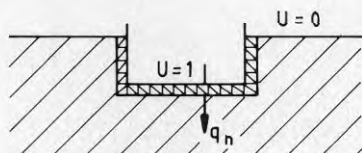


Figur 2.3.1 Stationär delprocess för byggnad med värmeisolerad källare.

Den stationära temperaturen i marken betecknas  $T_s(x,y,z)$ . Dimensionslös temperatur  $U$  blir:

$$U(x,y,z) = \frac{T_s(x,y,z) - T_0}{T_i - T_0} \quad (2.3.1)$$

Den dimensionslösa temperaturen är noll vid markytan och ett vid byggnaden innanför värmeisoleringen. Se figur 2.3.2.



Figur 2.3.2 Randvillkor för dimensionslös temperatur för stationär delprocess.

Värmeflödet  $q_n$  ( $W/m^2$ ) i normalriktningen genom isoleringen är:

$$q_n = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda(T_i - T_0) \cdot (-) \frac{\partial U}{\partial n} \quad (2.3.2)$$

Värmeisoleringen ges av den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  vilken definieras av formel 2.2.4.

Den totala värmeförlusten  $Q_s$  (W) från byggnaden ges av integralen av  $q_n$  över byggnadens yta mot marken. För kulvertar, långa byggnader  $m$  är värmeförlusten per meter i ett tvärsnitt av intresse. Denna värmeförlust skall betecknas  $q_s$  (W/m). Allmänna skalningsregler för  $Q_s$  och  $q_s$  skall här anges. Som en introduktion tas fallet platta på mark.

Givet en byggnad av typen platta på mark med rektangulär form. Plattan har längden  $L$  och bredden  $B$ . Den ligger i markytans plan. Värmeisoleringen förutsätts i detta första exempel ha konstant tjocklek. Värmeisoleringen ges av den ekvivalenta isolertjockleken  $d$ . Marken förutsätts vara homogen med värmeledningsförmågan  $\lambda$ .

Det aktuella problemet innehåller tre längder  $B$ ,  $L$  och  $d$ . Dimensionslös temperatur  $U$  blir en funktion av  $x$ ,  $y$ ,  $z$  och  $B$ ,  $L$ ,  $d$ . Al-

La längder kan göras dimensionslösa genom skalning t ex med bredden B. Temperaturen U blir då en funktion av  $x/B$ ,  $y/B$ ,  $z/B$  och  $L/B$ ,  $d/B$ . Värmeförlusten  $Q_s$  ges av integralen av  $q_n$  över ytan. Integrationen över ytan ger längdfaktorn B i kvadrat. Derivationen  $\frac{\partial U}{\partial n}$  ger längden  $1/B$ . Totalt ger längdskalningen faktorn  $B^2 \cdot 1/B = B$ . Ytintegralen tas sedan i dimensionslösa längder. Den blir då en funktion enbart av  $L/B$  och  $d/B$ . Således gäller med användning av 2.3.2:

$$Q_s = \lambda(T_i - T_o) \cdot B^2 \cdot \frac{1}{B} \cdot f(L/B, d/B) \quad (2.3.3)$$

Här är funktionen f dimensionslös. En exakt matematisk genomgång av denna skalning för platta på mark ges i appendix 1.

Som längdfaktor i formel 2.3.3 användes bredden B. För platta på mark skall det visa sig lämpligt att använda L som längdfaktor, medan skalningen i övrigt göres med B. Formel 2.3.3 kan då skrivas:

$$\underline{Q_s = \lambda(T_i - T_o)L \cdot h_s(L/B, d/B)} \quad (2.3.4)$$

Dimensionen ges av den första faktorn:

$$\dim(\lambda(T_i - T_o)L) = \frac{W}{mK} \cdot K \cdot m = W$$

Funktionen  $h_s$  är dimensionslös. Den skall kallas värmeförlustfaktor. Index s användes för att markera att den stationära värmeförlusten avses.

För en långsträckt platta på mark ( $L \gg B$ ) gäller:

$$\frac{Q_s}{L} = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_s(L/B, d/B) \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot h_s(\infty, d/B) \quad (2.3.5)$$

Värmeförlusten  $q_s$  per meter vinkelrätt mot plattan kan således skrivas:

$$\underline{q_s = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_s(d/B)} \quad (2.3.6)$$



Värmeförlustfaktorn blir i det tvådimensionella fallet en funktion enbart av  $d/B$ . Dimensionen ges av den första faktorn:

$$\dim(\lambda(T_i - T_o)) = \frac{W}{m \cdot K} \cdot K = W/m$$

I det tvådimensionella fallet bortfaller längdfaktorn.

I det allmänna tredimensionella fallet kan värmeförlusten  $Q_s$  skrivas:

$$Q_s = \lambda(T_i - T_o)L_s \cdot h_s \quad (2.3.7)$$

Här är  $L_s$  en av problemets längder. Värmeförlustfaktorn  $h_s$  är dimensionslös. Den blir en funktion av ett antal dimensionslösa parametrar.

Låt  $L_s, L_1, L_2$  osv vara de längder som ingår i värmeledningsproblemet. Värmeförlustfaktorn blir en funktion av  $L_1/L_s, L_2/L_s$  osv. Den blir vidare en funktion av skalad ekvivalent isolertjocklek  $d/L_s$  eller, om flera isolertjocklekar  $d_1, d_2$  osv förekommer, av  $d_1/L_s, d_2/L_s$  osv. Marken kan bestå av områden med olika värmeledningstal  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  osv. Värmeförlustfaktorn blir då också en funktion av  $\lambda_1/\lambda, \lambda_2/\lambda$  osv. Sammanfattningsvis gäller således:

$$h_s = h_s(L_1/L_s, L_2/L_s, \dots, d/L_s, \dots, \lambda_1/\lambda, \dots) \quad (2.3.8)$$

Det är ibland praktiskt att använda flera olika skalningslängder. Antag som ett exempel att följande skalning är given:

$$Q_s = \lambda(T_i - T_o)L_1 \cdot h_s(L_2/L_1, L_3/L_1, d/L_1, d'/L_1) \quad (2.3.9)$$

Som ett exempel kan detta med utnyttjande av  $L_2, L_1$  och  $d$  som skalningslängder skrivas:

$$Q_s = \lambda(T_i - T_o)L_2 \cdot h'_s(L_2/L_1, L_3/L_1, d/L_1, d'/d) \quad (2.3.10)$$

I formel 2.3.4 användes två skalningslängder.

I det allmänna tvådimensionella fallet gäller för värmeförlusten  $q_s$ :

$$\underline{q_s} = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_s \quad (\text{W/m}) \quad (2.3.11)$$

Värmeförlusten räknas per meter i ett tvärsnitt vinkelrätt mot byggnadens eller kulvertens längdaxel. Formeln har samma form som i det tredimensionella fallet. Längdfaktorn  $L_s$  har dock bortfallit. Värmeförlustfaktorn  $h_s$  blir en funktion av samma uppsättning av dimensionslösa variabler som i det tredimensionella fallet:

$$h_s = h_s(L_1/L_s, \dots, d/L_s, \dots, \lambda_1/\lambda, \dots) \quad (2.3.12)$$

Det är intressant att notera att värmeförlusten  $q_s$  i det tvådimensionella fallet inte beror av systemets storlek eftersom längdfaktor saknas. I det tredimensionella fallet ökar värmeförlusten linjärt med systemets storlek.

I formel 2.3.7 uttrycks värmeförlusten  $Q_s$  med hjälp av en värmeförlustfaktor  $h_s$ . Alternativt kan förlusten representeras av ett ekvivalent k-värde för isolering och mark. Låt  $A_i$  beteckna ytan mot marken. Det ekvivalenta k-värdet definieras av:

$$Q_s = k \cdot (T_i - T_o) A_i \quad (2.3.13)$$

Sambandet mellan  $k$  och  $h_s$  blir med formlerna 2.3.7 och 2.3.13:

$$k = \frac{\lambda L_s h_s}{A_i} \quad (2.3.14)$$

Ett tredje sätt att ange värmeförlusten är att representera markens värmeisolerande förmåga med en ekvivalent isolertjocklek (ekvivalent medeltjocklek för marken)  $D_m$ . Värmeförlusten ges då av:

$$Q_s = \frac{T_i - T_o}{\frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{D_m}{\lambda}} \cdot A_i \quad (2.3.15)$$

Värmeförlusten per ytenhet ges av temperaturdifferensen dividerad med värmeisoleringens och markens sammanlagda värmemotstånd ( $d_i/\lambda_i + D_m/\lambda$ ). Med hjälp av ekvivalent isolertjocklek  $d$  enligt formel 2.2.4 kan (2.3.15) skrivas:

$$Q_s = \lambda \frac{T_i - T_o}{d + D_m} \cdot A_i \quad (2.3.16)$$

Sambandet mellan värmeförlustfaktor  $h_s$  och ekvivalent marktjocklek blir:

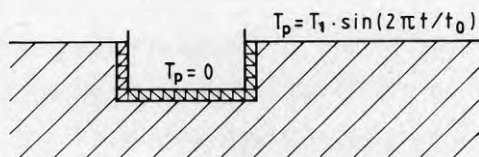
$$h_s = \frac{A_i}{L_s(d + D_m)} \quad D_m = \frac{A_i}{L_s h_s} - d \quad (2.3.17)$$

Sambandet mellan ekvivalent  $k$ -värde och ekvivalent jordtjocklek blir:

$$k = \frac{\lambda}{d + D_m} \quad D_m = \frac{\lambda}{k} - d \quad (2.3.18)$$

#### 2.4 Skalning för periodisk delprocess

Figur 2.4.1 illustrerar förutsättningar för den periodiska delprocessen för en byggnad med en värmeisolerad källare.



Figur 2.4.1 Periodisk delprocess för byggnad med värmeisolerad källare.

Innanför isoleringen i byggnaden är den periodiska temperaturdelen noll. Vid markytan sker en ren sinusvariation med periodtiden  $t_0$  och amplituden  $T_1$ . Man kan alternativt ha en cosinusvariation eller en blandning av sinus och cosinus med periodtiden  $t_0$ , vilken  $t$  ex kan vara lika med ett år.

Innehåller den periodiska randtemperaturen flera periodtider (t ex  $t_0$ ,  $t_0/2$ ,  $t_0/3$  osv), så måste dessa behandlas var för sig.

#### 2.4.1 Komplex notation

För rent periodiska temperaturförlopp är det praktiskt att använda en komplex notation. Detta är helt analogt med växelströmsläran, där spänning och ström representeras i komplex form. Den komplexvärda, periodiska temperaturen har formen:

$$T_p(x,y,z,t) = \hat{T}(x,y,z) \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (2.4.1)$$

Tidsfaktorn som är komplexvärd innehåller både cosinus och sinus i tiden:

$$e^{2\pi i t/t_0} = \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \quad (2.4.2)$$

Den första faktorn  $\hat{T}(x,y,z)$  är också komplexvärd. Den ger temperatursvängningens variation med rumskoordinaterna. För att markera att den är komplexvärd användes beteckningen  $\hat{\phantom{x}}$ . Som en hjälp för det följande ges här först några av egenskaperna hos komplexvärda exponentialfunktioner.

Enligt matematiken gäller för den komplexa exponentialfunktionen:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos(y) + i \cdot e^x \sin(y) \quad (2.4.3)$$

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \quad |e^{iy}| = 1 \quad (2.4.4)$$

$$e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \quad (2.4.5)$$

Beloppet av det komplexa talet  $e^{x+iy}$  är  $e^x$ , eftersom  $e^{iy}$  har beloppet 1. Argumentet eller fasen ges av  $y$ . Se figur 2.4.2.

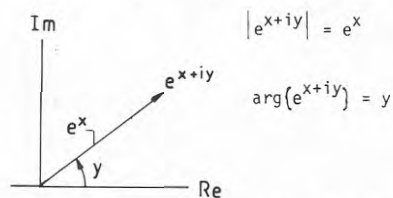


FIG 2.4.2 Belopp och argument för komplexvärd exponentialfunktion.

Nedan behövs följande tidsderivata:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\pi it/t_0}\right) = \frac{2\pi i}{t_0} \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (2.4.6)$$

Detta visas på följande sätt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{2\pi it/t_0}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right)\right) = \\ &= -\frac{2\pi}{t_0} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) + i \cdot \frac{2\pi}{t_0} \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) = \\ &= \frac{2\pi i}{t_0} \left(\cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right)\right) \end{aligned}$$

Med hjälp av belopp och fas hos  $\hat{T}(x,y,z)$  kan den periodiska temperaturen (2.4.1) skrivas:

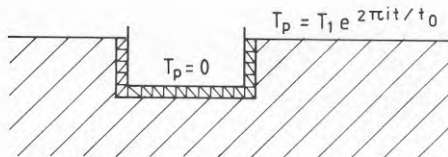
$$\begin{aligned} T_p(x,y,z,t) &= \left|\hat{T}(x,y,z)\right| \cdot e^{i \cdot \arg(\hat{T}(x,y,z))} \cdot e^{2\pi it/t_0} = \\ &= \left|\hat{T}\right| \cdot e^{i(2\pi t/t_0 + \arg(\hat{T}))} \quad (2.4.7) \end{aligned}$$

Skrives realdel och imaginärdel av  $T_p$  ut erhålles med (2.4.4):

$$T_p(x,y,z,t) = \left|\hat{T}\right| \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \arg(\hat{T})\right) + i \cdot \left|\hat{T}\right| \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \arg(\hat{T})\right) \quad (2.4.8)$$

Den komplexvärda, periodiska lösningen  $T_p$  konstrueras så att realdelen och imaginärdelen av (2.4.8) var för sig är (reellvärda) lösningar till det periodiska värmeledningsproblemet.

För det periodiska problemet enligt figur 2.4.1 föreskrivs en sinusvariation vid markytan. Alternativt kan en cosinusvariation eller en kombination av sinus och cosinus föreskrivas. I det komplexvärda fallet föreskriver man en komplex tidsvariation enligt formel 2.4.2. Denna innehåller både sinus- och cosinusfallen. Se figur 2.4.3.



Figur 2.4.3 Periodisk delprocess i komplex form med komplex randtemperatur vid marken.

Den komplexa temperaturen  $\hat{T}(x,y,z)$  har som randvillkor att den är lika med  $T_1$  vid markytan och noll innanför värmeisoleringen. Realdelen av  $T_p$  blir vid markytan:

$$\operatorname{Re}(T_p) = \operatorname{Re}\left(T_1 \cdot e^{2\pi i t / t_0}\right) = T_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \quad (2.4.9)$$

Imaginärdelen vid markytan blir:

$$\operatorname{Im}(T_p) = \operatorname{Im}\left(T_1 \cdot e^{2\pi i t / t_0}\right) = T_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \quad (2.4.10)$$

Detta innebär att imaginärdelen av den komplexvärda temperaturen ger lösningen till problemet enligt figur 2.4.1 med sinusvariation vid markytan. Enligt (2.4.8) är denna lösning:

$$\left|\hat{T}(x,y,z)\right| \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \arg(\hat{T}(x,y,z))\right) \quad (2.4.11)$$

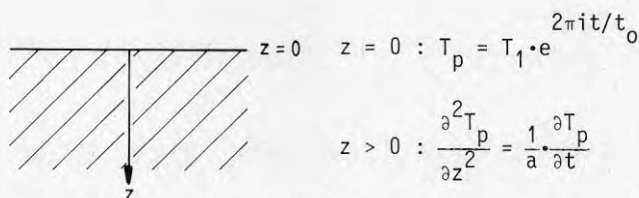
Realdelen av  $T_p$  ger lösningen med cosinusvariation vid markytan.

För att lösa det periodiska problemet med sinusvariation vid markytan enligt figur 2.4.1 löser man således först det komplexvärda problemet enligt figur 2.4.3. Detta ger  $\hat{T}(x,y,z)$ . Den sökta reella, periodiska lösningen ges sedan av (2.4.11).

#### 2.4.2 Endimensionell lösning. Inträngningsdjup $d_0$ .

Den endimensionella, ostörda periodiska lösningen långt bort från byggnaden är av intresse som utgångspunkt för de flerdimensionella förloppen nära byggnaden.

Vid markytan  $z = 0$  råder en komplexvärd periodisk variation av typen (2.4.2). Marken antas homogen med temperaturledningstalet  $a$ . Problemet för den periodiska processen illustreras i figur 2.4.4.



Figur 2.4.4 Villkor för periodiskt temperaturförlopp i ostörd mark med komplexvärd notation.

Den komplexvärda lösningen har formen

$$T_p(z,t) = \hat{T}(z) \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (2.4.12)$$

Insättning i värmeledningsekvation (se figur 2.4.4) ger med hjälp av (2.4.6) för  $\hat{T}(z)$ , då tidsfaktorn förkortats bort:

$$\frac{d^2 \hat{T}}{dz^2} = \frac{2\pi i}{a t_0} \cdot \hat{T} = \left( \frac{1+i}{d_0} \right)^2 \cdot \hat{T}(z) \quad (2.4.13)$$

Längden  $d_0$  ges av formel 2.4.18. Lösningen blir med beaktande av randvillkoret vid  $z = 0$  och att temperaturen skall gå mot noll då  $z$  går mot oändlighet:

$$\hat{T}(z) = T_1 \cdot e^{-(1+i)z/d_0} \quad (2.4.14)$$

Temperaturen  $T_p$  är då:

$$T_p(z, t) = T_1 e^{-z/d_0} \cdot e^{i(2\pi t/t_0 - z/d_0)} \quad (2.4.15)$$

Reellvärda lösningar ges av realdel och imaginärdel. Imaginärdelen av (2.4.15) blir:

$$T_p(z, t) = T_1 e^{-z/d_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} - \frac{z}{d_0}\right) \quad (2.4.16)$$

Temperatursvängningens amplitud dämpas med faktorn

$$e^{-z/d_0} \quad (2.4.17)$$

På djupet  $z$  är fASFÖRDRÖJNINGEN i radianer relativt markytan  $z/d_0$ .

Längden  $d_0$  är enligt 2.4.13 given av

$$d_0 = \sqrt{\frac{a t_0}{\pi}} \quad (2.4.18)$$

Denna längd skall i det följande kallas inträngningsdjupet för den periodiska variationen. På djupet  $z = d_0$  har amplituden dämpats från  $T_1$  till  $T_1 \cdot e^{-1} = 0.37 T_1$ . På djupet  $z = 3 d_0$  är amplituden  $T_1 \cdot e^{-3} = 0.05 T_1$ . Det är värt att notera att inträngningsdjupet är proportionellt mot roten ur periodtiden  $t_0$ .



Exempel.  $t_0 = 1$  år

$$\begin{array}{ll} a = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & d_0 = 4.0 \text{ m} \\ a = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & d_0 = 3.2 \text{ m} \\ a = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & d_0 = 2.0 \text{ m} \end{array}$$

### 2.4.3 Skalningsregler

Värmeledningsekvationen i ett fast material med temperaturlednings-  
talet  $a$  är i det allmänna tredimensionella fallet:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.4.19)$$

För ett periodiskt förlopp med komplex notation gäller ansatsen  
2.4.1. Insättning av denna i (2.4.19) ger för  $\hat{T}(x,y,z)$  med utnytt-  
jande av (2.4.6), då tidsfaktorn förkortats bort:

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} = \frac{2\pi i}{a t_0} \hat{T}$$

eller

$$\nabla^2 \hat{T} = \left( \frac{1+i}{d_0} \right)^2 \hat{T} \quad (2.4.20)$$

Inträngningdjupet  $d_0$  definieras av formel 2.4.18. I det endimensionel-  
la fallet övergår (2.4.20) i (2.4.13) För en stationär delprocess  
 $T_s(x,y,z)$  gäller

$$\nabla^2 T_s = 0 \quad (2.4.21)$$

Ekvationerna 2.4.20-21 för periodisk och stationär delprocess skil-  
jer sig därigenom att längden  $d_0$  tillkommer i det periodiska fallet.

Vid skalning av det periodiska fallet råder på grund av ekvationerna 2.4.20-21 en långtgående parallellitet med det stationära fallet. De parametrar som förekommer för stationär del finns också för den periodiska delen. Härtill tillkommer enbart längden  $d_0$ .

Värmeflödet från byggnaden för den periodiska delprocessen betecknas  $Q_p$  (W). Detta är nu ett pulserande flöde med en värmeförlust under halva tidsperioden och ett värmetillskott under den andra halvan. Komplex notation användes. Tidsfaktorn för  $Q_p$  ges av formel 2.4.2.

Den allmänna formeln för  $Q_p$  har samma struktur som formel 2.3.7 för den stationära förlusten  $Q_s$ . Temperaturdifferensen  $T_i - T_o$  ersättes nu av  $0 - T_1 \cdot e^{2\pi i t / t_0}$  i enlighet med figurerna 2.3.1 och 2.4.3.

Det periodiska värmeflödet från byggnaden kan nu skrivas:

$$Q_p(t) = - \lambda T_1 L_s \cdot h_p \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (2.4.22)$$

Detta är en komplexvärd relation där  $Q_p$  och  $h_p$  är komplexa tal. Minustecknet beror på att en positiv utetemperatur ger ett inflöde av värme till byggnaden.

Den dimensionslösa faktorn  $h_p$  är analog med den stationära värmeförlustfaktorn  $h_s$ . Den skall kallas periodisk värmeförlustfaktor. Den blir en funktion av ett antal dimensionslösa parametrar. Låt  $L_1, L_2$  osv vara värmeledningsproblemets längder. Värmeisoleringens tjocklek ges av  $d$ . Eventuellt förekommer olika isolertjocklekar  $d, d_1$  osv. I analogi med formel 2.3.8 beror  $h_p$  allmänt av följande parametrar:

$$h_p = h_p(L_1/d_0, L_2/d_0, \dots, d/d_0, \dots) \quad (2.4.23)$$

I det periodiska fallet användes normalt  $d_0$  som skalningsfaktor för parametrarna i  $h_p$ . Som längdfaktor  $L_s$  i (2.4.22) användes däremot normalt den totala kantlängden runt byggnaden.

Om marken består av områden med olika termiska data  $\lambda$ ,  $a$ ,  $\lambda_1$ ,  $a_1$  osv tillkommer ytterligare variabler:

$$h_p = h_p(L_1/d_0, \dots, d/d_0, \dots, \lambda_1/\lambda, a_1/a, \dots) \quad (2.4.24)$$

I appendix 1 behandlas i detalj skalningen för platta på mark. Detta fall innehåller längden  $L$ , bredden  $B$ , isolertjockleken  $d$  och inträngningsdjupet  $d_0$ . Den periodiska värmeförlustfaktorn blir en funktion av tre parametrar. Som skalningsfaktor  $L_s$  användes kantlängden  $2L + 2B$ . Detta ger för en rektangulär platta på mark enligt (A1.25-26):

$$Q_p = -\lambda T_1(2L + 2B) \cdot h_p(L/d_0, B/d_0, d/d_0) \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (2.4.25)$$

Realdel och imaginärdel av (2.4.25) ger det periodiska värmeflödet från byggnaden för cosinus respektive sinus vid markytan. Värmeflödet för sinusfallet enligt figur 2.4.1 ges således av imaginärdelen av (2.4.25):

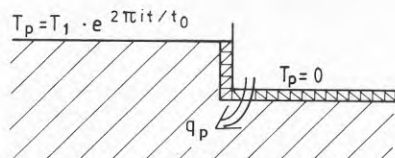
$$Q_p(t) = -\lambda T_1(2L + 2B) \cdot |h_p| \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \arg(h_p)\right) \quad (2.4.26)$$

För att beräkna periodiskt värmeflöde behövs beloppet  $|h_p|$  och argumentet  $\arg(h_p)$  av värmeförlustfaktorn  $h_p$ .

#### 2.4.4 Skalning för plant tvärsnitt

Den periodiska temperaturen dämpas från markytan nedåt och inåt under byggnaden med längdskalan  $d_0$ . För en årssvängning är räckvidden i marken några meter enligt exemplen i slutet av avsnitt 2.4.2. Vid området närmast kring ett hörn på en byggnad blir det periodiska förloppet tredimensionellt. Längs byggnadens kanter blir processen för övrigt huvudsakligen tvådimensionell i tvärsnittet vinkelrätt mot kantlinjen. Tvådimensionella periodiska fall blir därför viktiga.

Figur 2.4.5 illustrerar det periodiska förloppet i ett plant tvärsnitt vinkelrätt mot en kantlinje till byggnaden. Det periodiska värmeflödet från byggnaden betecknas  $q_p$  (W/m). Det räknas per meter vinkelrätt mot tvärsnittet.



Figur 2.4.5 Periodiskt förlopp i planet vinkelrätt mot en kant.

Vid skalningen bortfaller nu på samma sätt som i det stationära fallet längdfaktorn  $L_s$ . I analogi med (2.4.22) och (2.3.11) gäller

$$q_p = -\lambda T_1 \cdot h_p \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (2.4.27)$$

Den komplexvärda periodiska värmeförlustfaktorn  $h_p$  blir en funktion av problemets dimensionslösa längder:

$$h_p = h_p(L_1/d_0, \dots, d/d_0, \dots) \quad (2.4.28)$$

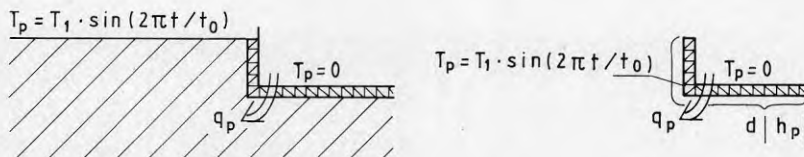
Formel 2.4.27, vilken ger det periodiska värmeflödet per meter av kanten längs huset, kan skrivas på följande sätt:

$$q_p = \left(0 - T_1 \cdot e^{2\pi i t / t_0}\right) \cdot \frac{\lambda_i}{d_i} \cdot d \cdot h_p \quad (2.4.29)$$

De två första faktorerna representerar värmeflödet per ytenhet genom själva värmeisoleringen då denna tänkes direkt exponerad mot markytans periodiska temperatur  $T_1 \cdot e^{2\pi i t / t_0}$ . Värmeflödet  $q_p$  erhålles genom multiplikation med längden  $d \cdot h_p$ , vilken är komplexvärd. Imaginärdelen av (2.4.29) ger värmeflödet då man har en sinusvariation av utetemperaturen enligt figur 2.4.1:

$$q_p = -T_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0} + \arg(h_p)\right) \cdot \frac{\lambda_i}{d_i} \cdot d \cdot |h_p| \quad (2.4.30)$$

Värmeflödet är fasförskjutet med termen  $\arg(h_p)$  relativt utetemperaturen. Bortsett från fasförskjutningen ges värmeflödet  $q_p$  enligt (2.4.30) av det flöde som man skulle få om isoleringen vore direkt exponerad mot utetemperaturen in till ett djup  $d|h_p|$  längs isoleringen. Se figur 2.4.6.



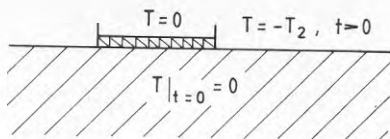
Figur 2.4.6 Definition av kantinträngningsdjup  $d|h_p|$  längs värmeisolereringen enligt formel (2.4.30). Man bör observera att en fasskillnad tillkommer.

Längden  $d|h_p|$  skall kallas kantinträngningsdjupet för den periodiska utetemperaturen.

## 2.5 Skalning för temperatursteg hos utetemperaturen

En sträckvis konstant utetemperatur kan enligt avsnitt 2.1 uppdelas i renodlade enhetstemperatursteg. Ett exempel ges av figur 2.1.3 och formel 2.1.9. Ett renodlat temperatursteg enligt figur 2.1.4 är därför ett av de fundamentala grundförloppen med vars hjälp mer komplicerade temperaturförlopp analyseras genom superposition.

Förutsättningarna för ett temperatursteg hos utetemperaturen enligt figur 2.1.4 visas i figur 2.5.1 i något annorlunda form. Vid markytan utanför byggnaden sker en stegändring av temperaturen från 0 till  $-T_2$  vid temperaturstegets starttid  $t = 0$ . Innanför isoleringen i byggnaden är temperaturen noll. I marken är begynnelsestemperaturen vid tiden  $t = 0$  också noll.



Figur 2.5.1 Förutsättningar för ett temperatursteg hos utetemperaturen.

Temperatursteget  $-T_2$  vid markytan ger ett transient temperaturförlopp. I den totala analysen adderas denna komponent till andra. Den transienta värmeförlusten från byggnaden för temperatursteget betecknas  $Q_t(t)$  (W). Genom att betrakta ett negativt steg  $-T_2$  blir  $Q_t(t)$  positivt då  $T_2$  är positivt.

Värmeledningsekvationen i ett fast material med temperaturlednings-talet  $a$  ( $m^2/s$ ) ges i det allmänna tredimensionella fallet av (2.4.19). Rumskoordinaterna  $x$ ,  $y$  och  $z$  skalas med en längd  $L_s$ . För skalning av tiden utnyttjas att  $a \cdot t$  har dimensionen  $m^2$ . Dimensionslös tid blir därför  $at/L_s^2$ :

$$x' = \frac{x}{L_s} \quad y' = \frac{y}{L_s} \quad z' = \frac{z}{L_s} \quad t' = \frac{at}{L_s^2} \quad (2.5.1)$$

Värmeledningsekvationen 2.4.19 blir då med dimensionslösa variabler:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial (y')^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial (z')^2} = \frac{\partial T}{\partial t'} \quad (2.5.2)$$

I det stationära fallet blir högra ledet noll. Stationärt förlopp och förloppet vid ett temperatursteg skiljer sig enbart genom högra ledet i värmeledningsekvationen 2.5.2 ovan. Det finns därför en direkt parallellitet vid skalning för  $Q_s$  och  $Q_t$ . De får samma form med den skillnaden att  $Q_t$  också blir en funktion av dimensionslös tid  $t' = at/L_s^2$ . I analogi med (2.3.7) erhålles därför:

$$\underline{Q_t} = \lambda T_2 L_s \cdot h_t \quad (2.5.3)$$

Temperaturdifferensen  $T_i - T_0$  ersättes här av  $0 - (-T_2) = T_2$ . Här är  $h_t$  dimensionslös värmeförlustfaktor för temperatursteget. Den är en funktion av dimensionslös tid  $t'$  och av problemets skalade parametrar:

$$h_t = h_t(at/L_S^2 ; L_1/L_S, L_2/L_S, \dots, d/L_S, \dots) \quad (2.5.4)$$

Om marken består av områden med olika termiska data  $\lambda, a ; \lambda_1, a_1$  osv tillkommer allmänt kvoterna  $\lambda_1/\lambda, a_1/a$  osv som parametrar för  $h_t$  i formel 2.5.4.

För den rektangulära plattan på mark har man tre längder  $L, B$  och  $d$ . För fallet med homogen mark ger då (2.5.3-4) skalningen:

$$Q_t = \lambda T_2 L \cdot h_t \{at/B^2 ; L/B, d/B\} \quad (2.5.5)$$

Såsom i det stationära fallet enligt (2.3.4) har här  $L$  använts som längdfaktor, medan  $B$  användes vid skalningen av  $h_t$ 's parametrar.

För ett tvådimensionellt tvärsnitt betecknas värmeförlusten  $q_t$  (W/m). Såsom i stationära och periodiska fall bortfaller längdfaktorn  $L_S$ . Man får då den allmänna skalningen:

$$\underline{q_t} = \lambda T_2 \cdot h_t \quad (2.5.6)$$

Värmeförlustfaktorers variabler ges av ett uttryck av typen (2.5.4).

För energibalanser är man även intresserad av den ackumulerade värmeförlusten. Värmeförlusten från  $t = 0$  till tiden  $t$  för ett temperatursteg i utetemperaturen ges av integralen av  $Q_t(t)$ . Denna ackumulerade värmeförlust skall betecknas  $E_t$  (J):

$$E_t(t) = \int_0^t Q_t(t'') dt'' \quad (2.5.7)$$

Insättning av (2.5.3-4) och en variabelsubstitution  $at''/L_S^2 = t'$  ger:

$$E_t(t) = \lambda T_2 L_S^3 \int_0^{at/L_S^2} h_t(t' ; L_1/L_S, \dots) \cdot L_S^2/a dt' \quad (2.5.8)$$

Låt  $C$  ( $J/m^3K$ ) beteckna värmekapaciteten per volymenhet:  $a = \lambda/C$ ,  
 $C = \lambda/a$ . Formel 2.5.8 kan då skrivas:

$$E_t(t) = CT_2L_S^3 \cdot e_t(at/L_S^2 ; L_1/L_S, \dots) \quad (2.5.9)$$

Faktorn  $CT_2L_S^3$  har dimensionen  $J$ . Den anger värmemängden hos en kub av marken med kantlängden  $L_S$  vid en temperaturskillnad  $T_2$ . Den andra faktorn  $e_t(t'; \dots)$  är den dimensionslösa ackumulerade värmeförlusten. Den ges enligt (2.5.8) av:

$$e_t(t' ; \dots) = \int_0^{t'} h_t(t'' ; \dots) dt'' \quad (2.5.10)$$

-----

Storheten  $e_t$  är integralen av  $h_t$  i dimensionslös tid. Den blir en funktion av samma uppsättning variabler.

I det tvådimensionella fallet erhålles enligt (2.5.6):

$$E_t(t) = \int_0^t q_t(t'') dt'' \quad (J/m) \quad (2.5.11)$$

$$E_t(t) = CT_2L_S^2 \cdot e_t(at/L_S^2 ; \dots) \quad (2.5.12)$$

-----

Här ges  $e_t$  av integralen av  $h_t$  enligt (2.5.10). Faktorn  $CT_2L_S^2$  har sorten  $J/m$ .



## 2.6 Skalning för uppbyggnad av värmekudde

I slutet av avsnittet 2.1 diskuteras den transienta uppbyggnaden av en värmekudde under en byggnad. Denna process sker under de första åren efter det att byggnaden har börjat värmas. Det är praktiskt att renodla processen på så sätt att man bortser från temperaturvariationer vid markytan under året och från temperaturvariationer i marken vid starttiden  $t = 0$ .

Man får då det renodlade problem som illustreras i figur 2.1.5. Ovanför värmeisoleringen hålles temperaturen  $T_i$  från starten  $t = 0$ . Vid markytan utanför byggnaden råder temperaturen  $T_0$ . Vid starttiden  $t = 0$  är temperaturen  $T_0$  överallt i marken. Denna temperaturprocess enligt figur 2.1.5 är likartad med temperatursteget för utetemperatur enligt figur 2.5.1. Vid uppbyggnaden av värmekudden har man ett temperatursteg  $T_i - T_0$  för innetemperaturen, medan det föregående fallet avser ett temperatursteg  $-T_2$  för utetemperaturen. Den transienta värmeförlusten från byggnaden skall i detta fall betecknas  $Q_{tb}(t)$  (thermal build-up; temperatursteg, uppbyggnad).

I appendix 1 behandlas i detalj denna värmeuppbyggnadsprocess och skalning för fallet med en rektangulär platta på mark. I detta fall har man de tre längderna  $L$ ,  $B$  och  $d$ . Bredden  $B$  användes för skalning. Värmeförlusten  $Q_{tb}$  ges enligt (A1.36) och (A1.38) av:

$$Q_{tb}(t) = \lambda(T_i - T_0)L \cdot h_{tb} \quad (W) \quad (2.6.1)$$

$$h_{tb} = h_{tb}(at/B^2 ; L/B, d/B) \quad (2.6.2)$$

Värmeförlustfaktorn  $h_{tb}$  för uppbyggnaden av värmekudden är dimensionslös. Som längdfaktor i (2.6.1) har  $L$  använts.

I det allmänna fallet gäller för värmeförlusten vid uppbyggnad av värmekudden:

$$\underline{Q_{tb}(t) = \lambda(T_i - T_0)L_s \cdot h_{tb}} \quad (2.6.3)$$

Här är  $h_{tb}$  den dimensionslösa värmeförlustfaktorn för uppbyggnad av värmekudden. Den blir en funktion av dimensionslös tid och av problemets dimensionslösa parametrar:

$$h_{tb} = h_{tb}(at/L_S^2; L_1/L_S, \dots, d/L_S, \dots) \quad (2.6.4)$$

Man har här samma parametrar som för  $h_t$  enligt (2.5.4).

För ett tvådimensionellt fall, där ett tvärsnitt studeras, betecknas värmeförlusten vid uppbyggnad av värmekudden  $q_{tb}(t)$  (W/m). I formel (2.6.3) bortfaller då längdfaktorn  $L_S$ :

$$q_{tb}(t) = \lambda(T_i - T_0) \cdot h_{tb} \quad (2.6.5)$$

Värmeförlustfaktorn  $h_{tb}$  beror av dimensionslös tid och av övriga parametrar på samma sätt som i det tredimensionella fallet enligt (2.6.4).

För energiberäkningar är man intresserad av den ackumulerade värmeförlusten under uppbyggnaden av värmekudden. Det momentana värmeflödet  $Q_{tb}(t)$  närmar sig efterhand det stationära värdet  $Q_S$  då tiden  $t$  ökar:

$$Q_{tb}(t) \rightarrow Q_S \quad t \rightarrow \infty \quad (2.6.6)$$

Man kan säga att skillnaden  $Q_{tb}(t) - Q_S$  användes för själva uppbyggnaden av värmekudden.

Den ackumulerade värmeförlusten  $E_{tb}(t)$  för uppbyggnaden av värmekudden definieras som integralen av  $Q_{tb}(t) - Q_S$ :

$$E_{tb}(t) = \int_0^t (Q_{tb}(t'') - Q_S) dt'' \quad (2.6.7)$$

Storheten  $E_{tb}(t)$  anger således värmeförlusten utöver stationär del  $Q_S \cdot t$ . Insättning av formlerna 2.6.3-4 och 2.3.7 i (2.6.7) ger efter variabelsubstitutionen  $at''/L_S^2 = t'$ :

$$\underline{\underline{E_{tb}(t) = C(T_i - T_0)L_S^3 \cdot e_{tb}(at/L_S^2; L_1/L_S, \dots)}} \quad (2.6.8)$$

$$e_{tb}(t' ; L_1/L_S, \dots) = \int_0^{t'} \left( h_{tb}(t'' ; L_1/L_S, \dots) - h_S(L_1/L_S, \dots) \right) dt'' \quad (2.6.9)$$

Faktorn  $e_{tb}$  är den dimensionslösa ackumulerade värmeförlusten utöver stationärt bidrag vid uppbyggnad av värmekudden. Det skall här noteras att  $h_{tb}$  går mot  $h_S$  då  $t'$  går mot oändligheten. Detta är en konsekvens av 2.6.6:

$$h_{tb}(\infty; L_1/L_S, \dots) = h_S(L_1/L_S, \dots) \quad (2.6.10)$$

För fallet platta på mark härledes i detalj formlerna 2.6.8-9 i appendix 1. Volymfaktorn blir här  $LB^2$  i stället för  $L_S^3$ .

I det tvådimensionella fallet definieras  $E_{tb}(t)$  (J/m) av:

$$E_{tb}(t) = \int_0^t (q_t(t'') - q_S) dt'' \quad (2.6.11)$$

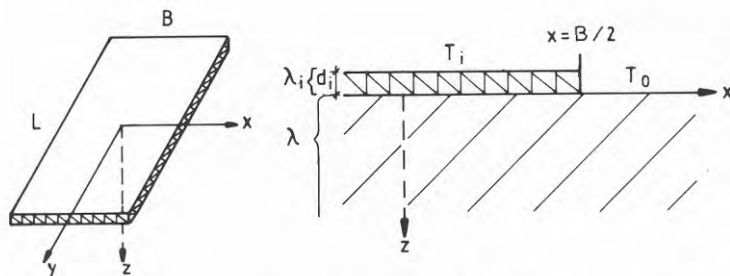
I formel 2.6.8 bortfaller ett  $L_S$ :

$$E_{tb}(t) = C(T_i - T_0)L_S^2 \cdot e_{tb}(at/L_S^2 ; L_1/L_S, \dots) \quad (2.6.12)$$

Formel 2.6.9 gäller oförändrad.

## 3 STATIONÄR VÄRMEFÖRLUST

I detta kapitel skall den stationära komponenten av värmeförlusten behandlas för platta på mark. Isolertjockleken  $d_i$  är konstant över plattan. I nästa kapitel behandlas effekten av extra isolering längs plattans kanter.



Figur 3.0.1 Stationär delprocess för rektangulär platta på mark.

Förutsättningarna för den stationära delprocessen för en rektangulär platta på mark visas i figur 3.0.1. I byggnaden ovanför värmeisoleringen är temperaturen  $T_i$ . Värmeisoleringen ges av den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  (m) enligt formel 2.2.4:

$$d = \frac{\lambda d_i}{\lambda_i} \quad (3.0.1)$$

I marken är värmeledningsförmågan  $\lambda$  (W/mK). För den stationära komponenten spelar värmediffusiviteten  $a$  ingen roll. Vid markytan råder utetemperaturens årsmedelvärde  $T_0$ . Ett värmeövergångstal vid markytan ges av längden  $d_1$  enligt formel 2.2.8. Ofta försummas värmemotståndet vid markytan. Längden  $d_1$  är då noll.

Den stationära värmeförlusten från byggnaden betecknas  $Q_s$  (W). För tvådimensionella tvärsnitt av en långsträckt platta användes beteckningen  $q_s$  (W/m).

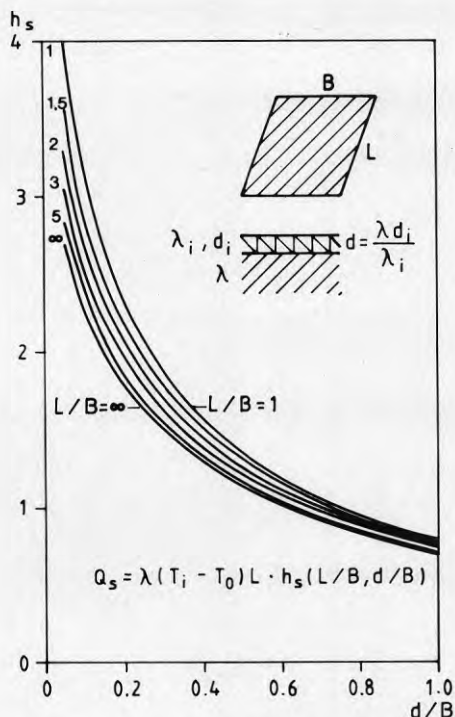
### 3.1 Värmeförlustfaktor $h_s$ för rektangulär platta

Figur 3.0.1 illustrerar fallet med en rektangulär platta på mark. Den har längden  $L$  och bredden  $B$ . Värmemotståndet vid markytan försummas:  $d_1 = 0$ . Den stationära temperaturprocessen innehåller tre längder  $L$ ,  $B$  och  $d$ . Med skalning kan enligt (2.3.4) den stationära värmeförlusten  $Q_s$  skrivas:

$$Q_s = \lambda(T_i - T_0)L \cdot h_s(L/B, d/B) \quad (3.1.1)$$

Här har  $B$  använts som skalningslängd i den dimensionslösa värmeförlustfaktorn  $h_s$ . I den multiplikativa faktorn användes  $L$  som skalningslängd. Detta innebär att  $Q_s/L$  blir värmeförlust per längdenhet, vilket blir i samklang med de tvådimensionella tvärsnitt som behandlas i avsnitt 3.4.

Faktorn  $h_s$  har beräknats numeriskt för ett antal parametervärden. Resultatet presenteras i figur 3.1.1 och i tillhörande tabell 3.1.1. Då  $L/B = +\infty$  är  $h_s$  det tvådimensionella tvärsnittets förlustfaktor.



Figur 3.1.1 Värmeförlustfaktor  $h_s$  för rektangulär platta på mark.

		L/B					
		1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	$\infty$
d/B	0.05	3.98	3.53	3.30	3.05	2.85	2.71
	0.10	3.21	2.89	2.72	2.53	2.40	2.28
	0.20	2.37	2.18	2.08	1.97	1.87	1.79
	0.50	1.37	1.30	1.26	1.21	1.18	1.16
	1.00	0.81	0.78	0.77	0.75	0.73	0.72

Tabell 3.1.1 Numeriskt beräknad värmeförlustfaktor  $h_s$  för platta på mark.

Felet i de numeriska beräkningarna bedöms vara kring eller mindre än 5% utom för de minsta värdena på d/B där felet bedöms vara något större. Vid beräkningarna har 13 000 gitterpunkter använts.

I avsnitt 3.5 anges en approximativ formel för  $h_s(L/B, d/B)$ . I avsnitt 3.2 och 3.3 behandlas enkla approximativa formler för  $h_s$ , vilka gäller vid kraftig respektive tunn värmeisolering.

