



Det här verket har digitaliserats vid Göteborgs universitetsbibliotek och är fritt att använda. Alla tryckta texter är OCR-tolkade till maskinläsbar text. Det betyder att du kan söka och kopiera texten från dokumentet. Vissa äldre dokument med dåligt tryck kan vara svåra att OCR-tolka korrekt vilket medför att den OCR-tolkade texten kan innehålla fel och därför bör man visuellt jämföra med verkets bilder för att avgöra vad som är riktigt.

This work has been digitized at Gothenburg University Library and is free to use. All printed texts have been OCR-processed and converted to machine readable text. This means that you can search and copy text from the document. Some early printed books are hard to OCR-process correctly and the text may contain errors, so one should always visually compare it with the images to determine what is correct.



Rapport

R31:1979

FM 6127/1981
161(192)

**Olinjärt elastiska balkar
och ramar med analytiskt
beskrivna element-
samband**

**Kjell Mattiasson
Lennart Ågårdh**

TEKNISKA HOGSKOLAN I LUND
SEKTIONEN FOR VAG- OCH VATTEN
BIBLIOTEKET

Byggforskningen

R31:1979

OLINJÄRT ELASTISKA BALKAR OCH RAMAR MED
ANALYTISKT BESKRIVNA ELEMENTSAMBAND

Kjell Mattiasson
Lennart Ågårdh

Denna rapport hänför sig till forskningsanslag
690502-7 från Statens råd för byggnadsforskning
till Inst. för byggnadsstatik, CTH, Göteborg.

I Byggforskningsrådets rapportserie redovisar forskaren sitt anslagsprojekt. Publiceringen innebär inte att rådet tagit ställning till åsikter, slutsatser och resultat.

R31:1979

ISBN 91-540-2983-X

Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

LiberTryck Stockholm 1979 951814

INNEHÅLL

	BETECKNINGAR	7
1	INLEDNING	11
	Bakgrund	11
	Rapportens omfattning	11
	Användningsområde	12
	Litteratur	13
2	STRUKTURANALYS	17
	Allmänt	17
	Förutsättningar och antaganden	17
	Materiell olinjäritet	18
	Geometrisk olinjäritet	19
	Beräkningsgång allmänt	25
3	DATORPROGRAM	29
	Allmänt	29
	Flödesschema	29
	Kort beskrivning av beräkningsmetoden med numerisk elementbehandling enligt programmet B-FEM	29
	Platsbehov i datorns kärnminne	31
	Felkällor	32
4	EXEMPEL	35
	Allmänt	35
	Konsolbalk av aluminium med transversell last	35
	Konsolbalk av aluminium med axiell och transversell last	38
	Portalram av stål	41
	Slutsatser av exempel	44
5	INDATABESKRIVNING	45
	Allmän information	45
	Geometri	46
	Styvhetstyper	46
	Laster	48
	Upplagsvillkor	49
6	SAMMANFATTNING	51
7	APPENDIX I	53
8	APPENDIX II	55
9	REFERENSER	59

FÖRORD

Denna rapport är andra delen i en rapportserie utgiven av Statens råd för byggnadsforskning (BFR) över ett forskningsprojekt rörande finit elementmetod för olinjärt elastiska ramar med analytiskt beskrivna elementegenskaper. Den första delen, Ågårdh: "Ett olinjärt elastiskt balkpelarelement", R44:1976, behandlade balkpelarelementets olinjära deformationsegenskaper beskrivna med analytiska uttryck.

I föreliggande rapport har Mattiasson svarat för datorprogram och de exempel som beräknats och redovisats. Manuskriptet har maskinskrivits av Lisbeth Trygg och Berit Lundquist. Härför och för stöd och intresse som visats projektet av kolleger vid institutionen för byggnadsstatik, Chalmers tekniska högskola, riktas ett varmt tack.

Göteborg i april 1978

Kjell Mattiasson Lennart Ågårdh

BETECKNINGAR

Följande beteckningar har använts i denna rapport. Alla beteckningar definieras där de först uppträder. Sådana beteckningar som endast används där de definieras listas ej här. Sidhänvisningar avser avsnitt där beteckningar definieras eller ett tidigare ej använt index uppträder. Index etc listas separat. "X" avser normaliserad variabel, " \bar{X} " absolut variabel, " \bar{X}_0 " referensnivån. Beteckningar i listan avser normaliserade variabler, referensnivåer anges även.

Versaler

A	tvärsnittsarea, $\bar{A}_0 = \bar{b}_0 \bar{h}_0$, sid 30
C	linjär transformation, sid 26
E	elasticitetsmodul, \bar{E}_0 vald referensnivå, sid 30
F	styvhetssamband, sid 14
I	tröghetsmoment $\bar{I}_0 = \bar{b}_0 \bar{h}_0^3$, sid 30
L	elementlängd, $\bar{L}_0 =$ vald referenslängd, sid 14
M	böjande moment, $\bar{M}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{b}_0 \bar{h}_0$, sid 14
O	origo
P	knutlast i strukturen, sid 19
Q	elementlast i elementändar, moment i y'-riktningen, $\bar{Q}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{b}_0 \bar{h}_0$, sid 17
R	residualvektor, sid 22
S	antal tal som lagras i datorn, sid 26
T	linjär transformation från lokalt till globalt koordinatsystem, sid 17
U	elementlast, kraft i x'-riktningen, sid 17
V	elementlast, kraft i z'-riktningen, sid 17

