



Det här verket har digitaliserats vid Göteborgs universitetsbibliotek och är fritt att använda. Alla tryckta texter är OCR-tolkade till maskinläsbar text. Det betyder att du kan söka och kopiera texten från dokumentet. Vissa äldre dokument med dåligt tryck kan vara svåra att OCR-tolka korrekt vilket medför att den OCR-tolkade texten kan innehålla fel och därför bör man visuellt jämföra med verkets bilder för att avgöra vad som är riktigt.

This work has been digitized at Gothenburg University Library and is free to use. All printed texts have been OCR-processed and converted to machine readable text. This means that you can search and copy text from the document. Some early printed books are hard to OCR-process correctly and the text may contain errors, so one should always visually compare it with the images to determine what is correct.



Rapport

R8:1973

TEKNISKA HÖGSKOLAN I LUND
SEKTIONEN FÖR VÄG- OCH VATTEN
BIBLIOTEKET

**Linjär programmering
— ett hjälpmedel vid
planering av bygg-
transporter**

**Yngve Hammarlund &
Ignacy Szemberg**

Byggforskningen

Linjär programmering – ett hjälpmedel vid planering av byggtransporter

Yngve Hammarlund
& Ignacy Szemberg

Under och efter andra världskriget har utvecklats en rad matematiska metoder avsedda att vara hjälpmedel i beslutssituationer. En klass av sådana metoder – den matematiska programmeringen – har funnit stor användning som hjälpmedel vid transportplanering.

Metodutvecklingen har gått mycket snabbt. Hur utvecklingen har skett och hur metoderna tillämpas i västvärlden kan följas i anglosachsisk litteratur. Hur metodutveckling och tillämpningar gestaltar sig i de östeuropeiska länderna är mindre känt. Metodfrågor och tillämpning inom byggtransportområdet i öststaterna har undersökts vid institutionen för byggnadsekonomi och byggnadsorganisation vid CTH. Denna undersökning har kompletterats med en praktikfallstudie, som visar hur matematisk programmering kan tillämpas som hjälpmedel hos en svensk byggmaterialproducent.

Av den matematiska programmeringen är det särskilt en gren – den linjära programmeringen – som praktiskt tillämpats när det gäller byggtransporter. I föreliggande rapport behandlas därför endast denna typ.

Rapporten är utformad så att den i första hand skall vara av värde för personer, praktiskt verksamma inom byggtransportområdet. Först i andra hand riktar den sig till optimeringsspecialister.

Problem

Vid matematisk programmering formuleras det problem som skall behandlas i matematisk form – en matematisk modell konstrueras. På denna modell, som har vissa bestämda egenskaper, appliceras speciella lösningsförfaranden. Med hjälp av dessa förfaranden bestäms en bästa lösning till problemet. Vid den linjära programmeringen, som står i centrum för intresset i denna rapport, är den matematiska modellen uppbyggd på visst sätt. Den innehåller enbart linjära samband.

Med byggtransporter förstås byggprocessens transporter i vidaste mening. Sålunda inbegrips transport av byggnadsmaterial och övriga byggtransporter, exempelvis transport av råmaterial till byggmaterialfabriker, transport av schaktmassor och rivningsmassor. Som transportfrågor uppfattas lokalisering och dimensionering av transport- och produktionsresurser.

Metoder

Före tillkomsten av matematisk programmering utvecklades ett flertal förfaranden för lösning av enklare transportproblem. Vissa av dessa förfaranden leder fram till en bästa, optimal, lösning på problemet. Andra metoder medger bestämning av en förmånlig men inte nödvändigtvis optimal lösning. I rapporten presenteras såväl några äldre optimeringsförfaranden som approximationsförfaranden.

De metoder som inledningsvis behandlas kan användas endast på problem med ett begränsat antal transportvägar. För lösning av problem med många möjliga transportvägar måste andra förfaranden tillämpas. En speciell typ av transportproblem med många transportvägar, men i övrigt med enkel uppbyggnad, det s.k. klassiska transportproblemet, kan representeras av ett enkelt linjärt program. För lösning av detta har ett flertal metoder utvecklats. Sådana metoder beskrivs i rapporten.

Det klassiska transportproblemet illustrerar en situation som sällan är uppfylld i praktiken. Det visar sig emellertid att en rad praktiska problem enkelt kan omformuleras till klassiska transportproblem, på vilka de presenterade lösningsförfarandena kan tillämpas. Rapporten ger ett flertal exempel på hur detta sker.

Praktiska transportuppgifter kan inte alltid omformuleras till klassiska transportproblem. Så är vanligtvis fallet om det föreligger restriktioner på transportvägarna, så att endast vissa kvantiteter kan transporteras utefter dessa. För sådana problem måste mera komplicerade lösningsmetoder tillämpas. I rapporten presenteras det mest kända lösningsförfarandet, den s.k. simplexalgoritmen.

Tillämpningar

Praktiska tillämpningar av de metoder som behandlats i metodavsnittet redovisas i rapporten i fem avsnitt. Varje sådant avsnitt inleds med en problembeskrivning och en diskussion om lösningsförfaranden. Tillämpningarna redovisas i form av praktikfall och tillämpningsexempel.

Bestämning av optimal transportplan

Problemtypen är exempel på ett klassiskt transportproblem. En produkt efterfrågas i vissa kända orter. Efterfrå-

Byggforskningen Sammanfattningar

R8:1973

Nyckelord:

transporter (DDR, Polen, Tjeckoslovakien, USSR m.fl.), byggtransporter, transportforskning, linjär programmering, simplex-algoritm

Rapport R8:1973 hänför sig till anslag E 618 från Statens institut för byggnadsforskning till Institutionen för byggnadsekonomi och byggnadsorganisation, CTH. Rapporten ingår i BFRs program för transportforskning som sammanhålls av BFRs transportnämnd.

UDK 69 002 71
65.012.122

SfB A
ISBN 91-540-2108-1

Sammanfattning av:

Hammarlund, Y & Szemberg, I, 1973, *Linjär programmering – ett hjälpmedel vid planering av byggtransporter. Metoder och tillämpningar i Östeuropa m.m.* (Statens institut för byggnadsforskning) Stockholm. Rapport R8:1973, 230 s., ill. 23 kr.

Rapporten är skriven på svenska med svensk och engelsk sammanfattning.

Distribution:

Svensk Byggtjänst
Box 1403, 111 84 Stockholm
Telefon 08-24 28 60

Grupp: produktion

gans storlek i varje ort är känd. Den totalt efterfrågade kvantiteten finns i andra orter. Tillgången i var och en av dessa orter är känd. Mellan samtliga tillgångsorter och efterfrågeorter finns transportvägar. Kostnaden att transportera en produktenhet är känd för varje sådan transportväg. Planeringsuppgiften består i att bestämma vilka kvantiteter som skall transporteras utefter de olika transportvägarna för att transportkostnaderna skall bli så låga som möjligt.

I rapporten redovisas ett praktikfall avseende bestämning av optimala transportplaner för cementförsörjning av Sibirien. Optimeringen görs med avseende på olika kriterier, transportarbete, transportkostnad o.s.v. Vidare genomförs en optimering för det fall man beaktar att olika cementkvaliteter kan substituera varandra.

I litteraturen redovisas åtskilliga exempel på bestämning av optimala transportplaner. I rapporten presenteras kortfattat exempel från ett flertal östeuropeiska länder.

Fördelning av resurser

Problemet är följande. Av ett visst resurslag finns ett flertal olika typer tillgängliga. De enskilda resurstyperna är mer eller mindre lämpade för de arbetsuppgifter som förekommer. Problemet är att fördela tillgängliga resurser på arbetsuppgifter så att totalkostnaden minimeras.

Problemtypen illustreras med ett exempel från Kiev. Ett transportföretag disponerar 535 fordon. Dessa skall under en viss planeringsperiod utnyttjas för transporter vid sju byggmaterialfabriker och sex andra större objekt. Dessutom skall ett 50-tal mindre objekt betjänas.

Fordonsparken består av 11 fordonstyper. Dessa typer kan i och för sig utnyttjas för vilken som helst av de aktuella uppgifterna. De är emellertid mer eller mindre lämpade för de enskilda uppgifterna. Planeringen består i att tilldela varje fordonstyp lämpliga arbetsuppgifter så att kostnaderna minimeras.

Ett annat exempel på tilldelning av resurser anges i rapporten. Problemet är att inom en koncern med 23 betongele-

mentfabriker åstadkomma en sådan produktspecialisering vid de enskilda produktionsställena att transport- och tillverkningskostnaderna minimeras.

Bestämning av optimala transportrutter

En vanligt förekommande uppgift i ett transportföretag är att lägga upp transportrutter för fordonsparken. Dessa måste läggas upp på ett sådant sätt att transportkostnaderna minimeras. Detta innebär att en avvägning måste ske mellan körningar med last och tomkörningar.

Bestämning av optimala transportrutter sker antingen som ett led i dimensioneringen av transportapparaten eller för ett optimalt utnyttjande av befintliga resurser.

I rapporten redovisas ett tillämpningsexempel, där optimeringen görs som ett led i resursdimensioneringen. I ett annat tillämpningsexempel presenteras en metod, utarbetad inom Comecon, för bestämning av optimala transportrutter med givna resurser. Avsnittet avslutas med en kortfattad presentation av tillämpningar i Sovjetunionen.

Lokalisering av resurser – en produkt-tillverkning

De tillämpningar som nämnts har i huvudsak avsett utnyttjande av befintliga resurser. Även vid dimensionering och lokalisering av nya produktionsresurser har linjär programmering befunnits vara ett gott hjälpmedel.

Problemet är att bestämma lokaliseringsort och teknisk lösning för nya produktionsanläggningar. Kapacitetsuppbbyggnaden kan på de enskilda orterna ske på i princip två olika sätt. Antingen kan kapaciteten byggas upp kontinuerligt eller också stegvis. Det senare är fallet exempelvis när man bygger cementugnar, där utbyggnaden måste ske med en hel ugn i taget.

I rapporten redovisas med tillämpningsexempel lösning av dels det kontinuerliga fallet och dels heltalsfallet.

Två större praktikfall presenteras. Det ena avser lokalisering och dimensionering av nya cementfabriker i Polen samt distributionsplanering för en femårsperiod. Det andra praktikfallet avser di-

mensionering och lokalisering av byggnadskeramisk industri i Kasachstan.

Lokalisering av resurser – flerprodukt-tillverkning

I föregående avsnitt behandlades det fall då endast en produkt tillverkas/efterfrågas. Problem rörande dimensionering och lokalisering av resurser för tillverkning av flera produktslag behandlas på likartat sätt.

Med tillämpningsexempel åskådliggörs hur denna problemtyp kan behandlas. En speciell modell för lokalisering av betongelementindustrin presenteras.

Praktikfall

Studien av hur linjär programmering utnyttjas i östeuropeiska stater har kompletterats med en praktikfallsstudie vid ett svenskt byggmaterialföretag.

Företaget tillverkar mineralullsprodukter av ett 10-tal typer. Produktionen sker vid tre produktionsställen. Vid dessa finns ett varierande antal tillverkningslinjer. De olika produkttyperna tar i olika grad den tillgängliga kapaciteten i anspråk.

Företagets försäljningsorganisation täcker hela landet, som är indelat i ett 70-tal försäljningsdistrikt. Transport från fabrik till avnämare sker med lastbil och järnväg.

I rapporten redovisas en undersökning som syftar till att bestämma hur tillverkningskapaciteten skall utnyttjas samt hur transportererna skall ske i olika efterfrågesituationer. Produktionsstälernas distributionsområden för olika produktslag bestäms.

För att framställningen skall bli så illustrativ som möjligt genomförs undersökningen i tre etapper, varvid de matematiska modellerna stegvis förfinas.

Litteratur

I rapporten redovisas, förutom den litteratur som legat till grund för rapporttexten, en utförligare bibliografi. Denna innehåller verk som behandlar metod- och tillämpningsfrågor inom transportområdet med tyngdpunkt på byggt transporter. Bibliografien omfattar uteslutande slavisk litteratur.

Linear programming of transport flows in the building industry

Yngve Hammarlund
& Ignacy Szemberg

The post-war period has seen the development of a number of mathematical methods designed to help us make decisions. One particular type of method — mathematical programming — has proved extremely useful in transport planning.

Rapid progress has been made in methods development. Just how development has taken place and how the methods are applied in the Western world is information which can be found in English-language publications. Less is known, on the other hand, about how methods are developed and applied in the countries of Eastern Europe. The Department of Building Economics and Production Organization at the Chalmers University of Technology in Gothenburg has therefore conducted a study of methods and their application in the transport sphere in east Europe. The survey material was supplemented by the results of practical work showing how mathematical programming can prove a great help to manufacturers of building materials in Sweden.

One branch of mathematical programming in particular — linear programming — has been used in planning transport of building materials. This present report is concerned only with this type of programming.

The report is primarily designed to be of use to persons actively engaged in the practical side of haulage in the building industry, and in particular for optimization experts.

Problems

Mathematical programming transforms problems on hand into mathematical terms; i.e. a mathematical model is constructed. Special procedures designed to obtain solutions are then superimposed on this model which has certain fixed properties. One of these procedures will then help determine the best solution to the problem. In the case of linear programming, the form which is the focal point of this report, the mathematical model is constructed in a particular way and entails linear relationships only.

In referring to building transport, we refer to the transport in its broadest sense involved in the building process. The term thus covers transportation of building materials and other forms of haulage, e.g. transport of raw materials to plants manufacturing materials for the building industry, transport of spoil or rubble from demolition sites. Location and dimensioning of transport and production resources are also included under the heading Transport Issues.

Methods

A number of different procedures for solving simpler transport problems were developed prior to the advent of mathematical programming. Some of these lead to the best, the optimum solution to the problem. Others, on the other hand, permit us to establish a favourable, but not necessarily optimum solution. The report touches on some older optimization procedures and on the approximation method.

The first group of methods discussed can only be used for problems involving a limited number of transport routes. Other approaches must be tried if the problem involves a large number of possible transport routes. A special type of transport problem covering many possible transport routes while remaining simple in other respects (known as the classical transport problem) can be represented by a simple linear programme. A number of methods have been evolved for solving this particular problem. Examples are given in the report.

The classical transport problem illustrates a situation which seldom occurs in practice. It has, however, been found that a number of practical problems can easily be transformed into classical transport problems to which the procedures for finding solutions can be applied. The report gives several examples of how this in fact takes place.

Practical transport data cannot always be transformed into classical transport problems. This is usually the cases when transport routes are subject to restrictions, e.g. only given quantities permitted etc. More complicated methods must be applied to find solutions to this category of problem. The report describes the most well known method, the simplex algorithm.

Application

Five sections of the report are devoted to description of the methods mentioned in the chapter on method. Each individual section begins by stating the problem and discussing possible approaches to solving it. This is followed by illustrations in the form of case studies and applied examples.

Determination of the optimum transport plan

The type of problem is an example of a classical transport problem. A product is asked for in a given number of known localities, the extent of the demand in each place being a known quantity. The total demand is spread over other places and the supply in each of these places is known. Transport links exist between all

National Swedish Building Research Summaries

R8:1973

Key words:

transport (East Germany, Poland, Czechoslovakia, U.S.S.R. and others), building material, transport research, linear programming, simplex-algorithm

Report R8:1973 has been financed through Grant E 618 from the Swedish Council for Building Research.

The report is part of the Swedish Building Research Council's transport research programme which is co-ordinated by the Council's Transport Committee.

UDC 69.002.71
65.012.122

SfB A
ISBN 91-540-2108-1

Summary of:

Hammarlund, Y & Szemberg, I, 1973, *Linjär programmering — ett hjälpmedel vid planering av byggtransporter. Metoder och tillämpningar i Östeuropa m.m.* Linear programming of transport flows in the building industry. Application of the method in a number of countries in Eastern Europe. (Statens institut för byggnadsforskning) Stockholm. Report R8:1973, 230 p., ill. 23 Sw. Kr. The report is in Swedish with Swedish and English summaries.

Distribution:

Svensk Byggtjänst
Box 1403, S-111 84 Stockholm
Sweden

places where supplies are available. The cost of transporting one unit of the product along each individual transport route is known. The task of the planner is thus to decide what quantities are to be moved along the different routes in order to keep transport costs as low as possible.

The report describes a true case where the optimum transport plans were to be drawn up for cement supplies in Siberia. Optimization is based on different criteria, work, transport costs and so on. Optimization is also resorted to in the cases where it is considered that different qualities of cement may be substituted.

Literature on the subject contains a number of examples of how optimum transport plans are selected. The report gives brief examples from a number of east European countries.

Distribution of resources

The problem is the following. Certain types of a certain category of resources are available. The individual types of resources are more or less suited to the work on hand. The problem is then to allocate available resources in a fashion which minimizes total costs.

This types of problem is illustrated by an example from Kiev. A haulage firm has 535 vehicles. During a given planning period these are to be used at seven plants manufacturing building materials and for six other major projects. Around 50 smaller projects are also to be supplied at the same time.

There are 11 different types of vehicle and all of these can in principle be used for any of jobs in question. They do however entail varying degrees of suitability for the individual tasks. Planning thus consists of allocating suitable jobs to each type of vehicle with a view to minimizing costs.

The report gives a further example of allocation of resources. The problem there is for a concern comprising 23 plants producing prefabricated concrete units to specialize in certain products at the individual plants in a manner which ensures minimization of transport and manufacturing costs.

Determining optimum transport routes

A common task for haulage firms is to draw up transport routes for their different types of vehicles. This must be done in a manner which minimizes transport costs and means that a balance must be achieved between runs with load and empty mileage.

Selection of the optimum transport routes is either included in work on dimensioning the entire transport setup or takes place to ensure optimum utilization of existing resources.

The report gives an applied example in which optimization is a link in the process of dimensioning resources. A further example presents a method developed by Comecon for determining optimum transport routes on the basis of given resources. The section concludes with a brief description of use in the Soviet Union.

Localization of resources — specialization in a single product

The examples given so far have mainly illustrated utilization of existing resources. However, linear programming has also proved to be a great help in dimensioning and locating new production resources.

The problem is to choose a location and a technical design for new production plants. Build-up of capacity in the individual places can in principle take place in two ways. Capacity can either be constantly increased or built up in stages. The latter is the procedure when building cement kilns in which case expansion consists of the addition of one kiln at a time.

The report presents examples of solutions to constant build up and stage-by-stage expansion.

Two major case studies are included. One of these concerns localization and dimensioning of new cement plants in Poland and planning of distribution for a five-year period. The other case study concerns dimensioning and localization of a plant in Kazakhstan producing ceramic goods for use in the building industry.

Localization of resources — diversified manufacture

The previous section deals with cases where only one product is manufactured/asked for. Problems involved in dimensioning and localizing resources for diversified manufacture are dealt with similarly.

The applied examples illustrate how problems of this type can be tackled. A special model for localization of the prefabricated concrete products industry is presented.

Case studies

The study of how linear programming is utilized in Eastern Europe was supplemented by a case study conducted at a Swedish firm manufacturing building materials.

The firm manufactures mineral wool products of around ten different types with plants in three separate places. These plants have varying numbers of production lines. The different types of product take the available resources into account to varying degrees.

The firm's sales organization covers the entire country which it has divided into around 70 sales districts. Transport of products from factory to customer takes place by road and rail.

The report shows the results of a study designed to establish how manufacturing capacity is to be utilized and how transport is to be organized for different cases of demand. The zones for different types of product served by the different plants are established.

The study takes place in three phases in order to illustrate the subject as thoroughly as possible and this in its turn permits gradual improvement of the mathematical models.

Other publications

In addition to the literature referred to, the report also includes a detailed bibliography covering works dealing with methods and application in the transport field with the emphasis on transport in the building industry. The bibliography is made up exclusively of references to works in the Slavonic languages.

Rapport R8: 1973

LINJÄR PROGRAMMERING - ETT HJÄLPMEDEL VID
PLANERING AV BYGGTRANSPORTER

Metoder och tillämpningar i Östeuropa m.m.

LINEAR PROGRAMMING OF TRANSPORT FLOWS IN
THE BUILDING INDUSTRY

Application of the method in a number of
countries in Eastern Europe

av Yngve Hammarlund & Ignacy Szemberg

Denna rapport hänför sig till anslag E 618 från Statens
råd för byggnadsforskning till Institutionen för bygg-
nadsekonomi och byggnadsorganisation, CTH.

Rapporten ingår i BFRs program för transportforskning,
som sammanhålls av BFRs transportnämnd.

Statens institut för byggnadsforskning

ISBN 91 - 546 - 2108 - 1

Rotobekman Stockholm 1973

FÖRORD

Under och efter andra världskriget har en rad matematiska metoder utvecklats, vilka utnyttjas som hjälpmedel i beslutssituationer. En klass av sådana kvantitativa metoder utgör den s.k. matematiska programmeringen, MP. Denna bör kunna vara ett värdefullt hjälpmedel vid beslut som rör byggprocessens transporter.

Metodutveckling och tillämpningar av MP inom västvärlden kan följas i den anglosachsiska facklitteraturen. Däremot är det av språkliga skäl svårt att på motsvarande sätt följa utvecklingen i öststaterna. För att få överblick av hur MP tillämpas inom byggtransportområdet i dessa länder har en undersökning utförts vid institutionen för byggnadsekonomi och byggnadsorganisation, CTH. Resultatet av denna undersökning redovisas i denna rapport.

Eftersom endast en gren av MP, den s.k. linjära programmeringen, funnit en mera vidsträckt praktisk tillämpning inom byggtransportområdet har rapporten givits titeln "Linjär programmering - ett hjälpmedel vid planering av byggtransporter".

Rapporten är utformad på ett sådant sätt att en läsare utan specialkunskaper skall kunna tillgodogöra sig innehållet.

I utredningsarbetet har en arbetsgrupp inom institutionen engagerats. Denna arbetsgrupp har bestått av civ.ing., fil. kand. Hans Björnsson, universitetslektor Yngve Hammarlund, civ.ing., civ.ek. Åke Lindström och dipl.ing. Ignacy Szemberg.

Szemberg har varit utredningsman. Han har svarat för översättningsarbetet. De råöversättningar som utredningsmannen gjort har kompletterats och bearbetats inom arbetsgruppen. För ledning av undersökningen och för utformning av rapporten har Hammarlund svarat.

Lennart Rönmark

INNEHÅLL

| | | |
|-------|--------------------------------------------------------|----|
| 1 | PROBLEM | 9 |
| 1.1 | Linjär programmering | 9 |
| 1.2 | Byggtransporter | 11 |
| 1.3 | Matematisk programmering och byggtransporter | 14 |
| 1.4 | Linjär programmering och byggtransporter | 14 |
| 2 | METODER | 17 |
| 2.1 | Enkla förfaranden | 17 |
| 2.1.1 | Optimeringsförfaranden | 17 |
| | Eliminering av mötande transporter | 19 |
| | Cykeldifferenser | 21 |
| | Potentialmetod | 26 |
| 2.1.2 | Approximationsförfaranden | 30 |
| | Kartografisk metod | 31 |
| 2.2 | Det klassiska transportproblemet - matematiska metoder | 35 |
| 2.2.1 | Problemställning | 35 |
| 2.2.2 | Matematisk formulering | 37 |
| 2.2.3 | Matrisrepresentation | 38 |
| 2.2.4 | Lösningsförfarande | 40 |
| | Krav på baslöning | 41 |
| | Exakt metod 1. Cykelmetod | 42 |
| | Exakt metod 2. MODI | 45 |
| | Exakt metod 3. Metoder med "bestämmande värden" | 48 |
| | Approximationsmetod 1. Indexmetoder | 50 |
| | Approximationsmetod 2. Kotzigs approximationsmetod | 52 |
| 2.3 | Generella transportproblem - matematiska metoder | 54 |
| 2.3.1 | Algoritm med tidkriterium | 54 |
| | Problemillustration | 54 |
| | Algoritm | 55 |

| | | |
|-------|--------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.3.2 | Oblanserade transportproblem | 59 |
| | "Överkapacitet" | 59 |
| | "Kapacitetsbrist" | 61 |
| 2.3.3 | Flerstegs transportproblem | 62 |
| | Problemillustration | 62 |
| | Lösningsmetod 1. Schreiters approximationsförfarande | 63 |
| | Lösningsmetod 2. Simultanför- farande | 67 |
| 2.4 | Linjär programmering | 76 |
| 2.4.1 | Problemställning | 76 |
| 2.4.2 | Matematisk formulering | 77 |
| 2.4.3 | Lösningförfarande | 78 |
| 3 | TILLÄMPNINGAR | 79 |
| 3.1 | Bestämning av optimal transportplan | 80 |
| 3.1.1 | Problemet | 80 |
| 3.1.2 | Praktikfall. Cementförsörjning av Sibirien m.m. | |
| | Problem A - C | 80 |
| 3.1.3 | Övriga tillämpningar | 89 |
| | Sovjetunionen | 89 |
| | Tjeckoslovakien | 90 |
| | Polen | 91 |
| | DDR | 91 |
| | Sammanställning | 93 |
| 3.2 | Fördelning av resurser | 95 |
| 3.2.1 | Problemet | 95 |
| | Problemställning | 95 |
| | Matematisk formulering | 95 |
| | Lösning | 96 |
| 3.2.2 | Praktikfall. Fördelning av trans- portmedel på transportuppdrag | 98 |
| 3.2.3 | Övriga tillämpningar | 100 |
| 3.3 | Bestämning av optimala trans- portrutter | 102 |
| 3.3.1 | Problemet | 102 |
| | Problemställning | 102 |
| | Lösningförfarande | 102 |

| | | |
|-------|---------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3.2 | Tillämpningsexempel | 103 |
| | Underlag för resursdimensionering | 105 |
| | Utnyttjande av befintlig transport- apparat | 112 |
| 3.3.3 | Övriga tillämpningar | 121 |
| 3.4 | Lokalisering av resurser - enprodukt- tillverkning | 122 |
| 3.4.1 | Problemet | 122 |
| | Problemställning | 122 |
| | Kontinuerligt fall - lösnings- förfarande | 123 |
| | Heltalsvariant - lösningsför- farande | 124 |
| 3.4.2 | Tillämpningsexempel | 125 |
| | Exempel 1. Kontinuerligt fall | 125 |
| | Exempel 2. Heltalsvariant | 127 |
| | Exempel 3. Variabla tillverknings- kostnader | 131 |
| 3.4.3 | Praktikfall 1. Lokalisering av cement- fabrik | 135 |
| 3.4.4 | Praktikfall 2. Lokalisering av bygg- nadskeramisk industri | 143 |
| 3.4.5 | Övriga tillämpningar | 151 |
| 3.5 | Lokalisering av resurser - flerpro- dukttillverkning | 153 |
| 3.5.1 | Problemet | 153 |
| | Problemställning | 153 |
| | Matematisk formulering | 153 |
| | Lösning | 155 |
| 3.5.2 | Tillämpningsexempel | 155 |
| | Approximationsförfarande | 157 |
| | Simultanförfarande | 157 |
| 3.5.3 | Övriga tillämpningar | 161 |
| 4 | PRAKTIKFALL | 163 |
| 4.1 | Syftet | 163 |
| 4.2 | "Verkligheten" | 164 |

| | | |
|-----------|--------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3 | Problemställningar | 165 |
| 4.4 | Modeller och lösningar | 167 |
| 4.4.1 | Transportmodell - enhetlig produkt | 167 |
| | Optimering m.a.p. transportarbete - balanserat fall | 169 |
| | Optimering m.a.p. transportarbete - obalanserat fall | 171 |
| | Optimering m.a.p. transportkostnader - balanserat fall | 171 |
| | Optimering m.a.p. transportkostnader - obalanserat fall | 172 |
| 4.4.2 | Transportmodell - flera produktgrupper | 172 |
| | Optimering m.a.p. transportkostnader - balanserat fall | 172 |
| | Optimering m.a.p. transportkostnader - obalanserat fall | 174 |
| | Optimering m.a.p. transport- och till- verkningskostnader | 174 |
| 4.4.3 | Fördelningsmodell | 176 |
| 5 | LITTERATUR | 182 |
| 5.1 | Referenser | 182 |
| 5.2 | Bibliografi | 185 |
| BILAGOR 1 | DET KLASSISKA TRANSPORT- PROBLEMET - GRUNDALGORITM | 192 |
| 2 | SIMPLEXALGORITMEN | 207 |
| CAPTIONS | | 229 |

1. PROBLEM

I detta inledande kapitel söker vi klargöra innebörden av de begrepp som ingår i rapportens titel - "Linjär programmering - ett hjälpmedel vid planering av byggtransporter" .

Efter det att de grundläggande begreppen behandlats uppehåller vi oss vid syftet med den undersökning , vars resultat presenteras i rapporten . Kapitlet avslutas med en översiktlig presentation av rapportens innehåll .

1.1 Linjär programmering

Låt oss placera in det förfarande som benämns linjär programmering , LP , i ett större sammanhang .

Före och under andra världskriget skedde en mycket snabb militärteknisk utveckling . Denna kom under andra världskriget att ställa de krigförande parterna inför delvis nya taktiska och strategiska problem .

För att biträda de militära beslutsfattarna vid lösningen av komplicerade problem rekryterades vetenskapsmän . Dessa företrädde skilda kunskapsområden . De kom att i samverkan skapa underlag för beslut genom att applicera vetenskapliga metoder på de militära beslutsproblemen . Denna verksamhet som blev mycket betydelsefull har kommit att benämnas operationsanalys , OA .

Efter kriget återgick vetenskapsmännen till civil verksamhet . De förde med sig OA och applicerade den på komplexa problem inom näringsliv , förvaltning osv . Under efterkrigstiden har en mycket snabb utveckling skett inom OA-området . Härtill har de allt mer sofistikerade datamaskinerna starkt bidragit .

Vad är då karaktäristiskt för OA ? Vi har konstaterat att OA-verksamheten omfattar framtagande av beslutsunderlag med hjälp av vetenskapliga metoder . I naturvetenskaplig metodik spelar experiment en central roll ; man utför experiment för att

kunna dra slutsatser.

När det gäller beslutsproblem är möjligheten att utföra experiment på verkliga objekt liten. Man skapar i stället "modeller" av verkligheten. På dessa modeller genomförs experimenten.

Inom OA arbetar man med matematiska modeller; verkligheten representeras av matematiska symboler och samband.

Den vanliga arbetsgången vid OA är följande. I det första arbetssteget preciseras problemet, varvid beslutsfattarens mål bestäms.

Det andra steget i arbetet är att bygga upp en matematisk modell, som skall representera verkligheten. När modellen konstruerats utnyttjas den för lösning av problemet. Lösningen ger en anvisning om på vilket sätt beslutsfattarens mål på bästa sätt uppfylls.

Förutom dessa arbetssteg genomförs tester av att modellen på ett riktigt sätt representerar verkligheten.

Många beslutsproblem kan representeras av modeller med likartad uppbyggnad. Lösningen genomförs med likartad metodik. Sådana modeller och sådan metodik har utvecklats till självständiga discipliner. En av dessa discipliner är den matematiska programmeringen, MP.

Karaktäristiskt för MP är att problemet representeras av ett matematiskt program. Detta utgörs vanligtvis av en s.k. målfunktion och ett antal bivillkor. Målfunktionen representerar nyttan eller värdet av vidtagna åtgärder. Bivillkoren illustrerar de restriktioner som problemet är underkastat. MP - uppgiften är att finna en optimal lösning - den bästa möjliga lösningen på problemet.

Beroende dels på programmets uppbyggnad och dels på de lösningsförfaranden som kommer till användning skiljer man

på olika MP- förfaranden .

Det MP- förfarande som fått den största praktiska tillämpningen är den s.k. linjära programmeringen , LP. Denna karaktäriseras av att objektfunktion och bivillkor uttrycks i linjär form . För sådana problem har speciella lösningsförfaranden utvecklats .

LP har fått en vidsträckt användning vid lösning av blandningsproblem , produktionsplaneringsproblem , resurstilldelningsproblem osv .

Metoder för lösning av LP- problem , både sådana med enkel uppbyggnad och mera komplicerad behandlas utförligt i den fortsatta framställningen .

Bland övriga MP- förfaranden kan här nämnas följande .

Den icke - linjära programmeringen omfattar problem där programmets objektfunktion eller bivillkor inte har linjär form .

I den parametriska programmeringen undersöks lösningens beroende av programekvationernas parametervärden .

Heltalsprogrammeringen omfattar problem där variablerna endast kan anta heltalsvärden .

Med dynamisk programmering förstås metoder för framtagande av en optimal följd av beslut .

1.2 Byggtransporter

Med byggtransporter förstås byggprocessens transporter . Denna definition kräver en något utförligare kommentar .

Med transport avses förflyttning av människor , föremål , gaser och vätskor över någorlunda långa sträckor . Vid förflyttning kortare sträckor används andra termer såsom lyftning , pump-

ning osv .

All den verksamhet som leder fram till ett färdigt byggnadsverk innefattas i termen "byggprocess". Denna kan uppfattas som sammansatt av två flöden , dels ett idéflöde och dels ett materialflöde . Idéflödet resulterar i dokument av olika slag . Materialflödet resulterar i det färdiga byggnadsverket - en konkretisering av dokumentens innehåll .

"Materialflödet" kan uppdelas i olika faser - utvinning av råmaterial , förädling och inbyggnad . Dessa faser länkas samman med transporter - byggtransporter .

Inom byggprocessen transporteras olika typer av föremål . Schaktmassor och rivningsmassor transporteras bort för att ett nytt objekt skall kunna byggas . Transport av råmaterial sker till produktionsställen för att förädlas . Byggmaterial transporteras från fabriker av olika slag till byggarbetsplatser . Maskiner och annan utrustning som krävs för att uppföra objekten måste förflyttas .

De olika transporttyperna har särdrag . Därför är det lämpligt att indela byggtransporterna i "byggmaterialtransporter" och "övriga byggtransporter" .

Låt oss dröja något vid byggmaterialtransporterna . Benämningen i sig själv ger en anvisning om problemområdets avgränsning . Det bör innefatta all verksamhet från det materialet ligger färdigt på fabrik eller annat förädlingsställe till dess det befinner sig på sitt inbyggnadsställe .

Byggmaterialtransporterna brukar indelas i två huvudområden , externa transporter och interna . Med externa transporter förstås materialtransport till byggarbetsplats . De interna transportererna utgörs av transporter inom en byggarbetsplats .

Byggtransporter , definierade på det sätt som görs här , innefattar en mängd aktiviteter såsom lastning , lossning , förflyttning , lagring , inbystning . Dessa arbetsuppgifter påverk-

as direkt av en mångfald faktorer såsom materialets egenskaper , emballage , lastsammansättning , fordonstyp , maskinella hjälpmedel osv .

Transportuppgifterna påverkas emellertid inte enbart av sådana faktorer som nämnts . De intressenter som är engagerade i byggprocessen påverkar transportuppgifterna på olika sätt - genom planering , genom organisatoriska åtgärder , genom förändringar av de faktorer som tidigare nämnts och som direkt påverkar arbetsuppgifterna .

Byggtransporterna påverkas av åtgärder på olika nivåer i samhället . Vi kan tala om nationell , regional , lokal nivå , företagsnivå och objektnivå . Den påverkan som åstadkoms från de olika nivåerna bestäms av de mål som gäller för verksamheten på respektive nivå .

Ur nationell synpunkt är målet att byggtransporterna genomförs på ett sådant sätt att det gagnar samhället bäst . Om vi försöker konkretisera detta mål kan vi säga att byggtransporterna skall genomföras på ett sådant sätt att byggkostnaderna blir så låga som möjligt , när byggnaderna samtidigt skall uppfylla vissa kvalitetskrav . Byggtransporterna får sålunda inte betraktas isolerade - deras effekt på andra områden måste beaktas .

Intressenterna på övriga nivåer har varierande mål för sin verksamhet . Den nationella nivån måste påverka dessa på ett sådant sätt att de samverkar med samhällets mål .

De direkt engagerade intressenterna har att påverkan byggtransporterna så att deras mål i största möjliga utsträckning uppfylls . Detta sker på två olika sätt . Dels genom beslut om hur tillgängliga resurser skall utnyttjas och dels genom beslut om anskaffning och lokalisering av nya resurser .

Som exempel på den första typen av beslut kan nämnas följande . Hur skall egna transportmedel utnyttjas ? Vilka transportvägar skall väljas ? Hur skall tillgänglig produktionskapacitet

utnyttjas?

Exempel på den andra typen av beslut är följande. Var skall materialterminaler placeras? Var skall byggmaterialfabriker lokaliseras; vilken kapacitet skall de ha? Vilken fordonsinsats krävs för ett visst objekt?

1.3 Matematisk programmering och byggtransporter

Det är uppenbart att MP bör kunna vara ett värdefullt hjälpmedel för beslut som rör byggtransporter.

Någorlunda lätt kan man bilda sig en uppfattning om metodutveckling och tillämpningsområden inom västvärlden. Ett flertal tillämpningar finns sålunda presenterade i anglosaxisk litteratur.

Det kan förutsättas att man i de socialistiska länderna ägnar speciell uppmärksamhet åt de kvantitativa metoderna. För detta talar att man i en planhushållningsekonomi måste arbeta med system av stor komplexitet. Av språkliga skäl är det emellertid vanligtvis svårt att skapa sig en bild av utvecklingen.

För att belysa metodutveckling och tillämpningar inom byggtransportområdet i de socialistiska länderna genomförs den undersökning vars resultat redovisas i denna rapport.

För att belysa metodernas tillämpning på svenska förhållanden genomförs jämväl en praktikfallsstudie. Sålunda illustreras hur MP - metoder kan utnyttjas i beslutssituationer hos en svenskt byggmaterialtillverkare.

1.4 Linjär programmering och byggtransporter

Målet för undersökningen är att belysa hur MP tillämpas inom byggtransportområdet i de socialistiska länderna. I vår undersökning har vi konstaterat att, liksom i västvärlden, nästan uteslutande LP funnit praktisk tillämpning. Denna

rapport har därför fått titeln "Linjär programmering och byggtransporter".

Rapporten är utformad så att den i första hand skall vara av värde för personer praktiskt verksamma inom byggtransportområdet. Först i andra hand riktar den sig till specialister inom optimeringsområdet. Detta innebär att den rent matematiska framställningen i möjligaste mån begränsats. Vissa problem av matematisk karaktär har placerats i bilagor.

Som tidigare nämnts har datamaskinutvecklingen starkt bidragit till utvecklingen av MP. Visserligen kan smärre problem lösas manuellt men ofta utgör datamaskinen en förutsättning för att beräkningarna skall kunna genomföras med rimlig resursinsats. I denna framställning berörs endast undantagsvis frågan om huruvida beräkningarna i ett konkret fall skall utföras manuellt eller med maskinella hjälpmedel. Framställningen är sålunda i första hand metod - och tillämpningsinriktad.

Rapporten är sammansatt av fyra relativt självständiga delar.

I kapitlet Metoder presenteras sådana lösningsmetoder som befunnits särskilt väl lämpade för beslut som rör transporter. Vi behandlar inledningsvis vissa enkla metoder för att därefter övergå till olika matematiska metoder.

I kapitlet Tillämpningar presenteras olika typer av problem som är lämpade för behandling med LP. Vi behandlar transportplanering och fördelningsproblem. Vi uppehåller oss vid frågan om hur man på ett optimalt sätt skall lägga upp transportrutter. Slutligen belyser vi hur metoderna kan utnyttjas för lokalisering av produktionsmedel.

Kapitlet Praktikfall omfattar redovisning av en studie inom svensk byggmaterialtillverkning. Vi söker "pressa in verkligheten" i allt mer sofistikerade matematiska modeller för

att erhålla beslutsunderlag .

I kapitlet Litteratur ingår en bibliografi , som omfattar slavisk litteratur inom de problemområden som behandlas i rapporten .

2. METODER

I detta kapitel presenteras sådana beräkningsmetoder som befunnits särskilt ändamålsenliga för behandling av problem som uppträder i transportsammanhang.

Inledningsvis presenteras några enkla förfaranden. Presentationen utgör bakgrund till den fortsatta framställningen, där vi helt inriktar oss på metoder som brukar hänföras till MP.

Utförligt behandlas metoder som är särskilt utformade för lösning av det s.k. klassiska transportproblemet. Därefter belyses hur dessa metoder kan utnyttjas för mer komplicerade problem.

De metoder för lösning av det klassiska transportproblemet som behandlas är specialfall av det MP-förfarande som benämns linjär programmering, (LP). Vi uppehåller oss vid vad som karaktäriserar problem som kan behandlas med LP, samt vad som är utmärkande för metoden.

I framställningen har matematiska bevis tagits med endast i den utsträckning som krävs för att sammanhangen skall förstås. Den matematiska bakgrunden till de behandlade lösningsförfarandena presenteras separat i BIL. 1 och BIL. 2.

2.1 Enkla förfaranden

Före tillkomsten av matematisk programmering utarbetades ett flertal förfaranden för behandling av transportproblem. Flera av dessa "enkla förfaranden" finner fortfarande en vidsträckt användning. I det följande presenteras några sådana förfaranden. Vi behandlar dels förfaranden som ger en optimal lösning till ett problem och dels sådana som ger en förmanlig, men inte nödvändigtvis optimal, lösning.

2.1.1 Optimeringsförfaranden

För lösning av en rad praktiska problem med enkla förutsätt-

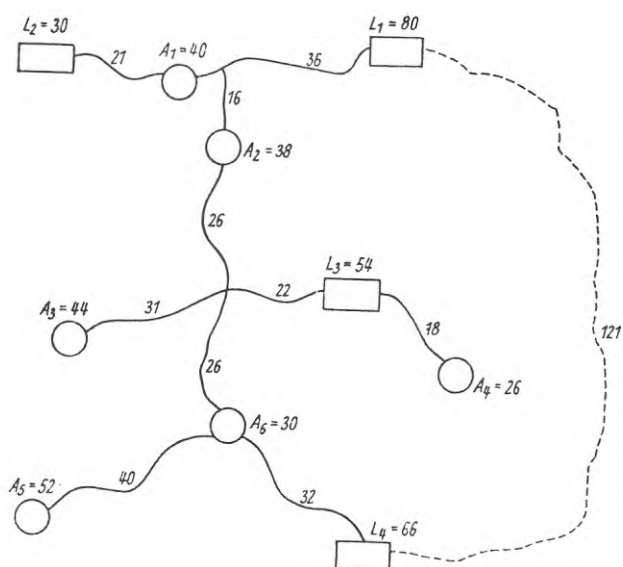


FIG. 1.1. Eliminering av mötande transporter 1. Utgångsförutsättningar.

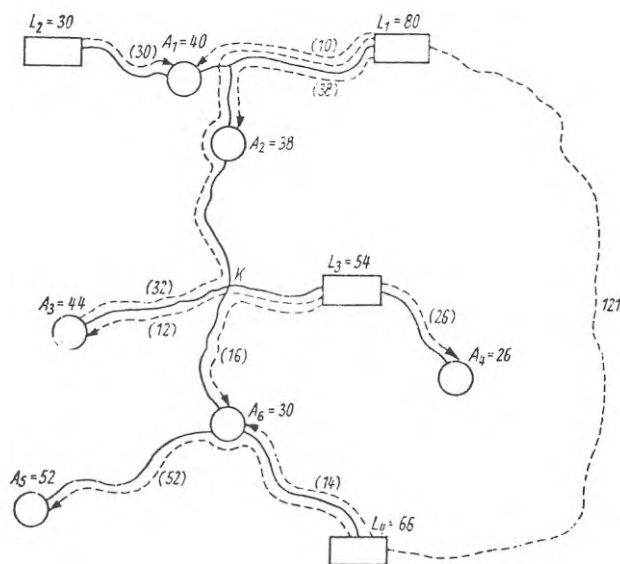


FIG: 1.2. Eliminering av mötande transporter 1. Optimal lösning.

ningar kan optimala lösningar erhållas med enkla förfaranden. Sådana förfaranden har presenterats av en rad slaviska författare. Följande framställning baseras dels på Kadlec & Vodáček (1968) och dels, vad avser avsnittet Potentialmetod på Kantorowicz (1961).

Eliminering av mötande transporter

Problemställning 1

Från de fyra orterna $L_1 - L_4$ skall vissa kvantiteter av en viss vara transporteras till de sex orterna $A_1 - A_6$.

Från L_1 skall sålunda transporteras 80 t, från L_2 30 t, från L_3 54 t och från L_4 66 ton. Totalkvantiteten 230 t skall fördelas på de sex orterna på följande sätt, A_1 40 t, A_2 38 t, A_3 44 t, A_4 26 t, A_5 52 t och A_6 30 t.

De enskilda orternas läge samt avstånden mellan dem framgår av FIG. 1.1. I figuren anges jämväl tillverkade resp. efterfrågade kvantiteter i de enskilda orterna.

Problemet är att bestämma längs vilka vägar transportererna skall ske för att minsta möjliga transportarbete (tonkm) skall uppkomma.

Lösningsförfarande 1

Problemet karaktäriseras av att vägar mellan leverans- och mottagningsorter inte bildar några slutna slingor. I ett sådant fall måste på varje vägavsnitt en bestämd kvantitet transporteras. En optimal lösning erhålls genom att transportererna arrangeras så att inga mötande transporter förekommer.

Lösningen görs lämpligen direkt i den grafiska representationen. En optimal lösning är angiven i FIG. 1.2. Det bör observeras att den lösning som anges i figuren endast är en av flera möjliga, som ger minsta transportarbete.

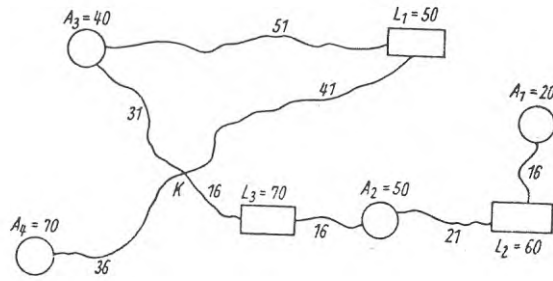


FIG. 2.1. Eliminering av mötande transporter 2. Utgångsförutsättningar.

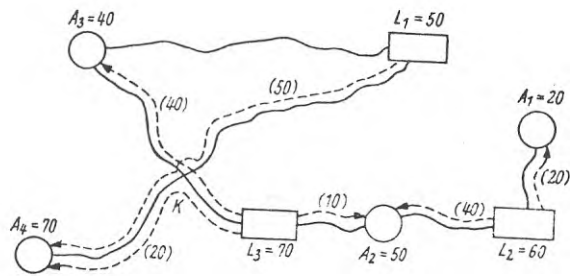


FIG. 2.2. Eliminering av mötande transporter 2. Utgångslösning.

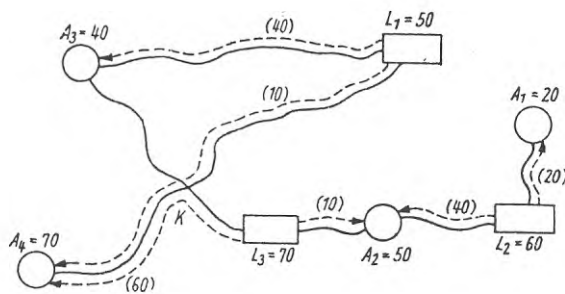


FIG. 2.3. Eliminering av mötande transporter 2. Optimal lösning.

Problemställning 2

Problemet är av samma karaktär som föregående. Dock finns i detta fall vägar som bildar en sluten slinga mellan leverans- och mottagarort.

Problemförutsättningarna framgår av FIG. 2.1.

Uppgiften är att arrangera transportererna så att minsta transportarbete erhålls.

Lösningsförfarande 2

Använder vi oss av lösningsförfarande 1 kan vi erhålla den lösning som framgår av FIG. 2.2. Det totala transportarbetet är i detta fall $50 \cdot 77 + 20 \cdot 16 + 40 \cdot 21 + 10 \cdot 16 + 40 \cdot 47 + 20 \cdot 52 = 8090$ tonkm.

Den funna lösningen är emellertid inte optimal. Mellan L_1 och A_3 kan nämligen transportererna ske på två sätt, antingen direkt eller via punkt K.

I detta fall erhålls en optimal lösning genom att regeln om att mötande transporter inte får förekomma kompletteras med att transportererna i slutna slingor skall ske utefter den kortaste av de alternativa vägarna.

Tillämpar vi de angivna reglerna på vårt exempel erhåller vi en optimal lösning av den typ som framgår av FIG. 2.3. Det totala transportarbetet uppgår i detta fall till 7250 tonkm.

Cykeldifferenser

Problemställning

I detta fall är leverans- och avnämningarorterna belägna utefter en väg som bildar en sluten slinga.

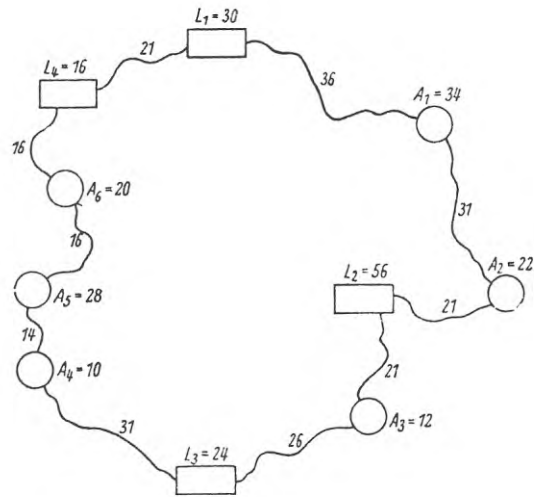


FIG. 3.1. Cykeldifferenser. Utgångsförutsättningar.

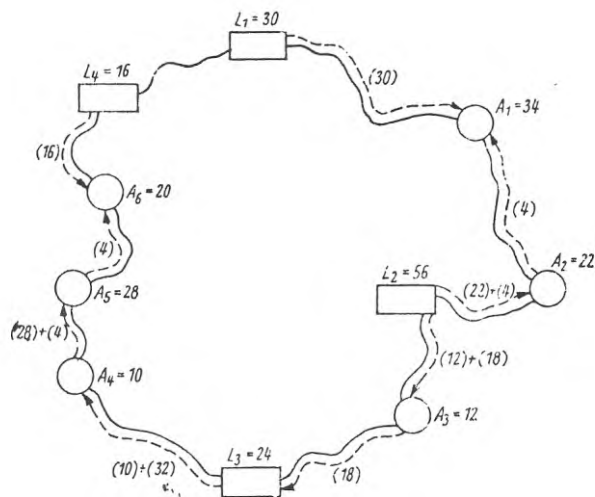


FIG. 3.2. Cykeldifferenser. Utgångslösning.

Orternas belägenhet, avstånden mellan dem samt tillverkade resp efterfrågade kvantiteter framgår av FIG. 3.1. Summan av levererade kvantiteter från leveranspunkterna $L_1 - L_4$ överensstämmer med summan av efterfrågade kvantiteter i orterna $A_1 - A_6$.

Problemet är att bestämma hur leveranserna skall genomföras för att minsta transportarbete skall uppkomma.

Lösningssöföfarande

Metoden innebär att man bestämmer en godtycklig lösning till problemet. Genom ett enkelt förfarande förbättras därefter lösningen stegvis.

Låt oss som utgångslösning välja en lösning, som baseras på regeln att inga mötande transporter får förekomma. En sådan lösning framgår av FIG. 3.2. I figuren anges inom parentes transporterade kvantiteter. Första talet anger kvantiteter, som transporteras till den avnämare som ligger närmast leverantören. Det andra talet anger kvantiteter, transporterade till längre bort belägna avnämare.

Sedan vi bestämt en utgångslösning måste vi undersöka om denna kan förbättras. Härvid utnyttjas problemets specifika förutsättningar, nämligen att levererade kvantiteter överensstämmer med efterfrågade samt att orterna är belägna utefter en sluten slinga. Om vi sålunda i utgångslösningen minskar den transporterade kvantiteten i ett visst vägavsnitt måste motsvarande minskning ske i alla vägavsnitt, där transporterna sker i samma riktning. Utefter vägar där transportriktningen är den motsatta eller där inga transporter förutsätts sker en motsvarande ökning. Dessa förändringar medför en förändring av transportarbetet inom de enskilda vägavsnitten.

Om sålunda i utgångslösningen den transporterade kvantiteten från L_1 till A_1 minskas med 1 t kommer det totala transportarbetet att förändras på följande sätt,

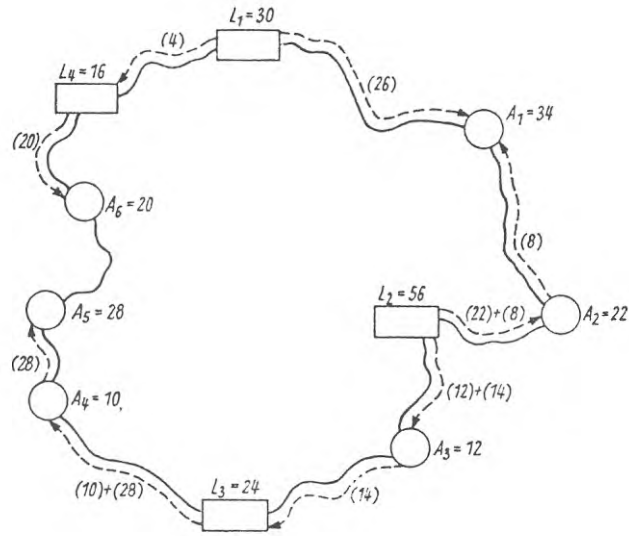


FIG. 3.3. Cykeldifferenser. Förbättrad lösning.

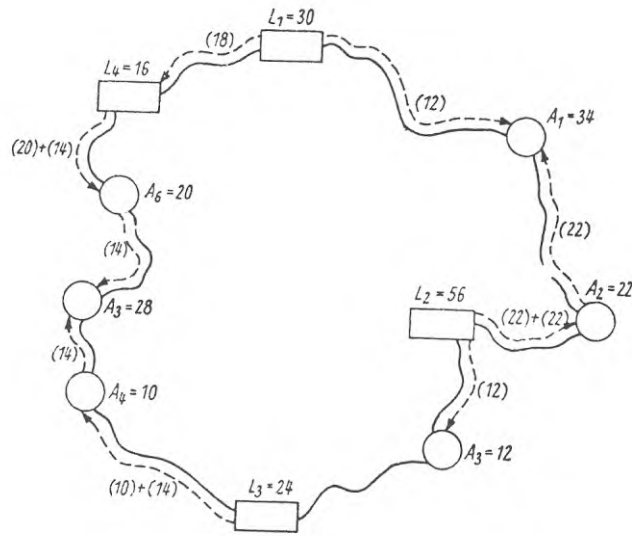


FIG. 3.4. Cykeldifferenser. Optimal lösning.

| minskningar i avsnitt | | ökningar i avsnitt | |
|--------------------------|-----------|-----------------------|-----------|
| L_1A_1 | 36 tonkm | A_1A_2 | 31 tonkm |
| L_2A_3 | 21 " | A_2L_2 | 21 " |
| A_3L_3 | 26 " | A_6L_4 | 16 " |
| L_3A_4 | 31 " | L_4L_1 | 21 " |
| A_4A_5 | 14 " | | |
| A_5A_6 | 16 " | | |
| Summa | | Summa | |
| minskningar | 144 tonkm | ökningar | 89 tonkm. |

Den angivna åtgärden resulterar i en minskning av transportarbetet med 144 tonkm och en samtidig ökning med 89 tonkm. För varje ton som ändrar transportriktning i cykeln sker sålunda minskning av transportarbetet om 55 tonkm. En förändring av utgångslösningen bör sålunda ske.