Exempel 3.1.1 Givet en rektangulär platta på mark med data enligt (1.10A) för grundexempel A:

$$T_i = 20^{\circ}\text{C} \quad T_o = 5^{\circ}\text{C}$$

$$L = 12 \text{ m} \quad B = 8 \text{ m}$$

$$\lambda = 1.5 \text{ W/mK} \quad d_1 = 0$$

$$\lambda_i = 0.04 \text{ W/mK} \quad d_i = 0.08 \text{ m}$$

Dessa data ger:

$$\lambda(T_i - T_o)L = 1.5 \cdot (20 - 5) \cdot 12 = 270 \text{ W}$$

$$d = \frac{0.08 \cdot 1.5}{0.04} = 3 \text{ m}$$

$$L/B = 1.5 \quad d/B = 0.375$$

Figur 3.1.1 ger värmeförlustfaktorn:

$$h_s(1.5, 0.375) \approx 1.58$$

Den stationära värmeförlusten blir:

$$\underline{Q_s} = 270 \cdot 1.58 = 427 \text{ W}$$

Grundexempel B enligt (1.10B) skiljer sig från A enbart genom att värmeisoleringen fördubblats:

$$d_i = 0.16 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad d = 6 \text{ m}$$

Detta ger:

$$h_s(1.5, 6/8) \approx 0.97$$

$$\underline{Q_s} = 270 \cdot 0.97 = 262 \text{ W}$$

Grundexempel C enligt (1.10C) avser en större platta:

$$L = 30 \text{ m} \quad B = 15 \text{ m} \quad d_i = 0.08 \text{ m}$$

I detta fall fås:

$$\lambda(T_i - T_o)L = 675 \text{ W}$$

$$d = 3 \text{ m}$$

$$h_s(30/15, 3/15) = h_s(2, 0.2) = 2.08 \quad (\text{tabell 3.1.1})$$

$$\underline{Q_s} = 675 \cdot 2.08 = 1404 \text{ W}$$

### 3.2 Approximation från teori för optimal isolering

I referens 1 utvecklas en teori för optimal värmeisolering; dvs för hur värmeisoleringen skall fördelas för att värmeförlusten skall bli så liten som möjligt. Med hjälp av denna teori kan man ange ett approximativt uttryck för värmeförlusten  $Q_s$  i vilket man separerar värmeisoleringen från markens värmeisolerande förmåga. Formeln blir allt exaktare då isolertjockleken ökar. För en tunn isolering, vars värmeisolerande förmåga är liten jämfört med markens, gäller formeln ej.

Enligt referens 1A gäller:

$$Q_s \approx \frac{T_i - T_o}{d_i/\lambda_i + L_s u_m/\lambda} \cdot A_i \quad (3.2.1)$$

Här är  $A_i$  arean av den mot marken isolerade ytan. Skalningslängden är  $L_s$ . Den dimensionslösa storheten  $u_m$  beror ej av den dimensionslösa isolertjockleken  $d/L_s$ . Däremot beror den av övriga dimensionslösa parametrar. Marken representeras av en ekvivalent tjocklek  $L_s \cdot u_m$ . Värmemotståndet  $L_s \cdot u_m / \lambda$  för denna ekvivalenta marktjocklek adderas till isoleringens värmemotstånd  $d_i / \lambda_i$ . Formel 3.2.1 kan med definition (3.0.1) skrivas:

$$Q_s \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \frac{A_i}{d + L_s \cdot u_m} \quad (3.2.2)$$

För en rektangulär platta gäller enligt referens 1A och 1B ( $L_1/L \rightarrow L/B$ ,  $L_s = B/2$ ,  $A_i = L \cdot B$  och  $u_m/2 \rightarrow u_m$ ):

$$Q_s \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \frac{L \cdot B}{d + B \cdot u_m} \quad (3.2.3)$$

Detta ger följande approximation för värmeförlustfaktorn:

$$h_s \approx \frac{1}{d/B + u_m} \quad (d/B > 0.3) \quad (3.2.4)$$

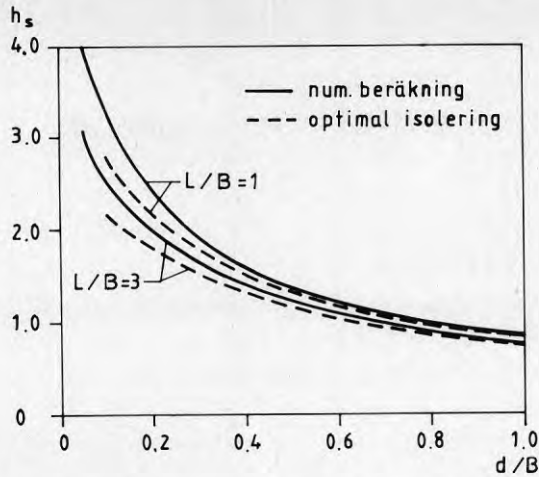
Storheten  $u_m$  beror av parametern  $L/B$ . Den ges i tabell 3.2.1.

$L/B$	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	$\infty$
$u_m$	0.26	0.30	0.33	0.36	0.39	$\pi/8$

Tabell 3.2.1 Storheten  $u_m$  som funktion av  $L/B$ .

Approximationen av  $h_s$  enligt (3.2.4) visas i figur 3.2.1 för  $L/B = 1$  och 3. Approximationen är giltig för värden på  $d/B$  överstigande 0.3. Felet blir då som mest 7% för  $1 \leq L/B \leq +\infty$  jämfört med numeriskt framräknade värden.





Figur 3.2.1 Jämförelse av värmeförlustfaktor  $h_s$  enligt numerisk beräkning och enligt formel från teori för optimal isolering.

För en långsträckt platta blir  $L/B$  stort. I gränsen erhålles värmeförlusten  $q_s$  för ett tvådimensionellt tvärsnitt:

$$\frac{Q_s}{L} \rightarrow \lambda(T_i - T_o) \cdot h_s(\infty, d/B) = q_s \quad L/B \rightarrow \infty \quad (3.2.5)$$

eller

$$q_s = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_s(d/B) \quad (3.2.6)$$

Värmeförlustfaktorn för det tvådimensionella tvärsnittet blir en funktion enbart av  $d/B$ . Den ges av kurvan  $L/B = \infty$  i figur 3.1.1.

För detta gränsfall ges  $u_m$  enligt tabell 3.2.1 av det exakta värdet  $\pi/8$ . Approximationen (3.2.4) blir då:

$$h_s(d/B) \approx \frac{1}{d/B + \pi/8} \quad (d/B > 0.3) \quad (3.2.7)$$

Denna approximation visas tillsammans med numeriskt beräknade värden i figur 3.4.1.

### 3.3 Cirkelbågsapproximation

Ibland antages vid värmeförlustberäkningar att värmeflödet går längs cirkelbågar. Detta antagande skall här analyseras. Några approximativa formler för värmeförlusten anges.

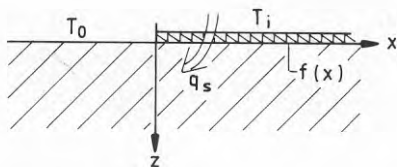
I referens 4 härleds ett speciellt värmeförlustteorem. Värmeförlusten för en längs randen varierande temperatur relateras till fallet med konstant randtemperatur. Värmeförlusten kan då anges, om man antas känna temperaturfördelningen under värmeisoleringen. Problemet är dock att denna temperaturfördelning normalt ej är känd på förhand.

För ett tvådimensionellt tvärsnitt av en långsträckt platta på mark ger formeln för värmeförlusten ett uttryck, vilket i viss mening kan tolkas som värmeströmning längs cirkelbågar. Med hjälp av denna fysikaliska tolkning anges approximativa formler för värmeförlusten.

I avsnitt 3.3.1 behandlas det enklaste fallet vid kanten av plattan. I avsnitt 3.3.2 behandlas därefter fallet med ett tvådimensionellt tvärsnitt av en långsträckt platta.

#### 3.3.1 Kantområde för långsträckt platta

För en långsträckt platta är det stationära värmeströmningsförloppet huvudsakligen tvådimensionellt i ett plan vinkelrätt mot plattans längdriktning. I detta avsnitt skall kantområdet i planet vinkelrätt mot kantlinjen behandlas. Värmeisoleringen med den ekvivalenta tjockleken  $d$  tänkes ligga från  $x = 0$  till  $x = \infty$  ( $z = 0$ ). Det betraktade fallet illustreras i figur 3.3.1.



Figur 3.3.1 Kantområde vinkelrätt mot kantlinjen för långsträckt platta. Den okända temperaturen under värmeisoleringen betecknas  $f(x)$ .

Den okända temperaturen i marken direkt under värmeisoleringen betecknas  $f(x)$ ,  $0 < x < \infty$ . Den stationära värmeförlusten  $q_s$  från plattan ges av integralen från  $x = 0$  till  $x = \infty$  av värmeflödet genom plattan. Enligt referens 4 gäller följande formel:

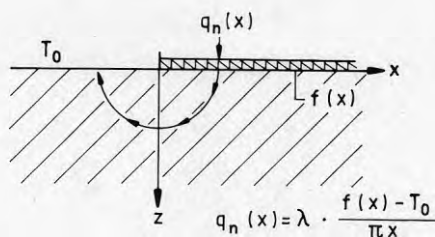
$$q_s = \int_0^{\infty} \frac{\lambda(f(x) - T_0)}{\pi x} dx \quad (\text{W/m}) \quad (3.3.1)$$

Ovanstående formel är exakt. Problemet är att  $f(x)$  ej är känd.

Figur 3.3.2 ger en fysikalisk tolkning av formel 3.3.1. Låt  $q_n(x)$  ( $\text{W/m}^2$ ) beteckna värmeflödet ner i marken från byggnaden. Antag att värmeflödet följer halvcirkelbågar enligt figuren. För cirkelbågen med radien  $x$  blir strömvägens längd  $\pi x$ . Värmeflödet skulle då bli:

$$q_n(x) \simeq \frac{\lambda(f(x) - T_0)}{\pi x} \quad (3.3.2)$$

Det totala värmeflödet  $q_s$  ges av integralen av  $q_n(x)$ . Ett antagande om strömning längs cirkelbågar ger således den exakta formeln (3.3.1). Det skall här noteras att punktvis skiljer sig det verkliga flödet  $q_n(x)$  från uttrycket i högra ledet av (3.3.2). I integralform för  $q_s$  ger emellertid cirkelbågsansatsen ett riktigt resultat.



Figur 3.3.2 Värmeflöde längs cirkelbåge som fysikalisk tolkning av formel 3.3.1.

För värmeflödet genom värmeisoleringen gäller (exakt):

$$q_n(x) = \frac{\lambda_i(T_i - f(x))}{d_i} = \frac{\lambda(T_i - f(x))}{d} \quad (3.3.3)$$

Elimineras  $f(x)$  mellan (3.3.2) och (3.3.3) erhålles:

$$q_n(x) \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \frac{1}{\pi x + d} \quad (\text{W/m}^2) \quad (3.3.4)$$

Detta är en cirkelbågsapproximation av värmeflödet genom plattan vid kanten. Man skall addera halvcirkelbågens längd  $\pi x$  till värmeisoleringens ekvivalenta tjocklek  $d$ . Över längden  $\pi x + d$  har man temperaturdifferensen  $T_i - T_o$ .

Den totala värmeförlusten i intervallet  $0 < x < X$  betecknas  $q_s(X)$ . Integration av (3.3.4) ger:

$$q_s(X) = \int_0^X q_n(x) dx \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \frac{1}{\pi} \ln(\pi X/d + 1) \quad (3.3.5)$$

Detta ger en cirkelbågsapproximation av värmeförlusten fram till ett ändligt djup  $X$  vid kanten. Det bör noteras att  $q_s(X)$  ökar inåt som  $\ln(X)$ .

Man kan tänka sig att utnyttja cirkelbågsapproximationen av typen (3.3.4) även i fallet då värmeisoleringens tjocklek varierar med  $x$ . Låt allmänt  $d(x)$  vara värmeisoleringens ekvivalenta tjocklek vid djupet  $x$ . En cirkelbågsapproximation av värmeflödet genom plattan vid  $x$  är:

$$q_n(x) \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \frac{1}{\pi x + d(x)} \quad (\text{W/m}^2) \quad (3.3.6)$$

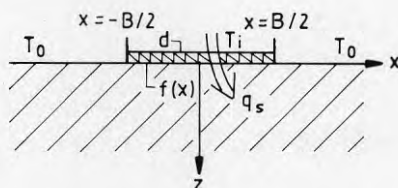
Denna approximation skall utnyttjas i kapitel 4 då man har extra värmeisolering nära plattans kant.

Då värmeisoleringen görs tunnare kommer  $f(x)$  att närma sig  $T_i$ . Strömningen blir då alltmer lik de antagna cirkelbågarna. Man kan därför förvänta sig att cirkelbågsapproximationen fungerar bäst

vid tunna isoleringar. Detta illustreras i figur 3.4.1.

### 3.3.2 Tvärsnitt av långsträckt platta

Figur 3.3.3 illustrerar det tvådimensionella temperaturförloppet för ett vertikalt tvärsnitt av en långsträckt platta med bredden  $B$ . Den okända temperaturen i marken precis under värmeisoleringen betecknas  $f(x)$ ,  $-B/2 < x < B/2$ .



Figur 3.3.3 Tvärsnitt av långsträckt platta. Den okända temperaturen under värmeisoleringen betecknas  $f(x)$ .

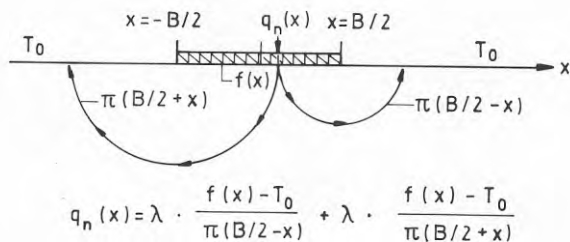
Den stationära värmeförlusten  $q_s$  från plattan ges enligt referens 4 av följande formel:

$$q_s = \lambda \int_{-B/2}^{B/2} \left( \frac{1}{\pi(B/2 + x)} + \frac{1}{\pi(B/2 - x)} \right) \cdot (f(x) - T_0) dx \quad (3.3.7)$$

(W/m)

Ovanstående formel är exakt.

Formel 3.3.7 kan fysikaliskt tolkas så att man har värme flöde längs två cirkelbågar. Detta illustreras i figur 3.3.4



Figur 3.3.4 Värmeflöde längs två cirkelbågar. Detta ger en fysikalisk tolkning av (3.3.7).

De två cirkelbågarna har sina centra vid plattans kanter. Halvcirkelbågarnas längder blir då  $\pi(B/2 - x)$  och  $\pi(B/2 + x)$ . Värmeflödet vid x blir med denna cirkelbågsapproximation:

$$q_n(x) \approx \lambda \cdot \frac{f(x) - T_0}{\pi(B/2 - x)} + \lambda \cdot \frac{f(x) - T_0}{\pi(B/2 + x)} \quad (\text{W/m}^2) \quad (3.3.8)$$

Det verkliga flödet  $q_n(x)$  skiljer sig punktvis från värdena enligt högra ledet. I integrerad form enligt (3.3.7) ger emellertid cirkelbågsresonemanget med två cirkelbågar korrekt flöde  $q_s$ .

Formel 3.3.8 är ej direkt användbar eftersom den innehåller den okända temperaturen  $f(x)$ . Genom att addera värmeisoleringens ekvivalenta tjocklek d till de två halvcirkelbågarnas längder erhålles följande cirkelbågsapproximation för  $q_n(x)$ :

$$q_n(x) \approx \lambda(T_i - T_0) \cdot \left( \frac{1}{\pi(B/2 - x) + d} + \frac{1}{\pi(B/2 + x) + d} \right) \quad (3.3.9)$$

Temperaturdifferensen blir nu mellan de kända temperaturerna  $T_i$  och  $T_0$ . Det skall här noteras att sättet att addera d är något godtyckligt. Man kan alternativt tänka sig att addera d till de två cirkelbågarnas gemensamma värmemotstånd vid parallellkoppling. Detta ger

en något mer komplicerad formel för  $q_s$ , utan att approximationen för  $q_s$  förbättras. Detta illustrerar det godtycke som finns i dessa cirkelbågsapproximationer.

Integralen av (3.3.9) ger  $q_s$ . Man får följande enkla formel:

$$q_s = \int_{-B/2}^{B/2} q_n(x) dx \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \frac{2}{\pi} \ln(\pi B/d + 1) \quad (3.3.10)$$

Detta ger följande cirkelbågsapproximation för värmeförlustfaktorn:

$$h_s \approx \frac{2}{\pi} \ln(\pi B/d + 1) \quad (0.01 < d/B < 0.3) \quad (3.3.11)$$

I figur 3.4.1 ges en jämförelse med numeriskt beräknade värden på  $h_s$ . Approximationen fungerar bra för relativt tunna isoleringar. Maximalt fel relativt numeriskt beräknade värden på  $h_s$  är 5% i intervallet  $0.01 < d/B < 0.3$ .

Ovanstående resonemang kan även tillämpas i det tredimensionella fallet med en rektangulär platta på mark. Detta redovisas i referens 4. Man får laborera med fyra cirkelbågar runt plattans fyra kantlinjer. Man kan ange cirkelbågsapproximationer för  $h_s$  vilka för små  $d/B$  stämmer hyggligt med numeriska värden enligt figur 3.1.1. Approximationerna innehåller dock ett visst godtycke och får en tämligen komplicerad form. De redovisas därför ej här.

### 3.4 Tvärsnitt av långsträckt platta

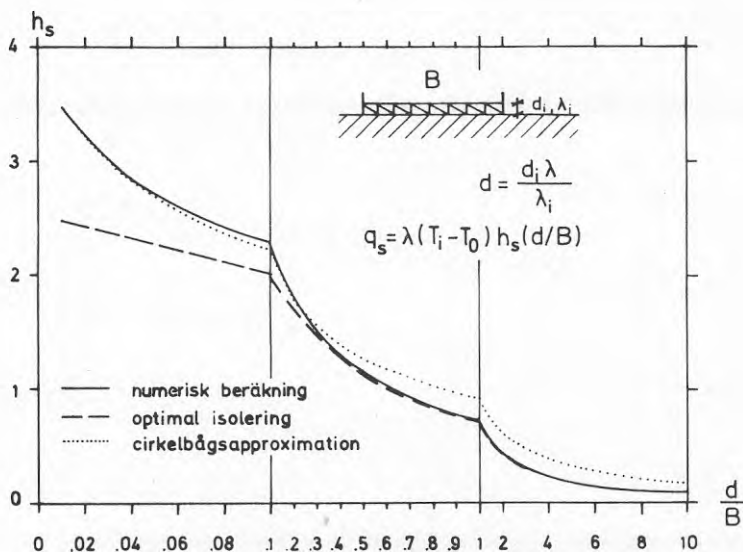
För en långsträckt platta sker temperaturförloppet huvudsakligen i ett vertikalt snitt vinkelrätt mot plattans längdriktning. Se t ex figur 3.3.3. Problemet innehåller de två längderna  $B$  och  $d$ .

#### 3.4.1 Värmeförlustfaktorn $h_s(d/B)$

Värmeförlusten  $q_s$  (W/m) ges enligt (2.3.6) i skalad form av

$$q_s = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_s(d/B) \quad (3.4.1)$$

Den numeriskt beräknade värmeförlustfaktorn  $h_s$  ges i figur 3.4.1. Den ges också av kurvan  $L/B = \infty$  i figur 3.1.1.



Figur 3.4.1 Värmeförlustfaktorn för tvärsnitt av långsträckt platta.

### 3.4.2 Approximativa formler

I avsnitt 3.2 och 3.3 anges approximativa formler för värmeförlustfaktorn för tvärsnitt av långsträckt platta.

För kraftigt isolerad platta gäller enligt (3.2.7) approximativt:

$$h_s \approx \frac{1}{d/B + \pi/8} \quad (d/B > 0.3) \quad (3.4.2)$$

För en platta med tunn värmeisolering gäller enligt (3.3.11):

$$h_s \approx \frac{2}{\pi} \ln(\pi B/d + 1) \quad (0.01 < d/B < 0.3) \quad (3.4.3)$$



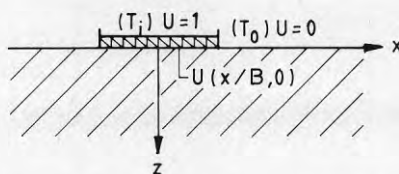
Dessa approximationer visas i figur 3.4.1. Enligt figuren blir det maximala felet jämfört med numeriskt beräknade värden för  $h_s$  mindre än 5% i de ovan angivna intervallen.

### 3.4.3 Temperaturprofiler under plattan

Den stationära temperaturen i marken direkt under värmeisoleringen är av intresse. Den betecknades ovan med  $f(x)$ ,  $-B/2 < x < B/2$ . Dimensionslös temperatur definieras av:

$$U(x/B, z/B) = \frac{T(x, z) - T_0}{T_i - T_0} \quad (3.4.4)$$

Dimensionslös temperatur  $U$  är noll vid markytan och +1 ovanför värmeisoleringen. Se figur 3.4.2.

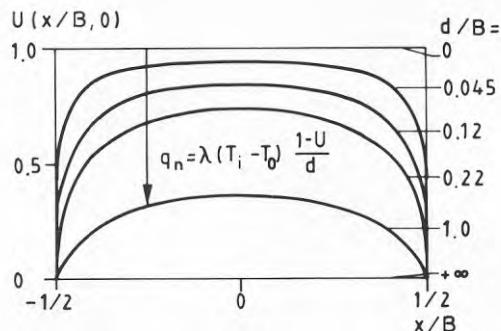


Figur 3.4.2 Villkor för dimensionslös temperatur  $U$  för en långsträckt platta.

I dimensionslös form innehåller det stationära värmeledningsproblemet enligt figur 3.4.2 en parameter  $d/B$ .

I figur 3.4.3 visas för olika isolertjocklekar  $d/B$  temperaturen  $U(x/B, 0)$ ,  $-1/2 < x/B < 1/2$ , enligt numeriska beräkningar.

Den relativa isolertjockleken ges av  $d/B$ . Utan isolering,  $d/B = 0$ , blir temperaturen  $U(x/B, 0)$  lika med +1. Då en tunn isolering pålägges sjunker temperaturen kraftigt vid kanterna, medan den fortfarande ligger nära +1 i det inre området. Vid kraftig värmeisolering ges temperaturen under plattan enligt referens 1C approximativt av:



Figur 3.4.3 Dimensionslös stationär temperatur under långsträckt platta; figur 3.4.2. Värmeflödet  $q_n$  är proportionellt mot  $1 - U$ .

$$U(x/B, 0) \approx \frac{1}{2d/B + \pi/4} \cdot \sqrt{1 - (2x/B)^2} \quad (3.4.5)$$

$$(-\frac{1}{2} < x/B < \frac{1}{2})$$

$$(d/B > 0.5)$$

Approximationen blir allt bättre då värmeisoleringen  $d/B$  ökar. Den högsta temperaturen får man mitt under plattan vid  $x = 0$ ,  $z = 0$ . Enligt (3.4.4) och (3.4.5) blir denna approximativt vid kraftig isolering:

$$T_{\max} = T(0, 0) \approx T_0 + (T_i - T_0) \cdot \frac{1}{2d/B + \pi/4} \quad (3.4.6)$$

$$(d/B > 0.5)$$

Värmeflödets fördelning över plattans bredd är också av intresse. Värmeflödet  $q_n(x)$  ( $W/m^2$ ) ges av:

$$q_n(x) = \frac{\lambda_i (T_i - T(x, 0))}{d_i} = \frac{\lambda (T_i - T_0)}{d} \cdot (1 - U(x/B, 0)) \quad (3.4.7)$$

Värmeflödet  $q_n(x)$ ,  $-B/2 < x < B/2$ , är proportionellt mot  $1 - U$ . Det representeras av den angivna pilen i figur 3.4.3.

### 3.5 Approximativ formel för värmeförlustfaktorn för rektangulär platta

En allmän approximativ formel för värmeförlusten för en platta på mark har framtagits genom passning. Den består av en bit som har sitt ursprung i cirkelbågsmetoden tillämpad på en rektangulär platta enligt referens 4 och en bit från optimal isolering.

För små värden på  $d/B$  beskrivs  $h_s$  av en logaritmisk och en exponentiell term. Den logaritmiska termen beror av  $d/B$  och den exponentiella termen beror av plattans form  $L/B$ .

För stora värden på  $d/B$  beskrivs  $h_s$  av uttrycket enligt optimal isolering, där  $u_m$  i formel 3.2.4 ges av en exponentialfunktion. Storheten  $u_m$  blir en funktion av  $L/B$ .

Approximationen för små och stora värden på  $d/B$  har passats ihop med en funktion (3.5.3). Denna blandar de två approximationerna i ett intervall kring  $d/B = 0.3$ . För stora värden på  $d/B$  viktas de två approximationerna så att uttrycket för optimal isolering dominerar. För mindre värden på  $d/B$  dominerar det andra uttrycket.

Konstanterna i uttrycket har passats så att approximationen av  $h_s$  blir så bra som möjligt.

Värmeförlustfaktorn blir approximativt:

$$h_s \approx (1 - X) \left\{ (0.617 + \gamma) \cdot \ln(B/d) + 0.866 - 0.431 \cdot \gamma \right\} + X \cdot \frac{1}{d/B + \pi/8 - 0.267 \cdot \gamma} \quad d/B > 0.05 \quad (3.5.1)$$

$$\gamma = e^{-0.7 \cdot L/B} \quad (3.5.2)$$

$$X = \frac{1}{1 + e^{5 \cdot (0.3 - d/B)}} \quad (3.5.3)$$

Approximationen ger ett maximalt fel på 6% för  $d/B > 0.05$  och ett maximalt fel på 4.2% för  $d/B > 0.1$ . Detta i jämförelse med numeriskt

beräknade värden.

Formel 3.5.1-3 är tänkt att användas i datorprogram för energibalanser. Man får ett relativt kompakt uttryck för kurvorna för värmeförlustfaktorn  $h_s$  enligt figur 3.1.1.

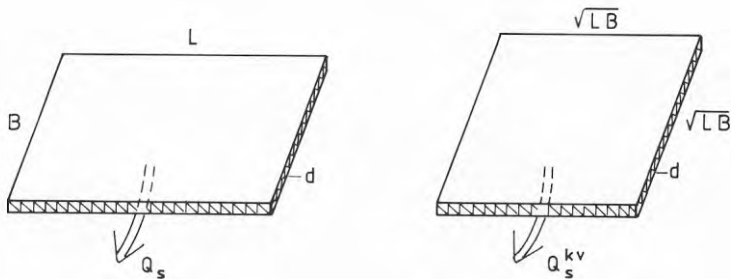
### 3.6 Värmeförlustens beroende av plattans form

I de tidigare avsnitten i detta kapitel har den rektangulära plattans värmeförlust behandlats. Dessa resultat skall ligga till grund för approximationer av värmeförlusten för plattor av annan form.

#### 3.6.1 Värmeförlustfaktor vid konstant area

Plattans form, storlek och isolertjocklek bestämmer värmeförlustens storlek. En långsträckt rektangulär platta ger en större värmeförlust än en kvadratisk platta med samma area. Skillnaden i värmeförlust vid konstant area skall undersökas i detta avsnitt.

Figur 3.6.1 visar en rektangulär och en kvadratisk platta med arean  $L \cdot B$ . De båda plattorna har den ekvivalenta isolertjockleken  $d$ . Värmeförlusten för den rektangulära plattan betecknas  $Q_s$  och för den kvadratiske  $Q_s^{kv}$ .



Figur 3.6.1 Värmeförlust för rektangulär och kvadratisk platta med samma area.

Värmeförlusten för plattorna ges av formel 3.1.1. För att jämföra de två plattornas värmeförluster studeras kvoten mellan dessa. Den blir:

$$\frac{Q_s}{Q_s^{kv}} = \sqrt{L/B} \cdot \frac{h_s(L/B, d/B)}{h_s(1, d/\sqrt{L \cdot B})} \quad (3.6.1)$$

I tabell 3.6.1 ges kvoten för ett antal värden på L/B och d/B. Värdet för de olika värmeförlustfaktorerna har hämtats ur figur 3.1.1.

L/B	d/B	$Q_s/Q_s^{kv}$	L/B	d/B	$Q_s/Q_s^{kv}$
1	alla	1	2.0	0.2	1.06
1.5	0.1	1.03	2.0	0.5	1.05
1.5	0.2	1.03	2.0	1.0	1.04
1.5	0.5	1.02	3.0	0.1	1.14
1.5	1.0	1.02	3.0	0.2	1.14
2.0	0.1	1.06	3.0	0.5	1.09

Tabell 3.6.1 Kvoten  $Q_s/Q_s^{kv}$  som funktion av L/B och d/B.

Tabellen visar att värmeförlusten  $Q_s$  är relativt okänslig för måttliga variationer av plattans form. En ändring från L/B = 1 till L/B = 2 ger ungefär 5% ökning av  $Q_s$ . Variationen med formen ökar då värmeisoleringen blir tunnare.

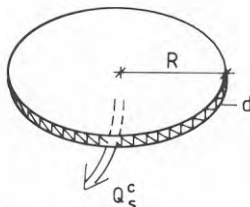
Denna relativa okänslighet för formförändringar gör att man kan ange följande approximativa formel för en plattas värmeförlust. Givet en platta av godtycklig form med arean A. Den får dock ej avvika kraftigt från en kvadrat. Då gäller approximativt:

$$Q_s \approx \lambda(T_i - T_o) \sqrt{A} \cdot h_s(1, d/\sqrt{A}) \quad (3.6.2)$$

Högra ledet anger värmeförlusten för en kvadratisk platta med sidan  $\sqrt{A}$ . Värmeförlustfaktorn  $h_s$  ges av kurvan L/B = 1 i figur 3.1.1.

### 3.6.2 Värmeförlustfaktor för cirkulär platta

Figur 3.6.2 visar en cirkulär platta på mark. Plattans ekvivalenta isolertjocklek är  $d$ . Temperaturen ovanför plattan är  $T_i$  och vid markytan utanför  $T_o$ . Plattans värmeförlust betecknas  $Q_S^C$ .



Figur 3.6.2 Värmeförlust för cirkulär platta på mark.

I värmeledningsproblemet ingår två längder  $R$  och  $d$ . Cirkelns radie  $R$  väljs som skalningslängd och multiplikativ faktor. Enligt avsnitt 2.3 kan värmeförlusten skrivas:

$$Q_S^C = \lambda(T_i - T_o)R \cdot h_S^C(d/R) \quad (3.6.3)$$

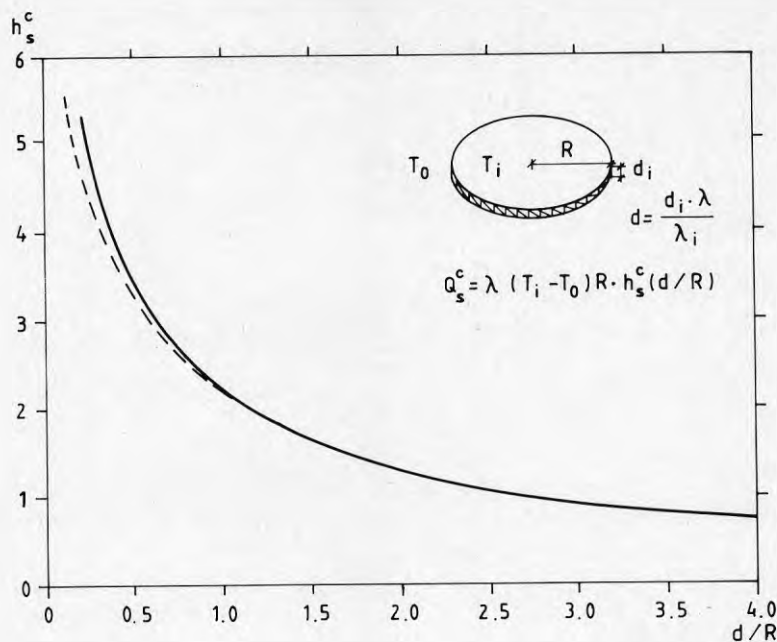
Värmeförlustfaktorn har beräknats numeriskt. Resultatet visas i figur 3.6.3.

I referens 1:D ges ett approximativt uttryck för  $Q_S^C$  ( $\pi R^2 \cdot q_1 + Q_S^C$ ). Detta uttryck gäller för kraftigt isolerade plattor. Approximationen ger följande uttryck för värmeförlustfaktorn:

$$h_S^C \approx \frac{\pi}{\frac{d}{R} + \frac{4}{3\pi}} \quad (3.6.4)$$

Den är införd i figur 3.6.3 som streckad kurva.

För  $d/R > 0.6$  blir felet i approximationen jämfört med numeriska beräkningar mindre än 3%.



Figur 3.6.3 Numeriskt beräknad värmeförlustfaktor  $h_s^c$  för cirkulär platta. Approximationen (3.6.4) ger streckad kurva.

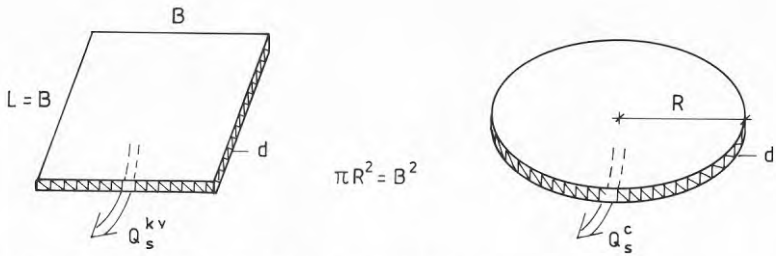
### 3.6.3 Värmeförlust för cirkel kontra kvadrat

I avsnitt 3.6.1 studerades hur plattans form inverkar på värmeförlustfaktorn. Jämförelsen gjordes för en kvadratisk och en rektangulär platta. I detta avsnitt skall en kvadratisk och en cirkulär platta jämföras.

Figur 3.6.4 visar en kvadratisk och en cirkulär platta med samma area. Plattornas ekvivalenta isolertjocklek är  $d$ . Värmeförlusten för plattorna betecknas  $Q_s^{kv}$  respektive  $Q_s^c$ .

I avsnitt 3.1 ges värmeförlusten för en kvadratisk platta. Värmeförlusten för den cirkulära plattan ges i avsnitt 3.6.2. Kvoten mellan värmeförlusterna uttrycks med hjälp av värmeförlustfaktorerna:

$$\frac{Q_s^{kv}}{Q_s^c} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{h_s^{kv}(1, d/B)}{h_s^c(\sqrt{\pi} \cdot d/B)} \quad (3.6.5)$$



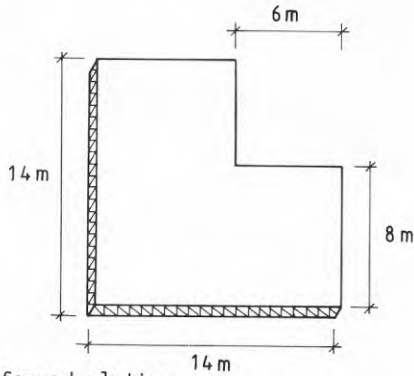
Figur 3.6.4 Värmeförlust för kvadratisk och cirkulär platta med lika area.

För  $d/B > 0.12$  blir kvoten maximalt 1.02. Värmeförlusterna från en kvadratisk och en cirkulär platta med samma area och isolering skiljer sig således obetydligt.

#### 3.6.4 Värmeförlust för några mer oregelbundna former

##### L-formad platta

Värmeförlusten för en L-formad platta med mått enligt figur 3.6.5 har beräknats för några olika isolertjocklekar  $d$ . Se tabell 3.6.2.



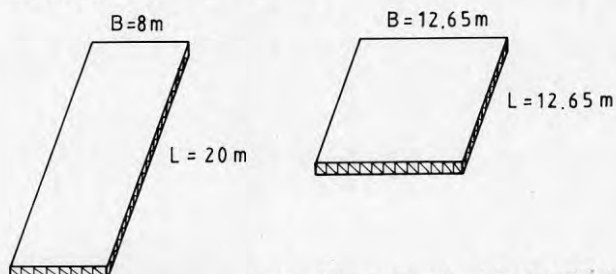
Figur 3.6.5 L-formad platta.

I avsnitt 3.6.1 visades att plattans area var av stor betydelse för storleken av dess värmeförlust. Två plattor med samma area och isolertjocklek har approximativt samma värmeförlust. Detta skall ligga



till grund för en approximation av värmeförlusten för den L-formade plattan.

Figur 3.6.6 visar en lämpligt vald rektangulär platta och en kvadratisk platta. Dessa plattor har samma area och isolertjocklek som den L-formade plattan i figur 3.6.5.



Figur 3.6.6 Två olika plattformar för approximativ beräkning av värmeförlust för L-formad platta enligt figur 3.6.5.

Värmeförlusten för dessa plattor beräknas enligt formel 3.1.1 och figur 3.1.1. Den ges i tabell 3.6.2 tillsammans med den numeriskt framräknade värmeförlusten för den L-formade plattan.

$$Q_s / [\lambda(T_i - T_o)] \text{ (m)}$$

	Numerisk beräkning	Rektangulär platta	Kvadratisk platta
d	46.3	48.0	43.6
(m)	34.8	37.0	33.5
	28.2	29.0	27.3
	23.8	24.6	23.4
	20.7	21.4	20.6

Tabell 3.6.2 Värmeförlust för L-formad platta enligt numerisk beräkning och enligt approximationerna i figur 3.6.6.

De två "omformade" plattorna ger goda approximationer för värmeförlusten. Felet i jämförelse med de numeriska värdena är mindre än 10% i det studerade intervallet för d.

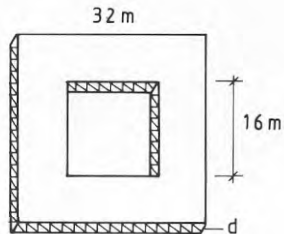
En kvadratisk platta ger som väntat ett för lågt värde för värmeförlusten. Den utgör därför en nedre gräns. Den rektangulära plattan överskattar värmeförlusten något.

En god allmän approximation av värmeförlusten för en L-formad platta ges av medelvärdet av värmeförlusten för den lämpligt valda rektangulära plattan och den kvadratiske plattan. Dessa skall ha samma area och isolertjocklek som den L-formade plattan.

Med denna approximation blir felet i värmeförlusten mindre än 2% för det redovisade exemplet.

#### Kringbyggd gård

Värmeförlusten för en kringbyggd gård med mått enligt figur 3.6.7 har beräknats för några olika isolertjocklekar. Resultatet ges i tabell 3.6.3.



Figur 3.6.7 Kringbyggd gård.

Om gården "rätas ut" erhålles en 96 meter lång byggnad med bredden 8 meter. Denna nya form ger en approximation av värmeförlusten för den kringbyggda gården. Värmeförlusten för långsträckt platta med längden 96 meter och varierande isolertjocklek ges i tabell 3.6.3. Härvid har formel 3.4.1 använts, varvid  $q_s$  (W/m) multiplicerats med längden 96 m.

$$Q_S / [\lambda(T_i - T_o)] \text{ (m)}$$

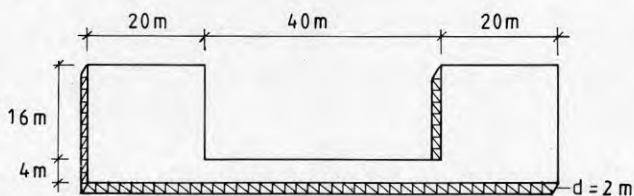
	Numerisk beräkning	Långsträckt platta
d		
(m) 1.0	189.4	201.6
2.0	146.7	153.6
3.0	121.5	126.0
4.0	104.2	108.0
5.0	91.4	92.2

Tabell 3.6.3 Värmeförlust för kringbyggd gård enligt numerisk beräkning och enligt approximation med långsträckt platta.

Den gjorda approximationen ger ett maximalt fel på 6% jämfört med numeriskt beräknade värden i det angivna intervallet för d.

#### U-formad platta

Värmeförlusten för en U-formad platta enligt figur 3.6.8 har beräknats för isolertjockleken  $d = 2$  m. Då erhålls värdet  $Q_S / [\lambda(T_i - T_o)] = 167.3$  (m).



Figur 3.6.8 U-formad platta.

En rimlig approximation är att ersätta den U-formade plattan med två kvadratiska plattor ( $20 \times 20 \text{ m}^2$ ) och en långsträckt platta med bredden 4 m och längden 40 m. Med formlerna (3.1.1) och (3.4.1) fås då:

$$\begin{aligned} \frac{Q_S}{\lambda(T_i - T_o)} &\approx 2 \cdot 20 \cdot h_S(20/20, 2/20) + 40 \cdot h_S(2/4) = \\ &= 2 \cdot 20 \cdot 3.21 + 40 \cdot 1.16 = 174.8 \text{ m} \end{aligned}$$

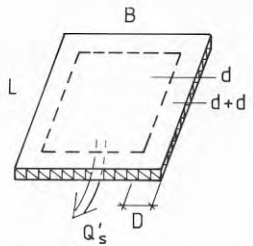
Felet i approximationen jämfört med det numeriskt beräknade värdet är cirka 4%.

## 4      EFFEKT AV OLIKA KANTISOLERINGAR

Temperaturen vid markytan under isoleringen för ett tvärsnitt av en långsträckt platta med konstant isolering visas i figur 3.4.3. I denna ges också värmeflödet  $q_n$  ( $W/m^2$ ) genom isoleringen. Flödet blir störst ytterst vid kanterna. För att minska värmeförlusterna kan kantområdet isoleras extra. I detta kapitel skall effekten av en sådan extra kantisolering studeras.

## 4.1      Platta med extra kantisolering

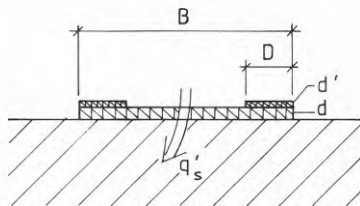
Figur 4.1.1 visar en platta med extra isolering längs kanterna. Den ekvivalenta isolertjockleken är  $d + d'$  i ett kantområde med bredden  $D$  ( $d + d' = (d_i + d'_i)\lambda/\lambda_i$ ). Innanför kantområdet är ekvivalent isolertjocklek  $d$ . Längden  $d'$  blir negativ om värmeisoleringen är tunnare i kantområdet ( $d' + d > 0$ ,  $d' > -d$ ).



Figur 4.1.1 Rektangulär platta på mark med extra kantisolering.

Värmeförlusten för plattan i figur 4.1.1 betecknas  $Q'_s$  (W). Då ingen extraisolering finns längs kanterna ( $d' = 0$ ) betecknas värmeförlusten  $Q_s$  (W) som tidigare.

Figur 4.1.2 visar ett tvärsnitt av en långsträckt platta med extra kantisolering.



Figur 4.1.2 Tvärsnitt av en långsträckt platta med extra kantisolering.

Värmeförlusten per längdenhet för plattan i figur 4.1.2 betecknas  $q'_S$  (W/m). Då ingen extraisolering finns vid kanterna betecknas värmeförlusten  $q_S$  (W/m).

#### 4.1.1 Skalning vid extra kantisolering

Värmeförlusten  $Q_S$  (W) för en jämnt isolerad rektangulär platta är en funktion av de dimensionslösa parametrarna  $L/B$  och  $d/B$ . Dessutom är  $Q_S$  proportionell mot  $L$ . Se formel 3.1.1. I fallet med extra kantisolering tillkommer de två längderna  $D$  och  $d'$ . Värmeförlusten  $Q'_S$  (W) beror därför av ytterligare två dimensionslösa parametrar. Den kan skrivas:

$$Q'_S = \lambda(T_i - T_o)L \cdot h_S(L/B, d/B, D/d, d'/d) \quad (4.1.1)$$

För en jämnt isolerad långsträckt platta ges värmeförlusten per längdenhet av  $q_S$  (W/m). Den blir en funktion av den dimensionslösa parametern  $d/B$ . Se formel 3.4.1. I fallet med extra kantisolering tillkommer de två längderna  $D$  och  $d'$ . Värmeförlusten  $q'_S$  (W/m) beror därför av ytterligare två dimensionslösa parametrar. Den kan skrivas:

$$q'_S = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_S(d/B, D/d, d'/d) \quad (4.1.2)$$

#### 4.1.2 Allmän kantvärmeförlustfaktor

Ändringen av värmeförlusten för en långsträckt platta orsakad av en extra kantisolering ges av skillnaden  $q'_S - q_S$ . En allmän kantvärmeförlustfaktor  $h'_S$  för ett tvärsnitt av en långsträckt platta definieras enligt:

$$h'_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{q'_S - q_S}{\lambda(T_i - T_o)} \quad (4.1.3)$$

Storheten  $h'_S$  anger effekten av den extra kantisoleringen fördelad på de två kanterna.

$$q'_S = q_S + 2 \cdot \lambda(T_i - T_o)h'_S \quad (4.1.4)$$

Ändringen av värmeförlusten för en rektangulär platta orsakad av en extra kantisolering ges av  $Q'_S - Q_S$ . En allmän kantvärmeförlustfaktor för platta definieras analogt med tvärsnittsfallet enligt:

$$h'_S = \frac{1}{L_e} \cdot \frac{Q'_S - Q_S}{\lambda(T_i - T_o)} \quad (4.1.5)$$

Här anger  $L_e$  (edge) kantlängden runt plattan. För en rektangulär platta gäller:

$$L_e = 2L + 2B \quad (4.1.6)$$

Värmeförlusten för en platta med extra kantisolering blir:

$$Q'_S = Q_S + L_e \cdot \lambda(T_i - T_o) \cdot h'_S \quad (4.1.7)$$

Storheten  $h'_S$  anger effekten av den extra kantisoleringen i dimensionslös form. Den relateras via skalfaktorn  $L_e$  till en längdenhet längs plattans kant.