Gemena

c	koefficient i krökningspolynomet, sid 46, cos sid 16
d	koefficient i axialkraftspolynomet, sid 30
f	flexibilitetssamband, sid 14
h	tvärsnittshöjd, \bar{h}_0 = vald referens, sid 48
m	ändvinkel, $\bar{m}_0 = \bar{\kappa}_0 \bar{L}_0$, sid 14
p	strukturförskjutningsvektor, knutförskjutningar, sid 19
s	sin, sid 16
u	elementändförskjutning, $\bar{u}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0$, sid 15
v	elementändförskjutning, $\bar{v}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0$, sid 15
x,y,z	koordinater

Index

e	element, f_e = flexibilitetssamband för element, sid 14
eg	elementets globala styvhetsmatris, F_{eg} , sid 19
i j k	summationsindex, sid 21, 46
s	strukturens styvhetsmatris F_s^{tan} , sid 19
T	tyngdpunktsnivån, ϵ_T , sid 46
ϵ	linjär del av elementets globala styvhetsmatris F_ϵ , sid 19
σ	olinjär del av elementets globala styvhetsmatris F_σ , sid 18
0	referensnivå, \bar{A}_0 , sid 48
1,2	elementändar, M_1, M_2 , sid 14
1,2,3	komponenter i globala last och förskjutningsvektorer P_1, P_2, P_3 , sid 19

Superfix

k	iterationssteg, p_i^k , sid 22
t	transponering, sid 15

tan	tangentflexibilitet, F_e^{tan} , sid 14
sek	sekantstyvhetsfunktion F_s^{sek} , sid 21
'	deriveringssymbol, c', sid 46

Grekiska

α	elementkordørs lutning i globala systemet, sid 15
δ	felgräns, sid 22
Δ	betecknar tillskott, ΔQ , sid 14
ϵ	töjning, sid 46
κ	krökning, sid 30
σ	spänning, sid 48

Specialtecken

[]	vektor, matris, sid 14
\bar{A}	betecknar absolutvariabel

Enheter

Exempel i denna rapport har redovisats i dimensionslös form. För övrigt har SI-systemet använts.

1 INLEDNING

Bakgrund

Projektet startade 1966 vid institutionen för byggnadsstatik, Chalmers tekniska högskola, under ledning av prof A Samuelsson. År 1968 publicerades licentiatavhandlingen, Ågårdh: "Analysis of non-linear beams", där egenskaper hos olinjärt elastiska balkar utan axialkraft beskrevs analytiskt. År 1969 erhöles anslag från BFR för att inkludera axialkrafter i analysen och utvidga till ramar. I publikationen, Bäcklund, Ågårdh: "Finit elementmetod för elasto-plastiska balkar och ramar med stora förskjutningar", 1973, presenterades beräkningsmetod och datorprogram med numeriskt beräknade elementstyheter och elementdeformationer. År 1974 publicerades, Mattiasson, Ågårdh: "Analytical moment-curvature-axial force diagrams for simply symmetric cross-sections of strain-hardening materials", som beskrev en metod att analytiskt beräkna den olinjärt elastiska balklamellens deformationer under inverkan av moment och axialkraft. Resultaten utnyttjades i ett analytiskt beskrivet balkpelarelement, som presenterades i doktorsavhandlingen, Ågårdh: "Analytical and numerical analyses of nonlinear beam elements", 1974. Ett experimentellt arbete inom projektet i form av ett utvidgat examensarbete vid CTH av Pettersson, Runesson: "Böj försök på axiellt och transversellt belastade aluminiumbalkar", utgavs 1975. År 1976 publicerades den första rapporten (R 44:1976) i BFR:s rapportserie, där metoder för beräkning av ett olinjärt elastiskt balkpelarelements styvhetsmatris studeras.

1.1 Rapportens omfattning

I den föreliggande rapporten behandlas en beräkningsmetod för olinjärt elastiska balkar och ramar med stora förskjutningar. Med "olinjärt elastiskt" avses att sambanden mellan krafter och förskjutningar är olinjära och reversibla. Metodiken ger således nog-

granna resultat i sådana fall där avlastningseffekten ej har dominerande inverkan (proportionellt växande laster) och goda uppskattningar på säkra sidan av bärverkets styvhet i övriga fall. Ett datorprogram, som har utvecklats, beskrivs ingående. Programmet finns tillgängligt på Göteborgs datacentral (GD). De viktigaste förutsättningarna för metodens användning är följande:

Balkpelarlementen måste uppfylla de i del 1 angivna förutsättningarna. Denna analys bygger på den tekniska balkteorin med olinjärt samband mellan spänningar och töjningar. Skjuvdeformationer försummas och instabilitetsfenomen (knäckning, kantring) inom elementen behandlas ej.

Den plana strukturen antas vara sammansatt av element, böjstvt förenade i knutar där lasterna angriper och strukturens förskjutningar mäts. Strukturens geometri uppdateras efterhand som knutförskjutningarna förändras. Strukturens ursprungliga geometri lagras ej. (Se kapitel 2.) Datorprogrammet och beräkningsflödet beskrivs i kapitel 3. Resultat av beräkningar och jämförelse med analysmetoder som bygger på numeriskt beräknade elementstyvheter redovisas i kapitel 4. In-databeskrivning till datorprogrammet ges i kapitel 5.