Av FIG. 3.2 framgår att minsta uppträdande kvantitet på avsnitt med "medsolsriktning" är 4 t (avsnitt A_5A_6). Denna kvantitet utgör den övre gränsen för förändringen inom avsnitt med samma transportriktning. En ny lösning bestäms i vilken 4 t förändrar transportriktning. Denna lösning illustreras av FIG. 3.3.

Kan den funna lösningen förbättras ytterligare? Vi konstaterar att den sammanlagda väglängden för transporter medsols uppgår till 128 km. Motsvarande värde för vägavsnitt med transporter i motsolsriktning är 89 km och utan transporter 16 km. En förändring av transportriktningen för 1 t ger sålunda en minskning av transportarbetet med $(128 - 89 - 16) \cdot 1 = 23$ tonkm. Av FIG. 3.3 framgår att den kvantitet som är begränsande uppgår till 14 t. I detta beräkningssteg ges 14 t en förändrad transportriktning. Lösningen framgår av FIG. 3.4.

Är denna lösning optimal? Vi konstaterar att sammanlagda väglängden för transporter medsols uppgår till 102 km och för transporter motsols 105 km. Outnyttjade vägar har en längd av 26 km.

En minskning av transporterade kvantiteter motsols med 1 t innebär en total ökning av transportarbetet om 29 tonkm ($102 - 105 - 26 = - 29$). En minskning av transporterade kvantiteter motsols med 1 t resulterar i en ökning av transportarbetet med 23 tonkm. Den funna lösningen är sålunda optimal.

Med ledning av vad som sagts kan optimalitetskriteriet formuleras på följande sätt: Då skillnaden mellan avståndssummorna för transporter i de båda riktningarna är mindre än summan av avstånden för sådana vägavsnitt där inga transporter sker är lösningen optimal.

Potentialmetod

Genom att kombinera de enkla förfaranden som beskrivits kan relativt komplicerade transportproblem lösas. Sådana kombinationsförfaranden är dock ofta mycket arbetskrävande.

För problem med godtyckliga transportförbindelser har en rad specialmetoder utarbetats. Den första matematiskt exakta lösningen av denna problemtyp gavs 1942 av Kantorowicz, som då presenterade den s.k. potentialmetoden.

Potentialmetoden är en självständig optimeringsmetod. Dess optimeringskriterium kan även utnyttjas för kontroll av huruvida en lösning, erhållen med andra metoder, är optimal. I det följande illustreras det sistnämnda tillämpningsområdet.

Problemställning

I likhet med föregående problem gäller att vissa varukvantiteter efterfrågas i ett antal orter. Leveransvolymen i ett antal orter är känd. Summan av levererade kvantiteter överensstämmer med summan av efterfrågade.

Till skillnad mot tidigare behandlade problem gäller inga restriktioner beträffande vägsträckningar.

Lösningssöföfarande

Den optimala lösningen erhålls genom att en godtycklig lösning till problemet stegvis förbättras. Härvid utnyttjas s.k. potentialdifferenser.

Potentialbestämningen sker på följande sätt. En godtycklig ort tillordnas ett valfritt värde - en potential. Intelligande orters och "vägkorsningars" potentialer erhålls genom att den valda (eller beräknade) potentialen

- ökas med avståndet i det fall transportriktningen sammanfaller med riktningen från ort med känd potential till ort, vars potential skall beräknas.
- minskas med avståndet i det fall transportriktningen är den motsatta.

För att en lösning skall vara optimal krävs följande.

- a/ Sker transport mellan två godtyckliga punkter skall potentialdifferensen mellan orterna vara lika med avståndet mellan orterna.
- b/ I det fall ingen transport sker mellan två punkter skall potentialdifferensen, mätt i absoluta tal, vara mindre än avståndet mellan punkterna.

För att potentialerna skall kunna beräknas på det sätt som angivits måste de enskilda punkterna direkt eller indirekt vara sammanknutna med sträckor, på vilka transporter sker. Ofta stöter man på fall då detta krav inte är uppfyllt.

I sådana fall, då potentialerna för samtliga orter inte kan beräknas direkt kan följande förfarande tillämpas.

Potentialerna beräknas för en grupp orter som inbördes är sammankopplade med "transportsträckor". Med utgångspunkt från de så framräknade potentialerna beräknas de gränser mellan vilka övriga orters potentialer kommer att ligga. Härvid er-

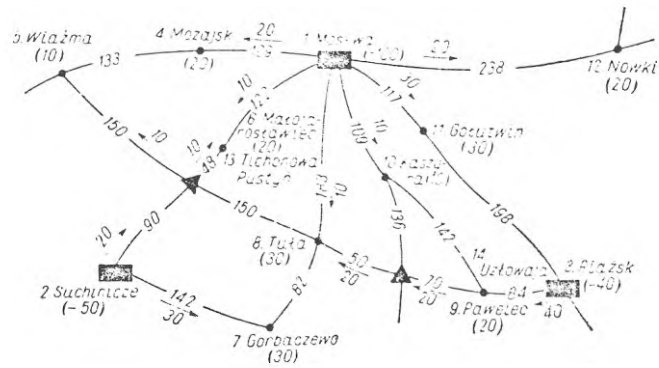


FIG. 4.1. Potentialdifferenser. Utgångsförutsättningar och utgångslösning.

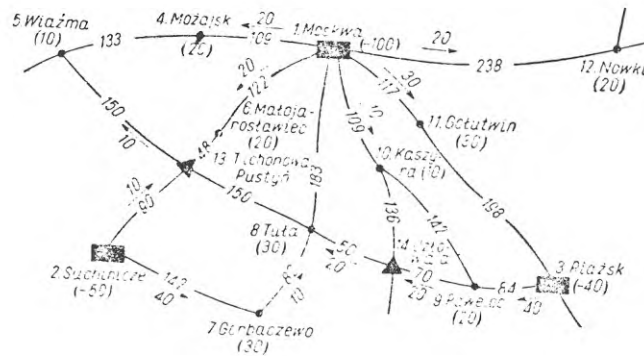


FIG. 4.2. Potentialdifferenser. Optimal lösning.

hålls för varje ort eller skärningspunkt ett flertal värden. Om dessa värden för de enskilda orterna inte är motstridiga är den undersökta lösningen optimal. Uppträder däremot motstridiga värden måste lösningen förändras.

Låt oss illustrera vad som sagts med hjälp av exemplet i FIG. 4.1. I figuren har en lösning inritats, som uppfyller leverans- och efterfrågeförutsättningarna. Vi skall undersöka om den angivna lösningen är optimal.

Om vi ger ort 1, Moskva, potentialen $C_1 = 500$ erhålls potentialerna $C_4 = 500 + 109 = 609$; $C_6 = 622$; $C_{10} = 609$; $C_{11} = 617$ och $C_{12} = 738$ för övriga orter, som är sammanknutna av transportvägar.

Med utgångspunkt från dessa potentialer beräknas de gränser mellan vilka potentialerna för övriga orter måste ligga.

Låt oss först betrakta punkt 5. Eftersom inga transporter sker mellan punkterna 4 och 5 måste gälla

$$\begin{aligned} \text{antingen att } C_5 - C_4 &\leq 133 \\ \text{eller att } C_4 - C_5 &\leq 133. \end{aligned}$$

Eftersom vi tidigare beräknat C_4 erhåller vi

$$609 - 133 = 476 \leq C_5 \leq 133 + 609 = 742.$$

Det område inom vilket potentialen för punkt 13 skall ligga kan nu beräknas. Utgår vi från C_5 erhåller vi

$$476 - 150 = 326 \leq C_{13} \leq 742 - 150 = 592.$$

Om vi utgår från C_6 blir $622 - 48 = 574 \leq C_{13} \leq 622 + 48 = 670$.

$$\text{Sålunda gäller } 574 \leq C_{13} \leq 592$$

Med utgångspunkt från intervallet för C_{13} kan nu potentialerna

för orterna 2, 7 och 8 beräknas ,

$$574 - 90 = 484 \leq C_2 \leq 592 - 90 = 502 ; \quad 626 \leq C_7 \leq 644 ; \\ 708 \leq C_8 \leq 726 .$$

För ort 8 kan emellertid ytterligare en potentialbestämning ske .

$$\text{Utgår vi från } C_1 \text{ erhåller vi nämligen } 500 - 183 = 317 \leq C_8 \\ \leq 500 + 183 = 683 .$$

Sålunda erhåller vi för C_8 följande villkor $C_8 \geq 708$ och $C_8 \leq 683$. Dessa är motstridiga. Lösningen är inte optimal, utan måste förbättras .

De motstridande resultaten elimineras om vi avstår från att transportera utefter sträckan 7 - 8 och i stället låter transport ske på sträckan 1 - 8. Den lösning som härvid erhålls framgår av FIG. 4.2. Den uppfyller de optimalitetsvillkor, som angivits varför den optimala lösningen erhållits .

2.1.2 Approximationsförfaranden

För många praktiska problem kan det vara tillräckligt att utnyttja metoder som ger en god, men inte nödvändigtvis optimal, lösning. Det förekommer att valet av transportlösning påverkas av andra faktorer än de, till vilka hänsyn kan tas vid beräkningarna. Den framräknade optimala lösningen ger då ofta inte bättre ledning för det slutgiltiga valet än en förmånlig lösning. Skälen härtill kan vara flera .

I vissa fall är sålunda dataunderlaget så osäkert att värdet av en matematiskt optimal lösning inte är större än av en förmånlig lösning .

I andra fall kan den tidrymd som står till förfogande för beräkningsarbetet vara så knapp, att man föredrar enklare förfaranden .

Slutligen bör anmärkas att kännedomen om en förmånlig lösning underlättar beräkningsarbetet även när rena optimeringsmetoder tillämpas . Approximationsförfaranden tillämpas för bestämning av denna förmånliga utgångslösning .

I det följande beskrivs ett enkelt approximationsförfarande. Framställningen bygger på *Mathematische Methoden* (1968).

Kartografisk metod

Denna metod har fått sin benämning av att en väsentlig del av beräkningarna genomförs på en kartskiss som utvisar transportförbindelserna.

Problemställning

Problem som kan behandlas med den kartografiska metoden är av den typ som tidigare presenterats.

Sålunda sker leverans av vissa varukvantiteter från ett antal orter. Dessa varor efterfrågas i andra orter. Den varukvantitet som efterfrågas, resp. levereras, i de enskilda orterna är känd. Summan av levererade kvantiteter måste överensstämma med efterfrågade.

Transportförbindelserna mellan de enskilda orterna kan ha godtycklig sträckning.

Problemet är att arrangera transportererna så att transportarbetet blir så litet som möjligt.

Lösningförfarande

Lösningförfarandet består av två steg.

I det första steget förutsätts att samtliga avnämare erhåller hela sitt behov från den leverantör som ligger närmast. Härvid kan underskott uppkomma hos vissa leverantörer. Det kan också inträffa att varukvantiteter ligger kvar hos leverantörer. På kartskissen antecknas transportvägar resp. över- och underskott.

I nästa beräkningssteg korrigeras den första lösningen så att varken över- eller underskott kvarstår hos någon leverantör.

Detta sker genom att man på kartskissen systematiskt undersöker de transportförbindelser som utgår från leverantörer med underskott. Sådana transportförbindelser utbyts mot transportförbindelser från leverantörer med överskott. Detta utbyte sker till dess att överskott och underskott utjämnats.

Utbytet av transportsträckor skall genomföras på ett sådant sätt att för varje undersökt punkt transportavstånden skall ökas så lite som möjligt. Av leverantörpunkter med överskott väljs den eller de som har kortaste transportavståndet till resp. avnämarpunkt.

Förfarandet illustreras med nedanstående exempel, ursprungligen presenterat av Tomaszewski (1965).

Exempel

I Warszawa, Opole och Gdansk efterfrågas 510, 400 resp. 600 ton av en viss produkt. Leverans av denna produkt kan ske från Rzeszow, Poznan och Bialystok. De kvantiteter som kan levereras från dessa städer är 500, 610 resp. 400 ton.

Avstånden i km mellan resp. orter framgår av nedanstående tablå, där även efterfrågade, b_j , och tillgängliga kvantiteter, a_i , angivits.

| i \ j | Warszawa | Opole | Gdansk | a_i |
|-----------|------------|------------|------------|-------|
| Rzeszow | 372 | 330 | 701 | 500 |
| Poznan | 304 | <u>245</u> | <u>295</u> | 610 |
| Bialystok | <u>186</u> | 511 | 414 | 400 |
| b_j | 510 | 400 | 600 | 1510 |

I det första beräkningssteget förutsätts att de efterfrågade kvantiteterna kan levereras från närmast belägna leverantör. Kortaste transportavstånd mellan avnämare/leverantör är understrukna i ovanstående tablå.

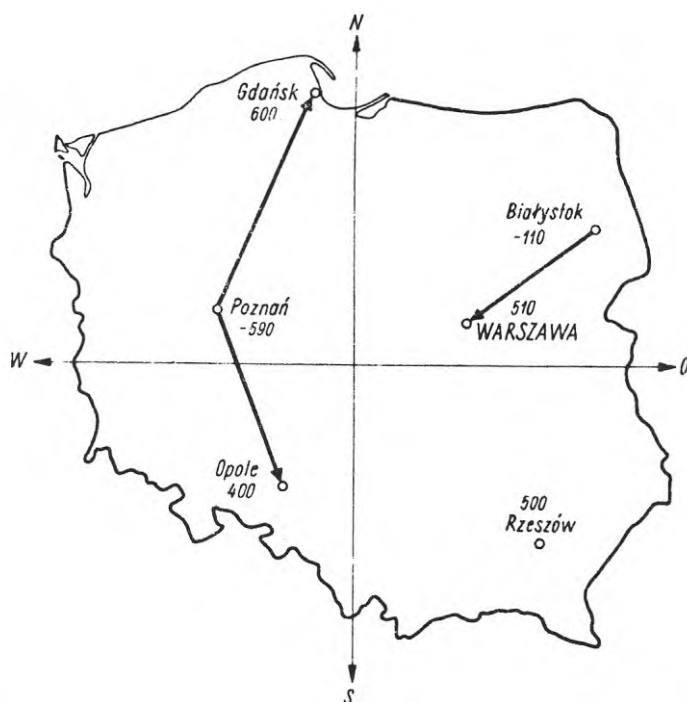


FIG. 5.1. Kartografisk metod. Utgångslösning.



FIG. 5.2. Kartografisk metod. Slutlösning.

Första beräkningssteget medför att underskott/överskott uppkommer i vissa orter. Detta åskådliggörs av nedanstående tablå, där den sista kolumnen anger de aktuella över/underskotten.

| $i \backslash j$ | Warszawa | Opole | Gdansk | a_i | $a_i - \sum_j x_{ij}$ |
|------------------|----------|-------|--------|-------|-----------------------|
| Rzeszow | | | | 500 | 500 |
| Poznan | | 400 | 600 | 610 | - 390 |
| Bialystok | 510 | | | 400 | - 110 |
| b_j | 510 | 400 | 600 | 1510 | 0 |

Utgångslösningen inritas på kartskiss, FIG. 5.1.

I nästa beräkningssteg skall de framräknade över/underskotten utjämnas. Detta sker genom att transport från överskottspunkt Rzeszow, sker till närmast belägna avnämare som kan påverka underskottspunkterna. Till Warszawa skall sålunda överföras 110 ton och till Opole 390 ton. De transportförbindelser som då uppkommer framfår av FIG. 5.2.

De kvantiteter som levereras till resp. avnämare framgår av nedanstående tablå.

| $i \backslash j$ | Warszawa | Opole | Gdansk | a_i |
|------------------|----------|-------|--------|-------|
| Rzeszow | 110 | 390 | | 500 |
| Poznan | | 10 | 600 | 610 |
| Bialystok | 400 | | | 400 |
| b_j | 510 | 400 | 600 | 1510 |

2.2 Det klassiska transportproblemet - matematiska metoder

De enkla förfaranden som beskrivits i föregående avsnitt kan tillämpas på problem med ett relativt litet antal transportvägar. När transportförbindelsernas antal ökar stiger arbetsinsatsen för att finna en optimal lösning mycket snabbt.

I detta avsnitt skall vi uppehålla oss relativt utförligt vid matematiska metoder, som utvecklats för lösning av en speciell typ av transportproblem. Dessa metoder medger en snabb lösning av problem med många transportförbindelser.

I ett följande avsnitt kommer vi att visa hur dessa metoder kan utnyttjas för problem med komplicerade förutsättningar.

Framställningen bygger, där inget annat anges, i huvudsak på Czerwinski (1961) och Czechowski (1967).

2.2.1 Problemställning

Med det klassiska transportproblemet förstås ett transportproblem av speciell karaktär.

I ett antal punkter, källor, finns "produkter" av känd kvantitet.

I ett antal punkter, sänkor, efterfrågas dessa produkter; efterfrågans storlek är känd.

Summan av de efterfrågade kvantiteterna skall överensstämma med totalt tillgängliga kvantiteter.

"Kostnaden" att transportera en produktenhet från varje källa till varje sänka är känd.

De "produkter" som finns i källorna och som skall överföras till sänkorna kan utgöras av varor, transportmedel, människor, pengar osv.

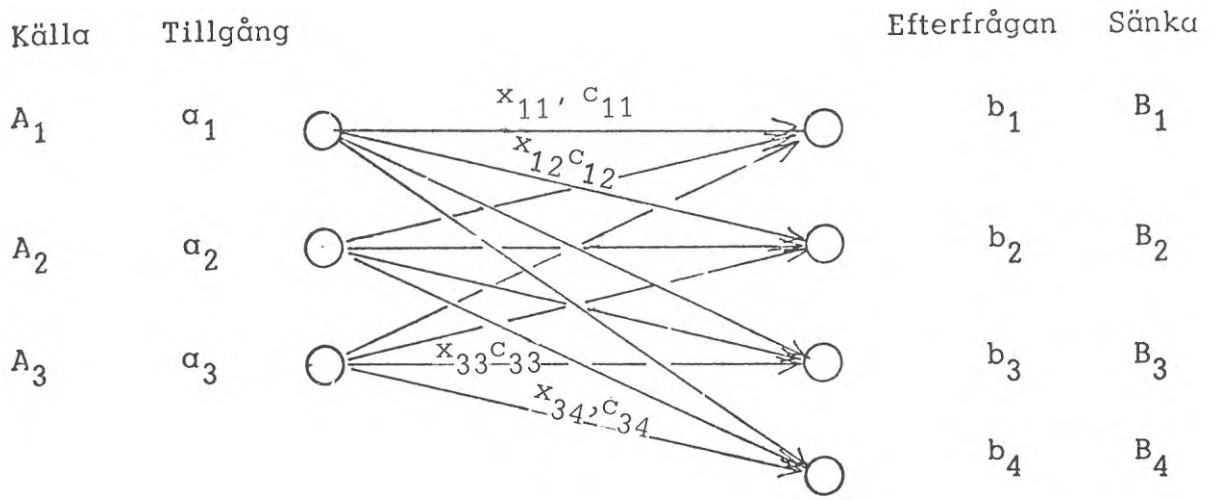


FIG. 6. Transportproblemet.

"Kostnaden" att överföra en produktenhet kan uttryckas antingen som förbrukning av tid eller som förbrukning av resurser. Resursförbrukningen uttrycks antingen i kronor eller på annat sätt, exempelvis kilometer, kwh, m³ vatten.

Optimeringsproblemet består i att bestämma flödet av produkter från de enskilda källorna till de enskilda sänkorna på ett sådant sätt att totalkostnaden minimeras.

2.2.2 Matematisk formulering

Ett klassiskt transportproblem med tre källor och fyra sänkor illustreras av FIG. 6.

I figuren betecknar x_{11} , x_{12} osv storleken av flödet mellan respektive källor och sänkor. Dessa variabler benämns flödesvariabler. Med c_{11} , c_{12} betecknas kostnaden att transportera en produktenhet mellan resp källa och sänka.

Den totala transportkostnaden K uppgår till

$$\begin{aligned} K = & x_{11} c_{11} + x_{12} c_{12} + x_{13} c_{13} + x_{14} c_{14} + \\ & + x_{21} c_{21} + x_{22} c_{22} + x_{23} c_{23} + x_{24} c_{24} + \\ & + x_{31} c_{31} + x_{32} c_{32} + x_{33} c_{33} + x_{34} c_{34} \end{aligned}$$

Det är uppenbart att K är den centrala storheten i transportproblemet. Denna benämns objektfunktion eller målfunktion.

Problemet består i att ge flödesvariablerna sådan storlek att objektfunktionen minimeras. Detta måste ske under beaktande av de övriga villkor som bestämmer transportproblemet. Dessa benämns bivillkor.

Bivillkoren i det exempel som åskådliggörs i FIG. 6 är följande, de mängder som transporteras från en viss källa skall vara lika med tillgången i källan,

$$\alpha_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$$

$$\alpha_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}$$

$$\alpha_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}.$$

de mängder som efterfrågas i en viss sänka måste vara lika med flödet till sänkan,

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4.$$

flödet kan gå endast från källa till sänka, varför

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34} \geq 0.$$

Om vi utvidgar problemet från 3 källor till m och antalet sänkor från 4 till n erhålls följande allmänna formulering av transportproblemet,

$$\min K(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \alpha_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (1.4)$$

av (1.2) och (1.3) följer att

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1.5)$$

2.2.3 Matrisrepresentation

I praktiska tillämpningar ingår i allmänhet en stor mängd data. För att underlätta hanteringen av denna datamängd är det lämpligt att arrangera data i tabellform.

Transporttablå

I transporttablå arrangeras data på det sätt som framgår av nedanstående exempel.

| Sänkor Källor | B ₁ | B ₂ | B ₃ | B ₄ | Tillgång |
|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| A ₁ | x ₁₁ | x ₁₂ | x ₁₃ | x ₁₄ | α ₁ |
| A ₂ | x ₂₁ | x ₂₂ | x ₂₃ | x ₂₄ | α ₂ |
| A ₃ | x ₃₁ | x ₃₂ | x ₃₃ | x ₃₄ | α ₃ |
| Efterfrågan | b ₁ | b ₂ | b ₃ | b ₄ | |

Mängdmatris

Med mängdmatris förstås en matris av flödesvariabler. Om vi förutsätter m källor och n sänkor kommer denna matris att få följande utseende,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Kostnadsmatris

Om kostnadselementen c_{ij} , dvs kostnaden att transportera en enhet från källa i till sänka j, organiseras på motsvarande sätt som x_{ij} erhålls kostnadsmatrisen C. Denna har följande utseende

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

2.2.4 Lösningsförfarande

Av (1.1) framgår att ett transportproblem med m källor och n sänkor innehåller $m \cdot n$ flödesvariabler.

Av formlerna (1.2) och (1.3) framgår vidare att vi har $m + n$ ekvationer i vilka dessa flödesvariabler ingår. Ur dessa ekvationer kan sålunda inte samtliga $m \cdot n$ obekanta variabler lösas.

En fråga av fundamentalt intresse är hur många av de totalt $m \cdot n$ transportmöjligheterna som maximalt behöver utnyttjas, dvs hur många $x_{ij} \neq 0$.

Vi har $m + n$ bivillkor. Eftersom (1.5) gäller är bivillkorsekvationerna inte oberoende. Man kan lätt övertyga sig om att var och en av dessa ekvationer kan lösas ut ur de övriga ($m + n - 1$) ekvationerna. Det föreligger sålunda ($m + n - 1$) av varandra oberoende bivillkor eller restriktioner.

Av vad som sagts kan man dra slutsatsen att en lösning behöver innehålla maximalt ($m + n - 1$) $x_{ij} \neq 0$. Detta innebär att maximalt ($m+n-1$) av de totalt $m \cdot n$ transportmöjligheterna behöver utnyttjas i en optimal lösning.

Optimeringsproblemet består i att bland mängden $m \cdot n$ möjliga transportvägar utvälja den delmängd som ger en optimal lösning. För att finna denna mängd måste speciella förfaranden tillämpas. Dessa förfaranden innebär i korthet att man väljer en tillåten lösning, utgångslösning till problemet. Genom stegvisa omräkningar förbättras denna lösning successivt till dess att man uppnår en optimal lösning.

Ett flertal algoritmer, dvs väl definierade regler för att genomföra en uppgift, har utarbetats för lösning av det klassiska transportproblemet.

I det följande skall några sådana algoritmer presenteras. Någon härledning av de enskilda metoderna ges inte här. Den

teoretiska bakgrunden presenteras i stället i BIL. 1, till vilken särskilt intresserade läsare hänvisas.

Av det klassiska transportproblemets definition framgår att det är en optimal lösning vi söker. Detta skulle motivera att vi här endast behandlar metoder som ger en sådan lösning. I vissa situationer kan man emellertid nöja sig med en lösning som är förmånlig men inte optimal. En sådan lösning är även fördelaktig att utnyttja som utgångslösning vid optimering. Av denna anledning kommer vi att behandla även ett par approximationsmetoder.

Framställningen baseras på Kadlec - Vodáček (1968) och Habr (1960).

I vissa förfaranden måste utgångslösningen och de lösningar man stegvis arbetar med uppfylla vissa krav. Så är fallet med de två längre fram beskrivna algoritmerna Cyklisk metod och MODI - metoden. Av denna anledning skall vi här stanna något inför dessa krav.

Krav på baslösning

För att vissa algoritmer skall kunna tillämpas krävs att utgångslösningen och följande beräkningsstegs lösningar, baslösningarna innehåller $(m + n - 1)$ utnyttjade transportförbindelser.

I vissa problem kan emellertid en lösning i verkligheten innehålla färre förbindelser. Detta är fallet om hela efterfrågan i en sänka tillgodoses med hela levererade kvantiteten i en källa. En sådan lösning, som alltså innehåller färre än $(m + n - 1)$ utnyttjade sträckor, benämns degenererad. För att beräkningarna i ett sådant fall skall kunna fortsätta måste man införa ytterligare sträckor i lösningen. Detta sker genom att man tänker sig överföra en obetydlig kvantitet längs en icke utnyttjad sträcka, så att lösningen kommer att innehålla $(m + n - 1)$ transportsträckor.

Det är emellertid inte endast antalet sträckor som är av betydelse. Krav ställs även på valet av sträckor. Samtliga sträckor måste nämligen stå i förbindelse med varandra.

De angivna kraven behandlas utförligt i BIL.1.

Exakt metod 1. Cykelmetod

Algoritmen illustreras med det problem som åskådliggörs av nedanstående transporttablå.

| Mottagare Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång |
|-------------------------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| A | + 124 | 6 | 26 | 40 | 46 | 16 | 680 |
| B | 5 | 25 | 48 | 19 | 42 | 28 | 620 |
| C | 44 | 37 | 54 | 57 | 18 | 50 | 560 |
| D | 30 | 23 | 45 | 49 | 72 | 62 | 1500 |
| Behov | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 |

I transporttablåen är enhetskostnaderna inskrivna i övre högra hörnet av respektive rutor.

I tablåen har en utgångslösning införts. Kvantiteter, flöden, har tillförts vissa rutor, transportvägar.

De flöden som tilldelats rutorna skall nu överföras till sådana rutor som inte utnyttjats i utgångslösningen. Denna överföring skall ske så att en förmånligare lösning erhålls.

Vid överföringen av flöden till outnyttjade rutor måste man beakta att problemets bivillkor uppfylls. Detta sker om man bildar cykler i transporttablåen. Dessa cykler måste gå över rutor som utnyttjats i föregående lösning. I ovanstående transporttablå har två sådana cykler inritats.

Den ena cykeln går genom den inte utnyttjade rutan A1 och genom de utnyttjade rutorna D1, D3 och A3.

Den andra cykeln går genom den outnyttjade rutan A4 och de utnyttjade rutorna A3, D3, D6, B6 och B4.

Inom dessa cykler kan kvantiteter överföras. Om sålunda 1 ton överförs till A1 blir 449 ton kvar i ruta D1. För att kvantiteter som tilldelats rutorna i rad A respektive D skall motsvara tillgången i respektive rad måste 1 ton överföras till rad D från rad A. För att bivillkoren skall uppfyllas måste detta ske genom att 1 ton förs från A3 till D3. A3 minskas sålunda från 680 ton till 679 och D3 ökar till 71 ton.

Av vad som sagts framgår att D1 och A3 minskas i samma takt som A1 ökar. Eftersom negativa kvantiteter inte kan accepteras begränsas överföringen till A1 av innehållet i D1 och A3. Vi finner att maximalt 450 ton kan överföras. (Skulle mera överföras kommer D1 att innehålla negativa kvantiteter)

På motsvarande sätt bildas för varje outnyttjad ruta en cykel, vars övriga hörnpunkter ligger i utnyttjade rutor. Den kvantitet som kan överföras begränsas av innehållet i dessa rutor; ingen ruta får efter överföringen innehålla negativa värden.

Endast sådana förskjutningar av flöden skall göras som förbättrar utgångslösningen. Sker en förskjutning av 1 ton till ruta A1 medför det att transportsträckan ("kostnaden") påverkas på följande sätt

$$24 - 30 + 45 - 26 = + 13.$$

Den totala transportsträckan kommer sålunda att ökas med 13 km för varje ton som överförs. Lösningen skulle sålunda försämrats om denna överföring sker.

För varje cykel beräknas den "merkostnad" som skulle uppkomma om ett ton överförs till cykelns outnyttjade ruta.

Genomförs denna beräkning i vårt exempel erhålls följande merkostnader

| | | | |
|----|-------------------------------|-----|----|
| A2 | $6 - 23 + 45 - 26$ | = | 2 |
| A4 | $40 - 26 + 45 - 62 + 28 - 19$ | = | 6 |
| A5 | $46 - 26 + 45 - 62 + 50 - 18$ | = | 35 |
| A6 | $16 - 26 + 45 - 62$ | = - | 27 |
| B1 | $9 - 30 + 62 - 28$ | = | 13 |
| B2 | $25 - 23 + 62 - 28$ | = | 36 |
| B3 | $48 - 45 + 62 - 28$ | = | 37 |
| B5 | $42 - 18 + 50 - 28$ | = | 46 |
| C1 | $44 - 30 + 62 - 50$ | = | 26 |
| C2 | $37 - 23 + 62 - 50$ | = | 26 |
| C3 | $54 - 45 + 62 - 50$ | = | 21 |
| C4 | $57 - 50 + 28 - 19$ | = | 16 |
| D4 | $49 - 62 + 28 - 19$ | = - | 4 |
| D5 | $72 - 62 + 50 - 18$ | = | 42 |

Endast förskjutning till A6 respektive D4 förbättrar lösningen.

I nästa beräkningssteg sker förskjutning enligt det alternativ som ger den största besparingen, dvs till A6. Den cykel som går genom A6 går även genom D6, D3 och A3. De mängder som finns här är 140, 70 och 680 ton. För att ingen av de nämnda rutorna skall innehålla negativa värden måste den kvantitet som överförs till A6 begränsas till 140 ton.

I transporttablan får efter detta beräkningssteg följande utseende.

| Mottagare | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
| Leverantör | 125 | 16 | 128 | 142 | 148 | 170 | |
| A | | | 540 | | | 140 | 680 |
| B | 19 | 125 | 158 | 167 | 142 | 126 | 620 |
| C | 144 | 137 | 155 | 167 | 155 | 157 | 560 |
| D | 130 | 123 | 145 | 149 | 172 | 162 | 1300 |
| Behov | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 750 | 3160 |

På motsvarande sätt sker beräkningarna stegvis till dess att någon ytterligare förbättring inte är möjlig.

Den optimala lösningen innebär ett totalt transportarbete om 83110 tkm.

Exakt metod 2. MODI

Den modifierade distributionsmetoden, MODI, skiljer sig från den föregående i huvudsak därigenom att de nya transportvägar-
na erhålls lättare.

Metoden demonstreras med vårt tillämpningsexempel. Vi utgår från den lösning som framgår av nedanstående transporttablå.

| Leve- rantör | Mottagare | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång |
|-----------------|-------------|-----------|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|----------|
| | Koefficient | $K_1 =$ | $K_2 =$ | $K_3 =$ | $K_4 =$ | $K_5 =$ | $K_6 =$ | |
| A | $U_1 =$ | 127 | 15 | 26 680 | 40 | 65 | 76 | 680 |
| B | $U_2 =$ | 9 | 25 | 48 320 | 19 | 42 | 28 300 | 620 |
| C | $U_3 =$ | 44 | 37 | 54 | 57 | 18 240 | 50 320 | 560 |
| D | $U_4 =$ | 30 450 | 23 640 | 45 70 | 49 | 72 | 62 140 | 1300 |
| Behov | | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 |

Transporttablåen har försetts med en ny rad och en ny kolumn. Dessa används för beräkning av den besparing som sker om en mängdenhet transporteras längs en tidigare ej utnyttjad väg (ruta).

De koefficienter som skall införas, $K_1 - K_6$ resp $U_1 - U_4$, skall ges sådan storlek att summan av K och U - koefficienterna för en viss utnyttjad ruta motsvarar rutans enhetskostnad.

Bestämningen av U och K sker på det sätt som framgår av nedanstående transporttablå.

| Leve- rantör | Mottagare Koefficient | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång |
|-----------------|--------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------|
| | | $K_1 = 30$ | $K_2 = 23$ | $K_3 = 45$ | $K_4 = 53$ | $K_5 = 30$ | $K_6 = 62$ | |
| A | $U_1 = -19$ | 24 | 6 | 26 | 40 | 45 | 16 | 680 |
| B | $U_2 = -34$ | 9 | 25 | 46 | 19 | 42 | 26 | 620 |
| C | $U_3 = -12$ | 44 | 37 | 54 | 57 | 19 | 50 | 560 |
| D | $U_4 = 0$ | 30 450 | 23 640 | 45 70 | 49 | 72 | 62 140 | 1300 |
| Behov | | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 |

En av koefficienterna åsätts värdet 0. Här har detta skett med $U_4 \cdot K_1$ kommer då att få värdet 30, eftersom $U_4 + K_1 = c_{D1} \cdot K_2$ blir 23 och K_3 45.

Med kännedom om storleken av K_3 (45) kan U_1 beräknas. $U_1 + K_3$ skall motsvara $c_{A3} \cdot c_{A3} = 26$, varför $U_1 = -19$.

På detta sätt framräknas samtliga koefficienter.

De framräknade koefficienterna används nu för beräkning av den besparing som skulle uppkomma om en ny transportväg väljs.

Besparingen om en outnyttjad ruta ij utnyttjas i stället för rutor som utnyttjats erhålls på följande sätt,

$$U_i + K_j - c_{ij}.$$

Vi har sålunda att för varje obelagd ruta beräkna ovannämnda besparing. Detta sker genom att från summan av kolumnkoefficient och radkoefficient dra aktuell enhetskostnad. I vårt exempel är sålunda besparingen för

$$\begin{aligned} \text{cykel genom A1} & - 19 + 30 - 24 = -13 \\ \text{A2} & - 19 + 23 - 6 = -2 \text{ osv.} \end{aligned}$$

Genomräknas samtliga outnyttjade möjligheter kommer man att finna att endast

$$\begin{aligned} \text{A6} & - 19 + 62 - 16 = +27 \text{ och} \\ \text{D4} & 0 + 53 - 49 = +4 \text{ är positiva.} \end{aligned}$$

Dessa värden har införts i nedanstående transporttablå.

| Leve rantör | Mottagare | | | | | | Tillgång | |
|----------------|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------|------------|
| | Koefficient | $K_1 = 30$ | $K_2 = 23$ | $K_3 = 45$ | $K_4 = 53$ | $K_5 = 30$ | | $K_6 = 62$ |
| A | $U_1 = -19$ | 24 | 6 | 25 | 40 | 46 | 16 | 680 |
| | | [-] | [-] | 600 | [-] | [-] | [-27] | |
| B | $U_2 = -34$ | 9 | 25 | 48 | 19 | 42 | 28 | 620 |
| | | [-] | [-] | [-] | 320 | [-] | 300 | |
| C | $U_3 = -12$ | 44 | 37 | 54 | 57 | 18 | 50 | 560 |
| | | [-] | [-] | [-] | [-] | 240 | 320 | |
| D | $U_4 = 0$ | 30 | 23 | 45 | 49 | 72 | 62 | 1300 |
| | | 450 | 640 | 70 | [-] | [-] | 140 | |
| Behov | | 450 | 640 | 750 | 520 | 240 | 760 | 3160 |

Till A6 skall sålunda överföras så stor kvantitet som möjligt.
Det inses omedelbart att denna uppgår till 140 ton.

Sedan denna överföring skett har beräkningssteg 1 avslutats.
Beräkningssteg 2 genomförs på samma sätt som det tidigare
steget; det inleds sålunda med att nya koefficienter beräknas.
Beräkningssteg 2 illustreras av nedanstående transporttablå.

| Leve rantör | Mottagare | | | | | | Tillgång | |
|----------------|-------------|------------|------------|------------|------------|-----------|----------|------------|
| | Koefficient | $K_1 = 30$ | $K_2 = 23$ | $K_3 = 45$ | $K_4 = 26$ | $K_5 = 3$ | | $K_6 = 35$ |
| A | $U_1 = -19$ | 24 | 6 | 25 | 40 | 45 | 16 | 680 |
| | | [-] | [-] | 540 | [-] | [-] | 140 | |
| B | $U_2 = -7$ | 9 | 25 | 48 | 19 | 42 | 28 | 620 |
| | | [-14] | [-] | [-] | 320 | [-] | 300 | |
| C | $U_3 = 15$ | 44 | 37 | 54 | 57 | 18 | 50 | 560 |
| | | [-1] | [-1] | [-6] | [-] | 240 | 320 | |
| D | $U_4 = 0$ | 30 | 23 | 45 | 49 | 72 | 62 | 1300 |
| | | 450 | 640 | 210 | [-] | [-] | [-] | |
| Behov | | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 |

Den optimala lösningen, som erhålls efter ytterligare beräk-
ningssteg framgår av följande transporttablå. Det optimala
transportarbetet är 83110 tonkm.

| Leve rantör | Mottagare | | | | | | Tillgång | |
|----------------|-------------|------------|------------|------------|------------|-----------|----------|------------|
| | Koefficient | $K_1 = 30$ | $K_2 = 23$ | $K_3 = 45$ | $K_4 = 40$ | $K_5 = 9$ | | $K_6 = 41$ |
| A | $U_1 = -25$ | 24 | 6 | 25 | 40 | 46 | 16 | 680 |
| | | [-] | [-] | [-] | [-] | [-] | [-] | |
| B | $U_2 = -21$ | 9 | 25 | 48 | 19 | 42 | 28 | 620 |
| | | 300 | [-] | [-] | 320 | [-] | [-] | |
| C | $U_3 = 9$ | 44 | 37 | 54 | 57 | 18 | 50 | 560 |
| | | [-] | [-] | 240 | [-] | 240 | 80 | |
| D | $U_4 = 0$ | 30 | 23 | 45 | 49 | 72 | 62 | 1300 |
| | | 150 | 640 | 510 | [-] | [-] | [-] | |
| Behov | | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 |

Exakt metod 3. Algoritm med "bestämmande värden"

Den i Sovjetunionen ofta tillämpade algoritmen med "bestämmande värden" är av en annan typ än de två tidigare beskrivna metoderna. Algoritmen baseras på samma matematiska förfarande som den tidigare behandlade Potentialmetoden.

De tidigare behandlade algoritmerna förutsätter en utgångslösning, som måste fylla vissa krav. En sådan lösning erfordras inte vid tillämpning av algoritm med "bestämmande värden". Bestämningen av utgångslösningen sker som ett första led i förfarandet.

Algoritmen åskådliggörs med vårt tillämpningsexempel.

Man tilldelar varje sänka hela den kvantitet som sänkan efterfrågar. Tilldelningen sker utefter den sträcka (till den ruta) som har den lägsta enhetskostnaden. Den sålunda bestämda utgångslösningen framgår av nedanstående transporttablå.

| Mottagare Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång | Kolumn differens |
|-------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|---------------------|
| A | 24 | 6 | 22 | 10 | 46 | 15 | 680 | -1470 |
| B | 8 | 25 | 48 | 17 | 22 | 28 | 620 | -150 |
| C | 44 | 37 | 54 | 57 | 19 | 50 | 550 | +320 |
| D | 30 | 23 | 45 | 48 | 72 | 62 | 1300 | +1300 |
| Behov | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3.60 | 0 |
| Differens | | | | | | | | |

När man tilldelar sänkorna mängder på detta sätt kan tillgångarna i respektive källor över- eller underskridas. De differenser som uppkommer antecknas i den kolumn som är markerad "diff".

Vid de fortsatta beräkningarna arbetar man med "kolumndifferenser". Dessa beräknas på följande sätt. I rader med positiva differenser uppsöks respektive kolumns lägsta enhetskostnad. Från

dessa värden dras enhetskostnaden för den ruta i kolumnen som tilldelats kvantiteter och där raddifferensen är negativ .

I vårt exempel blir sålunda kolumndifferensen för den kolumn som motsvarar sänka 1 $30 - 9 = 21$, sänka 2 $23 - 6 = 17$, sänka 3 $45 - 26 = 19$, sänka 4 $49 - 19 = 30$, sänka 6 $50 - 16 = 34$. För sänka 5 beräknas inte kolumndifferensen eftersom det inte förekommer någon kvantitet i de rader som har negativa raddifferens . Kolumndifferenserna införs i beräkningstablån .

| Mottagare Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång | Kolumn differens |
|-------------------------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| A | 24 450 | 6 640 | 26 750 | 40 | 46 | 16 760 | 680 | -1470 |
| B | 9 450 | 25 | 48 | 19 320 | 42 | 28 | 620 | -150 |
| C | 44 | 37 | 54 | 57 | 18 240 | 50 | 560 | +320 |
| D | 30 | 23 | 45 | 49 | 72 | 52 | 1300 | +1300 |
| Behov | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 | 0 |
| Differens | 21 | 17 | 19 | 30 | - | 34 | | $d_1 = 17$ |

I beräkningens andra steg utnyttjar man lägsta kolumndifferens . Beräkningssteget inleds med att enhetskostnaderna i rutor som står i rader med negativa differenser ökas med den lägsta kolumndifferensen , $d_1 = 17$.

I den nya beräkningstablån sker tilldelning till den ruta som nu har den lägsta enhetskostnaden och som står i rad med positiv raddifferens . I vårt exempel överförs kvantiteten från A2 till D2 . Nya raddifferenser och kolumndifferenser beräknas .

| Mottagare Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång | Kolumn differens |
|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------|
| A | 41 450 | 23 640 | 43 750 | 57 | 63 | 23 760 | 680 | -830 |
| B | 26 450 | 42 | 65 | 36 320 | 59 | 45 | 620 | -150 |
| C | 44 | 37 | 54 | 57 | 18 240 | 50 | 560 | +320 |
| D | 30 | 23 640 | 45 | 49 | 72 | 62 | 1300 | +660 |
| Behov | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 | 0 |
| Differens | 4 | - | 2 | 13 | - | 17 | | $d_2 = 2$ |

Tilldelningen till rutor, belägna i rader med positiv raddifferens, begränsas i så måtto att differensen inte skall bli negativ. I beräkningssteg 3, som illustreras av nedanstående tablå kan sålunda till ruta D3 överföras maximalt 660 ton; återstående kvantitet kvarligger i ruta A3. Raddifferensen markeras med ett minustecken. Det innebär att raden i de fortsatta beräkningarna betraktas som en rad med negativ differens.

| Mottagare Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång | Kolumn, differens |
|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------------------|
| A | 43 | 25 | 45 90 | 59 | 65 | 35 760 | 680 | -170 |
| B | 28 450 | 44 | 67 | 39 320 | 61 | 47 | 620 | -150 |
| C | 44 | 37 | 54 | 57 | 18 240 | 50 | 560 | +320 |
| D | 30 | 23 640 | 45 660 | 49 | 72 | 62 | 1300 | -0 |
| Behov | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 | 0 |
| Differens | 16 | 14 | 9 | 19 | - | 15 | | $d_3 = 9$ |

På motsvarande sätt genomförs beräkningarna stegvis. Den optimala lösningen erhålls efter sju beräkningssteg. Den optimala lösningens storlek och utseende framgår av den tidigare behandlade MODI-metoden.

Approximationsmetod 1. Indexmetoder

De tillgängliga respektive efterfrågade mängderna måste transporteras längs sådana transportvägar att totalkostnaden blir lägst. Enligt indexmetoderna numreras de enskilda rutorna i transporttablå med hänsyn till enhetskostnadernas storlek, i aktuellt exempel, avståndens storlek.

I den "progressiva indexmetoden" sker numreringen med hänsyn till stigande enhetskostnad. Flöden införs successivt i transporttablåns rutor i den ordning som numreringen anger. Härvid gäller självfallet att bivillkoren hela tiden skall uppfyllas. Metoden innebär sålunda att rutor med lägre enhetskostnad beläggs före sådana med högre.

Tillämpas den "progressiva indexmetoden" på tidigare presenterade exempel erhålls ett totalt transportarbete om 97980 ton-

km, vilket bör jämföras med det optimala 83110 tonkm.

I den "degressiva indexmetoden" söker man undvika sådana transportsträckor som har de högsta enhetskostnaderna. Beräkningarna genomförs på följande sätt.

Rutorna numreras med hänsyn till fallande enhetskostnad; man börjar sålunda med det högsta värdet i transporttablån. Den rad i vilken det lägsta ordningsnumret förekommer uppsöks. I denna rad införs flöde i den ruta som har radens högsta ordningsnummer. Därefter övergår man till den rad i vilket det näst lägsta ordningsnumret förekommer.

Den degressiva indexmetoden åskådliggörs här med hjälp av vårt exempel.

| Mottagare Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång |
|-------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|
| A | 17 18 | 16 27 | 18 240 16 | 14 12 | 15 8 | 19 440 22 | 630 |
| B | 3 23 | 25 17 | 18 300 7 | 17 320 20 | 14 11 | 23 15 | 620 |
| C | 14 10 | 17 13 | 15 4 | 17 3 | 18 240 21 | 19 320 5 | 560 |
| D | 13 450 14 | 13 640 19 | 13 210 9 | 15 6 | 17 1 | 16 2 | 1300 |
| Behov | 450 | 640 | 250 | 320 | 240 | 760 | 3160 |

I tablån har ordningsnumren skrivits inom cirklar. Beräkningarna börjar med den rad, där lägsta ordningsnumret förekommer, dvs rad D. I denna är det högsta ordningsnumret 19. Motsvarande ruta beläggs med 640 ton.

Näst lägsta ordningsnummer finns fortfarande i rad D. Högsta numret i denna rad återfinns nu i ruta D1; flöde införs i denna ruta.

Beräkningarna utförs därefter för rad C, där ruta C5 beläggs.

Följande ordningsnummer (4) återfinns även i rad C. Ruta C2 står i ordning att beläggas. Eftersom efterfrågan i sänka 2 är täckt övergår vi till näst högsta ordningsnumret i raden, dvs

10; även här är behovet täckt. Vi övergår till ordningsnummer 5 och inför flöde i denna ruta. Flödets storlek bestäms av innehållet i källa C.

På motsvarande sätt fortsätter beräkningarna. Rad med ordningsnummer 6 uppsöks, därefter 7 osv.

Med tillämpning av den degressiva indexmetoden blir det totala transportarbetet

$$240 \cdot 26 + 440 \cdot 16 + \dots = 91750 \text{ tkm.}$$

Approximationsmetod 2. Kotzigs approximationsmetod

I denna metod numrerar man inte rutorna direkt efter enhetskostnadernas storlek. I stället används ett hjälpvärde. Detta framräknas på följande sätt.

För varje rad i transporttablå beräknas det aritmetiska medelvärdet av enhetskostnaderna. Samma sker för kolumnerna.

Hjälpvärdet för varje ruta erhålls genom att minska den aktuella enhetskostnaden med summan av aritmetiska medelvärdet för aktuell rad och kolumn.

Hjälpvärdena i vårt tillämpningsexempel har införts i nedanstående transporttablå.

| Mottagare Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång | Medelv |
|-------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|--------|
| A | 1,24 -25,08 | 1,6 -43,08 | 1,25 -43,58 | 1,80 -27,58 | 1,45 -24,83 | 1,15 -49,33 | 680 | 26,33 |
| B | 1,9 -45,25 | 1,25 -25,25 | 1,48 -23,75 | 1,15 -50,75 | 1,42 -31,00 | 1,28 -39,50 | 620 | 28,50 |
| C | 1,44 -26,08 | 1,37 -25,02 | 1,54 -32,58 | 1,57 -27,58 | 1,78 -69,83 | 1,50 -32,33 | 560 | 43,33 |
| D | 1,30 -43,58 | 1,23 -46,58 | 1,45 -45,08 | 1,49 -39,08 | 1,72 -19,33 | 1,62 -23,83 | 1300 | 46,83 |
| Behov | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 | — |
| Medelvärde | 26,75 | 22,75 | 43,25 | 41,25 | 44,50 | 39,00 | — | — |

Hjälpvärdena numreras enligt den progressiva indexmetoden. Det lägsta värdet erhåller sålunda ordningsnumret 1. Flöden införs därefter på de enskilda sträckorna på samma sätt som enligt den

progressiva indexmetoden.

| Mottagare/ Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Tillgång |
|--------------------------|-------------|------------|------------|------|------------|------------|----------|
| A | [15] 300 | [9] | [7] | [18] | [21] | [3] 680 | 680 |
| B | [5] | [19] | [23] | [2] | [14] | [10] | 620 |
| C | [20] 150 | [15] | [12] 90 | [17] | [1] 240 | [13] 80 | 560 |
| D | [8] | [4] 640 | [6] 660 | [11] | [24] | [22] | 1300 |
| Behov | 450 | 640 | 750 | 320 | 240 | 760 | 3160 |

Kotzigs approximationsmetod leder till ett totalt transportarbete om

$$680 \cdot 16 + 300 \cdot 9 \dots\dots = 83185 \text{ tkm.}$$

Detta värde kan jämföras med värdet för en optimal lösning 83110 tonkm.

2.3 Generella transportproblem - matematiska metoder

I föregående avsnitt har vi uppehållit oss vid lösningsmetoder för en enkel typ av problem. I detta avsnitt kommer vi att belysa hur dessa metoder kan tillämpas för problem med mera komplicerade förutsättningar.

2.3.1 Algoritm med tidkriterium

Vid transportplanering sker stundom optimering med avseende på tidsförbrukningen. Man betraktar då tiden som transportkostnad och söker minimum för totala antalet transporttimmar. Sådana problem löses med de algoritmer som presenterats i föregående avsnitt.

En annan typ av problem är sådana där det gäller att till lägsta antal transporttimmar utföra transportererna inom kortast möjliga tidrymd.

I detta avsnitt skall vi uppehålla oss vid hur sådana problem kan angripas. Framställningen baseras på Barsow (1959).

Problemillustration

Låt oss illustrera problemtypen med exemplet i nedanstående transporttablå.

| $a_i \backslash b_j$ | 5 | 10 | 20 | 15 |
|----------------------|---|----|----|----|
| 10 | 8 | 3 | 5 | 2 |
| 15 | 4 | 1 | 6 | 7 |
| 20 | 1 | 9 | 4 | 3 |

I tablan anges i vänstra kolumnen levererade kvantiteter och i översta raden efterfrågade. Tidförbrukningen för respektive transportförbindelse anges ovan snedstreck.

Genomför vi nu en optimering med hjälp av någon utav de

tidigare beskrivna algoritmerna kan transporttablan få följande utseende.

| $a_i \backslash b_j$ | 5 | 10 | 20 | 15 |
|----------------------|---|----|----|----|
| 10 | 8 | 3 | 5 | 2 |
| 15 | 4 | 1 | 10 | 7 |
| 25 | 1 | 5 | 4 | 3 |

$C = 2 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 15 + 1 \cdot 5 = 140$

Den totala tidåtgången uppgår till 140 tim. Vi konstaterar emellertid att den kortaste tidrymd inom vilken transporterna kan genomföras uppgår till 6 tim.

En annan lösning, som framgår av nedanstående tablå, visar emellertid att transporterna kan genomföras på 4 tim.

| $a_i \backslash b_j$ | 5 | 10 | 20 | 15 |
|----------------------|---|----|----|----|
| 10 | 8 | 3 | 5 | 2 |
| 15 | 4 | 5 | 10 | 7 |
| 25 | 1 | 9 | 4 | 3 |

$C = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 5 = 145$

Lösningen innebär att den totala tidåtgången blir något större än för den optimala lösning som erhålls om inga tidrestriktioner förekommer.

Problemet är att finna den kortaste tidrymd inom vilken transporterna kan genomföras. Inom denna tidrymd söks en lösning som ger optimal totalförbrukning av tid.

Algoritm

Den algoritm som skall ge oss lösningen till problemet presenteras med hjälp av exemplet i nedanstående transporttablå.

| $a_i \backslash b_j$ | 20 | 13 | 11 | 27 | 9 | 5 | 40 |
|----------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| 15 | 12 | 13 | 34 | 7 | 8 | 29 | 19 |
| 7 | 7 | 18 | 36 | 40 | 38 | 6 | 10 |
| 45 | 11 | 20 | 30 | 21 | 21 | 29 | 31 |
| 30 | 27 | 12 | 39 | 31 | 5 | 36 | 12 |
| 12 | 17 | 17 | 32 | 36 | 22 | 16 | 14 |
| 16 | 15 | 38 | 16 | 33 | 23 | 40 | 28 |

Av tablån framgår att 125 mängdenheter skall transporteras från sex källor till sju sänkor. Siffrorna ovan snedstrecken i varje ruta anger antalet tidsenheter som åtgår för att transportera en mängdenhet från de olika källorna till de olika sänkorna. Motsvarande transporterad mängd betecknas med x_{ij} .