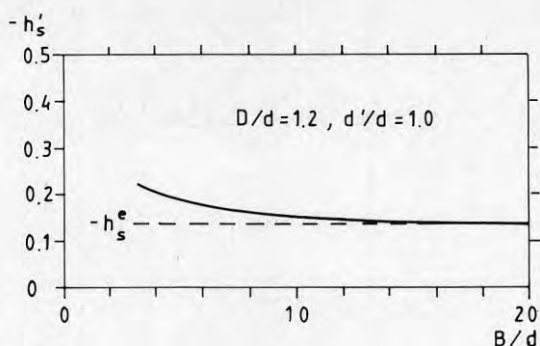
4.2 Kantvärmeförlustfaktor  $h_S^e$  som gränsvärde för stor platta

Värmeförlusten för en rektangulär platta kan beräknas då den allmänna kantvärmeförlustfaktorn  $h'_S$  är känd. Se formel 4.1.7. Den beror av de fyra parametrarna  $L/B$ ,  $d/B$ ,  $D/d$  och  $d'/d$ .

I detta avsnitt härleds approximativa uttryck för  $h'_S$ , vilka gäller för stora plattor. För dessa plattor beror  $h'_S$  huvudsakligen av  $D/d$  och  $d'/d$ . Man får en renodlad kantvärmeförlustfaktor  $h_S^e$  (edge).

4.2.1 Tvärsnitt av långsträckt platta

Den allmänna kantvärmeförlustfaktorn  $h'_S$  enligt (4.1.3) har beräknats numeriskt för olika bredd  $B$  för ett tvärsnitt av en långsträckt platta. Värmeisoleringen  $d$  är konstant. Den extra kantisoleringen är också konstant ( $d' = d$ ,  $D = 1.2d$ ). Resultatet visas i figur 4.2.1.



Figur 4.2.1 Den allmänna kantvärmeförlustfaktorns variation med bredden för en långsträckt platta.

Då plattans bredd ökar går  $h'_s$  mot ett gränsvärde. För tillräckligt breda plattor beror således  $h'_s$  ej av plattans bredd. Ändringen i värmeledningen från plattan är huvudsakligen koncentrerad till en kantzon. Den extra kantisoleringen ger upphov till en kanteffekt. Detta innebär att varje kant kan behandlas separat utan att hänsyn behöver tas till plattans globala geometri.

Det konstanta värdet på  $h'_s$  för breda plattor definieras enligt:

$$h_s^e = \lim_{B \rightarrow \infty} h'_s(d/B, D/d, d'/d) \quad (4.2.1)$$

Gränsvärdet  $h_s^e$  (edge) skall kallas kantvärmeförlustfaktorn (för bred platta). Den blir en funktion enbart av  $D/d$  och  $d'/d$ , vilket är en stor förenkling. Numeriskt beräknade värden på  $h_s^e$  ges i avsnitt 4.3.

Den allmänna kantvärmeförlustfaktorn  $h'_s$  kan approximeras med kantvärmeförlustfaktorn  $h_s^e$  om plattan är tillräckligt bred. Man har approximationen:

$$h'_s(d/B, D/d, d'/d) \approx h_s^e(D/d, d'/d) \quad (4.2.2)$$

( $B/D \geq 10$ )

Denna approximation täcker de normala fallen med extraisolering vid kanten för långsträckta plattor.

Skillnaden mellan  $h'_S$  och  $h^e_S$  visas i figur 4.2.1 för fallet  $d = 1$  m,  $D = 1.2$  m och  $d' = 1$  m. Den allmänna kantvärmeförlustfaktorn avviker mer än 50% från  $h^e_S$  då  $B$  är mindre än 3.8 m. Skillnaden blir mindre än 10% då  $B$  är större än 10 m. Man finner allmänt att approximationen (4.2.2) har ett maximalt fel på 10% då  $B/D$  är större än 10. I området

$$10 > B/D > 5 \quad (4.2.3)$$

ligger  $-h'_S$  upp till cirka 50% över  $-h^e_S$ .

Den totala värmeförlusten  $q'_S$  för ett tvärsnitt av ett långsträckt hus blir enligt (4.1.4), (4.2.2) och (3.4.1) approximativt:

$$q'_S \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \left\{ h_S(d/B) + 2 \cdot h^e_S(D/d, d'/d) \right\} \quad (4.2.4)$$

$$(B/D > 10)$$

Här ges  $h_S(d/B)$  av figur 3.4.1, medan kantvärmeförlustfaktorn  $h^e_S$  ges i nästa avsnitt.

För en (inre) kantisolering enligt figur 4.1.2 ligger alltid  $-h'_S$  över  $-h^e_S$ . Approximationen ovan överskattar därför värmeförlusten något. För en yttre kantisolering enligt figur 4.3.3 ges  $h^e_S$  av figur 4.3.4. I detta fall ligger  $-h'_S$  alltid under  $-h^e_S$ . Approximationen (4.2.4) underskattar därför värmeförlusten något för yttre kantisolering.

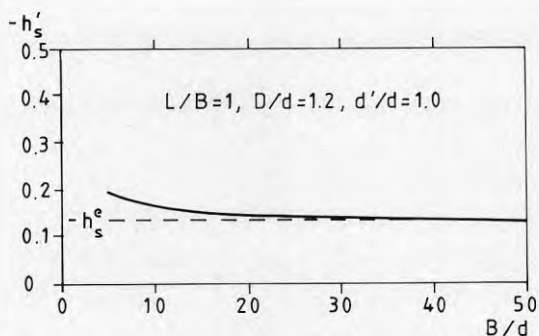
#### 4.2.2 Rektangulär platta

Då en rektangulär platta ges en extra kantisolering förändras värmeflödet  $q_n$  ( $W/m^2$ ) genom plattan. För stora plattor sker förändringen i en kantzon, medan  $q_n$  i huvudsak är opåverkad längre in mot plattans mitt. Temperaturförloppet i kantzonen är tredimensionellt nära plattans fyra hörn. I övrigt är förloppet i kantzonen huvudsakligen tvådimensionellt i ett plan vinkelrätt mot plattans kantlinje. För stora plattor bör därför förändringen av värmeförlusten vid extra kantisolering kunna beräknas med hjälp av resultatet från



analysen för tvärsnitt av långsträckt platta enligt föregående avsnitt.

För att testa ovanstående resonemang har den allmänna kantvärmeförlustfaktorn (4.1.5) beräknats numeriskt för olika stora kvadratiska plattor ( $d = 1$  m,  $L = B$  variabel,  $D = 1.2$  m,  $d' = 1$  m). Resultatet visas i figur 4.2.2.



Figur 4.2.2 Den allmänna kantvärmeförlustfaktorns variation med sidan  $L = B$  för en kvadratisk platta.

Då plattans sidlängd  $L = B$  ökar, går  $h'_s$  mot gränsvärdet  $-0.13$ . I det tvådimensionella fallet med samma kantisolering blev det numeriskt beräknade gränsvärdet  $-0.14$  enligt figur 4.2.1. Överensstämmelsen är anmärkningsvärt god med hänsyn till den numeriska räkneprecisionen för det tredimensionella fallet. Kantisoleringen ger en större effekt vid hörnen än vid kanterna men det numeriska felet motverkar denna effekt.

För stora rektangulära plattor blir följande approximation rimlig.

$$h'_s(L/B, d/B, D/d, d'/d) \approx h_s^e(D/d, d'/d) \quad (4.2.5)$$

$$(L/D, B/D \gg 10)$$

Detta ger följande värmeförlust enligt (4.1.7) och (4.2.5):

$$Q'_s \approx Q_s + L_e \cdot \lambda (T_i - T_o) \cdot h_s^e \quad (4.2.6)$$

Sammanfattningsvis gäller med (3.1.1) följande approximativa uttryck för en stor rektangulär platta med extra kantsisolering:

$$Q'_S \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \left\{ L \cdot h_S(L/B, d/B) + (2L + 2B) \cdot h_S^e(D/d, d'/d) \right\}$$

$$(L/D, B/D > 10)$$

(4.2.7)

Här ges  $h_S$  av figur 3.1.1 och  $h_S^e$  i nästa avsnitt.

Liksom i det tvådimensionella fallet överskattar approximationen (4.2.7) värmeförlusten något, eftersom  $-h'_S$  alltid blir större än  $-h_S^e$  för inre extra kantsisolering.

Enligt figur 4.2.2 ligger  $-h'_S$  över  $-h_S^e$ . För  $B/D = 5, 10$  och  $20$  är avvikelserna cirka 50%, 25% respektive 10%. Dessa siffror ger en uppfattning om precisionen i approximationen (4.2.5). Effekten av kantsisoleringen ges av skillnaden  $Q'_S - Q_S$ . Allmänt gäller att felet relativt  $Q'_S - Q_S$  i approximationerna (4.2.5) och (4.2.7) är maximalt:

10%	då $L/D, B/D > 20$	
25%	då $L/D, B/D > 10$	(4.2.8)
50%	då $L/D, B/D > 5$	

Kanteffekten  $Q'_S - Q_S$  är normalt i storleksordningen 5-20 gånger mindre än  $Q'_S$ . Felet i approximationen (4.2.7) relativt  $Q'_S$  är då en faktor 5-20 gånger mindre än de ovan angivna.

Kantvärmeförlustfaktorn  $h_S^e$  kan således användas för grova uppskattningar då  $L/D, B/D > 5$ . Vid mer precisa uppskattningar, t ex då man försöker optimera kantsisoleringen kan  $h_S^e$  utnyttjas då  $L/D, B/D > 20$  eller möjligen då  $L/D, B/D > 10$ .

Många approximativa metoder och recept för värmeförluster mot mark utnyttjar en inre zon och en kantzon utan inbördes påverkan. Ovanstående resultat visar begränsningarna hos sådana resonemang. Man kan renodla en kanteffekt enbart för förhållandevis stora plattor.

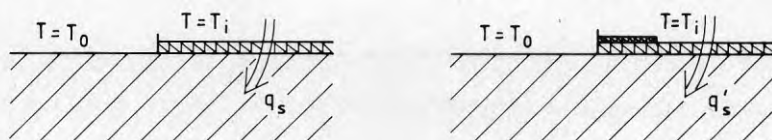
### 4.3 Numeriskt beräknade värden på $h_S^e$

Kantvärmeförlustfaktorn  $h_S^e$  har beräknats numeriskt. Figurerna 4.1.1 och 4.1.2 illustrerar fallet med en inre kantisolering. Även fallet med en yttre kantisolering enligt figur 4.3.3 har behandlats.

Beräkningarna av  $h_S^e$  för olika parametervärden har genomförts med en speciell numerisk teknik, där man ansätter en Fourierserietutveckling för de okända temperaturerna under plattan. Metoden redovisas i referens 6. Felen i angivna värden på  $h_S^e$  är mindre än 1%.

#### 4.3.1 Inre kantisolering

Figur 4.3.1 illustrerar det aktuella värmeströmningsproblemet vid kanten av en platta. Problemet är tvådimensionellt. I referensfallet är värmeisoleringen jämntjock med den ekvivalenta tjockleken  $d$ . Den jämntjocka värmeisoleringen tänkes ha oändlig utsträckning åt höger. I fallet med kantisolering enligt höger bild är den ekvivalenta isolertjockleken  $d + d'$  för isoleringen vid kanten. Kantisoleringens bredd är  $D$ .



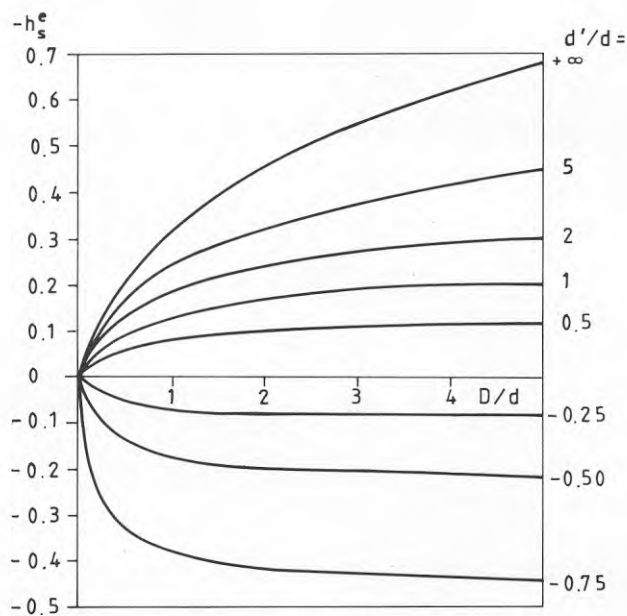
Figur 4.3.1 Kant av platta utan respektive med extra inre kantisolering.

Kantvärmefaktorn ges enligt (4.1.3) av:

$$h_S^e = \frac{q'_s - q_s}{\lambda(T_i - T_0)} \quad (4.3.1)$$

Faktorn 2 bortfaller här eftersom en "halvoändlig" platta studeras. Kantvärmefaktorn beror av  $D/d$  och  $d'/d$ . Numeriskt beräknade värden ges i figur 4.3.2. De negativa värdena,  $0 > d'/d > -1$ , innebär att

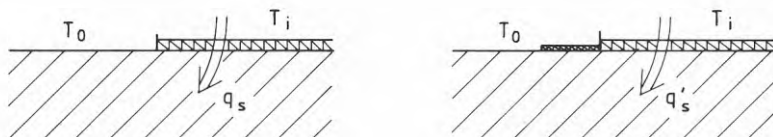
kantområdet har en tunnare isolering.



Figur 4.3.2 Kantvärmeförlustfaktorn vid extra inre kantisolering.

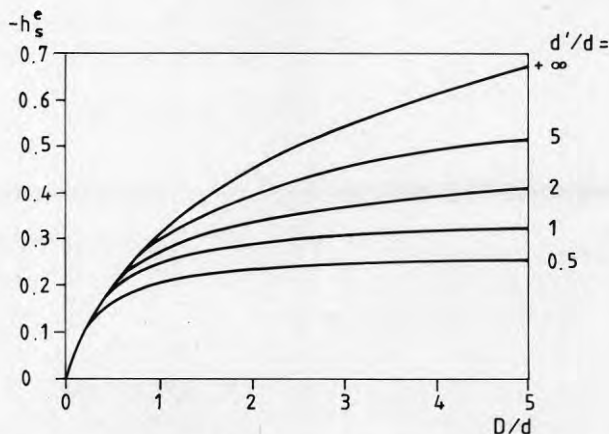
#### 4.3.2 Yttre kantisolering

Figur 4.3.3 illustrerar fallet med en yttre kantisolering. I referensfallet enligt den vänstra figuren har man en isolering med den ekvivalenta tjockleken  $d$ . I den högra figuren har man en extra yttre isolering utanför plattans kant. Denna har bredden  $D$  och den ekvivalenta isolertjockleken  $d'$ .



Figur 4.3.3 Kant av platta utan respektive med extra yttre kantisolering.

Kantvärmeförlustfaktorn  $h_S^e$  ( $D/d$ ,  $d'/d$ ) definieras av formel 4.3.1. Numeriskt beräknade värden ges i figur 4.3.4.



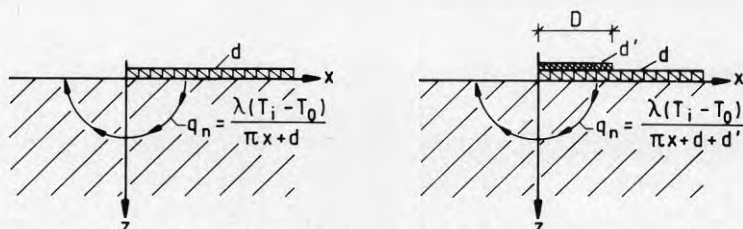
Figur 4.3.4 Kantvärmeförlustfaktor vid extra yttre isolering.

#### 4.4 Cirkelbågsapproximationer

I avsnitt 3.3 behandlades så kallade cirkelbågsapproximationer. Dessa skall utnyttjas för att ange approximativa uttryck för värmeflödet  $q_n$  ( $W/m^2$ ) genom en platta utan och med extra kantisolering. Härigenom erhålles approximativa uttryck för kantvärmeförlustfaktorn  $h_S^e$ .

##### 4.4.1 Cirkelbågsapproximation för $h_S^e$

Figur 4.4.1 visar ett tvärsnitt av en bred långsträckt platta utan och med extra kantisolering. I figuren anges värmeflödet  $q_n$  ( $W/m^2$ ) enligt cirkelbågsapproximation. Se formel 3.3.6.



Figur 4.4.1 Värmeflöde enligt cirkelbågsapproximation vid kant av bred isolerad platta utan och med extra kantisolering.

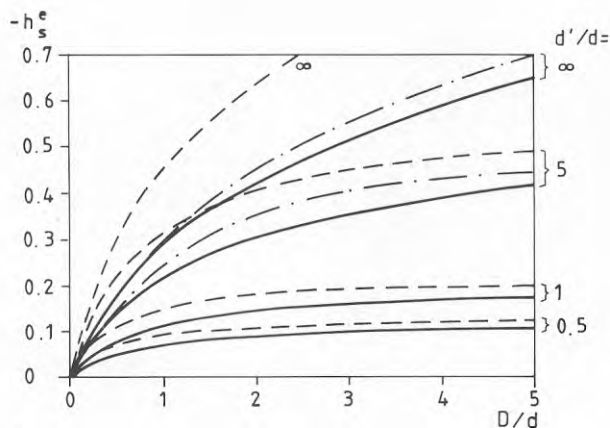
Vid kanten där den extra kantisoleringen är belägen skiljer sig värmeflödena åt för de två fallen i figuren. För att erhålla  $h_S^e$  enligt (4.3.1) skall skillnaden i värmeflödet integreras över hela plattan. I detta fall reduceras integrationen till intervallet  $0 < x < D$ .

En approximation av kantvärmeförlustfaktorn  $h_S^e$  blir då:

$$h_S^e \approx \int_0^D \left( \frac{1}{\pi x + d + d'} - \frac{1}{\pi x + d} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{\frac{\pi D}{d} + \frac{1 + d'/d}{1}}{\frac{\pi D}{d} + 1} \right) \quad (4.4.1)$$

Approximationen är införd i figur 4.4.2 tillsammans med de exakta numeriskt beräknade värdena.



Figur 4.4.2 Kantvärmeförlustfaktor  $h_S^e$  enligt exakt numerisk beräkning (—) och enligt cirkelbågsapproximationen enligt (4.4.1) (---) och (4.4.3) (-·-·-).

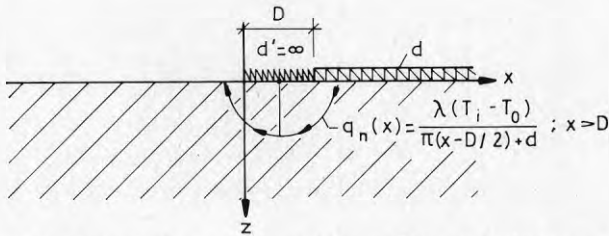
Det maximala felet i approximationen är  $-0.05$  för  $d'/d = 1$  och  $D/d < 5$ . Storheten  $-h_S^e$  har ett belopp som är mindre än  $0.18$  i detta intervall. I samma intervall är det maximala felet  $-0.26$  för  $d'/d = +\infty$ . Felets storlek ökar då  $d'/d$  växer.

Det bör påpekas att den givna approximationen för  $h_S^e$  gäller både för inre och yttre kantisolering. Cirkelbågsapproximationen tar ej hänsyn till var på de tänkta värmeflödesvägarna isoleringen är belägen.

#### 4.4.2 Cirkelbågsapproximation för $h_S^e$ för kraftig extraisolering

För kraftig extra kantisolering blir felet i approximationen (4.4.1) stort. En alternativ cirkelbågsapproximation för kraftig extra kantisolering skall därför härledas.

Figur 4.4.3 visar gränsfallet med en totalisolering ( $d' = \infty$ ) vid kanten. Antag nu att värmeflödet följer cirkelbågar med centrum mitt på kantisoleringen ( $x = D/2, z = 0$ ). Det bör här noteras att detta är ett tämligen godtyckligt antagande.



Figur 4.4.3 Antagande om värmeflöde längs cirkelbågar med centrum mitt på det totaliserade kantområdet.

Kantvärmeförlustfaktorn enligt (4.3.1) ges nu approximativt av skillnaden mellan  $q_n(x)$  enligt figur 4.4.3 och vänster bild i figur 4.4.1:

$$h_S^e \approx \int_D^{\infty} \frac{1}{\pi(x - D/2) + d} dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi x + d} dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{\pi D}{2d} + 1 \right) \quad (4.4.2)$$

Då kantisoleringen inte är total kommer ett visst värmefflöde att gå genom den. För kraftiga kantisoleringar blir detta värmefflöde litet. Temperaturen under kantisoleringen kommer i stort sett att vara densamma som vid totalisolering. Värmefflödet genom kantisoleringen blir därför proportionellt mot bredden  $D$  och omvänt proportionell mot isoleringen  $d'$ . En proportionalitetsfaktor har passats till numeriskt beräknade värmefflöden.

Kantvärmefförlustfaktorn enligt (4.4.2) förändras och blir

$$h_s^e \approx -\frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\pi D}{2d'} + 1\right) + 0.025 \cdot D/d' \quad (4.4.3)$$

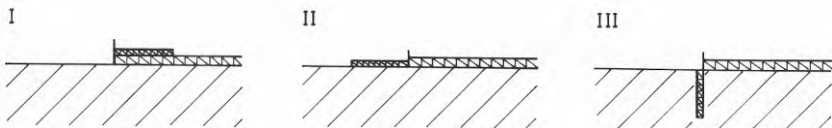
Punktstreckade kurvor i figur 4.4.2 visar denna approximation för  $d'/d = 5$  och  $d'/d = +\infty$ .

Det absoluta felet i approximationen är maximalt  $-0.05$  för  $d'/d > 5$  och  $D/d < 5$ .

Ovanstående resultat illustrerar vad man kan åstadkomma med cirkelbågsapproximationer. De ger ofta tämligen hyggliga resultat. De bör dock användas med försiktighet.

#### 4.5 Jämförelse mellan inre, yttre och vertikal kantisolering

En extra kantisolering kan placeras på olika sätt. Figur 4.5.1 visar tre fall, vilka skall jämföras. Fall I är en inre extra kantisolering, fall II en yttre horisontell kantisolering och fall III en isolering vertikalt nedåt. Den extra isoleringen är lika i de tre fallen (samma  $D$  och  $d'$ ).



Figur 4.5.1 Jämförelse mellan inre, yttre och vertikal extra kantisolering.



I tabell 4.5.1 ges kantvärmeförlustfaktorn  $h_s^e$  för de olika placeringarna för fyra värden på extraisoleringens tjocklek ( $D/d = 1$ ).

$d'/d$	$h_s^e$			$D/d = 1$
	I	II	III	
0.5	-0.08	-0.21	-0.15	
1.0	-0.13	-0.25	-0.21	
5.0	-0.24	-0.30	-0.32	
$+\infty$	-0.31	-0.31	-0.37	

Tabell 4.5.1 Kantvärmeförlustfaktorn  $h_s^e$  för de tre fallen enligt figur 4.5.1 för olika tjocklek på extraisoleringen.

En jämförelse mellan I och II visar att den yttre horisontella värmeisoleringen alltid är bättre än den inre. Detta stämmer med teorin för optimal värmeisolering, referens 1, enligt vilken (infinitesimal) extra värmeisolering bör placeras längs de ytor där värmeflödet är störst. Vid oändlig extraisolering sammanfaller I och II.

Vid måttlig extraisolering är fall III sämre än fall II. Det är då något bättre med yttre horisontell isolering än med en vertikal. Vid kraftig extraisolering är emellertid fall III bättre än fall II. Detta beror på att värmeflödet tvingas gå ned och runt om den vertikala isoleringen. Detta ger en längre flödesväg än i det horisontella fallet.

Det bör noteras att cirkelbågsapproximationen enligt avsnitt 4.4.1 ger samma värde på kantvärmeförlustfaktorn för de olika placeringarna, vilket är felaktigt.

#### 4.6 Några exempel och analyser

##### 4.6.1 Variation av kantisoleringen

För att belysa effekten av kantisoleringen skall resultaten ovan tillämpas på grundfall A och grundfall C avseende liten ( $12 \times 8 \text{ m}^2$ ) respektive stor platta ( $30 \times 15 \text{ m}^2$ ). Den extra kantisoleringens bredd  $D$  och ekvivalenta tjocklek  $d'$  varieras.

Exempel 4.6.1 Grundfall A med inre kantisolering. Data för grundfall A ges av (1.10A). Enligt exempel 3.1.1 gäller för fallet utan extra kantisolering:

$$d = 3 \text{ m} \quad (L = 12 \text{ m}, B = 8 \text{ m})$$

$$Q_S = 427 \text{ W}$$

Som grundfall för den extra kantisoleringen tas:

$$d' = 3 \text{ m} \quad D = 0.8 \text{ m}$$

Detta ger:

$$D/d = 0.8/3 = 0.27 \quad d'/d = 1$$

Figur 4.3.2 ger:

$$h_S^e(0.27, 1) \approx -0.064$$

Formel (4.2.7) kan tillämpas med någorlunda precision, eftersom  $L/D = 12/0.8 = 15$ ,  $B/D = 8/0.8 = 10$ :

$$\begin{aligned} Q_S' - Q_S &= \lambda(T_i - T_o) \cdot (2L + 2B) \cdot h_S^e = \\ &= 1.5 \cdot 15 \cdot 40 \cdot (-0.064) = -58 \text{ W} \end{aligned}$$

$$Q_S' = 369 \text{ W}$$

Den extra kantisoleringen ger ungefär 14% sänkning av värmeförlusten.

Variation av bredden D för  $d' = 3 \text{ m}$  ger följande värmeförluster:

$d' = 3 \text{ m}$	D (m)	0	0.25	0.5	0.8
	$Q_S'$ (W)	427	403	385	369

Variation av  $d'$  för  $D = 0.8$  m ger:

$D = 0.8$ m	$d'$ (m)	-1.5	-0.75	0	1.5	3	6	$\infty$
	$Q'_S$ (W)	524	462	427	389	369	348	304

Exempel 4.6.2 Grundfall C med inre kantisolering. Data för grundfall C ges av (1.10C). Enligt exempel 3.1.1 gäller för fallet utan extra kantisolering:

$$d = 3 \text{ m} \quad (L = 30 \text{ m}, B = 15 \text{ m})$$

$$Q_S = 1404 \text{ W}$$

För olika bredd  $D$  på kantisoleringen erhålles för  $d' = 3$  m:

$d' = 3$ m	$D$ (m)	0	0.5	1	1.5
	$Q'_S$ (W)	1404	1309	1258	1216

För olika tjocklek på den extra kantisoleringen erhålles för  $D = 1$  m:

$D = 1$ m	$d'$ (m)	-1.5	-0.75	0	1.5	3	6	$\infty$
	$Q'_S$ (W)	1643	1491	1404	1309	1258	1204	1088

För de aktuella fallen med relativt välisolerad platta på mark blir enligt exemplen ovan effekten av en extra kantisolering måttlig. I de aktuella exemplen ger en fördubbling av värmeisoleringen för den yttersta metern en minskning i storleksordningen 10% av stationär värmeförlust.

#### 4.6.2 Optimal fördelning av värmeisoleringen mellan kantområde och inre område

En intressant fråga är hur man skall fördela värmeisoleringen mellan en kantzon och ett inre område för att få så liten värmeförlust som möjligt. En komplett optimering kräver att både stationär värmeför-

Lust och dynamiska komponenter beaktas. Här skall bara den stationära komponenten behandlas.

Förutsättningen för en optimal fördelning av värmeisoleringen är att man har en given totalvolym isolermaterial. Låt  $d_m$  vara värmeisoleringens ekvivalenta medeltjocklek. Plattans area är  $A_i$  och kantzonens area  $A_e$ . Då gäller:

$$A_i \cdot d_m = (A_i - A_e) \cdot d + A_e \cdot (d + d')$$

eller

$$d_m = d + \frac{A_e}{A_i} d' \quad (4.6.1)$$

För en rektangulär platta enligt figur 4.1.1 gäller:

$$A_i = LB \quad A_e = (2L + 2B) \cdot D - 4D^2 \quad (4.6.2)$$

Exempel 4.6.3 Optimal fördelning av värmeisolering för grundfall C. Data för grundfall C ges av (1.10C). Kantisoleringens bredd hålls konstant:

$$D = 1.5 \text{ m}$$

Detta ger enligt (4.6.2):

$$A_i = 30 \cdot 15 = 450 \text{ m}^2 \quad A_e = 90 \cdot 1.5 - 4 \cdot 1.5^2 = 126 \text{ m}^2$$

Medelisolertjockleken  $d_m$  väljes lika med grundfalllets isolertjocklek:

$$d_m = 3 \text{ m.}$$

För t ex  $d = 2 \text{ m}$  erhålles:

$$3 = 2 + \frac{126}{450} \cdot d' \quad d' = 3.57 \text{ m}$$

Formel 4.2.7 ger värmeförlusten

$$Q'_S = 1348 \text{ W} \quad (d'/d = 1.79)$$

Beräkning av ovanstående typ utföres för  $d = 2.75, 2.5, 2, 1.5$  och  $2.35$  m. Även fallet  $d = 3.5$  m har medtagits ( $d + d' = 3.5 - 1.79$  m). Resultatet ges i nedanstående tabell.

$d$ (m)	3.5	3	2.75	2.5	2.35	2.0	1.5
$d'$ (m)	-1.79	0	0.89	1.79	2.35	3.57	5.35
$d'/d$	-0.51	0	0.32	0.72	1	1.79	3.57
$Q'_S$ (W)	1597	1404	1383	1338	1323	1348	1375

Man får ett minimum för  $d' \approx d$ . Detta minimum är mycket flackt. Då  $d'/d$  varierar från 0 till 2, varierar  $Q'_S$  maximalt 5%.

En minimering av värmeförlusten såsom i exemplet ovan är numeriskt tveksam, eftersom variationerna kring minimum är i samma storleksordning som de numeriska felen. Värdena på  $Q'_S$  i exemplet ovan skall därför tas med en viss reservation. Det man däremot med säkerhet kan konstatera är att den optimala isolerfördelningen har ett flackt minimum. Detta innebär, som en viktig slutsats för dessa relativt kraftigt isolerade plattor, att man inte kan göra mer än måttliga förbättringar av stationär värmeförlust genom en optimal värmeisoleringsfördelning.

## 5 PERIODISK VÄRMEFÖRLUST

I detta kapitel skall den periodiska komponenten av värmeförlusten från en byggnad av typen platta på mark behandlas. Den periodiska delprocessen definieras av den nedre högra bilden i figur 2.1.2. Vid markytan råder en sinusvarierande temperatur med periodtiden  $t_0$  och amplituden  $T_1$ . I byggnaden ovanför isoleringen är temperaturen noll för det periodiska problemet.

Superponering av olika sinus- och cosinuskomponenter behandlas i avsnitt 5.4. Den periodiska värmeförlusten skall superponeras på stationär komponent och eventuella temperatursteg.

Marken antas homogen med värmeledningsförmågan  $\lambda$  (W/mK) och temperaturledningstalet  $a$  ( $m^2/s$ ). Inträngningsdjupet för den periodiska temperaturvariationen vid markytan ges enligt (2.4.18) av:

$$d_0 = \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} \quad (5.0.1)$$

Storheten  $d_0$  anger enligt (2.4.17) hur temperaturens amplitud dämpas nedåt i ostörd mark.

Värmeisoleringen antas vara konstant över plattan. Den ges av den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  (m) enligt (2.2.4) i avsnitt 2.2:

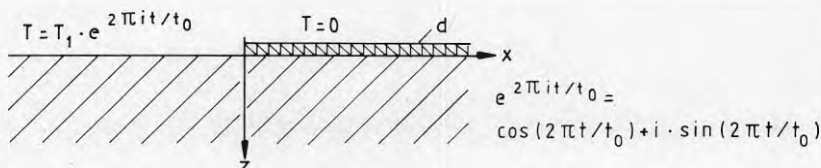
$$d = \frac{d_i \lambda}{\lambda_i} \quad \text{eller} \quad d = m_i \lambda \quad (5.0.2)$$

Här är  $d_i$  isolertjockleken och  $\lambda_i$  värmeledningsförmågan hos isolermaterialet. Alternativt kan plattans och värmeisoleringens totala värmemotstånd  $m_i$  användas enligt den senare formeln.

Ett värmeövergångsmotstånd vid markytan utanför byggnaden ges av längden  $d_1$ . Ett värmeövergångstal  $\alpha$  eller ett snötäcke representeras av  $d_1$  enligt formlerna 2.2.8 och 2.2.13. Längden  $d_1$  är noll, då värmemotståndet vid markytan försummas.

### 5.1 Periodisk temperatur under plattan

Figur 5.1.1 illustrerar det periodiska värmeledningsproblemet vid kanten av plattan och dess värmeisolering. Problemet är här tvådimensionellt i ett vertikalt plan vinkelrätt mot plattans kantlinje. Nära plattans fyra hörn får man ett mer komplicerat tredimensionellt temperaturförlopp. Den periodiska temperaturen vid markytan ges i komplexvärd form såsom i avsnitt 2.4. Realdelen av den komplexa temperaturen ger lösningen med cosinusvariation vid markytan, medan imaginärdelen svarar mot sinusvariationen.



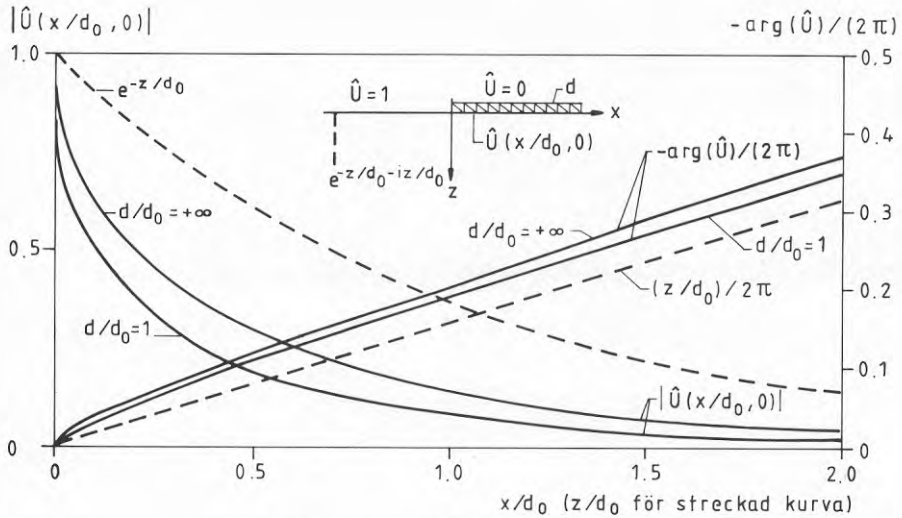
Figur 5.1.1 Tvådimensionellt periodiskt värmeledningsproblem i planet vinkelrätt mot plattans kantlinje.

Den komplexvärda temperaturen  $T_p(x, z, t)$  innehåller enligt (2.4.1) tidsfaktorn  $e^{2\pi i t / t_0}$ . Temperaturen skalas med  $T_1$ , medan  $x$  och  $z$  skalas med inträngningsdjupet  $d_0$ :

$$T_p(x, z, t) = T_1 \cdot \hat{U}(x/d_0, z/d_0) \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (5.1.1)$$

Temperaturen ges av den komplexvärda, dimensionslösa funktionen  $\hat{U}$ . Temperaturen i marken direkt under isoleringen ( $z = 0, x > 0$ ) är av speciellt intresse, eftersom den anger hur den periodiska temperaturen vid markytan tränger in under plattans värmeisolering.

Värmeisoleringen antas nu sträcka sig tillräckligt långt in längs  $x$ -axeln. Värmemotstånd vid markytan försummas:  $d_1 = 0$ . Det periodiska problemet enligt figur 5.1.1 innehåller då bara de två längderna  $d$  och  $d_0$ . Vid skalning erhålles enbart en parameter  $d/d_0$ . I figur 5.1.2 visas amplituden  $|\hat{U}|$  och fasläget  $-\arg(\hat{U})/(2\pi)$  under plattan, dvs för  $z = 0, x/d_0 > 0$ . Fallet  $d/d_0 = 1$  har beräknats numeriskt, medan gränsfallet  $d/d_0 = +\infty$  ges av en analytisk lösning enligt formel 5.1.3.



Figur 5.1.2 Amplitud och fas för temperaturfunktionen  $\hat{U}(x/d_0, 0)$ ,  $x > 0$ , under plattan. Den periodiska temperaturen  $T_p(x, z, t)$  erhålles ur (5.1.1). De streckade kurvorna ger för en jämförelse den vertikala temperaturen i ostörd mark långt från plattan.

Den reellvärda periodiska temperaturen, då man har en sinusvariation vid markytan, ges av imaginärdelen av (5.1.1). Med hjälp av formlerna (2.4.3-4) för komplexa exponentialfunktioner erhålles:

$$\begin{aligned}
 T_p(x, z, t) &= \text{Im} \left\{ T_1 \cdot |\hat{U}| \cdot e^{i(2\pi t/t_0 + \arg(\hat{U}))} \right\} = \\
 &= T_1 \cdot |\hat{U}| \cdot \sin \left\{ 2\pi(t/t_0 + \arg(\hat{U})/2\pi) \right\} \quad (5.1.2)
 \end{aligned}$$

Beloppet  $|\hat{U}|$  ger sinusvariationers amplitud, medan  $-\arg(\hat{U})/(2\pi)$  anger faseftersläpningen relativt den rena sinusvariationen  $\sin(2\pi t/t_0)$  vid markytan. Genom att dividera argumentet med  $2\pi$  erhålles fasläget räknat i andel av en hel periodtid  $t_0$ . Denna representation av fas skall användas genomgående i det följande.



I figur 5.1.2 visas amplitudens dämpning in under plattan då  $x/d_0$  ökar. Vid  $x = 0$  är amplituden +1 och fasen 0. Amplituden dämpas kraftigt efterhand. För fallet  $d = d_0$  har amplituden dämpats till 0.5 för  $x = 0.1 d_0$ , till 0.2 för  $x = 0.5 d_0$ , till 0.08 för  $x = d_0$  och till 0.02 för  $x = 2 d_0$ .

Den periodiska temperaturens inträngning under plattan beror på värmeisoleringens storlek, dvs på  $d$ . Då  $d$  ökar, så ökar temperaturens amplitud. Gränsfallet med oändlig värmeisolering,  $d = \infty$ , ger den övre gränsen för den periodiska svängningens inträngning. Detta fall med  $d = +\infty$ , dvs med randvillkoret att det vertikala värme-flödet är noll vid  $z = 0$ ,  $x > 0$ , har lösts analytiskt. Detta redovisas i referens 7. Temperaturen precis under plattan ges av (5.1.1) med  $\hat{U}$  enligt:

$$\hat{U}(x/d_0, 0) = \operatorname{erfc} \left( \sqrt{(1+i)x/d_0} \right) \quad x \geq 0 \quad (5.1.3)$$

Här skall  $\operatorname{erfc}$  tas för ett komplext argument. Amplitud och fas visas i figur 5.1.2. Amplituden har dämpats till 0.5 vid  $x = 0.2 d_0$ , till 0.15 vid  $x = d_0$  och till 0.05 vid  $x = 2 d_0$ .

Funktionen enligt formel 5.1.3 analyseras närmare i referens 7. För små värden gäller för beloppet approximationen:

$$|\hat{U}(x/d_0, 0)| \approx 1 - 1.24 \sqrt{x/d_0} \quad (x/d_0 < 0.1) \quad (5.1.4)$$

För stora värden gäller:

$$|\hat{U}(x/d_0, 0)| \approx 0.47 \cdot \sqrt{d_0/x} \cdot e^{-x/d_0} \quad (x/d_0 > 1.5) \quad (5.1.5)$$

Eftersom fallet  $d/d_0 = +\infty$  ger den största temperaturinträngningen under plattan kan man sammanfattningsvis säga att i området  $0 < x < 0.2 d_0$  ( $z = 0$ ) har man en kraftig påverkan med runt 50% eller mer av utetemperaturens amplitud. I området  $x > d_0$  har man en ringa påverkan med maximalt 15% av utetemperaturens amplitud.

Markytans sinussvängning fasfördröjs alltmer då  $x$  ökar inåt under plattan. Enligt figur 5.1.2 är fasfördröjningen i stort linjär med

$x/d_0$ . Vid  $x = d_0$  är fördröjningen 0.2 för  $d/d_0 = \infty$  och 0.19 för  $d/d_0 = 1$ . Detta innebär en tidseftersläpning med  $0.2 t_0$ . Temperaturmaximum vid  $x = d_0$  inträffar således vid tiden  $0.2 t_0$  efter utetemperaturens maximum.

I avsnitt 2.4.2 anges den ostörda vertikala temperaturen i marken långt bort från byggnaden. Enligt (2.4.15) gäller:

$$T_p(-\infty, z, t) = T_1 \cdot e^{-z/d_0 - iz/d_0} \cdot e^{2\pi it/t_0} \quad (5.1.6)$$

$$\hat{U}(-\infty, z) = e^{-z/d_0} \cdot e^{-iz/d_0} \quad (5.1.7)$$

Denna temperaturers amplitud och fas visas av de streckade kurvorna i figur 5.1.2. I ostörd mark långt till vänster ( $x \rightarrow -\infty$ ) råder denna temperatur. Då man rör sig in under plattan dämpas och fasfördröjs den periodiska temperaturen. Den maximala dämpningen har man direkt under plattan.

Exempel 5.1.1 Givet värmeisolering, temperaturamplitud och mark enligt (1.10A) för grundexempel A.

$$d_i = 0.08 \text{ m} \quad \lambda_i = 0.04 \text{ W/mK}$$

$$T_1 = 10^\circ\text{C}$$

$$\lambda = 1.5 \text{ W/mK} \quad a = 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Detta ger  $d = 3.0 \text{ m}$

$$i. \quad t_0 = 1 \text{ år}$$

$$d_0 = \sqrt{\frac{365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 0.75 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 2.74 \text{ m}$$

$$\frac{d}{d_0} = 1.1$$

Kurvan  $d/d_0 = 1$  i figur 5.1.2 kan approximativt användas.

På djupet  $x = 0.1 \cdot d_0 = 0.27$  m är amplituden  $0.5 T_1 = 5^\circ\text{C}$  och fasfördröjningen  $0.03 t_0 = 11$  dagar. Nedanstående tabell ger några värden på temperaturamplitud och fasfördröjning in under plattan:

$x$ (m)	0	0.27	0.5	1	2.74	5
$T_1 \cdot  \hat{U} $ (K)	10	5	4	2.5	0.8	0.2
Fas (dagar)	0	11	17	31	69	120

ii.  $t_0 = 2$  veckor

$$d_0 = 0.54 \text{ m} \quad \frac{d}{d_0} = 5.6$$

Kurvan  $d/d_0 = \infty$  kan approximativt användas:

$x$ (m)	0	0.11	0.54	1	2
$T_1 \cdot  \hat{U} $ (K)	10	5	1.5	0.5	0.1
Fas (dagar)	0	0.8	3	5	9

iii.  $t_0 = 1$  dag

$$d_0 = 0.14 \text{ m} \quad \frac{d}{d_0} = 21$$

Kurvan  $d/d_0 = \infty$  kan med god approximation användas:

$x$ (m)	0	0.028	0.15	0.5	1
$T_1 \cdot  \hat{U} $ (K)	10	5	1.3	0.1	0.004
Fas (timmar)	0	1.5	5.0	15	30

För  $x > 0.5$  har formel 5.1.5 använts.

Ovanstående exempel visar följande. För årssvängningen får man en kraftig temperaturpåverkan en halv till en meter in under värmeisolereringen, medan påverkan är ringa från tre meter och inåt. En dygnsvariation ger ringa påverkan från en till två decimeter och inåt.

## 5.2 Skalning och kantapproximation för platta på mark

Den periodiska värmeförlusten för rektangulär platta på mark ges i komplexvärd form av formel 2.4.25. I reell form med sinusvariation vid markytan gäller enligt formel 2.4.26:

$$Q_p(t) = -\lambda T_1 (2L + 2B) \cdot |h_p| \cdot \sin \left\{ 2\pi (t/t_0 + \arg(h_p)/2\pi) \right\} \quad (5.2.1)$$

Den komplexvärda, periodiska värmeförlustfaktorn  $h_p$  ingår med belopp och argument. För den rektangulära plattan ingår fyra längder  $L$ ,  $B$ ,  $d$  och  $d_0$ . Värmeförlustfaktorn blir allmänt en funktion av tre variabler:

$$h_p = h_p(L/d_0, B/d_0, d/d_0) \quad (5.2.2)$$

Som längdfaktor i (5.2.1) användes plattans totala kantlängd  $2L + 2B$ . Om plattån är stor, dvs om  $L$  och  $B$  är mycket större än in-trängningsdjupet  $d_0$ , får man väsentligen ett tvådimensionellt förlopp enligt föregående avsnitt vinkelrätt mot plattans fyra kantlinjer. En rimlig approximation är därför:

$$h_p(L/d_0, B/d_0, d/d_0) \simeq h_p(\infty, \infty, d/d_0) \quad (5.2.3)$$

Enligt föregående avsnitt är påverkan ringa på längden  $d_0$  in under plattan. Ett rimligt krav för approximationen ovan är därför:

$$L \gg B > 2 d_0 \quad (5.2.4)$$

Denna typ av kantapproximation skall användas i det följande. Den periodiska värmeförlusten vid en sinusvarierande utetemperatur ges då av:

$$Q_p(t) = -\lambda T_1 L_e \cdot |h_p| \cdot \sin \left\{ 2\pi (t/t_0 + \arg(h_p)/2\pi) \right\} \quad (5.2.5)$$


---

Här är nu  $h_p$  den komplexvärda värmeförlustfaktorn för ett tvådimensionellt tvärsnitt vinkelrätt mot plattans kantlinje. Kravet för

kantapproximationen ovan är att plattans minsta längd skall vara större än  $2d_0$ . Plattans totala kantlängd är  $L_e$  (edge). För en rektangulär platta gäller

$$L_e = 2L + 2B \quad (5.2.6)$$

I kantapproximationen försummas tredimensionella hörneffekter. Vid numeriska tredimensionella beräkningar av värmeförluster har vi ej kunnat urskilja någon hörneffekt med den givna räkneprecisionen. Hörnens påverkan på den periodiska värmeförlusten bör därför kunna försummas.