1.2. Användningsområde

Den presenterade metoden kan användas för beräkning av plana balkar, bågar och ramar. Konstruktionsmaterial bör vara stål, aluminiumlegeringar eller dylika material med långt utbrett töjhärtningsområde. Särskilt ekonomiskt fördelaktig i förhållande till metoder med numeriskt beräknade elementstyvheter blir den här föreslagna metoden för strukturer med ett stort antal obekanta, eller där många lastfall skall behandlas. Det bör även framhållas att den analytiska behandlingen ej ger upphov till okontrollerade trunkeringsfel, som kan störa konvergensförhållanden för strukturer

med ett stort antal obekanta. Även för sådana fall där ett begränsat kärnminnesutrymme är tillgängligt kan denna metod visa sig vara överlägsen, då beräkningen av elementens last-deformationssamband kan göras i en separat beräkningsomgång före strukturberäkningen. Genom att den analytiska beräkningen av elementens styvhetsmatris är snabbare än motsvarande numeriska metoder kan ett relativt sett större antal element användas, vilket motiverar försummande av tillskottsmomenten p g a axialkraften respektive böjningens bidrag till den axiella deformationen. Elementens styvhetsmatriser bibehåller härvid sin symmetri.

1.3 Litteratur

Under 50- och 60-talen utvecklades "flytledsteorin" för analys av plana ramar av olinjärt elastiskt material. I denna förenklade teori antas plasticeringen vara koncentrerad till s k flytleder. Materialet antas normalt vara elastiskt - idealplastiskt. Under senare år har emellertid mer förfinade varianter av metoden utvecklats, i vilka ytterligare effekter kan beaktas, såsom deformationshårdnande hos materialet, axial- och tvärkrafternas inverkan på flytmomentet och inverkan av geometrins förändring under belastningsförloppet. (Se till exempel Sawko och Wilde (1969) och Cohn och Rafay (1974, 1977)).

Med finita elementmetoden har man emellertid fått ett verktyg att mera realistiskt beskriva olinjära bärverks uppträdande. Wilson (1960) och Goldberg och Rickard (1963, 1965) var några av de första uppsatserna som behandlade analys av materiellt olinjära ramar med indelning av bärverket i finita element.

Wilson (1960) härledde en tangentflexibilitetsmatris för ett balkelement med tre frihetsgrader utgående från en approximation av moment - krökningssambandet med ett "Ramberg-Osgoodpolynom". Wilsons formulering var enbart inkrementell, vilket innebar, att lösningen skedde med linjär metod i flera steg.

Goldberg och Rickard (1963, 1965) ställde upp tangentstyvhetsmatrisen för ett element med två frihetsgrader, dvs inverkan av axialkraften försumrades helt. Ändrotation-ändmomentsambanden approximerades med ett uttryck motsvarande ett inverterat Ramberg-Osgoodpolynom. Den olinjära delen av ändrotationen betraktades som koncentrerad till elementändan. Goldberg och Rickard liksom Wilson behandlade enbart geometriskt linjära plana ramar.

Hays och Matlock (1973) presenterade en metod, där hänsyn togs till olinjära effekter i såväl material-samband som geometriska samband. Moment och normalkraft beräknades med numerisk integration över tvärsnittet och interpolation i en tabell med spänningstöjningsvärden. En enkel modell för balkelementet användes bestående av en axialkraftsupptagande och två momentupptagande fjädrar mellan stela delar. Den enkla balkmodellen innebar att ett stort antal element bör användas för att simulera varje ramdel med acceptabel noggrannhet.

Bäcklund och Ågårdh (1973) härledde elementens kraft-förskjutningssamband på flexibilitetsform med linjär momentfördelning längs elementet. Integrationer över tvärsnittet och längs elementet skedde numeriskt. Hänsyn till stora förskjutningar togs genom uppdatering av nodkoordinaterna och olinjära kraft- och förskjutningstransformationer.

I Blaauwendraad (1972) och Åldstedt (1975) härleddes elementstyvhetsmatriserna utgående från ansatta transversella och axiella förskjutningsfält. Även den geometriska olinjäriteten inom elementet beaktades. Integrationer i axiell och transversell led skedde numeriskt. Blaauwendraad beskrev också ett alternativt sätt att härleda elementstyvhetsmatrisen med hjälp av finit differensmetod. Hays och Matlock, Bäcklund och Ågårdh liksom Blaauwendraad och Åldstedt har använt Newton-Raphsons iterativa lösningsmetod.

Gunnin, Rad and Furlong (1977), liksom Wilson (1960) utnyttjade ett Ramberg-Osgoodpolynom för att beskriva moment-krökningssambandet. Inverkan av normalkraften på detta samband beaktades dock på ett mer realistiskt sätt av Gunnin, Rad and Furlong genom att flera parametrar gjordes normalkraftsberoende. Däremot försumades böjmomentets inverkan på den axiella töjningen. För varje lastinkrement skedde beräkningen i två iterationsloopar, den ena innehållande den andra. I den inre loopen beräknades initialtöjningarna enligt initialtöjningsmetoden under det att geometrin hölls konstant. I den yttre iterationsloopen beräknades förskjutningarna med Newton-Raphsons metod medan initialtöjningarna hölls konstanta. Elementens och strukturens tangentstyvhetsmatriser ställdes aldrig upp utan de linjärelastiska styvhetsmatriserna användes genom hela beräkningen.

I Ersvik (1978) härleddes ekvationer för lösning av balkpelarelementets styvhetsmatris med differensmetod. Sambanden inkluderade 2:a ordningens effekter inom elementet, varvid en inre iterationsloop för varje element måste genomföras. Strukturanalysen medger beaktande av initialimperfektioner och initialalexcentriciteter. Metoder anvisas för lösning av ekvationssystem i avsikt att följa den nedåtgående grenen i lastförskjutningsdiagrammet.