Det angivna exemplet överförs till en beräkningstablå, vars disposition beskrivs i det följande.

| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| =15 | - | - | - | - | - | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =7 | | | | | | | | - | - | - | - | - | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =45 | | | | | | | | | | | | | | | - | - | - | - | - | - | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | - | - | - | - | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =20 | - | | | | | | | - | | | | | | | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =13 | | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =11 | | | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =27 | | | | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =9 | | | | | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =5 | | | | | | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| =40 | | | | | | | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 12 | 13 | 34 | 7 | 8 | 29 | 19 | 7 | 18 | 36 | 40 | 38 | 6 | 10 | 11 | 20 | 30 | 21 | 21 | 29 | 31 | 27 | 12 | 39 | 31 | 5 | 36 | 12 | 17 | 17 | 32 | 36 | 22 | 16 | 14 | 15 | 38 | 16 | 33 | 23 | 40 | 28 | | | | | | | | | | |

Övre raden i tablån anger index för variabeln x_{ij} från 11 till 67. Nedre raden anger det antal tidsenheter, t_{ij} , som korresponderar mot kolumnens indexkombination. I kolumnen längst till vänster har angivits överst tillgångarna i de sex källorna och därefter efterfrågan i de sju sänkorna. Minustecknen i tablån motsvarar variabelernas representation i transportproblemets bivillkor.

Utgångslösningen erhålls på följande sätt. (Förfarandet överensstämmer med den progressiva indexmetoden)

I tablåns första del (radindex=1) uppsöker det minsta talet i undre raden. Detta tal som är 7 återfinns i kolumn 14. Vi uppsöker härfter det minsta tal i kolumnen längst till vänster som svarar mot ett minustecken i kolumn 14. Detta är 15. Vi tilldelar variabeln x_{14} detta värde. (Kolumnen längst till vänster). Det andra minustecknet i kolumn 14 svarar mot talet 27. Från hela dettas rad subtraheras nu raden som motsvarade första minustecknet. Att variabeln x_{14} är utnyttjad anger vi nu genom att utelämna kolumnens tecken samt markera kolumnen med

En bättre lösning än den nu erhållna förutsätter att x_{67} görs lika med noll. Hur sker då detta? I kolumnen med variabelvärden uppsöks x_{67} . I den rad som motsvarar detta värde finns några minustecken. Detta innebär att motsvarande variabler kan införas i lösningen.

Vi finner att x_{67} kan reduceras genom att x_{61} eller x_{65} införs i lösningen. Vi väljer att införa x_{61} eftersom $t_{61}=15 < t_{65}$.

Tablån ombildas nu. Alla kolumner med $t_{ij} \geq 28$ utelämnas. I stället för x_{67} skriver vi x_{61} . Från rader med minustecken i kolumn 61 subtraheras den rad som motsvarar variabeln x_{61} . Till rader med plustecken i kolumn 61 adderas samma rad. Den nya tablån får följande utseende.

| | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 21 | 22 | 26 | 27 | 31 | 32 | 34 | 35 | 41 | 42 | 45 | 47 | 51 | 52 | 55 | 56 | 57 | 61 | 63 | 65 | |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| $x_{14} = 15$ | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $x_{21} = 2$ | | | | | | | - | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $x_{35} = 7$ | | | | - | - | | | | | | | | | + | + | | | + | + | | | + | | | | - |
| $x_{47} = 28$ | | | | | | - | | | | | | | | | | | | + | + | + | + | | | | | 0 |
| $x_{57} = 12$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | - | - | - | | | | |
| $x_{61} = 5$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $x_{31} = 13$ | - | | | | | | + | + | | | | | | | | | | - | | | | | | | | + |
| $x_{42} = 19$ | | - | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $x_{63} = 11$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $x_{34} = 12$ | + | + | | + | + | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $x_{45} = 2$ | | | | | + | | | | + | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| $x_{26} = 5$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 12 | 13 | 7 | 8 | 19 | 7 | 18 | 5 | 10 | 11 | 22 | 21 | 21 | 27 | 12 | 5 | 12 | 17 | 17 | 22 | 16 | 14 | 15 | 16 | 23 | |

Av tablån kan utläsas att transportuppgiften kan genomföras inom en tidrymd av 21 tidsenheter. Denna tidrymd bestäms av variabeln x_{34} .

För att konstatera om en ännu bättre lösning existerar studerar vi den rad i tablån som motsvarar x_{34} . Inga minustecken förekommer i denna rad. Detta innebär att man inte kan göra x_{34} mindre och lika med noll. Lösningen är optimal enligt kriteriet "minsta möjliga tidrymd".

Sedan den kortast möjliga tidrymden bestämts sker optimering så att den totala tidförbrukningen inom tidrymden minimeras. Detta genomförs med transportalgoritmer beskrivna i föregående avsnitt. Vid denna optimering utgör ovanstående lösning utgångslösning.

Det kan anmärkas att tidförbrukningen i den lösning vi här funnit är 1716 tidenheter. Den optimala lösningen inom den funna tidrymden är 1688 tidenheter.

2.3.2 Obalanserade transportproblem

Det klassiska transportproblemet karakteriseras av att de sammanlagda tillgångarna i källorna överensstämmer med den totala efterfrågan. När ett problem uppfyller detta villkor sägs det vara balanserat.

Praktiska problem är ofta obalanserade. Genom enkla åtgärder kan sådana problem omformuleras så att de kan lösas med samma förfaranden som det klassiska transportproblemet.

Följande framställning baseras på Judin - Golstein (1969).

"Överkapacitet"

Vi har ett problem med m källor. I källorna finns kvantiteterna $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ av en viss produkt. Dessa produkter efterfrågas i n sänkor. Efterfrågans storlek är b_1, b_2, \dots, b_n . Kostnaderna att transportera en produktenhet från källa i till sänka j är c_{ij} .

Vi förutsätter dessutom att den totala tillgången i källorna överstiger efterfrågan,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i > \sum_{j=1}^n b_j .$$

Vi önskar bestämma flödet x_{ij} så att den totala transportkostnaden minimeras. Problemet kan formuleras på följande sätt,

$$\min K(\mathbf{x}) \text{ där } K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

eller med det skrivsätt som används i denna rapport,

$$\min K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \alpha_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1.2)$$

(från varje källa transporteras inte mer än vad som finns tillgängligt)

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

(hela efterfrågan i alla sänkorna skall tillgodoses)

$$x_{ij} \geq 0 \quad (1.4)$$

Denna problemformulering skiljer sig från motsvarande formulering för det klassiska transportproblemet, avsnitt 2.2.2, endast genom att en olikhet finns i bivillkoren (1.2).

I detta fall överförs det obalanserade transportproblemet lätt till ett balanserat. Detta sker genom att en fiktiv sänka, b_{n+1} , införs. Denna sänka ges en efterfrågan, som överensstämmer med den totala "överkapaciteten",

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

Enhetskostnaden $c_{i, n+1}$ ges värdet 0.

Problemet får då följande matematiska formulering,

$$\min K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = \alpha_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1, 2, \dots, n, n+1 \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Problemet kan lösas med de lösningsalgoritmer, som tidigare presenterats. Transporter till den fiktiva sänkan motsvarar överkapaciteten hos respektive källor.

"Kapacitetsbrist"

I det fall den totala efterfrågan överstiger tillgångarna i källorna kan efterfrågan i alla sänkor inte helt tillgodoses. I sådana fall måste transporterna arrangeras så att de viktigaste transporterna genomförs.

För att kunna tackla detta problem införs ytterligare en enhetskostnad, r_j . Denna betecknar bristkostnaden, dvs den kostnad som uppkommer om en enhet saknas i sänka j .

Problemet kan nu formuleras på följande sätt

$$\min K(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n r_j y_j \quad (3.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (3.4)$$

$$y_j = b_j - \sum_{i=1}^m x_{ij} \quad j=1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

Detta obalanserade problem överförs till ett balanserat genom att den fiktiva källan K_{m+1} införs. Denna ges tillgången

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i.$$

Problemet löses med algoritmer för det klassiska transportproblemet. Transporter mellan den fiktiva källan och sänkor anger bristens storlek i respektive sänka.

2.3.3 Flerstegs transportproblem

I det klassiska transportproblemet förutsätts att leverans av ett produktslag sker från ett antal källor till ett antal sänkor. Det förutsätts vidare att leveranserna sker direkt från källa till sänka.

I praktiska tillämpningar inträffar det ofta att leveranserna sker via mellanled. Detta är fallet när produkter levereras från fabriker till lager, för att därifrån slutgiltigt distribueras till avvärmarna.

I detta avsnitt skall vi belysa hur problem, där transporterna sker i flera steg, kan lösas. Vi behandlar dels en approximationsmetod och dels en metod som ger en optimal lösning.

Framställningen baseras vad avser approximationsmetoden på Kadlec-Vodáček (1968), och vad avser exakta metoden på Buga-Kolupa (1966).

Problemillustration

Ett flerstegs transportproblem åskådliggörs av nedanstående tablåer. Varje tablå representerar ett transportsteg.

| | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| L_1 | | | | | |
| L_2 | | | | | |
| L_3 | | | | | |
| L_4 | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| ⋮ | | | | | |
| L_{20} | | | | | |
| | | | | | |

| | K_1 | K_2 | K_3 |
|-------|-------|-------|-------|
| S_1 | | | |
| S_2 | | | |
| S_3 | | | |
| S_4 | | | |
| S_5 | | | |
| | | | |

| | H_1 | H_2 | H_3 | H_4 | ⋯ | H_{50} |
|-------|-------|-------|-------|-------|---|----------|
| K_1 | | | | | | |
| K_2 | | | | | | |
| K_3 | | | | | | |
| | | | | | | |

Från 20 leverantörer, $L_1 - L_{20}$, distribueras material till fem depåer, $S_1 - S_5$, varifrån leverans sker till tre fabriker, $K_1 - K_3$. Härifrån transporteras slutligen produkterna till 50 avnämare, $H_1 - H_{50}$.

Problemet är att bestämma materialflödena så att den totala transportkostnaden minimeras.

Lösningsmetod 1 Schreiters approximationsförfarande

Lösningsmetoden åskådliggörs av följande exempel. Sex materialleverantörer, A-F, skall under en viss tidsperiod leverera 295 enheter av en produkt till tre förädlingsställen, X, Y, Z. Efter bearbetning transporteras produkterna vidare till fem avnämare, 1-5.

Produktionskapaciteten i A-F samt efterfrågans storlek i 1-5 framgår av nedanstående transporttablåer. Av dessa framgår jämväl aktuella (enhets-) transportkostnader. Uppgiften är att arrangera transporterna på ett sådant sätt att den totala transportkostnaden minimeras.

| Verarb. Betrieb Lieferbetrieb | X | Y | Z | Lieferungen |
|----------------------------------|----------------------------------------------------|---|---|-------------|
| A | $\frac{20}{?}$ $\frac{30}{?}$ $\frac{6}{?}$ | | | 100 |
| B | $\frac{4}{?}$ $\frac{25}{?}$ $\frac{30}{?}$ | | | 50 |
| C | $\frac{15}{?}$ $\frac{3}{?}$ $\frac{28}{?}$ | | | 70 |
| D | $\frac{28}{?}$ $\frac{12}{?}$ $\frac{45}{?}$ | | | 40 |
| E | $\frac{35}{?}$ $\frac{17}{?}$ $\frac{37}{?}$ | | | 20 |
| F | $\frac{32}{?}$ $\frac{29}{?}$ $\frac{13}{?}$ | | | 15 |
| Kapazität | ? | ? | ? | 295 |

| Verbraucher Verarb. Betrieb | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Kapazität |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----|----|-----|----|-----------|
| X | $\frac{8}{?}$ $\frac{4}{?}$ $\frac{6}{?}$ $\frac{15}{?}$ $\frac{20}{?}$ | | | | | ? |
| Y | $\frac{27}{?}$ $\frac{18}{?}$ $\frac{9}{?}$ $\frac{12}{?}$ $\frac{10}{?}$ | | | | | ? |
| Z | $\frac{16}{?}$ $\frac{19}{?}$ $\frac{10}{?}$ $\frac{50}{?}$ $\frac{42}{?}$ | | | | | ? |
| Bedarf | 10 | 20 | 70 | 130 | 65 | 295 |

En approximativ lösning till problemet kan erhållas på följande sätt. De två transportstegen bearbetas var för sig. I det första transportsteget gäller att bestämma den efterfrågan i X, Y och Z som ger steget dess lägsta transportkostnad. Detta sker med hjälp av tidigare presenterade transportalgoritmer. (Vi erhåller som resultat att till X skall transporteras 50 enheter, till Y 130 och till Z 115.)

I det andra beräkningssteget betraktas de framräknade värdena som tillgångar i källorna X, Y och Z. Optimering av det andra transportsteget sker med hjälp av konventionella transportalgoritmer. Vi erhåller en total transportkostnad om 6125 (kr).

Den approximativa lösningen erhålls sålunda genom en optimering, som är betingad av en annan optimering. Det ömsesidiga beroendet mellan de två transportstegen beaktas däremot inte. Den funna lösningen är därför inte optimal.

En bättre lösning, dock inte nödvändigtvis optimal, erhålls med Schreiters approximationsförfarande. Denna metod utvecklades 1962 vid Zentralinstitut für Automatisierung, Dresden.

Problemet uppställs i en beräkningstabla.

| | X | Y | Z | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|----|----|----|----|----|----|-----|----|-----|
| A | 20 | 30 | 6 | ? | ? | ? | ? | ? | 100 |
| B | 4 | 25 | 30 | ? | ? | ? | ? | ? | 50 |
| C | 15 | 3 | 28 | ? | ? | ? | ? | ? | 70 |
| D | 28 | 12 | 45 | ? | ? | ? | ? | ? | 40 |
| E | 35 | 17 | 37 | ? | ? | ? | ? | ? | 20 |
| F | 32 | 29 | 13 | ? | ? | ? | ? | ? | 15 |
| X | | | | 8 | 4 | 6 | 5 | 20 | ? |
| Y | | | | 27 | 18 | 9 | 12 | 10 | ? |
| Z | | | | 16 | 19 | 10 | 56 | 42 | ? |
| | | | | 10 | 20 | 70 | 130 | 65 | 295 |

Den övre vänstra delen motsvarar transporttablå för första transportsteget. Den nedre delen motsvarar det andra stegets transporttablå.

Den högre övre delen av tablå utnyttjas för beräkningarna. Det första steget är att beräkna den lägsta enhetstransportkostnaden från en viss ursprungskälla till slutgiltig avnämare. Beräkningen av dessa enhetstransportkostnader framgår av nedanstående exemplifiering.

Värdet i ruta A 1 skall uttrycka den lägsta enhetstransportkostnaden från källa A till sänka 1. Från A kan en mängdenhet transporteras till 1 på tre olika vägar, över X, Y eller Z. Enhetstransportkostnaden från A till X, Y, Z är 20, 30 resp. 6, vilket framgår av tabellens övre vänstra del. Enhetstransportkostnaden från X, Y till Z till 1 är 8, 27 resp. 16. Vi finner sålunda att transport över X kostar 28, över Y 57 och över Z 22 per mängdenhet. Lägsta enhetstransportkostnad A - 1 är sålunda 22. Detta värde införs i tabellen tillsammans med notering om vilken väg som är den aktuella.

Sedan enhetstransportkostnaden för samtliga vägar bestämts genomförs beräkningarna som för ett klassiskt transportproblem. Av nedanstående transporttablå framgår de beräknade enhetskostnaderna samt en lösning som med dessa kostnader är optimal.

| Mottagare Leverantör | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Tillgång |
|-------------------------|------------|-----------|------------|------------|------------|----------|
| A | Z 22 10 | Z 24 | Z 16 70 | X 35 20 | 40 | 100 |
| B | X 12 | X 8 20 | X 70 | X 19 30 | 24 | 50 |
| C | 23 | 19 | 12 | Y 15 5 | Y 13 65 | 70 |
| D | 36 | 30 | 27 | Y 24 40 | 22 | 40 |
| E | 43 | 35 | 26 | Y 29 20 | 27 | 20 |
| F | 29 | 32 | 23 | Y 41 15 | 39 | 15 |
| Behov | 10 | 20 | 70 | 130 | 65 | 295 |

Från denna tablå överförs de framräknade flödena till övriga delar av tablå på det sätt som framgår av nedanstående beräkningstablå.

| | X | Y | Z | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Tillgång | |
|---|----------|----------|---------|------------|-----------|------------|------------|------------|----------|-----|
| A | 20 20 | 30 | 6 80 | Z 22 70 | Z 24 | Z 16 70 | X 35 20 | 40 | 100 | |
| B | 4 50 | 25 | 30 | 12 | X 8 20 | 10 | X 19 30 | 24 | 50 | |
| C | 15 | 3 70 | 28 | 23 | 19 | 12 | Y 15 5 | Y 13 65 | 70 | |
| D | 28 | 12 40 | 45 | 36 | 20 | 27 | Y 24 40 | 22 | 40 | |
| E | 35 | 17 20 | 31 | 43 | 35 | 26 | Y 29 20 | 27 | 20 | |
| F | 32 | 29 15 | 13 | 29 | 32 | 23 | Y 41 15 | 39 | 15 | |
| | | | | X | 8 20 | 4 20 | 6 50 | 15 20 | 70 | |
| | | | | Y | 27 | 18 | 9 80 | 12 65 | 145 | |
| | | | | Z | 16 70 | 19 70 | 10 50 | 42 | 80 | |
| | | | | | 10 | 20 | 70 | 130 | 65 | 295 |

Med tillämpning av Schreiters metod erhålls en total transportkostnad om 5845 (kr). Denna kan lämpligen jämföras med det värde som erhålls om den inledningsvis beskrivna metoden till-

lämpas , 6125 (kr) .

Lösningsmetod 2 Simultanförfarande

Ett flerstegs transportproblem kan vanligtvis omformuleras till ett klassiskt varvid konventionella algoritmer kan tillämpas för optimeringen .

Låt oss utgå från den matematiska formuleringen av ett flerstegsproblem .

Förutsättningarna är följande .

En enhetlig produkt kan tillverkas i orterna D_i . Produktionskapaciteterna i dessa orter är a_i , ($i=1, \dots, m$) . Produkten efterfrågas i orterna Z_j . Efterfrågans storlek är b_j , ($j=1, \dots, n$) .

Det förutsätts att den sammalagda kapaciteten i källorna överstiger den totala efterfrågan

$$a = \sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j = b \quad (1)$$

Produkterna levereras inte direkt från källor till sänkor . I stället sker transporten i $s + 1$ steg via s mellanled . Låt oss beteckna mellanleden med $P^{(r)}$; ($r = 1, \dots, s$) . Varje mellanled består av ett antal k_r "företag" . Beteckna ett visst företag i mellanledet $P^{(r)}$ med $P_i^{(r)}$, där $i = 1, 2, \dots, k_r$. Beteckna i analogi härmed en viss källa med $P_i^{(0)}$. Varje $P_i^{(r)}$ har en bestämd kapacitet $d_i^{(r)}$. Kapaciteterna är så stora att hela behovet, b , kan passera varje enskilt mellanled

$$d^{(r)} = \sum_{i=1}^{k_r} d_i^{(r)} \geq b \quad (2)$$

Kostnaden att transportera en enhet från ett företag i ett visst mellanled , $P_i^{(r-1)}$, till ett företag i nästa mellanled , $P_j^{(r)}$ är känd .

Den betecknas med $c_{ij}^{(r)}$.

$$C^{(r)} = \begin{bmatrix} c_{ij}^{(r)} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i=1, 2 \dots k_{r-1}; \\ j=1, 2 \dots k_r \end{array}$$

Vi förutsätter vidare att leverans från en viss källa, till en viss sänka passerar minst ett "företag" i varje mellanled $P^{(r)}$.

Någon "bearbetning" av produkterna i $P_i^{(r)}$ förutsätts inte ske. Detta innebär att transportbehovet för "ingående" varor överensstämmer med behovet för "utgående".

Matematiskt kan problemet formuleras på följande sätt om dessa beteckningar används,

$$w_{ij}^{(r)} = \text{varuflöde från } P_i^{(r-1)} \text{ till } P_j^{(r)}; \quad r = 1, 2, \dots, s+1$$

$$y_i^{(r)} = \text{den outnyttjade kapaciteten i punkt } P_i^{(r)} \text{ när varuflödet är } w_{ij}^{(r)}; \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\begin{aligned} \min K = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_1} c_{ij}^{(1)} w_{ij}^{(1)} + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} c_{ij}^{(2)} w_{ij}^{(2)} + \\ & \dots + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n c_{ij}^{(s+1)} w_{ij}^{(s+1)} \end{aligned} \quad (3)$$

under följande bivillkor

$$\sum_{j=0}^{k_1} w_{ij}^{(1)} = \alpha_i \quad i=1 \dots m \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m w_{ij}^{(1)} = d_j^{(1)} - y_j^{(1)}; \quad j=1 \dots k_1 \quad (5)$$

(4) resp (5) uttrycker nödvändiga samband i första steget. För mellanleden måste följande samband gälla, (6) resp (7),

$$\sum_{j=1}^{k_r} w_{ij}^{(r)} = d_i^{(r-1)} - y_i^{(r-1)}; \quad \begin{array}{l} i=1, 2 \dots k_{r-1} \\ r=2, 3 \dots s \end{array} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{k_{r-1}} w_{ij}^{(r)} = d_j^{(r)} - y_j^{(r)}; \quad \begin{array}{l} j=1, 2 \dots k_r \\ r=2, 3 \dots s \end{array} \quad (7)$$

För "slutsteget" måste sambanden enligt (8) och (9) gälla

$$\sum_{j=1}^n w_{ij}^{(s+1)} = d_i^{(s)} - y_i^{(s)}; \quad i=1, 2 \dots k_s \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{k_s} w_{ij}^{(s+1)} = b_j; \quad j=1, 2 \dots n \quad (9)$$

Vi konstaterar att den matematiska formuleringen av flerstegsproblemet skiljer sig från motsvarande formulering av det klassiska transportproblemet endast däri att $y_1^{(r)}$ finns med.

Lösningen till problemet erhålls genom följande överläggning.

I det klassiska transportproblemet uppträder endast leverantörer och avnämare. I flerstegsproblem har mellanleden en dubbel funktion, de uppträder i ett steg som avnämare och i närmast följande som leverantör.

Oberoende av om ett visst "företag", $P_1^{(r)}$, i ett mellanled r , uppträder som avnämare eller leverantör är dess kapacitet oförändrad.

Om leveranserna från mellanledet $r-1$ till $P_1^{(r)}$ inte helt utnyttjar kapaciteten $d_1^{(r)}$ uppkommer en outnyttjad kapacitet $y_1^{(r)}$. Genom att betrakta denna som en fiktiv, intern transport (från och till $P_1^{(r)}$) kan problemet lösas. För att åstadkomma denna fiktiva transport införs kostnadselementet 0 i de kombinationer som motsvarar denna interntransport. Transporter som inte

kan ske ges kostnadselementet M ; ett mycket stort tal.

Problemet kan nu åskådliggöras i en konventionell transport-tablå. I nedanstående tablå har aktuella enhetskostnader införts.

| | $P_0^{(1)}$ | $P_1^{(1)} \dots P_{k_1}^{(1)}$ | $P_1^{(2)} \dots P_{k_2}^{(2)}$ | ... | $P_1^{(s-1)} \dots P_{k_{s-1}}^{(s-1)}$ | $P_1^{(s)} \dots P_{k_s}^{(s)}$ | $Z_1 \dots Z_n$ |
|-----------------|-------------|---------------------------------|-------------------------------------|-----|-----------------------------------------|---------------------------------|-----------------|
| D_1 | 0 | $c_{i,j}^{(1)}$ | | | | | a_1 |
| ... | | | | | | | ... |
| ... | | | | | | | ... |
| D_m | | | | | | | ... |
| $P_1^{(1)}$ | 0 | M | $c_{i,j}^{(2)}$ | | | | $d_1^{(1)}$ |
| ... | 0 | | | | | | ... |
| $P_{k_1}^{(1)}$ | 0 | | | | | | ... |
| $P_1^{(2)}$ | | | 0 | M | $c_{i,j}^{(2)}$ | | $d_1^{(2)}$ |
| ... | | | 0 | | | | ... |
| $P_{k_2}^{(2)}$ | | | 0 | | | | ... |
| ... | | | | | | | $d_1^{(s-1)}$ |
| ... | | | | | | | ... |
| ... | | | | | | | ... |
| $P_1^{(s)}$ | | | | | 0 | M | $d_1^{(s)}$ |
| ... | | | | | 0 | | ... |
| $P_{k_s}^{(s)}$ | | | | | 0 | | ... |
| | $d_0^{(1)}$ | $d_1^{(1)} \dots d_{k_1}^{(1)}$ | $d_{k_1}^{(2)} \dots d_{k_2}^{(2)}$ | ... | $d_1^{(s-1)} \dots d_{k_{s-1}}^{(s-1)}$ | $d_1^{(s)} \dots d_{k_s}^{(s)}$ | $b_1 \dots b_n$ |

Aktuella variabler får den placering som framgår av följande tablå.

| | $P^{(1)}$ | $P^{(2)}$ | ... | $P^{(s)}$ | Z | |
|-----------|-----------------|-----------------|-----|-------------|-----------------|-----------|
| D | $w_{i,j}^{(1)}$ | | | | | a |
| $P^{(1)}$ | $y_i^{(1)}$ | $w_{i,j}^{(2)}$ | | 0 | | $d^{(1)}$ |
| $P^{(2)}$ | | $y_i^{(2)}$ | | | | $d^{(2)}$ |
| ... | | | | | | ... |
| $P^{(s)}$ | | | | $y_i^{(s)}$ | $w_{i,j}^{(s)}$ | $d^{(s)}$ |
| | $d^{(1)}$ | $d^{(2)}$ | ... | $d^{(s)}$ | b | |

Konventionella transportalgoritmer utnyttjas för optimeringen.

I det följande skall vi belysa hur något modifierade förutsättningar påverkar lösningsförfarandet.

Kapaciteterna i mellanleden har förutsatts vara så stora att den totalt efterfrågade kvantiteten kan transporteras via samtliga mellanled. Jämför ekv (2).

Om kapaciteten i något mellanled, exempelvis $P^{(r)}$, sammanfaller med totala behovet

$$d^{(r)} = b$$

får problemet en enklare form.

Flödet genom varje enskilt "företag" i mellanledet, $P_i^{(r)}$, är känt och motsvarar dess kapacitet $d_i^{(r)}$. Flerstegsproblemet består i realiteten av flera transportproblem, dels ett avseende transporter som följer efter $P_i^{(r)}$. Detta förhållande kan verifieras på följande sätt.

Om $d_i^{(r)} = b$ blir $y_i^{(r)} = 0$. Inför vi detta värde i ekvationerna (1) - (9) sönderfaller problemet i två självständiga transportproblem.

I transporttablån beaktas förhållandet på så sätt att de kostnadselement som motsvarar $y_i^{(r)}$ ges värdet M .

Om sålunda kapaciteten i ett eller flera mellanled motsvarar det totala behovet uppdelas flerstegsproblemet i ett antal delproblem. Flerstegsproblemets optimum motsvarar summan av delproblemens optimum.

Transportbehovet kan i vissa fall förändras i mellanleden. Vi har tidigare förutsatt att transportbehovet för "ingående" transporter till ett visst mellanled överensstämmer med behovet för "utgående" transporter från samma mellanled.

Det kan emellertid förekomma att transportbehovet undergår en förändring i ett eller flera mellanled. Detta kan inträffa om varorna bearbetas så att deras volymvikt förändras. Sådana fall kan lätt omformuleras, så att de kan lösas med den teknik som presenterats.

Förutsatt att förhållandet mellan transportbehoven efter resp före steg r (mellanled $P^{(r)}$) förhåller sig som $1:f^{(r)}$

För steg nr r erhålls följande samband

$$\sum_{j=1}^{k_r} w_{ij}^{(r)} = d_i^{(r-1)} - y_i^{(r-1)}; \quad (i=1, \dots, k_{r-1}) \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{k_{r-1}} w_{ij}^{(r)} = f^{(r)} \left[d_j^{(r)} - y_j^{(r)} \right] ; \quad (j=1, \dots, k_r) \quad (11)$$

(jämför (6) och (7))

Om successiva förändringar sker och vi betecknar $f_1 \cdot f_2 \dots$
 f_r med F_r erhåller vi

$$\sum_{j=1}^{k_r} F_{r-1} w_{ij}^{(r)} = F_{r-1} \left[d_i^{(r-1)} - y_i^{(r-1)} \right] \quad (i=1, \dots, k_{r-1}) \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{k_{r-1}} F_{r-1} w_{ij}^{(r)} = F_r \left[d_j^{(r)} - y_j^{(r)} \right] \quad (j=1, \dots, k_r) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{för } r &= 1 & F_{0-1} &= 1 \\ \text{för } r &> 1 & F_r &= f_1 \cdot f_2 \dots f_r \end{aligned}$$

Införs följande beteckningar

$$x_{ij}^{(r)} = F_{r-1} w_{ij}^{(r)} ; \quad z_j = F_r \cdot y_j^{(r)} \quad (r=1 \dots s)$$

$$\alpha_i = \alpha_i ; \quad d_i^{(r)} = F_r d_i^{(r)} \quad (r=1 \dots s) \quad (14)$$

$$b_j = F_s b_j$$

erhålles ekvationer av samma typ som (1) - (9).

Objektfunktionen blir

$$\sum_{r=1}^{s+1} \sum_{i=1}^{k_{r-1}} \sum_{j=1}^{k_r} c_{ij}^{(r)} x_{ij}^{(r)} \quad (15)$$

$$\text{där } c_{ij}^{(r)} = \frac{c_{ij}^{(r)}}{F_{r-1}}$$

Om de nya variablerna införs kan sålunda problemet lösas på exakt samma sätt som flerstegsproblem utan "bearbetande" mellanled.

Följande exempel illustrerar tillvägagångssättet.

Exempel

Av nedanstående tablåer framgår enhetskostnaden för transport av en viktsenhet, "ton", mellan olika punkter i ett flerstegsproblem.

| | | |
|-------|-------------|-------------|
| | $P_1^{(1)}$ | $P_2^{(1)}$ |
| D_1 | 20 | 15 |
| D_2 | 10 | 15 |
| D_3 | 30 | 20 |

| | | |
|-------------|-------------|-------------|
| | $P_1^{(2)}$ | $P_2^{(2)}$ |
| $P_1^{(1)}$ | 24 | 21 |
| $P_2^{(1)}$ | 15 | 18 |

| | | | | |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| | Z_1 | Z_2 | Z_3 | Z_4 |
| $P_1^{(2)}$ | 42 | 50 | 46 | 36 |
| $P_2^{(2)}$ | 54 | 56 | 39 | 45 |

Levererade respektive efterfrågade kvantiteter framgår av följande tablå. Kapacitetsbegränsningar anges även. I näst sista kolumnerna anges hur transportbehovet per ton transporterat gods förändras, $f_1 = F_1 = 3$; $F_2 = f_1 \cdot f_2 = 3 \times 1,2 = 3,6$, vilket anges i sista kolumnen

| i | a_i | $d_i^{(1)}$ | $d_i^{(2)}$ | b_i | f_i | F_i |
|-------|-------|-------------|-------------|-------|-------|-------|
| 1 | 800 | 300 | 220 | 60 | 3 | 3 |
| 2 | 500 | 200 | 200 | 80 | 1,2 | 3,6 |
| 3 | 700 | — | — | 100 | — | — |
| 4 | — | — | — | 140 | — | — |
| Summa | 2000 | 500 | 420 | 380 | — | — |

Innan problemet överförs till transporttablån beräknas nya värden för tablåns element enligt ekv (14).

| i | \bar{a}_i | $d_i^{(1)}$ | $d_i^{(2)}$ | b_i | Summa |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------|-------|
| 1 | 800 | 900 | 792 | 216 | |
| 2 | 500 | 600 | 720 | 288 | |
| 3 | 700 | — | — | 360 | |
| 4 | — | — | — | 504 | |
| Summa | 2000 | 1500 | 1512 | 1368 | 6380 |

De omräknade storheterna införs i transporttablån, varefter optimering sker på konventionellt sätt.

| | P_0 | $P_1^{(1)}$ | $P_2^{(1)}$ | $P_1^{(2)}$ | $P_2^{(2)}$ | Z_1 | Z_2 | Z_3 | Z_4 | a_i |
|-------------|------------|--------------|--------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------|
| $P_1^{(0)}$ | 0 | 200 (200) | 150 (600) | | | | | | | 800 |
| $P_2^{(0)}$ | 0 | 100 (500) | 150 | | | | | | | 500 |
| $P_3^{(0)}$ | 0 (632) | 300 (68) | 200 | | | | | | | 700 |
| $P_1^{(1)}$ | | 0 (132) | M | 80 (192) | 70 (576) | | | | | 900 |
| $P_2^{(1)}$ | | | 0 | 50 (600) | 60 | | | | | 600 |
| $P_1^{(2)}$ | | | | 0 | M | 117 (216) | 139 (72) | 129 | 100 (504) | 792 |
| $P_2^{(2)}$ | | | | | 0 (144) | 150 | 153 (216) | 108 (360) | 125 | 720 |
| b_j | 632 | 900 | 600 | 792 | 720 | 216 | 288 | 360 | 504 | 6380 |

2.4 Linjär programmering, LP

De matematiska metoder som beskrivits kan utnyttjas för lösning av problem med enkla förutsättningar. Dessa metoder är, som tidigare nämnts, specialfall av linjär programmering, LP.

I detta avsnitt uppehåller vi oss vid vad som karakteriserar generella LP-problem. Vi nämner de krav som måste vara uppfyllda för att dessa problem skall kunna lösas med det s.k. simplexförfarandet.

Simplexförfarandet redovisas utförligt i BIL. 2, där även ett par tillämpningsexempel presenteras.

2.4.1 Problemställning

Låt oss inledningsvis beskriva en typisk linjärprogrammeringssituation. Problemet gäller optimal fördelning av begränsade resurser.

Ett företag tillverkar ett antal olika produkter, för vilka obegränsade avsättningsmöjligheter finns. Täckningsbidraget för de olika produkterna varierar. För varje produkt är bidraget per tillverkad enhet konstant, oberoende av tillverkningsvolym.

För tillverkning av de olika produkterna erfordras resurser av olika slag - maskiner, personal, transportmedel, golvyta osv. Produkterna har olika resursanspråk. Förbrukningen, eller behovet, av en viss resurstyp för tillverkning av en produkt enhet är känd. Den förutsätts vara konstant oavsett i hur många exemplar respektive produkt tillverkas.

Företaget har inte obegränsade resurser till sitt förfogande - endast vissa kvantiteter finns tillgängliga. Problemet är att bestämma hur tillverkningen skall sammansättas för att täckningsbidraget skall maximeras.

2.4.2 Matematisk formulering

Låt oss förutsätta att företaget tillverkar n olika produkter samt att täckningsbidraget för produkt j , där $j=1 \dots n$, är c_j kronor per enhet.

Förutsätt vidare att det råder begränsad tillgång till m olika resurstyper. Beteckna resurstyperna med i . Resurstyp 1 kan exempelvis vara personal, 2 maskintyp A, 3 råmaterial osv.

Beteckna tillgängliga kvantiteter av resurstyp i med b_i . b_1 är angiven i persontimmar, b_2 maskintimmar A, b_3 i ton osv.

Den kvantitet av resurstyp i som krävs för tillverkning av en enhet av produkt j betecknas med α_{ij} .

Om vi låter x_j beteckna antalet produkter av produktslag j kan problemet formuleras på följande sätt,

$$\max K(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1.1)$$

under bivillkoren

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11} x_1 \dots \alpha_{1n} x_n & \leq & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} x_1 \dots \alpha_{mn} x_n & \leq & b_m \end{array} \quad (1.2)$$

Inga produkter förbrukas under tillverkningen, varför

$$x_i \geq 0 \quad (i=1 \dots n) \quad (1.3)$$

Det presenterade problemet är ett maximeringsproblem. I modellen är bivillkoren uttryckta som olikheter.

LP-problem kan vara antingen maximerings- eller minimeringsproblem. Restriktionerna kan uttryckas både som ekvationer och olikheter. Variablerna behöver inte vara underkastade teckenrestriktioner. Ett sådant allmängiltigt problem benämns generellt LP-problem. Den matematiska modellen för ett så-

dant problem får följande utseende ,

$$\min \text{ eller } \max K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (2.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (2.2)$$

2.4.3 Lösningförfarande

Generella LP-problem kan lösas på flera olika sätt. Ett förfarande som snabbt leder till ett optimalt resultat är det s.k. simplexförfarandet. För att detta skall kunna tillämpas måste emellertid det generella LP-problemet omformuleras.

Simplexalgoritmen förutsätter att bivillkoren är ekvationer samt att variablerna är teckenbegränsade. Ett generellt LP-problem omformuleras lätt så att dessa krav är uppfyllda. Detta sker genom att extra variabler införs i modellen. Hur detta sker samt hur beräkningarna genomförs framgår av BIL.2 Simplexalgoritmen.

3. TILLÄMPNINGAR

De metoder, som presenteras i kapitel 2 har illustrerats med enkla åskådningsexempel. Dessa exempel har i huvudsak avsett problem där det gäller att på ett optimalt sätt genomföra transporter från leverantörer till kunder.

Åskådningsexemplen representerar en i praktiken vanligt förekommande problemtyp. Inom transportområdet uppträder emellertid ofta andra typer av problem som också kan lösas med hjälp av de presenterade metoderna.

I detta kapitel redovisas praktiska tillämpningar inom byggtransportområdet av de matematiska metoderna.

I det inledande avsnittet redovisas tillämpningar av det klassiska transportproblemet inom vissa socialistiska länder.

Följande avsnitt behandlar det s k fördelningsproblemet eller allmänna transportproblemet. Härmed avses ett problem där det gäller att bestämma hur transport/tillverkningsresurser bör utnyttjas vid transport/tillverkning, där de enskilda produktslagen har olika kapacitetsanspråk.

I det tredje avsnittet uppehåller vi oss vid frågan om hur transportrutter bör läggas upp. Vi behandlar dels bestämning av transportrutter som ett led i dimensionering av fordonsparken. Dels illustreras ett fall där det gäller att bestämma optimala transportrutter för en befintlig fordonspark.

I de två avslutande avsnitten belyses hur de matematiska metoderna kan utnyttjas som underlag för beslut som rör dimensionering och lokalisering av produktionsresurser. Först behandlas det fall då produktionen avser endast ett produktslag. I det avslutande avsnittet beskrivs det fall då lokaliseringsort söks för ett flertal produktslag.

I de enskilda avsnitten ingår presentation av praktikfall och tillämpningsexempel.

3.1 Bestämning av optimal transportplan

3.1.1 Problemet

Programmeringsuppgiften är det klassiska transportproblemets. Detta innebär att en transportplan skall upprättas, som fyller följande krav. Avnämare av en viss produkt tilldelas leverantörer. Denna tilldelning skall ske så att

- avnämarnas efterfrågan helt tillgodoses,
- de enskilda leverantörernas hela produktion utnyttjas,
- transportkostnaderna minimeras.

Problemets matematiska formulering samt lösningsmetoder har presenterats i avsnitt 2.2 "Det klassiska transportproblemet - matematiska metoder".

Metoder för lösning av det klassiska transportproblemet utnyttjas för operationell planering, avseende perioder upp till ett år. Metoderna har fått en vidsträckt användning inom Östblocksländerna.

I det följande illustreras tillämpningarna dels med ett praktikfall från Sovjetunionen och dels med en summarisk presentation av tillämpningar inom enskilda socialistiska länder.

3.1.2 Praktikfall. Cementförsörjning av Sibirien m.m.

Vid planering av cementförsörjningen för Sibirien och territorier i Fjärran Östern har man utnyttjat metoder för lösning av det klassiska transportproblemet.

Transportplanerna avser försörjningen med cement av ett område som omfattar närmare 50% av Sovjetunionens yta.

Inom det aktuella området finns ett antal fabriker som var och en tillverkar en eller flera cementkvaliteter. 1959 svarade dessa fabriker för 13% av Sovjetunionens totala cementproduktion. Efterfrågan inom området var av samma storleksordning.

Transporterna spelar en utomordentligt stor roll för cementförsörjningen inom området. Medan det genomsnittliga transportavståndet för cement i Sovjetunionen är 553 km uppgår det till 675 km i Västsibirien, 839 i Östsibirien och 1175 km för territorierna i Fjärran Östern.

Följande framställning, som baseras på Birman (1962), illustrerar hur planeringsuppgiften genomförts. Den visar hur optimeringsuppgiften lösts under alternativa beräkningsförutsättningar, problem A, B och C.

Problem A

En transportplan avseende ett kvartal föreligger. Denna plan har upprättats utan tillämpning av optimeringsmetoder. Uppgiften är att, med utgångspunkt från denna plan bestämma en optimal transportplan. Eftersom olika optimeringskriterier ger olika lösningar framräknas de optimala planerna med alternativa kriterier. De kriterier som tillämpas är

- minsta totala transportarbete,
- minsta totala transportkostnader, beräknade med hjälp av transporttariffer.
- minsta totala transportkostnader, beräknade med ledning av järnvägarnas "självkostnad".

Den redan föreliggande planen innehåller uppgift om vilka kvantiteter cement som skall levereras från områdets åtta cementfabriker till dess 14 administrativa områden. Dessutom föreligger uppgift om avstånd mellan fabriker och aktuella områdens centralpunkt.

De utgångsförutsättningar som föreligger är sammanställda i nedanstående transporttablå.

Transporttablå är arrangerad så att fabriker är placerade i ordning väst till öst efter deras geografiska belägenhet. Samma gäller för de administrativa områdena.

| Leverantörer | Kapacitet | Mottagare och efterfrågan | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|-----------|----------------------------|--------------------|------------------------|-------------------|------------------|------------------------------------|----------------------|----------------------|-------------------|----------------------|---------------------|------------------------------------|---------------------|--------------------|
| | | Новосибир- ская область | Томская область | Кемеровская область | Алтайский край | Казахская ССР | Хакасская автономная область | Красноярский край | Иркутская область | Бурятская АССР | Читинская область | Амурская область | Еврейская автономная область | Хабаровский край | Приморский край |
| | | 726 840 | 85 710 | 13 040 | 150370 | 68 500 | 9180 | 17 400 | 88 350 | 79 140 | 17 150 | 20 200 | 22 400 | 8560 | 50 410 |
| Яшкинский | 26 250 | 202 | 116 | 190 | 427 | 854 | 837 | 562 | 1648 | 2105 | | | | | |
| Чернореченский | 160 420 | 58 | 373 | 474 | 170 | 597 | 1094 | 819 | 1905 | 2362 | 2916 | | | | |
| Кузнецкий | 127 870 | 449 | 541 | 311 | 312 | 739 | 1262 | 987 | 2073 | 2530 | 3084 | 4864 | | | |
| Красноярский | 66 440 | 777 | 635 | 765 | 1002 | 1429 | 656 | 13 | 1073 | 1530 | 2084 | 3364 | 4240 | | |
| Иркутский | 21 460 | 1809 | 1667 | 1797 | 2034 | 2461 | 1688 | 1045 | 49 | 506 | 1060 | 2840 | 3216 | 3388 | 4158 |
| Тимлюйский | 70 620 | 2210 | 2068 | 2198 | 2435 | 2862 | 2089 | 1446 | 360 | 97 | 651 | 2431 | 2807 | 2979 | 3749 |
| Теплоозерский | 147 700 | | | | 5152 | 5579 | 4806 | 4163 | 3077 | 2612 | 2066 | 502 | 90 | 262 | 1032 |
| Сласский | 106 080 | | | | 5937 | 6364 | 5591 | 4948 | 3862 | 3397 | 2851 | 1286 | 695 | 523 | 246 |

Motsvarande transporttablåer med enhetskostnaden angiven i "tariffkostnad" och "självkostnad" har uppgjorts. Av utrymmesskäl medtas dessa inte här.

Optimeringen genomförs med tillämpning av en transport-algorithm. Vid denna beräkning gäller att enhetskostnader som inte angivits i transporttablåerna ges ett godtyckligt valt värde som avsevärt överstiger de som anges i tablåerna.

Resultatet av beräkningarna i det fall problemet gäller minimering av transportarbete framgår av nedanstående tablå. I tablåen anges, för aktuell kombination fabrik/avnämarområde, i den övre raden tilldelning enligt den tidigare föreliggande planen och i den undre tilldelning enligt optimering.

| Leverantörer | Kapacitet | Mottagare och efterfrågan | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|-----------|---------------------------|-----------------|---------------------|----------------|---------------|------------------------------|-------------------|-------------------|----------------|-------------------|------------------|----------------------------|------------------|-----------------|
| | | Новосибирская область | Томская область | Кемеровская область | Алтайский край | Казакская ССР | Хакасская автономная область | Красноярский край | Иркутская область | Бурятская АССР | Читинская область | Амурская область | Ерейска автономная область | Хабаровский край | Приморский край |
| | 726 840 | 85 710 | 13 040 | 150 370 | 68 500 | 9180 | 17 400 | 88 350 | 79 140 | 17 150 | 20 200 | 22 400 | 8560 | 50 410 | 96 430 |
| Яшкинский | 26 250 | 1 470 | 12 860 | 11 920 | | | | | | | | | | | |
| | | — | 780 | 25 470 | | | | | | | | | | | |
| Чернореченский | 160 420 | 84 060 | — | 22 940 | 50 820 | 2600 | | | | | | | | | |
| | | 85 710 | — | — | 65 530 | 9180 | | | | | | | | | |
| Кузнецкий | 127 870 | | 60 | 106 410 | 17 380 | 4020 | | | | | | | | | |
| | | | — | 124 900 | 2 970 | — | | | | | | | | | |
| Красноярский | 66 440 | | 12 260 | 5 460 | | | 10 320 | 50 540 | 120 | | | | | | |
| | | | — | — | | | 17 400 | 36 780 | — | | | | | | |
| Иркутский | 21 460 | | | | | | | 1 680 | 19 780 | | | | | | |
| | | | | | | | | 21 460 | — | | | | | | |
| Тимлюйский | 70 620 | 180 | 120 | 3 640 | 300 | 2560 | 7 080 | 36 130 | 12 500 | 8 110 | | | | | |
| | | — | — | — | — | — | — | 30 110 | 40 510 | — | | | | | |
| Теплоозерский | 147 700 | | | | | | | | 46 200 | 8 490 | 20 200 | 22 160 | 2720 | 45 950 | 1 980 |
| | | | | | | | | | 38 630 | 17 150 | 20 200 | 22 400 | 8560 | 40 760 | — |
| Спасский | 106 080 | | | | | | | | 540 | 550 | — | 240 | 5840 | 4 460 | 94 450 |
| | | | | | | | | | — | — | — | — | — | 9 650 | 96 430 |

För var och en av de transportplaner, som de tre optimeringskriterierna resulterar i, beräknas objektfunktionens värde. Denna beräkning sker med alternativa enhetskostnader, avstånd, tariff och "självkostnad".

Objektfunktionernas värde jämförs med motsvarande värde beräknat med utgångspunkt från den redan föreliggande transportplanen.

Resultatet av beräkningarna har sammanställts i nedanstående tablå.

| | Totalt transport- arbete tonkm | Totala "tariff- kostnader" Rbl | Totala "själv- kostnader" Rbl |
|---------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------|
| A. Konventionell transportplan | 440402190 | 1886319 | 1366757 |
| B. Optimal trans- portplan | | | |
| a/ minimera transport- arbetet | <u>423374620</u> | 1807642 | 1315303 |
| b/ minimera "tariffkost- naden" | 424061180 | <u>1806226</u> | 1316697 |
| c/ minimera "självkost- naden" | 423374620 | 1851140 | <u>1315299</u> |
| C. Besparingar i % $\frac{(A-B)}{A}$ | | | |
| a/ | 3,87 | 4,17 | 3,76 |
| b/ | 3,71 | 4,25 | 3,66 |
| c/ | 3,87 | 1,86 | 3,76 |

Problem B

Inledningsvis anfördes att olika cementkvaliteter tillverkas. Vär-
det av dessa kvaliteter varierar. En viss mängd av en kvalitet
kan substitueras av en annan kvalitet. Uppgiften är att bestäm-
ma den optimala transportplanen om denna substitutionsmöjlighet
beaktas. (Denna typ av uppgift är en vanligt förekommande till-
lämpning inom Östblocksekonomin, jämför Judin - Golstein (1970)
och Kadlec - Vodáček (1968)).

Den redan föreliggande planen utvisar den planerade försörjning-
en av de 14 administrativa områdena från de åtta cementfabriker-
na. Planerna anger försörjningen uppdelad på cementkvaliteter-
na "300", och "400" och "500".

För optimeringsberäkningen föreligger två transporttablåer, den ena innehållande transportavstånd och den andra "tariffkostnader". Dessutom anges kapacitet resp tilldelning per kvalitet.

De olika cementkvaliteterna omräknas till en enhetlig kvalitet, kvalitet "400". För denna omräkning utnyttjas följande "relativa värden" av de olika kvaliteterna;

| | | |
|----------|---------|------|
| kvalitet | "300" | 0,85 |
| | "400" | 1,00 |
| | "500" | 1,15 |
| | ("600") | 1,30 |

För varje fabrik anges produktionen per kvalitet, uttryckt i ekvivalent mängd av kval "400". Fabrik A skall leverera 23250 ton "400" och 3000 ton "500". Vid beräkningarna arbetar man sålunda med 23250 ton "400" och $3000 \times 1,15 = 3450$ ton av "500".

Tilldelningen till de administrativa områdena uttrycks i ekvivalentmängd "400".

Eftersom beräkningarna genomförs för omräknade kvantiteter måste jämväl enhetskostnaden i transporttablåen omräknas; det är de verkliga kvantiteterna som skall transporteras. Om avståndet mellan fabrik A och "kund 1" är 202 km måste det omräknade transportavståndet för kvalitet "500" vara $202 : 1,15 = 176$ km.

De framräknade storheterna sammanställs i en transporttablå. Denna kommer att innehålla 16 rader och 14 kolumner. För det fall "enhetskostnaden" uttrycks i transportavstånd erhåller transporttablåen följande utseende.

| Leverantörer | Cementkvalitet | Kapacitet | Mottagare och efterfrågan | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------|----------------|-----------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|-------------------|--------------------|----------------------------------------------------|------------------------|----------------------|-------------------|----------------------|---------------------|-------------------------------------------|-----------------------|----------------------|
| | | | Новоси- бирская область | Томская область | Кемеров- ская об- ласть | Алтайский край | Кемеровская ССР | Хабаров- ская ав- томоб- ная об- ласть | Краснояр- ский край | Иркутская область | Бурятская АССР | Читинская область | Амурская область | Еврейская автоном- ная об- ласть | Хабаров- ский край | Гурьев- ский край |
| | | | 708 462 | 84 906 | 13 013 | 107 229 | 62 689 | 85 559 | 13 671 | 85 815 | 77 817 | 16 413 | 20 812 | 24 098 | 8 704 | 53 090 |
| Яшкинский | 400 | 23 250 | 1 470 | 12 860 | 8 920 | | | | | | | | | | | |
| | | | — | 411 | 22 839 | | | | | | | | | | | |
| | 500 | 3 450 | | | 3 450 | | | | | | | | | | | |
| Черноречен- ский | 300 | 41 956 | 17 000 | | 2 703 | 22 100 | 153 | | | | | | | | | |
| | | | 41 956 | | — | — | — | | | | | | | | | |
| | 400 | 83 200 | 49 420 | | 10 940 | 20 480 | 2 360 | | | | | | | | | |
| | | | 42 950 | | — | 40 250 | — | | | | | | | | | |
| Кузнецкий | 500 | 32 039 | 16 836 | — | 10 143 | 4 991 | 69 | | | | | | | | | |
| | | | — | 1 041 | — | 22 439 | 8 559 | | | | | | | | | |
| Краснояр- ский | 300 | 95 940 | | 51 | 77 954 | 14 954 | 3 417 | | | | | | | | | |
| | | | | — | 95 940 | — | — | | | | | | | | | |
| | 400 | 15 000 | | | 14 700 | 300 | | | | | | | | | | |
| | | | | | 15 000 | — | | | | | | | | | | |
| Краснояр- ский | 300 | 13 107 | | | 1 989 | | | 2 907 | 8 211 | | | | | | | |
| | | | | | — | — | — | — | 13 107 | | | | | | | |
| | 400 | 32 350 | | | 1 920 | | | 4 080 | 26 350 | | | | | | | |
| Краснояр- ский | | | | | — | — | — | — | 32 350 | | | | | | | |
| | 500 | 21 471 | | | 1 380 | | | 3 243 | 16 710 | 138 | | | | | | |
| | | | 11 561 | — | — | | | — | 9 910 | — | | | | | | |
| Иркутский | 400 | 21 460 | | | | | | | 1 680 | 19 780 | | | | | | |
| | | | | | | | | | 7 210 | 14 250 | | | | | | |
| Тимлюйский | 300 | 39 967 | | 102 | 2 890 | | | 3 621 | 18 504 | 8 721 | 6 129 | | | | | |
| | | | | — | — | — | — | — | — | 39 967 | — | | | | | |
| | 400 | 23 600 | 180 | | 240 | 300 | 2 560 | 2 820 | 14 300 | 2 240 | 900 | | | | | |
| | | | — | — | — | — | — | — | — | 23 600 | — | | | | | |
| Теплоозер- ский | 400 | 108 420 | | | | | | | | 44 880 | 6 200 | 16 120 | 10 840 | 1 760 | 28 080 | 540 |
| | | | | | | | | | | — | 11 150 | 20 812 | 24 098 | 8 704 | 43 656 | — |
| Теплоозер- ский | | | | | | | | | | 1 518 | 2 634 | 4 692 | 13 018 | 1 104 | 20 550 | 1 656 |
| | 500 | 45 172 | | | | | | 16 671 | 23 238 | — | 5 263 | — | — | — | — | — |
| Спасский | 400 | 106 080 | | | | | | | | 540 | 550 | | 240 | 5 840 | 4 460 | 94 450 |
| | | | | | | | | | | — | — | | — | — | 9 434 | 96 646 |

FIG. 7. Cementförsörjning, Sibirien. Optimal transportplan.

| Leverantörer | Cementkvalitet | Mottagare och efterfrågan | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|----------------|---------------------------|-----------------------|-----------------|---------------------|----------------|---------------|------------------------------|-------------------|-------------------|----------------|-------------------|------------------|-------------------------------|------------------|-----------------|
| | | Kapacitet | Новосибирская область | Томская область | Кемеровская область | Алтайский край | Казахская ССР | Хакасская автономная область | Красноярский край | Иркутская область | Бурятская АССР | Читинская область | Амурская область | Бурейнская автономная область | Хабаровский край | Приморский край |
| | | | 706 462 | 84 906 | 13 013 | 137 229 | 62 689 | 85 559 | 16 671 | 85 815 | 77 817 | 16 413 | 20 812 | 24 098 | 8704 | 53 090 |
| Яшкинский | 400 | 23 250 | 202 | 116 | 190 | 427 | 854 | 837 | 562 | 1648 | 2105 | 2652 | 4439 | 4815 | 4987 | 5757 |
| | 500 | 3 450 | 176 | 101 | 165 | 371 | 743 | 728 | 489 | 1433 | 1830 | 2306 | 3860 | 4187 | 4433 | 5006 |
| Чернореченский | 300 | 41 956 | 68 | 439 | 558 | 200 | 702 | 1287 | 964 | 2241 | 2779 | 3431 | 5525 | 5667 | 6169 | 7075 |
| | 400 | 83 200 | 58 | 373 | 474 | 170 | 597 | 1094 | 819 | 1905 | 2362 | 2916 | 4696 | 5072 | 5244 | 6014 |
| | 500 | 32 039 | 50 | 324 | 412 | 148 | 519 | 951 | 712 | 1657 | 2054 | 2536 | 4083 | 4410 | 4560 | 5230 |
| Кузнецкий | 300 | 95 940 | 528 | 636 | 366 | 367 | 869 | 1485 | 1161 | 2438 | 2976 | 3628 | 5722 | 6165 | 6367 | 7273 |
| | 400 | 15 000 | 449 | 541 | 311 | 312 | 739 | 1262 | 987 | 2073 | 2530 | 3084 | 4864 | 5240 | 5412 | 6182 |
| Красноярский | 300 | 13 107 | 914 | 747 | 900 | 1179 | 1681 | 772 | 15 | 1262 | 1800 | 2452 | 4546 | 4988 | 5190 | 6096 |
| | 400 | 32 350 | 777 | 635 | 765 | 1002 | 1429 | 656 | 13 | 1073 | 1530 | 2084 | 3864 | 4240 | 4412 | 5182 |
| | 500 | 21 471 | 676 | 552 | 665 | 871 | 1243 | 570 | 11 | 933 | 1330 | 1812 | 3360 | 3687 | 3837 | 4506 |
| Иркутский | 400 | 21 460 | 1809 | 1667 | 1797 | 2034 | 2461 | 1688 | 1045 | 49 | 506 | 1060 | 2840 | 3216 | 3388 | 4158 |
| | 300 | 39 967 | 2600 | 2433 | 2586 | 2865 | 3367 | 2458 | 1701 | 424 | 114 | 766 | 2860 | 3302 | 3305 | 4411 |
| | 400 | 23 600 | 2210 | 2068 | 2198 | 2435 | 2862 | 2089 | 1446 | 360 | 97 | 651 | 2431 | 2807 | 2979 | 3749 |
| Теплоозерский | 400 | 108 420 | 4927 | 4785 | 4915 | 5152 | 5579 | 4806 | 4163 | 3077 | 2620 | 2066 | 502 | 90 | 262 | 1032 |
| | 500 | 45 172 | 4283 | 4161 | 4274 | 4480 | 4851 | 4179 | 3620 | 2676 | 2278 | 1797 | 437 | 78 | 228 | 897 |
| Спасский | 400 | 106 080 | 5012 | 5570 | 5700 | 5937 | 6364 | 5591 | 4948 | 3862 | 3405 | 2851 | 1287 | 695 | 523 | 246 |

Optimeringen sker med hjälp av tidigare beskrivna algoritmer. Den optimala transportplanen för kriteriet "minsta transportarbete" framgår av FIG. 7. I denna anges jämväl tilldelning enligt den "konventionella" planen; det övre värdet.