Fördelen med kantapproximationen enligt (5.2.3) är att antalet parametrar för  $h_p$  minskar. Man blir av med de längder som anger plattans form och storlek.

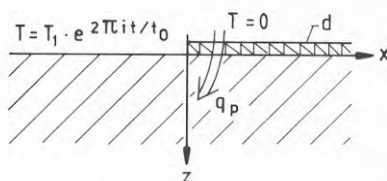
I komplexvärd form ges värmeförlusten av

$$Q_p = -\lambda T_1 L_e \cdot h_p \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (5.2.7)$$

Formel 5.2.5 är imaginärdelen av ovanstående.

### 5.3 Värmeförlustfaktor $h_p$ för kant

Figur 5.3.1 visar det grundläggande periodiska värmeledningsproblemet vid en kant. Temperaturförloppet är tvådimensionellt i ett vertikalt plan vinkelrätt mot plattans kantlinje. Värmeisoleringen har den ekvivalenta tjockleken  $d$ . Den tänkes utsträckt från  $x = 0$  till  $x = +\infty$ . Vid markytan ( $x < 0, z = 0$ ) råder den periodiska uttemperaturen. I figuren ges den i komplexvärd form. Imaginärdelen ger då problemet med sinusvariation vid markytan. Värmemotståndet vid markytan är noll:  $d_1 = 0$ .



Figur 5.3.1 Det grundläggande periodiska värmeledningsproblemet vid plattans kant.

Detta grundläggande fall innehåller de två längderna  $d$  och  $d_0$ . Lösningen har formen (5.1.1). Temperaturen  $\hat{U}(x/d_0, z/d_0)$  beror därför enbart på en parameter  $d/d_0$ . Det komplexvärda värmeflödet per meter kant betecknas  $q_p$  (W/m). Det ges av en integral över  $0 \leq x < \infty$  av flödet genom värmeisoleringen. Enligt (2.4.27) kan det skrivas:

$$q_p = -\lambda T_1 \cdot h_p^0(d/d_0) \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (5.3.1)$$

Värmeledningsfaktorn  $h_p$  blir för detta fall en funktion enbart av  $d/d_0$ . För detta grundfall användes beteckningen  $h_p^0$ .

Värmeledningen i reellvärd form vid sinusvariation vid markytan erhålles från imaginärdelen av (5.3.1):

$$q_p = -\lambda T_1 \cdot |h_p^0| \cdot \sin \left\{ 2\pi (t/t_0 - \phi_p^0) \right\} \quad (5.3.2)$$

Här uttryckes faskfördröjningen som andel av periodtiden  $t_0$  genom:

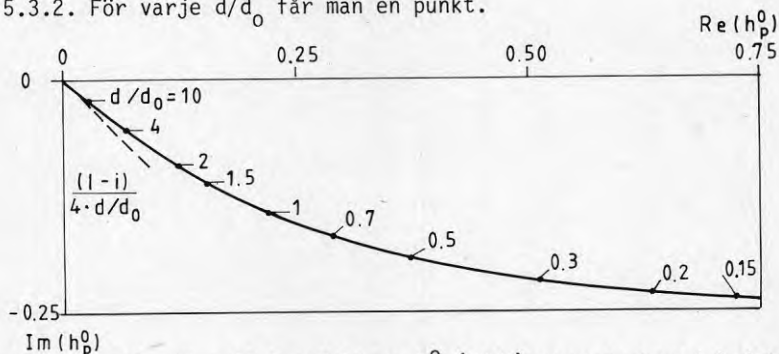
$$\phi_p^0 = -\arg(h_p^0) / (2\pi) \quad (5.3.3)$$

Med hjälp av s k Wiener-Hopf-teknik kan en analytisk lösning för temperaturen tecknas. Lösningen och den teknik som användes är komplicerad. Detta redovisas i referens 3. Det visar sig emellertid att man kan få ett förhållandevis enkelt uttryck för den integrerade värmeförlusten genom isoleringen, dvs för  $h_p^0$ . Från referens 3 erhålles:

$$h_p^0(d/d_0) = \frac{1}{2\pi r} \ln \left( \frac{1+r}{1-r} \right) \quad (5.3.4)$$

$$r = \sqrt{1 - 2i d^2/d_0^2}$$

Hjälpsvariabeln  $r$  är roten ur ett komplext tal. Logaritmen är också komplex. Värmeförlustfaktorn  $h_p^0$  är en komplexvärd funktion av den reella variabeln  $d/d_0$ . Den visas i det komplexa talplanet i figur 5.3.2. För varje  $d/d_0$  får man en punkt.



Figur 5.3.2 Värmeförlustfaktorn  $h_p^0(d/d_0)$  representerad i det komplexa planet.

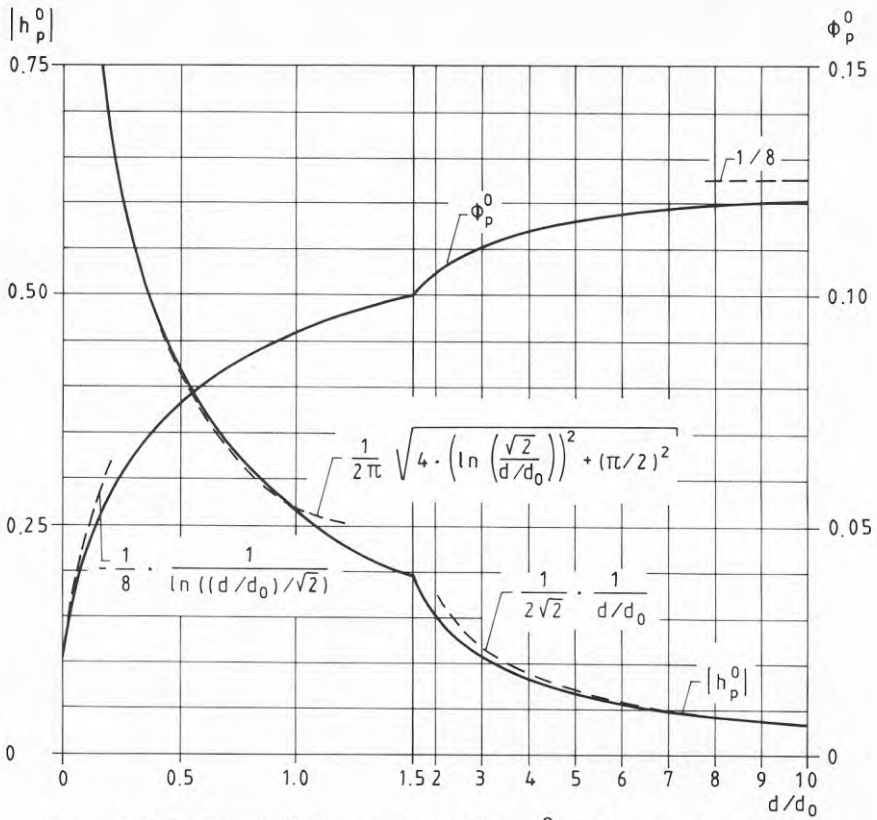
Värmeförlustfaktorn  $h_p^0$ 's amplitud och fasläge  $\phi_p^0$  enligt (5.3.3) ges i figur 5.3.3.

I figuren anges approximativa uttryck för belopp och fas för små och för stora  $d/d_0$ . Parametern  $d/d_0$  blir stor vid kraftig isolering ( $d$  stor), eller kort periodtid  $t_0$  ( $d_0$  liten). I komplexvärd form blir approximationen för stora  $d/d_0$ :

$$h_p^0(d/d_0) \approx \frac{(1-i)}{4 \cdot d/d_0} \quad (d/d_0 \text{ stor}) \quad (5.3.5)$$

Denna approximations belopp och fas visas av streckade linjer i figur 5.3.3.

Man kan konstatera att den maximala fäsfördröjningen, då markytan saknar värmeövergångsmotstånd, blir 1/8 enligt (5.3.3) och (5.3.5). För en periodtid på ett år blir därmed den maximala tidsfördröjningen: 1/8 år = 1.5 månader.



Figur 5.3.3 Absolutbelopp och fasläge  $\phi_p^0$  enligt 5.3.3 för värmeförlustfaktorn  $h_p^0$ .

Exempel 5.3.1 Data enligt exempel 5.1.1 gäller:

$$d \hat{=} 3.0 \text{ m}$$

$$\lambda = 1.5 \text{ W/mK} \quad T_1 = 10^\circ\text{C}$$

$$i. \quad t_o = 1 \text{ år} \Rightarrow d_o = 2.74 \text{ m}$$

$$d/d_o = 1.1 \Rightarrow |h_p^0| \approx 0.24 \quad (\text{figur 5.3.3})$$

$$\phi_p^0 \approx 0.094$$

Detta ger enligt (5.3.2) värmeflödets amplitud och fasläge:



$$\lambda T_1 \cdot |h_p^0| = 3.6 \text{ W/m}$$

$$\phi_p^0 \cdot t_0 = 34 \text{ dagar}$$

$$\underline{q_p = -3.6 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094))} \text{ (W/m)}$$

ii.  $t_0 = 2 \text{ veckor} \Rightarrow d_0 = 0.54 \text{ m}$

$$d/d_0 = 5.6 \Rightarrow |h_p^0| \approx 0.061$$

$$\phi_p^0 \approx 0.12$$

$$\lambda T_1 |h_p^0| = 0.92 \text{ W/m}$$

$$\phi_p^0 \cdot t_0 = 1.6 \text{ dagar}$$

$$\underline{q_p = -0.92 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.12))} \text{ (W/m)}$$

iii.  $t_0 = 1 \text{ dag} \Rightarrow d_0 = 0.14 \text{ m}$

$$d/d_0 = 21 \Rightarrow |h_p^0| \approx 0.017$$

$$\phi_p^0 \approx \frac{1}{8}$$

$$\lambda T_1 |h_p^0| = 0.25 \text{ W/m}$$

$$\phi_p^0 \cdot t_0 = 3 \text{ timmar}$$

$$\underline{q_p = -0.25 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 1/8))} \text{ (W/m)}$$

Antag nu att byggnaden är av typen rektangulär platta på mark med data enligt grundfall A (1.10A):

$$L = 12 \text{ m} \quad B = 8 \text{ m}$$

Kantlängden  $L_e$  blir:

$$L_e = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8 = 40 \text{ m}$$

Den totala periodiska värmeförlusten ges enligt (5.2.5) av  $q_p \cdot L_e$ . Detta ger:

i.  $t_0 = 1$  år

$$\underline{Q_p} = -144 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094)) \quad (W)$$

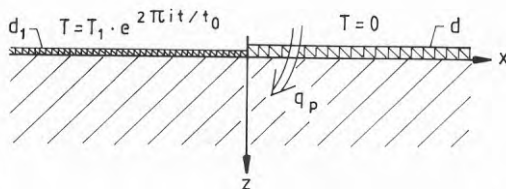
ii.  $t_0 = 2$  veckor

$$\underline{Q_p} = -37 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.12)) \quad (W)$$

iii.  $t_0 = 1$  dag

$$\underline{Q_p} = -10 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 1/8)) \quad (W)$$

I det grundläggande periodiska värmeledningsproblemet vid plattans kant enligt figur 5.3.1 är värmemotståndet vid markytan lika med noll;  $d_1 = 0$ . Figur 5.3.4 visar motsvarande fall då denna restriktion borttagits. Man har ett värmemotstånd vid markytan ( $z = 0$ ,  $-\infty < x < 0$ ), vilket ges av längden  $d_1$ . Denna kan representera ett värmeövergångstal vid markytan eller ett snötäcke enligt formlerna 2.2.8 och 2.2.13.



Figur 5.3.4 Periodiskt värmeledningsproblem vid plattans kant då man har ett värmemotstånd vid markytan.

Detta utvidgade problem innehåller tre längder:  $d$ ,  $d_1$  och  $d_0$ . Värmeförlustfaktorn  $h_p$  blir en funktion av två variabler. Här skall  $d/d_0$  och  $d_1/d$  användas. I komplexvärd form blir värmeflödet  $q_p$  (W/m):

$$q_p = -\lambda T_1 \cdot h_p^1(d/d_0, d_1/d) \cdot e^{2\pi i t/t_0} \quad (5.3.6)$$

För värmeförlustfaktorn i detta fall, där  $d_1$  är större än noll, användes beteckningen  $h_p^1$ . I referens 3 anges lösningen även till detta utvidgade problem enligt figur 5.3.4. Värmeförlustfaktorn  $h_p^1$  kan uttryckas med hjälp av  $h_p^0$ . Man har följande uttryck:

$$h_p^1(d/d_0, d_1/d) = \frac{d}{d-d_1} \cdot h_p^0(d/d_0) - \frac{d_1}{d-d_1} h_p^0(d_1/d_0) \quad (5.3.7)$$

Här är  $h_p^0$  det komplexa uttrycket (5.3.4). För fallet  $d = d_1$  får man noll i nämnaren. Då gäller i stället formeln:

$$h_p^1(d/d_0, 1) = \frac{1}{2} \left( h_p^0(d/d_0) - \frac{1}{\pi} \right) \quad (5.3.8)$$

Hjälpvariabeln  $r$  ges av (5.3.4).

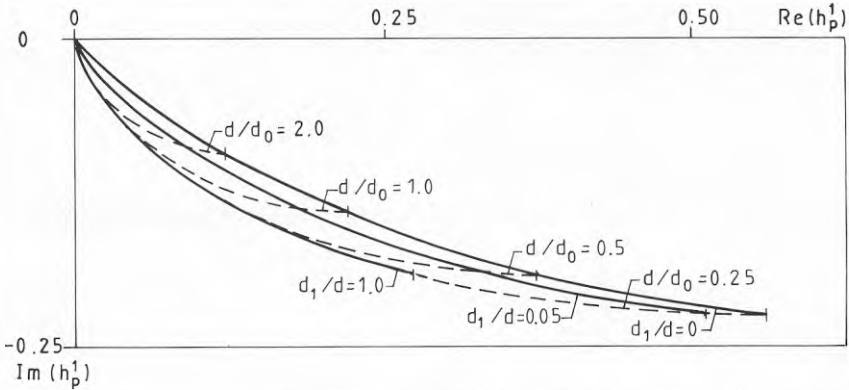
Det är intressant att notera att  $h_p^1$  är symmetrisk i  $d$  och  $d_1$ . Formel 5.3.7 ger

$$h_p^1(d/d_0, d_1/d) = h_p^1(d_1/d_0, d/d_1) \quad (5.3.9)$$

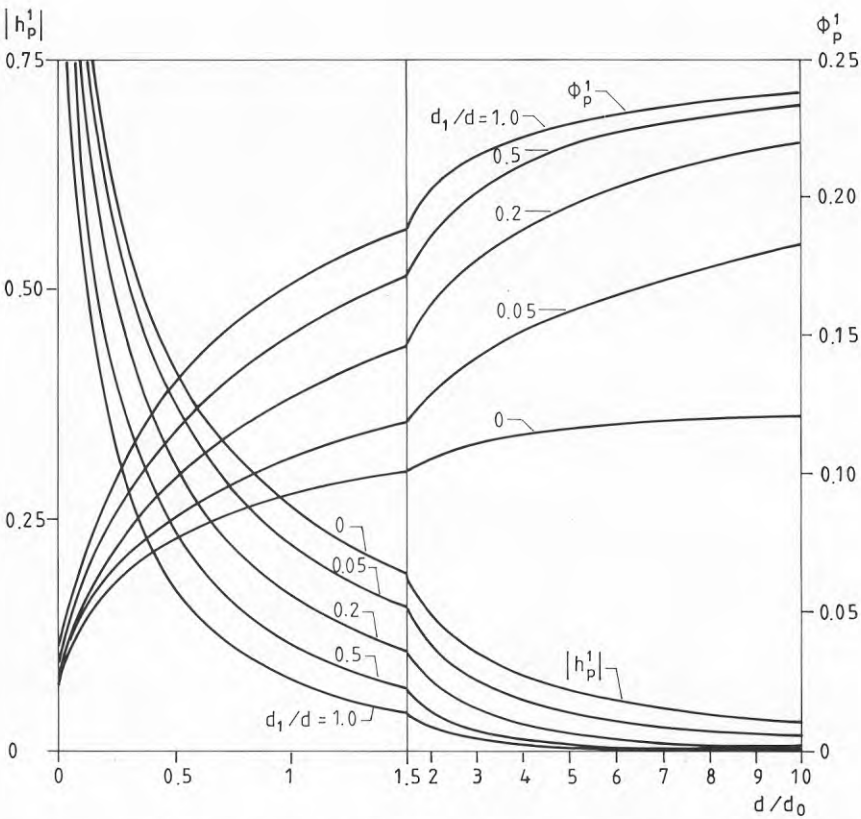
Värmeflödet  $q_p$  blir således detsamma om värmemotstånden  $d$  och  $d_1$  skiftas i figur 5.3.4. På grund av denna symmetriegenskap ges  $h_p^1$  i figurerna nedan enbart för  $0 < d_1 < d$ .

Figur 5.3.2 visar  $h_p^0(d/d_0)$  i det komplexa talplanet. Motsvarande figur för  $h_p^1(d/d_0, d_1/d)$  visas i figur 5.3.5. Varje par av argumentvärden ger en punkt i det komplexa talplanet. De heldragna linjerna ger  $h_p^1$  som funktion av  $d/d_0$  för ett givet  $d_1/d$ . Kurvan  $d_1/d = 0$  ger det tidigare fallet enligt figur 5.3.2. De streckade linjerna ger  $h_p^1$  som funktion av  $d_1/d$ ,  $0 \leq d_1/d < 1$ , för givet  $d/d_0$ .

I figur 5.3.6 visas belopp och fasläge för  $h_p^1(d/d_0, d_1/d)$ .



Figur 5.3.5 Värmeförlustfaktorn  $h_p^1(d/d_0, d_1/d)$  representerad i det komplexa planet för fallet enligt figur 5.3.4.



Figur 5.3.6 Belopp och fasläge för värmeförlustfaktorn  $h_p^1(d/d_0, d_1/d)$  för fallet enligt figur 5.3.4.

Exempel 5.3.2 Givet följande värden:

$$d/d_0 = 0.5 \quad d_1/d = 0.2$$

Figur 5.3.5 ger realdel och imaginärdel av  $h_p^1$ :

$$h_p^1(0.5, 0.2) \approx 0.256 - i \cdot 0.178$$

Utnyttjas i stället figur 5.3.6 erhålles

$$\left| h_p^1 \right| \approx 0.310 \quad \phi_p^1 \approx 0.098$$

$$h_p^1(0.5, 0.2) \approx 0.310 \cdot e^{-2 \cdot i \cdot 0.098} = 0.253 - i \cdot 0.179$$

#### 5.4 Allmän värmeförlustformel. Superponering

En allmän formel för den periodiska värmeförlusten från en byggnad av typen platta på mark kan anges med hjälp av resultaten i de föregående avsnitten. Låt  $Q_p$  (W) vara värmeförlusten och  $L_e$  plattans kantlängd. Följande formel gäller med antaganden enligt de föregående avsnitten:

$$Q_p = -\lambda T_1 L_e \cdot \left| h_p \right| \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - \phi_p)) \quad (5.4.1)$$

Den komplexa värmeförlustfaktorn  $h_p$  uttrycks med belopp och fasläge enligt:

$$h_p = \left| h_p \right| \cdot e^{-2\pi i \phi_p} \quad (5.4.2)$$

En förutsättning för formeln är att plattans minsta dimension är större än  $2 \cdot d_0$ .

För fallet utan värmemotstånd vid markytan,  $d_1 = 0$ , ges  $h_p$  av funktionen  $h_p^0(d/d_0)$  enligt (5.3.4). Funktionen  $h_p^0$  ges i figur 5.3.3. I det allmännare fallet  $d_1 \neq 0$  ges  $h_p$  av  $h_p^1(d/d_0, d_1/d)$  enligt formel 5.3.7 och figur 5.3.6.

Exempel 5.4.1 Grundexempel C vars data ges av (1.10C).

$$\lambda T_1 L_e = 1.5 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 30 + 2 \cdot 15) = 1350 \text{ W}$$

$$d = \frac{0.08 \cdot 1.5}{0.04} = 3 \text{ m}$$

$$d_o = 2.74 \text{ m} \quad d/d_o = 1.1$$

$$h_p = h_p^o(1.1)$$

Figur 5.3.3 ger

$$\left| h_p^o \right| = 0.24 \quad \phi_p^o = 0.094$$

Detta ger

$$Q_p = -324 \cdot \sin(2\pi(t/t_o - 0.094)) \text{ W}$$

Värmeflödets amplitud blir således:

$$324 \text{ W}$$

Den ligger tidsfördröjd relativt utetemperaturen med tiden

$$t_o \cdot \phi_p^o = 34 \text{ dagar}$$

Exempel 5.4.2 Grundexempel A vars data ges av (1.10A).

$$\lambda T_1 L_e = 1.5 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 12 + 2 \cdot 8) = 600 \text{ W}$$

Enligt exempel 5.4.1:

$$d = 3 \text{ m} \quad d_o = 2.74 \text{ m}$$

$$\left| h_p^o \right| = 0.24 \quad \phi_p^o = 0.094$$

Detta ger

$$Q_p = -144 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094)) \text{ W}$$

Värmeflödets amplitud blir:

$$144 \text{ W}$$

Tidsfördröjningen relativt utetemperaturen blir:

$$34 \text{ dagar.}$$

Exempel 5.4.3 Grundexempel B vars data ges av (1.10B).

$$\lambda T_1 L_e = 600 \text{ W}$$

$$d = \frac{0.16 \cdot 1.5}{0.04} = 6 \text{ m}$$

$$d_0 = 2.74 \text{ m} \quad d/d_0 = 2.2$$

$$h_p = h_p^0(2.2)$$

Figur 5.3.3 ger:

$$\left| h_p^0 \right| = 0.14 \quad \phi_p^0 = 0.11$$

Detta ger

$$Q_p = -84 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.11)) \text{ W}$$

Värmeflödets amplitud blir:

$$84 \text{ W}$$

Tidsfördröjningen relativt utetemperaturen blir:

$$40 \text{ dagar.}$$

Då utetemperaturen innehåller flera sinuskomponenter erhålls det totala periodiska värmeflödet genom superposition. En allmän Fourierutveckling av en periodisk utetemperatur med periodtiden  $t_0$  ges av (2.1.3). Medeltemperaturen  $T_0$  ger ett stationärt flöde  $Q_s$ , vilket behandlas i kapitel 3. Utetemperaturen för den  $n$ :te komponenten av (2.1.3) är:

$$T_n \cdot \sin(2\pi nt/t_0 + f_n) \quad (5.4.3)$$

Detta är en ren sinussvängning med periodtiden  $t_0/n$ . Den har en fasförskjutning  $f_n$  relativt  $\sin(2\pi nt/t_0)$ . Motsvarande värmeflöde blir enligt formel (5.4.1):

$$Q_{p,n} = -\lambda T_n L_e \cdot |h_{p,n}| \cdot \sin(2\pi(nt/t_0 - \phi_{p,n}) + f_n) \quad (5.4.4)$$

Värmeförlustfaktorns amplitud och fasläge skall tas för inträngningsdjupet  $d_{o,n}$ :

$$d_{o,n} = \sqrt{\frac{at_0}{n\pi}} = \frac{d_0}{\sqrt{n}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.4.5)$$

Den totala periodiska värmeförlusten ges av summan:

$$Q_p = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{p,n} \quad (5.4.6)$$

Exempel 5.4.4 I referens 5 anges approximativa uttryck för utetemperaturen på olika orter. För Stockholm ges följande uttryck med två sinuskomponenter:

$$T_{ute} = 6.7 + 10.1 \cdot \sin(2\pi t/t_0 - 1.95) + \\ + 0.81 \cdot \sin(2\pi \cdot 2t/t_0 - 4.46) \quad (^\circ\text{C})$$

För grundexempel A med ovan givna utetemperatur gäller:

$$d/d_{o,1} = 1.1 \quad |h_{p,1}^0| = 0.24 \quad \phi_{p,1}^0 = 0.094 \\ d/d_{o,2} = \sqrt{2} \cdot 1.1 = 1.6 \quad |h_{p,2}^0| = 0.18 \quad \phi_{p,2}^0 = 0.10$$



Den periodiska värmeförlusten blir enligt (5.4.4) och (5.4.6):

$$\begin{aligned} Q_p &= -1.5 \cdot 10.1 \cdot 40 \cdot 0.24 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094) - 1.95) - \\ &\quad - 1.5 \cdot 0.81 \cdot 40 \cdot 0.18 \cdot \sin(2\pi(2t/t_0 - 0.10) - 4.46) = \\ &= -145.4 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094) - 1.95) - \\ &\quad - 8.8 \cdot \sin(2\pi(2t/t_0 - 0.10) - 4.46) \quad (\text{W}) \end{aligned}$$

Den andra sinustermen i approximationen av uttemperaturen är för detta fall försumbar.

Anmärkning: Den stationära värmeförlusten mot medeltemperaturen  $6.7^\circ\text{C}$  blir enligt kapitel 3, figur 3.1.1 och formel 3.1.1:

$$d/B = 3/8 \quad L/B = 1.5 \Rightarrow h_s = 1.58$$

$$Q_s = 1.5 \cdot (20 - 6.7) \cdot 12 \cdot 1.58 \approx 380 \text{ W}$$

## 5.5 Några exempel och analyser

### 5.5.1 Variation av periodtiden $t_0$

Periodtiden  $t_0$  ingår i uttrycket för  $d_0$  enligt (5.0.1). Inträngningsdjupet  $d_0$  är proportionellt mot roten ur periodtiden  $t_0$ .

För exempel 5.3.1 erhöles:

i.	$t_0 = 1$ år	$d_0 = 2.74$ m	$ h_p^0  = 0.24$	$Q_{p,\text{amplitud}} = 144$ W
ii.	$t_0 = 2$ veckor	$d_0 = 0.54$ m	$ h_p^0  = 0.06$	$Q_{p,\text{amplitud}} = 37$ W
iii.	$t_0 = 1$ dag	$d_0 = 0.14$ m	$ h_p^0  = 0.02$	$Q_{p,\text{amplitud}} = 10$ W

Den stationära värmeförlusten för motsvarande fall (1.10A) blev enligt exempel 3.1.1:

$$Q_s = 427 \text{ W}$$

Detta exempel visar att det periodiska värmeflödets beroende på dygnsfluktuationer är försumbart jämfört med stationär förlust och periodisk förlust beroende på årsvariationen. Även periodisk variation med två veckors periodtid ger ett relativt obetydligt värmeflöde.

### 5.5.2 Variation av markdata

Markens termiska data ges av värmeledningsförmågan  $\lambda$  (W/mK) och värmediffusiviteten  $a$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ ). Värmeledningsförmågan  $\lambda$  påverkar den periodiska värmeförlusten på två sätt. Den ingår dels som en direkt proportionalitetskonstant i (5.4.1), dels i uttrycket (5.0.2) för den ekvivalenta isolertjockleken  $d$ . Värmeförlusten ökar, då  $\lambda$  ökar p g a proportionaliteten mot  $\lambda$ . Detta motverkas dock något av att ekvivalent isolertjocklek  $d$  också ökar.

Värmediffusiviteten  $a$  ingår i uttrycket för  $d_0$  enligt (5.0.1). Inträgningsdjupet blir proportionellt mot roten ur  $a$ . Värmeförlusten ökar därför, då  $a$  ökar. Den är dock relativt okänslig för små variationer av  $a$ .

Exempel 5.5.1 Givet grundexempel A enligt (1.10A) där huset är byggt på en granitgrund. Termiska data ändras till:

$$\lambda = 3.5 \text{ W/mK} \quad a = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Då gäller:

$$\lambda T_1 L_e = 3.5 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 12 + 2 \cdot 8) = 1400 \text{ W}$$

$$d = \frac{0.08 \cdot 3.5}{0.04} = 7 \text{ m}$$

$$d_0 = \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-6} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365}{\pi}} = 4.0 \text{ m}$$

$$d/d_0 = 1.75$$

Figur 5.3.3 ger:

$$\left| h_p^0(1.75) \right| = 0.17 \quad \phi_p^0(1.75) = 0.103$$

Formel 5.4.1 ger värmeförlusten:

$$Q_p = -238 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.103)) \text{ W}$$

Enligt exempel 5.3.1 gäller för grundfall A med ursprungliga markdata:

$$Q_p = -144 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094)) \text{ W}$$

Övergången till granit ökar amplituden med 65%.

### 5.5.3 Värmemotstånd vid markytan

I de föregående exemplen i detta kapitel har värmeövergångsmotståndet vid markytan försumrats ( $d_1 = 0$ ). I detta avsnitt skall effekten av ett värmeövergångstal  $\alpha$  ( $\text{W/m}^2\text{K}$ ) vid marken och av ett snötäcke belysas med några exempel.

Exempel 5.5.2 I exempel 5.3.1 beräknas periodisk värmeförlust för grundfall A enligt (1.10A) för periodtiderna  $t_0 = 1$  år, 2 veckor och 1 dag.

Här behandlas samma problem med ett värmeövergångstal  $\alpha$  vid markytan. Ett rimligt värde kan vara:

$$\alpha = 10 \text{ W/m}^2\text{K}.$$

Den ekvivalenta tjockleken  $d$  blir enligt (2.2.8):

$$d_1 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1.5}{10} = 0.15 \text{ m}$$

Värmeövergångstalet  $\alpha$  motsvarar således ur värmemotståndssynpunkt 15 cm mark.

För fallet  $t_0 = 1$  år fås:

$$d_0 = 2.74 \text{ m}$$

Värmeförlustfaktorns belopp erhålls från figur 5.3.6:

$$d = 3 \text{ m} \quad d/d_0 = 1.1 \quad d_1/d = 0.05$$

$$\left| h_p^1(1.1, 0.05) \right| = 0.20$$

I exempel 5.3.1 blev motsvarande värmeförlustfaktor:

$$\left| h_p^0 \right| = 0.24$$

Kvoten mellan dessa värmeförlustfaktorer ger effekten av att man tar hänsyn till värmeövergångstalet  $\alpha$ :

$$\left| \frac{h_p^1(1.1, 0.05)}{h_p^0(1.1)} \right| = 0.83$$

Amplituden på  $Q_p$  reduceras med 17%.

För  $t_0 = 2$  veckor erhålls:

$$d_0 = 0.54 \text{ m}$$

$$\left| \frac{h_p^1(5.6, 0.05)}{h_p^0(5.6)} \right| = \frac{0.036}{0.060} = 0.60$$

För  $t_0 = 1$  dag erhålls:

$$d_0 = 0.14 \text{ m}$$

$$\left| \frac{h_p^1(21, 0.05)}{h_p^0(21)} \right| = \frac{0.0050}{0.017} = 0.30$$

I detta fall har formel 5.3.7 och approximationen för  $h_p^0$  för stora  $d/d_0$  enligt figur 5.3.3 använts.

Exemplet ovan visar att värmeövergångstalet  $\alpha$  vid markytan kraftigt reducerar de periodiska flödena för korta periodtider. Detta förstärker den tidigare slutsatsen att periodiska förlopp med tider  $t_0$  upp till någon vecka kan försummas.

För årssinussvängingen ger markytans värmemotstånd en måttlig reduktion av  $Q_p$  (i exemplet ovan med 17%). Man bör således ta hänsyn till markytans värmemotstånd vid en noggrann beräkning av periodisk värmeförlust för årssvängningen. Ytmotståndet är dock ingen kritisk parameter. Detta är en värdefull lärdom eftersom valet av  $\alpha$ -värde är osäkert.

Exempel 5.5.3 Antag att man i exemplet 5.5.2 ovan har ett snötäcke i stället för värmeövergångstalet  $\alpha$ . Följande data väljes:

$$d_{\text{snö}} = 0.06 \text{ m} \quad \lambda_{\text{snö}} = 0.15 \text{ W/mK}$$

Den ekvivalenta isolertjockleken  $d_1$  för snön blir enligt (2.2.13):

$$d_1 = \frac{0.06 \cdot 1.5}{0.15} = 0.6 \text{ m} \quad d_1/d = 0.2$$

I fallet med snö är bara kortare periodtider för en periodisk variation under vintern aktuella.

För  $t_0 = 2$  veckor erhålles för kvoten mellan värmeförlustfaktor med och utan snö:

$$\left| \frac{h_p^1(5.6, 0.2)}{h_p^0(5.6)} \right| = \frac{0.015}{0.060} = 0.25$$

Snön reducerar värmeflödet med 75%. För  $t_0 = 1$  dag blir motsvarande kvot:

$$\left| \frac{h_p^1(21, 0.2)}{h_p^0(21)} \right| = \frac{0.0016}{0.017} = 0.09$$

Snön reducerar värmeflödet med ca 90%.

Exemplet ovan gäller ett relativt tunt snötäcke på 6 cm. Allmänt gäller således att snön dämpar periodiska värmeflöden med periodtider på upp till några veckor mycket kraftigt.

## 6 STEGÄNDRING AV UTETEMPERATUREN

Vid sidan om stationära och periodiska förlopp är temperaturförloppet vid en stegändring av utetemperaturen ett av de grundläggande fallen. Temperaturförloppet för en sträckvis konstant utetemperatur erhålls genom superponering av rena temperatursteg. Detta beskrivs närmare i avsnitt 2.1.

Förutsättningarna vid ett rent temperatursteg, där utetemperaturen sänkes från noll till  $-T_2$  vid tiden  $t = 0$ , visas i figur 2.5.1. Det rena temperatursteget har temperaturen noll i byggnaden ovanför värmeisoleringen. Den startar med temperaturen noll överallt i marken vid tiden  $t = 0$ .

Temperatursteget  $-T_2$  väljes negativt så att ett positivt värde på  $T_2$  motsvarar en positivt värmeförlust från byggnaden. Värmeisoleringens ekvivalenta tjocklek  $d$  definieras av (2.2.4). Markens värmeledningsförmåga är  $\lambda$  (W/mK) och dess värmediffusivitet  $a$  ( $m^2/s$ ).

Värmeförlusten från byggnaden beroende på temperatursteget betecknas  $Q_t(t)$  (W). För tvådimensionella tvärsnitt används beteckningen  $q_t(t)$  (W/m). Den ackumulerade värmeförlusten  $E_t(t)$  vid ett temperatursteg definieras av (2.5.7) eller (2.5.11). Den totala värmeförlusten för en sträckvis konstant utetemperatur erhålls genom att superponera bidragen från olika temperatursteg. Den totala värmeförlusten innehåller också en stationär komponent.

### 6.1 Temperaturförlopp i marken

Då temperaturen vid markytan sänkes med ett temperatursteg  $-T_2$  får man en nedkylning av marken. Nedkylningen sprider sig nedåt i marken och in under byggnaden. I avsnitt 6.1.1 skall denna process illustreras med några exempel. De givna temperaturfälten hänför sig till temperatursteget vid markytan. För att få det totala temperaturförloppet skall övriga komponenter adderas.

Temperaturen i marken strax under värmeisoleringen är av speciellt intresse. I avsnitt 6.1.2 anges ett analytiskt uttryck för den maximala nedkylningen under kanten av plattan.

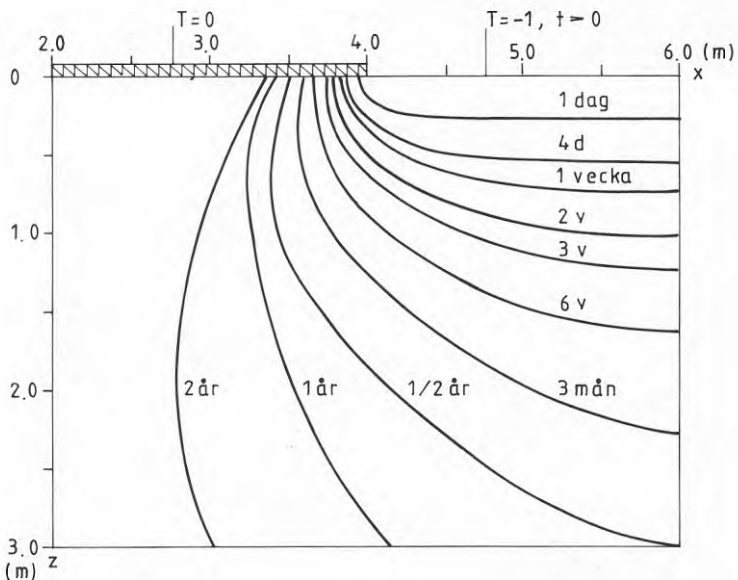
### 6.1.1 Några temperaturprofiler

Temperaturförloppet har beräknats numeriskt för ett tvärsnitt av en långsträckt platta med bredden  $B$  och ekvivalent isolertjocklek  $d$ . Följande data har använts:

$$\begin{aligned} T_2 &= 1^{\circ}\text{C} & a &= 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ B &= 8 \text{ m} & d &= 2.4 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Ovanför isoleringen är temperaturen lika med noll. Vid markytan är  $T$  lika med  $-1$  från  $t = 0$ . Marktemperaturen är noll vid  $t = 0$ .

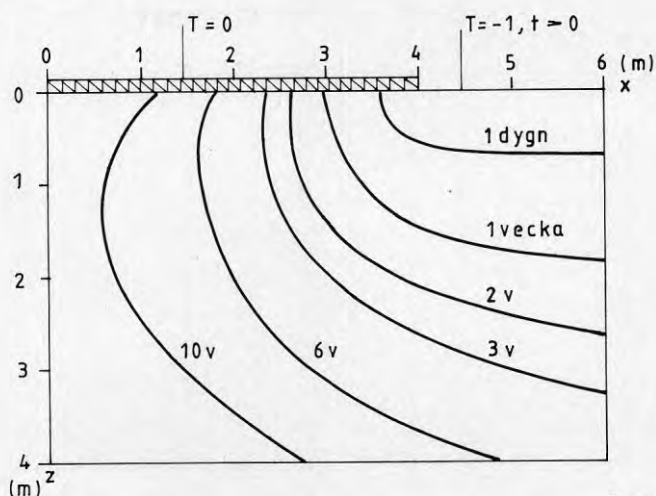
Isotermen  $T = -0.5$  ger 50% av nedkylningen vid markytan. Den visas vid olika tidpunkter i figur 6.1.1. Efter en dag har den trängt ner 3 dm i marken utanför huset och ca 1 dm in under husets värmeisolering. Efter en vecka har dessa siffror ökat till 0.75 m respektive 0.3 m. Figur 6.1.1 visar den glidande tidsskalan för nedkylningen. Processen blir efterhand allt långsammare. Man uppnår nära kanten på plattan huvudsakligen stationära förhållanden efter ett halvt år, medan processen är långsammare ner i marken under plattan.



Figur 6.1.1 Isothermen  $T = -0.5$  (50% temperaturstörning) vid kant av långsträckt platta med data enligt (6.1.1).



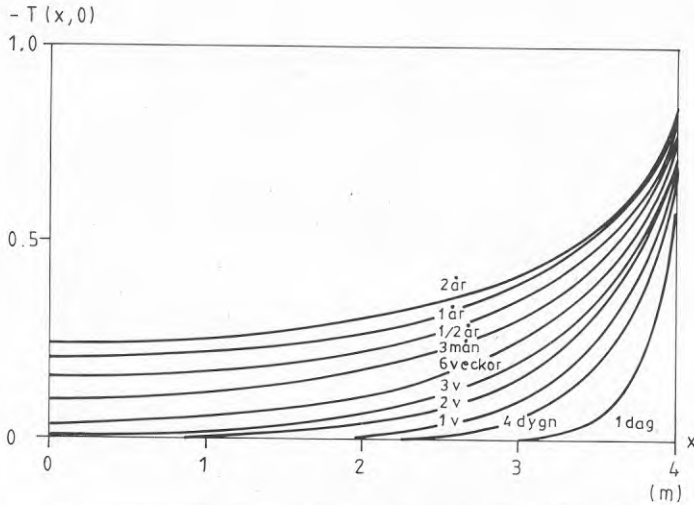
Isotermen  $T = -0.1$  ger 10% av markytans nedkylning. Den visas i figur 6.1.2 vid olika tidpunkter.



Figur 6.1.2 Isothermen  $T = -0.1$  (10% temperaturstörning) för ett temperatursteg vid markytan. Data enligt (6.1.1).

Isotermen  $T = -0.1$  rör sig snabbare och längre in under plattan än isotermerna  $T = -0.5$ . Efter 3 månader har den nått in till plattans mitt (dvs till z-axeln i figur 6.1.2).

De beräknade temperaturerna ( $T(x,0)$ ,  $0 < x < 4$  m) i marken strax under värmeisoleringen visas i figur 6.1.3. Temperaturprofilen är symmetrisk runt plattans mittpunkt  $x = 0$ . Därför visas enbart högra halvan,  $0 < x < 4$  m. Vid randpunkten  $x = 4$  m skall  $-T$  vara lika med  $+1$ . I inre punkter,  $0 < x < 4$ , startar  $-T$  från noll och växer efterhand upp till ett stationärt slutvärde. Man kan säga att stationär temperaturprofil i stort sett uppnåtts efter ett år i det aktuella exemplet.



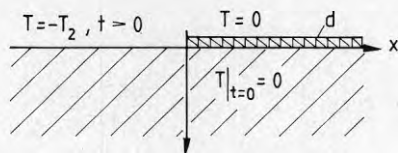
Figur 6.1.3 Temperaturprofiler direkt under plattan för ett temperatursteg vid markytan. Data enligt (6.1.1).

#### 6.1.2 Maximal temperaturstörning in under plattans kant

Nedkylningen in under plattan i exemplet enligt figur 6.1.3 ovan är under en första tid ett rent kantproblem, vilket ej beror på plattans ändliga bredd  $B$ . För den första metern in under plattans kanter ( $3 < x < 4$  m) får man i detta exempel en påverkan från den andra sidan ( $x < -4$  m) efter ungefär 3 månader. I ett tredimensionellt fall får man också huvudsakligen ett rent kantproblem under en första tid. I området närmast plattans fyra hörn gäller detta ej. Frånsett dessa hörnområden får man ett tvådimensionellt förlopp i ett plan vinkelrätt mot plattans kantlinje.

Figur 6.1.4 illustrerar temperaturförloppet vid en kant för ett temperatursteg vid markytan. Värmeisoleringen med den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  ligger längs positiva  $x$ -axeln. Den tänkes utsträckt oändligt långt.

Nedkylningen under plattan beror på isolertjockleken, dvs på  $d$ . Nedkylningen ökar då  $d$  ökar, eftersom värmeflödet från byggnaden då minskar.



Figur 6.1.4 Temperatursteg för utetemperaturen. Kantproblem där isoleringen ligger längs hela positiva x-axeln.

Gränsfallet med totalisolering,  $d = +\infty$ , ger den maximala nedkylningen under plattan. Randvillkoret vid värmeisoleringen blir i detta gränfall enligt (2.2.3):

$$z = 0, x > 0: \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (d = \infty) \quad (6.1.2)$$

Den analytiska lösningen för detta fall enligt figur 6.1.4 med totalisoleringen (6.1.2) vid plattan har studerats i referens 7. Temperaturen direkt under plattan ges av följande uttryck:

$$T(x,0,t) = -T_2 \cdot f_2(x/\sqrt{a\tau}) \quad (x \geq 0) \quad (6.1.3)$$

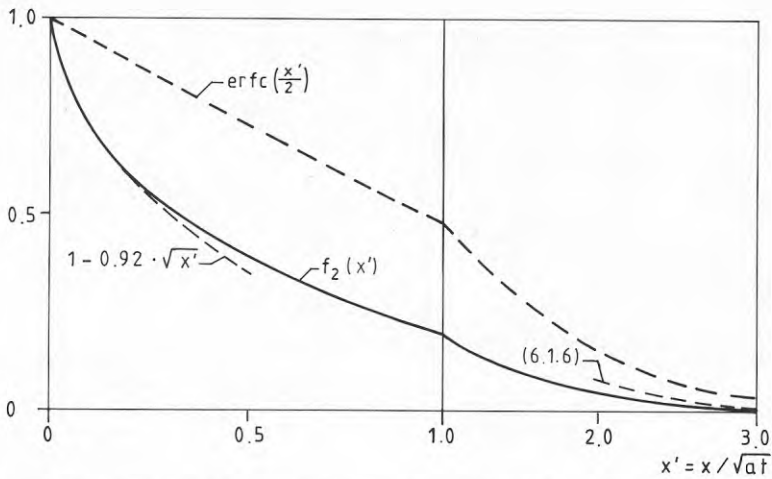
$$f_2(x') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\frac{x'(s^2 + 1)}{2}\right) \cdot \frac{1}{s^2 + 1} ds$$

Här är  $\operatorname{erfc}(y)$  den s k komplementära felfunktionen (complementary error function):

$$\operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-s^2} ds \quad (6.1.4)$$

Den streckade kurvan i figur 6.1.5 ger  $\operatorname{erfc}(x'/2)$ .