2. STRUKTURANALYS

2.1 Allmänt

I detta kapitel redovisas strukturanalysen av balkar och ramar. Analysen genomförs med hänsyn till materiell olinjäritet enligt Ågårdh del 1 (1976) och med hänsyn till strukturgeometrins förändring enligt Bäcklund Ågårdh (1973). På grund av problemets olinjära natur beräknas förskjutningstillståndet hörande till ett visst lasttillstånd, genom att stegvis öka lasten och uppdatera såväl bärverksgeometri som elementens styvheter i varje laststeg. Beräkningarna itereras inom varje laststeg till dess att knutarnas jämvikt är uppfylld. Härledningarna genomförs i dimensionsberoende form, referensnivåer för dimensionslös beräkning diskuteras i del 1 och i Appendix II.

2.2 Förutsättningar och antaganden

Följande förutsättningar gäller elementanalysen:

- Tekniska balkteorin med olinjärt spännings-töjnings-samband förutsätts gälla.
- Balkelementen är isotropa, prismatiska och initieellt raka. Tvärsnitten är enkel- eller dubbelsymmetriska.
- Skjuvdeformationer försummas. Lokala instabilitetsfenomen beaktas ej.
- Töjningar och utböjningar inom elementet antas vara små så att axialkraftens bidrag till momentet och böj deformationernas bidrag till den axiella förskjutningen kan försummas.
- Elementanalysen bygger på antaganden om linjär momentvariation och konstant axialkraft inom elementet.

Följande förutsättningar gäller strukturanalysen:

- Den plana strukturen indelas i element, som är böjstyvt förenade i knutar.
- Lasterna verkar i strukturens plan och angriper i knutarna.

2.3. Materiell olinjaritet

I analysen av balkar och ramar tas hänsyn till materialets gradvisa plasticering vid belastning över proportionalitetsgransen. Detta görs genom att flexibilitetssamband för balkelementen baseras på analytiska uttryck, som anpassas till materialets spännings-töjningssamband. Detta leder till uttryck enligt ekv (2.1), se fig 2.1.

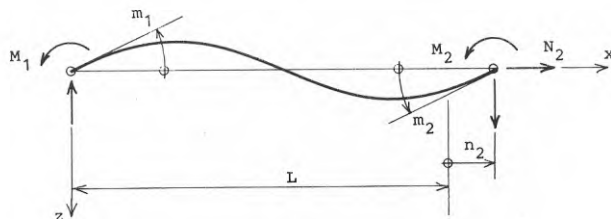


FIG. 2.1. Balkelement med elementvariabler

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{e1}(M_1, M_2, N_2) \\ f_{e2}(M_1, M_2, N_2) \\ f_{e3}(M_1, M_2, N_2) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Differentiering av "sekantflexibiliteten" i ekv (2.1) ger "tangentialflexibiliteten" i ekv (2.2)

$$\begin{bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_{e1}/\partial M_1 & \partial f_{e1}/\partial M_2 & \partial f_{e1}/\partial N_2 \\ \partial f_{e2}/\partial M_1 & \partial f_{e2}/\partial M_2 & \partial f_{e2}/\partial N_2 \\ \partial f_{e3}/\partial M_1 & \partial f_{e3}/\partial M_2 & \partial f_{e3}/\partial N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_1 \\ \Delta M_2 \\ \Delta N_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

"Tangentialflexibilitetsmatrisen" i ekv (2.2) gäller i en omgivning av "punkten" (M_1, M_2, N_2) och ger där ett linjärt samband mellan tillskott i elementkrafter och tillskott i elementdeformationer. Elementen i matriserna i ekv (2.1) och (2.2) för det val av funktioner f_{ej} som träffats i del 1 ges i APPENDIX 1. Efter invertering av matrisen i ekv (2.2) fås elementets "tangentialstyvhetmatris" F_e^{tan} , som kan sägas utgöra resultatet av elementanalysen.

$$\Delta N_e = F_e^{\text{tan}} \Delta n_e \quad (2.3)$$

2.4 Geometrisk olinjaritet

Inverkan av geometrins förändring beaktas i strukturanalysen genom en stegvis pålastning och uppdatering av geometrins mellan varje laststeg. Däremot beaktas ej tillaggsmomenten inom elementet på grund av axialkraften och elementets längdändring på grund av böjning. Dessa effekter kan försummas vid en tillräckligt fin elementindelning.

I detta avsnitt härleds koordinattransformationer mellan elementorienterade och strukturorienterade variabler i enlighet med Bäcklund, Ågårdh (1973). Se även Jennings (1968), Powell (1969) och Oran (1973).

Efter ett antal laststeg har elementet i fig 2.2 med ursprunglig längd L_0 och ursprunglig lutning α_0 deformerats med q och roterat vinkeln $\alpha - \alpha_0$ där

$$q = [q_1, q_2, u_1, u_2, w_1, w_2]^t \quad (2.4)$$

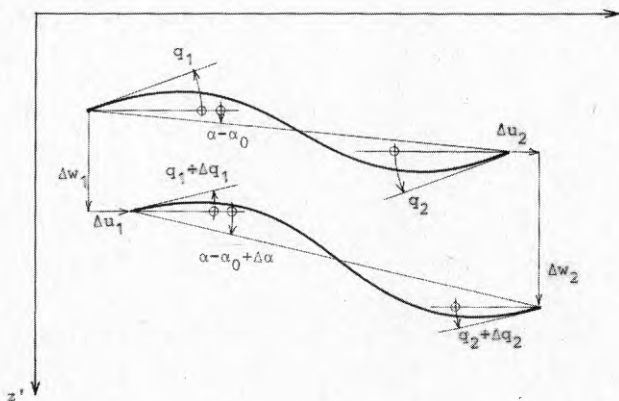


FIG. 2.2 Elementdeformationer

Elementdeformationerna n_e i det lokala systemet kan då uttryckas:

$$m_1 = q_1 + \alpha - \alpha_0 \quad (2.5)$$

$$\dot{m}_2 = q_2 + \alpha - \alpha_0 \quad (2.6)$$

$$n_2 = L - L_0 \quad (2.7)$$

Kordans rotation och balkaxelns förlängning kan uttryckas i knutkoordinater och komponenter i q . Inför beteckningarna

$$x'_{21} = x'_2 - x'_1$$

$$z'_{21} = z'_2 - z'_1$$

$$u_{21} = u_2 - u_1 \quad \text{etc}$$

Därmed fås

$$L_0 = ((x'_{21})^2 + (z'_{21})^2)^{1/2} \quad (2.8)$$

$$L = ((x'_{21} + u_{21})^2 + (z'_{21} + w_{21})^2)^{1/2} \quad (2.9)$$

$$s = \sin \alpha = (z'_{21} + w_{21})/L, \quad \sin \alpha_0 = z'_{21}/L_0 \quad (2.10)$$

$$c = \cos \alpha = (x'_{21} + u_{21})/L, \quad \cos \alpha_0 = x'_{21}/L_0$$

varvid

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \alpha_0) &= \sin \alpha \cos \alpha_0 - \cos \alpha \sin \alpha_0 = \\ &= (x'_{21} w_{21} - z'_{21} u_{21})/LL_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Tillskotten till lokala elementdeformationer Δn_e kan uttryckas i Δq genom differentiering av ekv (2.5) - (2.7) med utnyttjande av ekv (2.8) - (2.11).

$$\Delta m_1 = \Delta q_1 + \Delta \alpha \quad (2.12)$$

$$\Delta m_2 = \Delta q_2 + \Delta \alpha \quad (2.13)$$

$$\Delta n_2 = \Delta L \quad (2.14)$$

Här är (genom differentiering av (2.9) och 2.11))

$$\begin{aligned} \Delta L &= ((x'_{21} + u_{21})\Delta u_{21} + (z'_{21} + w_{21})\Delta w_{21})/L = \\ &= c \Delta u_{21} + s \Delta w_{21} \end{aligned} \quad (2.15)$$

och

$$\Delta \alpha = (c \Delta w_{21} - s \Delta u_{21})/L \quad (2.16)$$

Insättning i ekv (2.12) - (2.14) ger

$$\Delta n_e = T \Delta q \quad (2.17)$$

$$\text{där } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s/L & -s/L & -c/L & c/L \\ 0 & 1 & s/L & -s/L & -c/L & c/L \\ 0 & 0 & -c & c & -s & s \end{bmatrix}$$

Elementkrafter i de båda systemen framgår av fig 2.3.

$$Q = [Q_1 \ Q_2 \ U_1 \ U_2 \ W_1 \ W_2]^t \quad (2.18)$$

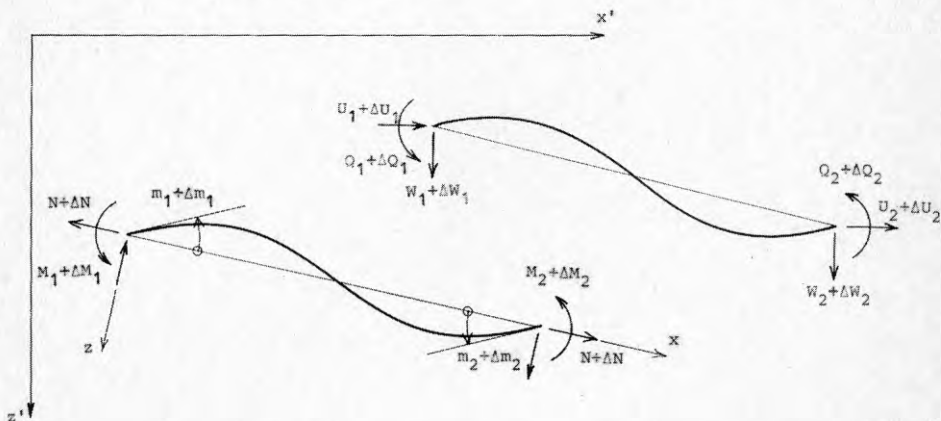


FIG. 2.3 Elementkrafter

Jämviktsekvationer för elementändar ger elementkrafterna i det globala systemet, uttryckta i elementkrafter i det lokala systemet

$$Q = T^t N_e \quad (2.19)$$

För tillskotten i elementkrafter fås sambanden efter differentiering av ekv (2.19)

$$\Delta Q = \Delta T^t N_e + T^t \Delta N_e \quad (2.20)$$

För differentiering av T^t bildas

$$\Delta s = (c^2 \Delta w_{21} - cs \Delta u_{21})/L \quad (2.21)$$

$$\Delta c = (s^2 \Delta u_{21} - cs \Delta w_{21})/L \quad (2.22)$$

$$\Delta(s/L) = ((c^2 - s^2) \Delta w_{21} - 2sc \Delta u_{21})/L^2 \quad (2.23)$$

$$\Delta(c/L) = ((s^2 - c^2) \Delta u_{21} - 2sc \Delta w_{21})/L^2 \quad (2.24)$$