För de två undersökta optimeringskriterierna beräknas objektfunktionens värde. De funna värdena ställs i relation till motsvarande värden baserade på den konventionella planen. Resultatet av dessa beräkningar framgår av nedanstående tablå.

| | Totalt transportarbete ton km | Totala "tariffkostnaden" Rbl |
|-------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| A. Konventionella transportplan | 440402190 | 1886319 |
| B. Optimal plan | 396813159 | 1731124 |
| C. Besparing i % $\frac{A-B}{A}$ | 9,90 | 8,23 |

En jämförelse med beräkningsresultaten för problem A visar att, om substitutionsmöjligheterna beaktas, avsevärda transportbesparingar kan göras.

Problem C

I de två tidigare behandlade problemen har beräkningarna baserats på förutsättningen att sänkorna utgörs av 14 administrativa områden. För att utröna vilken inverkan en större detaljeringsgrad har på resultatet genomförs beräkningarna under förutsättning att sänkorna utgörs av 79 delområden.

En konventionell plan med åtta fabriker och 79 delområden föreligger. Denna innehåller uppgift om kvalitetsfördelningen på fabriker/delområden. För optimeringen föreligger två transporttablåer. Den ena avser enhetskostnad transportavstånd medan den andra avser "tariffkostnad".

Beräkningarna genomförs på samma sätt som för problem A och problem B. Objektfunktionernas optimala värden beräknas.

Resultatet av beräkningarna framgår av nedanstående tablå. I

denna har jämväl resultaten för problem A och problem B införts .

Matris "8 x 14" avser problem A. Matris "16 x 14" avser problem B, dvs substitutionsmöjligheterna har beaktats .

De övriga två raderna avser problem C , dvs optimering vid större detaljeringsgrad .

Matris "8 x 79" avser det fall då inverkan av cementkvaliteterna inte beaktas , medan "16 x 79" avser substitutionsfallet .

| Matris | Transportarbete | | Möjlig förbättring % av "Plan" |
|---------|-----------------|-----------|--------------------------------|
| | Plan | Opt | |
| 8 x 14 | 440402190 | 423374620 | 3,87 |
| 16 x 14 | 440402190 | 396813159 | 9,9 |
| 8 x 79 | 441515990 | 423609100 | 4,0 |
| 16 x 79 | 441515990 | 392416423 | 11,12 |

| Matris | Tariffkostnad | | Möjlig förbättring % av "Plan" |
|---------|---------------|---------|--------------------------------|
| | Plan | Opt | |
| 8 x 14 | 1886319 | 1806226 | 4,25 |
| 16 x 14 | 1886319 | 1731124 | 8,23 |
| 8 x 79 | 1903597 | 1785789 | 6,0 |
| 16 x 79 | 1903597 | 1707876 | 10,28 |

3.1.3 Övriga tillämpningar

I litteraturen redovisas åtskilliga praktiska tillämpningar av den typ som åskådliggjorts av praktikfallet .

Sovjetunionen

Mizdukov - Sokolov (1965) anger att vecko- och månadsplaneringen av sandförsörjningen till Moskvaområdets byggplatser sker på detta sätt .

Samma författare redovisar optimeringsberäkningar avseende transport av krossat stenmaterial för Ryska Republiken. Beräkningarna har genomförts för olika produkttyper med alternativa optimeringskriterier. Optimeringsberäkningarna avslöjade betydande besparingsmöjligheter.

Kadlec - Vodáček (1968) anger att man i Sovjetunionen utnyttjar lösningsmetoderna för det klassiska transportproblemet framför allt för planering av godstransporter i storstadsområdena. Författarna anger följande exempel på planering av byggmaterialtransporter.

I Moskva genomförs var femte dag optimeringsberäkning avseende distribution av tegel från åtta tegelbruk till 200 byggplatser. I Gorki sker den månatliga tegeltransportplaneringen från 4 tegelbruk till 50 byggplatsområden på motsvarande sätt.

De faktiskt genomförda transportererna av byggnadssten på järnvägen Moskva - Krusk - Donbas under augusti månad 1958 har jämförts med en optimal transportplan. Betydande skillnader konstaterades mellan faktiskt genomförda transporter och optimalt genomförda.

Planering av cementtransporter sker i stor omfattning på det sätt som illustrerats av praktikfallet - en lång rad exempel har redovisats i litteraturen.

Tjeckoslovakien

Enligt Kadlec - Vodáček (1968) utnyttjas sedan 1959 regelbundet optimeringsmetoder för praktiska planeringsuppgifter. Detta år genomfördes vid det ekonomiska institutet vid Tjeckoslovaikiens vetenskapsakademi en rad optimeringsberäkningar avseende tegeldistribution.

För Ostrava - området gjordes för maj månad 1959 jämförelser mellan faktiskt transportarbete för tegel och transportarbetet vid en optimal lösning. Problemet omfattade 26 tegelbruk och

60 avnämrområden. Motsvarande beräkningar genomfördes för Gottwaldow - området. Detta problem omfattade 27 leverantörer och 37 avnämare. Betydande besparingar hade kunnat göras om transportererna genomförts på ett optimalt sätt.

Cementdistributionen har blivit föremål för ett flertal undersökningar. För Brno - området ställdes det verkliga transportarbetet för cement "P 450" under första kvartalet 1960 i relation till transportarbetet vid en optimal transportplan. Jämförelsen visade att den genomsnittliga transportsträckan skulle ha kunnat minskas från 139 km till 117 km.

Motsvarande beräkningar har genomförts för cementkvalitet "P 350". Detta problem omfattar 4 tegelbruk och 411 avnämare. Beräkningarna visade att den genomsnittliga transportsträckan kunnat minskas från 122,4 km till 110 km.

Polen

Enligt Lesz (1968) har undersökningar genomförts av Byggnads- och byggmaterialministeriet, Institutet för geografi, Institutet för intern handel, Institutet för ekonomisk forskning, Planeringskommissionen och Biltransportforskningsinstitutet.

Huvudsakligen har undersökningarna avsett transport av grus, olika typer av tegel, cement, kalk, sten och dolomit.

Optimeringsberäkningarna har till c:a 40% baserats på verkligt utförda transporter och till c:a 60% på planerade transporter.

Jämförelser har gjorts mellan optimala och utförda/planerade transporter. Resultatet av sådana jämförelser framgår av sammanställning i slutet av detta avsnitt.

DDR

I Östtyskland utnyttjas sedan åtskilliga år optimeringsmetoder för bestämning av transportplaner.



FIG. 8. Kalktransporter, DDR. Transportvägar före respektive efter optimering.

Kadlec - Vodáček (1968) har gjort en sammanställning av sådana tillämpningar. Uppgifter ur denna sammanställning framgår av efterföljande delavsnitt.

De tillämpningar som presenterats av Kadlec - Vodáček avser i huvudsak optimering av järnvägstransporter. Problemen omfattar hela DDR eller större delområden. På initiativ av transportföretag har optimala transportplaner utarbetats för mindre områden. De avser bl.a byggnadsmaterial, speciellt sandmaterial och tegel, trä och stål. Sådana planer föreligger i stor omfattning.

En optimeringsberäkning avseende transport av kalk inom DDR har genomförts. Resultatet av denna beräkning åskådliggörs i FIG. 8. Den övre delen av FIG. illustrerar transportförbindelserna före optimeringen; det genomsnittliga transportavståndet uppgår till 175,7 km. Den undre delen av FIG. avser den kostnadsoptimala transportplanen. Det genomsnittliga transportavståndet uppgår här till 146,2 km.

Sammanställning

I den tablå som redovisas på nästa sida har sammanställts vissa uppgifter från de beskrivna tillämpningarna.

| Land Material | Tid- rymd | Område | Problem- omfång rader x x kol | Bespa- ringsmög- lighet % | Optime- rings- kriterium |
|---------------------------------------|------------------|-------------------|----------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| <u>Sovjet</u> Sand | 10 dgr | Moskva | 10 x 250 | 11,3-14 | tonkm, kostn |
| Tegel | 5 dgr | Moskva | 8 x 200 | 11,2-17 | tonkm, kostn |
| Tegel | 1 mån | Gorki | 4 x 50 | > 16 | |
| Sten | aug 58 | Moskva- Donbas | | 5,3 | tonkm |
| Kross- prod | | Ryska rep | 17 x 31, 24 x 23, 48 x 34 | 18 - 22 | tonkm |
| <u>Tjeckoslo- vakien</u> Tegel | maj 59 | Ostrava | 26 x 60 | 21,8 | tonkm |
| Tegel | | Gott- waldow | 27 x 37 | >20 | tonkm |
| Cement "P 450" | I 160 | Brno | 5 x 111 | 15 | tonkm |
| Cement "P 350" | I 160 | Brno | 4 x 411 | 15 | tonkm |
| <u>Polen</u> Tegel | | | | 14 | kostn |
| Kalk- sand- sten | | | | 13,5 | kostn |
| Cement | | | | 4-10,5 | tonkm |
| Slagg | | | | 11,5 | tonkm |
| Kalksten | | | | 11 | tonkm |
| Dolomit | | | | 7 | tonkm |
| <u>DDR</u> Grus | III 161 | Dres- den | 8 x 44 | 17 | tonkm |
| Tegel | IV 161 | Dres- den | 24 x 64 | 20,6 | tonkm |
| Kalk | IV 161 | DDR | 5 x 85 | 16,8 | vagnkm |
| Cemnt Singel | III 162 I 163 | DDR DDR | 12 x 42 18 x 172 | 4 2,3 | vagnkm tonkm |

3.2 Fördelning av resurser

3.2.1 Problemet

Problemställning

En av de från praktisk synpunkt viktigaste utvidgningarna av det klassiska transportproblemet är det s.k. fördelningsproblemet. Vad som karakteriserar denna problemtyp framgår av det följande.

Av ett visst resursslag finns ett flertal olika typer tillgängliga. De kvantiteter av de enskilda resurstyperna, som står till förfogande under planperioden är kända.

Under planperioden skall ett antal arbetsuppgifter genomföras vilka kräver insats av det resursslag som finns tillgängligt. De arbetsuppgifter som skall genomföras under planperioden är kända till art och omfattning.

De enskilda resurstyperna är mer eller mindre lämpade för insats på de enskilda arbetsuppgifterna - "resursproduktiviteten" varierar med arbetsuppgift. Problemet är att fördela tillgängliga resurser på arbetsuppgifter så att samtliga arbetsuppgifter genomförs under det att totalkostnaderna minimeras.

Matematisk formulering

Problemtypen kommer att illustreras med ett praktikfall. Detta avser optimal fördelning av transportresurser på transportuppdrag. Vi låter den matematiska formuleringen av praktikfallet illustrera fördelningsproblemet.

Ett transportföretag disponerar transportmedel av m olika typer. Det antal enheter av typ i som disponeras under planperioden är a_i , ($i=1, \dots, m$).

Under planperioden skall n transportuppdrag genomföras. De enskilda transportuppdragens omfattning anges i ton. De betecknas med Q_j ; ($j=1, \dots, n$).

Kapaciteten för de enskilda transportmedelstyperna varierar med transportuppdrag. Beteckna den "praktiska transportkapaciteten" för typ i insatt på arbetsuppgift j med w_{ij} ton per planeringsperiod och fordon.

Beteckna särkostnaden för transportmedelstyp i insatt på arbetsuppgift j med c_{ij} kr per planeringsperiod och fordon.

Betecknar vi med x_{ij} antalet enheter av typ i som skall sättas in på arbetsuppgift j får problemet följande matematiska formulering,

$$\min K = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq \alpha_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} w_{ij} = Q_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (1.4)$$

Lösning

Vi konstaterar att fördelningsproblemet endast i ringa grad skiljer sig från de transportproblem vi tidigare behandlat. Sålunda är skillnaden mellan fördelningsproblem och ett obalanserat transportproblem endast att bivillkoret (1.3) har olika uppbyggnad.

På grund av likheten med det klassiska transportproblemet benämns fördelningsproblemet stundom det "allmänna transportproblemet".

Under vissa förutsättningar, nämligen om w_{ij} kan ersättas med $\alpha_i \beta_j$, kan fördelningsproblemet omformuleras till ett klassiskt transportproblem: Konventionella transportalgoritmer kan då ut-

| № п/п | Fordonsstyp | Lastkapacitet | Fordons antal | Objekt | | | | | | | | | | | | | | Summa | |
|--------------------------|---------------------------|---------------|------------------|-------------------|---------|---------|--------|--------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|------|
| | | | | Tegelbrukfabriker | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Transportbehov | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | | |
| | | | | Järnvägsstationer | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Objekt | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Tegelbrukfabriker | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | MNC | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Maka dam | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Övriga fabriker | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Gips block | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Betong | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | Övriga | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | ГАЗ-51Ф, ГАЗ-52Ф | 2 | 56 | 228,6 | 168,9 | 400,9 | 493,5 | 315,3 | 1912,2 | 254 | 595 | 442 | 160 | 258 | 218 | 549 | 7934 | | |
| 2 | ГАЗ-51А и ГАЗ-52 | 2,5 | 107 | 51,81 | 101,61 | 105,99 | 91,401 | 95,94 | 182,113 | 113 | 107 | | | | | | 75 | | |
| 3 | ГАЗ-53 | 3 | 9 | 65,12 | 112,981 | 112,981 | 105,87 | 16,173 | | 15 | 173 | | 12 | 1568 | | 9 | 7015 | | |
| 4 | ЗИЛ-130, ЗИЛ-159, ГАЗ-51В | 4 | 71 | | | | 13,149 | 152 | 213,05 | | 16 | 185 | 8 | 14,95 | | 1564 | 1564 | | |
| 5 | ГАЗ-51 с прицепом | 4 | 25 | 78 | | | 13,149 | 2,377 | | 25 | 2125 | 15 | 2175 | 10 | 221 | 2 | 1500 | | |
| 6 | ГАЗ-53 с прицепом | 5 | 28 | | | | 13,149 | 2,377 | | | | | | 14 | 195 | 10 | 187 | | |
| 7 | Шкода РТ-116 | 7 | 10 | | | | | | | 35 | 2375 | | | | 14 | 273 | | | |
| 8 | КАЗ с прицепом | 7 | 45 | 13,6 | 132 | 22,6 | 217 | 1735 | | | | | | | | | 14 | 145 | |
| 9 | ЗИЛ-159 с прицепом | 8 | 26 | | | | | 30,6 | 1715 | | 32 | 2816 | 24 | 30 | | | 16 | 245 | |
| 10 | ЗИЛ-130 с прицепом | 9 | 37 | | | | | 31 | 155 | 36 | 27 | 36 | 219 | 16 | 252 | 27 | 273 | 18 | 2515 |
| 11 | Шкода РТ-106 с прицепом | 14 | 53 | | | | | | | 56 | 33 | 62 | 3487 | 28 | 387 | 42 | 281 | 28 | 35 |
| Transportkostnad Rbl | | | | 3652 | 283,7 | 331,8 | 406 | 375 | 1233,9 | 192,2 | 447,8 | 489,6 | 123,3 | 129,1 | 418,2 | 384,1 | 3343,7 | 8522,6 | |
| Vinst Rbl | | | | 175 | 41,8 | 136,1 | 265,4 | 43,9 | 1109,8 | 79,6 | 277,9 | 308,8 | 43,3 | 113,6 | 65,9 | 406,7 | 902,6 | 3814,9 | |
| Erforderligt antal bilar | | | | 45 | 28 | 23 | 28 | 34 | 83 | 8 | 15 | 17 | 5 | 7 | 16 | 14 | 145 | 469 | |

FIG. 9.1. Fördelning av transportresurser, Kiev. Utgångsdata.

nyttjas för lösningen .

I de fall då w_{ij} inte kan ersättas med $\alpha_i \cdot \beta_j$ måste andra lösningsförfaranden tillgripas . Sålunda kan lösning ske med hjälp av den i BIL 2 beskrivna simplexalgoritmen . Jämför BIL 2 , speciellt avsnitt 3.1 Exempel 1 .

För lösning av fördelningsproblem står emellertid även en rad specialförfaranden till buds . Dessa förfaranden , som vanligtvis baseras på simplexförfarandet , behandlas inte i denna rapport . En utförlig framställning finns i Judin - Golstein (1970) .

3.2.2 Praktikfall . Fördelning av transportmedel på transportuppdrag

Följande praktikfall illustrerar hur tillgängliga transportmedel på ett optimalt sätt fördelas på transportuppdrag . Det redovisar det förfarande som tillämpas inom ett transportföretag i Kiev .

Framställningen baseras på en uppsats i tidskriften *Automobilny Transport* (1971/3) . Utgångsdata för optimeringen framgår av FIG . 9.1 .

Transportföretaget disponerar 535 fordon . Dessa fordon utnyttjas för transport vid 13 större objekt , varav 7 byggmaterialfabriker , och ett 50 - tal mindre .

Fordonen är av varierande typ . Dessa är mer eller mindre lämpade för de enskilda transportuppgifterna . Fordonen skall fördelas på transportuppgifter på ett optimalt sätt .

Optimeringen genomförs med tre alternativa optimeringskriterier . I denna framställning behandlas endast kriteriet "minsta kostnader" .

Utgångspunkt för beräkningarna är det planerade transportbehovet under planperioden vid de objekt som betjänas av företaget . För de 13 stora objekten föreligger individuella data . Det planerade transportbehovet för småobjekten har sammanförts .

| № п/п | Fordonstyp | Fordons antal | | U | | | | | | | | | | Q1 | | | | Summa | | |
|--------------------------|----------------------------------------|------------------|------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----------------|-------------------------|-------------------------|
| | | Lastkapacitet | efter optimering | Objekt | | | | | | | | | | Tegelbruk/döb1 | | | | | | |
| | | | | Järnvägsstationer | | | | | | | | | | N° 9 | | N° 11 | | | MPC | |
| | | | | 1-2-е отделен и.п. | 3-е отделен и.п. | 4-е отделен и.п. | 5-е отделен и.п. | 3-й-е отделен и.п. | 4-е отделен и.п. | 5-е отделен и.п. | 6-е отделен и.п. | 7-е отделен и.п. | 8-е отделен и.п. | 9-е отделен и.п. | 10-е отделен и.п. | 11-е отделен и.п. | 12-е отделен и.п. | | 13-е отделен и.п. | 14-е отделен и.п. |
| | | | | Transportbehov | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | ГАЗ-51Ф, ГАЗ-52Ф | 2 | 0 | 230,7 | 163,2 | 420 | 516,7 | 343 | 186,72 | 225 | 560 | 438 | 736 | 240 | 224 | 606 | 1919 | 7808,8 | | |
| 2 | ГАЗ-51иАП-28 | 25 | 107 | 51,81 (3) 8,4 | | 9,8 (1) 2,4 | | 10,3 (1) 2,4 | 10,3 (1) 2,4 | | | | | | | | | 7,5 (1) 0,1 | | |
| 3 | ГАЗ-53 | 3 | 9 | | | | 10,3 (1) 2,4 | | 14,9 (1) 4,0 | | | | | | | | | | | |
| 4 | ЗИЛ-150, ЗИЛ-154, ГАЗ-51П | 4 | 71 | 9,104 (2) 4,5 | | | | 21,9 (1) 4,5 | 16,3 (1) 3,6 | 25 | 213 (1) 5,5 | | 20 (1) 3,6 | | | 15 (1) 3,6 | | | | |
| 5 | ГАЗ-51 с прицепом | 4 | 25 | | | | | | 16,3 (1) 3,6 | | | | | | | | | | | |
| 6 | ГАЗ-53 с прицепом | 5 | 28 | 5,6 (1) 6,3 | | | | | 23,3 (1) 3,6 | | | 18 (1) 6,6 | | | | 18 (1) 6,6 | | | | |
| 7 | Шкода PT-706 | 7 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | КАЗ с полуприце - пома Д. А.З | 7 | 45 | 17,8 (1) 17,1 | | | | | 217 (1) 18,4 | | | | | | | | | | | |
| 9 | ЗИЛ-154 с прицепом КАЗ-754 | 8 | 26 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | ЗИЛ-130 с прицепом | 9 | 37 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | Шкода PT-706 с при- цепом, КАЗ 52А3 | 14 | 53 | | | 52,5 (1) 31,5 | | | | | 56 (1) 33,3 | 42 (1) 37,6 | | 28 (1) 27,6 | | 42 (1) 38,1 | 28 (1) 31,9 | 28 (1) 31,9 | | |
| Trans portkostnad Rbl | | 246,6 | 158 | 180,8 | 371,9 | 330 | 1328,8 | 191,7 | 403,4 | 372 | 94,9 | 163 | 277,6 | 453,5 | 3131,3 | 7711,5 | | | | |
| Vinst Rbl | | 153,7 | 212 | 252 | 335,2 | 84 | 990,6 | 49,5 | 279 | 582,6 | 46,6 | 63 | 220,8 | 410,3 | 1107,0 | 4735,3 | | | | |
| Erforderligt antal bilar | | 24 | 12 | 8 | 23 | 35 | 94 | 9 | 13 | 11 | 5 | 10 | 8 | 18 | 139 | 409 | | | | |

FIG. 9.2. Fördelning av transportresurser, Kiew. Optimal lösning.

De 535 fordonen är av 11 olika typer. Den "praktiska kapaciteten", som påverkas av transportavstånd, vägstandard, hanteringsförhållanden osv är känd för varje fordonstyp/transportuppgift. Samma är förhållandet med särkostnaderna.

I FIG. 9.1 anges i tabellens vänsterkolumn de 11 fordons typerna. I tabellhuvudet anges de transportbehov som föreligger vid de olika objekten.

För varje kombination fordonstyp/objekt anges tre värden. Av dessa värden är ett inringat. Detta anger det antal fordon som i utgångsläget tilldelats de olika transportuppdragen. Av de återstående två anger det övre den "praktiska transportkapaciteten" i ton/fordon. Det undre värdet avser särkostnaden per fordon.

Optimering med avseende på kriteriet "minimera kostnaderna" genomförs på det sätt som beskrivits i föregående avsnitt. Resultatet av optimeringen framgår av FIG. 9.2.

3.2.3 Övriga tillämpningar

Den vanligaste typen av fördelningsproblem uppträder i samband med organisatoriska beslut. Ett exempel på denna typ ges av Hindanov - Danidow (1966). Författarna anger en modell för en optimal fördelning av betongelementproduktion på ett antal elementfabriker.

I "Glavvostrolisibstroj" ingår 23 elementfabriker. Vid samtliga dessa fabriker tillverkas en rad typiserade element. För att tillverkning skall kunna ske i tillräckligt långa serier strävar man efter specialisering. Härvid måste samtidigt beaktas tillverkningskostnadernas och transportkostnadernas förändring.

Vi skall här ange den matematiska formuleringen av problemet.

Beteckna tillverknings- och transportkostnaden för en enhet av elementtyp j , tillverkad i fabrik i och transporterad till avnäm-
are k med c_{ikj} .

Beteckna på motsvarande sätt med x_{ikj} antalet element av typ j som skall tillverkas i och levereras från fabrik i till avnämare k .

Antag att antalet fabriker är m , antalet avnämare l och antalet elementtyper n .

Med de angivna beteckningarna erhåller objektfunktionen följande utseende,

$$\min K = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l c_{ikj} x_{ikj} \quad (2.1)$$

Antas efterfrågan av elementtyp j hos avnämare k uppgå till d_{kj} under planperioden måste gälla

$$\sum_{i=1}^m x_{ikj} \geq d_{kj} \quad (j=1 \dots n; k=1 \dots l) \quad (2.2)$$

Vi förutsätter att den tillgängliga arbetstiden under planperioden är den begränsade faktorn vid fabrikena. Beteckna antalet arbetstimmar vid fabrik i med α_i . Beteckna vidare med P_{ij} den tidsåtgång som vid fabrik i krävs för tillverkning av en enhet av elementtyp j . Då måste gälla

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l P_{ij} x_{ikj} \leq \alpha_i \quad (i=1 \dots m) \quad (2.3)$$

Den angivna tillämpningen avser det fall då befintliga resurser fördelas på arbetsuppgifter. Även i samband med anskaffning av nya tillverknings- och transportresurser stöter man på fördelningsproblem. Till denna typ av tillämpningar återkommer vi i avsnittet "Lokaliseringsproblem - flerprodukttillverkning".

3.3 Bestämning av optimala transportrutter

3.3.1 Problemet

Problemställning

Med transportrutt avses en väg längs vilken ett visst fordon i återkommande turer genomför transportuppdrag.

En ofta förekommande uppgift i transportföretag är att bestämma förmånliga transportrutter. Situationen kan i korthet beskrivas på följande sätt.

I ett antal orter tillverkas olika produkter. Dessa produkter efterfrågas på ett antal platser. Fordon som transporterar en viss produkt från en ort till en annan kan utnyttjas för transport av produkter från denna ort osv.

Problemet är att lägga upp sådana transportrutter att transportuppgifterna kan genomföras till lägsta kostnad. Detta innebär att en avvägning måste ske mellan körningar med last och tomkörningar.

Bestämning av optimala transportrutter kan ske antingen som ett led i dimensionering av transportapparaten, eller för att erhålla optimalt utnyttjande av tillgängliga transportresurser. Båda dessa tillämpningar illustreras i följande delavsnitt.

Lösningsförfarande

För bestämning av optimala transportrutter har ett antal approximationsförfaranden utarbetats. De innebär i huvudsak följande.

En optimal transportplan avseende körning med lastade fordon upprättas. Detta sker med tillämpning av konventionella transportalgoritmer.

I nästa steg sker minimering av tomkörningarna. Härvid betraktas lossningspunkterna som källor för transportfordon. Sänkorna ut-

görs av lastningspunkterna.

Låt oss beteckna antalet fordon som blir tillgängliga i lossningspunkterna med α_i och antalet fordon som erfordras i lastningspunkterna med b_j . Låt oss vidare beteckna avståndet mellan lossnings- och lastningspunkter med l_{ij} samt antalet fordon som överförs från lossningspunkt i till lastningspunkt j med y_{ij} .

"Tomkörningsoptimeringen" kan då formuleras på följande sätt,

$$\min K = \sum_i \sum_j l_{ij} y_{ij} \quad (1.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{i=1}^m y_{ij} = b_j \quad (j=1 \dots n) \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{ij} = \alpha_i \quad (i=1 \dots m) \quad (1.3)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad (1.4)$$

Problemet är ett klassiskt transportproblem. Det löses med konventionella transportalgoritmer.

I det tredje steget samman knyts transportsträckor och tomkörningssträckor. Hur denna sammanknytning sker illustreras av tillämpningsexemplen.

3.3.2 Tillämpningsexempel

Bestämning av optimala transportrutter illustreras i det följande med två tillämpningsexempel. Det ena avser det fall då optimering görs som ett led i dimensionering av transportapparaten. Det andra exemplet, som redovisar en metod utarbetad inom "Comecon", avser det fall då transportresurser står till förfogande; problemet är att utnyttja dem på mest effektiva sätt.

Tillämpningsexemplen baseras på Buga - Kolupa (1966).

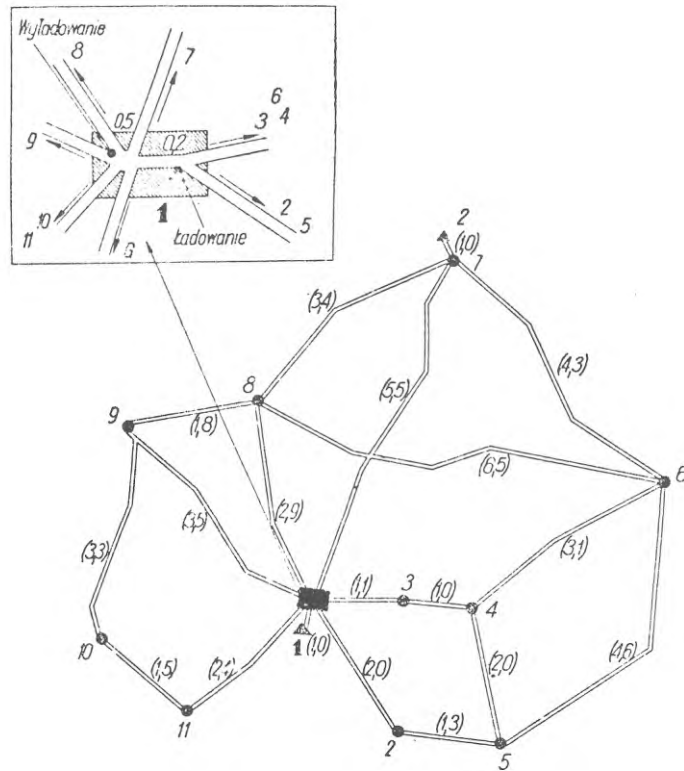


FIG. 10.1 Optimala transportrutter 1. Avstånd m.m.

| Varu slag | Transporter | | | | | |
|--------------|-------------|-----------|-----------------|-------|-----------|-----------------|
| | från | | | till | | |
| | Ort | Kvantitet | Antal fordon | Ort | Kvantitet | Antal fordon |
| a | 1 | 52 t | 15 | 9 | 38 t | 11 |
| | | | | 11 | 14 t | 4 |
| | 8 | 31 t | 9 | 7 | 31 t | 9 |
| | | | | | | |
| b | 2 | 79 t | 20 | 5 | 12 t | 3 |
| | | | | 6 | 60 t | 15 |
| | | | | 7 | 4 t | 1 |
| | | | | 11 | 3 t | 1 |
| c | 3 | 102 t | 26 | 1 | 36 t | 9 |
| | | | | 4 | 31 t | 8 |
| | | | | 5 | 15 t | 4 |
| | | | | 6 | 20 t | 5 |
| | 9 | 26,5 t | 9 | 1 | 8,5 t | 3 |
| | | | | 7 | 18 t | 6 |
| | 10 | 40 t | 14 | 1 | 40 t | 14 |
| | Summa | | 93 | Summa | | 93 |

FIG. 10.2. Optimala transportrutter 1. Transportmedelsbehov m.m.

Underlag för resursdimensionering

Mellan de platser som framgår av kartan i FIG 10.1 skall tre olika varuslag transporteras. Transporterna skall ske endast utefter de i FIG angivna vägarna. På vägarna anges avståndet mellan orterna; avståndet uttrycks i km.

Av FIG. 10.2 framgår vilka kvantiteter av de tre varuslagen a, b och c som skall transporteras från vissa orter till andra under en viss tidsperiod.

Det förutsätts att transporterna sker med en enhetlig fordons-typ. De olika varuslagen har olika volymvikt, varför lastförmågan hos fordonen varierar med varuslag. Det förutsätts att fordonen kan lasta 3,5 ton av varuslag a, 4,0 ton av varuslag b och 3 ton av varuslag c. Det antal fordonslastar som under dessa förutsättningar krävs anges i FIG. 10.2.

Vi konstaterar att redan i utgångsförutsättningarna transportvägar för lastade fordon bestämts. Vår första uppgift blir därför att bestämma sådana transportvägar att tomkörningarna minimeras.

Inledningsvis bestämmer vi "pendelrutter" med last. Härmed avses sådana sträckor utefter vilka transport skall ske i båda riktningarna. Här kan samma fordon utnyttjas; inga tomkörningar behöver förekomma.

Av FIG. 10.2 framgår att för transport från ort 1 till 9 krävs 11 fordonenheter och från ort 9 till 1 krävs 3. Vi kan sålunda konstatera att tre transporter kan utföras som pendelrutter.

Utnyttjade sträckor antecknas i en tablå. Härvid representerar tecknet $0 \uparrow 0$ sträcka med lasttransport och $0 - 0$ tomkörningssträcka.

I vårt fall förekommer endast en pendelrutt med last. Tablåen får följande utseende.

Lastningspunkt

| | 1 | 2 | 3 | 8 | 9 | 10 | a_i | |
|----------------|-------|------|-------|-------|------|------|-------|----|
| Lossningspunkt | 1 | (+7) | (25) | 16 | 24 | 30 | (34) | 23 |
| | 4 | 19 | 33 | (+10) | 50 | 56 | 60 | 8 |
| | 5 | 31 | (+13) | 30 | 62 | 68 | 72 | 7 |
| | 6 | 50 | (59) | (41) | 65 | 83 | 91 | 20 |
| | 7 | 57 | 75 | 66 | (34) | 52 | (85) | 16 |
| | 9 | 37 | 55 | 46 | 18 | (+2) | (33) | 8 |
| | 11 | 26 | 44 | 35 | 53 | 48 | (+15) | 5 |
| | b_j | 12 | 20 | 26 | 9 | 6 | 14 | |

FIG. 10.3. Optimala transportrutter 1. Transporttablå.
Avstånden angivna i km x 10.

| Rutt nr | Sträcka | Antal fordonsenheter |
|---------|-------------------------------------------|----------------------|
| 1 | 1 \rightarrow 9 - 9 \rightarrow 1 - 1 | 3 |

Sedan pendelrutterna med last bestämts vidtar det andra beräkningssteget. Från utgångsförutsättningarna elimineras pendelrutterna. Därefter sker en optimering av tomkörningen. Denna optimering genomförs med transportalgoritm. Källorna utgör de orter där lossning sker och sänkorna där lastning skall ske.

Utgångsförutsättningarna för "tomkörningsoptimeringen" blir följande,

| Fordonsantal | | | |
|-----------------------------|----|--------------------------|----|
| Tillgång i lossningspunkter | | Behov i lastningspunkter | |
| 1 | 23 | 1 | 12 |
| 4 | 8 | 2 | 20 |
| 5 | 7 | 3 | 26 |
| 6 | 20 | 8 | 9 |
| 7 | 16 | 9 | 6 |
| 9 | 8 | 10 | 14 |
| 11 | 5 | | |
| Summa | 87 | Summa | 87 |

I FIG 10.3 har problemet ställts upp i en transporttablå. En utgångslösning anges.

Med tillämpning av någon transportalgoritm genomförs optimeringen. En optimal lösning framgår av den högra delen av nedanstående "tillgångstablå". I tablåns vänstra del anges hur lastkörningarna skall genomföras.

| Körningar | | | | | | | |
|----------------------|-------|----|----|-----------------------|-------|----|----|
| Körningar med last # | | | | Körningar utan last - | | | |
| Sträcka | Antal | I | II | Sträcka | Antal | I | II |
| 1 # 9 | 8 | 8 | — | 1—1 | 11 | 11 | 2 |
| 1 # 11 | 4 | 4 | — | 1—2 | 11 | 11 | — |
| 2 # 5 | 3 | — | — | 1—10 | 1 | — | — |
| 2 # 6 | 15 | 13 | — | 4—3 | 8 | — | — |
| 2 # 7 | 1 | 1 | — | 5—2 | 7 | 4 | — |
| 2 # 11 | 1 | 1 | — | 6—2 | 2 | — | — |
| 3 # 1 | 9 | 9 | — | 6—3 | 18 | 13 | — |
| 3 # 4 | 8 | — | — | 7—1 | 1 | 1 | — |
| 3 # 5 | 4 | 4 | — | 7—8 | 9 | — | — |
| 3 # 6 | 5 | — | — | 7—9 | 6 | — | — |
| 8 # 7 | 9 | — | — | 9—10 | 8 | 8 | — |
| 9 # 7 | 6 | — | — | 11—10 | 5 | 5 | 1 |
| 10 # 1 | 14 | 13 | 11 | Summa | 87 | 53 | / |
| Summa | 87 | 53 | / | | | | |

Sedan vi nu känner vilka sträckor som skall utnyttjas samt erforderligt fordonsantal för respektive sträcka vidtar det tredje beräkningssteget. Detta avser en kombination av de aktuella sträckorna så att slutna slingor erhålls.

Sträckorna kombineras först så att en enskild laststräcka efterföljs av tomkörning utefter samma sträcka. Vi söker sålunda de möjliga "pendelrutterna" med last - tomkörning. De aktuella pendelrutterna antecknas i tablå. Vi erhåller

| Rutt nr | Sträcka | Antal fordonsenheter |
|---------|-----------------------------|----------------------|
| 2 | 3 7 2 # 5, 5 - 2 15 2 | 3 |
| 3 | 2 # 6, 6 - 2 | 2 |
| 4 | 8 8 3 # 4, 4 - 3 | 8 |
| 5 | 5 18 3 # 6, 6 - 3 | 5 |
| 6 | 9 9 8 # 7, 7 - 8 | 9 |

| Rutt nr | Sträcka | Antal fordons- enheter |
|---------|------------------------|---------------------------|
| 7 | 6 6 9 # 7, 7 - 9 | 6 |
| 8 | 14 1 10 # 1, 1 - 10 | 1 |

Av tablån framgår hur många transporter som skall utföras som pendelrutter. De transporter som inte ingår i pendelrutternas antecknas i kol I av "tillgångstablå". Dessa lastkörningar, resp. tomkörningar kombineras i nästa beräkningssteg. Detta sker på så sätt att en lastkörning som avslutas i en ort skall efterföljas av en tomkörning, utgående från samma ort.

Fortlöpande antecknas i kol II av tillgångstablå hur många fordon som återstår resp. krävs efter det att kombinationen av last- och tomkörningssträckor bestämts. Denna kombination görs med ledning av uppgifterna i kol I och II av tillgångstablå.

Resultatet av sträckkombinationerna framgår av den vänstra delen av nedanstående "tillgångstablå".

| Transportrutter och antal körningar | Återstående körningar | Transportrutter och antal körningar | Återstående körningar |
|-------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------|--------------------------|
| 8 8 1 # 9, 9 - 10 8 | 6 | 9 11 3 # 1, 1 - 1 9 | 9 |
| 4 5 1 # 11, 11 - 10 4 | 4 | 4 4 3 # 5, 5 - 2 4 | — |
| 13 13 2 # 6, 6 - 3 13 | 9 | 13 2 10 # 1, 1 - 1 2 | — |
| 1 1 2 # 7, 7 - 1 1 | 1 | 11 11 10 # 1, 1 - 2 11 | 10 |
| 1 1 2 # 11, 11 - 10 1 | — | | |
| | | Totalt 53 | 39 |

De öppna kedjor, som vi erhållit kombineras så att slutna slingor erhålls; ett fordon skall sålunda återvända till utgångspunkten. Dessa kombinationer framgår av nedanstående tablå.

| Rutt nr | Sträcka | Antal fordonsenheter |
|---------|--------------------------------------------------------|----------------------|
| 9 | $1 \overset{8}{\#} 9 - 10, 10 \overset{2}{\#} 1 - 1$ | 2 |
| 10 | $2 \overset{13}{\#} 6 - 3, 3 \overset{4}{\#} 5 - 2$ | 4 |
| 11 | $2 \overset{1}{\#} 11 - 10, 10 \overset{11}{\#} 1 - 2$ | 1 |

De transporter som inte utnyttjas vid bildandet av slutna kedjor antecknas i den "tillgångstablå" som innehåller de öppna kedjorna.

I nästa beräkningssteg kombineras de ej utnyttjade last/tomkörningssträckorna till längre öppna kedjor.

| Transportrutter och antal körningar | | |
|-------------------------------------|---------------------------|---|
| $1 \overset{6}{\#} 9-10,$ | $10 \overset{10}{\#} 1-2$ | 6 |
| $1 \overset{4}{\#} 11-10,$ | $10 \overset{4}{\#} 1-2$ | 4 |
| $2 \overset{9}{\#} 6-3,$ | $3 \overset{9}{\#} 1-1$ | 9 |
| $2 \overset{1}{\#} 7-1$ | | 1 |

De erhållna "öppna kedjorna" kombineras till slutna kedjor.

| Rutt nr | Sträcka | Antal fordonsenheter |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 12 | $1 \overset{6}{\#} 9 - 10 \overset{10}{\#} 1 - 2 \overset{1}{\#} 7 - 1$ | 1 |
| 13 | $1 \overset{5}{\#} 9 - 10 \overset{9}{\#} 1 - 2 \overset{9}{\#} 6 - 3 \overset{9}{\#} 1 - 1$ | 5 |
| 14 | $1 \overset{4}{\#} 11 - 10 \overset{4}{\#} 1 - 2 \overset{4}{\#} 6 - 3 \overset{4}{\#} 1 - 1$ | 4 |

I en konkret planeringssituation krävs ytterligare data. Låt oss förutsätta att följande gäller,

| Rutt nr | Sträckor och tid | Tid per körning | Antal körningar | Totaltid |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 1 | 15+9+15+1+15+8+15+2 1 # 9 - 9 # 1 - 1 | 80 min | 2 | 4 godz. |
| 2 | 20+3+20+2 2 # 5 - 2 | 45 min | 3 | 2 godz. 15 min |
| 3 | 20+15+20+10 2 # 6 - 2 | 65 min | 2 | 2 godz. 10 min |
| 4 | 20+3+20+2 3 # 4 - 3 | 45 min | 8 | 6 godz. |
| 5 | 20+10+20+17 3 # 6 - 3 | 57 min | 5 | 4 godz. 40 min |
| 6 | 15+9+15+6 8 # 7 - 8 | 45 min | 9 | 6 godz. 40 min |
| 7 | 15+13+15+9 9 # 7 - 9 | 52 min | 6 | 5 godz. 05 min |
| 8 | 15+8+1+6 10 # 1 - 10 | 40 min | 1 | 40 min |
| 9 | 15+9+15+6+15+8+15+2 1 # 9 - 10 # 1 - 1 | 85 min | 2 | 2 godz. 50 min |
| 10 | 20+15+20+7+20+8+20+2 2 # 6 - 3 # 5 - 2 | 112 min | 4 | 7 godz. 20 min |
| 11 | 20+11+20+3+15+8+15+4 2 # 11 - 10 # 1 - 2 | 96 min | 1 | 1 godz. 35 min |
| 12 | 15+8+15+6+15+8+15+4+20+13+20+9 1 # 9 - 10 # 1 - 2 # 7 - 1 | 148 min | 1 | 2 godz. 30 min |
| 13 | 15+8+15+6+15+8+15+4+20+15+20+7+20+4+20+2 1 # 9 - 10 # 1 - 2 # 6 - 3 # 1 - 1 | 203 min | 5 | 16 godz. 55 min |
| 14 | 15+7+15+3+15+8+15+4+20+15+20+7+20+4+20+2 1 # 11 - 10 # 1 - 2 # 6 - 3 # 1 - 1 | 190 min | 4 | 12 godz. 40 min |

FIG. 10.4. Optimala transportrutter 1. Tidåtgång efter optimering.

1. hastighet vid körning med last, 24 km/h,
2. hastighet vid tomkörning, 36 km/h,
3. lastnings/lossningstid i medeltal för varuslag a och c 15 min och för b 20 min.

Denna tid som krävs för exempelvis rutt 7 blir per tur $15 + 13 + 15 + 9 = 52$ min.

Om det förutsätts att transporterna utefter denna rutt utförs med ett fordon krävs $6 \cdot 52 - 9$ min = 5 tim 5 min. 9 min dras ifrån totaltiden, eftersom det efter den sista lossningen inte finns något transportbehov; fordonet behöver inte återvända.

Resultatet av beräkningarna för samtliga rutter framgår av FIG. 10.4

Utnyttjande av befintlig transportapparat

Detta problem skiljer sig från det tidigare behandlade däri-genom att fordonen i utgångsläget är placerade i vissa speci-fika orter samt att de skall återgå till dessa orter efter genom-fört transportuppdrag. Den mängd lastfordon som finns tillgäng-lig är känd.

Låt oss formulera problemställningen matematiskt.

Mellan orterna $P_1 \dots P_n$ skall transport av varor ske. Vi känner erforderligt antal lastkörningar mellan orterna. Antalet lastkör-ningar från ort P_i till P_j betecknas med d_{ij} .

Antag vidare att transportutrustning är tillgänglig i orterna $B_1 \dots B_r$. Antalet fordon på respektive platser uppgår till $s_1 \dots s_r$.

Vi förutsätter att
$$\sum_{i=1}^r s_i \ll \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij}.$$

För bestämning av optimala transportrutter krävs en minimering av körningar utan last.

För att genomföra beräkningarna grupperas orterna $P_1 \dots P_n$ i följande kategorier ,

| | |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| överskottspunkter , | i vilka fler lastkörningar slutar än börjar , dvs överskott på fordon kommer att råda . |
| underskottspunkter , | i vilka färre lastkörningar slutar än börjar . |
| balanspunkter , | i vilka samma antal körningar avslutas och påbörjas . |

Körning utan last kan vara av tre olika slag ,

| | |
|----------------|--------------------------------------------------------------------|
| framkörning , | varmed avses körning från utgångspunkten till underskottspunkter . |
| tomkörning , | körningar från överskottspunkter till underskottspunkter . |
| returkörning , | körning från överskottspunkt till utgångspunkt . |

Låt oss utnyttja följande beteckningar

| | |
|----------|----------------------------------------------|
| m | antalet överskottspunkter , |
| p | antalet underskottspunkter |
| a_i | fordonsöverskott i punkt P_i |
| b_j | fordonsunderskott i punkt P_j |
| w_{ij} | antalet framkörningar från B_i till P_j |
| x_{ij} | tomkörningar från P_i till P_j |
| z_{ij} | antalet returkörningar från P_i till B_j |

| | |
|-------------|------------------------------------------------------------------------|
| c'_{ij} | avstånd från B_i till P_j (underskott) |
| c''_{ij} | avstånd från överskottspunkt (P_i) till underskottspunkt (P_j) |
| c'''_{ij} | avstånd från överskottspunkt (P_i) till depå (B_j) |

Med angivna beteckningar kan problemet formuleras på följande sätt,

$$\min \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^p c'_{ij} \cdot w_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p c''_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r c'''_{ij} \cdot z_{ij} \quad (2.1)$$

$$\cdot z_{ij} \quad (2.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{i=1}^r w_{ij} + \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1 \dots p) \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^p x_{ij} + \sum_{j=1}^r z_{ij} = a_i \quad (i=1 \dots m) \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^p w_{ij} = \sum_{j=1}^m z_{ji} = s_i \quad (i=1 \dots r) \quad (2.4)$$

$$x_{ij}, w_{ij}, z_{ij} \geq 0 \quad (2.5)$$

Problemet är sålunda ett klassiskt transportproblem. Transporttablån får det utseende som framgår av tablån på följande sida.

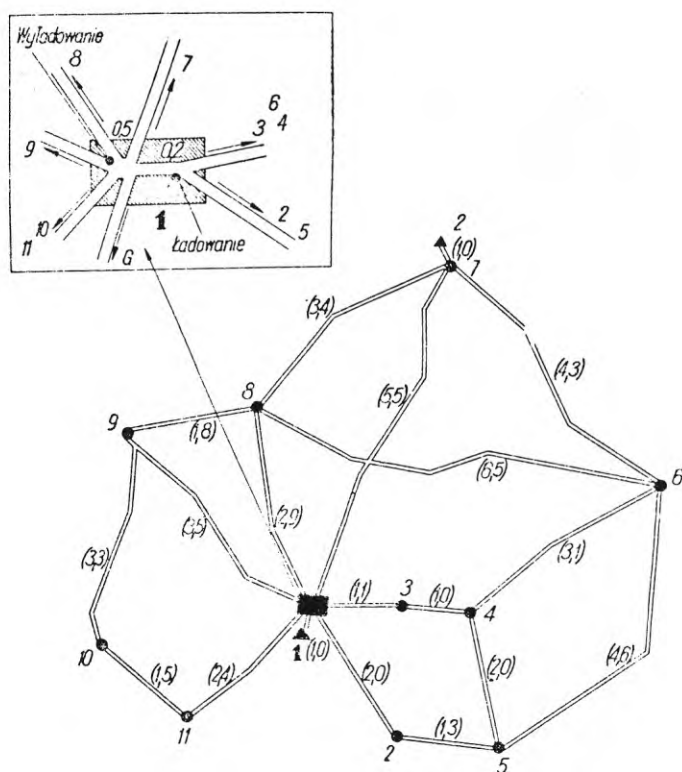


FIG. 11.1. Optimala transportruter 2. Avstånd m.m.

| Transport | | | |
|----------------|-----------------|------------------|------------------|
| från | | till | |
| Lastningspunkt | Antal körningar | Lossningspunkt | Antal körningar |
| 1 | 6 | 6 8 | 4 2 |
| 4 | 10 | 1 6 10 | 5 3 2 |
| 7 | 6 | 1 8 10 | 2 2 2 |
| 8 | 5 | 1 5 7 | 1 2 2 |
| 9 | 8 | 4 5 7 8 | 2 2 3 1 |

FIG. 11.2. Optimala transportruter 2. Transportmedelsbehov m.m.

| | | "Underskottspunkter" | | |
|---------------------|----------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------|----------------|
| | | 1, 2,, p | B ₁ , ... , B _r | |
| "Överskottspunkter" | B ₁ | $c'_{i,j}$ | X | s ₁ |
| | ... | | X | ... |
| ... | X | | ... | |
| ... | X | | ... | |
| B _r | X | | s _r | |
| | 1 | $c''_{i,j}$ | $c'''_{i,j}$ | a ₁ |
| | 2 | | | a ₂ |
| | ... | | | ... |
| | ... | | | ... |
| | m | | | a _m |
| | | b ₁ , b ₂ ,, b _p | s ₁ , ... ,s _r | |

De sträckor som skall ingå i en optimal lösning erhålls med hjälp av tidigare presenterade algoritmer.

Sedan sträckorna erhållits sker en sammankoppling enligt det grafiska förfarande som åskådliggörs av följande exempel.

Låt oss konkretisera framställningen med det exempel, vars förutsättningar framgår av FIG 11.1 resp. FIG. 11.2.

Kartan i FIG 11.1 åskådliggör belägenheten hos de orter mellan vilka varuleveranser skall ske. Avstånden är angivna i km. Med trianglar är två "fordonsdepåer" markerade. I depå 1 finns tre fordon och i depå 2 två fordon.

FIG 11.2 anger hur transporter med lastade fordon skall genomföras samt vilka fordonskvantiteter som erfordras. Med ledning av FIG. 11.2 identifieras överskotts-/underskotts- och balanspunkter. Fordonsöverskott resp. underskott bestäms. Resultatet av detta beräkningssteg framgår av nedanstående tablå.

| | | Ankomstpunkt | | | | | |
|--------------|-------|--------------|----|----|-------|-------|-------|
| | | 4 | 7 | 9 | B_1 | B_2 | a_i |
| Utgångspunkt | B_1 | 31 | 65 | 45 | | | 3 |
| | B_2 | 86 | 10 | 62 | | | 2 |
| | 1 | 21 | 55 | 35 | 10 | 65 | 2 |
| | 5 | 20 | 88 | 68 | 43 | 98 | 4 |
| | 6 | 31 | 43 | 83 | 62 | 53 | 7 |
| | 10 | 52 | 80 | 32 | 41 | 96 | 4 |
| | b_j | 8 | 1 | 8 | 3 | 2 | |

FIG. 11.3. Optimala transportruter 2. Transporttablå med optimal lösning. Avstånden är angivna i km x 10.

| Punkt nr | Ank fordon med last | Avg fordon med last | Tillgängliga fordon | Ort |
|----------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------|
| 1 | 8 | 6 | 2 | med överskott |
| 4 | 2 | 10 | -8 | med underskott |
| 5 | 4 | — | 4 | med överskott |
| 6 | 7 | — | 7 | med överskott |
| 7 | 5 | 6 | -1 | med underskott |
| 8 | 5 | 5 | 0 | i balans |
| 9 | — | 8 | -8 | med underskott |
| 10 | 4 | — | 4 | med överskott |

När efterfrågan av och tillgång till fordonsenheter är känd kan en transporttablå uppställas. Optimering sker med konventionella algoritmer.