Funktionen  $f_2(x')$  har beräknats genom numerisk integration för olika värden på  $x'$ . Den visas i figur 6.1.5. Några värden anges i tabell 6.1.1.



Figur 6.1.5 Funktionen  $f_2(x')$  enligt (6.1.3) och  $\text{erfc}(x'/2)$  enligt (6.1.4). Dessa funktioner ger temperaturen under plattan och i ostörd mark enligt figur 6.1.6.

$x' = x/\sqrt{\alpha t}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
$f_2 = T(x,0,t)/(-T_2)$	1	0.712	0.597	0.513	0.446	0.389	0.199	0.098	0.045

Tabell 6.1.1 Temperaturstörning under totalisolerad platta enligt (6.1.3).

För små värden på  $x'$  gäller approximativt:

$$f_2(x') \approx 1 - 0.92\sqrt{x'} \quad (x' < 0.3) \quad (6.1.5)$$

För stora värden på  $x'$  anger referens 7 följande approximativa uttryck:

$$f_2(x') \approx \frac{2\sqrt{z'}}{\pi} e^{-(x')^2/4} \cdot \frac{1}{(x')^2} \quad (x' > 3) \quad (6.1.6)$$

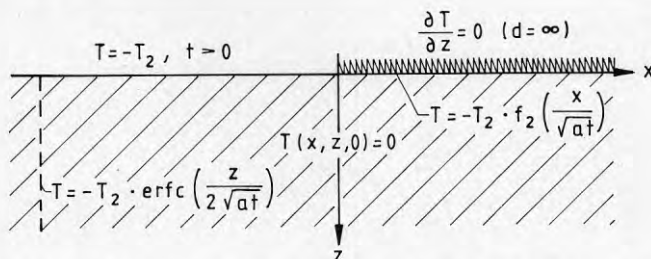
Approximationerna 6.1.5-6 är markerade i figur 6.1.5.

Långt bort från plattan, dvs för stora negativa  $x$ -värden i figur 6.1.4, får man ett vertikalt, endimensionellt temperaturförlopp. Vid markytan har man ett temperatursteg. Lösningen till detta problem är välkänd:

$$T(-\infty, z, t) = -T_2 \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (6.1.7)$$

Denna temperatur ges av den streckade kurvan  $\operatorname{erfc}(x'/2)$  i figur 6.1.5, varvid  $x'$  skall sättas lika med  $z/\sqrt{\alpha t}$ .

De två formlerna 6.1.3 och 6.1.7 ger en god uppfattning om nedkylningen i marken vid kanten av en totalisolerad platta för ett temperatursteg. Processen och de två linjerna där temperaturen ges illustreras i figur 6.1.6.



Figur 6.1.6 Ostörd markttemperatur (6.1.7) och temperatur under plattan (6.1.3) för temperatursteg vid kant av totalisolerad platta.

Det är värt att notera att den ostörda temperaturen vertikalt ner i marken är en funktion enbart av  $z/\sqrt{\alpha t}$ , medan temperaturen direkt under plattan är en funktion av  $x/\sqrt{\alpha t}$ . Man har samma temperaturprofil vid olika tider enligt kurvorna i figur 6.1.5. Enkla formler för hur olika temperaturnivåer rör sig kan ges. Låt  $x_p$  ange  $x$ -koordinaten för nivån  $T(x, 0, t) = -T_2 \cdot p$ ,  $0 < p < 1$ , under plattan vid tiden  $t$ . För  $t$  ex  $p = 0.5$  gäller enligt figur 6.1.5:

$$T(x, 0, t)/(-T_2) = f(x') = 0.5 \Leftrightarrow x' \approx 0.3 \Leftrightarrow x \approx 0.3\sqrt{\alpha t}$$

Isotermen  $T = -0.5T_2$  rör sig således in under plattan enligt:

$$x_{0.5} \approx 0.3\sqrt{a\tau}$$

För några olika  $p$  erhålls:

$$\begin{aligned} x_{0.5} &\approx 0.3\sqrt{a\tau} & x_{0.2} &\approx \sqrt{a\tau} \\ x_{0.1} &\approx 1.5\sqrt{a\tau} & x_{0.01} &\approx 2.8\sqrt{a\tau} \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Låt analogt  $z_p$  ange  $z$ -koordinaten för isotermen  $T/(-T_2) = p$  i ostörd mark långt från plattan. Då fås för  $p = 0.5$  enligt figur 6.1.5:

$$T(-\infty, z, t)/(-T_2) = 0.5 \iff x' = 0.95 \iff z/\sqrt{a\tau} = 0.95$$

Isotermen  $T/(-T_2) = 0.5$  rör sig således nedåt i ostörd mark enligt:

$$z_{0.5} \approx 0.95\sqrt{a\tau}$$

För några olika  $p$  erhålls:

$$\begin{aligned} z_{0.5} &\approx 0.95\sqrt{a\tau} \approx \sqrt{a\tau} & z_{0.1} &\approx 2.3\sqrt{a\tau} \\ z_{0.01} &\approx 3.6\sqrt{a\tau} \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Exempel 6.1.1 Givet ett temperatursteg vid kanten av en total-isolerad platta med  $T_2$  och  $a$  enligt (6.1.1):

$$T_2 = 1^\circ\text{C} \quad a = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (d = +\infty)$$

Låt  $t_d$  ange tiden i dagar. Den karakteristiska längden  $\sqrt{a\tau}$  blir:

$$\sqrt{a\tau} = \sqrt{1 \cdot 10^{-6} \cdot t_d \cdot 3600 \cdot 24} = 0.294 \cdot \sqrt{t_d} \quad (\text{m})$$

Isotermen  $T = -0.5^{\circ}\text{C}$  rör sig in under plattan enligt:

$$x_{0.5} \approx 0.30 \cdot 0.294\sqrt{t_d} = 0.088\sqrt{t_d} \quad (\text{m})$$

Samma isoterm rör sig vertikalt i ostörd mark enligt

$$z_{0.5} \approx 0.95 \cdot 0.294\sqrt{t_d} = 0.28\sqrt{t_d} \quad (\text{m})$$

Nedanstående tabell ger några värden.

t (dagar)	$\frac{1}{24}$	1	7	30	90	365
$x_{0.5}$ (m)	0.02	0.09	0.23	0.5	0.8	1.7
$z_{0.5}$ (m)	0.06	0.28	0.74	1.5	2.7	5.3

Temperaturprofilen under plattan ges av  $f_2(x/\sqrt{at})$  enligt figur 6.1.5. Skalningslängden  $\sqrt{at}$  är för några tider:

t = 1 dag	$\sqrt{at} = 0.29$ m
t = 7 dagar	$\sqrt{at} = 0.78$ m
t = 30 dagar	$\sqrt{at} = 1.6$ m
t = 90 dagar	$\sqrt{at} = 2.8$ m

Temperaturen under plattan efter en vecka ges av  $f_2(x/0.78)$ :

x (m)	0	0.25	0.50	0.78	1	1.5
$-T(x, 0, 7 \text{ dagar})$	1	0.50	0.33	0.20	0.14	0.06

Det är intressant att jämföra detta fall med totalisolering ( $d = \infty$ ) med fallet enligt (6.1.1), där den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  är lika med 2.4 m. Från figur 6.1.3 erhålls:

x (m)	0	0.25	0.50	0.78	1.0	1.5
-T(x,0,7 dagar) (d = 2.4 m)	1	0.43	0.26	0.17	0.10	0.04

Dessa värden ligger som sig bör något under värdena vid totalisolering.

Temperaturen en halv meter in under plattan och en halv meter ner i ostörd mark ges av:

$$T(0.5,0,t) = -f_2(x')$$

$$x' = \frac{x}{\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.5}{0.294\sqrt{t_d}} = \frac{1.70}{\sqrt{t_d}}$$

$$T(-\infty,0.5,t) = -\operatorname{erfc}(x'/2)$$

$$x' = \frac{z}{\sqrt{\alpha t}} = \frac{1.70}{\sqrt{t_d}}$$

Med hjälp av figur 6.1.5 erhålls nedanstående tabell:

t (dagar)	$\frac{1}{3}$	1	7	30	90	365
-T(0.5,0,t)	0.01	0.07	0.32	0.51	0.62	0.74
-T(-\infty,0.5,t)	0.04	0.23	0.65	0.82	0.90	0.95

Temperaturen vid markytan för en köldknäpp som varar tiden  $t_2$  ges av:

$$x < 0, z = 0: \quad T = \begin{cases} -T_2 & 0 < t < t_2 \\ 0 & t > t_2, \quad t < 0 \end{cases} \quad (6.1.10)$$



Fram till tiden  $t = t_2$  ges temperaturförloppet i marken av ett rent temperatursteg. Efter denna tid kan temperaturen vid markytan betraktas som summan av två temperatursteg. Med beteckningen  $H(t)$  för ett enhetstemperatursteg vid  $t = 0$  enligt (2.1.8) kan (6.1.10) skrivas:

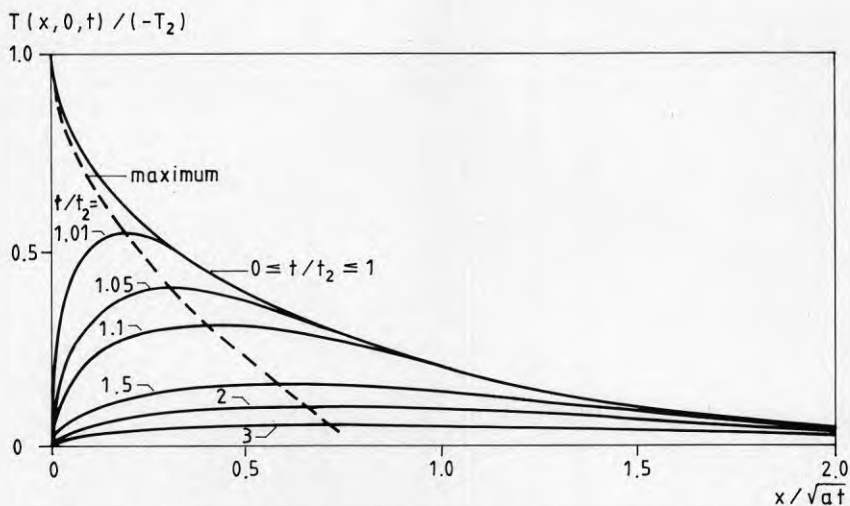
$$T = -T_2 \cdot H(t) + T_2 \cdot H(t - t_2) \quad (6.1.11)$$

Marktemperaturen efter köldknäppen ( $t > t_2$ ) blir en summa av dessa två steg. Temperaturen under kanten av den totaliserade plattan blir enligt (6.1.3):

$$T(x,0,t) = -T_2 \cdot \left\{ f_2(x/\sqrt{at}) - f_2(x/\sqrt{a(t-t_2)}) \right\} \quad (6.1.12)$$

$$0 < x < \infty, t > t_2$$

Avklingningen efter köldknäppen ges av uttrycket inom klammern i (6.1.12). Detta kan betraktas som en funktion av  $x/\sqrt{at}$  och  $t/t_2$ . Denna kurvsara ges i figur 6.1.7.



Figur 6.1.7 Avklingning under en totaliserad platta efter en köldknäpp enligt (6.1.10).

Temperaturprofilen under plattan ges under köldknäppen av kurvan markerad  $0 \leq t/t_2 \leq 1$ . Därefter ges den av kurvskanen  $t/t_2 > 1$ . Dessa förändras i tiden med den karakteristiska längden  $\sqrt{a\tau}$ . Man ser att den första avklingningen är snabb. Temperaturmaximum har fallit från 1 till 0.55 under tiden  $t = t_2$  till tiden  $t = 1.01t_2$ . Vid tiden  $t = 2t_2$  har maximum fallit till 0.10. Den streckade kurvan i figur 6.1.7 anger temperaturmaximum under avklingning vid olika tidpunkter. Tabell 6.1.2 ger några värden för tid, x-koordinat och temperatur för detta maximum.

$t/t_2$	1.01	1.1	2	$\geq 3$
$x/\sqrt{a\tau}$	0.18	0.39	0.64	$\approx 0.77$
$T(x,0,t)/(-T_2)$	0.55	0.31	0.10	$\leq 0.03$

Tabell 6.1.2 Temperatur och x-koordinat vid temperaturmaximum under plattan för olika tider vid avklingning enligt figur 6.1.7.

Exempel 6.1.2 Givet en köldknäpp med en veckas längd för en totalisolerad platta med följande data:

$$T_2 = 10^{\circ}\text{C} \quad a = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad t_2 = 1 \text{ vecka}$$

För en vecka efter köldknäppens slut gäller:

$$t = 2 \text{ veckor} \quad t/t_2 = 2$$

$$\frac{x}{\sqrt{a\tau}} = \frac{x}{0.294 \cdot \sqrt{14}} = \frac{x}{1.1}$$

Kurvan  $t/t_2 = 2$  i figur 6.1.7 är tillämplig. Detta ger följande temperaturer i  $^{\circ}\text{C}$  under plattan:

$$t - t_2 = 1 \text{ vecka}$$

$x$ (m)	0	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
$-T(x,0,t)$	0	0.72	0.92	0.91	0.68	0.40	0.10	0.02

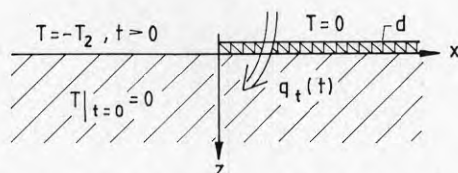
Tre veckor efter pulsens slut erhålls:

$$t - t_2 = 3 \text{ veckor}$$

$x \text{ (m)}$	0	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
$-T(x,0,t)$	0	0.38	0.50	0.55	0.44	0.39	0.18	0.06

## 6.2 Värmeförlust för temperatursteg vid kant

Figur 6.2.1 illustrerar det grundläggande fallet med ett temperatursteg vid kanten av en platta. Processen är här tvådimensionell i planet vinkelrätt mot plattans kantlinje. Plattan med den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  tänkes oändligt utsträckt längs hela positiva  $x$ -axeln. Denna lösning utnyttjas i 6.3 för plattor med ändlig utsträckning.



Figur 6.2.1 Temperatursteg vid kant av platta.

### 6.2.1 Värmeförlustfaktor $h_t^0$

Värmemotståndet vid markytan ( $x < 0, z = 0$ ) antas i detta avsnitt vara noll:  $d_1 = 0$ . Problemet enligt figur 6.2.1 innehåller nu enbart en längd  $d$ . Värmeflödet  $q_t$  från plattan kan då med skalning enligt (2.5.6) och (2.5.4) skrivas:

$$q_t(t) = \lambda T_2 \cdot h_t(at/d^2) \quad (\text{W/m}) \quad (6.2.1)$$

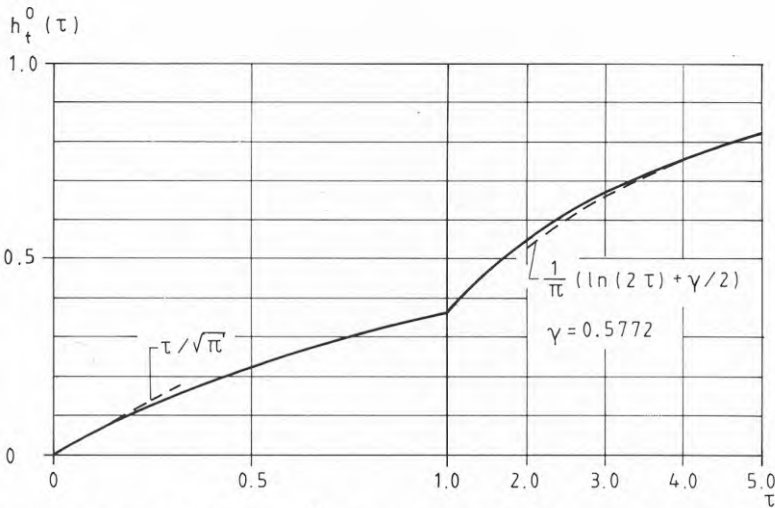
Värmeförlustfaktorn  $h_t$  blir i detta renodlade fall en funktion enbart av dimensionslös tid  $at/d^2$ .

I referens 3 behandlas detta värmeströmningsproblem. För värmeförlustfaktorn erhålls följande uttryck:

$$h_t(at/d^2) = h_t^0(\sqrt{at}/d) \quad (6.2.2)$$

$$h_t^0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-s^2} \cdot \operatorname{erfc}(s) \cdot ds \quad (6.2.3)$$

Här har tidsvariabeln  $\tau = \sqrt{at}/d$  införts. För detta grundfall används beteckningen  $h_t^0(\tau)$  för temperaturstegets värmeförlustfaktor. Funktionen  $h_t^0(\tau)$  ges i figur 6.2.2 och tabell 6.2.1.



Figur 6.2.2 Funktionen  $h_t^0$  enligt (6.2.3) vilken ger värmeförlustfaktorn för temperatursteg vid kant enligt (6.2.1-2).

$\tau$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$h_t^0$	0	0.053	0.101	0.145	0.185	0.221
$\tau$	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0
$h_t^0$	0.365	0.470	0.550	0.616	0.670	0.758
$\tau$	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
$h_t^0$	0.828	0.885	0.935	0.975	1.012	1.045

Tabell 6.2.1 Funktionen  $h_t^0(\tau)$ .

För små  $\tau$  gäller följande approximation:

$$h_t^0(\tau) \approx \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \quad (\tau < 0.2) \quad (6.2.4)$$

För stora  $\tau$  gäller enligt referens 3 approximationen:

$$h_t^0(\tau) \approx \frac{1}{\pi}(\ln(2\tau) + \gamma/2) \quad (\tau > 2) \quad (6.2.5)$$

$$\gamma \approx 0.5772 \quad (\text{Eulers konstant})$$

Dessa approximationer visas i figur 6.2.2.

### 6.2.2 Ackumulerad värmeförlust $e_t^0$

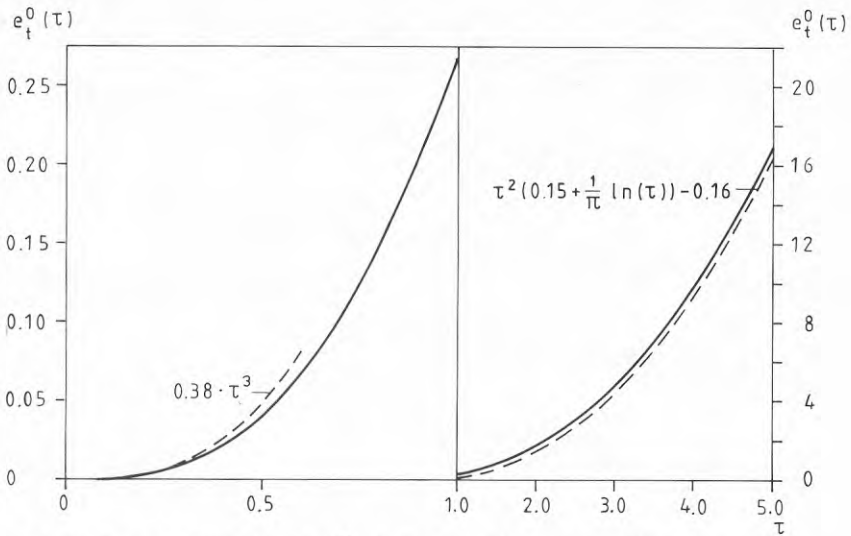
Den integrerade eller ackumulerade värmeförlusten  $E_t(t)$  definieras av (2.5.11). Med skalning erhålls enligt (2.5.12):

$$E_t(t) = CT_2 d^2 \cdot e_t^0(\sqrt{at}/d) \quad (\text{J/m}) \quad (6.2.6)$$

Här är  $C = \lambda/a$  ( $\text{J/m}^3\text{K}$ ) värmekapacitet per volymsenhet. Faktorn  $CT_2 d^2$  får sorten J/m. Den dimensionslösa faktorn  $e_t^0(\tau)$ ,  $\tau = \sqrt{at}/d$ , för ackumulerad värmeförlust blir:

$$e_t^0(\tau) = h_t^0(\tau) \left( \tau^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{\tau}{2\sqrt{\pi}} e^{\tau^2} \cdot \text{erfc}(\tau) - \frac{\tau^2}{2\pi} \quad (6.2.7)$$

Funktionen  $e_t^0(\tau)$  visas tillsammans med approximativa uttryck för stora och små  $\tau$  i figur 6.2.3.



Figur 6.2.3 Funktionen  $e_t^0(\tau)$  enligt (6.2.7), vilken ger ackumulerad värmeförlust enligt (6.2.6) för temperatursteg vid kant.

Exempel 6.2.1 Givet ett temperatursteg  $-T_2$  från tiden  $t = 0$  med data enligt grundfallen A, B och C.

$$\lambda = 1.5 \text{ W/mK} \quad a = 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$T_2 = 15^\circ\text{C} \quad (d_1 = 0)$$

Värmekapaciteten  $C$  blir:

$$C = \frac{\lambda}{a} = 2 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3\text{K}$$

Den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  är:

$$d = \frac{0.08 \cdot 1.5}{0.04} = 3 \text{ m} \quad (\text{fall A, C})$$

$$d = \frac{0.16 \cdot 1.5}{0.04} = 6 \text{ m} \quad (\text{fall B})$$

Tidsvariabeln  $\tau$  blir då  $t_d$  betecknar tiden i dagar:

$$\tau = \frac{\sqrt{at}}{d} = \frac{\sqrt{0.75 \cdot 10^{-6} \cdot t_d \cdot 3600 \cdot 24}}{3}$$

$$\tau \approx \sqrt{t_d/139} \quad (\text{fall A, C})$$

$$\tau \approx \sqrt{t_d/556} \quad (\text{fall B})$$

För  $t_d = 7$  dagar fås för fall A och C:

$$q_t = 1.5 \cdot 15 \cdot h_t^0(\sqrt{7/139}) \approx 1.5 \cdot 15 \cdot 0.112 = 2.5 \text{ W/m}$$

$$E_t = 2 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 3^2 \cdot e_t^0(\sqrt{7/139}) \approx 0.99 \cdot 10^6 \text{ J/m} = 0.27 \text{ kWh/m}$$

Nedanstående tabell ger  $q_t$  och  $E_t$  för några tider för de två alternativen.

	t (dagar)	0	$\frac{1}{24}$	1	2	4	7	14	30	90
Fall A, C (d = 3 m)	$q_t$ (W/m)	0	0.26	0.97	1.43	1.97	2.5	3.45	4.65	7.06
	$E_t$ (kWh/m)	0	0.0002	0.014	0.046	0.13	0.27	0.82	2.31	10.9
	$q_t$ (W/m)	0	0.13	0.50	0.74	0.97	1.31	1.86	2.59	4.15
Fall B (d = 6 m)	$E_t$ (kWh/m)	0	0.0001	0.007	0.023	0.056	0.14	0.43	1.25	6.19

### 6.2.3 Värmemotstånd vid markytan

Det ekvivalenta värmemotståndet  $d_1$  vid markytan har ovan antagits vara noll. Här skall fallet  $d_1 > 0$  behandlas. Värmeströmningsprocessen med ett temperatursteg vid kant av platta enligt figur 6.2.1 innehåller nu de två längderna  $d$  och  $d_1$ . Formel 6.2.1 för värmeförlusten  $q_t$  modifieras såtillvida att  $h_t$  blir en funktion även av  $d_1/d$ . Som tidsvariabel används  $\tau = \sqrt{at}/d$ . I analogi med det periodiska fallet, (5.3.6), används beteckningen  $h_t^1$ :

$$q_t(t) = \lambda \tau_2 \cdot h_t^1(\sqrt{at}/d; d_1/d) \quad (6.2.8)$$

I referens 3 anges för detta fall värmeförlustfaktorn:

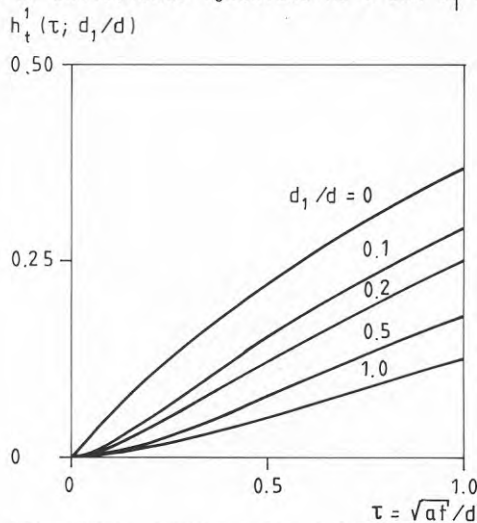
$$h_t^1(\sqrt{at}/d; d_1/d) = \frac{d}{d-d_1} h_t^0(\sqrt{at}/d) - \frac{d_1}{d-d_1} h_t^0(\sqrt{at}/d_1) \quad (6.2.9)$$

Här är  $h_t^0(\tau)$  den tidigare värmeförlustfaktorn enligt (6.2.3). I fallet  $d_1 = d$  får man noll i nämnaren. Då gäller uttrycket:

$$h_t^1(\tau; 1) = h_t^0(\tau) - \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} e^{\tau^2} \cdot \operatorname{erfc}(\tau) \quad (6.2.10)$$

$$(\tau = \sqrt{at}/d)$$

Värmeförlustfaktorn  $h_t^1(\tau; d_1/d)$  enligt formlerna 6.2.9-10 visas i figur 6.2.4. Det är intressant att notera att uttrycket 6.2.9 är symmetriskt med avseende på  $d$  och  $d_1$ . Värmeflödet  $q_t$  ändras ej om isoleringarna med de ekvivalenta tjocklekarna  $d$  och  $d_1$  byter plats.



Figur 6.2.4 Värmeförlustfaktor enligt (6.2.8-10) för temperatursteg vid kant av platta. Vid markytan råder ett ekvivalent värmemotstånd  $d_1$  (m).



Exempel 6.2.2 I exempel 6.2.1 ovan blev värmeförlusten 2.5 W/m i fall A, C efter 7 dagar. Värmeförlustfaktorn var:

$$h_t^0(\sqrt{7/139}) \approx 0.112$$

Antag att ytmotståndet vid markytan ger  $d_1 = 0.3$  m. Då gäller för det aktuella exemplet  $d_1/d = 0.1$ .

Värmeförlustfaktorn reduceras enligt figur 6.2.4 till:

$$h_t^1(\sqrt{7/139}; 0.1) \approx 0.060$$

Effektflödet halveras nästan:

$$q_t \approx \frac{2.5}{0.112} \cdot 0.060 = 1.3 \text{ W/m.}$$

Exemplet ovan visar att ytmotståndet vid markytan ger en relativt kraftig reduktion av värmeförlusten vid ett temperatursteg. Denna skillnad mellan kurvan  $d_1/d = 0$  och t ex  $d_1/d = 0.1$  i figur 6.2.4 minskar dock med ökande tid. Betydelsen av ytmotståndet vid markytan minskar därför med tiden.

Då marken är snötäckt får man betydligt större värden på  $d_1/d$ . Värmeförlusten reduceras därför kraftigt av ett snötäcke.

### 6.3 Värmeförlust för platta på mark

#### 6.3.1 Skalning och kantapproximation

Skalning av värmeförlusten  $Q_t$  vid ett temperatursteg hos utetemperaturen behandlas i avsnitt 2.5. För en rektangulär platta gäller ( $d_1 = 0$ ) enligt (2.5.5):

$$Q_t = \lambda T_2 L \cdot h_t(at/B^2; L/B, d/B) \quad (6.3.1)$$

Denna skalning kan genom en omstuvning hos argumenten alternativt uttryckas:

$$Q_t = \lambda T_2(2L + 2B) \cdot h_t(\sqrt{a\tau}/d ; L/d, B/d) \quad (6.3.2)$$

Som längdfaktor används kantlängden  $2L + 2B$  runt plattan. För korta tider blir temperaturförloppet enligt den tidigare diskussionen väsentligen ett kantproblem enligt figur 6.1.4. Värmeförlustfaktorn  $h_t$  i (6.3.2) kan approximeras med kantvärmeförlustfaktorn  $h_t^0$ . Detta ger följande kantapproximation:

$$Q_t \approx \lambda T_2(2L + 2B) \cdot h_t^0(\sqrt{a\tau}/d) \quad (\sqrt{a\tau} < B/2) \quad (6.3.3)$$

Temperaturstörningens inträngning under plattan representeras av längden  $\sqrt{a\tau}$  enligt (6.1.8). Kantapproximationen bör därför gälla, då  $\sqrt{a\tau}/B$  är tillräckligt litet ( $B < L$ ). En jämförelse med numeriska beräkningar ger kravet  $\sqrt{a\tau}/B < 0.5$ . Felet i kantapproximationen (6.3.3) bedöms då vara mindre än 15%.

Kantapproximationen (6.3.3) kan för grundfall A och B med data enligt (1.10) tillämpas då

$$t < \frac{B^2}{4a} = \frac{8 \cdot 8}{4 \cdot 0.75 \cdot 10^{-6}} \text{ sek} = 247 \text{ dagar} \quad (6.3.4)$$

För grundfall C fås tidsvillkoret:

$$t < \frac{15 \cdot 15}{4 \cdot 0.75 \cdot 10^{-6}} \text{ sek} = 2.4 \text{ år} \quad (6.3.5)$$

Kantapproximationen kan således användas under lång tid.

En allmän formel för värmeförlusten vid en stegändring av utetempe-  
raturen kan nu anges. Givet en platta på mark med kantlängden  $L_e$ .  
Den behöver ej vara rektangulär. Värmeförlusten ges då av följande  
uttryck:

$$Q_t \approx \lambda T_2 L_e \cdot h_t^0(\sqrt{a\tau}/d) \quad (6.3.6)$$

Låt  $L_{\min}$  beteckna plattans minsta längd. Kravet för approximationen  
ovan blir:

$$\sqrt{a\tau} < L_{\min}/2 \quad t < \frac{L_{\min}^2}{4a} \quad (6.3.7)$$

Funktionen  $h_t^0(\tau)$  ges av figur 6.2.2. Om markytan har ett värmemot-  
stånd med den ekvivalenta tjockleken  $d_1$ , så skall  $h_t^0$  ersättas av  $h_t^1$ ,  
vilket ges av formel 6.2.9 och figur 6.2.4.

Skalning av värmeförlustfaktorn  $q_t$  (W/m) för ett tvärsnitt av en  
långsträckt platta ges av (2.5.6). Med omstuvning av värmeförlust-  
faktorns argument kan  $q_t$  skrivas:

$$q_t = \lambda T_2 \cdot h_t(\sqrt{a\tau}/d ; B/d) \quad (6.3.8)$$

Numeriskt beräknad värmeförlustfaktor  $h_t$  visas i figur 6.3.1 för fal-  
let  $d = 0.3B$ .

Under en första tid kan kantapproximationen i föregående avsnitt ut-  
nyttjas för de två kanterna. Detta ger följande approximation:

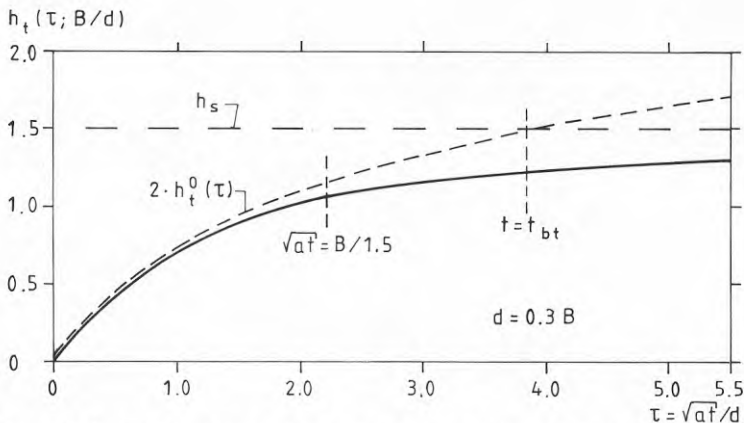
$$q_t \approx 2\lambda T_2 \cdot h_t^0(\sqrt{a\tau}/d) \quad (\sqrt{a\tau} < \frac{B}{1.5}) \quad (6.3.9)$$

Funktionen  $h_t^0$  skall ersättas av  $h_t^1$ , om man har ett värmemotstånd vid  
markytan.

En jämförelse med numeriska beräkningar visar att kantapproximation  
(6.3.9) kan utnyttjas då

$$\sqrt{a\tau} < B/1.5 \quad \text{eller} \quad t < \frac{B^2}{2.25a} \quad (6.3.10)$$

Den streckade kurvan i figur 6.3.1 visar kantapproximationen för fallet  $B/d = 10/3$ . Det maximala felet i intervallet är cirka 10%.



Figur 6.3.1 Värmeförlustfaktor  $h_t$  för tvärsnitt av långsträckt platta. Streckad kurva anger kantapproximationen (6.3.9). Den horisontella linjen  $h_s$  anger stationär värmeförlustfaktor.

### 6.3.2 Approximation för korta och långa tider

Vid ett temperatursteg hos utetemperatur upprätthålls en temperaturdifferens  $0 - (-T_2) = T_2$  mellan innetemperatur och markyta. I det stationära fallet är motsvarande differens  $T_i - T_0$ . Värmeflödena  $Q_t$  och  $Q_s$  skalas med dessa temperaturfaktorer. Temperaturförloppet i marken vid stegändringen kommer efterhand att närma sig det stationära fallet då tiden  $t$  ökar. Allmänt gäller att temperaturstegets värmeförlustfaktor  $h_t$  går mot den stationära värmeförlustfaktorn då  $t$  går mot oändlighet:

$$h_t(at/L_s^2; L_1/L_s, \dots) \rightarrow h_s(L_1/L_s, \dots) \quad t \rightarrow \infty \quad (6.3.11)$$

För tillräckligt stora tider kan därför  $h_t$  approximeras med motsvarande  $h_s$ .

För korta tider kan  $Q_t$  beräknas med en kantapproximation enligt föregående avsnitt. För stora tider approximeras  $Q_t$  med den stationära värmeförlusten  $Q_s$ , vilken behandlas i kapitel 3. Värmeför-

lusten vid kantapproximation växer monotont med  $t$ . För stora tider växer den enligt figur 6.2.2 som logaritmen av  $t$ . Vid en viss tidpunkt  $t = t_{bt}$  (bryttid, breaking time) blir  $Q_t$  enligt kantapproximation och  $Q_s$  lika. Före denna tid utnyttjas kantapproximation och efter denna tid stationär värmeförlust  $Q_s$ .

För ett tvärsnitt av en långsträckt platta ger detta, med hjälp av (3.4.1), följande approximation av  $q_t$ :

$$q_t \approx \lambda T_2 \cdot \begin{cases} 2h_t^0(\sqrt{at}/d) & t < t_{bt} \\ h_s(d/B) & t > t_{bt} \end{cases} \quad (6.3.12)$$

Bryttiden  $t_{bt}$  definieras av att de två uttrycken är lika.

Approximationen 6.3.12 visas för fallet  $d = 0.3B$  i figur 6.3.1. Den heldragna kurvan anger numeriskt beräknad värmeförlustfaktor. Denna approximeras med de två streckade kurvorna  $2h_t^0(\tau)$  och  $h_s$ . Dessa skär varandra vid bryttiden  $\tau_{bt} = 3.85$ . Före denna tid approximeras  $h_t$  med en kantapproximation och efter denna tid med stationärt värde  $h_s$ . Maximalt fel infaller vid bryttiden. I det aktuella fallet överskattas  $h_t$  där, enligt figur 6.3.1, med 24%.

För en rektangulär platta på mark erhålls följande approximationer:

$$Q_t \approx \lambda T_2 \cdot \begin{cases} (2L + 2B) \cdot h_t^0(\sqrt{at}/d) & t < t_{bt} \\ L \cdot h_s(L/B, d/B) & t > t_{bt} \end{cases} \quad (6.3.13)$$

Det stationära värdet ges av (3.1.1). Bryttiden  $t_{bt}$  definieras av att de två approximationerna är lika:

$$(2L + 2B)h_t^0(\tau_{bt}) = L \cdot h_s(L/B, d/B) \quad (6.3.14)$$

$$\tau_{bt} = \sqrt{at_{bt}}/d$$

Exempel 6.3.1 Bryttiden för grundfall A med data enligt (1.10A) ges av:

$$40 \cdot h_t^0(\tau_{bt}) = 12 \cdot h_s(1.5, 3/8) \approx 12 \cdot 1.58$$

$$\tau_{bt} = 1.53 \quad (\text{figur 6.2.2})$$

$$t_{bt} = \frac{3^2 \cdot 1.53^2}{0.75 \cdot 10^{-6}} \text{ sek} = 325 \text{ dagar}$$

För grundfall B med data enligt (1.10B) fås:

$$40 \cdot h_t^0(\tau_{bt}) = 12 \cdot 0.95 \quad \tau_{bt} = 0.70$$

$$t_{bt} = 272 \text{ dagar}$$

För grundfall C med data enligt (1.10C) fås:

$$90 \cdot h_t^0(\tau_{bt}) = 30 \cdot 2.08 \quad \tau_{bt} = 3.2$$

$$t = 3.9 \text{ år}$$

Det är intressant att notera att dessa bryttider är stora. För ett småhus med längd och bredd runt 10 m blir bryttiden runt ett år. För en större byggnad blir enligt fall C ovan ( $30 \times 15 \text{ m}^2$ ) bryttiden flera år. Man kan därför använda kantapproximationen under hela eldningssäsongen.

#### 6.4 Sträckvis konstant utetemperatur

I avsnitt 2.1 diskuteras superposition. Speciellt behandlas fallet med en sträckvis konstant utetemperatur enligt formel 2.1.7. Det temperaturförlopp som den sträckvis konstanta utetemperaturen ger upphov till kan genom superposition ses som en summa av rena steglösningar.

Den sträckvis konstanta utetemperaturen ges av:

$$T_{\text{ute}}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ T_1 & t_1 < t < t_2 \\ T_2 & t_2 < t < t_3 \\ \vdots & \\ T_n & (t < t_{n+1}) \end{cases} \quad (6.4.1)$$

Den stationära temperaturen  $T = T_0$ ,  $t < t_1$ , enligt (2.1.7) är ej medtagen, eftersom enbart steglösningar behandlas här. Temperaturen (6.4.1) kan skrivas som en summa av enhetssteg  $H(t)$  i enlighet med (2.1.8) och (2.1.10):

$$T_{\text{ute}}(t) = \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) \cdot H(t - t_i) \quad (6.4.2)$$

$$(T_0 = 0) \quad (t < t_{n+1})$$

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6.4.3)$$

#### 6.4.1 Allmän värmeförlustformel enligt kantapproximation

Enligt föregående avsnitt kan kantapproximationsformeln 6.3.6 användas för en hel eldningssäsong för byggnader med linjära dimensioner runt 10 m eller mer. För en temperatur enligt (6.4.2) erhålls genom superposition följande allmänna formel för värmeförlusten:

$$Q_t \approx \lambda L_e \cdot \sum_{i=1}^n (T_{i-1} - T_i) \cdot h_t^0(\sqrt{a(t - t_i)}/d) \quad (6.4.4)$$

$$(T_0 = 0) \quad t_n < t < t_{n+1}$$

Här är  $L_e$  plattans kantlängd. I formeln skall  $T_0 = T_{1-1}$  sättas till noll. Temperaturfaktorn blir  $T_{i-1} - T_i$  eftersom en sänkning av utetemperaturen ger ett positivt bidrag till värmeförlusten. Funktionen  $h_t^0(\tau)$  ges av figur 6.2.2. Om markytan har ett värmemotstånd med den

ekvivalenta tjockleken  $d_1$ , så skall  $h_t^0$  ersättas av  $h_t^1$ , vilken ges av formel 6.2.9 och figur 6.2.4. Villkoret för approximationen är att tiden  $t$  ej överskrider gränsen  $L_{\min}^2/(4a)$  enligt (6.3.7).

Den ackumulerade värmeförlusten från tiden noll till  $t$  blir med hjälp av (6.2.6):

$$E_t(t) \approx C d^2 L_e \cdot \sum_{i=1}^n (T_{i-1} - T_i) e_t^0(\sqrt{a(t - t_i)}/d) \quad (6.4.5)$$

$$(T_0 = 0) \quad t_n < t < t_{n+1}$$

Tiden  $t$  skall uppfylla kravet (6.3.7)

Exempel 6.4.1 Givet en sträckvis konstant utetemperatur enligt figur 6.4.1. För varje månad ges ett konstant värde under en eldningssäsong på sex månader. Övriga data tas från grundfall A enligt (1.10A). Den stationära delen från medeltemperaturen  $T_0 = 5^\circ\text{C}$  behandlas ej här.

Data enligt (1.10A) ger:

$$d = 3 \text{ m} \quad L_e = 40 \text{ m}$$

$$\lambda L_e = 60 \text{ W/K}$$

$$C d^2 L_e = 2 \cdot 10^6 \cdot 3^2 \cdot 40 = 720 \cdot 10^6 \text{ J/K} = 200 \text{ kWh/K.}$$

Låt  $t_m$  ange en månad. Tiden i argumentet för  $h_t^0$  och  $e_t^0$  kan då skrivas:

$$\frac{a(t - t_i)}{d^2} = \frac{t/t_m - t_i/t_m}{d^2/(at_m)}$$

$$\frac{d^2}{at_m} = \frac{3 \cdot 3}{0.75 \cdot 10^{-6} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365/12} = 4.57$$

Värmeförlusten enligt (6.4.4) blir  $t$  ex under den kallaste månaden:



$$Q_t \approx 60 \cdot \left\{ 4 \cdot h_t^0(\sqrt{(t/t_m - 1)/4.57}) + \right. \\ \left. + 6 \cdot h_t^0(\sqrt{(t/t_m - 2)/4.57}) + 5 \cdot h_t^0(\sqrt{(t/t_m - 3)/4.57}) \right\} \\ (W)$$

$$3 < t/t_m < 4$$

Flödet i slutet av den kallaste månaden,  $t/t_m = 4$ , blir:

$$Q_t(4t_m) = 60 \cdot \left\{ 4 \cdot h_t^0(0.81) + 6 \cdot h_t^0(0.66) + 5 \cdot h_t^0(0.47) \right\} \\ = 60 \cdot \left\{ 4 \cdot 0.32 + 6 \cdot 0.27 + 5 \cdot 0.21 \right\} \\ = 237 \text{ W}$$

I figur 6.4.1 visas  $Q_t(t)$  under 8 månader.

Den ackumulerade värmeförlusten ges av formel 6.4.5. En månad efter sista steget ( $t/t_m = 7$ ) blir den:

$$E_t(7t_m) = 200 \cdot \left\{ 4 \cdot e_t^0(\sqrt{(7-1)/4.57}) + \right. \\ \left. + 6 \cdot e_t^0(\sqrt{(7-2)/4.57}) + 5 \cdot e_t^0(\sqrt{(7-3)/4.57}) - \right. \\ \left. - 6 \cdot e_t^0(\sqrt{(7-4)/4.57}) - 6 \cdot e_t^0(\sqrt{(7-5)/4.57}) - \right. \\ \left. - 3 \cdot e_t^0(\sqrt{(7-6)/4.57}) \right\} = \\ = 200 \cdot \left\{ 4 \cdot 0.39 + 6 \cdot 0.31 + 5 \cdot 0.23 - \right. \\ \left. - 6 \cdot 0.15 - 6 \cdot 0.085 - 3 \cdot 0.033 \right\} = 612 \text{ kWh}$$

Den ackumulerade förlusten  $E_t$  som funktion av tiden ges i figur 6.4.1.

Det är intressant att jämföra dessa värmeförluster med den stationära komponenten för grundfall A. Enligt

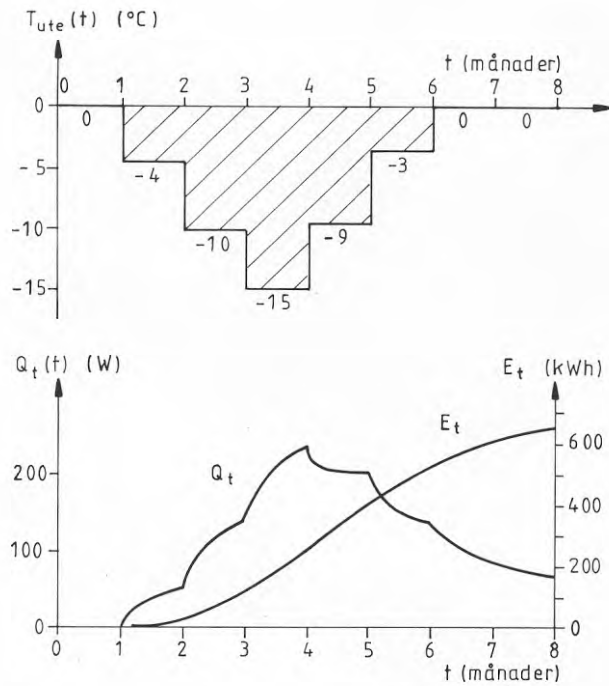
exempel 3.1.1 är den stationära värmeförlusten (mellan  $T_i = 20^\circ\text{C}$  och  $T_o = 5^\circ\text{C}$ ):

$$Q_s = 427 \text{ W}$$

Under en sexmånaders period ger detta en ackumulerad stationär förlust.

$$E_s = 0.427 \cdot 24 \cdot 365 / 2 = 1900 \text{ kWh}$$

Den ackumulerade värmeförlusten för pulserna är förhållandevis liten jämfört med den ackumulerade stationära värmeförlusten.