varvid

$$\Delta Q_\sigma \doteq \Delta T^t N_e = F_\sigma \Delta q \quad (2.25)$$

med

$$F_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\sigma 1} & -F_{\sigma 1} & -F_{\sigma 2} & F_{\sigma 2} \\ 0 & 0 & -F_{\sigma 1} & F_{\sigma 1} & F_{\sigma 2} & -F_{\sigma 2} \\ 0 & 0 & -F_{\sigma 2} & F_{\sigma 2} & F_{\sigma 3} & -F_{\sigma 3} \\ 0 & 0 & F_{\sigma 2} & -F_{\sigma 2} & -F_{\sigma 3} & F_{\sigma 3} \end{bmatrix}$$

$$F_{\sigma 1} = 2 sc(M_1 + M_2)/L^2 + s^2 N_2/L$$

$$F_{\sigma 2} = (c^2 - s^2)(M_1 + M_2)/L^2 + sc N_2/L$$

$$F_{\sigma 3} = 2 sc(M_1 + M_2)/L^2 + c^2 N_2/L$$

är ett (symmetriskt) bidrag till elementens styvhets-

matris, som är karaktäristiskt för analys av geometriskt olinjära problem. Elementens styvhetsmatris fås efter sammanfattning av ekv (2.20), (2.3) och (2.17). Se även diagram på sid 20.

$$\Delta Q - \Delta T^t N_e = T^t F_e^{\tan} T \Delta q \quad (2.26)$$

Ur ekv (2.25) fås slutligen

$$\Delta Q = F_\epsilon \Delta q + F_\sigma \Delta q = F_{eg}^{\tan} \Delta q \quad (2.27)$$

där den symmetriska F_{eg}^{\tan} är sammansatt av en del F_ϵ som uppkommer av tillskotten till elementkrafterna och en del F_σ som uppkommer på grund av den förändrade geometris inverkan på elementkrafterna.

Efter sammansättning av de enskilda bidragen från varje balkelement till den globala strukturstyvhetsmatrisen F_s^{\tan} kan ekvationssystemet

$$\Delta P = F_s^{\tan} \Delta p \quad (2.28)$$

lösas för ett lastinkrement ΔP där P och p är knutlaster respektive knutförskjutningar, se fig 2.4.

$$P = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots]^t$$

$$p = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots]^t$$

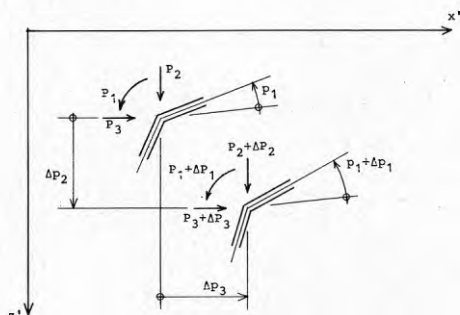


FIG. 2.4 Strukturvariabler i det globala systemet $O'x'z'$

Beräkning av förskjutningsfältet p svarande mot lastvektorn P sker genom addition av de beräknade tillskotten Δp .

Vid uppdatering av geometri och elementlaster kan ekv (2.5) - (2.11) utnyttjas med $q_j = q_i + \Sigma \Delta q$. Härvid måste bärverkets ursprungliga geometri lagras vid sidan om det aktuella förskjutningstillståndet. Detta kan undvikas om ekvationerna (2.12) - (2.16) utnyttjas och $N_e = \Sigma \Delta N_e$ med

$$\Delta L = c \Delta u_{21} + s \Delta w_{21} - L(1 - \cos \Delta \alpha) \quad (2.29)$$

där s och c beräknas enligt ekv (2.10) från den uppdaterade bärverksgeometrin. Korrektionen i ekv (2.29) motiveras av att axialstyvhetera är mycket större än böjstyvhetera. Den sista termen i ekv (2.29) förklaras av att balkänden beskriver en cirkelbåge, medan man i små förskjutningars teori, som representeras av de två första termerna, räknar med normalen mot balkkordan. Se Bäcklund, Ågårdh (1973).

Ekvationerna (2.2) - (2.29) kan sammanfattas i diagramform. Jämför del 1 sid 68. Den globala strukturstyvhetsmatrisen F_s^{tan} fås genom successiva additioner av matriselementen i F_{eg}^{tan} in i positioner i F_s^{tan} bestämda av hur strukturen är sammansatt.

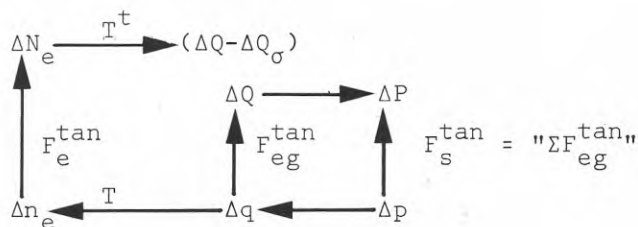


FIG. 2.5 Diagram över strukturanalysen

2.5 Beräkningsgång allmänt

Lösning av olinjära ekvationssystem sker efter någon av följande metoder: iterationsmetoden, stegmetoden och kombinationer av dessa. För enbart stegmetoder gäller allmänt att beräkningsvolymen blir omfattande vid krav på god noggrannhet i resultatet. Vid analys av olinjära ekvationssystem representerande last-förskjutningssamband i derformerbara kroppar är stegmetoder fördelaktiga, emedan varje dellösning representerar en punkt på förskjutningskurvan. Antalet beräkningssteg kan begränsas genom att göra iterationer inom valda belastningssteg för att minska residualvektorn.

I föreliggande lösningsmetodik används **stegmetod** kombinerad med iterationer för att tillfredsställa knutjämvikten, se Bäcklund, Ågårdh (1973). För mera ingående studier av dessa metoder hänvisas till Bergan (1972).