Den aktuella transporttablå framgår av FIG 11.3. I tablå är en lösning inritad som är optimal.

Körningar med last och utan last skall nu kombineras till optimala transportrutter. Det förfarande som tillämpades i föregående exempel kan inte komma i fråga i detta fall eftersom fordonsantalet är bestämt, samt kravet ställs att fordonen skall återgå till utgångspunkten.

För att bilda transportrutter utnyttjas ett grafiskt tillvägagångssätt. Detta illustreras av FIG 11.4.

Låt varje ort, inklusive fordonsdepåer representeras av en kvadrat. Rita med heldragna linjer in antalet lastkörningar mellan respektive orter. Lastkörningarna erhålls ur FIG. 11.2.

På motsvarande sätt läggs pilar in, representerande körningar utan last. Körningarna erhålls ur FIG 11.3. Dessa pilar ritas med avbrutna linjer.

I den grafiska representationen ritas färdvägarna för de tillgängliga fordonen in. Detta sker genom att linjer som representerar lastade fordon knyts samman med sådana som representerar fordon utan last. Denna sammanknytning sker under beaktande av

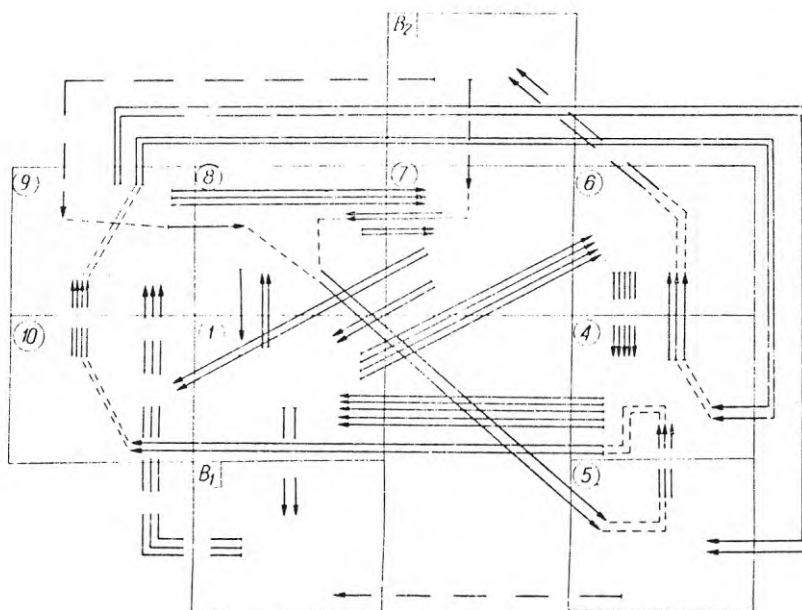


FIG. 11.4.1. Optimala transportrutter 2. Rutter för fordon från depå B_2 .

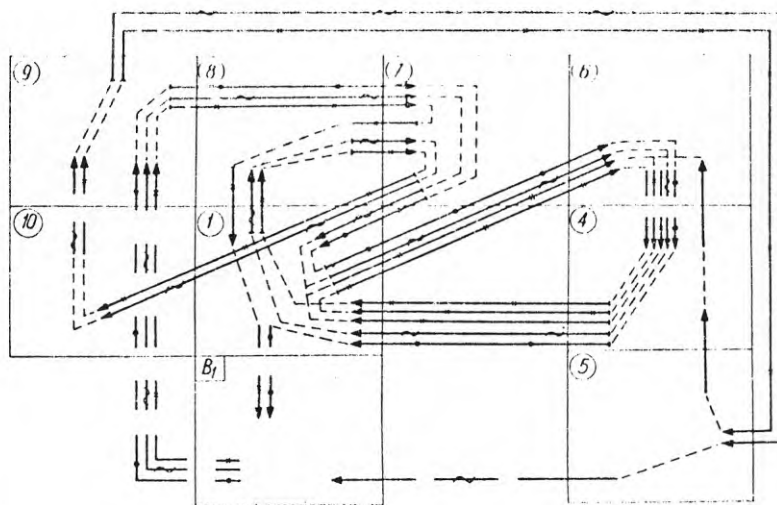


FIG. 11.4.2. Optimala transportrutter 2. Rutter för fordon från depå B_1 - ansats.

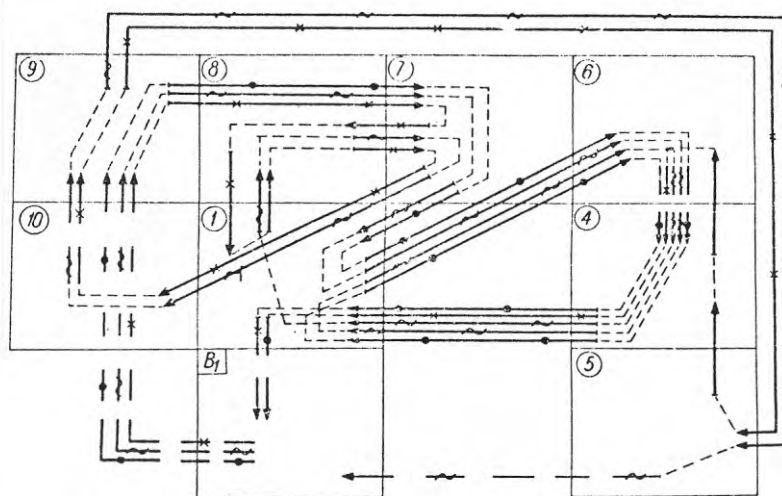


FIG. 11.4.3. Optimala transportrutter 3. Rutter för fordon från depå B_1 - lösning.

fordonsantal och fordonens belägenhet. Sammanknytningen görs med streckade linjer.

FIG 11.4.1 illustrerar transportvägarna för bilar som kommer från depå B_2 och som skall återvända dit.

Av FIG 11.4.1 framgår att transportvägarna för fordonen i depå B_2 bör vara

$$B_2 - 9 \neq 8 \neq 5 - 4 \neq 10 - 9 \neq 4 \neq 6 - B_2 \text{ resp}$$

$$B_2 - 7 \neq 8 \neq 5 - 4 \neq 10 - 9 \neq 4 \neq 6 - B_2.$$

På motsvarande sätt genomförs beräkningar för fordon som utgår från depå B. I FIG 11.4.2 har de transportuppgifter inritats, som kvarstår efter det att fordonen från depå B_2 tilldelats transportvägar. En sammanknytning av sträckor har även genomförts.

Sammankopplingen av sträckor kan börja var som helst i figuren. I FIG 11.4.2 har man gjort detta och funnit fyra transportrutter. En av dessa rutter, markerad med små tvärstreck, bildar en loop; fordonet återkommer inte till depån. Den funna lösningen måste sålunda modifieras.

Genom ett studium av FIG 11.4.2 finner man lätt att loopen kan elimineras genom en något annorlunda sammankoppling i ruta 1. FIG 11.4.2 illustrerar den lösning som erhålls när loopen upplösts.

Resultatet av beräkningarna kan sammanfattas i följande tablå, som visar de enskilda fordonens utnyttjande. Som mått på utnyttjningen har valts den procentuella andel av total fordonssträcka, som körs utan last.

| Fordon nr vid resp. depå | | Transport ruttens längd | Körningar | | % körningar utan last |
|-----------------------------|------|-------------------------------|-----------|-----------|--------------------------|
| | | | med last | utan last | |
| B ₁ | Nr 1 | 47,4 | 32,6 | 14,8 | 31 |
| | Nr 2 | 56,9 | 41,7 | 15,2 | 27 |
| | Nr 3 | 54,3 | 40,4 | 13,9 | 26 |
| B ₂ | Nr 1 | 38,7 | 21,9 | 16,8 | 43 |
| | Nr 2 | 35,1 | 23,5 | 11,6 | 33 |
| Ogölem | | 232,4 | 160,1 | 72,3 | 31 |

3.3.3 Övriga tillämpningar

Bestämning av optimala transportrutter har sedan lång tid skett i Sovjetunionen. Kadlec - Vodacek (1968) anger ett flertal sådana tillämpningar. Bland dessa kan följande nämnas.

Den första optimeringen avsåg staden Rjasan. Det visade sig där att optimala transportrutter kunde bestämmas för 60% av den del av stadens transportvolym som genomfördes med lastbilar. Optimeringsberäkningen innebar en höjning av utnyttjandegraden för fordonen med 17%.

Bestämning av optimala transportrutter har skett för de sovjetiska järnvägarna. Kärnproblemet har varit att överföra tomma järnvägsvagnar från 41 regioner till 17 andra. Optimeringsberäkningen resulterade i ett minskat transportarbete om 3,5%.

Sedan 1961 sker transport av byggmaterial, tegel, trä, stål osv, inom Moskva området i transportrutter, bestämda på det sätt som illustrerats. När optimeringsförfarandet började tillämpas ökades fordonens utnyttjningsgrad från 0,50 till 0,76.

Enligt Kadlec - Vodacek sker bestämningen av optimala transportrutter ofta manuellt. Program för datorbearbetning har utarbetats. Sovjetiska författare anger att en övre gräns för manuell bearbetning är ett problem med 10×200 överskotts \times underskottspunkter.

3.4 Lokalisering av resurser - enprodukttillverkning

3.4.1 Problemet

De tillämpningar som presenterats i tidigare avsnitt av denna rapport har i huvudsak avsett utnyttjande av befintliga resurser.

Även som hjälpmedel för beslut om lokalisering/dimensionering av nya resurser har transportmetoderna fått en vidsträckt användning. I detta avsnitt, och i närmast följande, skall detta tillämpningsområde belysas.

Framställningen baseras, där inget annat anges, på Czerwinski (1969), Lesz (1967) och Birman (1962).

Problemställning

En enhetlig produkt tillverkas vid ett antal produktionsställen. Tillverkningskapaciteterna vid vart och ett av dessa är kända.

Produktionen efterfrågas av ett antal avnämare. Varje avnämares efterfrågan är känd. Samma är förhållandet med deras geografiska belägenhet.

Tillverknings- och transportkostnaden per producerad enhet är känd.

Tillverkningskapaciteten kan byggas ut. Detta kan ske på olika sätt. Belägenheten av de platser där kapacitetsutbyggnad kan ske är kända. Dessutom förutsätts att man äger kännedom om de tekniska lösningar, som kan komma i fråga vid utbyggnaden.

Den tillverknings- och transportkostnad per produktenhet, som uppkommer om kapaciteten byggs ut i orterna, är känd.

Problemet är att bestämma var den nya kapaciteten skall byggas ut, samt vilken teknisk lösning som skall väljas, för att kostnaderna skall minimeras.

Kontinuerligt fall - lösningsförfarande

Låt oss med "kontinuerligt fall" avse det fall då kapaciteten i aktuella orter kan byggas ut kontinuerligt mellan vissa intervall.

M betecknar en mängd punkter, i , i vilka tillverkningskapacitet finns eller till vilka kapacitet kan lokaliseras. Beteckna med V_i övre gräns för den möjliga kapacitetsutbyggnaden i punkt i .

Det existerar en mängd efterfrågepunkter j . Låt oss beteckna denna mängd med Z . Efterfrågan i punkt j är B_j .

Den rörliga tillverkningskostnaden per enhet i punkt i är h_i och transportkostnaden för transport av en enhet från i till j är k_{ij} . Beteckna $h_i + k_{ij}$ med c_{ij} .

Variabeln a_i betecknar produktionsnivån i ort i . x_{ij} är flödesvariabeln.

Förutsätt vidare att den tekniskt möjliga produktionskapaciteten överstiger efterfrågan,

$$\sum_{i \in M} V_i > \sum_{j \in Z} B_j \quad (1.1)$$

Antag att behovet inte kan täckas från ett produktionsställe,

$$V_i < \sum_{j \in Z} B_j \quad \text{för } i \in M \quad (1.2)$$

Förutsätt vidare att hela produktionen från ett visst produktionsställe skall transporteras till avnämaren,

$$a_i = \sum_{j \in Z} x_{ij} \quad \text{för } i \in M \quad (1.3)$$

Problemet är att ur M utvälja ett antal produktionsställen samt ange deras kapaciteter. Detta urval skall ske så att kostnaderna minimeras,

$$\min K = \sum_{i \in M} \sum_{j \in Z} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = B_j \quad j \in Z \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in Z} x_{ij} \leq V_i \quad i \in M \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (2.4)$$

Problemet är ett obalanserat transportproblem. Det löses med hjälp av konventionella transportalgoritmer sedan problemet balanserats genom att en fiktiv sänka införts. Jämför 2.3.2.

De kvantiteter som placeras i fiktiv sänka motsvarar outnyttjad del av kapacitetsområdet.

Det bör anmärkas att enhetskostnaden för transport till fiktiv sänka inte behöver ges värdet noll om man inte är intresserad av objektfunktionens absoluta värde. Tillräckligt villkor är att enhetskostnaden för samtliga fiktiva transporter ges samma värde.

Heltalsvariant - lösningsförfarande

I det "kontinuerliga fallet" förutsätts att kapaciteten på de aktuella lokaliseringssorterna kan byggas ut till en omfattning mellan 0 och V_i .

I praktiska problem ställs man ofta inför uppgiften att antingen bygga ut en anläggning till en viss kapacitet eller också att avstå helt. Vi kallar detta fall för "heltalsvariant".

Den matematiska formuleringen skiljer sig från motsvarande formulering för det kontinuerliga fallet genom att bivillkoret (2.3) får annan lydelse. Bivillkoret kommer att lyda

$$\sum_{j \in Z} x_{ij} = V_i \text{ eller } 0 \quad i \in M \quad (3)$$

Heltalsvarianten kan matematiskt formuleras på följande sätt,

$$\min K = \sum_{i \in M} \sum_{j \in Z} c_{ij} x_{ij} \quad (4.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = B_j \quad j \in Z \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in Z} x_{ij} = \lambda_i \cdot V_i \quad i \in M \quad \lambda_i = 0 \text{ eller } 1 \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (4.4)$$

Problemet löses på följande sätt. Först analyseras vilka lokaliseringsskombinationer som från tekniska utgångspunkter kan realiseras. Därefter genomförs optimeringsberäkningen för varje sådan kombination. Förfarandet illustreras av följande exempel.

3.4.2 Tillämpningsexempel

I detta avsnitt illustreras med några exempel transportalgoritmernas användning för lokaliseringsproblem.

Exempel 1. Kontinuerligt fall

En viss produkt efterfrågas i punkterna Z_1 , Z_2 och Z_3 . De kvantiteter som efterfrågas är i ordning 150, 50 och 50 enheter per tidsperiod.

Produktionskapacitet kan uppbyggas i orterna M_1 , M_2 , M_3 och M_4 . Kapaciteterna kan byggas ut till 300, 200, 100 och 200 enheter för tidsperioden.

Kostnaden för tillverkning och transport av en enhet mellan möjliga produktionspunkter och avnämare framgår av nedanstående kostnadsmatris

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 4 \\ 6 & 10 & 12 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Problemet är obalanserat. Det balanseras genom att en fiktiv sänka införs. Enhetskostnaderna för den fiktiva sänkan väljs godtyckligt; sätt dem till 0.

Transporttablån till problemet får följande utseende

| c_{ij} | Z_1 | Z_2 | Z_3 | Fikt | V_i |
|----------|-------|-------|-------|------|-------|
| M_1 | 6 | 5 | 8 | 0 | 300 |
| M_2 | 8 | 5 | 4 | 0 | 200 |
| M_3 | 6 | 10 | 12 | 0 | 100 |
| M_4 | 6 | 8 | 6 | 0 | 200 |
| B_j | 150 | 50 | 50 | 550 | 800 |

Problemet löses med konventionell transportalgoritm. En optimal lösning framgår av följande tablå,

| x_{ij} | Z_1 | Z_2 | Z_3 | Fikt | V_i |
|----------|-------|-------|-------|------|-------|
| M_1 | 100 | | | 200 | 300 |
| M_2 | | 50 | 50 | 100 | 200 |
| M_3 | 50 | | | 50 | 100 |
| M_4 | | | | 200 | 200 |
| B_j | 150 | 50 | 50 | 550 | 800 |

Av lösningen framgår att efterfrågan tillgodoses om kapaciteten i M_1 byggs ut till 100 enheter under perioden, i M_2 till 100 och i M_3 till 50 enheter. Till M_4 skall någon produktion inte förläggas.

Exempel 2. Heltalsvariant

En viss produkt efterfrågas av fyra avnämare. Dessas efterfrågan är 50, 30, 10 resp 10 enheter under en viss tidsperiod.

Ingen produktionskapacitet är tillgänglig. Det föreligger emellertid möjligheter att bygga ut fabriker i tre olika orter. Fabriker kan utformas enligt två olika alternativ,

- antingen med kapacitet ≤ 40 enheter, variant A,
- eller med kapacitet > 40 enheter, variant B.

Enhetstransportkostnaden samt den rörliga tillverkningskostnaden för de möjliga kombinationerna framgår av nedanstående tablå. Beloppen anges i 1000 -tals kronor. Produkternas försäljningspris är 30.000 kronor per styck.

| Lokalisering | Variant | Rörl tillverkn kostn | Transportkostnad | | | |
|--------------|---------|----------------------|------------------|----|----|----|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| I | A | 14 | 5 | 2 | 4 | 3 |
| | B | 11 | 5 | 2 | 4 | 3 |
| II | A | 16 | 1 | 6 | 3 | 2 |
| | B | 13 | 1 | 6 | 3 | 2 |
| III | A | 12 | 6 | 5 | 4 | 1 |
| | B | 9 | 6 | 5 | 4 | 1 |
| Efterfrågan | | | 50 | 30 | 10 | 10 |

Problemet är att lokalisera kapacitet och välja tekniskt alternativ på ett sådant sätt att det totala täckningsbidraget blir så stort som möjligt. (Vid den slutliga bedömningen måste hänsyn tas till investeringskostnader; härifrån bortses i detta exempel)

Om vi betecknar källor med i och sänkor med j samt teknisk lösning (A eller B) med r får objektfunktionen F följande utseende

$$F = \sum_{ijr} (c - k_{ij}) x_{ij}^r - \sum_{ijr} h_i^r x_{ij}^r \quad (5.1)$$

c = försäljningspris per enhet

k_{ij} = transportkostnad per enhet

h_i^r = rörlig tillverkningskostnad per enhet

Inför flödesvariabler. Giv dem den indicering som framgår av nedanstående tablå.

| Lokalisering | Variant | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| I | A | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 |
| | B | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 |
| II | A | x_9 | x_{10} | x_{11} | x_{12} |
| | B | x_{13} | x_{14} | x_{15} | x_{16} |
| III | A | x_{17} | x_{18} | x_{19} | x_{20} |
| | B | x_{21} | x_{22} | x_{23} | x_{24} |

Problemet kan nu ge följande formulering

$$\begin{aligned}
 F = & 25 x_1 + 28 x_2 + 26 x_3 + 27 x_4 + 25 x_5 + 28 x_6 + 26 x_7 + \\
 & + 27 x_7 + 27 x_8 + 29 x_9 + 24 x_{10} + 27 x_{11} + 28 x_{12} + \\
 & + 29 x_{13} + 24 x_{14} + 27 x_{15} + 28 x_{16} + 24 x_{17} + 25 x_{18} + \\
 & + 26 x_{19} + 29 x_{20} + 24 x_{21} + 25 x_{22} + 26 x_{23} + 29 x_{24} + \\
 & - 14 x_1 - 14 x_2 - 14 x_3 - 14 x_4 - 11 x_5 - 11 x_7 - 11 x_8 - \\
 & - 16 x_9 - 16 x_{10} - 16 x_{11} - 16 x_{12} - 13 x_{13} - 13 x_{14} - \\
 & - 13 x_{15} - 13 x_{16} - 12 x_{17} - 12 x_{18} - 12 x_{19} - 12 x_{20} - \\
 & - 9 x_{21} - 9 x_{21} - 9 x_{22} - 9 x_{23} - 9 x_{24}
 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}
 F = & 11 x_1 + 14 x_2 + 12 x_3 + 13 x_4 + 14 x_5 + 17 x_6 + 15 x_7 + \\
 & + 16 x_8 + 13 x_9 + 8 x_{10} + 11 x_{11} + 12 x_{12} + 16 x_{13} + \\
 & + 11 x_{14} + 14 x_{15} + 15 x_{16} + 12 x_{17} + 13 x_{18} + 14 x_{19} +
 \end{aligned}$$

$$+ 17 x_{20} + 15 x_{21} + 16 x_{22} + 17 x_{23} + 20 x_{24} \quad (5.2)$$

Bivillkoren är följande

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 40 \quad (5.3a)$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 40 \quad \text{eller } 0 \quad (5.3b)$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 40 \quad (5.4a)$$

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 40 \quad \text{eller } 0 \quad (5.4b)$$

$$x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} \leq 40 \quad (5.5a)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 40 \quad \text{eller } 0 \quad (5.5b)$$

$$x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} + x_{17} + x_{21} = 50 \quad (5.6)$$

$$x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} + x_{18} + x_{22} = 30 \quad (5.7)$$

$$x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} + x_{19} + x_{23} = 10 \quad (5.8)$$

$$x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} + x_{20} + x_{24} = 10 \quad (5.9)$$

För att kunna lösa problemet måste vi göra klart för oss vilka kombinationer av läge och tekniskt alternativ som kan komma i fråga. De sju kombinationer som kan komma i fråga framgår av nedanstående tablå.

| Lokalisering | I | II | III |
|--------------|-----|-----|-----|
| Kombination | | | |
| 1 | 0 | >40 | >40 |
| 2 | >40 | 0 | >40 |
| 3 | >40 | >40 | 0 |
| 4 | >40 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | >40 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | >40 |
| 7 | 0 | 0 | 0 |

I tablåen anges med > 40 det fall då den tekniska varianten B skall utnyttjas. När 0 anges kommer variant B inte till användning. I stället utnyttjas variant A.

De angivna sju kombinationerna täcker förutsättningarna. En åttonde kombination $> 40, > 40, > 40$ tas inte med eftersom produktionen överstiger efterfrågan.

För var och en av de funna kombinationsmöjligheterna genomförs optimeringsberäkningen. Detta sker med hjälp av konventionella transportalgoritmer. Nedanstående tabell visar transporttabell för kombination 7. Enhetskostnaderna i tabell utgör koefficienter till objektfunktionens flödesvariabler.

| Källa \ Sänka | 1 | 2 | 3 | 4 | Tillgång | Villkor |
|---------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------|---------|
| I | $x_{1,11}$ | $x_{2,14}$ | $x_{3,12}$ | $x_{4,13}$ | ? | < 40 |
| II | $x_{9,13}$ | $x_{10,8}$ | $x_{11,11}$ | $x_{12,12}$ | ? | < 40 |
| III | $x_{17,12}$ | $x_{18,13}$ | $x_{19,14}$ | $x_{20,17}$ | ? | < 40 |
| Efterfrågan | 50 | 30 | 10 | 10 | 100 | |

Om efterfrågan i sänka 1 tillfredsställs från källa II erhåller objektfunktionen maximalt bidrag. Eftersom högst 40 enheter får tillverkas i II måste återstående 10 tillverkas någon annanstans. Sker det från källa III maximeras bidraget.

På analogt sätt bestäms hur efterfrågan i övriga sänkor skall täckas. Maximalt bidrag till objektfunktionen ges om efterfrågan i sänka 2 täcks ur källa I, sänka 3 ur källa III och sänka 4 ur källa III.

Målfunktionen får värdet

$$40 \cdot 13 + 10 \cdot 12 + 30 \cdot 14 + 10 \cdot 14 + 10 \cdot 17 = 1370$$

Resultatet för samtliga sju aktuella kombinationer framgår av nedanstående tabell.

| Kombination | Flödesvariabelns värde | | | | | Objektfunktionens värde x 1000 |
|-------------|------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------------------|
| | | | | | | |
| 1 | $x_{13}=50$ | $x_{22}=30$ | $x_{23}=10$ | $x_{24}=10$ | | 1650 |
| 2 | $x_5=10$ | $x_6=30$ | $x_{21}=40$ | $x_{23}=10$ | $x_{24}=10$ | 1620 |
| 3 | $x_6=30$ | $x_7=10$ | $x_8=10$ | $x_{13}=50$ | | 1630 |
| 4 | $x_5=50$ | $x_6=30$ | $x_7=10$ | $x_{20}=10$ | | 1530 |
| 5 | $x_2=30$ | $x_{13}=50$ | $x_{19}=10$ | $x_{20}=10$ | | 1530 |
| 6 | $x_{21}=50$ | $x_{22}=30$ | $x_{23}=10$ | $x_{24}=10$ | | 1600 |
| 7 | $x_2=30$ | $x_9=40$ | $x_{17}=10$ | $x_{19}=10$ | $x_{20}=10$ | 1370 |

Fabriker skall sålunda byggas ut både i ort II som III. Fabriker skall byggas enligt teknisk variant B och vardera ges en kapacitet om 50 enheter per aktuell period.

Exempel 3. Variabla tillverkningskostnader

I föregående exempel har vi förutsatt att tillverkningskostnaden per producerad enhet inte påverkas av tillverkningsvolym, så länge denna befinner sig inom kapacitetsgränserna.

I detta exempel genomförs optimeringen under förutsättning att tillverkningskostnaderna per enhet förändras med kapacitetsutnyttjandet.

Förutsättningarna skiljer sig från förutsättningarna i exempel 2 därigenom att produktionskapaciteterna ur teknisk synvinkel kan väljas godtyckligt stora samt att tillverkningskostnadernas storlek förändras kontinuerligt med produktionsvolym.

Objektfunktionen får följande utseende

$$F = \sum_{ij} (c - k_{ij}) x_{ij} - \sum_i f_i(x_i) \quad (6)$$

Här betecknar c försäljningspris per enhet, k_{ij} enhetstransportkostnad och x_{ij} flödesvariabel.

$f_i(x_i)$ uttrycker den totala tillverkningskostnaden i fabrik i .

Ofta approximeras tillverkningskostnaden per enhet, h_i , på följande sätt

$$h_i = \frac{a}{x_i} + b \quad (7)$$

I detta uttryck är a och b konstanter, som kan fastställas för en viss bransch eller tillverkningsteknik.

Införs denna approximation erhåller uttrycket (6) följande utseende,

$$F = \sum_{ij} (c - k_{ij}) x_{ij} - \sum_i (a + b x_i) \quad (8)$$

Vi antar att fyra kunder efterfrågar 15, 20, 25 och 30 enheter av en vara resp. Tre olika punkter är möjliga för lokalisering av den produktionskapacitet som skall täcka ovan angivna efterfrågan. Problemet är att avgöra var kapaciteten skall lokaliseras för att vinsten skall maximeras då följande förutsättningar gäller.

Nedanstående tablå anger enhetstransportkostnaden för möjliga kombinationer leverantör avnämare. Efterfrågans storlek anges jämväl. I tablåen anges i övre högra hörnet av varje ruta index för flödesvariabeln.

| Leverantör \ Avnämare | Avnämare | | | | Leveranser från varje leverantör |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | 5 1 | 2 2 | 4 3 | 3 4 | x_I |
| 2 | 1 5 | 6 6 | 3 7 | 2 8 | x_{II} |
| 3 | 6 9 | 5 10 | 4 11 | 1 12 | x_{III} |
| Leveranser till varje avnämare | 15 | 20 | 25 | 30 | |

Vidare antages att tillverkningskostnaderna kan uttryckas på följande sätt

$$h_I = \begin{cases} 10 + \frac{100}{x_I} & \text{för } x_I > 0 \\ 0 & \text{för } x_I = 0 \end{cases}$$

$$h_{II} = \begin{cases} 12 + \frac{100}{x_{II}} & \text{för } x_{II} > 0 \\ 0 & \text{för } x_{II} = 0 \end{cases}$$

$$h_{III} = \begin{cases} 8 + \frac{100}{x_{III}} & \text{för } x_{III} > 0 \\ 0 & \text{för } x_{III} = 0 \end{cases}$$

Vi konstaterar att enhetskostnaden h_i inte är kontinuerlig. Målfunktionen är diskontinuerlig i alla punkter $x_i = 0$. Olika intervall måste därför undersökas separat, på samma sätt som skett i exempel 2.

De kombinationer som är möjliga bestäms. De är sju och bestäms i det följande alternativ A - G.

Alternativ A

Tillverkning sker i samtliga tre lokaliseringpunkter, dvs $x_i > 0$ för alla i . (I, II och III)

Om försäljningspriset c i exemplet antas vara 30 får objektfunktionen utseendet

$$\begin{aligned} F = & (30-5)x_1 + (30-2)x_2 + (30-4)x_3 + (30-3)x_4 + (30-1)x_5 + \\ & + (30-6)x_6 + (30-3)x_7 + (30-2)x_8 + (30-6)x_9 + (30-5)x_{10} + \\ & + (30-4)x_{11} + (30-1)x_{12} - 10x_1 - 10x_2 - 10x_3 - 10x_4 - \\ & - 12x_5 - 12x_6 - 12x_7 - 12x_8 - 8x_9 - 8x_{10} - 8x_{11} - \\ & - 8x_{12} - 300. \end{aligned}$$

$$F = 15x_1 + 18x_2 + 16x_3 + 17x_4 + 17x_5 + 12x_6 + 15x_7 + \\ + 16x_8 + 16x_9 + 17x_{10} + 18x_{11} + 21x_{12} - 300.$$

Konstanten 300 härrör från beräkningen av tillverkningskostnaderna enligt $\sum_i f_i(x_i) = \sum_i h_i x_i$. Denna konstant kallar vi w , dvs $w = 300$ för alternativ A.

Alternativ B

Tillverkning sker i punkterna II och III. Programmet enligt alternativ A kompletteras med villkoret $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;
 $w = 200$

Alternativ C

Tillverkning i punkterna I och III. Alternativ A kompletteras med $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0$;
 $w = 200$

Alternativ D

Tillverkning i punkterna I och II. Komplettering med villkoret $x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 0$;
 $w = 200$

Alternativ E

Tillverkning endast i punkten III. Programmet enligt A måste då kompletteras med villkoren

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0; \quad w = 100$$

Alternativ F

Tillverkning endast i punkten II. Kompletterande villkor är

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 0; \quad w = 100$$

Alternativ G

Tillverkning endast i punkten I. Kompletterande villkor är

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 0$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 0; \quad w = 100$$

De sju olika programmen löses. Den lösning som fås i det program som ger det högsta värdet på målfunktionen väljes. Nedanstående tablå visar lösningarna till de sju programmen samt värdet på målfunktionen för resp lösning.

| Variabel | Alternativ | | | | | | |
|----------|------------|------|------|------|------|------|------|
| | A | B | C | D | E | F | G |
| x_1 | | | | | | | 15 |
| x_2 | 20 | | 20 | 20 | | | 20 |
| x_3 | | | | 25 | | | 25 |
| x_4 | | | | 30 | | | 30 |
| x_5 | 15 | 15 | | 15 | | 15 | |
| x_6 | | | | | | 20 | |
| x_7 | | | | | | 25 | |
| x_8 | | | | | | 30 | |
| x_9 | | | 15 | | 15 | | |
| x_{10} | | 20 | | | 20 | | |
| x_{11} | 25 | 25 | 25 | | 25 | | |
| x_{12} | 30 | 30 | 30 | | 30 | | |
| F | 1395 | 1475 | 1480 | 1325 | 1560 | 1250 | 1395 |

3.4.3 Praktikfall 1. Lokalisering av cementfabrik

Den metodik som beskrivits i detta svsnitt har fått en vidsträckt användning. Speciellt har metodiken utnyttjas vid analys av lokaliseringalternativ för cementindustrin.

Det praktikfall som här presenterats baseras på Lesz (1967). Det behandlar cementförsörjningen i Polen. Endast en del av undersökningen refereras.

| Nr | Mottagare Leverantör | Område | | | | | | | | | | | | | | | | | Till gång |
|-------------|------------------------------------------------|--------------|-----------|---------|------------|-----------|--------------|------------|-----------|---------|-------------|----------|------------|-------------|--------------|-------------|-------------|----------------|--------------|
| | | białostockie | bydgoskie | gdąskie | katowickie | kieleckie | koszalińskie | krakowskie | lubelskie | łódzkie | olsztyńskie | opolskie | poznańskie | rzeszowskie | szczecińskie | warszawskie | wrocławskie | zielonogórskie | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | |
| 1. | Opolskie ZPC — Opole | 509 | 353 | 513 | 101 | 217 | 507 | 184 | 430 | 232 | 509 | 62 | 252 | 337 | 457 | 342 | 91 | 245 | 75,7 |
| 2. | „Goleszów” — Goleiszów | 579 | 444 | 604 | 77 | 237 | 636 | 119 | 428 | 297 | 596 | 146 | 381 | 272 | 595 | 393 | 228 | 382 | 31,4 |
| 3. | „Podgrodzie” — Raciborowice Górne | 667 | 356 | 516 | 289 | 402 | 469 | 367 | 615 | 348 | 527 | 194 | 222 | 525 | 348 | 481 | 111 | 133 | 40,3 |
| 4. | „Górka” — Siersza Wodna | 500 | 397 | 557 | 39 | 165 | 607 | 39 | 353 | 248 | 549 | 134 | 352 | 197 | 566 | 323 | 216 | 370 | 49,8 |
| 5. | „Szcakowa-Jaworzno” — Szcza- kowa | 493 | 381 | 541 | 23 | 147 | 591 | 55 | 360 | 227 | 533 | 118 | 336 | 213 | 550 | 307 | 200 | 354 | 54,1 |
| 6. | „Wizów” — Bolesławiec | 667 | 355 | 515 | 289 | 402 | 450 | 367 | 615 | 648 | 526 | 194 | 221 | 525 | 329 | 481 | 112 | 114 | 5,9 |
| 7. | „Wiek” — Zawiercie | 459 | 347 | 507 | 43 | 164 | 584 | 89 | 377 | 193 | 499 | 421 | 329 | 247 | 542 | 273 | 203 | 357 | 8,6 |
| Efterfrågan | | 10,0 | 11,0 | 8,9 | 33,3 | 10,0 | 11,0 | 16,7 | 8,4 | 17,2 | 11,7 | 10,2 | 38,0 | 11,3 | 10,7 | 25,5 | 23,2 | 8,8 | 265,8 |

FIG. 12.1. Lokalisering av cementfabriker, Polen.
Avstånd, kvantiteter m.m.

| Mottagare Leverantör | białostockie | bydgoskie | gdąskie | katowickie | kieleckie | koszalińskie | krakowskie | lubelskie | łódzkie | olsztyńskie | opolskie | poznańskie | rzeszowskie | szczecińskie | warszawskie | wrocławskie | zielonogórskie |
|-------------------------------------------|----------------------------------------|-----------|---------|------------|-----------|--------------|------------|-----------|---------|-------------|----------|------------|-------------|--------------|-------------|-------------|----------------|
| | Chelm . <i>N₁</i> | 373 | 518 | 571 | 455 | 285 | 742 | 386 | 72 | 352 | 475 | 493 | 538 | 287 | 752 | 253 | 575 |
| Piechcin . <i>N₂</i> | 433 | 62 | 222 | 338 | 395 | 290 | 406 | 433 | 217 | 214 | 314 | 113 | 564 | 284 | 271 | 257 | 251 |
| Kornica . <i>N₃</i> | 264 | 481 | 537 | 466 | 256 | 718 | 388 | 183 | 331 | 365 | 464 | 501 | 418 | 724 | 197 | 581 | 638 |

FIG. 12.2. Lokalisering av cementfabriker, Polen.
Orter, där lokalisering är möjlig. Avstånd.

Portlandcement typ "250" tillverkas i Polen vid 7 olika cementfabriker belägna inom ett relativt begränsat område i sydvästra Polen. Antalet arbetsplatser och centrallager inom landet till vilka distribution sker direkt från fabrik är i storleksordningen 2000. Dessa är fördelade på 17 administrativa områden, till vilka tilldelning sker genom en central plankommitté. Tilldelningen till enstaka projekt inom ett område sköts av en lokal kommitté.

Problemet består i att lokalisera en utbyggnad av produktionen och planera distributionen inför den följande femårsperioden så att lägsta möjliga kostnader erhålles.

Utgångspunkt för undersökningen är insamlade data över produktion och tilldelning för tredje kvartalet 1965. Produktionen vid de 7 cementfabrikerna och tilldelade kvantiteter till de 17 olika områdena framgår av FIG. 12.1.

Bestämningen av transportavstånden mellan varje fabrik och resp avnämarområde är ett speciellt problem. Aktuella arbetsplatsers lägen varierar i tiden inom området, varför en uppskattning av medelvärdet måste användas. Sådana uppskattningar, baserade på historiska data, är angivna i avståndsmatrisen, FIG. 12.1.

Transporterna från fabrik till avnämarområde sker genomgående på järnväg.

En ökning av produktionen av cementtypen "250" med 1 miljon ton/år är planerad. Denna tillkommande produktion tilldelas de administrativa områdena i proportion till förbrukningen. Tre orter är tänkbara som lokaliseringpunkter för nya fabriker. Avstånden från dessa orter till avnämarområdena framgår av FIG. 12.2.

Produktionskapaciteten hos en nybyggd fabrik kan väljas till 1,0 miljon ton eller 0,5 miljon ton per år. Detta medför att följande utbyggnadsalternativ bör undersökas.

- I) N1 - 1 milj ton
 II) N2 - 1 milj ton
 III) N3 - 1 milj ton
 IV) N1 - 0,5 milj ton och N2 - 0,5 milj ton
 V) N1 - 0,5 milj ton och N3 - 0,5 milj ton
 VI) N2 - 0,5 milj ton och N3 - 0,5 milj ton

Optimeringsberäkningar genomförs för vart och ett av alternativen I - VI. För att förenkla framställningen utnyttjas den indicering av flödesvariablerna som framgår av nedanstående tablå. I denna har jämväl införts de cementkvantiteter som tilldelas de administrativa områdena efter det att kapaciteten utbygts.

| Mottagare Leverantör | | Mottagare | | | | | | | Leverantör | | | | | | | | | | |
|-------------------------------|----------------|--------------|-----------|-----------|------------|-----------|---------------|------------|------------|---------|--------------|----------|-------------|-------------|---------------|-------------|-------------|----------------|-------|
| | | biafostockie | bydgoskie | gdafnskie | katowickie | kieleckie | koszalinfskie | krakowskie | lubelskie | lódzkie | olsztynfskie | opolskie | poznanfskie | rzeszowskie | szezecinfskie | warszawskie | wroclawskie | zielonogórskie | Summa |
| Opole | A | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | |
| Goeszów | B | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | |
| Raciborowice | C | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | |
| Siersza | D | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | |
| Szczakowa | E | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | |
| Bolesławiec | F | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | |
| Zawiercie | G | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | |
| Chełm | H | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | |
| Piechcin | N ₁ | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | |
| Kornica | N ₂ | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | |
| Tilldelad kvantitet | N ₃ | 19,4 | 21,4 | 17,2 | 64,4 | 19,4 | 21,4 | 32,4 | 16,3 | 33,4 | 22,7 | 19,8 | 73,8 | 21,9 | 20,8 | 49,5 | 45,0 | 17,0 | 515,8 |

Utbyggnadsalternativ 1

Objektfunktionen antar följande utseende ,

$$\begin{aligned}
 F = & 509x_1 + 353x_2 + 513x_3 + 101x_4 + 217x_5 + 507x_6 + 184x_7 + \\
 & + 430x_8 + 232x_9 + 509x_{10} + 62x_{11} + 252x_{12} + 337x_{13} + \\
 & + 457x_{14} + 342x_{15} + 91x_{16} + 245x_{17} + 579x_{18} + 444x_{19} + \\
 & + 604x_{20} + 77x_{21} + 237x_{22} + 636x_{23} + 119x_{24} + 428x_{25} + \\
 & + 297x_{26} + 596x_{27} + 146x_{28} + 381x_{29} + 272x_{30} + 595x_{31} + \\
 & + 393x_{32} + 228x_{33} + 382x_{34} + 667x_{35} + 356x_{36} + 516x_{37} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 289x_{38} + 402x_{39} + 469x_{40} + 367x_{41} + 615x_{42} + 348x_{43} + \\
& + 527x_{44} + 194x_{45} + 222x_{46} + 525x_{47} + 348x_{48} + 481x_{49} + \\
& + 111x_{50} + 133x_{51} + 500x_{52} + 397x_{53} + 557x_{54} + 39x_{55} + \\
& + 165x_{56} + 607x_{57} + 39x_{58} + 353x_{59} + 248x_{60} + 549x_{61} + \\
& + 134x_{62} + 352x_{63} + 197x_{64} + 566x_{65} + 323x_{66} + 216x_{67} + \\
& + 370x_{68} + 493x_{69} + 381x_{70} + 541x_{71} + 23x_{72} + 147x_{73} + \\
& + 591x_{74} + 55x_{75} + 360x_{76} + 227x_{77} + 533x_{78} + 118x_{79} + \\
& + 336x_{80} + 213x_{81} + 550x_{82} + 307x_{83} + 200x_{84} + 354x_{85} + \\
& + 667x_{86} + 355x_{87} + 515x_{88} + 289x_{89} + 402x_{90} + 450x_{91} + \\
& + 367x_{92} + 615x_{93} + 648x_{94} + 526x_{95} + 194x_{96} + 221x_{97} + \\
& + 525x_{98} + 329x_{99} + 481x_{100} + 112x_{101} + 114x_{102} + \\
& + 459x_{103} + 347x_{104} + 507x_{105} + 43x_{106} + 164x_{107} + \\
& + 584x_{108} + 89x_{109} + 377x_{110} + 193x_{111} + 499x_{112} + \\
& + 421x_{113} + 329x_{114} + 247x_{115} + 542x_{116} + 273x_{117} + \\
& + 203x_{118} + 357x_{119} + 373x_{120} + 518x_{121} + 571x_{122} + \\
& + 455x_{123} + 285x_{124} + 742x_{125} + 386x_{126} + 72x_{127} + \\
& + 352x_{128} + 475x_{129} + 493x_{130} + 538x_{131} + 287x_{132} + \\
& + 752x_{133} + 253x_{134} + 575x_{135} + 676x_{136}
\end{aligned}$$

Balansvillkoren för leverantörer blir

$$\sum_{i=1}^{17} x_i = 75,7, \quad (1)$$

$$\sum_{i=18}^{34} x_i = 31,4 \quad (2)$$

$$\sum_{i=35}^{51} x_i = 40,3 \quad (3)$$

$$\sum_{i=52}^{68} x_i = 49,8, \quad (4)$$

$$\sum_{i=69}^{85} x_i = 54,1, \quad (5)$$

$$\sum_{i=86}^{102} x_i = 5,9, \quad (6)$$

$$\sum_{i=103}^{119} x_i = 8,6, \quad (7)$$

$$\sum_{i=120}^{136} x_i = 250. \quad (8)$$

Balansvillkoren för avnämningarområden blir

$$x_1 + x_{18} + x_{35} + x_{52} + x_{69} + x_{86} + x_{103} + x_{120} = 19,4, \quad (9)$$

$$x_2 + x_{19} + x_{36} + x_{53} + x_{70} + x_{87} + x_{104} + x_{121} = 21,4, \quad (10)$$

$$x_3 + x_{20} + x_{37} + x_{54} + x_{71} + x_{88} + x_{105} + x_{122} = 17,2, \quad (11)$$

$$x_4 + x_{21} + x_{38} + x_{55} + x_{72} + x_{89} + x_{106} + x_{123} = 64,4, \quad (12)$$

$$x_5 + x_{22} + x_{39} + x_{56} + x_{73} + x_{90} + x_{107} + x_{124} = 19,4, \quad (13)$$

$$x_6 + x_{23} + x_{40} + x_{57} + x_{74} + x_{91} + x_{108} + x_{125} = 21,4, \quad (14)$$

$$x_7 + x_{24} + x_{41} + x_{58} + x_{75} + x_{92} + x_{109} + x_{126} = 32,4, \quad (15)$$

$$x_8 + x_{25} + x_{42} + x_{59} + x_{76} + x_{93} + x_{110} + x_{127} = 16,3, \quad (16)$$

$$x_9 + x_{26} + x_{43} + x_{60} + x_{77} + x_{94} + x_{111} + x_{128} = 33,4, \quad (17)$$

$$x_{10} + x_{27} + x_{44} + x_{61} + x_{78} + x_{95} + x_{112} + x_{129} = 22,7, \quad (18)$$

$$x_{11} + x_{28} + x_{45} + x_{62} + x_{79} + x_{96} + x_{113} + x_{130} = 19,8, \quad (19)$$

$$x_{12} + x_{29} + x_{46} + x_{63} + x_{80} + x_{97} + x_{114} + x_{131} = 73,8, \quad (20)$$

$$x_{13} + x_{30} + x_{47} + x_{64} + x_{81} + x_{98} + x_{115} + x_{132} = 21,9, \quad (21)$$

$$x_{14} + x_{31} + x_{48} + x_{65} + x_{82} + x_{99} + x_{116} + x_{133} = 20,8, \quad (22)$$

$$x_{15} + x_{32} + x_{49} + x_{66} + x_{83} + x_{100} + x_{117} + x_{134} = 49,5, \quad (23)$$

$$x_{16} + x_{33} + x_{50} + x_{67} + x_{84} + x_{101} + x_{118} + x_{135} = 45,0, \quad (24)$$

$$x_{17} + x_{34} + x_{51} + x_{68} + x_{85} + x_{102} + x_{119} + x_{136} = 17,0. \quad (25)$$

Minimera F. Detta genomförs med konventionella transportalgoritmer.

Utbyggnadsalternativ II

Den matematiska formuleringen av problemet för utbyggnadsalternativ II skiljer sig från föregående endast i följande punkter.

a) ekv (8) antager formen
$$\sum_{i=137}^{153} x_i = 250;$$

b) i ekv (9) - (25) ersättes variablerna $x_{120} - x_{136}$ med variablerna $x_{137} - x_{153}$

c) i målfunktionen ersättes termerna fr.o.m. $373x_{120}$ till $676x_{136}$ med följande:

$$\begin{aligned} & 433x_{137} + 62x_{138} + 222x_{139} + 338x_{140} + 395x_{141} + 290x_{142} + \\ & + 406x_{143} + 433x_{144} + 217x_{145} + 214x_{146} + 314x_{147} + 113x_{148} + \\ & + 564x_{149} + 284x_{150} + 271x_{151} + 257x_{152} + 251x_{153}. \end{aligned}$$

På motsvarande sätt uppställs och löses programmen för övriga alternativ.

Vid minimering av objektfunktionen erhålls de värden på denna som framgår av nedanstående tablå. Värdena är angivna i tusentals tonkm.

| | | | | | |
|-----------|---|--------|----------|---|--------|
| F_I | = | 134685 | F_{IV} | = | 87664 |
| F_{II} | = | 86445 | F_V | = | 126080 |
| F_{III} | = | 127310 | F_{VI} | = | 82326 |

| Mottagare Leverantör | Mottagare | | | | | | Leverantör | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------|--------------|-----------|----------|------------|-----------|--------------|------------|-----------|---------|-------------|----------|------------|-------------|--------------|-------------|-------------|----------------|-------------|--|
| | białostockie | bydgoskie | gdańskie | katowickie | kieleckie | koszalińskie | krakowskie | lubelskie | łódzkie | olsztyńskie | opolskie | poznańskie | rzeszowskie | szczęcińskie | warszawskie | wrocławskie | zielonogórskie | | |
| I. Opole | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Goeszów | | | | | | | | | | 19,8 | 30,7 | | | | 45,0 | | | | |
| Raciborowice | | | | | | | | | | | 11,6 | | | | | | 17,0 | | |
| Siersza | | | | 10,3 | | | 32,4 | | | | 8,4 | | 14,9 | | | | | | |
| Szczakowa | | | | 54,1 | | | | | | | 7,1 | | | | | | | | |
| Bolesławiec | | | | | | | | | | | | | 5,9 | | | | | | |
| Zawiercie | | | | | | | | | | | 8,6 | | | | | | | | |
| Chełm | 19,4 | 21,4 | 17,2 | | 19,4 | 21,4 | | 16,3 | 33,4 | 22,7 | 7,4 | 21,9 | | 49,5 | | | | F = 134 685 | |
| II. Opole | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Goeszów | | | | 31,4 | | | | | | 19,8 | | | | | | 15,8 | | | |
| Raciborowice | | | | | | | | | | | | | | | 29,2 | 11,1 | | | |
| Siersza | | | | | | | 27,9 | | | | | 21,9 | | | | | | | |
| Szczakowa | | | | 33,0 | 10,8 | | 4,5 | 5,8 | | | | | | | | | | | |
| Bolesławiec | | | | | | | | | | | | | | | | | 5,9 | | |
| Zawiercie | | | | | 8,6 | | | | | | | | | | | | | | |
| Piechcin | 19,4 | 21,4 | 17,2 | | | 21,4 | | | 3,8 | 22,7 | | 73,8 | | 20,8 | 49,5 | | | F = 86 445 | |
| III. Opole | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Goeszów | | | | 11,6 | | | | | | 19,8 | 30,7 | | | | 45,0 | | | | |
| Raciborowice | | | | | | | | | | | 8,4 | | 14,9 | | | 17,0 | | | |
| Siersza | | | | | | | 27,9 | | | | | | 21,9 | | | | | | |
| Szczakowa | | | | 49,6 | | | 4,5 | | | | | | | | | | | | |
| Bolesławiec | | | | | | | | | | | | | 5,9 | | | | | | |
| Zawiercie | | | | 3,2 | | | | | | | 5,4 | | | | | | | | |
| Kornica | 19,4 | 21,4 | 17,2 | | 19,4 | 21,4 | | 16,3 | 33,4 | 22,7 | 29,3 | | | 49,5 | | | | F = 127 310 | |
| IV. Opole | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Goeszów | | | | 31,4 | | | | | | 19,8 | 10,9 | | | | 45,0 | | | | |
| Raciborowice | | | | | | | | | | | 8,4 | | 20,8 | | | 11,1 | | | |
| Siersza | | | | 17,4 | | | 32,4 | | | | | | | | | | | | |
| Szczakowa | | | | 15,6 | 19,4 | | | | | | 19,1 | | | | | | | | |
| Bolesławiec | | | | | | | | | | | 8,6 | | | | | | | | |
| Zawiercie | | | | | | | | | | | 5,7 | 12,2 | | | | | | | |
| Chełm | 19,4 | | | | | | | 16,3 | 5,7 | 22,7 | | 21,9 | | 49,5 | | | | F = 87 664 | |
| Piechcin | | 21,4 | 17,2 | | | 21,4 | | | | | 54,5 | | | | | | | | |
| V. Opole | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Goeszów | | | | | | | | | | 19,8 | 30,7 | | | | 45,0 | | | | |
| Raciborowice | | | | | | | | | | | 11,6 | | | | | | 17,0 | | |
| Siersza | | | | 10,3 | | | 32,4 | | | | 8,4 | | 14,9 | | | | | | |
| Szczakowa | | | | 54,1 | | | | | | | 7,1 | | | | | | | | |
| Bolesławiec | | | | | | | | | | | | | 5,9 | | | | | | |
| Zawiercie | | | | | | | | | | | 8,6 | | | | | | | | |
| Chełm | | | 12,6 | | 19,4 | 21,4 | | 16,3 | 33,4 | | | 21,9 | | | | | | | |
| Kornica | 19,4 | 21,4 | 4,6 | | | | | | | 22,7 | 7,4 | | | 49,5 | | | | F = 126 080 | |
| VI. Opole | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Goeszów | | | | 31,4 | | | | | | 19,8 | 0,4 | | | | 45,0 | | | | |
| Raciborowice | | | | | | | | | | | 8,4 | | 20,8 | | | 11,1 | | | |
| Siersza | | | | | | | 27,9 | | | | | | | | | | | | |
| Szczakowa | | | | 33,0 | 16,6 | | 4,5 | | | | | | | | | | | | |
| Bolesławiec | | | | | | | | | | | | | | | | | 5,9 | | |
| Zawiercie | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Piechcin | | 21,4 | 17,2 | | | 21,4 | | | | | | | | | | | | | |
| Kornica | 19,4 | | | | 2,8 | | | 16,3 | 14,3 | 22,7 | | 65,0 | | 49,5 | | | | F = 82 326 | |

FIG. 12.3. Lokalisering av cementfabriker, Polen.
Optimal transportplan för undersökta alternativ.

Om alternativen rangordnas från sämsta till bästa alternativ (med avseende på transportarbetets storlek) fås följande ordning

I, III, V, IV, II, VI.

Lägst värde har målfunktionen för alternativ VI. FIG. 12.3 redovisar optimal transportfördelning för de olika utbyggnadsalternativen.

Vid det slutliga valet av utbyggnadsalternativ måste hänsyn jämväl tas till skillnader i fråga om tillverkningskostnader och transportkostnader. För detta ändamål utnyttjas i undersökningen ett approximationsförfarande. Detta förfarande baserades på den optimering som presenterats.

3.4.4 Praktikfall 2. Lokalisering av byggnadskeramisk industri

Som ett led i planeringen av Sovjetrepubliken Kazachstans utveckling har en utredning rörande lokalisering av viss byggmaterialindustri utförts. Utredningen har gjorts av Institutet för byggnadsekonomi och det statliga institutet för projektering av byggnadsmaterialindustri, Giprostroimateriali.

Lokaliseringsutredningen är beskriven i Birman (1962). Följande framställning baseras på denna källa.

I Kazachstan fanns vid utredningstillfället ingen industri för tillverkning av byggnadskeramiska produkter. Dessa måste importeras från andra delar av Sovjetunionen. Med den planerade utvecklingen av byggnadsverksamheten under åren 1960-80 skulle behovet av byggnadskeramiska produkter stegras högst avsevärt. Att som tidigare tillfredsställa behovet med import skulle medföra utomordentligt höga transportkostnader. En lokalisering av byggnadskeramisk industri till Kazachstan befanns därför motiverad.