Figur 6.4.1 Utetemperatur, värmeförlust och ackumulerad värmeförlust för exempel 6.4.1.

#### 6.4.2 Köldknäpp. Ackumulerad värmeförlust

En köldknäpp eller en temperaturpuls med storleken  $-T_2$  under en tid  $0 < t < t_2$  definieras av (6.1.10). Den kan efter tiden  $t_2$  uppfattas som ett temperatursteg  $-T_2$  vid  $t = 0$  och ett steg  $+T_2$  vid  $t = t_2$ .

Värmeflödet under avklingningen efter temperaturpulsen blir då i enlighet med (6.4.4):

$$Q_t \approx \lambda T_2 L_e \cdot \left\{ h_t^0(\sqrt{at}/d) - h_t^0(\sqrt{a(t-t_2)}/d) \right\} \quad (6.4.6)$$

$$t > t_2$$

Kantapproximationen kan tillämpas då tiden uppfyller (6.3.7):

$$\sqrt{at} < L_{\min}/2 \quad (6.4.7)$$

För stora tider kan approximationen (6.2.5) användas. Detta ger följande enkla formel för värmeflödet under avklingningen:

$$Q_t \approx \lambda T_2 L_e \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{t}{t-t_2} \right) \quad (6.4.8)$$

Kravet för denna approximation är enligt (6.4.7) och (6.2.5):

$$\sqrt{a(t-t_2)} > 2d \quad \sqrt{at} < L_{\min}/2 \quad (6.4.9)$$

Detta ger en övre och en undre gräns. I vissa fall uppfylles aldrig båda villkoren.

För att ytterligare belysa vad som händer vid mycket stora tider måste man lämna kantapproximationen, eftersom denna bara gäller innan motsatt sida och tredimensionella effekter börjar verka. Allmänt gäller för den ackumulerade värmeförlusten för  $t > t_2$ :

$$E_t(t) = \int_0^t Q_t(t'') dt'' - \int_{t_2}^t Q_t(t'' - t_2) dt'' \quad (6.4.10)$$

$$(t > t_2)$$

Här är  $Q_t(t)$  värmeförlusten för det rena temperatursteget. Ovanstående uttryck blir en integral av  $Q_t$  för intervallet  $t - t_2 < t'' < t$ :

$$E_t(t) = \int_{t-t_2}^t Q_t(t'') dt'' \quad (6.4.11)$$

Nu gäller allmänt att  $Q_t$  går mot  $Q_s$  då tiden går mot oändligheten. Härvid skall  $Q_t$  och  $Q_s$  räknas för samma temperaturdifferens mellan inne och ute ( $T_2 = T_i - T_o$ ). Jämför med formel 6.3.11. Detta innebär:

$$t \rightarrow \infty \quad E_t \rightarrow \int_{t-t_2}^t Q_s dt'' = Q_s \cdot t_2 \quad (6.4.12)$$

Den totala ackumulerade värmeförlusten för en temperaturpuls erhålls således genom att ta stationär förlust  $Q_s$  under en tidsperiod  $t_2$ :

$$E_t(\infty) = Q_s \cdot t_2 \quad (\text{temperaturpuls}) \quad (6.4.13)$$

Den stationära värmeförlusten  $Q_s$  skalas allmänt enligt (2.3.7). Här skall  $T_i - T_o$  ersättas med  $T_2$ . Således gäller:

$$E_t(\infty) = \lambda T_2 L_s \cdot h_s \cdot t_2 \quad (\text{temperaturpuls}) \quad (6.4.14)$$

Figur 6.3.1 ger ett exempel hur  $h_t$  närmar sig  $h_s$ , då tiden går mot oändligheten. Enligt de numeriska exemplen tar det ungefär ett år, innan  $h_t$  kan approximeras med någorlunda noggrannhet för en platta med linjär storlek runt 10 m. För grundfall C ( $15 \times 30 \text{ m}^2$ ) var motsvarande tid runt fem år. Detta ger en uppfattning om efter vilken tid man kan använda totalförlusten (6.4.13-14) efter en temperaturpuls. Energibalansen kompliceras av att en del av temperaturpulsens värmeförlust inträffar under sommaren utanför eldningssäsongen.

Exempel 6.4.2 En köldknäpp med  $T_2 = -15^\circ\text{C}$  startar vid tiden  $t_1 = 0$  och varar i tiden  $t_2 = 7$  dagar. Grundexempel A, B och C med data enligt (1.10A-C) ger:

$$L_e = 40 \text{ m} \quad (\text{fall A, B})$$

$$L_e = 90 \text{ m} \quad (\text{fall C})$$

Tidsvariabeln  $\tau$  blir enligt exempel 6.2.1, där  $t_d$  betecknar tiden i dagar:

$$\tau = \sqrt{t_d/139} \quad (\text{fall A, C})$$

$$\tau = \sqrt{t_d/556} \quad (\text{fall B})$$

I exempel 6.2.1 ges värmeförlusten per meter,  $q_t$ , för ett temperatursteg. För köldknäppen ges värmeförlusten då av  $L_e \cdot q_t$  för tider mindre än 7 dagar. Under pulsens avklingning, dvs för tider större än 7 dagar, ges värmeförlusten för fall A enligt (6.4.6) av:

$$Q_t = 1.5 \cdot 15 \cdot 40 \left( h_t^0(\sqrt{t_d/139}) - h_t^0(\sqrt{(t_d - 7)/139}) \right) \quad (\text{W})$$

Nedanstående tabell ger  $Q_t$  för några olika tidpunkter.

	t (dagar)	0	1	2	4	7	8	14	50
$Q_t$ (W)	fall A	0	41	57	79	101	66	36	13
	fall B	0	20	30	39	52	37	23	8
	fall C	0	92	128	177	225	148	81	29

Värmeförlusten för fall A visas i figur 1.3 enligt streckad kurva. Den är överlagrad på den stationära och den periodiska värmeförlusten.

Den stationära värmeförlusten och den maximala periodiska värmeförlusten är för fall A:  $Q_s = 427 \text{ W}$ ,  $(Q_p)_{\text{max}} = 144 \text{ W}$ . Dessa siffror visar att den värmeförlust köldknäppen orsakar är relativt liten. Den kan dock ej försummas.

Exempel 6.4.3 I tabellen nedan ges värmeförlusten för en puls med  $t_2 = 1, 7$  och 30 dagar för fall A;  $T_2 = -15^\circ\text{C}$ .

$t_2 =$ 1 dag	t (dagar)	0	0.5	1	2	4	7	14
	$Q_t$ (W)	0	29	41	16	9	6	4

$t_2 =$ 1 vecka	t (dagar)	0	1	2	4	7	8	14	50
	$Q_t$ (W)	0	41	57	79	101	66	36	13

$t_2 =$ 1 månad	t (dagar)	0	15	30	45	60	90	120
	$Q_t$ (W)	0	141	186	79	60	37	31

Exemplet visar att pulser med en längd runt ett dygn kan försummas.

Exempel 6.4.4 Värmeförlusterna för pulserna i exempel 6.4.3 för fall A minskar då marken är täckt med snö. Följande data väljes:

$$d_{\text{snö}} = 0.15 \text{ m} \quad \lambda_{\text{snö}} = 0.15 \text{ W/mK}$$

Kvoten mellan snöns och plattans ekvivalenta isolertjocklek blir (se avsnitt 2.2):

$$d_1/d = 0.5$$

Värmeförlustfaktorn  $h_t^1$  avläses i figur 6.2.4.

$t_2 =$ 1 dag	t (dagar)	0	0.5	1	2	4	7	14
	$Q_t$ (W)	0	1.9	3.6	3.2	2.8	2.0	1.8

$t_2 =$ 1 vecka	t (dagar)	0	1	2	4	7	8	14	50
	$Q_t$ (W)	0	4	7	12	20	19	15	8

$t_2 =$	$t$ (dagar)	0	15	30	45	60	90	120
$1^2_{\text{månad}}$	$Q_t$ (W)	0	37	59	45	42	23	21

Snötäcket minskar värmeförlusten drastiskt. Pulsens maximum minskar till en tredjedel eller mindre för pulser av en längd upp till en månad. Vid ett snötäcke med tjocklek av en decimeter eller mer kan värmeförlusten för en köldknäpp försummas då dess varaktighet är mindre än en månad.

## 7 UPPBYGGNAD AV VÄRMEKUDDE

Under de första åren efter det att en ny byggnad har börjat värmas sker en uppbyggnad av en värmekudde under byggnaden. Man får en extra värmeförlust så länge denna process är signifikant. Denna transienta uppbyggnad av en värmekudde och den härmed förknippade värmeförlusten skall behandlas i detta kapitel.

Figur 2.1.5 visar förutsättningarna för uppbyggnaden av värmekudden. I byggnaden ovanför isoleringen hålles temperaturen  $T_i$  från tiden  $t = 0$ . Processen renodlas såtillvida att temperaturvariationerna under året vid markytan försummas. Vid markytan hålles då temperaturen  $T_0$ . I marken är begynnelsestemperaturen  $T_0$  överallt.

I en komplett analys kan man ha en stationär komponent, en periodisk komponent och en uppbyggnad av värmekudden enligt figur 2.1.5. Renodlingen av värmeuppbyggnadsprocessen innebär att man försummar den periodiska komponentens transient, dvs dennas insvängning till periodiska förhållanden.

Värmeförlusten vid uppbyggnaden av värmekudden skall betecknas  $Q_{tb}(t)$  (W) (thermal build-up). För ett tvärsnitt av en långsträckt platta skall beteckningen  $q_{tb}(t)$  (W/m) användas.

Temperaturen i marken närmar sig efterhand stationära förhållanden då tiden ökas. Detta innebär att  $Q_{tb}(t)$  går mot den stationära värmeförlusten då tiden går mot oändligheten:

$$Q_{tb}(t) \rightarrow Q_s \quad t \rightarrow \infty \quad (7.0.1)$$

Den transienta förlusten ligger förstås hela tiden över  $Q_s$ . Den ackumulerade värmeförlusten utöver stationär del ges enligt (2.6.7) av integralen av  $Q_{tb}(t) - Q_s$ :

$$E_{tb}(t) = \int_0^t (Q_{tb}(t'') - Q_s) dt'' \quad (J) \quad (7.0.2)$$



### 7.1 Temperaturförlopp i marken

Temperaturförloppet i marken vid uppbyggnaden av värmekudden skall illustreras med några exempel. Dessa gäller ett tvärsnitt av ett långsträckt hus. Följande data antas:

$$\begin{aligned} T_i &= 20^{\circ}\text{C} & T_o &= 8^{\circ}\text{C} \\ a &= 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & (d_1 &= 0) \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

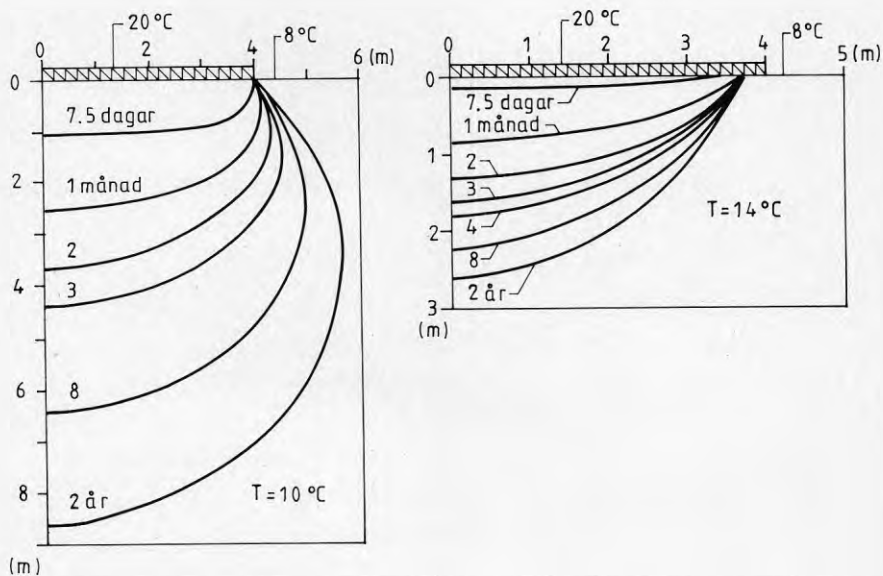
Två fall har behandlats:

$$\text{I.} \quad B = 8 \text{ m} \quad d = 0.8 \text{ m} \quad (7.1.2)$$

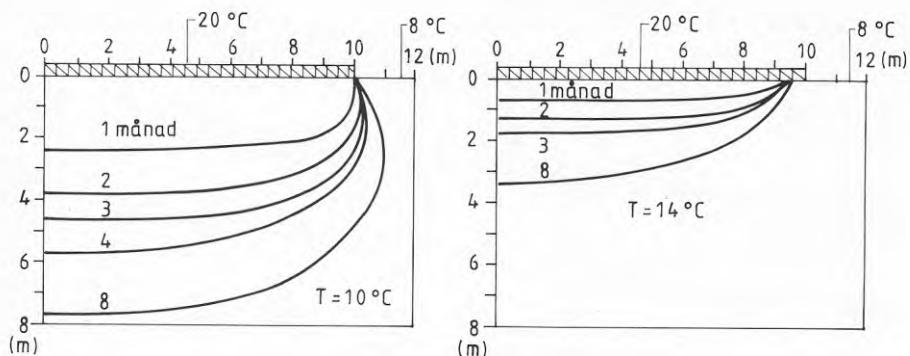
$$\text{II.} \quad B = 20 \text{ m} \quad d = 1.0 \text{ m} \quad (7.1.3)$$

Den ekvivalenta isolertjockleken  $d = 1 \text{ m}$  innebär en relativt tunn värmeisolering.

Figur 7.1.1 visar hur isotermer för  $10^{\circ}\text{C}$  och för  $14^{\circ}\text{C}$  rör sig med tiden för den mindre plattan (fall I). Figur 7.1.2 visar motsvarande isotermer för fall II.



Figur 7.1.1 Isothermer för  $10^{\circ}\text{C}$  och för  $14^{\circ}\text{C}$  vid uppbyggnad av värmekudde. Data enligt (7.1.1-2).



Figur 7.1.2 Isothermer för 10<sup>0</sup>C och för 14<sup>0</sup>C vid uppbyggnad av värmekudde. Data enligt (7.1.1) och (7.1.3).

I början är isothermerna parallella med plattan. Man har, fränsett området vid plattans kant, ett endimensionellt, vertikalt förlopp. Efterhand utbildar sig det tvådimensionella temperaturfältet. För den mindre plattan (fall I,  $B = 8$  m) är processen i stort stationär efter två år. Den bredare plattan (fall II,  $B = 20$  m) har en långsammare tidsskala för att uppnå stationaritet. Av figurerna framgår att isothermerna rör sig allt långsammare då de kommer längre bort från plattan.

## 7.2 Värmeförlust för rektangulär platta

Skalningen för värmeförlusten  $Q_{tb}(t)$  vid uppbyggnaden av en värmekudde behandlas i avsnitt 2.6. För en rektangulär platta med den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  gäller enligt (2.6.1-2):

$$Q_{tb}(t) = \lambda(T_i - T_o) L \cdot h_{tb}(at/B^2; L/B, d/B) \quad (7.2.1)$$

Värmeförlustfaktorn  $h_{tb}$  är dimensionslös. Den är en funktion av dimensionslös tid  $at/B^2$  och av de två parametrarna  $L/B$  och  $d/B$ . Den har beräknats numeriskt för olika parametervärden ( $d/B = 0.1, 0.3, 0.6$  och  $L/B = 1, 1.5, 2, \infty$ ). Resultatet ges i tabell 7.2.1.

För stora tider närmar sig  $Q_{tb}$  den stationära värmeförlusten  $Q_s$  enligt (7.0.1). För värmeförlustfaktorn innebär detta att  $h_{tb}$  går mot den stationära värmeförlustfaktorn  $h_s$ :

$$h_{tb}(\infty ; L/B, d/B) = h_s(L/B, d/B) \quad (7.2.2)$$

Funktionen  $h_s$  ges i figur 3.1.1.

Vid starttidpunkten är temperaturen  $T_0$  direkt under värmeisoleringen. Värmeflödet blir då för  $t = 0$ :

$$Q_{tb}(0) = \frac{\lambda_i(T_i - T_0)}{d_i} \cdot LB = \frac{\lambda(T_i - T_0)}{d} \cdot LB \quad (7.2.3)$$

Värmeförlustfaktorn vid  $t = 0$  blir då:

$$h_{tb}(0 ; L/B, d/B) = \frac{1}{d/B} \quad (7.2.4)$$

Värmeförlusten  $q_{tb}$  (W/m) för ett tvärsnitt av en långsträckt platta erhålls då  $L$  går mot oändligheten:

$$\frac{Q_{tb}(t)}{L} \rightarrow q_{tb}(t) \quad L \rightarrow \infty \quad (7.2.5)$$

Detta innebär enligt (7.2.1):

$$q_{tb}(t) = \lambda(T_i - T_0) \cdot h_{tb}(at/B^2 ; \infty, d/B) \quad (7.2.6)$$

Detta överensstämmer med (2.6.5).

		$at/B^2$							
		0	0.019	0.038	0.076	0.151	0.302	$\infty$	
$d/B = 0.1$	L/B	1	10.0	4.21	3.74	3.44	3.28	3.22	3.21
		1.5	10.0	4.08	3.56	3.21	3.02	2.92	2.89
		2	10.0	4.02	3.47	3.10	2.88	2.77	2.72
		$\infty$	10.0	3.91	3.29	2.84	2.56	2.40	2.28
$d/B = 0.3$	L/B	1	3.33	2.31	2.14	2.02	1.94	1.90	1.88
		1.5	3.33	2.28	2.09	1.94	1.84	1.79	1.78
		2	3.33	2.26	2.07	1.90	1.79	1.72	1.70
		$\infty$	3.33	2.24	2.02	1.82	1.67	1.57	1.51
$d/B = 0.6$	L/B	1	1.67	1.37	1.31	1.25	1.22	1.20	1.16
		1.5	1.67	1.36	1.29	1.23	1.18	1.15	1.11
		2	1.67	1.35	1.28	1.21	1.16	1.13	1.08
		$\infty$	1.67	1.35	1.26	1.18	1.11	1.06	1.02

Tabell 7.2.1 Värmeförlustfaktor  $h_{tb}(at/B^2 ; L/B, d/B)$  för uppbyggnad av värmekudde under rektangulär platta.

Den utöver stationär del ackumulerade värmeförlusten  $E_{tb}(t)$  (J) ges av integralen (7.0.2). Vid skalning erhålls ett uttryck av typen (2.6.8). Speciellt får man för en rektangulär platta enligt (A1.41) i appendix A:

$$E_{tb}(t) = C(T_i - T_o)LB^2 \cdot e_{tb}(at/B^2 ; L/B, d/B) \quad (7.2.7)$$

Volymfaktorn är här  $LB^2$  i stället för  $L_S^3$  såsom i (2.6.8). Faktorn  $C(T_i - T_o)LB^2$  (J) anger värmeinnehållet hos en volym  $LxBxB$  av marken för ett temperaturintervall  $T_i - T_o$ . Funktionen  $e_{tb}$  är dimensionslös. Den anges i tabell 7.2.2 för samma parametervärden som för  $h_{tb}$  i tabell 7.2.1.

		at/B <sup>2</sup>					
		0	0.019	0.038	0.076	0.151	0.302
d/B = 0.1	L/B						
	1	0	0.037	0.051	0.064	0.074	0.079
	1.5	0	0.041	0.058	0.076	0.091	0.101
	2	0	0.044	0.062	0.082	0.101	0.115
	∞	0	0.052	0.076	0.104	0.134	0.161
d/B = 0.3	L/B						
	1	0	0.012	0.018	0.025	0.030	0.032
	1.5	0	0.014	0.022	0.030	0.037	0.040
	2	0	0.015	0.023	0.032	0.041	0.044
	∞	0	0.019	0.030	0.045	0.062	0.077
d/B = 0.6	L/B						
	1	0	0.005	0.007	0.010	0.012	0.014
	1.5	0	0.006	0.009	0.012	0.016	0.018
	2	0	0.006	0.009	0.013	0.017	0.019
	∞	0	0.008	0.013	0.021	0.030	0.039

Tabell 7.2.2 Dimensionslös faktor  $e_{tb}$  ( $at/B^2$ ;  $L/B$ ,  $d/B$ ) för ackumulerad värmeförlust utöver stationär del för rektangulär platta på mark; formel 7.2.7.

Exempel 7.2.1 Grundfall A med data enligt (1.10A). Då erhålls:

$$d = 3 \text{ m} \quad \lambda(T_i - T_o)L = 270 \text{ W}$$

$$L/B = 1.5 \quad d/B = 0.375$$

I tabell 7.2.1 ges värden för  $L/B = 1.5$ . För  $d/B$  får man interpolera mellan  $d/B = 0.3$  och  $d/B = 0.6$ :

$$\frac{0.6 - 0.375}{0.6 - 0.3} = \frac{3}{4} \text{ av } 0.3\text{-fallet}$$

$$\frac{0.375 - 0.3}{0.6 - 0.3} = \frac{1}{4} \text{ av } 0.6\text{-fallet}$$

För tidsskalan gäller följande. Låt  $t_d$  vara en dag:

$$t_d = 1 \text{ dag} \quad \frac{at_d}{B^2} = \frac{0.75 \cdot 10^{-6} \cdot 3600 \cdot 24}{8 \cdot 8} = 0.00101$$

Värmeförlustfaktorn efter oändlig tid blir med värden enligt tabell 7.2.1:

$$h_{tb}(\infty; 1.5, 0.375) \approx \frac{3}{4} \cdot 1.78 + \frac{1}{4} \cdot 1.11 = 1.61$$

Detta stämmer väl med det stationära värdet  $h_s \approx 1.58$  enligt figur 3.1.1 och exempel 3.1.1.

Vid tiden  $t = 0$  ges värmeförlustfaktorn av (7.2.4):

$$h_{tb}(0; 1.5, 0.375) = \frac{8}{3} = 2.67$$

Efter 19 dagar gäller:

$$h_{td}(0.019; 1.5, 0.375) \approx \frac{3}{4} \cdot 2.28 + \frac{1}{4} \cdot 1.36 = 2.05$$

Värmeflödet blir då enligt (7.2.1):

$$Q_{tb} = 270 \cdot 2.05 = 554 \text{ W}$$

Detta kan jämföras med det stationära slutvärdet:

$$Q_{tb}(\infty) = Q_s \approx 270 \cdot 1.61 = 435 \text{ W}$$

Nedanstående tabell ger värmeflödet vid några tider från tabell 7.2.1.

t (dagar)	0	19	38	76	151	302	$\infty$
$Q_{tb}$ (W)	720	554	510	476	452	440	435

Den ackumulerade värmeförlusten utöver stationär del ges av (7.2.7). Data enligt (1.10A) ger:

$$C(T_i - T_o) LB^2 = 2 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 8^2 \text{ J} = 6400 \text{ kWh}$$

För t ex 38 dagar erhålls:

$$e_{tb}(0.038; 1.5, 0.375) \approx \frac{3}{4} \cdot 0.022 + \frac{1}{4} \cdot 0.009 = 0.019$$

$$E_{tb}(38t_d) = 6400 \cdot 0.019 = 120 \text{ kWh}$$

Detta kan jämföras med den stationära förlusten under samma tid:

$$E_s = Q_s \cdot t = 435 \cdot 38 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ J} = 397 \text{ kWh}$$

Nedanstående tabell ger  $E_{tb}$  och  $E_s = Q_s \cdot t$  för några tider enligt tabell 7.2.2:

t (dagar)	0	19	38	76	151	302
$E_{tb}$ (kWh)	0	77	120	163	203	221
$Q_s \cdot t$ (kWh)	0	198	397	793	1576	3150

Exempel 7.2.2 Grundfall C med data enligt (1.10C).

$$d = 3 \text{ m} \quad \lambda(T_i - T_o)L = 675 \text{ W}$$

$$L/B = 2 \quad d/B = 0.2$$

Man får interpolera mellan fallen  $d/B = 0.1$  och  $d/B = 0.3$ .

För tidsskalning utnyttjas:

$$\frac{at_d}{B^2} = \frac{0.75 \cdot 10^{-6} \cdot 3600 \cdot 24}{15 \cdot 15} = 0.00029$$

Efter  $0.019/0.00029 = 66$  dagar fås:

$$h_{tb} \approx \frac{1}{2} \cdot 4.02 + \frac{1}{2} \cdot 2.26 = 3.14$$

$$Q_{tb} = 2120 \text{ W}$$

Detta skall jämföras med det stationära värdet:

$$t = \infty : h_{tb} \approx \frac{1}{2} \cdot 2.72 + \frac{1}{2} \cdot 1.70 = 2.21$$

$$Q_s = Q_{tb} = 1490 \text{ W}$$

Nedanstående tabell ger  $Q_{tb}$ ,  $E_{tb}$  och  $t \cdot Q_s$  för olika tider enligt tabell 7.2.1 och 7.2.2.

t (dagar)	0	66	130	260	520	1040	$\infty$
$Q_{tb}$ (W)	3375	2120	1870	1687	1576	1515	1490
$E_{tb}$ (kWh)	0	1660	2390	3200	3990	4470	-
$Q_s \cdot t$ (kWh)	0	2360	4650	9300	18600	37200	$\infty$

Ovanstående exempel visar att den värme som åtgår för uppbyggnaden av värmekudden är tämligen liten jämfört med den stationära förlusten. I grundfall A är  $E_{tb}$  knappt 10% av stationär förlust efter det första året. För den stora plattan enligt grundfall C är motsvarande siffra cirka 20%.

Ovanstående resultat visar att man normalt torde kunna försumma den extra värmeförlusten vid uppbyggnad av värmekudden under de första åren vid beräkning av energibalansen för en eldningssäsong.



### 7.3 Värmeförlust under en första tid

#### 7.3.1 Endimensionell approximation

Temperaturprocessen i marken strax under plattan är under en kort första period av uppbyggnaden av värmekudden i huvudsak ett endimensionellt förlopp. Enligt figurerna 7.1.1-2 kan det röra sig om en period på en vecka upp till en månad. Efterhand tillkommer tvådimensionella förlopp vid plattans kanter och tredimensionella förlopp vid hörnen.

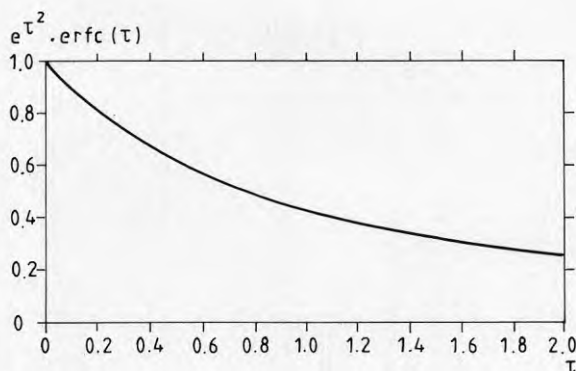
Den analytiska lösningen för ett endimensionellt vertikalt temperaturförlopp i marken under en värmeisolering då man gör ett temperatursteg ovanför isoleringen är välkänd; referens 2B. Värmeflödet genom isoleringen ges av:

$$q_{no}(t) = \frac{\lambda(T_i - T_0)}{d} \cdot f(\sqrt{at}/d) \quad (\text{W/m}^2) \quad (7.3.1)$$

$$f(\tau) = e^{\tau^2} \cdot \text{erfc}(\tau) \quad (7.3.2)$$

Funktionen  $f(\tau)$  ges i figur 7.3.1. Följande approximation ger ett maximalt fel på 1%:

$$e^{\tau^2} \cdot \text{erfc}(\tau) \approx \frac{2 + \tau}{2 + (1 + 4/\sqrt{\pi})\tau + \sqrt{\pi} \cdot \tau^2} \quad (0 < \tau < \infty) \quad (7.3.3)$$



Figur 7.3.1 Funktionen (7.3.3) vilken ger endimensionell värmeförlust enligt (7.3.1).

Värmeförlusten  $Q_{tb}(t)$  från plattan kan under den allra första perioden approximeras med det endimensionella värmeflödet. Om plattan har arean  $A$  ger detta:

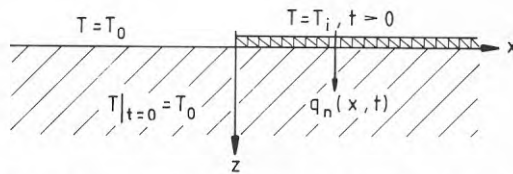
$$Q_{tb}(t) \approx A \cdot q_{no}(t) \quad (7.3.4)$$

(t litet)

I nästa avsnitt skall denna approximation förfinas genom att man tar hänsyn till kanterna.

### 7.3.2 Kantvärmeförlust

Vid plattans kanter får man under en första tid ett tvådimensionellt temperaturförlopp i ett tvärsnitt vinkelrätt mot plattans kantlinje. Detta gäller utom för områdena runt hörnen på plattan, där processen direkt blir tredimensionell. Det tvådimensionella kantförloppet illustreras i figur 7.3.2. I marken är temperaturen  $T_0$  vid starten  $t = 0$ . Vid markytan är temperaturen  $T_0$ . Den ekvivalenta tjockleken på värmemotståndet vid markytan är  $d_1$ . Nedan behandlas först fallet  $d_1 = 0$  och sedan fallet  $d_1 > 0$ . Värmeisoleringen med den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  är i det rena kantproblemet oändligt utsträckt längs hela positiva  $x$ -axeln. Ovanför värmeisoleringen hålls temperaturen  $T_i$  från tiden  $t = 0$ .



Figur 7.3.2 Tvådimensionellt kantproblem för temperatursteg ovanför byggnadens isolering.

Kantproblemet enligt figur 7.3.2 är analogt med det tidigare fallet enligt figur 6.2.1. Skillnaden är att i kapitel 6 behandlas temperatursteg vid markytan utanför byggnaden, medan i detta kapitel temperatursteget sker inne i byggnaden ovanför isoleringen.

Värmeflödet genom isoleringen betecknas  $q_n(x,t)$ ,  $0 < x < \infty$ . För stora  $x$ -värden är värmeflödet under en första tid endimensionellt. Det ges då av (7.3.1-2). För  $x = \infty$  gäller således

$$q_n(\infty, t) = q_{n0}(t) \quad (7.3.5)$$

Flödet  $q_n(x,t)$  är vid kanten nära  $x = 0$  större än det ostörda värdet  $q_{n0}(t)$ . Genom att integrera skillnaden över hela positiva  $x$ -axeln erhålls kantvärmeförlusten  $q_{tbe}(t)$  (thermal build-up, edge heat loss):

$$q_{tbe}(t) = \int_0^{\infty} (q_n(x,t) - q_{n0}(t)) dx \quad (W/m) \quad (7.3.6)$$

Kantflödet  $q_{tbe}(t)$  har sorten W/m. Det ger värmeförlusten vid kanten utöver det endimensionella bidraget.

Kantvärmeförlusten  $q_{tbe}$  (W/m) kan uttryckas med en dimensionslös kantvärmeförlustfaktor. Man får som tidigare en skalningsfaktor  $\lambda(T_i - T_o)$  med samma dimension som  $q_{tbe}$  (W/m). Problemet innehåller i fallet utan värmemotstånd vid markytan ( $d_1 = 0$ ) endast en längd  $d$ . Den dimensionslösa tiden blir då  $at/d^2$ . Värmeförlustfaktorn blir för det rena kantproblemet enligt figur 7.3.2 en funktion enbart av den dimensionslösa tiden. Således gäller:

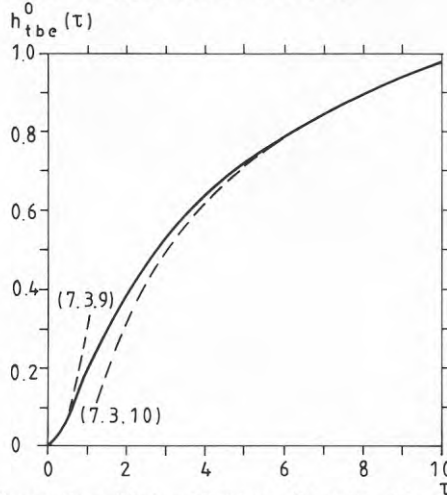
$$q_{tbe}(t) = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_{tbe}^0(\sqrt{at}/d) \quad (7.3.7)$$

Som tidsvariabel har här  $\tau = \sqrt{at}/d$  använts. I analogi med avsnitten 6.2 ( $h_t^0$ ) och 5.3 ( $h_p^0$ ) användes beteckningen  $h_{tbe}^0$  för kantproblemet enligt figur 7.3.2 utan värmemotstånd vid markytan ( $d_1 = 0$ ).

I referens 3 härleds följande uttryck för kantvärmeförlustfaktorn  $h_{tbe}^0$ :

$$h_{tbe}^0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{s^2} \cdot \operatorname{erfc}(s) \cdot \left\{ 1 - e^{\tau^2 - s^2} \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau^2 - s^2}) \right\} ds \quad (\tau > 0) \quad (7.3.8)$$

Integralen har beräknats genom numerisk integration. Resultatet ges i figur 7.3.3 och tabell 7.3.1. I figur 7.3.4 ges också  $h_{tbe}^0(\tau) = h_{tbe}^1(\tau; 0)$  i större skala för  $0 < \tau < 1$ .



Figur 7.3.3 Kantvärmeförlustfaktor (7.3.8) för inre temperatursteg enligt figur 7.3.2.

$\tau$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$h_{tbe}^0$	0	0.072	0.187	0.293	0.384	0.461	0.527	0.584

$\tau$	4.0	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
$h_{tbe}^0$	0.634	0.678	0.718	0.787	0.844	0.894	0.941	0.974

Tabell 7.3.1 Kantvärmeförlustfaktor (7.3.8) för temperatursteg enligt figur 7.3.2.

För små  $\tau$  gäller enligt referens 3 följande approximation:

$$h_{tbe}^0 \approx \tau^2 (0.5 - 0.616\tau + 0.534\tau^2) \quad \tau < 0.3 \quad (7.3.9)$$

Approximation är markerad i figur 7.3.3. Det maximala felet är 3% för  $\tau < 0.3$ . Vid  $\tau = 0.45$  är felet 9%.

För stora  $\tau$  gäller enligt referens 3 följande approximation:

$$h_{tbe}^0(\tau) \approx \frac{1}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\tau} \right) \left( \ln(2\tau) + \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{\ln(2)}{\pi\sqrt{\pi}\tau} \quad (7.3.10)$$

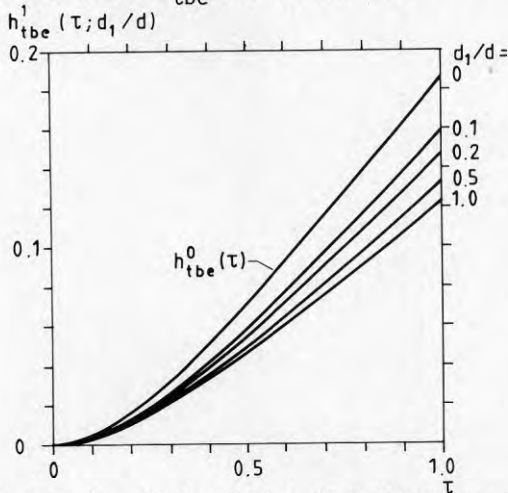
$$\gamma = 0.5772 \quad \tau > 3.5$$

Approximationen är markerad i figur 7.3.3. Det maximala felet är 4% för  $\tau > 3.5$ . Vid  $\tau = 2.4$  är felet 10%.

Fallet med ett värmemotstånd vid markytan ( $d_1 > 0$ ) behandlas också i referens 3. Kantvärmeförlustfaktorn blir nu en funktion av  $\tau = \sqrt{a\tau}/d$  och av  $d_1/d$ . Formel 7.3.7 ersätts av:

$$q_{tbe}(t) = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_{tbe}^1(\sqrt{a\tau}/d; d_1/d) \quad (\text{W/m}) \quad (7.3.11)$$

Kantvärmeförlustfaktorn  $h_{tbe}^1$  ges i figur 7.3.4.



Figur 7.3.4 Kantvärmeförlustfaktor (7.3.11) för inre temperatursteg enligt figur 7.3.2 med ett ekvivalent värmemotstånd  $d_1$  vid markytan ( $-\infty < x < 0, z = 0$ ).

Approximation (7.3.4) för värmeflödet  $Q_{tb}(t)$  från en platta kan nu förfinas något. Plattan har arean  $A$  och kantlängden  $L_e$ . Under en första tid gäller, om de tredimensionella förloppen vid hörnen försummas:

$$Q_{tb}(t) \approx A \cdot q_{no}(t) + L_e \cdot q_{tbe}(t) \quad (7.3.12)$$

(t litet)

Med hjälp av (7.3.1-2) och (7.3.7) kan detta skrivas:

$$Q_{tb}(t) \approx \lambda(T_i - T_o) \cdot \left\{ \frac{A}{d} \cdot f(\tau) + L_e \cdot h_{tbe}^o(\tau) \right\} \quad (7.3.13)$$

$$\tau = \sqrt{a\epsilon}/d \quad (t \text{ litet})$$

Här ges  $f$  av figur 7.3.1 och  $h_{tbe}^o(t)$  av figur 7.3.3. Kantvärmeförlustfaktorn ersätts av (7.3.11) enligt figur 7.3.4, om  $d_1$  är större än noll.

Exempel 7.3.1 Grundfall A med data enligt (1.10A). I exempel 7.2.1 beräknades  $Q_{tb}(t)$  med hjälp av tabell 7.2.1. Det är intressant att jämföra med approximationen (7.3.13).

För grundfall A gäller:

$$\lambda(T_i - T_o) = 22.5 \text{ W/m}$$

$$\frac{A}{d} = \frac{12 \cdot 8}{3} = 32 \text{ m} \quad L_e = 40 \text{ m}$$

Efter t ex 19 dagar gäller:

$$t = 19 \cdot 3600 \cdot 24 \text{ s}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{a\epsilon}}{d} = 0.370$$

$$f(0.37) \approx 0.690 \quad (\text{figur 7.3.1})$$

$$h_{tbe}^o(0.37) \approx 0.044 \quad (\text{figur 7.3.4})$$

$$Q_{tb} \approx 22.5 \cdot \left\{ 32 \cdot 0.690 + 40 \cdot 0.044 \right\} =$$

$$= 497 + 40 = 537 \text{ W}$$

Värdet från direkta numeriska beräkningar är enligt exempel 7.2.1

$$Q_{tb} \approx 554 \text{ W}$$

Överensstämmelsen är mycket god med tanke på att man har ett visst fel i de numeriska beräkningarna.

Nedanstående tabell ger värmeförlusten för några tidpunkter.

t (dagar)	0	19	38	70	150	302
$Q_{tb}$ (W) enl (7.3.13)	720	537	505	482	476	494
$Q_{tb}$ (W) enl ex 7.2.1	720	554	510	476	452	440

## 8 VARIABEL INNETEMPERATUR

I de föregående kapitlen har innetemperaturen förutsatts vara konstant. Denna konstanta temperatur  $T_i$  utnyttjas vid beräkning av stationär värmeförlust.

I detta kapitel skall de extra, tidsberoende värmeförlusterna för en variabel innetemperatur behandlas. Temperaturen  $T_i$  betecknar nu (den konstanta) medelinnetemperaturen. På denna överlagras en variabel temperatur. I avsnitt 8.1 behandlas en överlagrad periodisk innetemperatur med amplituden  $T_3$  och periodtiden  $t_3$ . I avsnitt 8.2 behandlas ett temperatursteg  $T_4$ , vilket överlagras på den konstanta innetemperaturen  $T_i$ .

## 8.1 Periodiskt varierande innetemperatur

För det renodlade fallet med periodiskt varierande innetemperatur sätts temperaturen vid markytan utanför byggnaden till noll och temperaturen ovanför värmeisoleringen till  $T_3 \cdot e^{2\pi it/t_3}$ . Motsvarande värmeförlust betecknas  $Q_p(t)$  (W). Då randtemperaturen är given i komplexvärd form, blir  $Q_p(t)$  komplexvärd. Reellvärda lösningar ges av realdelen och av imaginärdelen av  $Q_p(t)$ . Den komplexvärda formalismen behandlas närmare i kapitel 5 och avsnitt 2.4.1.

Periodtiden  $t_3$  ger ett inträngningsdjup  $d_3$ . Analogt med (2.4.18) definieras detta av:

$$d_3 = \sqrt{\frac{at_3}{\pi}} \quad (8.1.1)$$

För att erhålla den totala värmeförlusten skall värmeförlusten för detta renodlade fall superponeras på värmeförlusten för den konstanta innetemperaturen  $T_i$ .

## 8.1.1 Endimensionell approximation

Temperaturprocessen i marken strax under plattan är endimensionell för de inre områdena av plattan. Förutsättningen är att inträngningsdjupet  $d_3$  är mindre än avståndet till plattans kanter. Vid



kantområdena är temperaturprocessen tvådimensionell och närmast hörnen tredimensionell.

Den analytiska lösningen för ett endimensionellt vertikalt temperaturförlopp i marken under en värmeisolering vid periodiskt varierande randtemperatur är välkänd; referens 2C. Värmeflödet genom isoleringen ges av:

$$q_{no}(t) = \frac{\lambda T_3}{d} \cdot \frac{1}{1 + d_3/(d(1+i))} \cdot e^{i2\pi t/t_3} \quad (W/m^2) \quad (8.1.2)$$

$$= \frac{\lambda T_3}{d} \cdot \frac{1}{r_{no}} \cdot e^{i2\pi(t/t_3 - \phi_{no})} \quad (8.1.3)$$

Uttrycken  $r_{no}$  och  $\phi_{no}$  är funktioner av  $d_3/d$ :

$$r_{no} = \sqrt{\frac{(1 + d_3/d)^2 + 1}{2}} \quad (8.1.4)$$

$$\phi_{no} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{d}{d + d_3}\right) \quad (8.1.5)$$

Värmeförlusten från plattan kan approximeras med det endimensionella flödet, förutsatt att dimensionerna på plattan är mycket större än inträngningsdjupet  $d_3$ .

Om plattan har arean  $A$  ger detta:

$$Q_p(t) \approx A \cdot q_{no} = \lambda T_3 \cdot \frac{A}{d} \cdot \frac{1}{r_{no}} \cdot e^{i2\pi(t/t_3 - \phi_{no})} \quad (8.1.6)$$

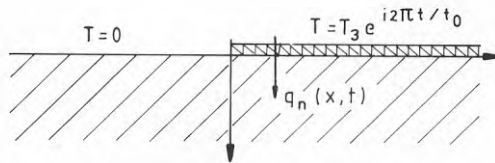
För en ren sinusvängning  $T_3 \cdot \sin(2\pi t/t_3)$  ovanför värmeisoleringen blir värmeförlusten lika med imaginärdelen av (8.1.6):

$$Q_p(t) \approx \lambda T_3 \cdot \frac{A}{d} \cdot \frac{1}{r_{no}} \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - \phi_{no})) \quad (8.1.7)$$

I nästa avsnitt skall denna approximation förfinas genom att man tar hänsyn till kanterna.

## 8.1.2 Kantvärmeförlust

Om plattan är stor, d v s om  $L$  och  $B$  är mycket större än inträngningsdjupet  $d_3$ , får man nära plattans kanter väsentligen ett tvådimensionellt temperaturförlopp i ett tvärsnitt vinkelrätt mot plattans kantlinje förutom vid hörnen där förloppet är tredimensionellt. Detta tvådimensionella kantförlopp illustreras i figur 8.1.1. Temperaturen vid markytan utanför plattan är noll. Värmemotståndet vid markytan har den ekvivalenta isolertjockleken  $d_1$ . Nedan behandlas först fallet  $d_1 = 0$ . Plattans värmeisolering har den ekvivalenta isolertjockleken  $d$  och är utsträckt längs hela positiva  $x$ -axeln.



Figur 8.1.1 Tvådimensionellt kantproblem för periodisk temperatur ovanför byggnadens isolering.

Värmeflödet genom isoleringen betecknas  $q_n(x, t)$ ,  $0 < x < \infty$ . För stora  $x$ -värden är värmeflödet endimensionellt. Det ges då av (8.1.2).