Ekvationssystemet som skall lösas har i princip formen

$$P = F_S^{\text{sek}}(p) \quad (2.30)$$

där P och p representerar ett n -dimensionellt kraft- respektive förskjutningsfält. Differentiering ger formellt:

$$\Delta P = F_S^{\text{tan}}(p)\Delta p \quad (2.31)$$

Lösningsgången blir således i princip vid i :te belastningssteget

$$\Delta P_i = F_S^{\text{tan}}(p_{i-1})\Delta p \quad (2.32)$$

där

$$P_i^k = P_{i-1} + \sum_{j=1}^k \Delta P_j \quad (2.33)$$

En residualkraft R kan beräknas ur skillnaden mellan knutlaster P_i och summa elementkrafter ΣQ i knuten vid förskjutningen p_i ($k=1$), vilket kan uttryckas formellt:

$$R = P_i - \Sigma Q \quad (2.34)$$

Residualvektorn R kan introduceras i vänsterledet i ekv (2.32) vilket ger en ny lösningsvektor Δp , som adderas till p_i^k i ekv (2.33) ($k=2$)

$$R = F_s^{\tan}(p_{i-1})\Delta p \quad (2.35)$$

Detta upprepas till dess att $\|\Delta p_k\| < \delta$, $\delta > 0$. Det är således möjligt att efter vissa laststeg göra ett antal iterationer för att få acceptabel noggrannhet utan att välja alltför små laststeg.

I fig 2.6 visas för ett problem med en frihetsgrad hur steg- och iterationsmetoden kan kombineras.

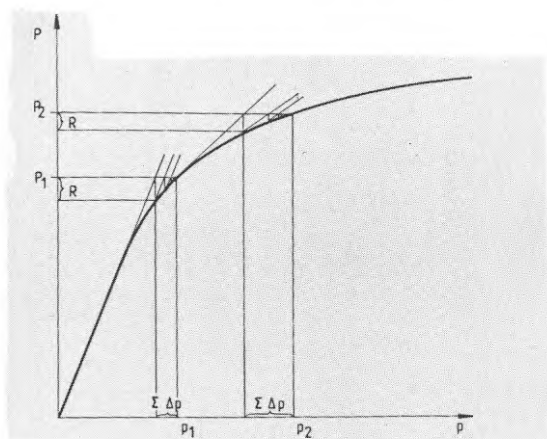


FIG. 2.6 Steg- och iterationsteknik vid endimensionellt problem

Den samma lastförskjutningskurvan avviker obetydligt från den beräknade på grund av att jämviktstillståndet vid slutet av varje iteration baseras på geometrin vid föregående laststeg. Genom att välja $k=1$ och använda små laststeg övergår metoden i ren stegmetod. Slutligen kan bärverksgeometrin uppdateras i varje iterationssteg, varvid små förskjutningars teori kan användas vid uppställning av elementen deformationer, jämför sid 20.

Den beskrivna beräkningsgången kan sammanfattas i diagrammet i fig 2.7.

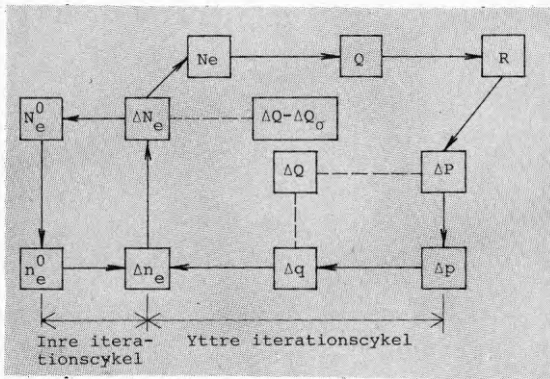


FIG. 2.7 Diagram över beräkningsgången

3. DATORPROGRAM

3.1. Allmänt

Ett datorprogram benämmt BM-FEM för analys av olinjärt elastiska ramar med stora förskjutningar, baserat på balkelementet beskrivet i del 1, har utvecklats utgående från programmet B-FEM, se Bäcklund, Ågårdh (1973).

BM-FEM är skrivet i FORTRAN. Beräkningarna görs i dubbel precision, vilket ger ca 15 signifikanta siffror. All lagring av tal sker i datorns kärnminne. För beräkning av ramar med 100 element krävs i datorn IBM 360/65 en kärnminnesarea av cirka 168 K bytes.

För BM-FEM liksom B-FEM gäller den begränsningen att ramar med mer än två anslutande element i någon knut ej kan behandlas. I B-FEM beräknas elementstyvheter och elementdeformationer numeriskt. Programmet har använts för att göra jämförande beräkningar till exemplen i kap 4.

3.2. Flödesschema

I fig 3.1 visas ett flödesschema över beräkningarna i programmet BM-FEM.

3.3. Kort beskrivning av beräkningsmetoden med numerisk elementbehandling enligt programmet B-FEM

Eftersom den i denna rapport redovisade beräkningsmetoden med analytiskt beskrivna elementegenskaper ur olika synpunkter skall jämföras med en metod med numerisk elementbehandling, följer här en kort beskrivning av programmet B-FEM, som arbetar enligt denna senare metod. Transformationsdiagrammet i fig 3.2 åskådliggör beräkningarna vid etablerandet av elementets tangentstyvhetsmatris.