Målet för utredning var att finna en optimal lokalisering av fabriker för tillverkning av fem byggnadskeramiska produkter, fasadplattor, golvplattor, väggplattor, rör och sanitetsgods.

| Orter lämpliga för lokalisering | Kapacitet | Efterfr år | Avnämarområden och efterfrågan per år | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------|-----------|---------------|---------------------------------------|------------------------|-------------------|---------------|-----------------|---------------|----------------------|---------------|--------------|------------------------|-------------|-----------------|-----------------|---------------|------------------|-------------------------|---------|
| | | | Алма-Атинская | Восточно-Казахстанская | Семирпа-латинская | Павлодар-ская | Целино-градская | Кокчетав-ская | Сенсо-Казах-станская | Кустанай-ская | Актюбин-ская | Западно-Казахстан-ская | Гурьев-ская | Южно-Казахстан. | Кзыл-Ор-динская | Джам-бульская | Караган-дильская | Фиктив-ный пот-ребитель | |
| | | | 1980 г. | 1975 г. | 1970 г. | 1965 г. | 1980 г. | 1975 г. | 1970 г. | 1965 г. | 1980 г. | 1975 г. | 1970 г. | 1965 г. | 1980 г. | 1975 г. | 1970 г. | 1965 г. | 1980 г. |
| Алма-Ата | 28 | | 26 | 33 | 31 | 35 | 33 | 35 | 40 | 37 | 38 | 42 | 41 | 29 | 32 | 28 | 31 | 10 | |
| Талды-Курган | 28 | | 28 | 32 | 30 | 34 | 35 | 37 | 37 | 40 | 41 | 44 | 44 | 32 | 45 | 31 | 34 | 10 | |
| Усть-Каменогорск | 28 | | 34 | 27 | 28 | 32 | 34 | 36 | 37 | 39 | 43 | 46 | 46 | 39 | 41 | 37 | 35 | 10 | |
| Семиралатинск | 28 | | 31 | 27 | 26 | 30 | 33 | 35 | 34 | 37 | 42 | 44 | 44 | 35 | 38 | 34 | 34 | 10 | |
| Павлодар | 28 | | 38 | 33 | 33 | 28 | 30 | 32 | 33 | 34 | 38 | 42 | 41 | 39 | 42 | 37 | 31 | 10 | |
| Целиноград | 28 | | 33 | 34 | 33 | 28 | 26 | 27 | 28 | 29 | 34 | 36 | 34 | 36 | 33 | 27 | 10 | | |
| Кокчетав | 28 | | 36 | 37 | 36 | 31 | 28 | 27 | 28 | 33 | 37 | 36 | 39 | 37 | 39 | 36 | 39 | 10 | |
| Петропавловск | 28 | | 43 | 40 | 37 | 33 | 30 | 29 | 29 | 33 | 36 | 39 | 39 | 43 | 41 | 42 | 32 | 10 | |
| Кустанай | 28 | | 41 | 42 | 41 | 35 | 33 | 35 | 34 | 29 | 34 | 37 | 36 | 42 | 38 | 40 | 34 | 10 | |
| Актюбинск | 28 | | 38 | 42 | 42 | 36 | 33 | 35 | 33 | 30 | 26 | 29 | 29 | 34 | 31 | 35 | 35 | 10 | |
| Уральск | 28 | | 44 | 47 | 47 | 42 | 38 | 36 | 38 | 36 | 31 | 28 | 33 | 40 | 36 | 35 | 39 | 10 | |
| Гурьев | 28 | | 43 | 47 | 46 | 41 | 38 | 40 | 38 | 34 | 31 | 33 | 28 | 39 | 36 | 40 | 39 | 10 | |
| Кандагач | 28 | | 38 | 42 | 41 | 35 | 33 | 35 | 33 | 29 | 26 | 29 | 28 | 33 | 30 | 35 | 34 | 10 | |
| Чимкент | 28 | | 29 | 38 | 35 | 37 | 33 | 35 | 40 | 38 | 34 | 38 | 37 | 26 | 30 | 26 | 32 | 10 | |
| Кзыл-Орда | 28 | | 34 | 42 | 40 | 41 | 37 | 39 | 40 | 36 | 32 | 35 | 35 | 29 | 27 | 30 | 35 | 10 | |
| Джамбул | 28 | | 28 | 37 | 34 | 35 | 33 | 34 | 39 | 37 | 36 | 33 | 38 | 27 | 29 | 26 | 31 | 10 | |
| Караганда | 28 | | 31 | 35 | 34 | 29 | 26 | 28 | 29 | 30 | 35 | 35 | 37 | 32 | 34 | 31 | 26 | 10 | |
| Ангрен (Узбекская ССР) | 8 | (1970 г.) | 31 | 39 | 38 | 38 | 36 | 38 | 39 | 40 | 34 | 37 | 36 | 27 | 28 | 28 | 34 | 10 | |

FIG. 13.1. Lokalisering av byggnadskeramisk industri, Kazachstan. Primäruppgifter.

Här presenteras kortfattat den delutredning som avser keramiska rör.

Utgångspunkt för beräkningarna är den planerade tilldelningen av keramiska rör till 15 administrativa områden. Planer föreligger för åren 1965, 1970, 1975 och 1980.

Bestämmande vid dimensionering av keramisk industri är brännugnarnas kapacitet. Detta innebär att fabrikernas kapacitet inte kan varieras kontinuerligt, utan måste bestämmas som multiplar av ugnskapacitet. För produktion av keramiska rör utnyttjas ugnsenheter med kapaciteten 28 000 ton/år.

Möjliga platser för lokalisering av keramisk industri har inventerats. Härvid har tillgången till råmaterial, energi och vatten samt transportvägar varit utslagsgivande.

Lokaliseringsinventeringen har resulterat i att keramiska fabriker, från teknisk synpunkt, kan placeras i 17 orter.

De primäruppgifter som insamlats vid optimeringsberäkningens början är sammanställda i FIG. 13.1.

Tabellens rader anger samtliga de lokaliseringsmöjligheter som inventeringen resulterat i. I den mån behovet i begränsad omfattning ($< c:a$ 12000 ton per år) överstiger jämna multiplar av 28000 ton avstår man från att bygga ytterligare en produktionsenhet. I stället importeras produkterna. "Importkällan" återfinns på den sista raden.

Kolumnerna i tabellen avser de femton administrativa områdena. Den planerade tilldelningen av rör till de olika områdena anges för åren 1965, 1970, 1975 och 1980.

Den sista kolumnen utgör en fiktiv sänka. Till denna förs de kvantiteter som inte efterfrågas; den motsvarar outnyttjad kapacitet hos källorna. Beräkningen av de kvantiteter som tillförs den fiktiva sänkan sker på följande sätt.

För 1965

Den planerade tilldelningen till de administrativa områdena, efterfrågan, uppgår till 82 000 ton. Uppbyggs kapacitet på samtliga de platser där det är möjligt erhålls en total kapacitet om 476 000 ton.

Någon import är inte aktuell i detta fall eftersom en utbyggnad av tre enheter om 28 000 ton tillfredsställer efterfrågan och eftersom den outnyttjade kapaciteten endast uppgår till 2 000 ton per år.

Till den fiktiva sänkan överförs sålunda outnyttjad kapacitet $476\ 000 - 82\ 000 = 394\ 000$ ton.

För 1970

Efterfrågan uppgår detta år till 232 000 ton. Den kapacitet som kan byggas ut är 476 000 ton.

I detta fall konstaterar vi emellertid att import måste tillgripas. Om 8 produktionsenheter om 28 000 ton byggs ut erhålls en kapacitet om 224 000 ton, vilket med 8 000 ton understiger vad som erfordras. Byggs å andra sidan 9 enheter ut uppkommer en outnyttjad kapacitet om 20 000 ton. Då detta inte kan accepteras tillgrips importalternativet.

Till den fiktiva sänkan kommer sålunda att föras $476\ 000 + 8\ 000 - 232\ 000 = 252\ 000$ ton.

På motsvarande sätt beräknas den outnyttjade kapaciteten för åren 1975 och 1980.

I FIG anges enhetskostnaden fritt resp administrativa område, dvs den avser "självkostnad" + transportkostnad. Som påpekats i annat sammanhang skall enhetskostnaderna i den fiktiva sänkan vara desamma för samtliga transportvägar. Det värde som valts är 10.

| Orter lämpliga för lokalisering | Kapacitet | Avnämrområden och efterfrågan 1970 | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------|-----------|------------------------------------|-----------------------------|-----------------|--------------|----------------|--------------|----------------------|--------------|-------------|----------------------------|------------|--------------------|----------------|-------------|----------------|----------------------------|
| | | Алма-Атинская | Восточно-Казахстан- ская | Семипалатинская | Павлодарская | Целиноградская | Кокчетавская | Северо-Казахстанская | Кустанайская | Актюбинская | Западно-Казахстан- ская | Гурьевская | Южно-Казахстанская | Кзыл-Ординская | Джамбулская | Карагандинская | Фиктивный потре- битель |
| | | 17 | 14 | 9 | 28 | 13 | 10 | 12 | 35 | 5 | 4 | 8 | 18 | 5 | 9 | 45 | 252 |
| Алма-Ата | 28 | 17 | | | | | | | | | | | 2 | | | | — |
| Талды-Курган | 28 | | | | | | | | | | | | | 9 | | | 28 |
| Усть-Каменогорск | 28 | | 14 | | | | | | | | | | | | | | 14 |
| Семипалатинск | 28 | | | 9 | | | | | | | | | | | | | 19 |
| Павлодар | 28 | | | | 24 | | | | | | | | | | | | 4 |
| Целиноград | 28 | | | | 4 | 7 | | | | | | | | | | 17 | 4 |
| Кокчетав | 28 | | | | | 6 | 10 | 12 | | | | | | | | | — |
| Петропавловск | 28 | | | | | | | | | | | | | | | | — |
| Кустанай | 28 | | | | | | | | 7 | | | | | | | | 28 |
| Актюбинск | 28 | | | | | | | | | 5 | | | | | | | 21 |
| Уральск | 28 | | | | | | | | | | 4 | | | | | | 23 |
| Гурьев | 28 | | | | | | | | | | | 8 | | | | | 24 |
| Кандагач | 28 | | | | | | | | | | | | | | | | 20 |
| Чимкент | 28 | | | | | | | | 28 | | | | 16 | | | | — |
| Кзыл-Орда | 28 | | | | | | | | | | | | | 5 | | | 12 |
| Джамбул | 28 | | | | | | | | | | | | | | | | 23 |
| Караганда | 28 | | | | | | | | | | | | | | | 28 | 28 |
| Ангрен (Узбекская ССР) | 8 | | | | | | | | | | | | | | | 28 | — |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 8 |

FIG. 13.2. Lokalisering av byggnadskeramisk industri, Kazachstan. Optimal primärlösning.

För vart och ett av åren 1965, 1970, 1975 och 1980 genomförs en optimeringsberäkning. Detta sker med konventionella transportalgoritmer. En optimal lösning, avseende år 1970 presenteras i FIG. 13.2.

Av lösningen finner vi att möjlig produktion i källorna A, F, G, M och R i dess helhet levereras till avnämare, reella sänkor.

Kapaciteten i källorna B, H och P kommer inte att utnyttjas alls; hela den möjliga produktionen transporteras till den fiktiva sänkan. Dessa lokaliseringmöjligheter beaktas inte i fortsättningen. Samma är förhållandet med importalternativet.

För övriga källor kan man inte dra motsvarande slutsatser, eftersom de inte ger heltalslösningar; kapaciteten kommer att utnyttjas endast i viss utsträckning.

Problemet löses genom att man prövar sig fram med sådana lokaliseringmöjligheter som inte är heltalslösningar. Förfarandet illustreras i det följande.

Vi förutsätter att utbyggnad inte sker av sådana fabriker vars kapacitet i primärlösningen endast utnyttjas i ringa utsträckning. Källorna I, J, K och O är sålunda inte aktuella.

Vi förutsätter att fabriker byggs ut, vilka i primärlösningen inte har någon ledig kapacitet. Dessutom förutsätter vi att fabrik byggs i E eftersom kapacitetsutnyttjningen i primärlösningen är hög. Den totala kapaciteten blir då 168 000 ton per år. Då efterfrågan är 232 000 ton måste ytterligare två fabriker byggas. Dessutom måste 8 000 ton importeras.

De orter som är aktuella för lokalisering är C, D, L och N. Primärlösningarna för åren 1975 och 1980 visar att det är ändamålsenligt att placera en fabrik i orten N. Det är därför motiverat att förutsätta att en fabrik lokaliseras där även i vår lösning.

| Orter lämpliga för lokalisering | Kapacitet | Avnämarområden och efterfrågan 1970 | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------|-----------|-------------------------------------|------------------------|-----------------|--------------|----------------|--------------|----------------------|--------------|-------------|-----------------------|------------|--------------------|----------------|-------------|----------------|
| | | Алма-Атинская | Восточно-Казахстанская | Семипалатинская | Павлодарская | Целиноградская | Кокчетавская | Северо-Казахстанская | Кустанайская | Актюбинская | Западно-Казахстанская | Гурьевская | Южно-Казахстанская | Кзыл-Ординская | Джамбулская | Карагандинская |
| | | 17 | 14 | 9 | 28 | 13 | 10 | 12 | 35 | 5 | 4 | 8 | 18 | 5 | 9 | 45 |
| Алма-Ата A | 28 | 26 | 33 | 31 | 35 | 33 | 35 | 40 | 37 | 38 | 42 | 41 | 29 | 32 | 28 | 31 |
| Павлодар E | 28 | 38 | 33 | 33 | 28 | 30 | 32 | 33 | 34 | 38 | 42 | 41 | 39 | 42 | 37 | 31 |
| Целиноград F | 28 | 33 | 34 | 33 | 28 | 26 | 27 | 28 | 29 | 34 | 36 | 36 | 34 | 36 | 33 | 27 |
| Кокчетав G | 28 | 36 | 37 | 36 | 31 | 28 | 27 | 28 | 33 | 37 | 36 | 39 | 37 | 39 | 36 | 39 |
| Кандагач M | 28 | 38 | 42 | 41 | 35 | 33 | 35 | 33 | 29 | 26 | 29 | 28 | 33 | 30 | 35 | 34 |
| Чимкент N | 28 | 29 | 38 | 35 | 37 | 33 | 35 | 40 | 38 | 34 | 38 | 37 | 26 | 30 | 26 | 32 |
| Караганда R | 28 | 31 | 35 | 34 | 29 | 26 | 28 | 29 | 30 | 35 | 35 | 37 | 32 | 34 | 31 | 26 |
| Ангрен S | 8 | 31 | 39 | 38 | 38 | 36 | 38 | 39 | 40 | 34 | 37 | 36 | 27 | 28 | 28 | 34 |
| Семипалатинск D | 28 | 31 | 27 | 26 | 30 | 33 | 35 | 34 | 37 | 42 | 44 | 44 | 35 | 38 | 34 | 34 |

FIG. 13.3. Lokalisering av byggnadskeramisk industri, Kazachstan. Variant D. Transporttablå.

| Orter lämpliga för lokalisering | Kapacitet | Avnämarområden och efterfrågan 1970 | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------------|-----------|-------------------------------------|------------------------|-----------------|--------------|----------------|--------------|----------------------|--------------|-------------|-----------------------|------------|--------------------|----------------|-------------|----------------|
| | | Алма-Атинская | Восточно-Казахстанская | Семипалатинская | Павлодарская | Целиноградская | Кокчетавская | Северо-Казахстанская | Кустанайская | Актюбинская | Западно-Казахстанская | Гурьевская | Южно-Казахстанская | Кзыл-Ординская | Джамбулская | Карагандинская |
| | | 17 | 14 | 9 | 28 | 13 | 10 | 12 | 35 | 5 | 4 | 8 | 18 | 5 | 9 | 45 |
| Алма-Ата A | 28 | 17 | | | | | | | | | | | | | | 11 |
| Павлодар E | 28 | | | | 23 | 3 | | | | | | | | | | 2 |
| Целиноград F | 28 | | | | | 4 | | | 24 | | | | | | | |
| Кокчетав G | 28 | | | | | 6 | 10 | 12 | | | | | | | | |
| Кандагач M | 28 | | | | | | | | 11 | 5 | 4 | 8 | | | | |
| Чимкент N | 28 | | | | | | | | | | | 15 | | 9 | | 4 |
| Караганда R | 28 | | | | | | | | | | | | | | | 28 |
| Ангрен S | 8 | | | | | | | | | | | 3 | 5 | | | |
| Семипалатинск D | 28 | | 14 | 9 | 5 | | | | | | | | | | | |

FIG. 13.4. Lokalisering av byggnadskeramisk industri, Kazachstan. Variant D. Optimal lösning.

Vi kan sålunda förutsätta att kapacitet byggs ut på sju platser. 8 000 ton måste importeras medan 28 000 ton skall produceras, antingen i ort C, D eller L. Dessa alternativ benämnes variant C, D och L.

För var och en av dessa varianter upprättas en transporttablå, varefter optimeringsberäkningen genomförs med hjälp av transportalgoritm. Transporttablå för variant D framgår av FIG. 13.3.

En optimal lösning till variant D presenteras i FIG. 13.4. Objektfunktionens värde blir i detta fall 6 405 milj Rbl.

För varianterna C och L genomförs motsvarande beräkningar. Objektfunktionerna blir i dessa fall 6 433 milj Rbl resp 6 580 milj Rbl.

Den förmånligaste varianten är sålunda variant D.

Vi har hitintills förutsatt att kapaciteten hos de enskilda fabrikerna begränsas till kapaciteten hos en brännugn. Det är emellertid tekniskt möjligt att bygga flera ugnsenheter på samma ort. Denna variant måste därför också undersökas. Härvid genomförs beräkningarna med den teknik som presenterats.

När man skall bedöma hur produktionsresurserna skall byggas ut ett visst år måste man beakta även framtida förhållanden. Detta innebär att man inte kan basera sitt beslut enbart på optimeringsberäkningar för det aktuella året. Man måste även ta hänsyn till optimeringsberäkningen för övriga undersökta år.

Den lösning som man efter sådana överväganden stannat för framgår av nedanstående tablå.

| Lokaliseringsspunkt | Keramiska rör x 1000- ton | | | |
|-----------------------------------|------------------------------|---------|---------|---------|
| | 1965 г. | 1970 г. | 1975 г. | 1980 г. |
| | 82 | 232 | 265 | 279 |
| Алма-Ата . . . А | 28 | 28 | 28 | 28 |
| Семипалатинск | — | — | 28 | 28 |
| Целиноград | 28 | 56 | 56 | 56 |
| Кокчетав . . . Г | — | 28 | 28 | 28 |
| Актюбинск . . . Г | — | 28 | 56 | 56 |
| Чимкент . . . З | 28 | 28 | 28 | 28 |
| Караганда . . . Р | — | 56 | 56 | 56 |
| Ангрен (Узбекская ССР) . . . С | — | 8 | — | — |
| Summa . . . | 84 | 232 | 280 | 280 |

3.4.5 Övriga tillämpningar

I Mathematische Methoden zur Standortbestimmung (1968) ges en beskrivning av hur optimeringsmetoder tillämpas för lokaliseringsproblem.

Judin - Golstein började 1959 utnyttja transportmetoderna för lösning av lokaliseringsproblem. Sedan dess har optimeringsmetoder i allt större utsträckning börjat användas i de socialistiska länderna som underlag för lokaliseringsbeslut.

De första optimeringarna av större omfattning som utnyttjades i praktisk planeringsverksamhet avsåg lokalisering av olika byggmaterialindustrier.

Framgången med dessa optimeringsberäkningar medförde att Sovjetunionens plankommission 1966 lät genomföra lokaliseringsundersökningar för ett 20 - tal verksamhetsområden. Härigenom har optimeringsberäkningarna kommit att integreras i Sovjetunionens långsiktiga planering.

Bland konkreta tillämpningar i de socialistiska länderna kan anges följande.

Zurkowski (1964) har redovisat en lokaliseringsberäkning för cementindustrin i Polen. Den avser behövliga produktionsresurser 1980. Zurkowski har beaktat möjligheterna att substituera olika cementkvaliteter. Eftersom de olika kvaliteterna har olika kapacitetsanspråk kommer problemet att bli ett allmänt transportproblem; jämför avsnitt 3.2.

Niemczynow (1961) beskriver metoder för optimal lokalisering av cementindustri i enskilda Sovjetrepubliker.

Zeilikowitz, Abuchov (1964) redogör för hur optimeringsmetoder utnyttjats för lokaliseringsbeslut som avser resurser för virkesförsörjning, inredningssnickerier och betongelement.

Mirotin har i tidskriften *Awtomobilne Dorgi* 1964/12 beskrivit hur transportalgoritmer utnyttjats för lokaliseringsbeslut vid byggande av vägen Volgograd - Karniszin.

Problemet var att på ett optimalt sätt välja grustäcker och uppställningsplatser för krossverk. Beräkningen resulterade i avsevärda besparingar i förhållande till den lösning som tidigare presenterats. Sålunda kunde medeltransportavståndet för grus minskas från 17,7 km till 14,7 km. Krossprodukternas medelavstånd minskade från 35,9 km till 29,1 km.

En liknande undersökning har genomförts för Leningradområdet. Denna undersökning har redovisats av Selezniowa (1965). Undersökningen resulterade i en prioritering av hur grustäckerna skulle utnyttjas samt att transportererna skulle ske med båt.

3.5 Lokalisering av resurser - flerprodukttillverkning

I föregående avsnitt behandlades det fall då endast ett produktslag tillverkas/efterfrågas. Problem rörande lokalisering av produktionsresurser för tillverkning av ett flertal produktslag behandlas på likartat sätt.

I detta avsnitt skall vi belysa hur lokaliseringsproblem som berör flerprodukttillverkning kan behandlas. Ett tillämpnings-exempel presenteras där förutsättningarna är något mer komplicerade än i den inledande presentationen.

Framställningen baseras på (Finkelstein), Optimala planeringsmetoder (1965).

3.5.1 Problemet

Problemställning

I ett antal orter efterfrågas vissa produkter. Orternas belägenhet och efterfrågans storlek för resp produkter är känd.

Möjligheter föreligger att tillverka produkterna på ett flertal orter. Gränserna för den möjliga kapacitetsutbyggnaden är kända.

Det förutsätts vidare att tillverknings- och transportkostnaderna per enhet av de aktuella produkterna är kända.

Problemet är att förlägga tillverkningen till sådana orter att totalkostnaderna minimeras.

Matematisk formulering

I orterna A_i ; ($i=1, \dots, m$) efterfrågas vissa kvantiteter av produkterna P_k ; ($k=1, 2, \dots, n$). Den efterfrågade kvantiteten av produkt P_k i ort A_i är $b_i^{(k)}$.

Förutsättningar att tillverka produkterna föreligger i orterna A_i . Tillverkningskapaciteten för produkt P_k i ort A_i , betecknas med $\alpha_i^{(k)}$.

En ort kan uppträda som såväl källa som sänka. När den betraktas som källa betecknas den A_i . När den betraktas som sänka betecknas den \bar{A}_i .

Med $c_{ij}^{(k)}$ betecknas tillverknings- och transportkostnaden för en enhet av produkt P_k , när denna tillverkas i ort A_i och transporteras till ort A_j .

Beteckna transporterad kvantitet av P_k från A_i till \bar{A}_i med $x_{ij}^{(k)}$.

Problemet kan formuleras på följande sätt

$$\min F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} \quad (1.1)$$

under förutsättning att kapacitetsgränserna inte skall överskridas,

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^{(k)} \leq \alpha_i^{(k)} \quad (i=1 \dots m; k=1, \dots, n) \quad (1.2)$$

och under förutsättning att hela efterfrågan i varje ort skall tillgodoses,

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^{(k)} = b_j^{(k)} \quad (j=1 \dots m; k=1, \dots, n) \quad (1.3)$$

samt att

$$x_{ij}^{(k)} \geq 0 \quad (i=1 \dots m; j=1 \dots m; k=1 \dots n) \quad (1.4)$$

Lösning

Problemet är ett obalanserat transportproblem. Det löses med konventionella transportalgoritmer. Innan detta kan ske måste problemet emellertid omformuleras. Dels sker detta genom att problemet görs balanserat; detta åstadkoms genom att en fiktiv sänka införs. Dels sker det genom att enhetskostnaden för sådana transportförbindelser som inte kan existera ges ett mycket högt värde.

3.5.2 Tillämpningsexempel

Förutom vad som angivits i ovanstående matematiska formulering gäller följande.

För transporterna mellan de enskilda orterna utnyttjas en enhetlig fordonstyp. Kostnaden att transportera ett tomt fordon från A_i till A_j är $c_{ij}^{(0)}$ kr per enhet av fordonets lastkapacitet (ton).

Problemet är att förlägga tillverkningen på ett sådant sätt att totalkostnaderna minimeras, när jämväl kostnaderna för tomkörningar beaktas.

Detta innebär att objektfunktionen (1.1) förändras. Den får följande utseende

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^n c_{ij}^{(k)} x_{ij}^{(k)} \quad (1.1)$$

Utöver bivillkoren (1.2) och (1.3) gäller vissa villkor för fördelningen av transportresurserna. De transportresurser som utnyttjas för leverans till en ort A_j friställes där och utgör en källa av fri transportkapacitet enligt

$$\sum_{k=1}^n (b_j^{(k)} - x_{jj}^{(k)}) = \sum_{l=1}^m x_{jl}^{(0)}; \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (1.5)$$

Vidare gäller för en ort A_i att den där tillverkade mängden, minskad med den inom orten förbrukade mängden, fordrar vissa

transportresurser enligt

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n x_{ij}^{(k)} - \sum_{k=1}^n x_{ii}^{(k)} = \sum_{l=1}^m x_{li}^{(0)} ;$$

(i=1, 2, .. m) (1.6)

På grund av den valda indiceringsprincipen att transporterna alltid är riktade från A_i till \bar{A}_i , gäller att

$$x_{ij}^{(k)} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

Av det ovan sagda framgår att i det totala problemet ingår ett delproblem, där det gäller att fördela frigjorda transportresurser på ett optimalt sätt. Av villkoren (1.5) och (1.6) framgår att vissa orter utgör källor av frigjord transportkapacitet, medan andra orter utgör sänkor med ett behov av transportresurser.

Förutsätt att två olika produkter $P^{(1)}$ resp $P^{(2)}$ efterfrågas i de fyra orterna $A_1 \dots A_4$. Produkterna kan tillverkas i en eller flera av orterna $A_1 \dots A_4$.

De efterfrågade kvantiteterna under aktuell period framgår av nedanstående tablå. Av denna framgår även övre gräns för periodens produktion, kapacitet, i de enskilda orterna.

| Ort | Efterfrågan | | Kapacitet | |
|-------|-------------|-------------|------------------|------------------|
| | $b_i^{(1)}$ | $b_i^{(2)}$ | $\alpha_i^{(1)}$ | $\alpha_i^{(2)}$ |
| A_1 | 80 | 100 | 100 | 70 |
| A_2 | 50 | 90 | 100 | 100 |
| A_3 | 30 | 60 | 50 | 70 |
| A_4 | 100 | 50 | 50 | 250 |

Den rörliga tillverkningskostnaden och transportkostnaden per ton framgår av nedanstående tablå.

| $P_i^{(1)}$ | $P_i^{(2)}$ | Leverantör | Mottagare | | | |
|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | | | \bar{A}_1 | \bar{A}_2 | \bar{A}_3 | \bar{A}_4 |
| 30 | 25 | A_1 | 0 | 30 | 61 | 46 |
| 35 | 30 | A_2 | 30 | 0 | 38 | 50 |
| 40 | 60 | A_3 | 61 | 38 | 0 | 52 |
| 100 | 35 | A_4 | 46 | 50 | 52 | 0 |

Transporterna sker med fordon av enhetlig typ. Förflyttning av tomt fordon mellan A_1 och \bar{A}_1 är förenat med vissa kostnader. Dessa framgår av nedanstående tablå, där värdena avser kostnad per enhet (ton) av fordonens lastförmåga.

| Leverantör | Mottagare | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | \bar{A}_1 | \bar{A}_2 | \bar{A}_3 | \bar{A}_4 |
| A_1 | 0 | 27 | 55 | 41 |
| A_2 | 27 | 0 | 34 | 45 |
| A_3 | 55 | 34 | 0 | 47 |
| A_4 | 41 | 45 | 47 | 0 |

Problemet är ett flerstegs transportproblem. Det innehåller två delproblem, dels lokalisering med avseende på tillverknings/transportkostnader och dels med avseende på kostnader för körning med tomma fordon.

För lösning av flerstegsproblem har dels approximationsmetoder utarbetats och dels exakta metoder. Jämför avsnitt 2.3.3. Problemet löses här med båda dessa metodtyper.

Approximationsförfarande

I detta fall betraktar vi tillverkning/transport som ett isolerat problem. Vi söker en optimal lösning för de två produkttyperna. En sådan lösning för produkttyp $P^{(1)}$ resp $P^{(2)}$ framgår av nedanstående tablåer. Av dessa framgår att kapaciteten för $P^{(1)}$ bör byggas ut (utnyttjas) endast delvis i ort A_4 . Samma är förhållandet för produkt $P^{(3)}$ i ort A_3 och ort A_4 . I övrigt skall kapaciteten byggas ut helt.

| Leverantör | | Mottagare | | | | Leverantör | | Mottagare | | | |
|-------------|-----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------|-----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | | $\bar{A}_1^{(1)}$ | $\bar{A}_2^{(1)}$ | $\bar{A}_3^{(1)}$ | $\bar{A}_4^{(1)}$ | | | $\bar{A}_1^{(2)}$ | $\bar{A}_2^{(2)}$ | $\bar{A}_3^{(2)}$ | $\bar{A}_4^{(2)}$ |
| | | 80 | 50 | 30 | 100 | | | 100 | 90 | 60 | 50 |
| $A_1^{(1)}$ | 100 | 30 (80) | 60 | 91 | 7 | $A_1^{(2)}$ | 70 | 25 (70) | 55 | 86 | 71 |
| $A_2^{(1)}$ | 100 | 65 (50) | 35 | 73 | 85 (50) | $A_2^{(2)}$ | 100 | 60 (10) | 30 (90) | 68 | 80 |
| $A_3^{(1)}$ | 50 | 101 | 78 | 40 (30) | 92 (20) | $A_3^{(2)}$ | 70 | 121 | 98 | 60 (60) | 112 |
| $A_4^{(1)}$ | 50 | 146 | 150 | 152 | 100 (10) | $A_4^{(2)}$ | 250 | 81 (20) | 85 | 87 | 35 (50) |

Lösningen på problemet är nu att disponera de fordon som utnyttjas enligt tablerna på ett sådant sätt att kostnaderna för körning med tomma fordon minimeras.

Fordon som utnyttjats för leverans till en viss ort blir disponibla för andra transportuppgifter. Den del av den i orten tillverkade mängden som inte förbrukas inom orten kräver vissa transportresurser. I den utsträckning disponibla transportresurser i orten överstiger de erforderliga uppkommer ett fordonsöverskott i orten. I annat fall uppstår ett behov.

Appliceras de nämnda sambanden på vårt problem erhålls det resultat som framgår av nedanstående tablå.

| Ort | Efterfrågan | — | Tillverkn | Överskott av tomma fordon | Behov |
|-------|-------------|---|-----------|---------------------------|-------|
| A_1 | (80+100) | - | (100+70) | 10 | |
| A_2 | (50+90) | - | (100+100) | | 60 |
| A_3 | (30+60) | - | (50+60) | | 20 |
| A_4 | (100+50) | - | (10+70) | 70 | |

De framräknade värdena representerar tillgång och efterfrågan av tomma fordon på de enskilda orterna.

Optimeringen av tomkörningarna genomförs på konventionellt sätt. Följande transporttablå anger en optimal lösning.

| Leverantör | | Mottagare | |
|-------------|----|-------------------|-------------------|
| | | $\bar{A}_2^{(0)}$ | $\bar{A}_3^{(0)}$ |
| | | 60 | 20 |
| $A_1^{(0)}$ | 10 | 27 (10) | 55 |
| $A_4^{(0)}$ | 70 | 45 (50) | 47 (20) |

Approximationsförfarandet leder fram till en lösning vars objekt-funktion F har värdet 29 440.

$$F = \sum_{k=0}^3 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij}^{(k)} z_{ij}^{(k)} =$$

$$= (27 \cdot 10 + 45 \cdot 50 + 47 \cdot 20) + (30 \cdot 80 + 35 \cdot 50 + 40 \cdot 30 + \\ + 76 \cdot 20 + 85 \cdot 50 + 92 \cdot 20 + 100 \cdot 10) + (25 \cdot 70 + 60 \cdot 10 + \\ + 81 \cdot 20 + 30 \cdot 90 + 60 \cdot 60 + 35 \cdot 50) = 3\,460 + 13\,960 + \\ + 12\,020 = 29\,440;$$

Simultanförfarande

Det i avsnitt 2.3.3 beskrivna "simultanförfarandet" ger en exakt lösning till problemet.

Vårt problem kan ställas upp i en transporttablå av det utseende som presenterats i avsnitt 2.3.3. Härvid beaktas

dels att tillgången till tomma fordon i ort A_i överens-stämmer med efterfrågade kvantiteter i orten

$$a_i^{(0)} = \sum_{k=1}^n b_i^{(k)} \quad (i=1 \dots m)$$

dels att efterfrågan på tomma fordon i ort A_i överens-stämmer med tillverkningskapaciteten i orten

$$b_j^{(0)} = \sum_{k=1}^n \alpha_i^{(k)} \quad (j=1 \dots m)$$

Vår transporttablå kommer då att få följande utseende ,

| Leverantör | Mottagare | | | | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------|
| | $\bar{A}_1^{(0)}$ | $\bar{A}_2^{(0)}$ | $\bar{A}_3^{(0)}$ | $\bar{A}_4^{(0)}$ | $\bar{A}_1^{(1)}$ | $\bar{A}_2^{(1)}$ | $\bar{A}_3^{(1)}$ | $\bar{A}_4^{(1)}$ | $\bar{A}_1^{(2)}$ | $\bar{A}_2^{(2)}$ | $\bar{A}_3^{(2)}$ | $\bar{A}_4^{(2)}$ | |
| | 170 | 200 | 120 | 300 | 80 | 50 | 30 | 100 | 100 | 90 | 60 | 50 | |
| $A_1^{(0)}$ | 180 | 0 (170) | 27 (10) | 55 | 41 | | | | | | | | |
| $A_2^{(0)}$ | 140 | 27 | 0 (140) | 34 | 45 | | | | | | | | |
| $A_3^{(0)}$ | 90 | 55 | 34 | 0 (90) | 47 | | | | | | | | |
| $A_4^{(0)}$ | 150 | 41 | 45 | 47 | 0 | | | | | | | | |
| $A_1^{(1)}$ | 100 | 0 | | | | 30 (80) | 60 | 91 | 76 (20) | | | | |
| $A_2^{(1)}$ | 100 | | 0 (40) | | | 65 | 35 (50) | 73 | 85 (10) | | | | |
| $A_3^{(1)}$ | 50 | | | 0 | | 101 | 78 | 40 (30) | 92 (20) | | | | |
| $A_4^{(1)}$ | 50 | | | | 0 | 146 | 150 | 152 | 100 (50) | | | | |
| $A_1^{(2)}$ | 70 | 0 | | | | | | | | 25 (70) | 55 | 86 | 71 |
| $A_2^{(2)}$ | 100 | | 0 (10) | | | | | | | 60 | 30 (90) | 68 | 80 |
| $A_3^{(2)}$ | 70 | | | 0 (30) | | | | | | 121 | 98 | 60 (40) | 112 |
| $A_4^{(2)}$ | 250 | | | | 0 (150) | | | | | 81 (30) | 85 | 87 (20) | 35 (50) |

I de rutor som lämnats tomma införs enhetskostnader M , mycket höga kostnader.

Problemet löses med utnyttjande av konventionella transportalgoritmer. I vår transporttablå har en optimal lösning angivits.

Vi konstaterar att enligt denna lösning bör kapaciteten utbyggas (utnyttjas) helt för produkt $P^{(1)}$ i orterna A_1 , A_3 och A_4 . För produkt $P^{(2)}$ bör utbyggandet (utnyttjandet) ske till 100% endast i ort A_1 . I övrigt bör kapacitetsutbyggnaden (-utnyttjandet) ske endast i begränsad omfattning.

Den exakta lösningen ger objektfunktionen F värdet 27 600.

$$F = \sum_{k=0}^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij}^{(k)} y_{ij}^{(k)}:$$

$$F = 0 \cdot 170 + 27 \cdot 10 + 0 \cdot 140 + 0 \cdot 150 + 0 \cdot (40 + 10 + 30 + 150) + 30 \cdot 80 + 76 \cdot 20 + 35 \cdot 50 + 85 \cdot 10 + 40 \cdot 30 + 92 \cdot 20 + 100 \cdot 50 + 25 \cdot 70 + 30 \cdot 90 + 60 \cdot 40 + 81 \cdot 30 + 87 \cdot 20 + 35 \cdot 50 = 27\,600;$$

Objektfunktionen kommer sålunda att få ett värde som är 6,25% förmånligare än om den approximativa metoden utnyttjats för lokaliseringen.

3.5.3 Övriga tillämpningar

Barbakadze (1965) har presenterat en modell för lokalisering av betongelementindustri.

Denna modell har utnyttjats vid lokalisering av elementfabriker i Vitryska republiken.

Modellens uppbyggnad kan kortfattat beskrivas på följande sätt.

Betongelementbehovet är känt för planperioden. Sålunda känner man till vilka kvantiteter av förekommande elementtyper, k , som efterfrågas i de enskilda orterna j . Beteckna kvantiteterna med b_j^k .

Möjlighet att bygga ut kapacitet föreligger på i orter. Kapaciteten, uttryckt i m^3 betongelement per planperiod, betecknas α_i .

Enhetskostnaden för tillverkning i resp tillverkningsort samt transportkostnaden till mottagare är känd för varje elementtyp. Beteckna enhetskostnaden med $c_{ij}^{(k)}$.

Beteckna flödesvariablerna med x_{ij}^k . Problemet är att bestämma produktionsvolymen för varje elementtyp vid de enskilda produktionsställena. Beteckna produktionsvolymen med y_i^k .

Problemet kan formuleras på följande sätt,

$$\min F = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n c_{ij}^k x_{ij}^k \quad (2.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n x_{ij}^k \leq \alpha_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^k = b_j^k \quad (j=1 \dots n; k=1 \dots p) \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^k = y_i^k \quad (i=1 \dots m; k=1 \dots p) \quad (2.4)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad (y_i^k \geq 0) \quad (2.5)$$

Problemet kan uppfattas som ett tvåstegs transportproblem. Det första steget består i en fördelning av tillverkningskapaciteten på elementtyper. Det andra steget utgörs av fördelning av elementtyper till avnämare.

4. PRAKTIKFALL

I de två föregående kapitlen beskrivs MP- metoder och tillämpningar inom byggtransportområdet i socialistiska länder.

Flertalet av de presenterade tillämpningarna avser problem på en hög nivå - nationell och regional. Den studerade litteraturen ger få exempel på tillämpningar på företags- och objektnivå. I den anglosachsiska litteraturen är förhållandet det motsatta.

De metoder som presenterats är självfallet ägnade som hjälpmedel för beslut på alla nivåer. För att illustrera hur metoderna kan tillämpas på företagsnivå har en praktikfallsstudie genomförts.

Denna studie avser distribution av mineralullsprodukter. Rockwool AB i Skövde har välvilligt lämnat underlag för denna undersökning.

I detta kapitel redovisas huvuddragen av den studie som genomförts. Huvudvikten i framställningen läggs på metodfrågorna. De erhållna resultaten presenteras översiktligt.

41. Syftet

Målet för undersökningen är att ge en bild av hur de matematiska metoder som tidigare beskrivits kan utnyttjas på företagsnivå. Härvid läggs särskild vikt vid tillämpningar på transportplaneringsproblem.

Som tidigare nämnts kan inte transportfunktionen inom ett företag betraktas isolerad. Därför måste funktionens inverkan på och beroende av andra funktioner inom företaget beaktas. Undersökningen belyser dessa förhållanden. Begreppet transportplanering ges sålunda en vidsträckt innebörd.

42. "Verkligheten"

Inom Rockwool AB sker mineralullstillverkning vid tre fabriker. Dessa är belägna i Hässleholm, Skövde och Gimo. Företagets huvudkontor är förlagt till Skövde.

Mineralullsproduktionen omfattar ett 20-tal produktgrupper, lätta skivor, tunga skivor, byggmattor, rörskålar osv. Inom dessa produktgrupper förekommer en mängd dimensions- och volymviktsvarianter.

Utgångsmaterial för tillverkningen är diabas och kalksten. Dessa råmaterial, blandade med koks, tillförs en smältugn där materialet smälts vid ca 2000^o C.

Smältan överförs till spinnkammare där den omformas till mycket tunna fibrer. Vid spinningen tillförs plast. Den plastbehandlade fibermatta, som utgör spinnprocessens slutprodukt, härdas i en härdkammare, varefter tillskärning, övrig bearbetning och emballering sker.

Tillverkningen sker vid ett antal parallella linjer. Med några undantag kan samtliga förekommande produktgrupper framställas på alla tillverkningslinjer.

Fabrikernas tillverkningskapacitet bestäms i första hand av antalet tillverkningslinjer. Skövdefabriken omfattar sex, Gimo-fabriken tre och Hässleholmsanläggningen två sådana linjer.

Tillverkningskapaciteten påverkas självfallet av i vilken utsträckning flerskiftsdrift förekommer. För samtliga fabriker gäller att arbetet kan bedrivas i en - två eller treskift. Möjlighet föreligger att inom varje fabrik tillämpa olika skiftalternativ för de olika tillverkningslinjerna. Omställning av ett driftalternativ till ett annat kräver en tidrymd om 1-5 veckor.

Produktionen är nästan helt orderstyrd. Endast i mycket begränsad omfattning förekommer produktion till lager. Den lag-

ring som förekommer är i huvudsak produktionsbetingad; produkterna kräver en avsvälningstid om ca 1 dygn.

Företagets försäljningsorganisation täcker hela landet. Detta är indelat i 70 försäljningsdistrikt, som sammanfaller med Arbetsmarknadsstyrelsens A-regioner. Inom varje distrikt svarar en eller flera återförsäljare för viss försäljning och för orderupptagning.

Mineralullsprodukterna är skrymmande och därför mindre lämpade för lagring. Leverans sker därför i stor omfattning från fabrik direkt till kunderna - huvudsakligen byggarbetsplatser. Viss leverans förekommer dock från återförsäljares lager och från företagets distributionslager i Stockholm, Göteborg och Malmö. Direktleverans sker av ca 75% av försäljningsvolymen.

Transport av mineralullsprodukter sker huvudsakligen med lastbilar. Till de nordligaste distrikten, distributionslagren samt till vissa återförsäljare sker transportererna med järnväg.

Den utnyttjade fordonsparken består till sin huvuddel av kontrakterade specialbilar.

43. Problemställningar

I samband med företagets transportplanering aktualiseras en rad problemställningar. Detta kan illustreras av nedanstående uppställning. I denna har problemexemplen klassificerats med hänsyn till hur långt bort i tiden motsvarande problems planeringshorisont är belägen.

| <u>Planperiod</u> | <u>Exempel på problem</u> |
|-----------------------|----------------------------------------------|
| Mycket lång (5-20 år) | Lokalisering av nya produktionsanläggningar. |
| Lång (1-5 år) | Utbyggnad av befintlig kapacitet. |

| | | |
|-------------------------------|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kort | (1 vecka - 1 år) | Bestämning av driftform - enskifts/flerskiftsdrift. Bestämning av transportkapaciteter. |
| Mycket kort (\sim 1 vecka) | | Fördelning av tillverkningsorder på de enskilda fabrikerna. Bestämning av beläggningen på produktionslinjerna. |

Det ligger utom ramen för denna studie att genomföra en bredare analys av problemställningar som kan uppkomma. Därför kommer vi här endast att närmare belysa några problemställningar, som har betydelse för förståelsen av den fortsatta framställningen.

Låt oss först belysa ett problem med mycket kort planperiod.

Om man betraktar en kortare period kan fabrikenas produktionskapacitet inte ökas. En betydelsefull uppgift är att fördela ordena från de olika försäljningsdistrikten på fabrikerna. Denna fördelning skall genomföras så att totalkostnaderna minimeras. En sådan kostnadsminimering avser inte enbart en minimering av transportkostnaderna; även tillverkningskostnaderna måste beaktas.

En annan problemställning med mycket kort planperiod är följande. När man vid en tillverkningslinje övergår från en produkttyp till en annan uppstår omställningskostnader. Vid byte av produkt inom samma produktgrupp är dessa kostnader relativt små. Övergång från en produktgrupp till en annan medför relativt stora kostnader; dessa kostnader är även beroende på i vilken ordning produktgrupperna tillverkas.

Ett produktionsplaneringsproblem är att bestämma tillverkningsseriernas längd och inbördes placering. I samband med planeringen bör man överväga vilken betydelse transporterna har för serielängden. Kan det sålunda i en konkret situation vara motiverat att öka transportavstånden för att få större serielängder?

Av problem med kort planperiod kan följande exemplifiering ges.

Tillverkningskapaciteten kan förändras genom att man går över från en driftform till en annan. Transportkapaciteten kan förändras genom förändring av antalet transportfordon. Ett viktigt problem är att i olika efterfrågesituationer dimensionera och fördela tillverknings- och/eller - transportresurser på ett sådant sätt att kostnaderna minimeras.

44. Modeller och lösningar

Vid optimeringsberäkningar har modellkonstruktionen en avgörande betydelse. En förutsättning för att ett reellt optimalt resultat skall kunna erhållas är att man lyckas konstruera matematiska modeller som på ett tillfredsställande sätt representerar verkligheten.

I vår praktikfallsstudie söker vi oss fram till sådana "korrekta" modeller. För att framställningen skall bli så illustrativ som möjligt utgår vi från modeller som ger en mycket förenklad bild av verkligheten. Stegvis söker vi förbättra modellerna för att närma oss en modell som ger en så riktig bild av verkligheten att den kan utnyttjas för operativa ändamål.

Det dataunderlag som ligger till grund för våra beräkningar har erhållits ur företagets statistik för 1970.

Samtliga de optimeringsberäkningar som presenteras i fortsättningen har utförts på datamaskin. För beräkningar med transportalgorithm har ett program, utarbetat inom Institutionen för byggnadsekonomi, CTH, utnyttjats. Fördelningsproblemen löses med hjälp av IBM:s systemprogram för linjär programmering, MPS/360.

4.4.1 Transportmodell - enhetlig produkt

I vår första analys söker vi bestämma optimala transportplaner. Detta sker med utgångspunkt från förenklade antaganden. Trots detta bör analysen ge en anvisning om huruvida de i praktiken

tillämpade beslutsreglerna för tilldelning av order till de enskilda fabrikena är rimliga.

Vid modellkonstruktionen bors vi från att en mångfald olika produkter tillverkas - vi förutsätter en enhetlig produkt. Efterfrågan, uttryckt i m^3 per år, av denna produkt förutsätts vara känd för samtliga försäljningsdistrikt. Avstånd och transporttariffer är också kända. I analysen beaktas endast transportkostnader.

De genomförda beräkningarna baseras på statistik för år 1970.

I analysen gör vi det förenklade antagandet att efterfrågan inom ett försäljningsdistrikt är koncentrerad till dess centralort.

Optimeringsproblemet kan under dessa förutsättningar uttryckas i följande matematiska modell,

$$\text{minimera } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{70} c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{j=1}^{70} x_{ij} \leq \alpha_i ; \quad i=1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j ; \quad j=1, 2, \dots, 70 \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 ; \quad i=1, 2, 3 ; \quad j=1, \dots, 70 \quad (1.4)$$

Modellen representerar ett obalanserat transportproblem. x_{ij} är variabler som uttrycker antalet m^3 som transporteras från fabrik i till distrikt j . c_{ij} betecknas "kostnaden" att transportera 1 m^3 från fabrik i till distrikt j ; "kostnaden" kan uttryckas antingen i km eller i kronor. α_i betecknar tillverkningskapaciteten i m^3 per år i fabrik i . Efterfrågan i distrikt j uppgår till b_j m^3 per år.

Det är förenat med stora svårigheter att bestämma tillverkningskapaciteter, när vi förutsätter enhetlig produktion. Vi har därför behandlat två fall - ett balanserat och ett obalanserat. I det balanserade fallet antas tillverkningskapaciteten motsvara verkligt tillverkade kvantiteter under 1970. I det obalanserade fallet förutsätter vi att kapaciteterna är avsevärt större än vad som utnyttjades detta år.

Det balanserade fallet ger en rimlighetskontroll av beslutsreglerna för fördelning av tillverkningsorder. Det obalanserade ger en anvisning om hur orderfördelningen borde ske om tillverkningskapaciteterna inte vore begränsande. Det ger jämväl en anvisning om "transportoptimala" tillverkningskapaciteter.

I de två angivna fallen har optimeringsberäkningar genomförts med två alternativa optimeringskriterier. Optimering sker dels med avseende på transportarbete och dels med avseende på transportkostnader.

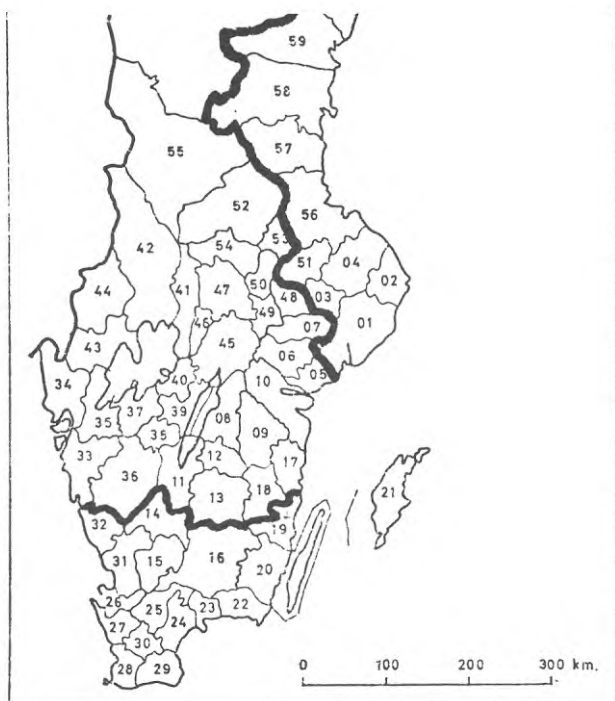
Optimering m.a.p transportarbete - balanserat fall

I detta fall är problemet ett klassiskt transportproblem. I bivillkoret (1.2) kommer sålunda likhetstecken att införas.

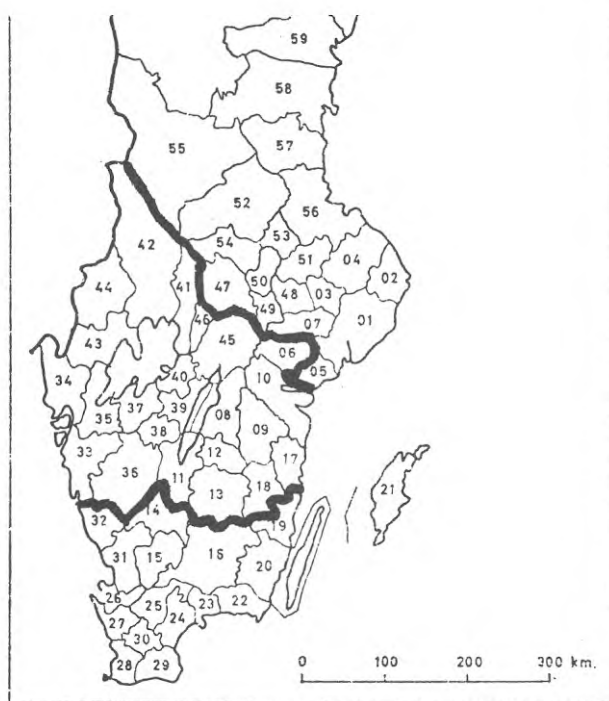
Som enhetskostnad, c_{ij} , har i detta fall utnyttjas järnvägsavståndet mellan fabrik och centralorten i resp distrikt.

Den optimala lösningen anger hur många m^3 som skall transporteras från en viss fabrik till ett visst försäljningsdistrikt. Vi avstår här från att presentera detta resultat.

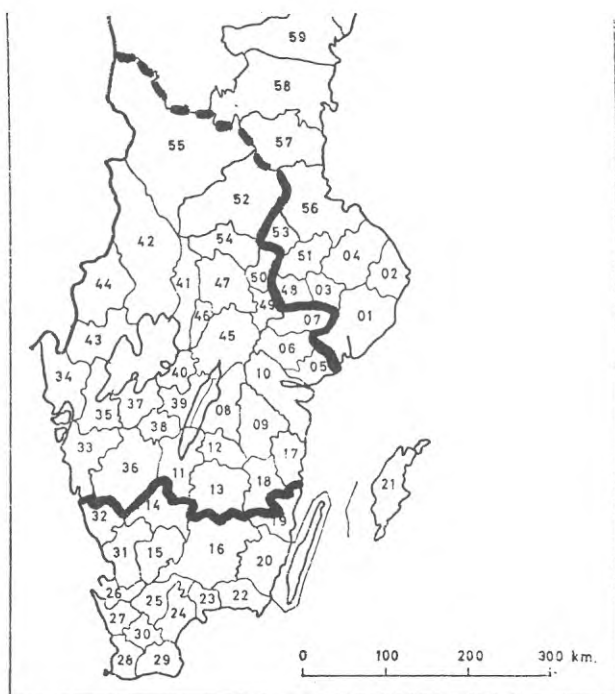
Resultatet av beräkningarna kan även uttryckas på så sätt att man anger till vilka områden leverans skall ske från de olika fabrikena. Det erhållna resultatet framgår av FIG. 14.1.



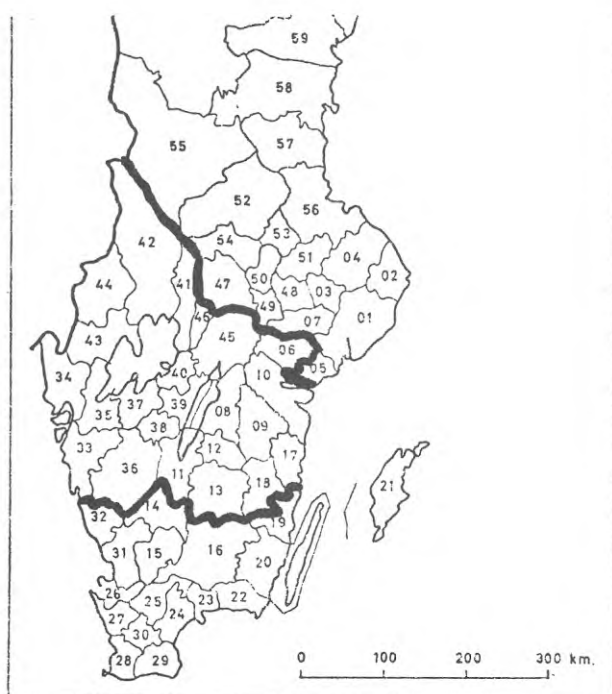
1. Avståndsoptimering.
Balanserat fall.