För  $x = +\infty$  gäller således:

$$q_n(\infty, t) = q_{no}(t) \quad (8.1.8)$$

Flödet  $q_n(x, t)$  är vid kanten nära  $x = 0$  större till sitt belopp än det ostörda flödet  $q_{no}(t)$ . Genom att integrera skillnaderna över hela positiva  $x$ -axeln erhålles den periodiska kantvärmeförlusten  $q_{pe}(t)$ :

$$q_{pe}(t) = \int_0^{\infty} (q_n(x, t) - q_{no}(t)) dx \quad (\text{W/m}) \quad (8.1.9)$$

Kantflödet  $q_{pe}$  kan uttryckas med en dimensionslös kantvärmeförlustfaktor. Man får en skalningsfaktor  $\lambda T_3$  med samma dimension som  $q_{pe}$  (W/m). I fallet utan värmemotstånd vid markytan ( $d_1 = 0$ ) innehåller

problemet endast längderna  $d$  och  $d_3$ . Enligt skalningsreglerna i kapitel 2 blir kantvärmeförlustfaktorn en funktion enbart av  $d/d_3$ .

$$q_{pe} = \lambda T_3 \cdot h_{pe}^0 (d/d_3) e^{i2\pi t/t_3} \quad (8.1.10)$$

I analogi med avsnitt 7.3 ( $h_{tbe}^0$ ) används beteckningen  $h_{pe}^0$  för kantvärmeförlustfaktorn då värmemotstånd vid markytan saknas.

I referens 3 härleds följande uttryck för  $h_{pe}^0$ :

$$h_{pe}^0 = h_p^0 (d/d_3) \cdot \frac{d_3}{d(1+i) + d_3} \quad (8.1.11)$$

Funktionen  $h_p^0$  från kapitel 5 hänför sig till värmeförlusten genom plattan, då man har en periodisk variation vid markytan utanför plattan, medan  $h_{pe}^0$  avser fallet med en periodisk variation inne i byggnaden ovanför plattan. I det senare fallet har man dragit bort det endimensionella flödet enligt formel 8.1.9.

Belopp och fas av funktionen  $h_{pe}^0$  ges av:

$$h_{pe}^0 = |h_p^0| \cdot \frac{1}{r_0} \cdot e^{-i2\pi(\phi_p^0 + \phi_0)} \quad (8.1.12)$$

Funktionerna  $r_0$  och  $\phi_0$  beror av  $d/d_3$  enligt:

$$r_0 = \sqrt{(1 + d/d_3)^2 + (d/d_3)^2} \quad (8.1.13)$$

$$\phi_0 = \frac{1}{2\pi} \arctan \left( \frac{d}{d + d_3} \right) \quad (8.1.14)$$

Storheten  $r_0$  går mot 1 då  $d$  går mot noll. Detta innebär att  $h_{pe}^0$  övergår i  $h_p^0$  för tunna isoleringar. Funktionerna  $|h_p^0|$  och  $\phi_p^0$  är kända från kapitel 5 och figur 5.3.3. För en ren sinussvängning  $T_3 \cdot \sin(2\pi t/t_3)$  ovanför isoleringen gäller:

$$q_{pe}(t) = \lambda T_3 \cdot |h_p^0| \frac{1}{r_0} \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - \phi_p^0 - \phi_0)) \quad (8.1.15)$$

Fallet med ett värmemotstånd vid markytan ( $d_1 > 0$ ) behandlas också i referens 3. Ytterligare en längd tillkommer. Enligt skalningsreglerna blir kantvärmeförlustfaktorn en funktion av  $d/d_3$  och  $d_1/d$ :

$$q_{pe} = \lambda T_3 \cdot h_{pe}^1(d/d_3, d_1/d) e^{i2\pi t/t_3} \quad (8.1.16)$$

Kantvärmeförlustfaktorn ges av:

$$h_{pe}^1 = \frac{d_1(1+i) + d_3}{d(1+i) + d_3} \cdot h_p^1(d/d_3, d_1/d) \quad (8.1.17)$$

$$= \left| h_p^1 \right| \cdot \frac{1}{r_1} \cdot e^{-i2\pi(\phi_p^1 + \phi_1)} \quad (8.1.18)$$

Funktionerna  $r_1$  och  $\phi_1$  beror av  $d/d_3$  och  $d_1/d_3$  enligt:

$$r_1 = \sqrt{\frac{(d + d_3)^2 + d^2}{(d_1 + d_3)^2 + d_1^2}} \quad (8.1.19)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \arctan\left(\frac{d}{d_3 + d}\right) - \arctan\left(\frac{d_1}{d_3 + d_1}\right) \right) \quad (8.1.20)$$

Då  $d = d_1$  övergår  $h_{pe}^1$  i  $h_p^1$ .

Funktionerna  $\left| h_p^1 \right|$  och  $\phi_p^1$  ges i figur 5.3.6.

Approximationen (8.1.6) för värmeflödet  $Q_p(t)$  från en platta kan nu förfinas något. Plattan har arean  $A$  och kantlängden  $L_e$ . För plattor vars minsta längd är mycket större än  $d_3$  gäller om de tredimensionella förloppen vid hörnen försummas:

$$Q_p(t) \simeq A \cdot q_{no}(t) + L_e q_{pe}(t) \quad (8.1.21)$$

$$L, B > 2d_3$$

Med hjälp av (8.1.3) och (8.1.12) kan detta skrivas:

$$Q_p(t) \approx \lambda T_3 \cdot \left\{ \frac{A}{d} \cdot \frac{1}{r_{no}} \cdot e^{i2\pi(t/t_3 - \phi_{no})} + \right. \\ \left. + L_e \cdot |h_p^0| \cdot \frac{1}{r_o} \cdot e^{i2\pi(t/t_3 - \phi_p^0 - \phi_o^0)} \right\} \quad (8.1.22)$$

Här ges  $r_{no}$ ,  $\phi_{no}$  av (8.1.4) och (8.1.5). Storheterna  $r_o$  och  $\phi_o$  ges av (8.1.13) och (8.1.14). Vidare ges  $h_p^0$  och  $\phi_p^0$  av figur 5.3.3. Kantvärmeförlustfaktorn ersätts av (8.1.16) enligt (8.1.17 - 20) och figur 5.3.6 om  $d_1$  är större än noll.

Exempel 8.1.1 Givet en sinusvarierande innetemperatur med amplituden  $T_3 = 5^\circ\text{C}$  och periodtiden  $t_3 = 1$  vecka. För plattan och marken gäller data enligt (1.10A) för grundfall A:

$$d = 3 \text{ m} \quad \lambda T_3 \frac{A}{d} = 240 \text{ W} \\ d_3 = \sqrt{\frac{7 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 0.75 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 0.38 \text{ m}$$

Den endimensionella approximationen ges av (8.1.7). Storheterna  $r_{no}$  och  $\phi_{no}$  ges av (8.1.4 - 5):

$$r_{no} = 1.07 \quad \phi_{no} = -0.0095$$

Approximationen av värmeförlusten blir:

$$Q_p(t) \approx 240 \cdot \frac{1}{1.07} \sin(2\pi(t/t_3 + 0.0095)) = \\ = 224 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 + 0.0095)) \quad \text{W}$$

Kantvärmeförlusten förfinar approximationen. Den ges av imaginär delen i formel 8.1.22.

$$d/d_3 = 7.89 \quad \lambda T_3 L_e = 300 \text{ W}$$

Enligt figur 5.3.3 gäller:

$$|h_p^0| = 0.045 \quad \phi_p^0 = 0.12$$

Enligt (8.1.13) och (8.1.14) är:

$$r_0 = 8.38 \quad \phi_0 = 0.116$$

Kantbidraget blir:

$$\begin{aligned} & 300 \cdot 0.045 \cdot \frac{1}{8.38} \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - 0.12 - 0.116)) = \\ & = 1.6 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - 0.24)) \quad \text{W} \end{aligned}$$

Totalt blir approximationen

$$\begin{aligned} Q_p \approx & 224 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 + 0.0095)) + \\ & + 1.6 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - 0.24)) \quad \text{W} \end{aligned}$$

Kantbidraget är försumbart jämfört med den endimensionella approximationen.

För fallet  $t_3 = 1$  månad fås:

$$\begin{aligned} Q_p \approx & 210 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 + 0.019)) + \\ & + 4 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - 0.22)) \quad \text{W} \end{aligned}$$

För  $t_3 = 1$  år erhålles:

$$\begin{aligned} Q_p = & 158 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 + 0.048)) + \\ & + 32 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - 0.17)) \quad \text{W} \end{aligned}$$

Här utgör kantbidraget knappt 20% av  $Q_p$ .

Dessa värmeförluster skall jämföras med den stationära förlusten och den periodiska förlusten orsakad av årsvariationer i utetemperaturen. För grundfall A gäller enligt exempel 3.1.1 och 5.3.1

$$Q_s = 427 \quad \text{W}$$

$$Q_p = -144 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094)) \quad \text{W} \quad (t_0 = 1 \text{ år})$$

Den varierande innetemperaturen för detta exempel ( $t_3 = 1$  vecka,  $T_3 = 5^\circ\text{C}$ ) ger upphov till värmeförluster i samma storleksordning som den stationära och den periodiska värmeförlusten ( $T_1 = 10^\circ\text{C}$ ,  $t_0 = 1$  år).

Exempel 8.1.2 Innetemperaturen varierar periodiskt enligt  $T = T_3 \cdot \sin(2\pi(t/t_3))$ . Amplituden  $T_3$  är  $5^\circ\text{C}$  och periodtiden  $t_3$  en vecka. Värmeförlusten för en platta enligt grundfall A med data enligt (1.10A) blir enligt ovanstående exempel:

$$Q_p \approx 224 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 + 0.01)) + \\ + 1.6 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - 0.24)) \text{ W}$$

För grundfall B med data enligt (1.10B) blir värmeförlusten:

$$Q_p \approx 116 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 + 0.005)) + \\ + 0.3 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - 0.25)) \text{ W}$$

För grundfall C med data enligt (1.10C) blir värmeförlusten:

$$Q_p \approx 1050 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 + 0.01)) + \\ + 3.6 \cdot \sin(2\pi(t/t_3 - 0.24)) \text{ W}$$

Platta B är kraftigare isolerad än platta A. Platta C har en större area än platta A men samma isolering. Den får en relativt sett mindre del av värmeförlusten från kantbidraget än platta A.

Den stationära värmeförlusten för de tre grundfallen A, B och C är enligt exempel 3.1.1; A:  $Q_s = 427$  W, B:  $Q_s = 262$  W och C:  $Q_s = 1404$  W.

Den varierande innetemperaturen ger upphov till en värmeförlust som är i samma storleksordning som den stationära. Det bör observeras att ett relativt stort temperatursving på  $5 + 5 = 10^{\circ}\text{C}$  har använts.

## 8.2 Stegändring av innetemperaturen

En variabel innetemperatur kan representeras av ett antal sträckvis konstanta värden. Genom superposition kan förloppet återföras på ett antal rena temperatursteg. Se avsnitt 6.4. I detta avsnitt skall ett sådant renodlat temperatursteg för innetemperaturen behandlas. En temperaturpuls, där innetemperaturen ändras från  $T_i$  till  $T_i + T_4$  under en tid  $t_4$ , behandlas också.

I det renodlade fallet med en stegändring  $T_4$  av innetemperaturen är temperaturen vid markytan noll. Vidare är temperaturen i marken noll vid tiden  $t = 0$ , då temperatursteget startar. Ovanför värmeisoleringen är temperaturen  $T_4$  från tiden  $t = 0$ . Detta temperaturförlopp är identiskt med det som behandlas i kapitel 7 vid uppbyggnaden av en värmekudde. Enda skillnaden är att temperatursteget  $T_i - T_0$  ersätts med  $T_4$ . Alla formler i kapitel 7 kan direkt utnyttjas. Värmeförlusten för temperatursteget betecknas  $Q_t(t)$  (W).

En endimensionell approximation av värmeförlusten för en platta med arean  $A$  blir enligt avsnitt 7.3.1:

$$Q_t(t) \approx \lambda T_4 \cdot \frac{A}{d} \cdot f(\sqrt{at}/d) \quad (t \text{ litet}) \quad (8.2.1)$$

Temperatursteget  $T_i - T_0$  har bytts ut mot  $T_4$ . Funktionen  $f(\sqrt{at}/d)$  ges av (7.3.2) och figur 7.3.1. Approximationen gäller för små tider.

Approximationen (8.2.1) kan förfinas något genom att man tar hänsyn till kanterna. I avsnitt 7.3.2 anges kantvärmeförlusten  $q_{te} = q_{tbe}$  (W/m). Den anger enligt (7.3.6) värmeförlusten vid kanten utöver det endimensionella bidraget. Då markytan ej har något övergångsmotstånd ( $d_1 = 0$ ) blir enligt (7.3.7):

$$q_{te} = \lambda T_4 \cdot h_{tbe}^0 (\sqrt{at}/d) \quad (\text{W/m}) \quad (8.2.2)$$



Övre index 0 för värmeförlustfaktorn anger i analogi med tidigare att värmemotstånd vid markytan saknas. Värmeförlustfaktorn  $h_{tbe}^0$  ges av (7.3.8), figur 7.3.3 och tabell 7.3.1. För fallet med övergångsmotstånd vid markytan ( $d_1 > 0$ ) blir kantvärmeförlusten enligt (7.3.11):

$$q_{te} = \lambda T_4 \cdot h_{tbe}^1 (\sqrt{a\tau}/d ; d_1/d) \quad (\text{W/m}) \quad (8.2.3)$$

Kantvärmeförlustfaktorn  $h_{tbe}^1$  ges i figur 7.3.4.

Approximationen (8.2.1) för värmeflödet  $Q_t(t)$  från en platta kan nu förfinas något. Plattan har arean  $A$  och kantlängden  $L_e$ . Under en första tid gäller analogt med (7.3.13) om de tredimensionella förloppen vid hörnen försummas:

$$Q_t(t) \approx \lambda T_4 \cdot \left\{ \frac{A}{d} \cdot f(\tau) + L_e \cdot h_{tbe}^0(\tau) \right\} \quad (8.2.4)$$

$$\tau = \sqrt{a\tau}/d$$

Här ges  $f$  av figur 7.3.1 och  $h_{tbe}^0(\tau)$  av figur 7.3.3. Kantvärmeförlustfaktorn ersätts av (8.2.3) enligt figur 7.3.4 om  $d_1$  är större än noll.

En temperaturpuls som startar vid tiden  $t_s$  och varar en tid  $t_4$  kan uppfattas som två temperatursteg:

$$T_4 \cdot H(t - t_s) - T_4 \cdot H(t - t_s - t_4) \quad (8.2.5)$$

Här är  $H(t)$  ett enhetstemperatursteg enligt (2.1.8). Under själva pulstiden gäller uttrycket (8.2.4):

$$Q_t(t) \approx \lambda T_4 \cdot \left\{ \frac{A}{d} \cdot f(\tau) + L_e \cdot h_{tbe}^0(\tau) \right\} \quad (8.2.6)$$

$$\tau = \sqrt{a(t - t_s)}/d \quad t_s < t < t_s + t_4$$

För avklingningen efter pulsen gäller:

$$Q_t(t) \approx \lambda T_4 \left\{ \frac{A}{d} \cdot (f(\tau) - f(\tau_1)) + L_e \cdot (h_{tbe}^0(\tau) - h_{tbe}^0(\tau_1)) \right\} \\ \tau_1 = \sqrt{a(t - t_s - t_4)}/d \quad t > t_s + t_4 \quad (8.2.7)$$

Figur 8.2.1 visar temperatursteget och motsvarande värmeförlust  $Q_t(t)$  för exempel 8.2.1.

Exempel 8.2.1 Givet en temperaturpuls hos innetemperaturen med följande data:

$$T_4 = 5^{\circ}\text{C} \quad t_4 = 1 \text{ vecka} \quad t_s = 0$$

Övriga data väljes enligt (1.10A) för grundfall A. Då gäller:

$$d = 3 \text{ m} \quad a = 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\lambda T_4 \cdot \frac{A}{d} = 240 \text{ W} \quad \lambda T_4 L_e = 300 \text{ W}$$

Värmeförlusten enligt den endimensionella approximationen ges av (8.2.1). Funktionen  $f$  ges av figur 7.3.1. Vid pulsens början gäller:  $\tau = 0$ ,  $f(0) = 1$ . Värmeförlusten blir:

$$Q_t = 240 \text{ W}$$

Kantvärmeförlusten är noll vid denna tid. Strax innan pulsen upphör gäller:

$$\tau = \sqrt{0.75 \cdot 10^6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600 / 3} = 0.22$$

$$f(0.22) = 0.793$$

Den endimensionella värmeförlustapproximationen ger:

$$Q_t \approx 240 \cdot 0.793 = 190.3 \text{ W}$$

Den extra värmeförlusten vid kanten ges av andra delen av (8.2.4). Kantvärmeförlustfaktorn ges i figur 7.3.3.

$$h_{tbe}^0(0.22) = 0.0188$$

Kantvärmeförlusten blir:

$$300 \cdot 0.0188 = 5.6 \text{ W}$$

Detta extra bidrag är försumbart i förhållande till den endimensionella approximationen. Den slutgiltiga approximationen för värmeförlusten efter en vecka blir:

$$Q_t \approx 196 \text{ W}$$

Strax efter pulsens slut ges värmeförlusten av:

$$Q_t \approx 196 - 240 = -44 \text{ W}$$

Steget med negativ amplitud ( $-T_4$ ) ger vid dess start ( $t = t_4$ ) upphov till värmeförlusten  $-240 \text{ W}$ . Minustecknet anger att värme strömmar in i byggnaden. Netto strömmar det in  $44 \text{ W}$  i byggnaden från den värme som tidigare under pulsen strömmat ner i marken och lagrats där.

Tabellen nedan ger värmeförlusten för några olika tider:

t (veckor)	0	1-	1+	2	3	4	5
$q_t$ (W)	240	196	-44	-11	-6.8	-4.6	-3.3

En puls som varar i en månad ( $t_4 = 1$  månad) ger följande siffror:

$$\text{pulsens början: } Q_t = 240 \text{ W}$$

$$\text{pulsens slut: } Q_t \approx 151.4 + 19.7 = 171 \text{ W}$$

$$\text{strax efter pulsen: } Q_t \approx -69 \text{ W}$$

Då  $t_4 = 1$  år blir siffrorna:

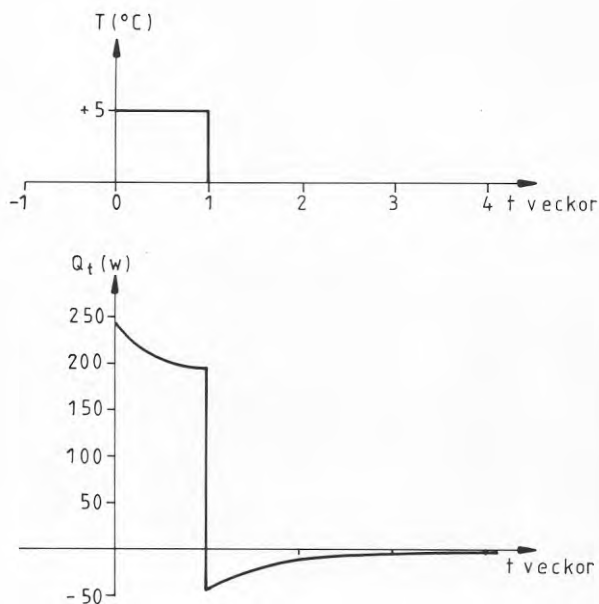
$$\text{pulsens början : } Q_t = 240 \text{ W}$$

$$\text{pulsens slut: } Q_t \approx 72.1 + 94.8 = 167 \text{ W}$$

$$\text{strax efter pulsen : } Q_t \approx -73 \text{ W}$$

Vid pulsens slut anger första siffran den endimensionella approximationen och den andra kantvärmeförlusten.

För pulser av ett års längd utgör kantvärmeförlusten över hälften av värmeförlusten. Värmeförlusten är i samma storleksordning som den stationära och periodiska. Jämför med exempel 8.1.1



Figur 8.2.1 Temperaturpuls och motsvarande värmeförlust för exempel 8.2.1.

Exempel 8.2.2 För en puls enligt exemplet ovan ( $T_4 = 5^{\circ}\text{C}$ ,  $t_4 = 1$  vecka) erhålles för grundfall A, B och C med data enligt (1.10A-C) följande flöden vid pulsens början, pulsens slut och strax efter pulsen.

Grundfall A enligt exempel 8.2.1:

pulsens början:  $Q_t = 240 \text{ W}$

pulsens slut :  $Q_t \approx 190.3 + 5.6 = 196 \text{ W}$

strax efter pulsen:  $Q_t \approx -44 \text{ W}$

Grundfall B:

pulsens början:  $Q_t = 120 \text{ W}$

pulsens slut:  $Q_t \approx 106.4 + 1.6 = 108 \text{ W}$

strax efter pulsen:  $Q_t \approx -12 \text{ W}$

Grundfall C:

pulsens början:  $Q_t = 1125 \text{ W}$

pulsens slut:  $Q_t \approx 892.1 + 12.3 \approx 904 \text{ W}$

strax efter pulsen:  $Q_t \approx -221 \text{ W}$

För den mindre plattan utgör kantbidraget en relativt sett större del av värmeförlusten än för en större platta med samma isolering. Detta gäller även för en tunnare isolerad platta vid en jämförelse med en kraftigare isolerad platta då arean är lika.

## 9 BERÄKNING AV ENERGI- OCH EFFEKTBEHOV. SAMMANFATTNING

Vid energibalansberäkningar för byggnader är man i första hand intresserad av den totala värmeförlusten till marken under eldningssäsongen och av det maximala värmeflödet under den kallaste tiden på vintern. I detta kapitel anges på basis av resultaten i de föregående kapitlen förhållandevis enkla recept för hur dessa storheter kan beräknas. Det grundläggande fallet med en rektangulär platta behandlas i detalj. Vidare diskuteras hur olika komplikationer kan hanteras. Kapitlet blir härigenom en kortfattad sammanfattning av de tidigare avsnitten.

De olika formlerna baserar sig på superposition av olika termiska delprocesser. Man måste härvid försumma tjälbildningen, varvid värmeförlusten underskattas. Det fel man får genom att försumma tjälbildningen är dock enligt avsnitt 11.1 litet eller försumbart.

## 9.1 Dimensionerande utetemperaturvariation

Värmeförlusten från byggnaden till marken bestäms bl a av utetemperaturen och dennas variation under året. Utetemperaturen kan variera kraftigt under ett dygn och från dygn till dygn. Olika exempel i kapitlen 5 och 6 visar emellertid att korttidsvariationer endast ger små eller försumbara bidrag till värmeförlusten. Utetemperaturen kan därför representeras av ett kraftigt förenklat uttryck, vilket bara innehåller några termer.

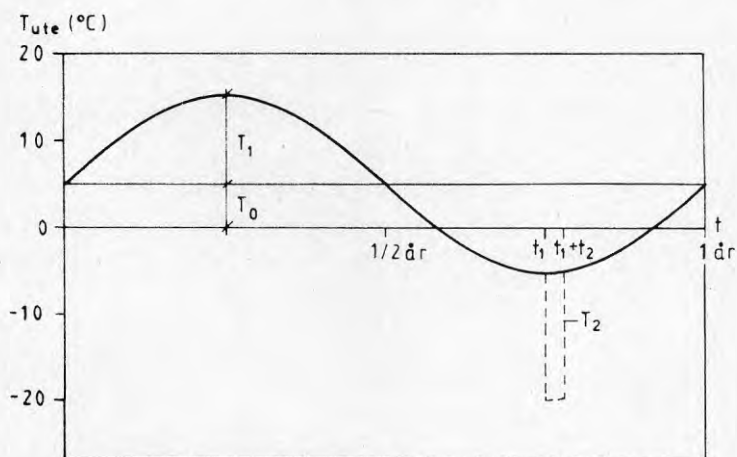
Vid beräkning av värmeförlusten under eldningssäsongen torde det räcka med följande uttryck:

$$T_{ute}(t) \approx T_0 + T_1 \cdot \sin(2\pi t/t_0) \quad (9.1.1)$$

Här anger  $T_0$  luftens årsmedeltemperatur och  $T_1$  sinusvariationens amplitud, medan periodtiden  $t_0$  är lika med ett år. Funktionen (9.1.1) bör anpassas till exempelvis veckomedelvärden för den aktuella orten. Den dimensionerande utetemperaturens variation under året visas i figur 9.1.1.

Sinuskurvan enligt (9.1.1) och figur 9.1.1 ger enbart medeltemperatur under vintern. Vid beräkning av effektmaximum under den kallaste tiden behövs eventuellt ytterligare en term. För detta fall överlagras på (9.1.1) en temperaturpuls med storleken  $T_2$ . Den startar vid tidpunkten  $t = t_1$  och varar tiden  $t_2$ . Den maximala värmeförlusten erhålls då väsentligen vid slutet av temperaturpulsens. Den dimensionerande utetemperaturvariationen för beräkning av effektmaximum under vintern ges av heldragen sinuskurva i figur 9.1.1 tillsammans med den överlagrade, streckade temperaturpulsens.

Den konstanta innetemperaturen betecknas  $T_i$ .



Figur 9.1.1 Dimensionerande utetemperaturvariation för beräkning av energibehov (heldragen kurva) och av maximalt effektbehov (heldragen + streckad kurva).

## 9.2 Värmeförlust under eldningssäsongen

Värmeflödet till marken betecknas  $Q(t)$  (W). För en utetemperatur med formen (9.1.1) får man en stationär (tidsoberoende) komponent  $Q_s$  och en periodisk komponent  $Q_p(t)$ :

$$Q(t) = Q_s + Q_p(t) \quad (9.2.1)$$

Den stationära komponenten  $Q_s$  behandlas i kapitel 3 och 4 och den periodiska,  $Q_p(t)$ , i kapitel 5.

För en rektangulär platta med jämntjock isolering gäller formel (3.1.1):

$$Q_s = \lambda(T_i - T_o)L \cdot h_s(L/B, d/B) \quad (9.2.2)$$

Här är  $L$  plattans längd och  $B$  dess bredd. Isolertjockleken ges enligt (2.2.4) av den ekvivalenta längden  $d = \lambda d_i / \lambda_i$ . Se avsnitt 2.2. Den dimensionslösa värmeförlustfaktorn  $h_s$  anges av figur 3.1.1. Den periodiska komponenten ges av formel 5.4.1:

$$Q_p = -\lambda T_1(2L + 2B) \cdot \left| h_p^0 \right| \sin(2\pi(t/t_o - \phi_p^0)) \quad (9.2.3)$$

Storheterna  $\left| h_p^0 \right|$  och  $\phi_p^0$  är funktioner av  $d/d_o$ . De ges av figur 5.3.3. Inträngningsdjupet  $d_o = \sqrt{a t_o / \pi}$  definieras och diskuteras i avsnitt 2.4.2. I formlerna ovan försummas värmemotståndet vid markytan.

Eldningssäsongen ligger mellan tiderna  $t_a$  och  $t_b$ . Den totala värmeförlusten  $E_y$  (year) under eldningssäsongen erhålles genom att integrera (9.2.1-3) över tiden  $t_a < t < t_b$ . Detta ger följande uttryck för värmeförlusten under eldningssäsongen:

$$\begin{aligned} E_y = & \lambda(T_i - T_o)L \cdot h_s(L/B, d/B) \cdot (t_b - t_a) + \\ & + \lambda T_1(2L + 2B) \cdot \left| h_p^0 \right| \cdot \frac{t_o}{2\pi} \left\{ \cos\left(2\pi(t_b/t_o - \phi_p^0)\right) - \right. \\ & \left. - \cos\left(2\pi(t_a/t_o - \phi_p^0)\right) \right\} \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

### 9.3 Effektmaximum under vintern

Låt  $Q_t(t)$  beteckna värmeflödet härrörande från temperaturpulsens. Det totala värmeflödet för en utetemperatur enligt (9.1.1) med en överlagrad puls enligt figur 9.1.1 blir då

$$Q(t) = Q_s + Q_p(t) + Q_t(t) \quad (9.3.1)$$

Uttryck för  $Q_t(t)$  anges i kapitel 6.



För en rektangulär platta gäller enligt (6.3.3) då värmemotståndet vid markytan mot uteluften försummas:

$$Q_t(t) = \lambda T_2(2L + 2B) \cdot h_t^0 \left( \sqrt{a(t - t_1)}/d \right) \quad (9.3.2)$$

$$t_1 < t < t_1 + t_2$$

Funktionen  $h_t^0(\tau)$  ges av figur 6.2.2.

Det största värdet på  $Q_t(t)$  erhålles vid temperaturpulsens slut:  $t = t_1 + t_2$ . Den periodiska komponenten ger maximalt bidrag då  $2\pi(t/t_0 - \phi_p^0)$  är lika med  $3\pi/2$  ( $\sin(3\pi/2) = -1$ ). Dessa två maxima ligger i allmänhet relativt nära varandra i tiden. De kan därför adderas. Detta ger enligt (9.3.1), (9.2.2), (9.2.3) och (9.3.2) följande uttryck för maximal, dimensionerande värmeförlust till marken för en rektangulär platta med jämntjock värmeisolering:

$$Q(t) \Big|_{\max} = \lambda(T_i - T_0)L \cdot h_s(L/B, d/B) + \lambda T_1(2L + 2B) \cdot \left| h_p^0 \right| + \lambda T_2(2L + 2B) \cdot h_t^0(\sqrt{at_2}/d) \quad (9.3.3)$$

De tre ingående funktionerna ges av figurerna 3.1.1, 5.3.3 och 6.2.2.

Ett lämpligt krav för att maximalt bidrag från periodisk del och från temperaturpuls någorlunda skall sammanfalla så att formel 9.3.3 blir giltig är:

$$\frac{8}{12} < (t_1 + t_2)/t_0 - \phi_p^0 < \frac{10}{12} \quad (9.3.4)$$

Figur 1.3 och exempel 1.2 visar att bidraget från temperaturpuls normalt är relativt litet. Ett värmemotstånd vid markytan reducerar enligt avsnitt 6.2.3 kraftigt  $Q_t(t)$ . Detta medför att man kan försumma  $Q_t(t)$  då man har ett snötäcke av någorlunda tjocklek. Maximal värmeförlust till marken ges då av de två första termerna av (9.3.3):

$$Q(t) \Big|_{\max} = \lambda(T_i - T_0)L \cdot h_s(L/B, d/B) + \lambda T_1(2L + 2B) \cdot \left| h_p^0 \right| \quad (9.3.5)$$

#### 9.4 Kommentarer. Komplikationer

Under de första åren efter det att en ny byggnad har börjat värmas, sker en uppbyggnad av en värmekudde under byggnaden. Den extra värmeförlusten på grund av detta behandlas i kapitel 7. För en mindre byggnad är denna förlust relativt liten under det första året. Se exempel 7.2.1. Under de följande åren kan den försummas. För en större byggnad får man ta hänsyn till denna extra förlust under något eller några år enligt formler som anges i kapitel 7.

En extra värmeisolering längs plattans kanter ändrar den stationära värmeförlusten. Formler för effekten av kantisoleringen ges i kapitel 4. Eventuella köldbryggor och andra komplikationer vid plattans kanter behandlas ej i denna studie. Vid beräkning av värmeförluster från periodiska komponenter och från stegändringar skall isolertjockleken i området närmast plattans kant utnyttjas i de formler som anges i kapitlet 5 och avsnitt 6.3.1.

För plattor av annan form än rektangulär sker beräkningen av den stationära värmeförlusten enligt avsnitt 3.6. Den periodiska värmeförlusten beräknas enligt avsnitt 5.4 och värmeförlusten orsakad av stegändringar av utetemperaturen enligt avsnitt 6.3.1.

Marken förutsätts, i de fall där numeriska värden anges, vara homogen med konstanta termiska data. Ingen hänsyn tas till termiska effekter av grundvattenrörelser.

Vid markytan har man ett värmemotstånd mellan uteluft och markens yta. I de givna formlerna kan man ha ett godtyckligt, konstant motstånd. Frånsett komplikationen med snö kan detta motstånd normalt försummas för den stationära värmeförlustkomponenten. För den periodiska delen anges formler i avsnitt 5.3. För temperatursteg och speciellt köldknäpp sker beräkningen enligt avsnitt 6.2.3. Exempel i kapitel 5 och 6 visar att värmeförlusten vid en köldknäpp och vid periodiska variationer dämpas kraftigt av snö. Vid snödjup på en decimeter eller mer kan värmeförlusten från köldknäppar med en varaktighet på upp till en månad försummas. Samma sak gäller för periodiska variationer med en periodtid upp till en månad.

Vid behov kan utetemperaturen representeras av fler termer, för vilka värmeförlustbidragen superponeras. Man kan ha flera periodiska komponenter. En sträckvis konstant utetemperatur kan representeras av ett antal temperatursteg enligt avsnitt 6.4.

Periodiskt varierande temperaturer, stegändringar och pulser i temperaturen kan överlagras på den konstanta innetemperaturen  $T_i$ . Dessa kan ge upphov till relativt stora effekter då temperatursvinget är stort. Beräkning av effekterna sker enligt kapitel 8.

## 10 EXEMPEL OCH JÄMFÖRELSE

## 10.1 Total värmeförlust för grundfall A, B och C

Olika delprocesser har behandlats tidigare för de tre grundfallen. I detta avsnitt skall resultaten sammanfattas så att en totalbild för plattornas värmeförluster erhålles. Grunddata ges av (1.10).

För de tre fallen råder en konstant innetemperatur:

$$T_i = 20^{\circ}\text{C}$$

Utetemperaturen ges av formel 9.1.1:

$$T_{\text{ute}} = 5 + 10 \cdot \sin(2\pi t/t_0) \quad (^{\circ}\text{C})$$

$$t_0 = 1 \text{ år}$$

På denna temperatur överlagras en temperaturpuls enligt figur 9.1.1 vid beräkning av effektmaximum.

Pulsen startar mitt i vintern ( $t_1 = 3t_0/4$ ) och varar i en vecka ( $t_2 = 1$  vecka). Figur 10.1.1 visar utetemperaturen under årets månader. Eldningssäsongen varar från mitten av september ( $t_a = 4.5/12 \cdot t_0$ ) till mitten av maj ( $t_b = 12.5/12 \cdot t_0$ ).

Plattornas längd och bredd är:

$$L = 12 \text{ m}, \quad B = 8 \text{ m} \quad (\text{grundfall A och B})$$

$$L = 30 \text{ m}, \quad B = 15 \text{ m} \quad (\text{grundfall C})$$

Den ekvivalenta isolertjockleken blir enligt exempel 3.1.1:

$$d = 3 \text{ m} \quad (\text{grundfall A och C})$$

$$d = 6 \text{ m} \quad (\text{grundfall B})$$

Inträngningsdjupet blir enligt exempel 5.1.1:

$$d_0 = 2.74 \text{ m}$$

Exempel 10.1.1 Grundfall A med data enligt (1.10A). Den stationära värmeförlusten blir enligt exempel 3.1.1:

$$Q_s = 427 \text{ W}$$

Den periodiska värmeförlusten blir enligt exempel 5.4.2:

$$Q_p = -144 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094)) \text{ W}$$

Den totala värmeförlusten blir:

$$Q(t) = 427 - 144 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094)) \text{ W}$$

Maximal värmeförlust för köldknäppen blir enligt exempel 6.4.2:

$$Q_t|_{\max} = 101 \text{ W}$$

Maximum av den totala värmeförlusten blir i enlighet med (9.3.3):

$$Q|_{\max} = 427 + 144 + 101 = 672 \text{ W}$$

Figur 10.1.1 visar den totala värmeförlusten. Den totala ackumulerade värmeförlusten under eldningssäsongen blir enligt (9.2.4):

$$E_y = 2650 \text{ kWh}$$

Härvid bidrar den periodiska temperaturvariationen med 156 kWh, vilket endast är 6% av den totala ackumulerade värmeförlusten. I början av eldningssäsongen ger den periodiska temperaturvariationen upphov till en värmeförlust som ligger under den stationära. En del av sommarvärmen kommer byggnaden tillgodo. I slutet av eldningssäsongen ligger värmeförlusten över den stationära. Dessa avvikelser från det stationära värdet balanserar till stor del varandra, se figur 10.1.1. Detta förklarar varför den periodiska värmeförlusten utgör en så pass liten del av den ackumulerade värmeförlusten.

Exempel 10.1.2 Grundfall B med data enligt (1.10B). Den stationära värmeförlusten ges av exempel 3.1.1 och den periodiska värmeförlusten av 5.4.3. Sammantaget blir den totala värmeförlusten:

$$Q(t) = 262 - 84 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.11)) \text{ W}$$

Maximal värmeförlust för köldknäppen blir enligt exempel 6.4.2:

$$Q_t|_{\max} = 52 \text{ W}$$

Maximum av den totala värmeförlusten blir i enlighet med (9.3.3):

$$Q|_{\max} = 262 + 84 + 52 = 398 \text{ W}$$

Figur 10.1.1 visar den totala värmeförlusten. Den totala ackumulerade värmeförlusten under eldningssäsongen blir enligt (9.2.4):

$$E_y = 1650 \text{ kWh}$$

Härvid bidrar den periodiska värmeförlusten med 7%.

Exempel 10.1.3 Grundfall C med data enligt (1.10C). Den stationära värmeförlusten ges av exempel 3.1.1 och den periodiska värmeförlusten av 5.4.1. Sammantaget blir den totala värmeförlusten:

$$Q(t) = 1404 - 324 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.094)) \text{ W}$$

Maximal värmeförlust för köldknäppen blir enligt exempel 6.4.2:

$$Q_t|_{\max} = 225 \text{ W}$$

Maximum av den totala värmeförlusten blir i enlighet med (9.3.3):

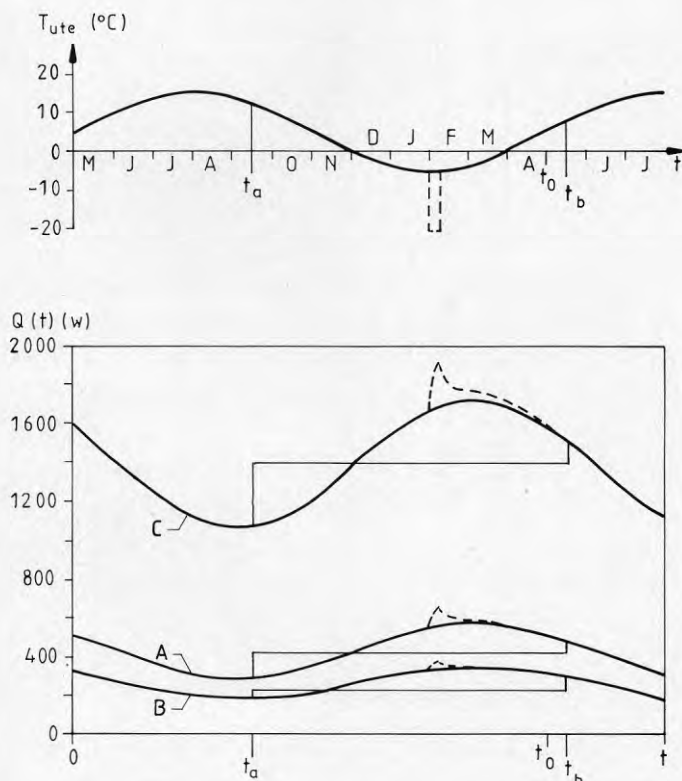
$$Q|_{\max} = 1404 + 324 + 225 = 1953 \text{ W}$$

Figur 10.1.1 visar den totala värmeförlusten. Den totala ackumulerade värmeförlusten under eldningssäsongen blir enligt (9.2.4):

$$E_y = 8550 \text{ kWh}$$

Härvid bidrar den periodiska värmeförlusten med 4%.

Figur 10.1.1 visar utetemperaturen och värmeförlusten för de tre grundfallen under 15 månader.



Figur 10.1.1 Utetemperatur och värmeförlust för grundfall A, B och C. Beteckningarna M, J... anger månad maj, juni osv. Horisontellinje anger den stationära värmeförlusten under eldningssäsongen.

## 10.2 Jämförelse med Svensk Byggnorm

Det är intressant att jämföra metoderna för beräkning av värmeförluster till mark med vad Svensk Byggnorm anger. Vid jämförelsen användes grundfall A, B och C.

I Svensk Byggnorm anges hur  $k$ -värdet för en platta på mark må beräknas. I kapitel 35 anges maximalt effektbehov med hjälp av  $k$ -värde och dimensionerande lägsta utetemperatur (enligt formel 10.2.0 nedan). I övrigt anges ej explicit hur värmeförlusten skall beräknas. Vid jämförelse med metoderna i denna skrift beräknas värmeförlusten med  $k$ -värden enligt Svensk Byggnorm och formel 10.2.0 nedan ( $k$ -SBN).

De  $k$ -värdena anger värmeförlusten per ytenhet vid en grads temperaturskillnad mellan inne- och utetemperatur. Värmeförlusten beräknas då enligt:

$$Q(t) = k \cdot A \cdot (T_{\text{inne}} - T_{\text{ute}}) \quad (W) \quad (10.2.0)$$

Här är  $A$  plattans area. Värmeförlusten är direkt proportionell mot differensen mellan inne- och utetemperatur. Detta antagande innebär implicit att värmeförlusten vid varje tidpunkt ges av den stationära värmeförlusten för den aktuella temperaturdifferensen.

I Svensk Byggnorm delas plattan upp i tre fält: ett yttre, ett inre och ett innersta fält. För vart och ett av dessa anges ett värmemotstånd för marken. Med hjälp av värmemotstånden för marken och värmeisoleringen beräknas  $k$ -värdet för hela plattan.

### 10.2.1 Momentan värmeförlust

Värmeförlusten för grundfall A, B och C med data enligt (1.10A-C) beräknas enligt (10.2.0) för varje tidpunkt under året. Utetemperaturen förutsätts variera periodiskt enligt (9.1.1) och figur 9.1.1. Värmeförlusten skall jämföras med den som ges av formlerna 9.2.1-3 och exempel (10.1.1-3).

I Svensk Byggnorm ges markens värmemotstånd för plattans tre fält för olika jordarter. För lera, sand och grus med värmeledningsförmågan 1.4 W/mK anges värmemotstånden 1.0, 3.4 och 4.4  $\text{Km}^2/\text{W}$ . Markens värmeledningsförmåga för grundfall A, B och C är 1.5 W/mK. För en sådan

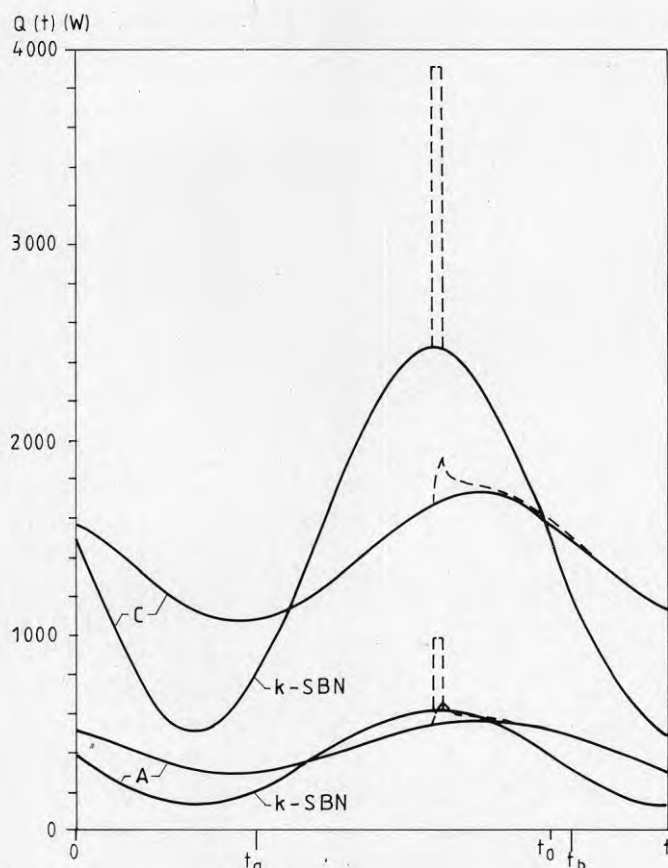


mark minskar värmemotstånden med faktorn 1.4/1.5 till 0.93, 3.2 och 4.1  $\text{Km}^2/\text{W}$ . Med dessa värden på markens värmemotstånd blir k-värdet för de tre grundfallen:

$$\text{A: } k = 0.26 \quad \text{B: } k = 0.16 \quad \text{C: } k = 0.22 \quad (\text{W}/\text{m}^2\text{K})$$

Arean A är i de tre fallen 96, 96 respektive 450  $\text{m}^2$ .

I figur 10.2.1 visas värmeförlusten för grundfall A och C under drygt ett år beräknad med ovanstående k-värden och formel 10.2.0. I figuren ges även värmeförlusten enligt exempel (10.1.1-3).



Figur 10.2.1 Värmeförlust för grundfall A och C beräknad med k-värden enligt Svensk Byggnorm (k-SBN) och enligt (9.2.1-3). Utetemperaturen ges av 9.1.1. Periodtiden  $t_0$  är lika med ett år.

Värmeförlusten enligt de två metoderna skiljer sig åt med upp till 130% under året. Beräkningen av värmeförlusten med hjälp av k-värdet har svårt att hantera de dynamiska temperaturförloppen. Årsmedelvärdena ligger däremot ganska nära varandra. Amplituden på den periodiska

variationen kring årsmedelvärdet vid beräkning enligt (10.2.0) är 3 gånger för stor. Vidare finns ingen fasförskjutning mellan temperatur och värmeförlust. Den extra värmeförlust som köldknäppen ger blir mer än 6 gånger för stor.

### 10.2.2 Stationär värmeförlust

I tabell 10.2.1 ges den stationära värmeförlusten för grundfall A, B och C. Vidare ges värmeförlusten beräknad med k-värden enligt Svensk Byggnorm, då man använt årsmedelvärdet av utetemperaturen. Härigenom erhålles värmeförlustens årsmedelvärde.

	A	B	C
(3.1.1)	427	262	1404
k-SBN	378	235	1467

Tabell 10.2.1 Stationär värmeförlust  $Q_s$ , (W), för grundfall A, B och C med data enligt (1.10A-C) beräknad med k-värden enligt Svensk Byggnorm (k-SBN) och enligt (3.1.1).

Skillnaden i den stationära värmeförlusten ligger runt 10 %. För den lilla plattan underskattas värmeförlusten, medan den överskattas för den stora.

Värmeförlusten för en platta bestäms av plattans isolering, vilken är känd, och av markens värmeisolerande förmåga, vilken kan representeras av en ekvivalent medeltjocklek  $D_m$  enligt avsnitt 2.3. För att riktigt kunna bedöma de siffror Svensk Byggnorm anger för markens värmemotstånd skall denna medeltjocklek jämföras för de två metoderna. Den beräknas enligt (2.3.17) och (2.3.18). För grundfall A erhålles:

$$D_m = 2.8 \text{ m} \quad (\text{k-SBN}) \quad D_m = 2.1 \text{ m} \quad (3.1.1)$$

Vid beräkning av  $D_m$  bortses från att övergångsmotstånden vid markytan är inräknade i de värden för markens värmemotstånd som anges i Svensk Byggnorm. Storleken på dessa övergångsmotstånd anges ej.

Felet i markens värmeisolerande förmåga enligt Svensk Byggnorm ligger här runt 25%. Det totala värmemotståndet och härmed värmeförlusten ges av summan av den ekvivalenta isolertjockleken och markens ekvivalenta medeltjocklek ( $d + D_m$ ). Båda är i detta exempel cirka tre meter. Ett fel på 25% i  $D_m$  ger därför ett fel i värmeförlusten som är hälften så stort. För kraftigt isolerade plattor vars ekvivalenta isolertjocklek är mycket större än  $D_m$  blir felet i värmeförlust litet, då det huvudsakligen bestäms av isoleringen.

Vid beräkning av värmemotståndet för det yttre fältet (0-1 meter från kanten) antages värmeströmningen ske längs cirkelbågar, vilka har sitt centrum vid plattkanten. För det innersta fältet förutsätts värmeströmmen gå lodrätt ner i marken till ett djup där konstant temperatur råder. Detta djup antages vara sex meter. För det inre fältet (1-6 meter från kanten) anges ett medelvärde mellan dessa väglängder för värmeströmmen.

Vid antagandet att värmeflödet går längs cirkelbågar tvingas så att säga värmeströmmen att följa en bestämd väg från det yttre fältet till markytan. Därmed förhindras värmeflödet från att ta den väg som ger minst värmemotstånd. Detta medför att värmeflödet kommer att underskattas. Vidare tar inte metoden hänsyn till nedkylningen från marken utanför plattans övriga kanter. I avsnitt 3.3 analyseras cirkelbågsmetoden. Man finner för ett tvådimensionellt tvärsnitt att två cirkelbågar, en runt den närmaste kanten och en runt den motstående, ger en bättre approximation.

Antagandet om en konstant väglängd (vilken godtyckligt satts till 6 m) för värmeströmmen från det innersta fältet ner i marken, ger en överskattning av värmeförlusten.

De ovanstående antagandena innebär sammantaget att värmeförlusten underskattas för små plattor där det innersta fältet är litet eller saknas. För stora plattor blir följderna av antagandet för det innersta området att värmeförlusten överskattas.

### 10.2.3 Ackumulerad värmeförlust under eldningssäsongen

Den ackumulerade värmeförlusten under en eldningssäsong,  $E_y$ , ges av ytan under kurvorna i figur 10.2.1 för tiden mellan  $t_a$  och  $t_b$  (se även figur 10.1.1). Med (10.2.0) blir denna:

$$E_y = k \cdot A \cdot \int_{t_a}^{t_b} (T_{\text{inne}} - T_{\text{ute}}) dt \quad (10.2.1)$$

Integralen anger antalet graddagar under eldningssäsongen. För grundexemplen gäller:  $t_a = 4.5/12 \cdot t_0$  och  $t_b = 12.5/12 \cdot t_0$ . Utetemperaturen ges av (9.1.1) och övrig data av (1.10A-C). Integralen beräknas på liknande sätt som i (9.2.4). Detta ger 4600 graddagar.

I tabell 10.2.2 ges  $E_y$  för de olika grundfallen enligt (10.2.1) och enligt (9.2.4) (exempel 10.1.1-3):

	A	B	C
(9.2.4)	2650	1650	8550
k-SBN	2800	1700	11000

Tabell 10.2.2 Ackumulerad värmeförlust  $E_y$  (kWh) under en eldningssäsong för grundfallen A, B och C med data enligt (1.10A-C) beräknad enligt (9.2.4) och enligt (10.2.1) (k-SBN).

Skillnaden i  $E_y$  blir 6, 3 och 30% för grundfall A, B respektive C.

I figur 10.2.1 ser man hur värmeförlusten varierar periodiskt kring ett årsmedelvärde. Skillnaden i detta årsmedelvärde är litet för de två metoderna. För den periodiska variationen blir felet däremot betydligt större. I kapitel 5 visades att den periodiska värmeförlusten i allt väsentligt är en kanteffekt. De inre delarna av plattan ger ringa bidrag till värmeförlusten.

Formel 10.2.0 ger därför en kraftig överskattning av den periodiska värmeförlusten. Speciellt stort blir felet för stora plattor. För fall A och B motverkar felet i årsmedelvärdet och den periodiska delen av värmeförlusten varandra, vilket resulterar i att felet i  $E_y$  blir litet. För den stora plattan förstärks felet i årsmedelvärdet av den periodiska delen.

#### 10.2.4 Maximal värmeförlust

Enligt Svensk Byggnorm (kapitel 35) beräknas den maximala värmeförlusten enligt formel 10.2.0, där  $T_{ute}$  satts till den dimensionerande lägsta utetemperatur (LUT) under året.

Enligt avsnitt 9.3 beräknas den maximala värmeförlusten utifrån en given utetemperatur så som i figur 9.1.1. Denna varierar periodiskt kring ett årsmedelvärde. En temperaturpuls överlagras under den kallaste perioden på vintern. En jämförelse med Svensk Byggnorm skall göras med detta temperaturantagande som grund. För grundexemplen enligt (1.10A-C) blir den lägsta utetemperatur  $-20^{\circ}\text{C}$ . I tabell 10.2.3 ges den maximala värmeförlusten för grundexemplen för de två metoderna.

	A	B	C
(9.2.3)	670	400	1950
k-SBN	1000	615	3960

Tabell 10.2.3 Maximal värmeförlust  $Q_{\max}$  (W) för grundfall A, B och C med data enligt (1.10A-C), beräknad med k-värden enligt Svensk Byggnorm (k-SBN) och enligt (9.2.3).

Skillnaden i värmeförlust blir maximalt 100%.

I värmeförlustberäkningarna enligt Svensk Byggnorm saknas den dynamik som krävs för temperaturpulser och periodiskt varierande temperaturförlopp. I figur 10.2.1 visas att värmeförlusten orsakad av en temperaturpuls startar från noll och växer till ett maximalt värde

vid pulsens slut. Om pulsen är mycket lång ges detta slutvärdevärde approximativt av den stationära värmeförlust som råder vid en temperaturdifferens mellan inne- och utetemperatur som är lika med pulsens storlek. Vid en beräkning med k-värden enligt Svensk Byggnorm ges värmeförlusten av detta stationära värde under hela pulsens varaktighet. Ju kortare tid pulsen varar desto större blir därför felet i den beräknade värmeförlusten. För stora plattor tar det längre tid att uppnå den stationära värmeförlusten, vilket resulterar i ett större fel i beräkningen för stora plattor än för små.

I exempel 6.3.1 visades att för en platta enligt grundfall A och B tar det cirka ett år att uppnå 80% av det stationära värdet. För en platta enligt grundfall C tar det fyra år.

Ett liknande resonemang som ovan kan göras för den periodiskt varierande utetemperaturen. Pulsernas längd (ungefär  $t_0/2$ ) blir i detta fall längre och därmed är felet något mindre.

## 11      EFFEKT AV TJÄLE OCH SNÖ

I de tidigare beräkningarna av värmeförluster har effekten av snö och tjälbildning försumrats. För att studera storleken på det härvid uppkomna felet skall värmeförlusten beräknas för en platta där dessa två komplikationer beaktas.

Vid jämförelser av värmeförlusten beräknas denna numeriskt för ett tvärsnitt av en långsträckt platta. Detta tvådimensionella fall har valts då det beräkningsmässigt är enklare och har bättre numerisk precision än ett tredimensionellt fall.

Utetemperaturen varierar sinusformigt enligt (9.1.1). Värmeförlusten ges av en stationär och en periodisk del enligt kapitel 3 och 5. Det har tidigare ej givits någon allmän formel för värmeförlusten för ett tvådimensionellt tvärsnitt. Den stationära komponenten ges i avsnitt 3.4. I kapitel 5 angavs den periodiska värmeförlusten för en kant av en långsträckt platta enligt (5.3.2). En faktor 2 tillkommer då plattan har två kanter. Sammantaget blir värmeförlusten för ett tvärsnitt av en långsträckt platta:

$$q(t) = \lambda(T_i - T_o) \cdot h_s(d/B) - 2\lambda T_1 \cdot \left| h_p^0(d/d_o) \right| \cdot \sin(2\pi(t/t_o - \phi_p^0)) \quad (\text{W/m}) \quad (11.0.1)$$

Värmemotståndet vid markytan antas här vara noll ( $d_1 = 0$ ). Motsvarande formel då  $d_1$  är större än noll ges av (11.2.4). Värmeförlustfaktorerna ges av figurerna 3.4.1 och 5.3.3.

Följande data antages:

$$\begin{array}{lll} B = 8 \text{ m} & d = 3 \text{ m} & \\ \lambda = 1.5 \text{ W/mK} & a = 0.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} & (11.0.2) \\ T_i = 20^\circ\text{C} & T_o = 5^\circ\text{C} & T_1 = 10^\circ\text{C} \\ t_o = 1 \text{ år} & & \end{array}$$

Värmeförlusten blir enligt (11.0.1):

$$q(t) = 30.2 - 7.2 \cdot \sin(2\pi(t/t_o - 0.094)) \quad \text{W/m} \quad (11.0.3)$$

Denna värmeförlust visas i figurerna 11.1.1 Och 11.2.1 av heldragen kurva. Man har med detta sätt att räkna försummat tjäle och snö.

### 11.1 Tjäle

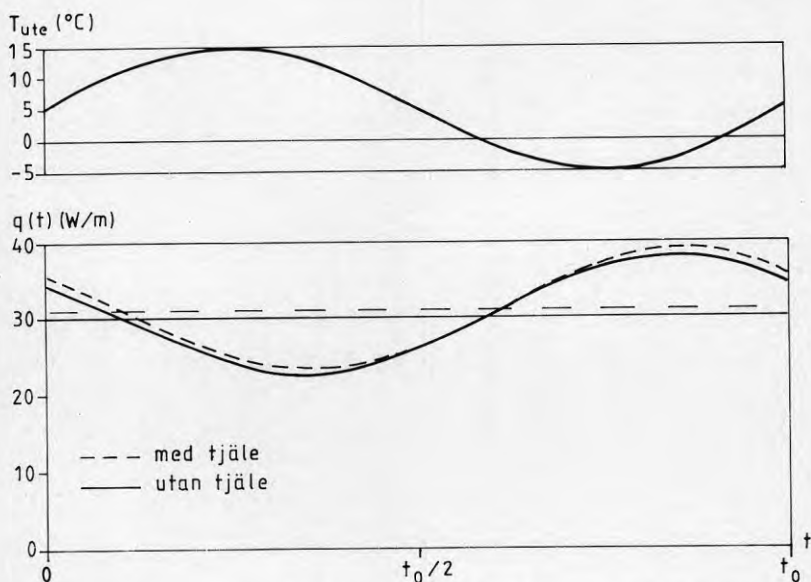
Tjälbildning i marken runt plattan bestäms av markens beskaffenhet, utetemperatur och värmeflödet från plattan. I fruset tillstånd har marken värmeledningsförmågan  $\lambda_f$  (W/mK) och värmekapaciteten  $C_f$  (J/m<sup>3</sup>K). Smältvärmets per volymsenhet mark betecknas  $L_f$  (J/m<sup>3</sup>). Det bestäms av markens vattenhalt. Följande data antages:

$$\begin{aligned}\lambda_f &= 2.5 \text{ W/mK} \\ C_f &= 2.5 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\text{K} \\ L_f &= 225 \cdot 333 \cdot 1000 = 75 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3\end{aligned}\tag{11.1.1}$$

Marken antages innehålla 225 kg vatten per kubikmeter mark. Data för ofrusen mark, utetemperatur och plattan ges av (11.0.2). Effekten av snö försummas.

Ett datorprogram vilket tar hänsyn till tjäle har använts för att beräkna temperaturförloppet i marken. Det största tjäldjupet långt bort från plattan blir ca 1 m. Den beräknade värmeförlusten visas i figur 11.1.1 av streckad kurva.





Figur 11.1.1 Värmeförlust med och utan hänsyn tagen till tjälbildning. Data enligt (11.0.2) och (11.1.1). De två horisontella linjerna i nedre figurdelen anger årsmedelvärdet.

Värmeförlusten med hänsyn tagen till tjäle är något större än utan tjäle. Maximal skillnad är 5%. Årsmedelvärdet ligger 2% högre. Den under eldningssäsongen ( $t_a = 4.5/12 \cdot t_0$ ,  $t_b = 12.5/12 \cdot t_0$ , se kapitel 10, figur 10.1.1) ackumulerade värmeförlusten blir 4% högre då man tar hänsyn till tjäle.

Värmeledningsförmågan är större för frusen än för ofrusen mark. Detta ökar värmeförlusten. Tjälbildningen i sig har motsatt effekt, då den bromsar upp nedkylningen av marken. För det givna exemplet dominerar effekten av den ökade värmeledningsförmågan.

Exemplet ovan visar att felet som uppkommer då tjälbildning försummas är litet. Värmeförlusten ges med god noggrannhet av de tidigare angivna formlerna, vilka ej tar hänsyn till tjäle.

## 11.2 Snö

Ett snötäcke på marken verkar värmeisolerande. Snökristallerna bildar en porös struktur där förhållandevis stor volym stillastående luft ryms. Då snötäcket är tjockt blir därför dess isolerande förmåga stor.

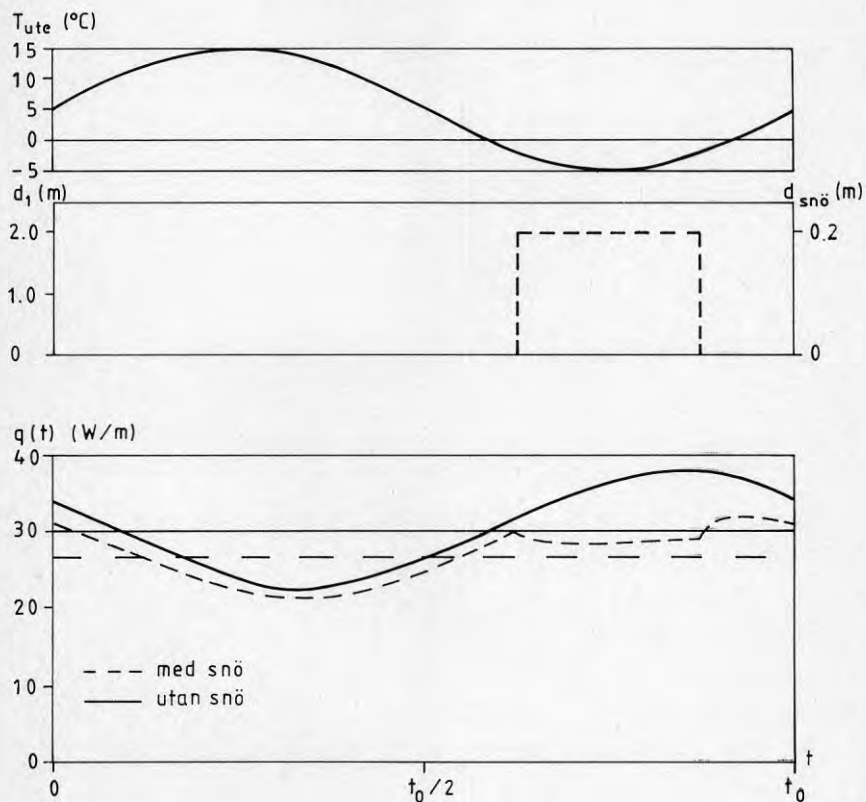
För enkelhetens skull antages marken ha ett snötäcke med konstant tjocklek under vinterns tre kallaste månader. Under resten av året antages marken vara snöfri. Följande data gäller:

$$\begin{aligned} d_{\text{snö}} &= 0.2 \text{ m} && \text{(under tre månader)} \\ \lambda_{\text{snö}} &= 0.15 \text{ W/mK} \end{aligned} \tag{11.2.1}$$

Snötäckets ekvivalenta isolertjocklek blir enligt (2.2.13):

$$d_1 = \frac{\lambda_{\text{snö}} d_{\text{snö}}}{\lambda_{\text{snö}}} = 2 \text{ m} \tag{11.2.2}$$

Den beräknade värmeförlusten med snö (och tjäle) visas i figur 11.2.1 av streckad kurva. Hel dragen kurva visar värmeförlusten enligt (11.0.3), där snö och tjäle försummas.



Figur 11.2.1 Värmeförlust med och utan hänsyn tagen till snö. Data enligt (11.0.2) och (11.1.1). Ekvivalent snödjup  $d_1$  och snödjup  $d_{snö}$  visas. De två horisontella linjerna i nedre figurdelen anger årsmedelvärdet.

För fallet med snö blir värmeförlusten hela tiden lägre än utan snö. Maximal skillnad är 25%. Årsmedelvärdet ligger 12% lägre med snö. Den under eldningssäsongen ( $t_a = 4.5/12 \cdot t_0$ ,  $t_b = 12.5/12 \cdot t_0$ , se kapitel 10, figur 10.1.1) ackumulerade värmeförlusten blir 12% lägre då hänsyn tages till snön.

Någon egentlig tjälbildning sker inte nära plattans kanter. Strax innan snön täcker marken har tjälen trängt ner en dryg decimeter. Strax efter det att snön fallit försvinner tjälen. För området 4 meter och längre bort fås en viss tjäle.

Under vintern blir felet i värmeförlusten relativt stort då snön försummas. För att bättre kunna förutsäga värmeförlusten bör därför snöns isolerande förmåga beaktas i beräkningen. En modell är att ansätta en under året konstant isolering vid markytan. Ett naturligt val är att ta medelvärdet för  $d_1$  under året. I det aktuella fallet erhålles då:

$$d_1 = \frac{0 \cdot 9 + 2 \cdot 3}{12} = 0.5 \text{ m (under hela året)} \quad (11.2.3)$$

Man utnyttjar således snödjupets medelvärde räknat för hela året.

Då tjäle försummas ges värmeförlusten av ett uttryck liknande (11.0.1). Enligt skalningsreglerna i kapitel 2 tillkommer ytterligare en parameter  $d_1/d$  i värmeförlustfaktorerna. Värmeförlusten blir:

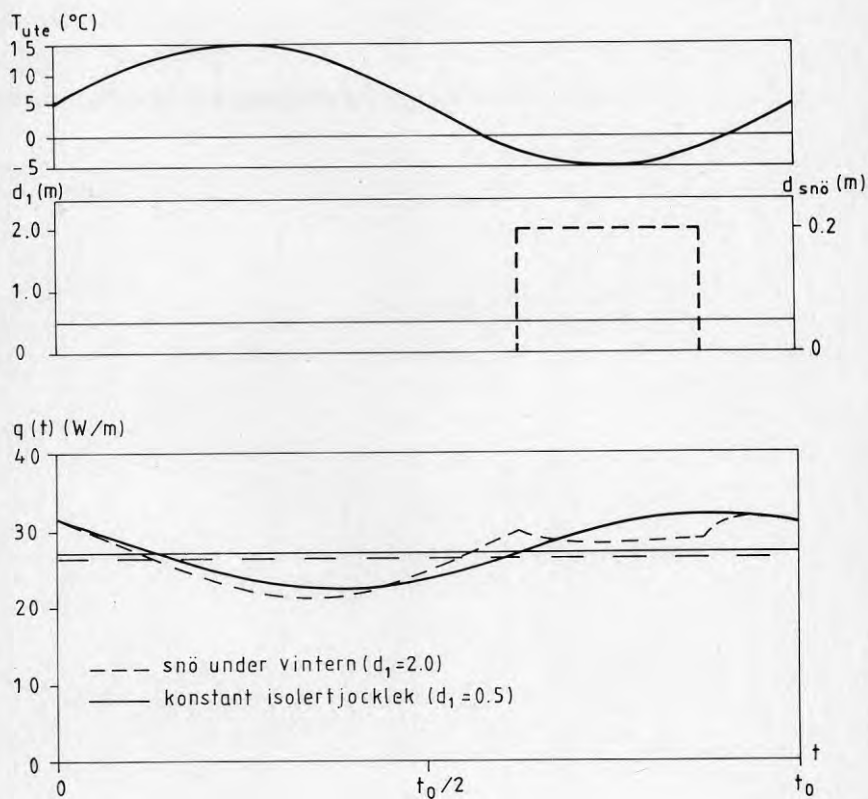
$$q(t) = \lambda(T_i - T_0) \cdot h_s(d/B, d_1/d) - 2\lambda T_1 \cdot \left| h_p^1(d/d_0, d_1/d) \right| \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - \phi_p^1)) \quad (\text{W/m}) \quad (11.2.4)$$

Den periodiska delens värmeförlustfaktor ges av figur 5.3.6. Den stationära värmeförlustfaktorn  $h_s(d/B, d_1/d)$  har tidigare ej beräknats för fallet med isolering vid markytan.

För detta speciella fall erhålls  $h_s(3/8, 0.5/3) = 1.21$ . Med data enligt (11.0.2) blir värmeförlusten (11.2.4):

$$q(t) = 27.3 - 4.9 \cdot \sin(2\pi(t/t_0 - 0.13)) \quad (\text{W/m}) \quad (11.2.5)$$

Denna värmeförlust visas i figur 11.2.2 av heldragen kurva. Den streckade kurvan anger värmeförlusten för fallet med snö enligt figur 11.2.1.



Figur 11.2.2 Värmeförlust med snö och med en över året konstant isolering vid markytan. Data enligt (11.0.2), (11.1.1), (11.2.2) och (11.2.3). De två horisontella linjerna i nedre figurdelen anger årsmedelvärdet.

Den största skillnaden i värmeförlust för fallen med snö och med en över året konstant isolering är 10%. I årsmedelvärdet är skillnaden 2% och i den under elningssäsongen ackumulerade värmeförlusten 1%.

Ovanstående exempel visar att en hygglig approximation av värmeförlusten erhålles genom att försumma snön. Den ackumulerade värmeförlusten blir 10 % för hög för exemplet ovan. För att få en bättre app-

roximation beräknas värmeförlusten då markytan har en under året konstant isolering. Denna ges av årsmedelvärdet av snöns ekvivalenta isolertjocklek. Den periodiska delen av värmeförlusten kan då beräknas enligt (11.2.4) och figur 5.3.6. Värmeförlustfaktorn för den stationära komponenten, då markytan har ett ytmotstånd ( $d_1 > 0$ ) ges ej i rapporten. Den kommer att ges i en planerad senare rapport. Med det givna beräkningsreceptet blir felet i den under eldningssäsongen ackumulerade värmeförlusten någon procent för exemplet ovan. Felet i värmeförlustens momentana värden är maximalt ca 10%.

## BETECKNINGAR

Variabler med olika index

Beteckning	Definition	Dimension
h	dimensionslös värmeförlustfaktor	(-)
q	värmeförlust för tvådimensionellt tvärsnitt ( $q_n$ anger värmeflödet i normalriktningen ( $W/m^2$ ))	(W/m)
Q	värmeförlust för tredimensionellt fall	(W)
T	temperatur	( $^{\circ}C$ )
nedre index:	n i normalriktning	
	p periodiskt förlopp	
	s stationärt förlopp	
	t förlopp vid temperatursteg	
	tb förlopp vid uppbyggnad av värmekudde ( <u>t</u> hermal <u>b</u> uild-up)	
påbyggt nedre index:	-e <sup>-</sup> värmeförlust för kant utöver endimensionellt bidrag	
	-o endimensionellt fall	
övre index:	e netto extra värmeförlust för kant orsakad av kantisolering	
	o markytan saknar värmeövergångsmotstånd	
	1 markytan har ett värmeövergångsmotstånd	
	' kanten har extraisolerats	
Exempel:	$T_p$ temperatur vid periodiskt förlopp ( $^{\circ}C$ )	
	$q'_s$ stationär värmeförlust för ett tvådimensionellt tvärsnitt då kanten är extraisolerad (W/m)	
	$h^o_{tbe}$ värmeförlustfaktor för kant utöver det endimensionella bidraget under uppbyggnad av värmekudde då markytan saknar värmeövergångsmotstånd (-)	
	$h^e_s$ stationär kantvärmeförlustfaktor för extra värmeförlust orsakad av extra kantisolering (-)	

Beteckning	Ekvation/Figur	Definition (dimension)	
a		värmediffusivitet	(m <sup>2</sup> /s)
A		byggnadens area mot marken	(m <sup>2</sup> )
B	figur 3.0.1	byggnadens bredd	(m)
C	$\lambda/a$	värme kapacitet per volymenhet	(J/m <sup>3</sup> K)
d	2.2.4	ekvivalent isolertjocklek	(m)
d'	figur 4.1.1-2 2.2.4	ekvivalent isolertjocklek för extraisolering vid kant	(m)
d <sub>0</sub>	2.4.18	inträngningsdjup för periodiskt varierande utetemperatur	(m)
d <sub>1</sub>	2.2.8	ekvivalent isolertjocklek vid markytan	(m)
d <sub>3</sub>	8.1.1	inträngningsdjup för periodiskt varierande innetemperatur	(m)
d <sub>i</sub>	2.2.1	isolertjocklek	(m)
d <sub>snö</sub>		snötäcket tjocklek	(m)
e <sub>t</sub>	2.5.9	dimensionslös faktor vilken anger ackumulerad värmeförlust orsakad av stegändring i utetemperaturen	(-)
e <sub>tb</sub>	2.6.9 tabell 7.2.2	dimensionslös faktor vilken anger ackumulerad värmeförlust utöver den stationära vid uppbyggnad av värmekudde	(-)
E <sub>t</sub>	2.5.7	ackumulerad värmeförlust orsakad av stegändring i utetemperaturen	(J)
E <sub>tb</sub>	2.6.7	ackumulerad värmeförlust utöver den stationära värmeförlusten vid uppbyggnad av värmekudde	(J)
erfc(x)	6.1.4	den komplementära felfunktionen	(-)
E <sub>y</sub>	9.2.4	ackumulerad värmeförlust över eldningssäsongen	(J) (J/m)
h		dimensionslös värmeförlustfaktor	(-)
h <sub>p</sub> <sup>o</sup>	figur 5.3.3	värmeförlustfaktor för periodiskt varierande utetemperatur för kant då markytan saknar värmeövergångsmotstånd	(-)
h <sub>s</sub>	figur 3.1.1	värmeförlustfaktor för stationär process	(-)
h <sub>t</sub> <sup>o</sup>	figur 6.2.2	värmeförlustfaktor för stegändring i utetemperatur för kant då markytan saknar värmeövergångsmotstånd	(-)
H	2.1.8	stegfunktion	(-)
L	figur 3.0.1	byggnadens längd	(m)



$L_e$	rektangulär platta: $L_e = 2L + 2B$	byggnadens totala kantlängd	(m)
$q$		värmeförlust för tvådimensionellt tvärsnitt	(W/m)
$q_n$		värmeflödet i normalriktningen $\hat{n}$ i en punkt	(W/m <sup>2</sup> )
$Q$		värmeförlust för tredimensionellt fall	(W)
$t$		tid	(s)
$t_0$		periodtid för periodiskt varierande utetemperatur	(s)
$t_1$	figur 9.1.1	starttid för temperaturpuls utomhus	(s)
$t_2$	"-	varaktighet för temperaturpuls utomhus	(s)
$t_3$		periodtid för periodiskt varierande innetemperatur	(s)
$t_4$		varaktighet för temperaturpuls inne	(s)
$t_a$		starttid för eldningssäsong	(s)
$t_b$		sluttid för eldningssäsong	(s)
$t_s$		starttid för temperaturpuls inne	(s)
$T$		temperatur	(°C)
$\hat{T}$		komplexvärd temperaturfaktor vilken ger temperaturens amplitud och fasläge	(°C)
$T_0$		medelvärde för utetemperatur	(°C)
$T_i$		innetemperatur	(°C)
$T_1$		amplitud för periodiskt varierande utetemperatur	(°C)
$T_2$		storlek på temperaturpuls utomhus	(°C)
$T_3$		amplitud för periodiskt varierande innetemperatur	(°C)
$T_4$		storlek på temperaturpuls inne	(°C)
$T_{ute}$		utetemperatur	(°C)
$U$	2.3.1	dimensionslös temperatur	(-)
$u_m$	avsnitt 3.2	dimensionslös storhet för ekvivalent marktjocklek	(-)
$x$	figur 3.0.1	horisontell koordinat	(m)
$x'$		skalad horisontell koordinat	(-)
$y$	figur 3.0.1	horisontell koordinat	(m)
$y'$		skalad horisontell koordinat	(-)

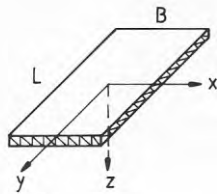
$z$	figur 3.0.1	vertikal koordinat	(m)
$z'$		skalad vertikal koordinat	(-)
$\alpha$	2.2.6	värmeövergångstalet vid markytan	(W/m <sup>2</sup> K)
$\phi_p^0$	5.3.3 figur 5.3.3	fasfördröjning för periodiskt varierande värmeförlust då markytan saknar värmeövergångsmotstånd	(-)
$\phi_p^1$	figur 5.3.6	fasfördröjning för periodiskt varierande värmeförlust då markytan har ett värmeövergångsmotstånd	(-)
$\lambda$	2.2.1	markens värmeledningsförmåga	(W/mK)
$\lambda_i$	2.2.1	isoleringens värmeledningsförmåga	(W/mK)
$\lambda_{\text{snö}}$		snöns värmeledningsförmåga	(W/mK)
$\tau$	$\sqrt{at/d}$	dimensionslös tid	(-)

## REFERENSER

1. Claesson, Eftring: Optimal Distribution of Thermal Insulation and Ground Heat Loss. Document D33:1980. Swedish Council for Building Research. 1A: sid 63, 1B: sid 65, 1C: kapitel 6, 1D: sid 28, 1E: appendix, (A16).
2. Carslaw, Jaeger: Conduction of Heat in Solids. Oxford 1959. 2A: avsnitt 16.6, 2B: avsnitt 2.7, 2C: avsnitt 2.6.
3. Claesson, Hagentoft, Wallin: Heat Loss at the Edge of a Thermally Insulated Slab on the Ground. Wiener-Hopf Solution for Periodic and Transient Air Temperature. Notes on Heat Transfer, 1. (Div of Building Technology, Lund Institute of Technology, 1985).
4. Claesson, Hagentoft: Thermal Resistance Distribution over the Boundary According to a Heat Loss Theorem. Notes on Heat Transfer 4. (Div of Building Technology, Lund Institute of Technology, 1985)
5. Anderlind: Approximation of Monthly Mean Temperatures by Using Fourier Series. Report BKL 1984:1 (E). Byggnadskonstruktionslära, Lunds Tekniska Högskola.
6. Hagentoft: Semi-Analytical Methods to Calculate the Temperature under a Thermally Insulated Slab on the Ground. Notes on Heat Transfer, 2. (Div of Building Technology, Lund Institute of Technology, 1985).
7. Hagentoft: Temperature under a Totally Insulated Slab on the Ground due to Variable Ground Surface Temperature. Notes on Heat Transfer, 3. (Div of Building Technology, Lund Institute of Technology, 1985).

Appendix 1. Ekvationer, superponering och skalning för rektangulär platta på mark.

Plattan har längden  $L$  och bredden  $B$ . Värmeisoleringen har den ekvivalenta tjockleken  $d$ . Se avsnitt 2.2. Värmemotståndet vid markytan försummas ( $d_1 = 0$ ). Marken har värmeledningsförmågan  $\lambda$  och temperaturledningstalet  $a$ . Geometri och koordinater ges av figur A1.1.



Figur A1.1 Platta på mark.

Temperaturen i marken,  $T(x,y,z,t)$ , skall uppfylla värmeledningsekvationen:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad z > 0 \quad (\text{A1.1})$$

Stationär och periodisk process

Randvillkoren vid markytan och plattan blir i detta fall:

$$T_i = T - d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{vid plattan} \quad (z = 0, |x| < B/2, |y| < L/2) \quad (\text{A1.2})$$

$$T = T_0 + T_1 \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad \text{vid markytan utanför plattan}$$

Genom superponering uppdelas temperaturen  $T$  i en stationär och en periodisk del.

$$T(x,y,z,t) = T_s(x,y,z) + T_p(x,y,z,t) \quad (\text{A1.3})$$

Den stationära delen skall uppfylla:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} = 0 \quad z > 0 \quad (\text{A1.4})$$

$$z = 0: \begin{cases} T_i = T_s - d \frac{\partial T_s}{\partial z} & \text{vid plattan} \\ T_s = T_o & \text{utanför plattan} \end{cases} \quad (\text{A1.5})$$

Den periodiska delen skall uppfylla:

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T_p}{\partial t} \quad z > 0 \quad (\text{A1.6})$$

$$z = 0: \begin{cases} 0 = T_p - d \frac{\partial T_p}{\partial z} & \text{vid plattan} \\ T_p = T_1 \cdot e^{2\pi i t / t_o} & \text{utanför plattan} \end{cases} \quad (\text{A1.7})$$

Randvillkoret vid marken utanför plattan tas komplexvärt. Den periodiska processen löses i komplexvärd form.

#### Skalning för stationär del

Dimensionslös temperatur  $U$  ges av formel 2.3.1. Längdkoordinaterna skalas med bredden  $B$ :

$$x' = \frac{x}{B} \quad y' = \frac{y}{B} \quad z' = \frac{z}{B} \quad (\text{A1.8})$$

$$T_s(x, y, z) = T_o + (T_i - T_o) \cdot U\left(\frac{x}{B}, \frac{y}{B}, \frac{z}{B}\right) \quad (\text{A1.9})$$

Dimensionslös, skalad temperatur  $U(x', y', z')$  skall uppfylla (A1.4-5). Detta ger:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial (y')^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial (z')^2} = 0 \quad z' > 0 \quad (\text{A1.10})$$

$$z' = 0 \quad \begin{cases} 1 = U - \frac{d}{B} \cdot \frac{\partial U}{\partial z'} & |x'| < \frac{1}{2}, \quad |y'| < \frac{L}{2B} \\ U = 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \quad (\text{A1.11})$$

Lösningen  $U$  till (A1.10-11) blir en funktion av  $x'$ ,  $y'$  och  $z'$  med två parametrar  $L/B$  och  $d/B$ .

Den stationära värmeförlusten  $Q_s$  ges av en integral över plattan:

$$Q_s = \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-B/2}^{B/2} dx (-\lambda) \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, 0) \quad (\text{A1.12})$$

En övergång till koordinaterna  $x'$  och  $y'$  och utnyttjande av (A1.9) ger:

$$Q_s = \int_{-L/(2B)}^{L/(2B)} B \cdot dy' \int_{-1/2}^{1/2} B \cdot dx' (-\lambda) (T_i - T_0) \frac{\partial U}{\partial z'}(x', y', 0) \cdot \frac{1}{B} \quad (\text{A1.13})$$

Detta uttryck kan skrivas:

$$Q_s = \lambda (T_i - T_0) L \cdot h_s \quad (\text{A1.14})$$

, där  $h_s$  ges av:

$$h_s = \frac{B}{L} \cdot \int_{-L/(2B)}^{L/(2B)} dy' \int_{-1/2}^{1/2} dx' (-) \frac{\partial U}{\partial z'}(x', y', 0) \quad (\text{A1.15})$$

Funktionen  $U$  beror av parametrarna  $L/B$  och  $d/B$ . Värmeförlustfaktorn  $h_s$  enligt (A1.15) blir således en funktion av dessa variabler:

$$h_s = h_s(L/B, d/B) \quad (\text{A1.16})$$

#### Skalning av periodisk del

Den periodiska lösningen skall uppfylla (A1.6-7). Randtemperaturen är given i komplexvärd form. Den komplexvärda temperaturen ges, enligt formel 2.4.1, av:

$$T_p = \hat{T}(x, y, z) \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (\text{A1.17})$$

Insättning av detta uttryck i (A1.6) ger ekvation 2.4.20 för den komplexa funktionen  $\hat{T}$ :

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} = \frac{2\pi i}{at_0} \hat{T} = \left(\frac{1+i}{d_0}\right)^2 \hat{T} \quad (\text{A1.18})$$

Temperaturen  $\hat{T}$  skalas med temperaturen  $T_1$ . Koordinaterna skalas med  $d_0$ :

$$\hat{T}(x, y, z) = T_1 \cdot \hat{U}(x', y', z') \quad (\text{A1.19})$$

$$x' = \frac{x}{d_0} \quad y' = \frac{y}{d_0} \quad z' = \frac{z}{d_0} \quad (\text{A1.20})$$

Den dimensionslösa temperaturen  $\hat{U}$  skall nu uppfylla:

$$z' > 0 \quad \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial (y')^2} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial (z')^2} = (1+i)^2 \hat{U} \quad (\text{A1.21})$$

$$z' = 0 \quad \begin{cases} 0 = \hat{U} - \frac{d}{d_0} \frac{\partial \hat{U}}{\partial z'} & |x'| < \frac{B}{2d_0}, |y'| < \frac{L}{2d_0} \\ \hat{U} = 1 & \text{f.ö.} \end{cases} \quad (\text{A1.22})$$

Problemet (A1.21-22) innehåller tre parametrar:

$$\frac{L}{d_0}, \frac{B}{d_0}, \frac{d}{d_0} \quad (\text{A1.23})$$

Det periodiska värmeflödet genom plattan blir:

$$Q_p = \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-B/2}^{B/2} dx \cdot (-\lambda) \frac{\partial T_p}{\partial z}(x, y, 0) \quad (\text{A1.24})$$

Uttrycket är analogt med formel A1.12 för det stationära fallet. Vid övergång till dimensionslösa koordinater erhålls faktorn  $d_0 \cdot d_0 \cdot 1/d_0 = d_0$ . Temperaturen  $T_p$  ersätts med  $\hat{U}$  enligt (A1.19) och (A1.17). Analogt med det stationära fallet erhålls, då längdfaktorn  $L_s$  är lika med plattans totala kantlängd  $2L + 2B$ :

$$Q_p = -\lambda T_1 \cdot (2L + 2B) \cdot h_p \cdot e^{2\pi i t / t_0} \quad (\text{A1.25})$$

$$h_p = \frac{d_0}{2L+2B} \cdot \int_{-L/(2d_0)}^{L/(2d_0)} dy' \cdot \int_{-B/(2d_0)}^{B/(2d_0)} dx' \cdot \frac{\partial \hat{U}}{\partial z'}(x', y', 0)$$

Integranden och integrationsgränserna beror på de tre parametrarna (A1.23). Således gäller för den periodiska värmeförlustfaktorn  $h_p$  för en platta på mark:

$$h_p = h_p(L/d_0, B/d_0, d/d_0) \quad (\text{A1.26})$$

Formlerna A1.25-26 ger tillsammans (2.4.25).

#### Uppbyggnad av värmekudden

Förutsättningarna för den renodlade uppbyggnaden av värmekudden under en platta på mark illustreras i figur 2.1.5. Begynnelsestemperaturen i marken är  $T_0$ . Vid markytan utanför plattan är temperaturen  $T_0$ .



Temperaturen  $T(x,y,z,t)$  för denna transienta värmeuppbyggnad skall uppfylla:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad z > 0, t > 0 \quad (\text{A1.27})$$

Begynnelsevillkoret är:

$$T(x,y,z,0) = T_0 \quad z > 0 \quad (\text{A1.28})$$

Randvillkoren vid markytan är:

$$z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} T_i = T - d \cdot \frac{\partial T}{\partial z} & |x| < B/2, |y| < L/2 \\ T = T_0 & \text{f.ö.} \end{array} \right. \quad (\text{A1.29})$$

Bredden  $B$  användes för skalning:

$$x' = \frac{x}{B} \quad y' = \frac{y}{B} \quad z' = \frac{z}{B} \quad (\text{A1.30})$$

Dimensionslös tid definieras av:

$$t' = \frac{at}{B^2} \quad (\text{A1.31})$$

Den dimensionslösa temperaturen  $U$  definieras av:

$$T(x,y,z,t) = T_0 + (T_i - T_0)U(x',y',z',t') \quad (\text{A1.32})$$

Värmeledningsekvationen (A1.27) blir för  $U$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial (y')^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial (z')^2} = \frac{\partial U}{\partial t'} \quad z' > 0, t' > 0 \quad (\text{A1.33})$$

Begynnelsevillkoret (A1.28) blir:

$$U(x',y',z',0) = 0 \quad z' > 0 \quad (\text{A1.34})$$

Randvillkoren (A1.29) blir:

$$z' = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = U - \frac{d}{B} \cdot \frac{\partial U}{\partial z'} \quad |x'| < \frac{1}{2}, \quad |y'| < \frac{L}{2B} \\ U = 0 \quad \text{f.ö.} \end{array} \right. \quad (\text{A1.35})$$

Problemet (A1.33-35) för  $U(x', y', x', t')$  innehåller de två parametrarna  $L/B$  och  $d/B$ . Den transienta värmeförlusten  $Q_{tb}$  ges av en integral av typen (A1.24) och (A1.12). Övergång till dimensionslösa koordinater ger ett uttryck av typen (A1.13). Enda skillnaden är att  $U$  nu också beror av  $t'$ . I analogi med (A1.12-16) erhålls:

$$Q_{tb}(t) = \lambda(T_i - T_o)L \cdot h_{tb} \quad (\text{A1.36})$$

, där  $h_{tb}$  ges av integralen

$$h_{tb} = \frac{B}{L} \cdot \int_{-L/(2B)}^{L/(2B)} dy' \cdot \int_{-1/2}^{1/2} dx' (-) \frac{\partial U}{\partial z'}(x', y', 0, t') \quad (\text{A1.37})$$

Funktionen  $U$  beror av parametrarna  $L/B$  och  $d/B$ . Värmeförlustfaktorn  $h_{tb}$  beror således av dessa och av dimensionslös tid:

$$h_{tb} = h_{tb}\left(\frac{at}{B^2}; \frac{L}{B}, \frac{d}{B}\right) \quad (\text{A1.38})$$

Den integrerade extra värmeförlusten utöver stationär del definieras allmänt av formel 2.6.7. Formlerna A1.36, -38, -14, -16 ger då:

$$E_{tb}(t) = \lambda(T_i - T_o)L \cdot \int_0^t \left[ h_{tb}\left(\frac{at''}{B^2}; \frac{L}{B}, \frac{d}{B}\right) - h_s\left(\frac{L}{B}, \frac{d}{B}\right) \right] dt'' \quad (\text{A1.39})$$

Med substitutionen

$$t' = \frac{at''}{B^2} \quad dt'' = \frac{B^2}{a} dt' = \frac{B^2 C}{\lambda} dt' \quad (\text{A1.40})$$

erhålles då:

$$E_{tb}(t) = C(T_i - T_o)L B^2 \cdot e_{tb} \left( \frac{at}{B^2}; \frac{L}{B}, \frac{d}{B} \right) \quad (\text{A1.41})$$

Här ges den dimensionslösa faktorn  $e_{tb}$  av:

$$e_{tb} = \int_0^{at/B^2} \left[ h_{tb} \left( t', \frac{L}{B}, \frac{d}{B} \right) - h_s \left( \frac{L}{B}, \frac{d}{B} \right) \right] dt' \quad (\text{A1.42})$$

















**Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 811829-2  
från Statens råd för byggnadsforskning till Lunds Tekniska  
Högskola, Institutionen för byggnadsteknik, Lund.**

**R75: 1985**

**ISBN 91-540-4400-6**

**Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm**

**Art.nr: 6705075**

**Abonnemangsgrupp:  
W. Installationer**

**Distribution:  
Svensk Byggtjänst, Box 7853  
103 99 Stockholm**

**Cirkapris: 55 kr exkl moms**