2. Avståndsoptimering.
Obalanserat fall.



3. Kostnadsoptimering.
Balanserat fall.



4. Kostnadsoptimering.
Obalanserat fall.

FIG. 14.1-4. Distributionsområden för enhetlig produkt.

Optimering m.a.p. transportarbete - obalanserat fall

I detta fall överger vi förutsättningen om kapacitetsbegränsningar i de olika fabrikena. Parametern α_i ges ett stort värde.

Problemet är ett obalanserat problem. Det löses med konventionella metoder sedan en fiktiv sänka införts.

Även i detta fall åskådliggörs resultatet av optimeringsberäkningen genom att de "optimala leveransområdena" för de enskilda fabrikena anges. Dessa framgår av FIG. 14.2.

Om vi jämför FIG. 14.2 och FIG. 14.1 konstaterar vi följande. I det fall Gimofabrikens kapacitet är tillräckligt stor skulle denna anläggnings "leveransområde" kunna förskjutas söderut. En konsekvens av detta skulle bli att medeltransportavståndet minskas från 174 till 161 km.

Optimering m.a.p. transportkostnader - balanserat fall

Den största principiella skillnaden mot de tidigare fallen är att transportkostnaderna införts. Parametern c_{ij} uttrycker sålunda kostnaden att transportera 1 m^3 mellan fabrik i och distrikt j .

Vid beräkningarna förutsätts det för varje transport mest lämpade transportmedlet utnyttjas. Sådana distrikt där järnvägstransport är ett rimligt alternativ till biltransport har "delats" i två. Det ena av dessa representerar efterfrågan på järnvägstransporterade produkter och det andra lastbilstransporterade.

Som enhetskostnader, c_{ij} , utnyttjas järnvägstariffer respektive aktuella lastbilstariffer.

Problemet blir ett klassiskt transportproblem med 3 källor och 92 sänkor.

Resultatet av optimeringsberäkningen åskådliggörs i FIG. 14:3. Om vi jämför FIG. 14.1 och FIG. 14.3 kan vi konstatera relativt god överensstämmelse. Dock kan man konstatera att beräkning-

en med alternativa transportsätt medför att Skövdefabriken borde leverera till några av de nordligaste "järnvägsdistrikten".

Optimering m.a.p. transportkostnader - obalanserat fall

Detta fall skiljer sig från det föregående endast i det avseendet att kapaciteterna i fabrikerna är mycket stora.

Resultatet av optimeringen illustreras av FIG. 14.4. Vi kan konstatera att "leveransområdena" för de olika fabrikerna är desamma som i FIG. 14.2. Detta belyser att transportarbete och transportkostnadstaxor är relativt konsistenta.

4.4.2 Transportmodell - flera produktgrupper

Förutsättningen att Rockwool - sortimentet kan betraktas som en enhetlig produkt är självfallet en grov förenkling. I den andra studien som genomförts har vi närmast oss verkligheten. Vi utgår från att produktionen består av fem produktgrupper; dessa motsvarar ca 70% av företagets totala produktion.

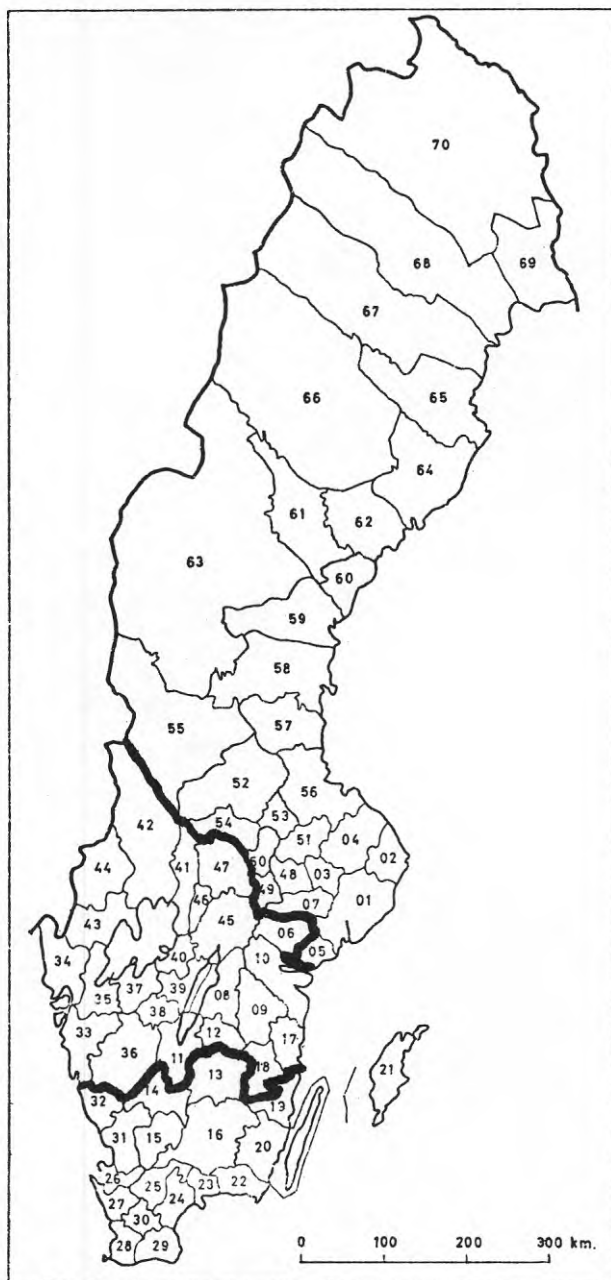
Optimering med avseende på transportkostnader genomförs; dels en för det balanserade fallet och dels en för det obalanserade.

Som tidigare nämnts kan en reell optimering inte ske utan att hänsyn tas till tillverkningskostnader. I den andra delen av studien genomför vi en optimering med avseende på transport- och tillverkningskostnader.

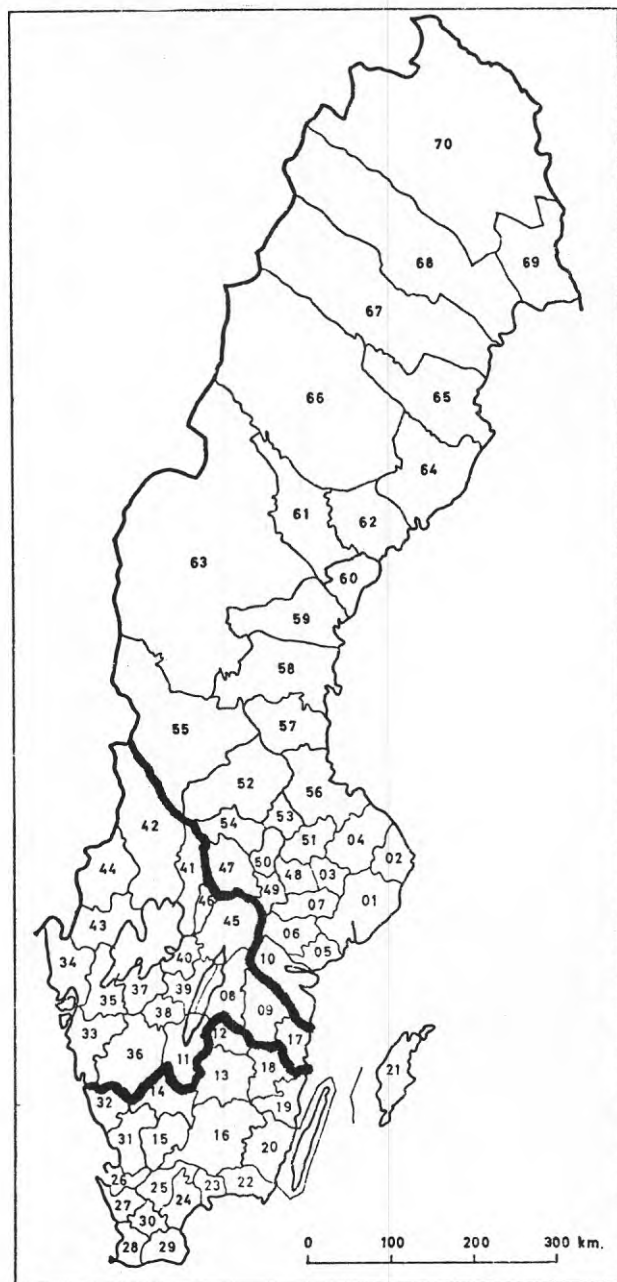
Optimering m.a.p. transportkostnader - balanserat fall

Samma grundmodell som i föregående studie används liksom de där presenterade kostnadsuppgifterna.

I det balanserade fallet förutsätts att tillverkningskapaciteten för de enskilda produktgrupperna överensstämmer med verkligt producerade kvantiteter 1970. Eftersom de olika produktgrupperna i verkligheten kan tillverkas på samma produktionslinje är



1. Produktgrupp I



2. Produktgrupp III

FIG. 15.1-2. Distributionsområden för produktgrupper. Transportkostnadsoptimering. Balanserat fall.

denna förutsättning en grov förenkling; till detta problem återkommer vi i den tredje studien.

Resultatet av transportkostnadsoptimeringen för produktgrupperna I och III illustreras i FIG. 15.1 resp FIG. 15.2. I dessa figurer anges det optimala distributionsområdet för resp fabrik för de två nämnda produkterna.

Optimering m.a.p. transportkostnader - obalanserat fall

Liksom i enproduktstudien, 4.4.1, genomförs en transportkostnadsoptimering där fabrikernas tillverkningskapaciteter förutsätts vara mycket stora. Frågan är hur tillverkningsorderna då skall fördelas för att transportkostnaderna skall minimeras.

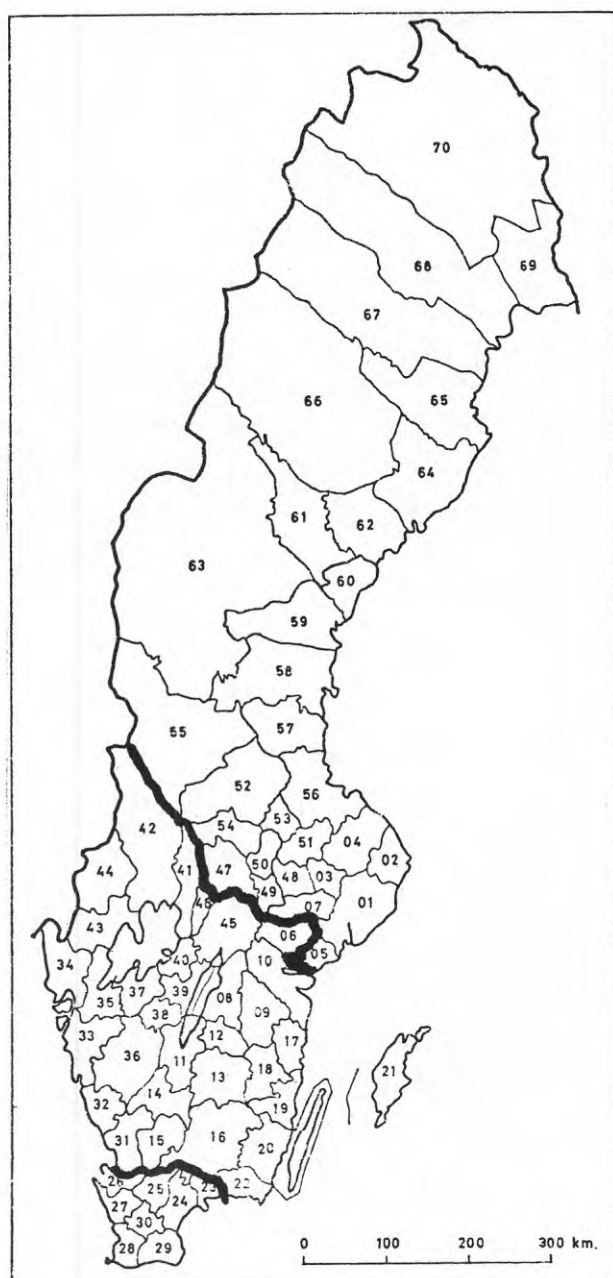
Fabrikernas distributionsområden för de enskilda produktgrupperna kommer att överensstämma med de distributionsområden som tidigare framräknats; distributionsområden för enhetlig produkt FIG. 14.4. De kvantiteter som levereras mellan fabriker och avnämare kommer däremot att vara andra än de som motsvarande beräkning i avsnitt 4.4.1 resulterat i.

En jämförelse mellan de totala transportkostnaderna i det obalanserade fallet och i det balanserade ger en anvisning om hur mycket transportkostnaderna skulle påverkas om de enskilda fabrikernas tillverkningssortiment kunde förändras. Vi konstaterar att för produktgrupp I uppnås en transportkostnadsbesparing om 0,3%, för II 1,6%, för III 1,4%, för IV 6,5% och för V 1% om produktionen ur transportkostnadssynpunkt fördelas optimalt.

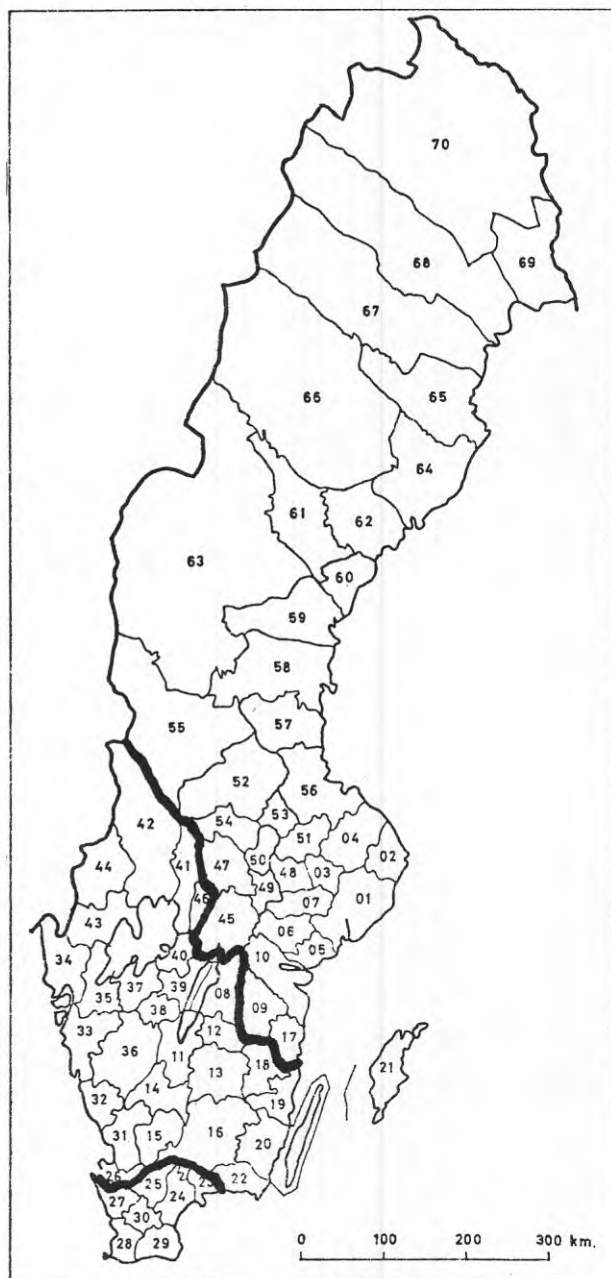
Optimering m.a.p. transport- och tillverkningskostnader

I de analyser som presenterats har vi helt bortsett från tillverkningskostnadernas inverkan vid optimeringen. En optimeringsberäkning måste därför genomföras där hänsyn tas till såväl tillverknings- som transportkostnader.

Beräkningarna låter sig lätt genomföras. De enhetskostnader som utnyttjats i tidigare fall kompletteras med tillverknings-



3. Produktgrupp I



4. Produktgrupp II

FIG. 15.3-4. Distributionsområden för produktgrupper. Tillverknings- och transportkostnadsoptimering. Obalanserat fall.

kostnaden per enhet för aktuell produkt och fabrik. Härvid gäller att endast de rörliga kostnaderna bör beaktas.

I vårt fall har de rörliga tillverkningskostnaderna skattats med utgångspunkt från tillgänglig statistik.

Beräkningar genomförs endast för det obalanserade fallet. Det balanserade fallet måste nämligen med nödvändighet ge samma resultat som en optimering enbart med avseende på transportkostnader.

Liksom i tidigare fall låter vi resultatet illustreras av distributionsområdena för enskilda produktgrupper. FIG. 15.3 visar distributionsområden för produktgrupp I och FIG. 15.4 motsvarande områden för produktgrupp II.

En jämförelse mellan tillverknings- och transportkostnader för balanserat och obalanserat fall ger följande resultat för de enskilda produktgrupperna. För produktgrupp I uppnås en besparing om 0,4% i det fall tillverkningen kan placeras på "rätt" fabrik. Motsvarande värden för övriga produktgrupper är i ordning 2,3; 3,8; 3,8 och 2,3%.

Om ordena skall kunna placeras på "rätt" fabrik bestäms av om tillverkningskapaciteten är tillräcklig. I samband med optimeringen erhåller vi upplysning om vilka kapacitetsanspråk som ställs på de enskilda fabrikerna. Vi avstår här från att redovisa dessa resultat.

4.4.3 Fördelningsmodell

I de analyser som presenterats i föregående avsnitt har förutsatts att det existerar specifika tillverkningskapaciteter för de olika produktgrupperna. Som tidigare nämnts är detta en grov förenkling av verkligheten. Produktgrupperna samverkar nämligen vid anspråktagande av fabrikernas tillverkningskapacitet. I den analys som presenteras i detta avsnitt söker vi beakta denna samverkan.

Tillverkningskapaciteten vid en fabrik bestäms av ett flertal faktorer. Exempel på sådana begränsande faktorer är råmaterialförsörjning, arbetskrafttillgång, enskilda maskiners kapaciteter - ugnar, härdkammare osv. Vilken faktor som i ett konkret fall blir bestämmande för kapaciteten, dvs utgör den trånga sektionen, beror på tillverkningens sammansättning.

I vår analys söker vi bestämma den kostnadsoptimala fördelningen av order på de enskilda fabrikena under hänsynstagande till kapacitetssamband.

För beräkningarna utnyttjas en modell, som utgör en vidareutveckling av den som utnyttjats i avsnittet 4.4.2.

Den matematiska modellen får följande utseende,

$$\text{minimera } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{92} \sum_{k=1}^5 (c_{ij} + t_{ik}) x_{ijk} \quad (2.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{i=1}^3 x_{ijk} = b_{jk}; \quad (j=1, \dots, 92; k=1, \dots, 5) \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^{92} \sum_{k=1}^5 \lambda_{ikr} x_{ijk} \leq K_{ir} \quad (i=1, 2, 3; r=1 \dots n) \quad (2.3)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad (2.4)$$

Modellens beteckningar har följande innebörd,

x_{ijk} betecknar antalet m^3 av produktgrupp k som tillverkas i fabrik i och levereras till distrikt j .

c_{ij} är transportkostnaden per m^3 vid leverans från fabrik i till distrikt j .

t_{ik} är de rörliga tillverkningskostnaderna per m^3 för produktgrupp k i fabrik i .

b_{jk} är efterfrågan i m^3 av produktgrupp k i distrikt j .

λ_{ikr} är en storhet som visar hur mycket som krävs av produktionsresursen r för att tillverka $1 m^3$ av produktgrupp k vid fabrik i .

K_{ir} är totala tillgängliga kvantiteter av produktionsresurs r vid fabrik i .

I modellen uttrycker bivillkoret (2.2) att efterfrågan skall tillgodoses.

Bivillkoret (2.3) anger att tillgängliga kvantiteter av olika resurser inte får överskridas. I det fall en viss resurs helt förbrukas utgör den en trång sektion - den bestämmer fabriken's tillverkningskapacitet.

Det problem som åskådliggörs av modellen (2.1) - (2.4) brukar benämnas fördelningsproblem eller allmänt transportproblem. Detta kan lösas med simplexförfarande eller med specialmetoder. Som tidigare nämnts utnyttjar vi simplexförfarandet i vår analys.

Vid genomförandet av analysen har vi av beräkningsmässiga skäl sammanfört de 92 sänkorna till 30. Motsvarande omräkning har gjorts av enhetstransportkostnader och efterfrågade kvantiteter i m^3 av de enskilda produktgrupperna.

I analysen förutsätter vi att tillverkningskapaciteten vid varje fabrik påverkas av endast två faktorer, dels av ugnskapaciteten och dels av "efterbehandlingskapaciteten" för produktgrupp 3.

Under dessa förutsättningar erhålls sex bivillkorsekvationer av typ (2.3), nämligen

$$\sum_{j=1}^{30} \sum_{k=1}^5 \lambda_k x_{ijk} \leq K_i^{\text{tot}} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.3.1)$$

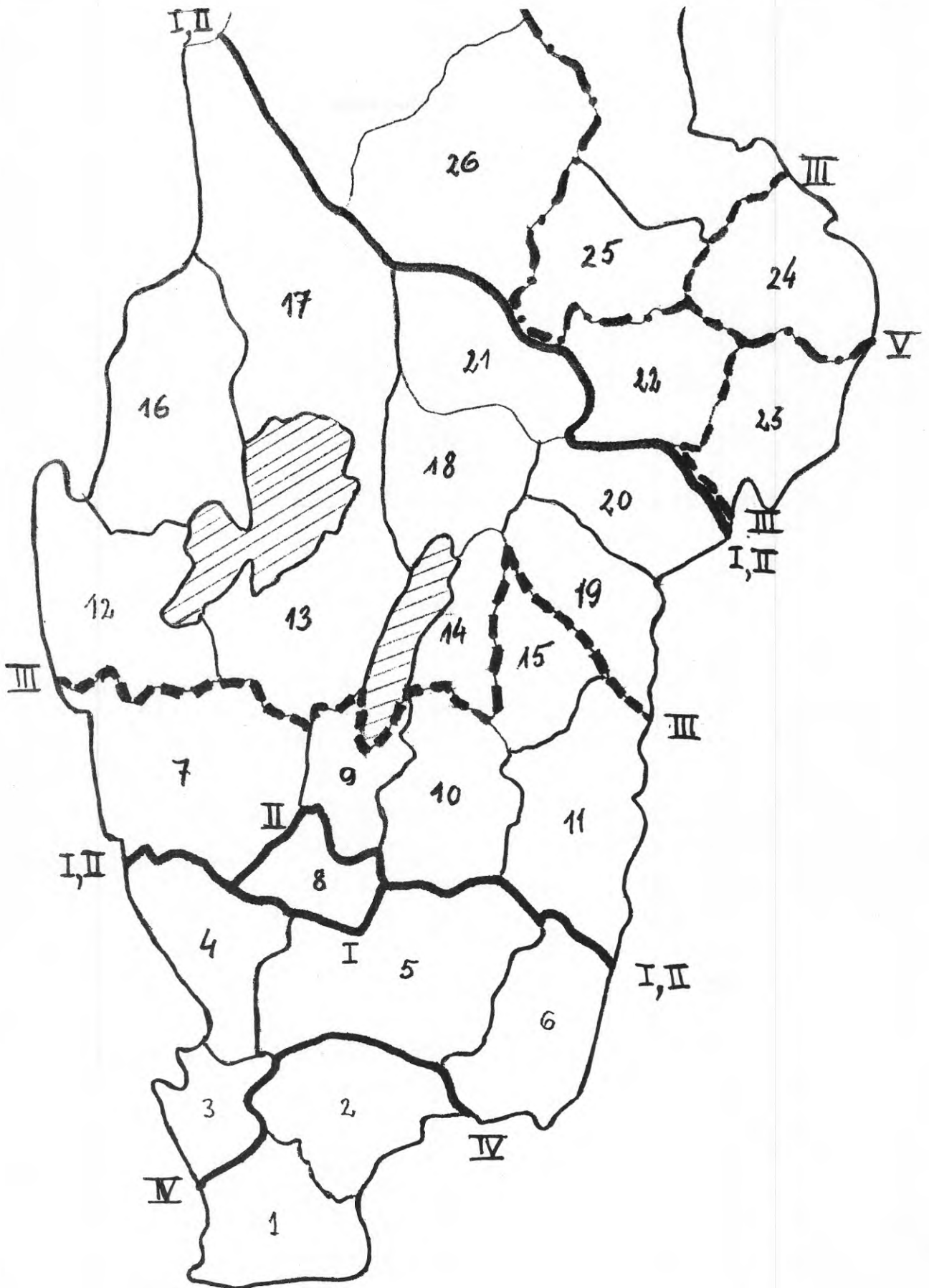


FIG. 16. Distributionsområden för produktgrupper.
 "Totalkostnadsoptimering" vid 2-2-2 skift.

$$\sum_{j=1} \lambda_3 x_{ij3} \leq K_i^{(3)} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3.3.2)$$

K_i^{tot} anger den totala ugnskapaciteten i ton för fabrik i . $K_i^{(3)}$ är efterbehandlingskapaciteten för produktgrupp 3 i fabrik i ; den är angiven i ton per tidsperiod.

Produktgruppernas "kapacitetsanspråk", λ_k uttrycks genom deras volymvikter.

Analysen baseras på den verkliga efterfrågan i m^3 av de enskilda produktgrupperna under november månad 1970.

Ugnskapaciteterna vid de enskilda fabrikerna påverkas av driftform - om arbetet bedrivs i enskift- eller flerskiftsdrift. Av denna anledning genomräknas fyra realistiska alternativ. Dessa alternativ skiljer sig åt i fråga om driftform på de enskilda fabrikerna.

Optimeringsberäkningar har genomförts dels med avseende på transport- och tillverkningskostnader, enbart tillverkningskostnader och enbart transportkostnader.

Som enhetskostnader för tillverkning, t_{ik} , utnyttjas olika värden för olika driftalternativ. Underlag har erhållits ur företagets kostnadsstatistik.

Vart och ett av de genomräknade problemen innehåller 450 variabler och 156 restriktioner.

Optimeringsresultatet för fallet optimering m.a.p. tillverknings- och transportkostnader illustreras av FIG. 16. Distributionsområdena för enskilda produktgrupper anges för de olika fabrikerna. Optimeringen baseras på förutsättningen att 2-skiftsdrift tillämpas vid samtliga produktionsställen.

Genom att jämföra objektfunktionernas värde för de olika "driftformsalternativen" erhålles underlag för val av driftform. Sålunda visar det sig att vid tillämpning av 2-skiftsdrift vid Skövdefabriken,

3-skiftsdrift vid Gimoanläggningen och 1-skiftsdrift i Hässleholm de sammanlagda tillverknings och transportkostnaderna för de fem produktgrupperna uppgår till ca 97% av motsvarande kostnad i det fall skiftalternativet 2-2- 2 väljs.

Ytterligare ett intressant resultat skall beröras. Det visar sig att i vissa fall produktionen i en fabrik bör inriktas mot lättare produkter. Detta inträffar när tillverkningskapaciteten måste utnyttjas helt. I en sådan situation bör produktionen inriktas mot sådana produkter som har det största "transportvärdet" per trång sektion. Detta är fallet med de lättare produkterna.

5. LITTERATUR

Detta avsnitt innehåller dels en sammanställning av den litteratur som legat till grund för rapporten och dels en sammanställning av annan slavisk litteratur inom problemområdet.

Den litteratur på vilken rapporten baseras är samlad under rubriken 5.1 Referenser. Övrig litteratur är sammanställd i avsnittet 5.2 Bibliografi.

5.1 Referenser

Barsov, A.C. 1959. Czto takoje liniejnoe programmirowanie /Fizmatgiz/ Moskva.

Linjär programmering.

Birman, I.J. 1962. Transportnaja zadacza linijnogo programirovanija. /Izdatelstwo ekonomiceskoj literatury/ Moskva.

Transportproblemet.

Buga, I. Kolupa, J. Kubiszewski, I. Nykowski, I. 1966. Programowanie liniowe w planowaniu przewozow towarowych. /Wydawnictwo Komunikacji i laczynosci/ Warszawa.

Linjär programmering vid planering av godstransporter.

Barbakadze, M.S. 1965. Model optimizacji promyslennosti zbornogo zelezbeta. /Problemy Ekonomiceskoj Kiberhetiki/ p. 20-22. Moskva.

Optimeringsmodell för betongelementindustri.

Czerwinski, Z. 1961. Wstep do teorii programowania liniowego z elementami algebry wyzszej. /Polskie Towarzystwo Ekonomiczne oddzial w Poznaniu/ Poznan.

Inledning till linjärprogrammerings teori.

Czerwinski, Z. 1969. Matematyka na usługach ekonomii. /Panstwowe Wydawnictwo Naukowe/ Warszawa.
 Matematik som ekonomiskt hjälpmedel.

Czechowski, Z. 1967. Wprowadzenie do zastosowań matematyki w ekonomii. /Panstwowe Wydawnictwo Naukowe/ Warszawa.
 Introduktion till matematiska metoder inom ekonomin.

Galacan, A. Kalibabczuk, A. Lisica, A. 1971. Reszenie zadacz raspredelenia transportnych sredstw. /Awtomobilny Transport/ 3 Mars 1971 p. 13-16.
 Fördelning av transportmedel.

Habr, J. 1960. Linearni programowani - Vyklad pro ekonomy. /Statni Nakladatelstvi Technicke Literaturu/ Praha.
 Linjär programmering.

Hindanov, V.H. Davidov, M.L. 1965. Liniejna model dla optimalnoj organizacii proizvodstva sbornogo zelezbetona. /Trudy Wost. - Sib. Tech. Inst./ tom 2. wyp. 2. p. 85-87.
 Linjär modell för optimal organisation vid betongelementtillverkning.

Judin, D. Golstein, E. 1969. Zadaczi linejnogo programirovanija transportnogo tipa. /Nauka/ Moskva.
 Linjära programmeringsmetoder.

Judin, D. Golstein, E. 1970. Lineare Optimierung II /Akademie - Verlag/ Berlin.
 Linjär optimering.

Kadlec-Vodacek. 1968. Lineare Optimierung im Transportwesen. /Transpress-Verlag/ Berlin.
 Linjär optimering av transporter.

Kantorowicz. L. 1961. Rachunek ekonomiczny optymalnego wykorzystania zasobow. /P.W.N./ Warszawa.

Ekonomiska kalkylmetoder för optimalt utnyttjande av tillgångar.

Lesz. M. 1967. Matematyczne podstawy rekonstrukcji przemyslu. /P.W.E./ Warszawa.

Matematiska grunder för företagslokalisering och - utveckling.

Lesz. M. 1965. Ekonometria a praktyka planowania. /P.W.E./ Warszawa.

Ekonometri och planeringspraxis.

Mathematische Methoden zur Standortbestimmung. 1968. /Verlag Die Wirtschaft/ Berlin.

Matematiska metoder för lokaliseringsbeslut.

Metodi optimalnogo planirowania - Transportnyje zadaczi. 1965. /Nauka/ Moskva.

Optimala planeringsmetoder-Transportproblemet.

Mirotin. L.B. 1964. Razmieszczenie proizvodstvennych predoriniati doroznoga stroitelstwa i planirowanie perewozok stroitelnych materialow. /Awtomobilne Dorgi/ 12. p. 19-22. Lokalisering av vägbyggnadsföretag och transportplanering.

Mizdrikov. J. Sokolov. B. 1965. Ekonomiceski effekt primienienia metodow matematicheskogo programmirowania i planirowania pierewozok produkcji promyslennosti stroitelnych materialow.

/Zbornik trudow W.N.I.I./ wyo. 11. p. 147-157.

Ekonomiska effekter av matematisk programmering vid transportplanering inom byggmaterialindustrin.

Niemczynow. W.S. 1965. Promienienie matematiki w ekonomicznych isledowaniach. /Izdatelstwo socjalno - ekonomicznoj literatury/ Moskva.

Matematiska metoder och modeller.

Seleznieva, N.N. 1965. Planирование размещения и транспортного обслуживания промышленности строительных материалов с применением математических методов. /Труды Ленинградского Института Водного Транспорта/ вып. 84.

Lokaliserings- och transportplanering inom byggmaterialindustrin med användning av matematiska metoder.

Tomaszewski, W. 1961-1963. Kartograficzne metody rozwiązania t.zw. zagadnienia transportowego. /Przegląd Statystyczny/ 4. 1961 p. 435-447. 2. 1963. p. 263-280. Kartografisk lösning av transportproblem.

Zelikowicz, I.I. Abuchov, W.D. 1964. Liniejnoe programirovanie dla opredelenia ekonomiceskoj efektywnosti razwitia predprijati stroitelnych materialow. /Transportnoe Stroitelstwo/ 1.p. 35-36.

Linjär programmering och organisation av byggmaterialföretag.

Zurkowski, I. 1964. Model problemu lokalizacji produkcji przemyslu cementowego w Polsce. /P.A.N./ studia tom 6.p. 97-104.

Lokaliseringsmodell för polsk cementindustri år 1980.

5.2 Bibliografi

Bakaczew, A.A. 1966. EWM w planowaniu raboty transporta. /Technika/ Kijew.

E.D.B. vid transportplanering.

Belov, I.V. 1967. Kriterii i pokazateli optimalnogo planirovania pierewozok z primienieniem EWM. /Transport/ Moskva. Kriterier vid optimal transportplanering med tillämpning av EDB.

Bielov, I.V: Kaplan, A.B. 1967. Primienienie matematiceskich metodow w planowaniu na zeleznodoroznom transportie. /Transport/ Moskva.

Tillämpning av matematiska metoder vid planering av järnvägs-

transporter.

Chaigt, F.A. 1966. Matematicheskaja teorija transportnyh potokov. /Transport/ Moskva.

Matematisk teori och transportflöden.

Dudin, A.J. Alimov, P.N. 1966. O vybore optimalnyh variantov razmieszczenia predpriniati zbornogo zelezbeta dla sielskogo stroitelstva.

Promyslennost Bielorusi, Nr 9, p. 52-54. Minsk.

Optimal lokalisering av betongelementtillverkning för lantbruksbyggnader.

Dudin, A.J. 1964. Wybor optimalnoj moszcznosti i razmieszczenia predpriniati stroitelstva. Ekonomika Stroitelstva Nr 1, p. 39 - 43. Moskva.

Optimal kapacitet i och lokalisering av byggmaterialföretag.

Fedorenko, M. 1969. Ekonomiko-Matematicheskije modeli. /Mysl/ Moskva.

Ekonomisk-matematiska modeller.

Gieronimus, B. 1966. Matematicheskije metody planirovaniya gruzovyh awtomobilnyh pierewozok. /Transport/ Moskva.

Matematiska planeringsmetoder vid godstransporter.

Gubala, E. 1965. Zasady programowania likalizacji produkcji. /P.T.E./ Katowice.

Programmering och lokalisering av produktionsresurser.

Hohlov, H.F. 1966. Systema materialno-technicheskigo snabzenia i optimizacija planow gruzovyh pierewozok. /Transport/ Moskva.

System för materialförsörjning och optimering av godstransporter.

Ispolsowanie matematicheskikh metodov i elektronnykh vychislitelnykh maszin pri planirovani razvitia i raboty transporta. 1967. /Transport/ Moskva.

Användning av EDB och matematiska metoder för planering och ekonomisk analys av transporter.

Kozlov. L.A. 1970. Optimalnoje planirovanie razvitja i razmieszczenia otraslej promyslennosti. /Nauka/ Novosibirsk.

Optimal planering av utveckling och lokalisering av industrigren.

Kuklinski. A. 1964. Problemy przestrzenne rozwoju przemyslu cementowego w Polsce w latach 1964-1980. /Studia K.P.Z.K. PAN./ Warszawa.

Utvecklingsproblem i den polska cementindustrin 1964-1980.

Kuzubov. V.I. 1965. Sostavlenie optimalnogo plana avtoperewozok stroitelnykh gruzov metodami liniejnogo programirovanija. /Mechanizacija Uczeta i Vychislitelnykh Rabot. / vyp, 1, p. 125-135. Moskva.

Planering av optimala byggmaterialtransporter med hjälp av linjär programmering.

Lange. O. 1964. Optymalne decyzje- Zasady programowania. /P.W.N./ Warszawa.

Optimala beslutsunderlag av matematisk programmering.

Lange. O. 1961. Wstep do ekonometrii. /P.W.N./ Warszawa.

Introduktion till ekonometri.

Lemieszko. H.M. 1966. Primienie matematicheskikh metodov i vychislitelnoj tehniki pri planirovani perewozok stroitelnykh gruzov. Avtomobilny Transport. Nr 3, Moskva. Tillämpning av matematiska metoder vid planering av byggmaterialtransporter.

Lesz. M. 1968. Techniczno-ekonomiczne zastosowania metod programowania dynamicznego. /P.W.E./ Warszawa. Tekniska och ekonomiska tillämpningar av dynamisk programmering.

Matematicheskoje metody i problemy razmieszenia proizvodstva. 1963. /Ekonomizdat/ Moskva.

Matematiska metoder och industrilokaliseringsproblem.

Metodika razczetow i ekonomiczeskoje pokazateli dla raspredelenia perewozok mezdu widami transporta 1966. /Transport/ Moskva.

Beräkningsmetoder och ekonomiska kriterier för fördelning av transporter mellan olika transportmedel.

Metody i algoritmy reszenia transportnoi zadaczi. 1963. /Gostatizdat/ Moskva.

Metoder och lösningsalgoritmer för transportproblem.

Metodiczeskoje rukowodstvo po opredeleni optimalnych schem perewozok w snabzeni i razmieszczeni predpriniati z pomoszczu linejnogo programmirowania 1964. /Ministerstwo Transporta./ Moskva.

Metodiska anvisningar för beräkning av optimala transporter och lokalisering med hjälp av linjär programmering.

Niesterov. E.P. 1970. Transportnyje zadaczi linejnogo programmirowania /Transport/ Moskva.

Linjär programmering vid transportplanering.

Novikova. A.I. 1966. Primienienie matematicheskich metodow pri reszeni zadacz razmieszczenia awtotransportnyh predpriniati. /Transport/ Moskva.

Tillämpning av matematiska metoder vid lokalisering av transportföretag.

Novikov. O.A. Ivanov. V.N. Vierojastnostnyje metody reszenia zadacz awtomobilnogo transporta. /Transport/ Moskva.

Sannolikhetsmetoder för lösning av transportproblem.

Optimalnoe razmieszczenie i specjalizacja w otraslach promyslennsti. 1966 / DOKI . AN. BSSR/Minsk.

Optimal lokalisering och specialisering av en industri.

Organizacja pierewozok stroitelnych gruzow. 1966.

/Wolgo-Wiatskoje Knizno Izdatelstwo/Gorki.

Organisation av byggmaterialtransporter.

Padnia. V. 1968. Primienienie teori masowego obsluziwania na transportie. /Transport/ Moskva.

Tillämpning av köteori vid transportplanering.

Pszczelincew. O.S. 1966. Ekonomiczeskoje obosnowanie razmieszczenia prizwodstwa. /Nauka/ Moskva.

Ekonomiska motiv för lokalisering av företag.

Richter. K.J. 1969. Verkehrsökonomie. /Transpress-Verlag/ Berlin.

Kommunikationsekonometri.

Sadowski. W. 1969. Teoria podejmowania decyzji.

/P.W.E./ Warszawa.

Beslutsteori.

Solich. R. Malicka. J. 1967. Rozwiazywanie zadania transportowego metoda dwuch kierunkow za pomoca maszyn cyfrowych.

Program transportowy metoda dwuch kierunkow w jezyku GIER-ALGOL. /P.W.N./ Warszawa.

Lösningmetod för transportproblem. Dataprogram i GIER-ALGOL.

- Schafirkin, B.I. 1966. Koordynacja transporta i planowania gruzowych pierewozok. /Transport/ Moskva.
Transportkoordinering och planering av godstransporter.
- Schvecov, P.I. 1964. Primienienie lineinogo programmirowania dla predpriniati materialno-techniczeskoj bazy stroitelstwa. /Stroizdat/ Moskva.
Tillämpning av linjär programmering vid lokaliseringsproblem inom byggnadsindustrin.
- Tierechov, L. 1970. Metody ekonomiczno-matematyczne. /P.W.N./ Warszawa.
Ekonomisk-matematiska metoder.
- Trijus, E.B. 1967. Zadaczi matematicheskogo programmirowania transportnogo typa. /Transport/ Moskva.
Matematisk programmering vid transportproblem.
- Wdowiak, J. 1967. Wykorzystywanie EMC do okreslania optymalnych tras przewozu w miedzynarodowej komunikacji ladowej. /P.W.N./ Warszawa.
Utnyttjande av EDB för bestämning av optimala färdvägar vid internationella vägtransporter.
- Zastosowanie matematycznych metod w planowaniu operatywnym przewozow. 1969. /Instytut Transportu Samochodowego/ raport 1532. Warszawa.
Tillämpning av matematiska metoder vid operativ transportplanering.
- Zurkowski, J. 1966. Programowanie przemyslu cementowego. Cement, Wapno, Gips. Nr 8-9. Warszawa.
Programmering av cementindustri.
- Zurkowski, J. 1968. Programowanie lokalizacji produkcji. /P.W.N./ Warszawa.
Programmering av produktionslokalisering.

Zurkowski. B. 1970. Model programowania pracy taboru samochodowego w przedsiębiorstwach transportowych budownictwa. Przegląd Komunikacyjny, Nr 8, Warszawa.
Modell för transportplanering i byggtransportföretag.

DET KLASSISKA TRANSPORTPROBLEMET - GRUNDALGORITM

Ett flertal metoder har utvecklats för lösning av det klassiska transportproblemet. I avsnitt 22 har några sådana metoder presenterats. I denna bilaga utvecklar vi den teoretiska bakgrunden till ett par av de tidigare behandlade algoritmerna.

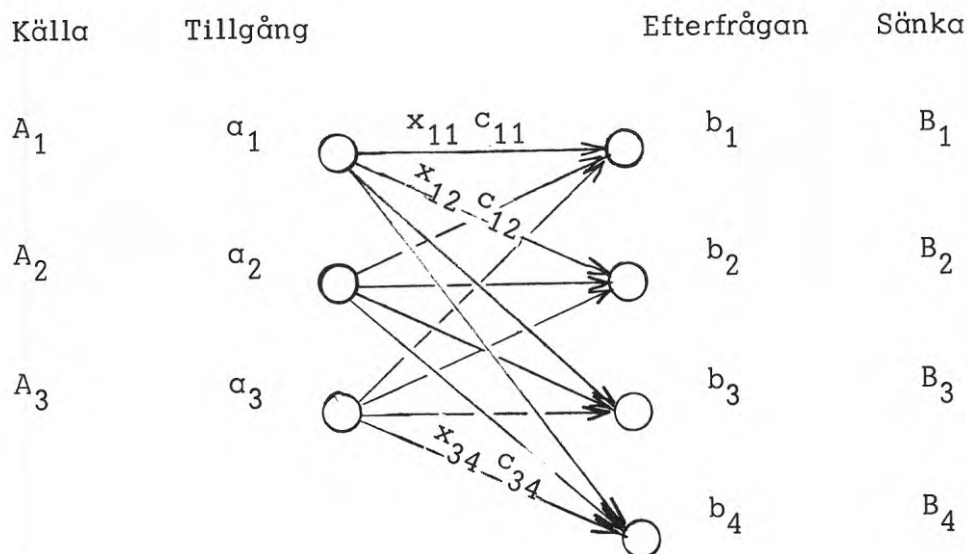
Framställningen baseras på Czerwinski (1961) och Czechowski (1967).

1. Matematisk formulering

Innebörden av det klassiska transportproblemet behandlas utförligt i avsnitt 22. I denna bilaga utgår vi från den matematiska formuleringen.

Vi har ett problem med m källor. Från var och en av dessa källor levereras kvantiteten a_i av en viss "vara". Dessa varor efterfrågas i n sänkor. Efterfrågans storlek i dessa sänkor betecknas med b_j . Kostnaden att transportera en varuenhet från källa i till sänka j är c_{ij} . Problemet är att bestämma flödet utefter förekommande transportvägar så att den totala transportkostnaden minimeras. Låt oss beteckna flödet utefter sträcka från i till j , flödesvariabeln, med x_{ij} .

Vad som sagts kan illustreras på följande sätt, i det fall $m = 3$ och $n = 4$.



Betecknas objektfunktionen med $K(x)$ erhåller problemet denna matematiska formulering,

$$\min K(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1.1)$$

under bivillkoren

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \alpha_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (1.4)$$

2. Lösningsförfarande

Av (1.1) framgår att ett transportproblem med m källor och n sänkor innehåller $m \cdot n$ flödesvariabler.

Av formlerna (1.2) och (1.3) framgår vidare att vi har $m + n$ ekvationer i vilka dessa flödesvariabler ingår. Ur dessa ekvationer kan sålunda inte samtliga $m \cdot n$ obekanta variabler lösas. Speciella förfaranden måste tillgripas. Dessa förfaranden innebär i korthet följande.

Man väljer en provisorisk lösning till problemet. Genom stegvisa omräkningar förbättras denna lösning succesivt till dess man uppnår en optimal lösning.

I det följande skall vi utveckla vilka krav som ställs på de "provisoriska" lösningarna samt hur dessa lösningar förbättras. Framställningen åskådliggörs med följande illustrationsexempel, presenterat i tablåform.

2.1 Illustrationsexempel

| Sänka | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Tillgång |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Källa | | | | | | |
| 1 | x_{11} | x_{12} | x_{13} | x_{14} | x_{15} | 500 |
| 2 | x_{21} | x_{22} | x_{23} | x_{24} | x_{25} | 300 |
| 3 | x_{31} | x_{32} | x_{33} | x_{34} | x_{35} | 700 |
| Efterfrågan | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | |

Kostnadsmatris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2 Möjliga lösningar

För att transportproblemet skall kunna lösas måste följande villkor vara uppfyllt,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (1.5)$$

dvs den totala efterfrågan skall motsvara den totala tillgången.

Av (1.2) och (1.3) på sid framgår att

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \text{ och}$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} \text{ varför}$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Härav följer att transportproblemet, så som det formulerats i (1.1) - (1.4) alltid har en lösning.

I flertalet praktiska sammanhang gäller att den totala efterfrågan inte överensstämmer med den totala tillgången. Problemet sägs vara obalanserat. Enligt vad som sagts ovan måste problemet formuleras enligt (1.1) - (1.4) för att man skall kunna finna en lösning. Det obalanserade problemet måste omformuleras till ett balanserat. Detta sker genom att en fiktiv sänka eller källa införs, som innehåller sådana kvantiteter att (1.5) uppfylls. Till behandlingen av obalanserade problem återkommer vi i annat sammanhang.

En fråga av fundamentalt intresse är hur många av de totalt $m \cdot n$ transportmöjligheterna som maximalt behöver utnyttjas, dvs hur många $x_{ij} \neq 0$.

Vi har $m + n$ bivillkor. Eftersom (1.5) gäller är bivillkorsekvationerna inte oberoende. Man kan lätt övertyga sig om att var och en av dessa ekvationer kan lösas ut ur de övriga $(m+n-1)$ ekvationerna. Det föreligger $(m+n-1)$ av varandra oberoende bivillkor eller restriktioner.

En lösning behöver innehålla maximalt $(m+n-1) x_{ij} \neq 0$. Detta innebär att maximalt $(m+n-1)$ av de totalt $m \cdot n$ transportmöjligheterna utnyttjas.

Optimeringsproblemet består i att bland mängden $m \cdot n$ möjliga transportvägar utvälja en delmängd som ger en optimal lösning.

2.3 Krav på baslösning

Som tidigare nämnts genomförs optimeringen på så sätt att man väljer en "provisorisk" lösning till problemet, samt succesivt förbättrar denna lösning till dess man erhåller optimalt resultat. Utgångslösningen och de successivt förbättrade lösningarna benämns baslösningar.

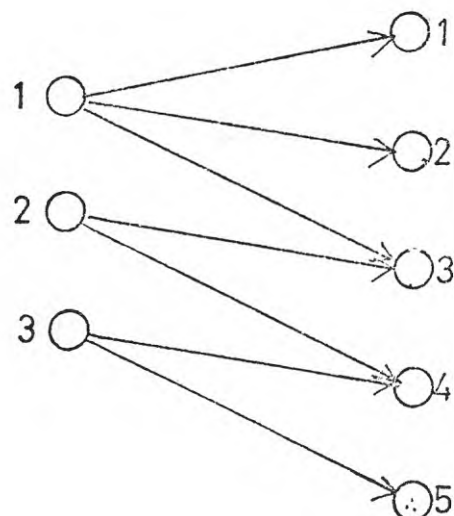
Vi har tidigare nämnt att en optimal lösning aldrig behöver innehålla mer än $m + n - 1$ utnyttjade sträckor. Baslösningen skall icke heller innehålla mer än $m + n - 1$ utnyttjade transportsträckor. I det fall baslösningen innehåller färre transportsträckor än $m + n - 1$ måste ett speciellt förfarande tillgripas för att beräkningarna skall kunna fortsätta. Till detta problem återkommer vi i tillämpningsexemplet.

Det är emellertid inte endast antalet utnyttjade sträckor som är av betydelse. Krav måste även ställas på hur sträckorna i baslösningen väljs.

I det följande skall vi illustrera detta sistnämnda krav genom att välja utgångslösningen på två olika sätt.

Alternativ 1. Vårt exempel innehåller 3 källor och 5 sänkor. Det finns sålunda totalt 15 olika transportvägar.

Vår första ansats bör omfatta $m + n - 1$, dvs $3+5-1=7$ av dessa transportvägar. Vi väljer dessa på det sätt som framgår av nedanstående illustration.



Eftersom tillgångarna i källorna är 500, 300 resp 700 enheter och efterfrågan i sänkorna är 100, 200, 300, 400 resp 500 enheter inser vi att den transporterade mängden x_{ij} på resp sträckor är

$$x_{11} = 100 \quad x_{12} = 200 \quad x_{13} = 200 \quad x_{23} = 100$$

$$x_{24} = 200 \quad x_{34} = 200 \quad x_{35} = 500 \text{ enheter.}$$

Problemet är nu att successivt förbättra utgångslösningen. Detta sker genom att vissa sträckor som valts successivt ersätts av andra. Hur denna ersättning bör ske för att lösningen skall förbättras återkommer vi till i följande avsnitt. Här skall endast belysas vissa samband som måste uppfyllas.

Vi kan införa begreppet utbytessträcka. Härmed avses en kedja av sträckor som ingår i baslösningen och som förbinder en viss källa i med en viss sänka j .

Mellan källa 2 och sänka 5 i vårt exempel utnyttjas i aktuell baslösning sträckorna $2 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 5$; denna kedja är utbytessträcka till sträckan $2 \rightarrow 5$. I följande beräkningssteg kan sålunda utbytessträckan ersättas av $2 \rightarrow 5$.

Utbytessträckan för sträcka $2 \rightarrow 4$ är uppenbarligen också $2 \rightarrow 4$. Detta innebär att den inte kan ersättas av andra sträckor i nästa

beräkningssteg.

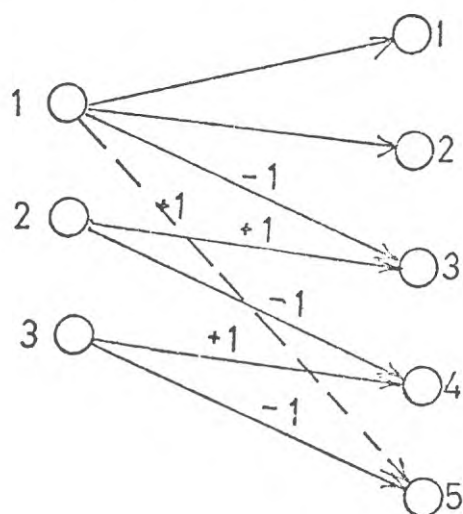
Vad som sagts kan generaliseras på följande sätt. För alla sådana sträckor $i \rightarrow j$, som är utnyttjade i baslösningen erhålls utbytessträckan

$$i \rightarrow q_1, q_1 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow q_2, \dots, q_r \rightarrow p_r, p_r \rightarrow j, \quad (1.6)$$

där $q_1 \dots q_r$ är nummer på sänkor, utnyttjade i baslösningen, och $p_1 \dots p_r$ är nummer för källor, utnyttjade i baslösningen.

I utgångslösningen har man sålunda förutsatt att vissa sträckor utnyttjas och att den totala tillgången/efterfrågan transporteras längs dessa. I nästa steg måste undersökas vad som sker om transporten i stället sker längs den inte utnyttjade sträckan.

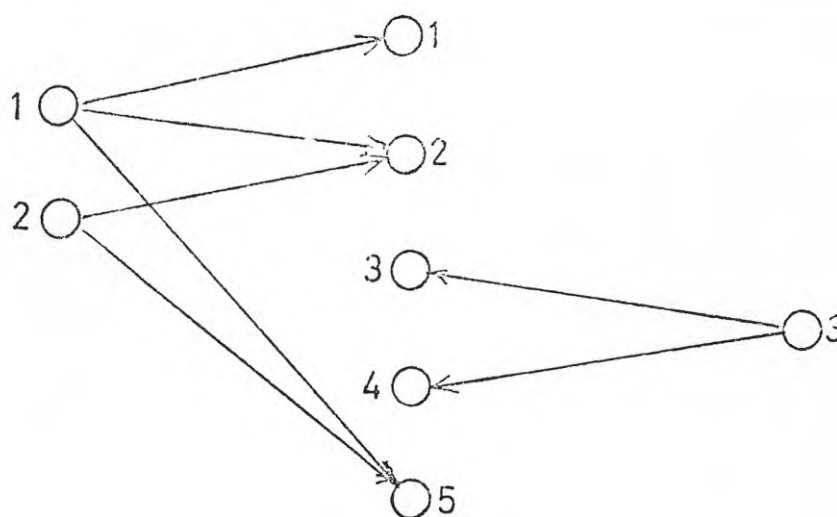
Om vi förutsätter att en mängdenhet kommer att transporteras längs en i aktuell baslösning inte utnyttjad sträcka $i \rightarrow j$ måste en mängdenhet tas från utbytessträckan till $i \rightarrow j$. Detta innebär att vi på utbytessträckan måste minska flödena på de sträckor som går från källa till sänka och öka flödet på de sträckor som går från sänka till källa i baslösningen. Detta kan illustreras på följande sätt.



I figuren anges med heldragna linjer de sträckor som utnyttjas i startlösningen. Vi önskar i nästa steg utnyttja sträckan $1 \rightarrow 5$.

För att man successivt skall kunna finna allt bättre lösningar krävs att man kan ersätta utbytessträckorna med ej utnyttjade transportsträckor. I varje beräkningssteg måste man kunna undersöka vad som sker om en sträcka som inte är utnyttjad ersätter dess utbytessträcka; detta måste kunna genomföras för alla ej utnyttjade sträckor. Detta krav tillgodoses uppenbarligen om de utnyttjade sträckorna väljs på det sätt som gjorts i detta alternativ.

Alternativ 2. I detta fall väljer vi utgångslösningens sträckor på följande sätt.



Vi ser omedelbart att det inte existerar någon utbytessträcka för sträckorna mellan källa 3 och sänkorna 1, 2, 5. Inte heller existerar någon utbytessträcka för $1 \rightarrow 3$ och $1 \rightarrow 4$.

Eftersom utbytessträcka saknas för vissa ej utnyttjade sträckor är det inte möjligt att ersätta baslösningens utnyttjade sträckor med vilken som helst av de ej utnyttjade.

Jämför man utgångslösningarna i alt 1 och 2, kan man konstatera följande.

I alt 1 är varje källa direkt eller indirekt förbunden med varje sänka. Med utgångspunkt från resp sänkas behov kan flödet på de enskilda sträckorna entydigt bestämmas. De valda sträckorna är oberoende av varandra.

I alt 2 däremot saknas förbindelsen mellan samtliga källor och alla sänkor. Den mängd som i utgångslösningen skall transporteras på sträckorna $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 5$ och $1 \rightarrow 5$ kan inte entydigt bestämmas. Dessa sträckor är beroende av varandra.

Det som sagts illustrerar sålunda det förhållandet att baslösningen måste bestå av varandra oberoende sträckor för att proceduren skall kunna fortsätta.

2.4 Förbättring av baslösning

Vi har uppehållit oss vid hur de sträckor som utnyttjas i baslösningen kan ersättas av andra sträckor. Detta utbyte måste självfallet göras på ett sådant sätt att lösningen blir bättre än baslösningen. I detta avsnitt skall vi uppehålla oss vid hur bytet av sträckor bör ske. Vi utgår från vårt exempel.

I utgångslösningen, alt 1, utgick vi från att sträckorna $1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 4$ och $3 \rightarrow 5$ utnyttjades.

De kvantiteter som transporteras på de enskilda sträckorna är

$$\begin{aligned} x_{11} &= 100 & x_{12} &= 200 & x_{13} &= 200 & x_{23} &= 100 \\ x_{24} &= 200 & x_{34} &= 200 & x_{35} &= 500 \text{ enheter.} \end{aligned}$$

De kostnader som uppkommer vid transport av en enhet längs de aktuella sträckorna framgår av kostnadsmatrisen. Multiplieras de aktuella kvantiteterna med motsvarande enhetskostnad erhåller vi objektfunktionens värde, som uttrycker den totala kostnaden.

Vi erhåller kostnaden

$$\begin{aligned} K &= & 100 \cdot 1 &+ 200 \cdot 3 &+ 200 \cdot 1 &+ 100 \cdot 3 \\ &+ & 200 \cdot 5 &+ 200 \cdot 1 &+ 500 \cdot 2 &= 3400 \end{aligned}$$

Vi har diskuterat vad som sker om en mängdenhet transporteras på den i lösningen utnyttjade sträckan $1 \rightarrow 5$. Enligt kostnadsmatrisen kostar det 2 kronor att transportera en mängdenhet längs sträckan $1 \rightarrow 5$. Den utbytessträcka som ingår i lösningen och som kan ersättas av $1 \rightarrow 5$ består av sträckorna $1 \rightarrow 3$,

$2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 4$ och $3 \rightarrow 5$. Kostnaden att transportera en enhet längs dessa sträckor är 1, 3, 5, 1 resp 2 kronor. Om vi utnyttjar sträckan $1 \rightarrow 5$ i stället för dess utbytessträcka kommer K att påverkas på följande sätt

$$K = 2 - 1 + 3 - 5 + 1 - 2 = - 2.$$

Värdet på K förbättras tydligen. Vi bör sålunda i nästa beräkningssteg söka att transportera så stor mängd som möjligt längs $1 \rightarrow 5$ i stället för på dess utbytessträcka.

På motsvarande sätt måste man undersöka om det skulle löna sig att utnyttja någon annan sträcka som inte används i den aktuella baslösningen.

Vad som sagts kan generaliseras på följande sätt. Vi anknytter till uttrycket (1.6).

Om en mängdenhet införs på en sträcka $i \rightarrow j$, som inte utnyttjas i den aktuella baslösningen erhålls följande kostnadskonsekvenser

$$\Delta k_{ij} = c_{ij} - c_{iq_1} + c_{p_1q_1} - c_{p_1q_2} \dots + c_{p_rq_r} - c_{p_rj} \quad (1.7)$$

Det är uppenbarligen meningsfullt att utnyttja sträckan $i \rightarrow j$ i stället för dess utbytessträcka om

$$\Delta k_{ij} < 0, \quad (1.8)$$

dvs om det innebär en besparing.

Vi kan benämna den kostnad som uppkommer om en mängdenhet transporteras längs en utbytessträcka för utbyteskostnad \bar{k}_{ij} .

$$\bar{k}_{ij} = c_{iq_1} - c_{p_1q_1} + c_{p_1q_2} + \dots + c_{p_rq_r} + c_{p_rj} \quad (1.9)$$

Av villkoren (1.7 - 1.9) erhålls sålunda,

$$c_{ij} < \bar{k}_{ij} \quad (1.10)$$

Det lönar sig sålunda att utnyttja sträcka ij i stället för den utbytessträcka som ingår i baslösningen om c_{ij} är mindre än utbyteskostnaden.

Det kan bevisas att lösningen är optimal när villkoret $c_{ij} \geq \bar{k}_{ij}$ för alla ij .

För att konstatera om en lösning kan förbättras måste man sålunda

1. hitta utbytessträcka för $i \rightarrow j$
2. beräkna utbyteskostnaden för denna sträcka
3. jämföra c_{ij} med utbyteskostnaden.

2.5 Utbyteskostnad

Beräkningen av utbyteskostnaden kan underlättas.

I MODI - metoden utnyttjar man sålunda ett förfarande, där utbyteskostnaden bestäms som summan av en radkoefficient och en kolumnkoefficient.

Ett annat tillvägagångssätt utnyttjas i efterföljande tillämpnings-exempel. Detta tillvägagångssätt baseras på följande två förhållanden som exemplifieras i det följande.

I. Differensen mellan utbyteskostnaden för sträckor som leder från olika källor till samma sänka är konstant, oberoende av val av källa.

II. Differensen mellan utbyteskostnaden för sträckor som leder från samma källa till olika sänkor är lika oberoende av val av sänka.

3. Tillämpningsexempel

Som tillämpningsexempel väljer vi det exempel som presenterats

i avsnitt 21 av denna bilaga.

I sänkorna 1-3 finns tillgångar om 500, 300 och 700 mängdenheter resp.

I sänkorna 1-5 förekommer efterfrågan om 100, 200, 300, 400 och 500 mängdenheter.

Kostnaden att transportera en mängdenhet från en viss källa till en viss sänka framgår av följande kostnadsmatris

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Objektfunktionen K får följande utseende

$$\begin{aligned} K = & 1x_{11} + 3x_{12} + 1x_{13} + 7x_{14} + 2x_{15} + \\ & + 4x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 5x_{24} + 8x_{25} + \\ & + 6x_{31} + 1x_{32} + 8x_{33} + 1x_{34} + 2x_{35} \end{aligned}$$

Beräkningssteg 1

Vi väljer en godtycklig lösning av oberoende sträckor. Längs dessa sträckor skall transport ske så att efterfrågan tillfredställs för samtliga sänkor samtidigt som källorna helt töms.

| x_{ij} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1 | 100 | 200 | 200 | 0 | 0 | 500 |
| 2 | 0 | 0 | 100 | 200 | 0 | 300 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 200 | 500 | 700 |
| | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 1500 |

$$\begin{aligned} K = & 1 \cdot 100 + 3 \cdot 200 + 1 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 200 + \\ & 1 \cdot 200 + 2 \cdot 300 = 3400 \end{aligned}$$

För att vi skall kunna avgöra hur denna baslösning skall kunna förbättras beräknar vi utbyteskostnaden.

I en tablå införs enhetskostnaderna för sträckor som utnyttjas i baslösningen.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 1 | | |
| 2 | | | 3 | 5 | |
| 3 | | | | 1 | 2 |

Utbyteskostnaden för utnyttjad sträcka motsvarar dess enhetskostnad. Utbyteskostnader för övriga sträckor kan beräknas genom att man utnyttjar de två förhållanden I och II, som nämnts i närmast föregående avsnitt.

Skillnaden mellan utbyteskostnader för sträckor som leder från källorna 2 och 1 måste vara 2 och för sträckor som leder från källorna 2 och 3 är 4. Beaktas dessa förhållanden erhålls utbyteskostnaderna \bar{k}_{ij} direkt. De framgår av nedanstående tablå.

| \bar{k}_{ij} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------|-----|---|-----|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 5 | 3 | 5 | 6 |
| 3 | - 1 | 1 | - 1 | 1 | 2 |

Genom att från enhetskostnaden dra utbyteskostnaden för aktuell sträcka erhåller vi den besparing resp merkostnad som uppkommer om sträckan utnyttjas. Vi erhåller följande tablå.

| Δc_{ij} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|---|-----|---|---|-----|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 4 | - 2 |
| 2 | 1 | - 1 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 7 | 0 | 9 | 0 | 0 |

Den största besparingen uppnås uppenbarligen om vi väljer att transportera så stor mängd som möjligt på sträcka $1 \rightarrow 5$.

Beräkningssteg 2

I detta beräkningssteg skall vi undersöka hur stor kvantitet som kan transporteras på sträcka $1 \rightarrow 5$. Det inses att utbytessträckan till $1 \rightarrow 5$ består av delsträckorna $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 4$ och $3 \rightarrow 5$.

Det flöde som i beräkningssteg 1 transporteras på dessa sträckor bestämmer den kvantitet som kan överföras till $1 \rightarrow 5$.

Om vi önskar överföra en enhet till $1 \rightarrow 5$ måste flödet på sträckan $1 \rightarrow 3$ minskas med en enhet. Detta i sin tur kräver kompensation eftersom leveranserna till sänka 3 måste kunna fullföljas. För att detta skall kunna ske måste ytterligare en enhet tillföras sträcka $2 \rightarrow 3$. Denna måste tas från sträcka $2 \rightarrow 4$ osv.

Vi konstaterar att max 200 enheter kan transporteras på utbyteskedjan för att de kvantiteter som är tillgängliga inte skall överskridas.

Till sträcka $1 \rightarrow 5$ överförs sålunda 200 enheter. Den inverkan som detta får på övriga sträckor framgår av nedanstående tablå.

| x_{ij} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 100 | 200 | 0 | 0 | 200 | 500 |
| 2 | 0 | 0 | 300 | 0 | 0 | 300 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 400 | 300 | 700 |
| | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | |

I denna lösning är objektsfunktionen $K = 3000$.

Vi konstaterar att denna lösning innehåller färre än $m + n - 1$ utnyttjade vägar. Lösningen är degenererad. Så är fallet eftersom hela efterfrågan i sänka 3 helt tillgodoses med tillgångarna i källa 3.

Eftersom lösningen innehåller endast sex utnyttjade sträckor i stället för sju kan inte \bar{k}_{ij} beräknas direkt. Man gör då konstgreppet att förutsätta att en fiktiv del av den transport som i lösningen utförs längs en sträcka utförs längs en inte utnyttjad sträcka. Förutsätt att denna transport sker längs sträcka $2 \rightarrow 4$.

Med utgångspunkt från de enhets kostnader som ingår i baslösningen och värdet 5 för den "extra" sträckan $2 \rightarrow 4$ kan nu utbyteskostnaden beräknas.

Vi erhåller

| c_{ij} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 1 | 7 | 2 |
| 2 | 4 | 4 | 3 | 5 | 8 |
| 3 | 6 | 1 | 8 | 1 | 2 |

| \bar{k}_{ij} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------|---|---|-----|---|---|
| 1 | 1 | 3 | - 1 | 1 | 2 |
| 2 | 5 | 7 | 3 | 5 | 6 |
| 3 | 1 | 3 | - 1 | 1 | 2 |

| Δc_{ij} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|-----|-----|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 6 | 0 |
| 2 | - 1 | - 3 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 5 | - 2 | 9 | 0 | 0 |

I nästa steg bör sträcka $2 \rightarrow 2$ utnyttjas i stället för dess ersättningssträcka.

Beräkningarna fortsätter på samma sätt som i steg 1 och 2. Efter det femte steget finner vi att Δc_{ij} är ≥ 0 för samtliga i, j , varför en optimal lösning har funnits. Objektfunktionen har efter fem steg värdet 2600.

SIMPLEXALGORITMEN

För lösning av generella LP - problem står ett flertal förfaranden till buds. Det mest kända av dessa är den s.k. Simplexmetoden, som presenterades av Danzig 1947.

I denna bilaga presenteras den teoretiska bakgrunden till lösningsmetoden. Metodens tillämpning åskådliggörs med några exempel.

Framställningen baseras på Czerwinski (1969) och vad avser exempel 2 på Kadlec - Vodáček (1968).

1. Matematisk formulering

För att Simplexmetoden skall kunna tillämpas måste problemet vara uttryckt i s.k. kanonisk form. Detta innebär att bivillkoren måste vara uttryckta som linjärt oberoende likheter. Dessutom gäller som villkor att variablerna endast får anta positiva värden.

Låt oss sålunda utgå från följande

$$\max C = c_1 x_1 + \dots + c_s x_s \quad (1.1)$$

under bivillkoren

$$\alpha_{i1} x_1 + \dots + \alpha_{is} x_s = b_i \quad (i=1, 2 \dots r) \quad (1.2)$$

$$x_1, x_2 \dots x_s \geq 0 \quad (1.3)$$

2. Lösningsförfarande

Bestämningen av den optimala lösningen sker i följande arbetssteg

1. finn en godtycklig s.k. baslösning som satisfierar bivillkoren (1.2) och (1.3),
2. undersök om denna lösning ger objektfunktionen (1.1) dess maximala värde,

3. om baslösningen inte är optimal bestäm med utgångspunkt från denna lösning en ny lösning som ger objektfunktionen ett bättre värde.
4. upprepa arbetssteg 2 och 3 till dess en optimal lösning funnits.

I det följande beskrivs den teoretiska bakgrunden till de enskilda beräkningsstegen. Framställningen börjar med beräkningssteg 2.

21. Simplexkriteriet

Vi förutsätter att vi har en lösning som satisfierar (1.2) och (1.3). Låt oss beteckna denna utgångslösning med \hat{X} .

$$\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_s)$$

Man kan bevisa att en sådan lösning behöver innehålla maximalt r variabler, som antar positiva värden. Övriga variabler antar värdet 0.

Variabler som i en lösning har positiva värden benämns basvariabler. Variabler med värdet 0 kallas fria variabler. Motsvarande lösning kallas baslösning.

Låt oss kalla basvariablernas index för lösningens bas och beteckna denna med B .

Om vi exempelvis har tre bivillkor ($r=3$) och basvariablerna är x_1 , x_4 , och x_5 är basen $B = [1, 4, 5]$.

Eftersom $\hat{x}_j = 0$ för $j \notin B$ erhålles ur (1.2)

$$\sum_{k \in B} \alpha_{ik} \hat{x}_k = b_i \quad (i=1, \dots, r) \quad (1)$$

$$\text{Objektfunktionens värde (1.1) blir } \hat{C} = \sum_{k \in B} c_k \hat{x}_k \quad (2)$$

Hur kommer objektfunktionen att påverkas om baslösningen förändras?

Giv en, x_j , utav de fria variablerna värdet $t > 0$. För att en tillåten lösning då skall kunna erhållas måste basvariablernas värde förändras. Inför beteckningen d_{kj} för den minskning hos basvariabel k som måste ske om den fria variabeln x_j ges värdet 1.

$$\sum_{k \in B} (\hat{x}_k - t \cdot d_{kj}) \alpha_{ik} + t \cdot \alpha_{ij} = b_i \quad (i=1, 2 \dots r) \quad (3)$$

Ur ekvationen (1) och (3) erhålls

$$\sum_{k \in B} \alpha_{ik} d_{kj} = \alpha_{ij} \quad (i=1, 2 \dots r) \quad (4)$$

Koefficienterna i bivillkoren för variabel j kan sålunda uttryckas som en linjär kombination av basvariablernas koefficienter. Denna kombination benämns likvärdig kombination för j . d_{kj} kan benämnas kombinationskoefficient.

Till beräkningen av kombinationskoefficientens storlek återkommer vi längre fram. Låt oss tills vidare förutsätta att vi känner koefficientens storlek. Objektfunktionens värde, när den fria variabeln x_j ges värdet t , blir då

$$C(t) = \sum_{k \in B} c_k (\hat{x}_k - t \cdot d_{kj}) + c_j \cdot t \quad (5)$$

Objektfunktionens värde kommer sålunda att förändras på följande sätt om x_j ges värdet t , jfr (2) och (5)

$$C(t) - \hat{C} = t (c_j - \sum_{k \in B} c_k d_{kj}) \quad (6)$$

Objektfunktionens (1.1) värde kommer att förbättras om

$$c_j - \sum_{k \in B} c_k d_{kj} > 0 \quad (7)$$

Uttrycket

$$K_j = c_j - \sum_{k \in B} c_k d_{kj} \quad (8)$$

benämns "simplexkriterium för den fria variabeln j ".

Så länge K_j är positiv för någon fri variabel kan lösningen förbättras, förutsatt att objektfunktionen skall maximeras. I annat fall är lösningen optimal.

2.2 Förbättring av lösningen

Antag att simplexkriteriet K_j är positivt för den fria variabeln med index w .

Av ekv (6) framgår att objektfunktionens värdetillväxt är proportionell mot den fria variabelns ökning t . Variabeln x_w skall ges ett sådant värde att objektfunktionens värde ökar så mycket som möjligt.

Av ekv (3) framgår hur basvariabeln \hat{x}_k förändras om den fria variabeln erhåller värdet t , $\hat{x}_k - t \cdot d_{kw}$.

Eftersom alla variabler måste vara positiva får värdet t inte överstiga $\frac{\hat{x}_k}{d_{kw}}$ för något $k \in B$.

$$\frac{\hat{x}_k}{d_{kw}}$$

Detta kan uttryckas på följande sätt. Variabeln x_w kan ges ett högsta värde t^x , där

$$t^x = \min_{k \in B} \frac{\hat{x}_k}{d_{kw}} ; d_{kw} > 0 \quad (9)$$

När variabeln x_w införs med sitt värde t^x påverkas basvariablerna \hat{x}_k . Den basvariabel som bestämmer t^x kommer enligt ekv (3) att bli 0, dvs den kommer att övergå till att bli en fri variabel. Låt oss beteckna den basvariabel som utgår ur lösningen med \hat{x}_u .

Från baslösningen $\hat{X} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s)$ övergår vi till en ny baslösning $X = (x_1, \dots, x_s)$, för vilken gäller

$$x_j = 0 \text{ för } j \notin B, j \neq w \quad (10)$$

$$x_w = \frac{\hat{x}_u}{d_{uw}} = t^x \quad (11)$$

$$x_k = \hat{x}_k - t^x \cdot d_{kw} \quad k \in B, k \neq u \quad (12)$$

Kombinationskoefficienten d_{kj} förändras när basen förändras. Vi skall uppehålla oss vid hur denna förändring sker. Härvid utnyttjar vi redan angivna beteckningar.

Enligt ekv (4) gäller följande

$$\sum_{k \in B} \alpha_{ik} \cdot d_{kj} = \alpha_{ij} \quad (i=1 \dots r; j=1 \dots s)$$

För $j=w$ erhålls

$$\sum_{k \in B} \alpha_{ik} \cdot d_{kw} = \alpha_{iw} \quad (i=1 \dots r) \quad (13)$$

Ekvation (4) och (13) kan skrivas om på följande sätt

$$\sum_{\substack{k \in B \\ k \neq u}} \alpha_{ik} \cdot d_{kj} + \alpha_{iu} \cdot d_{uj} = \alpha_{ij} \quad (14)$$

$$\sum_{\substack{k \in B \\ k \neq u}} \alpha_{ik} \cdot d_{kw} + \alpha_{iu} \cdot d_{uw} = \alpha_{iw} \quad (15)$$

Elimineras α_{iu} ur (14) och (15) erhålls

$$\sum_{\substack{k \in B \\ k \neq u}} \alpha_{ik} \left(d_{kj} - \frac{d_{uj}}{d_{uw}} d_{kw} \right) + \frac{d_{uj}}{d_{uw}} \cdot \alpha_{iw} = \alpha_{ij} \quad (16)$$

$$\text{Inför vi beteckningarna } d'_{wj} = \frac{d_{uj}}{d_{uw}} \quad (j=1, \dots, s) \quad (17)$$

$$\text{och } d'_{kj} = d_{kj} - d'_{wj} d_{kw} \quad (k \in B, k \neq u) \quad (18)$$

och markerar den nya basen med B' erhålls

$$\sum_{\substack{k \in B \\ k \neq u}} \alpha_{ik} \cdot d'_{kj} + \alpha_{iw} \cdot d'_{wj} = \sum_{k \in B'} \alpha_{ik} \cdot d'_{kj} = \alpha_{ij} \quad (19)$$

$$(i=1 \dots r, \quad j=1 \dots s)$$

2.3 Utgångslösning

Det sätt på vilket man söker en förbättrad lösning och det sätt på vilket denna lösning bestäms har behandlats i föregående avsnitt.

I detta avsnitt skall vi uppehålla oss vid hur utgångslösningen bestäms, och beräkna kombinationskoefficienterna.

LP- problemets bivillkor utnyttjas i ett ekvationssystem av följande utseende

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \dots + \alpha_{1(s-r)} x_{s-r} + x_{s-r+1} &= b_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \dots + \alpha_{2(s-r)} x_{s-r} + x_{s-r+2} &= b_2 \\ \alpha_{r1} x_1 + \dots + \alpha_{r(s-r)} x_{s-r} + x_s &= b_r \end{aligned} \quad (20)$$

$$b_i \geq 0 \quad r \text{ variabler har koefficienterna } 1!$$

Utgångslösningen erhålls lätt. Giv $x_1 \dots x_{s-r}$ värdet 0. Basvariablerna blir då

$$x_{s-r+1} = b_1; \quad x_{s-r+2} = b_2; \quad \dots \quad x_s = b_r$$

Av ekvation (4) framgår att kombinationskoefficienternas beräkning i detta fall blir enkel. Vi erhåller

$$\begin{aligned}
 1 \cdot d_{s-r+1, j} &= \alpha_{1j} \\
 1 \cdot d_{s-1+2, j} &= \alpha_{2j} \\
 1 \cdot d_{sj} &= \alpha_{rj}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Kombinationskoefficienterna för den fria variabeln j överensstämmer med variabelns koefficienter i bivillkoren.

2.4 Algoritm

Det lösningsförfarande som presenterats i föregående avsnitt sammanställs i det följande i form av ett arbetschema. Detta bör läsas parallellt med exemplet i avsnitt 3.1.

1. Bestäm tillåten utgångslösning $\hat{X} = (\hat{x}_1 \dots \hat{x}_s)$ och tillhörande bas B . (Jämför avsnitt 2.3)
2. Beräkna kombinationskoefficienter d_{kj} för $k \in B$. (Ekv (21) resp (4)).
3. Beräkna simplexkriterium K_j för alla $j \notin B$ (Ekv (8)).
Är samtliga $K_j \leq 0$ är lösningen optimal. Om något eller några $K_j > 0$ fortsätt till p. 4. Observera att detta gäller vid maximering av objektfunktionen.
4.
 - 4.1 Välj variabel x_j ($j \notin B$) med största positiva K_j .
Kalla variabeln x_w .
 - 4.2 Beräkna $\frac{\hat{x}_k}{d_{kw}}$ för $d_{kw} > 0$
 - 4.3 Bestäm $t^x = \min \frac{(\hat{x}_k)}{d_{kw}}$ ($d_{kw} > 0$)

Beteckna variabel som bestämmer t^x med x_u .
Denna kommer att uteslutas ur lösningen.
 - 4.4 Bestäm ny baslösning $X^1 = (x_1^1, \dots, x_s^1)$ med ledning av ekv (10) - (12).

4.5 Beräkna kombinationskoefficienter d'_{kj} för $k \in B'$ med ledning av ekv (17) och (18).

4.6 Upprepa förfarandet fr. o.m. punkt 3.

3. Exempel

Vid tillämpning av simplexalgoritmen genomförs beräkningarna i beräkningstablåer. Följande exempel illustrerar hur beräkningarna genomförs.

3.1 Exempel 1

Problemställning

Ett företag tillverkar fem olika typer av produkter. Man utnyttjar tre olika typer av resurser. Resurserna är begränsade.

Problemet är att bestämma den produktmix som ger företaget största täckningsbidrag.

Bidraget för de olika produkterna är känt liksom det anspråk tillverkningen ställer på produktionsresurserna. Dessa förutsättningar framgår av nedanstående tabell

| Produkt | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Tillgängliga resurser |
|----------------------------|---|---|-----|-----|---|-----------------------|
| Bidrag per prod enhet | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | |
| Resursbehov per prod enhet | | | | | | |
| Resurs 1 | 4 | 1 | 1,5 | 2,5 | | 150 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 7 | 180 |
| 3 | | 2 | 2 | | 2 | 120 |

Matematisk formulering

Om vi betecknar de kvantiteter som skall tillverkas av produkter-

na 1-5 med x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 kan problemet formuleras på följande sätt

$$\max C = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5$$

under bivillkoren

$$4x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 \leq 150$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 \leq 180$$

$$2x_2 + 2x_3 + x_5 \leq 120$$

$$x_1 \dots \dots \dots x_5 \geq 0$$

För att problemet skall kunna angripas med simplexmetoden måste bivillkoren uttryckas som likheter. Detta sker genom att ytterligare variabler x_6, x_7 och x_8 införs. Dessa, s.k. slackvariabler representerar outnyttjade resurser.

Problemet kan nu uttryckas på följande sätt

$$\max C = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8$$

$$4x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 + x_6 = 150$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 7x_5 + x_7 = 180$$

$$2x_2 + 2x_3 + x_5 + x_8 = 120$$

$$x_1 \dots \dots \dots x_8 \geq 0$$

Lösning

Beräkningarna genomförs i en beräkningstabla, av följande utseende

| | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| | Variabelnummer j | | |
| | Objektfunktionens koeff c_j | | |
| Bas- variabel $k \in B$ | Kombinationskoeff, d_{kj} | Bas- variabel, värde \hat{x}_k | Basvar koeff i objekt- funktion c_k |
| | "Simplexkriterium" K_j | Objekt- funktions värde | |

I det följande korresponderar numreringen med den indelning i arbetssteg som gjorts i avsnitt 2.4 Algoritm.

Beräkningarna genomförs i nedanstående simplextablå.

| Variabelnummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Basvariabel värde | Basvariabelns koefficient i objekt funktionen |
|--------------------------------|------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|----------------|------|-------------------|-----------------------------------------------|
| Objekt funktionens koefficient | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| Basvariabel | 6 | 4 | 1 | $1 \frac{1}{2}$ | $2 \frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | 150 | 0 |
| | 7 | 2 | 3 | $\frac{1}{2}$ | 2 | 7 | 0 | 1 | 180 | 0 |
| | 8 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 120 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Objekt funktionens värde |
| Simplex kriterium | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| | 6 | 4 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $2 \frac{1}{2}$ | $-1 \frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 60 | 0 |
| | 7 | 2 | 2 | 0 | $\frac{2}{2}$ | 6 | 0 | 1 | 120 | 0 |
| | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 60 | 4 |
| | 0 | 4 | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | 2 | 240 | |
| | 2 | -3 | 0 | 2 | -3 | 0 | 0 | -2 | | |
| | 4 | $\frac{8}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | 0 | 1 | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 0 | 24 | 2 |
| | 7 | $-\frac{6}{5}$ | $2 \frac{2}{5}$ | 0 | 0 | $7 \frac{1}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ | 1 | 72 | 0 |
| | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 60 | 4 |
| | 3,2 | 3,6 | 4 | 2 | 2,8 | 0,8 | 0 | 1,4 | 288 | Optimum |
| | -1,2 | -2,6 | 0 | 0 | -1,8 | -0,8 | 0 | -1,4 | | |

1. Bestäm tillåten utgångslösning. En tillåten utgångslösning erhålls om variablerna x_6 , x_7 och x_8 väljs till basvariabler. Jämför avsnitt 2.3. Dessa variabelnummer antecknas i kol 1. Samtidigt antecknas de valda basvariablernas värde x_k i kol 10 och deras koefficient i objektfunktionen c_k i kol 11.
2. Beräkna kombinationskoefficienter d_{kj} för $k \in B$.

Om valet av baslösning görs så att basvariablerna utgörs av variabler som i bivillkoren förekommer endast en gång sammanfaller d_{kj} med variabelkoefficienterna i bivillkoren. Jämför avsnitt 2.3 ekv (21).

Inför de aktuella värdena i tablån.

3. Beräkna simplexkriteriet K_j för alla j .

$$K_j = c_j - \sum_{k \in B} c_k \cdot d_{kj}$$

K_j för en viss variabel j erhålls genom att man från variabelns koefficient i objektfunktionen, c_j , drar summan av de produkter som bildas av resp basvariabels koefficient i objektfunktionen, c_k , och motsvarande kombinationskoefficient för j , d_{kj} . I det aktuella fallet är $c_k = 0$ för samtliga aktuella k , varför K_j överensstämmer med c_j .

K_j införs på sin rad i tablån. Eftersom ett flertal $K_j > 0$ finns en bättre lösning.

- 4.1 Välj variabel x_j ($j \notin B$) med största positiva K_j .

Största K_j uppträder för variabel x_3 .

- 4.2 Beräkna $\frac{\hat{x}_k}{d_{kw}}$ för $d_{kw} > 0$

$$\begin{aligned} \frac{x_6}{d_{63}} &= \frac{150}{1,5} = 100; & \frac{x_7}{d_{73}} &= \frac{180}{1} = 180; & \frac{x_8}{d_{83}} \\ &= \frac{120}{2} = 60 \end{aligned}$$

- 4.3 Bestäm t^x , dvs det högsta värde den nya basvariabeln x_3 kan anta samt bestäm vilken basvariabel som skall gå ur lösningen \hat{x}_u .

Av 4.2 ser vi att det maximala värde som kan tillåtas är 60. Den gamla basvariabeln \hat{x}_8 går ur lösningen.

Ersätt variabelnummer 8 i första kol med 3 och inför i sista kol koefficienten för x_3 , dvs 4.

4.4

Bestäm ny baslösning X' .

Värdet av den nya baslösningen x'_3 har tidigare beräknats

$$x'_3 = \frac{\hat{x}_8}{d_{83}} = \frac{120}{2} = 60 = t^x$$

Övriga baslösningar blir enligt (12)

$$x'_k = \hat{x}_k - t^x \cdot d_{kw}$$

$$x'_6 = 150 - 60 \cdot 1,5 = 60$$

$$x'_7 = 180 - 60 \cdot 1 = 120$$

Värdena på x_k införs i simplextablans näst sista kolumn.

4.5

Beräkna kombinationskoefficienter för den nya baslösningen.

Enligt (17) och (18) är

$$d'_{wj} = \frac{d_{uj}}{d_{uw}} ; \quad d'_{kj} = d_{kj} - d'_{wj} d_{kw}$$

Beräkna först den nya kombinationskoefficienten för j när x_3 införs som ny basvariabel.

Detta sker genom att samtliga kombinationskoefficienter på den gamla rad 8 divideras med koefficient i för variabel x_3 $\cdot d_{3j} = \frac{d_{8j}}{d_{83}}$

Vi erhåller

$$d_{31} = \frac{0}{2} = 0; \quad d_{32} = \frac{2}{2} = 1; \quad d_{33} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$d_{34} = \frac{0}{2} = 0; \quad d_{35} = \frac{2}{2} = 1; \quad d_{36} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$d_{37} = \frac{0}{2} = 0; \quad d_{38} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Inför dessa värden på den rad som motsvarar basvariabeln x_3 .

Övriga d'_{kj} erhålls genom att tidigare d_{kj} minskas med produkten av de nya kombinationskoefficienterna på rad 3 och den tidigare koefficienten för variabel x_3 .

Vi erhåller för rad som motsvarar basvariabel x_6

| | | | | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------------------|
| 4 | 1 | $1\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $0 \cdot 1\frac{1}{2}$ | $1 \cdot 1\frac{1}{2}$ | $1 \cdot 1\frac{1}{2}$ | $0 \cdot 1\frac{1}{2}$ | $1 \cdot 1\frac{1}{2}$ | $0 \cdot 1\frac{1}{2}$ | $0 \cdot 1\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2}$ |
| 4 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $2\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | $-\frac{3}{4}$ |

Dessa värden införs i tablån på den rad som motsvarar basvariabeln x_6 .

På motsvarande sätt sker med kombinationskoefficienterna för basvariabeln x_7 .

Vanligtvis genomförs beräkningsstegen 4.4 och 4.5 samtidigt. I en första etapp beräknas x'_w resp d'_{wj} för den nya basvariabeln genom att samtliga värden på den gamla "basvariabelraden" divideras med d_{uw} .

Övriga x'_w resp d'_{kj} beräknas parallellt med utgångspunkt från x'_w och d'_{wj} på det sätt som angivits.

- 4.6 Beräkningarna med den nya basen upprepas från punkt 3 till dess att en optimal lösning erhållits.

I simplextablån, har objektfunktionens värde efter de olika beräkningsstegen angivits. Detta erhålls genom en summering av resp basvariabels värde i näst sista kolumnen och motsvarande "objektcoefficient" som anges i den sista kolumnen.

Den optimala lösningen visar att tillverkningen bör inriktas på produktlagen 3 och 4 av vilka bör tillverkas 60 resp 24 enheter.

Av resursslag 2 (x_7) kommer 72 enheter att förbli outnyttjade. Övriga resursslag utnyttjas helt.

3.2 Exempel 2

Följande exempel kräver en omformulering för att simplexmetoden skall kunna tillämpas. Beräkningarna genomförs i en tablå av något annorlunda uppbyggnad än den som utnyttjats i föregående exempel.

Problemställning

I källorna A, B och C finns tillgångar av en viss produkt 1960 t, 560 t resp 1120 t. Efterfrågan i sänkorna 1-4 är 1260 t, 980 t, 700 t och 700 t.

För transportvägarna råder kapacitetsbegränsningar. På sträckan A 1 kan transporteras max 240 t, A 2 800 t, B 2 200 t, B 4 400 t och C 1 900 t.

Transportapparaten är så dimensionerad att transportarbetet från A måste maximeras till 220 000 t km.

Avstånden mellan källorna och sänkorna framgår av nedanstående tablå

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|-----|-----|-----|-----|
| A | 96 | 84 | 108 | 222 |
| B | 45 | 150 | 135 | 111 |
| C | 105 | 180 | 120 | 186 |

Problemet är att genomföra transportererna på ett sådant sätt att transportarbetet minimeras.

Matematisk formulering

Om vi betecknar transporterad kvantitet från A, B resp C till j med x_{1j} , x_{2j} , x_{3j} erhåller vi

$$\begin{aligned} \min C = & 96x_{11} + 84x_{12} + 108x_{13} + 222x_{14} + 45x_{21} + \\ & + 150x_{22} + 135x_{23} + 111x_{24} + 105x_{31} + 180x_{32} + \\ & + 120x_{33} + 186x_{34} \end{aligned}$$

under bivillkoren

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1960 \quad (1)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 980 \quad (2)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1120 \quad (3)$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1260 \quad (4)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 980 \quad (5)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 700 \quad (6)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 700 \quad (7)$$

$$x_{11} \leq 240 \quad (8)$$

$$x_{12} \leq 800 \quad (9)$$

$$x_{22} \leq 200 \quad (10)$$

$$x_{24} \leq 400 \quad (11)$$

$$x_{31} \leq 900 \quad (12)$$

$$96x_{11} + 84x_{12} + 108x_{13} + 222x_{14} \leq 220000 \text{ t km} \quad (13)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3 \quad j=1,2,3,4)$$

För att problemet skall kunna lösas med simplexalgoritmen krävs vissa modifikationer av den matematiska formuleringen.

Sålunda måste olikheterna (8) - (13) förändras till likheter. Detta sker genom att slackvariabler införs. Beteckna dessa med w_i .

För att utgångslösningens kombinationskoefficienter skall kunna erhållas krävs att det i varje bivillkorsekvation förekommer variabler med koefficienten +1 och som endast förekommer en gång. Detta framgår av avsnitt 2.3 Utgångslösning. Detta villkor uppfyller man genom att till likheterna (1) - (7) addera artificiella variabler u_i .

När nya variabler införs kommer objektfunktionen att förändras. Slackvariablerna ges värdet 0. De artificiella variabelernas koefficienter ges ett mycket högt värde. Detta betecknas med M . (Genom att införa detta höga värde kommer de artificiella variablerna att under beräkningsgången försvinna ur lösningen. Om problemet hade gällt en maximering av objektfunktionen skulle koefficienterna givits värdet $-M$).

Objektfunktionen kommer att få följande utseende

$$\begin{aligned} \min C = & 96x_{11} + 84x_{12} + 108x_{13} + 222x_{14} + 45x_{21} + 150x_{22} + \\ & + 135x_{23} + 111x_{24} + 105x_{31} + 180x_{32} + 120x_{33} + \\ & + 186x_{34} \\ & + M \cdot u_1 + M \cdot u_2 + M \cdot u_3 + M \cdot u_4 + M \cdot u_5 + M \cdot u_6 + \\ & + M \cdot u_7 + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4 + 0 \cdot w_5 + \\ & + 0 \cdot w_6 \end{aligned}$$

Bivillkoren blir

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + u_1 & = 1960 & (1a) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + u_2 & = 560 & (2a) \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + u_3 & = 1120 & (3a) \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + u_4 & = 1260 & (4a) \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + u_5 & = 980 & (5a) \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + u_6 & = 700 & (6a) \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + u_7 & = 700 & (7a) \\ x_{11} + w_1 & = 240 & (8a) \\ x_{12} + w_2 & = 800 & (9a) \\ x_{22} + w_3 & = 200 & (10a) \\ x_{24} + w_4 & = 400 & (11a) \\ x_{31} + w_5 & = 900 & (12a) \\ 96x_{11} + 84x_{12} + 108x_{13} + 222x_{14} + w_6 & = 220000 & (13a) \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4)$$

$$u_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, 7) \quad w_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, 6)$$

Vi har 25 variabler och 13 ekvationer. Studerar vi ekvationerna finner vi att de inte är linjärt oberoende. Sålunda råder ett linjärt samband mellan ekvationerna (1) - (7).

Beräkningarna underlättas om endast linjärt oberoende ekvationer medtas. Detta är emellertid inte något krav för att simplex-algoritmen skall fungera.

Låt oss starta med att utesluta någon av ekvationerna, exempelvis ekv (7a) eftersom ingående variabler ändå erhålls. Uteslut jämväl den artificiella variabeln ur objektfunktionen.

Lösning

Beräkningarna genomförs i en beräkningstablå, som skiljer sig något från den som presenterats i avsnitt 3.1.

| | | | | |
|------------------------------------|-----------|-------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------|
| Basvar koeff i obj- funkt | Basvar | Objektfunktionens koeff c_j | | Kontroll kolumn |
| | | Variabler x, u, w | | |
| | | Basvar värde | Kombinations- koeff, d | |
| c_k | x, u, w | $\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}$ | | |
| | | Objekt funkt värde | "Indexrad" = (- Simplexkrite- rium K_j) | |

Beräkningarna genomförs i de beräkningssteg som presenterats i avsnitt 2.4 Algoritm. Jämför även exempel 1. I det följande görs endast smärre kommentarer.

Problemet överförs till beräkningstablå

| | | 96 | 84 | 108 | 222 | 45 | 150 | 135 | 111 | 105 | 180 | 120 | 186 | M | M | M | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | K |
|---|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|---|---------|
| | | x_{11} | x_{12} | x_{13} | x_{14} | x_{21} | x_{22} | x_{23} | x_{24} | x_{31} | x_{32} | x_{33} | x_{34} | U_1 | U_2 | U_3 | U_4 | U_5 | U_6 | W_1 | W_2 | W_3 | W_4 | W_5 | W_6 | | | |
| M | U_1 | 1960 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | 1965 |
| M | U_2 | 560 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | 565 |
| M | U_3 | 1120 | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | | | | | | 1125 |
| M | U_4 | 1260 | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | 1264 |
| M | U_5 | 980 | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 984 |
| M | U_6 | 700 | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 704 |
| 0 | W_1 | 240 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 242 |
| 0 | W_2 | 800 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | 802 |
| 0 | W_3 | 200 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | 202 |
| 0 | W_4 | 400 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | 402 |
| 0 | W_5 | 900 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 902 |
| 0 | W_6 | 220 000 | 96 | 84 | 108 | 222 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 220 511 |
| | | 6580 M | 2M | 2M | 2M | M | 2M | 2M | 2M | M | 2M | 2M | 2M | M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 601M |
| | | 0 | -96 | -84 | -108 | -222 | -45 | -150 | -135 | -111 | -105 | -180 | -120 | -186 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1542 |

Överför problemet till simplextablån , tabell 1 .

1. En tillåten lösning är den vid vilken slackvariabler och artificiella variabler utgör basvariabler . Dessa antecknas i kol 2 och deras koefficient i objektfunktionen i kol 1 .

2. Eftersom problemet omformulerats i enlighet med avsnitt 23 , ekv (20) antar kombinationskoefficienterna samma värden som koefficienterna i bivillkorsekvationerna .

3. För att bestämma på vilket sätt utgångslösningen skall förbättras beräknas "index" för de enskilda kolumnerna . I den presenterade tablån bestäms index genom att summan av produkterna av basvariabelns värde och kombinationskoefficienten minskas med variabelns koefficient i objektfunktionen .

För variabel x_{11} gäller alltså

$$1 \cdot M + 1 \cdot M + 1 \cdot 0 - 96 = 2 M - 96 .$$

Det bör observeras att detta "index" = simplexkriteriet , med negativt tecken så som det definieras i avsnitt 2.1 .

4.4 - 4.5 Den nya baslösningen samt nya kombinationskoefficienter beräknas på följande sätt.

För den rad som motsvarar den nya basvariabeln x_{21} divideras samtliga element i tabell 1 med den kombinationskoefficient som befinner sig i skärningen mellan nyckelkolumn och nyckelrad i tabell 1,

$$560:1 = 560 ; \quad 0:1 = 0 ; \quad \dots\dots\dots$$

För rader som motsvarar övriga basvariabler erhålls de nya värdena genom att man minskar värdena i tabell 1 med produkten av de nya värden på rad som motsvarar x_{21} och den kombinationskoefficient i tabell 1 som befinner sig i skärningen mellan nyckelkolumn och nyckelrad.

För u_4 erhålls sålunda

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|---|--|-----|-----|-----|-----|---|--|--|-----|---|--|--|--|--|--|
| u_4 | 1260 | 1 | | 1 | | | | 1 | | | 1 | | | | | | |
| - | 560·1 | | | 1·1 | 1·1 | 1·1 | 1·1 | | | | 1·1 | | | | | | |
| u_4 | 700 | 1 | | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | | | -1 | 1 | | | | | |

4.6 Beräkningarna med de nya basvariablerna upprepas från punkt 3.

Kontroll av beräkningarna i varje steg görs med ledning av kontrollkolumnen K.K erhålls för varje rad som summan av basvariabelns koefficient och övriga aktuella värden.

När kontrollvärdet för varje rad summeras skall det överensstämma med summan av "indexvärdena" i sista raden.

I följande tre tablåer anges dels ytterligare två beräkningssteg och dels det sista, det nionde beräkningssteget.

| | | 96 | 84 | 108 | 222 | 45 | 150 | 135 | 111 | 105 | 180 | 120 | 186 | M | M | M | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | K | |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|------|
| | | x ₁₁ | x ₁₂ | x ₁₃ | x ₁₄ | x ₂₁ | x ₂₂ | x ₂₃ | x ₂₄ | x ₃₁ | x ₃₂ | x ₃₃ | x ₃₄ | U ₁ | U ₂ | U ₃ | U ₄ | U ₅ | U ₆ | W ₁ | W ₂ | W ₃ | W ₄ | W ₅ | W ₆ | | |
| M | U ₁ | 220 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | -1 | | | | -1 | 1 | | | | | | -1 | -1 | -1 | | | | 217 | |
| 45 | x ₂₁ | 160 | | | | 1 | 1 | 1 | 0 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | -1 | 163 | |
| M | U ₃ | 80 | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 | 1 | -1 | -1 | | 1 | 1 | | | | -1 | 84 | |
| 105 | x ₃₁ | 860 | 0 | | | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | | | | | -1 | 1 | | | | -1 | | | 1 | | | 859 | |
| 180 | x ₃₂ | 180 | 0 | | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | -1 | | 182 | |
| 108 | x ₁₃ | 700 | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | 704 | |
| 96 | x ₁₁ | 240 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | 242 | |
| 84 | x ₁₂ | 800 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | 802 | |
| 0 | W ₃ | 200 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 202 | |
| 111 | x ₂₄ | 400 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 402 | |
| 0 | W ₅ | 40 | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | 1 | | -1 | | | 1 | | | | -1 | 1 | 43 | |
| 0 | W ₆ | 54160 | 0 | 0 | 0 | 222 | | -108 | | | | -108 | | | | | | | | -108 | -96 | -84 | | | 1 | 53879 | |
| | 300M | 0 | 0 | 0 | M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | 0 | 0 | 0 | -2M | -2M | -2M | 0 | 0 | 0 | -M | 0 | 0 | 295M |
| | 340140 | 0 | 0 | 0 | -222 | 0 | -30 | -87 | 0 | 0 | 0 | -12 | -186 | 0 | -60 | 0 | 105 | 186 | 108 | -9 | -96 | 0 | 171 | 0 | 0 | 340002 | |

| | | 96 | 84 | 108 | 222 | 45 | 150 | 135 | 111 | 105 | 180 | 120 | 186 | M | M | M | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | K | |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|------|
| | | x ₁₁ | x ₁₂ | x ₁₃ | x ₁₄ | x ₂₁ | x ₂₂ | x ₂₃ | x ₂₄ | x ₃₁ | x ₃₂ | x ₃₃ | x ₃₄ | U ₁ | U ₂ | U ₃ | U ₄ | U ₅ | U ₆ | W ₁ | W ₂ | W ₃ | W ₄ | W ₅ | W ₆ | | |
| M | U ₁ | 220 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | -1 | -1 | -1 | | | | 217 | |
| 45 | x ₂₁ | 160 | | | | 1 | 1 | 1 | 0 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | -1 | 163 | |
| 186 | x ₃₄ | 80 | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 | 1 | -1 | -1 | | 1 | 1 | | | | -1 | 84 | |
| 105 | x ₃₁ | 860 | 0 | | | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | | | | | -1 | 1 | | | | -1 | | | 1 | | | 859 | |
| 180 | x ₃₂ | 180 | 0 | | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | -1 | 182 | |
| 108 | x ₁₃ | 700 | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | 704 | |
| 96 | x ₁₁ | 240 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | | | 242 | |
| 84 | x ₁₂ | 800 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 802 | |
| 0 | W ₃ | 200 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 202 | |
| 111 | x ₂₄ | 400 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 402 | |
| 0 | W ₅ | 40 | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | 1 | | -1 | | | 1 | | | | -1 | 1 | 43 | |
| 0 | W ₆ | 54160 | 0 | 0 | 0 | 222 | | -108 | | | | -108 | | | | | | | | -108 | -96 | -84 | | | 1 | 53879 | |
| | 220M | 0 | 0 | 0 | M | 0 | 0 | -M | 0 | 0 | 0 | -M | 0 | 0 | -M | -M | -M | -M | -2M | -M | -M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 211M |
| | 355020 | 0 | 0 | 0 | -222 | 0 | -30 | 99 | 0 | 0 | 0 | 174 | 0 | 0 | 126 | 186 | -81 | -6 | 108 | 177 | 90 | 0 | -15 | 0 | 0 | 355625 | |

| | | | 96 | 84 | 108 | 222 | 45 | 150 | 135 | 111 | 105 | 180 | 120 | 186 | M | M | M | M | M | M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | K | | |
|-----|-----------------|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|---------|-----|
| | | | x ₁₁ | x ₁₂ | x ₁₃ | x ₁₄ | x ₂₁ | x ₂₂ | x ₂₃ | x ₂₄ | x ₃₁ | x ₃₂ | x ₃₃ | x ₃₄ | u ₁ | u ₂ | u ₃ | u ₄ | u ₅ | u ₆ | w ₁ | w ₂ | w ₃ | w ₄ | w ₅ | w ₆ | | | |
| 222 | x ₁₄ | 220 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | -1 | | | | -1 | 1 | | | | | | | -1 | -1 | -1 | | | | | 217 | |
| 45 | x ₂₁ | 160 | | | | | 1 | 1 | 1 | 0 | | | | | 1 | | | | | | | | | | -1 | | | 163 | |
| 186 | x ₃₄ | 80 | | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 | 1 | -1 | -1 | | 1 | 1 | | | -1 | | | 84 | |
| 105 | x ₃₁ | 860 | 0 | | | | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | | | | -1 | | 1 | | | | -1 | | | | 1 | | | 859 | |
| 180 | x ₃₂ | 180 | | 0 | | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | -1 | | | | | 182 | |
| 108 | x ₁₃ | 700 | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 704 | |
| 96 | x ₁₁ | 240 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 242 | |
| 84 | x ₁₂ | 800 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 802 | |
| 0 | w ₃ | 200 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | | 202 | |
| 111 | x ₂₄ | 400 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 402 | |
| 0 | w ₅ | 40 | | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | 1 | | -1 | | | | 1 | | | -1 | 1 | | 43 | |
| 0 | w ₆ | 5 320 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | 114 | | | | 114 | -222 | | | | | | | 114 | 126 | 138 | | | | 1 | 5 705 | |
| | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -M | -M | -M | -M | -M | -M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -6M |
| | | 403 860 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -30 | -123 | 0 | 0 | 0 | -48 | 0 | 222 | 126 | 186 | -81 | -6 | -114 | -45 | -132 | 0 | -15 | 0 | 0 | | 403 800 | |

CAPTIONS

- FIG. 1.1 Elimination of two-way transports 1. Basic requirements.
- FIG. 1.2 Elimination of two-way transports 1. Optimum requirements.
- FIG. 2.1 Elimination of two-way transports 2. Basic requirements.
- FIG. 2.2 Elimination of two-way transports 2. Initial solution
- FIG. 2.3 Elimination of two-way transports 2. Optimum solution.
- FIG. 3.1 Cycle differences. Basic requirements.
- FIG. 3.2 Cycle differences. Initial solution.
- FIG. 3.3 Cycle differences. Improved solution.
- FIG. 3.4 Cycle differences. Optimum solution.
- FIG. 4.1 Potential differences. Basic requirements and initial solution.
- FIG. 4.2 Potential differences. Optimum solution.
- FIG. 5.1 Cartographic method. Initial solution.
- FIG. 5.2 Cartographic method. Final solution.
- FIG. 6 Transport problem.
- FIG. 7 Cement supplies, Siberia. Optimum transport plan.
- FIG. 8 Transport of lime, GDR. Transport routes before and after optimization.
- FIG. 9.1 Distribution of transport resources, Kiev. Basic data.
- FIG. 9.2 Distribution of transport resources, Kiev. Optimum solution.
- FIG. 10.1 Optimum transport routes 1. Distances etc.
- FIG. 10.2 Optimum transport routes 1. Need for transport facilities etc.
- FIG. 10.3 Optimum transport routes 1. Transport schedule. Distances given in km x 10.
- FIG. 10.4 Optimum transport routes 1. Time consumed after optimization.

- FIG. 11.1 Optimum transport routes 2. Distances etc.
- FIG. 11.2 Optimum transport routes 2. Need for transport facilities etc.
- FIG. 11.3 Optimum transport routes 2. Transport schedule incorporating the optimum solution. Distances given in km x 10.
- FIG. 11.4.1 Optimum transport routes 2. Routes for vehicles from depot B_2 .
- FIG. 11.4.2 Optimum transport routes 2. Routes for vehicles from depot B_1 . Trial.
- FIG. 11.4.3 Optimum transport routes 3. Routes for vehicles from depot B_1 . Solution.
- FIG. 12.1 Location of cement factories, Poland. Distances, quantities ect.
- FIG. 12.2 Location of cement factories, Poland. Possible locations. Distances.
- FIG. 12.3 Location of cement factories in Poland. Optimum transportation plan for the alternatives investigated.
- FIG. 13.1 Location of plant for ceramic products used in the building industry in Kazachstan. Primary data.
- FIG. 13.2 Location of plant for ceramic products used in the building industry in Kazachstan. Optimum primary solution.
- FIG. 13.3 Location of plant for ceramic products used in the building industry in Kazachstan. Alternative D. Transport schedule.
- FIG. 13.4 Location of plant for ceramic products used in the building industry in Kazachstan. Alternative D. Optimum solution.
- FIG. 14. 1-4 Distribution areas for identical products.
- FIG. 15. 1-2 Distribution areas for groups of products. Optimization of transport costs. Case in which a balance was maintained.
- FIG. 15. 3-4 Distribution areas for groups of products. Optimization of manufacturing and transport costs. Case in which balance was not maintained.
- FIG. 16 Distribution areas for groups of products. Optimization of total costs with 2-2-2 shifts.

R8: 1973

Denna rapport hänför sig till anslag E 618 från Statens råd för byggnadsforskning till Institutionen för byggnadsekonomi och byggnadsorganisation, CTH. Rapporten ingår i BFRs program för transportforskning som sammanhålls av BFRs transportnämnd. Försäljningsintäkterna tillfaller fonden för byggnadsforskning.

Distribution: Svensk Byggtjänst, Box 1403, 111 84 Stockholm
Grupp: produktion

Pris: 23 kronor