Materialsamband ges i indata i form av punkter på spännings-töjningsdiagrammen. Maximalt två olika material tillåts i denna programversion. Spänningen och materialets tangentmodul vid en viss töjning beräknas

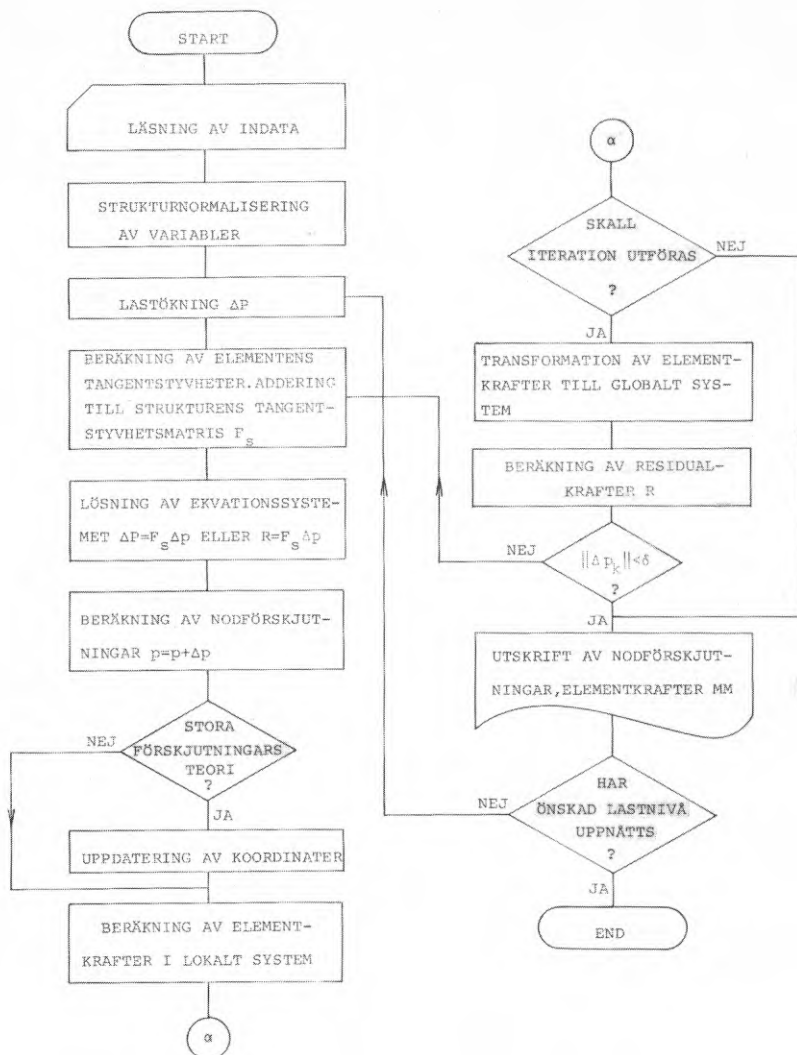


FIG. 3.1. Flödesschema över beräkningarna i programmet BM-FEM

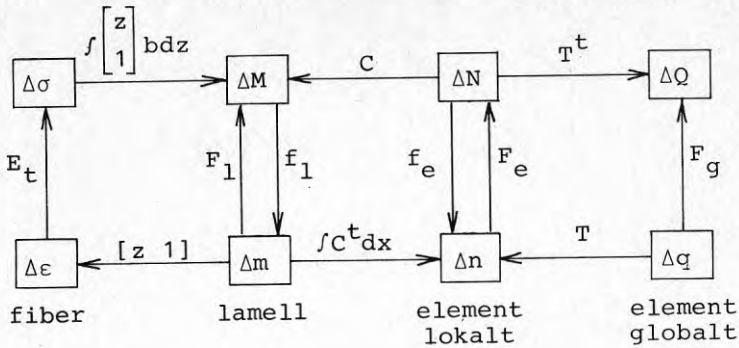


FIG. 3.2. Transformationsdiagram över elementets variabler vid numerisk elementbehandling (B-FEM)

genom rätlinjig interpolation i tabellen med spännings-töjningsvärden.

Integraler över tvärsnittet och längs elementet beräknas numeriskt. Antalet integrationspunkter över tvärsnittet är 10 och längs elementet 3. Tvärsnitten indelas i delrektanglar (fibrer). Data om geometrin för varje fiber i varje tvärsnittstyp måste lagras i datorn. Dessutom lagras tilläggstöjningar och totala töjningar för samtliga fibrer.

Fördelarna med metoden med numerisk elementbehandling är framför allt att spännings-töjningsdiagrammet kan ha godtyckligt utseende, tvärsnitten kan ha godtycklig enkelsymmetrisk form, samt att tvärsnitten kan vara sammansatta av två material, exempelvis armerad betong.

En utvidgad version av B-FEM har utvecklats och finns beskriven i Bäcklund, Tägnfors (1975). Här behandlas även ramar med mer än två element anknutande till samma knut.

3.4. Platsbehov i datorns kärnminne

Det antal tal S , som lagras i datorn i programmen BM-FEM respektive B-FEM kan uttryckas i nedanstående formler

$$\text{BM-FEM: } S_{\text{BM}} \approx 58 \cdot e1 + 27 \cdot st + 4 \cdot pr + 105 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \text{B-FEM: } S_B \approx & 75 \cdot \text{el} + 6 \cdot \text{el} \cdot r + 4 \cdot \text{tv} \cdot r + 4 \cdot r + \\ & + 2 \cdot \text{sig} + 4 \cdot \text{pr} + 105 \end{aligned} \quad (3.2)$$

där

el = antal element

pr = antal föreskrivna förskjutningar

st = antal styvhetstyper

tv = antal tvärsnittstyper

r = antal delrektanglar som tvärsnitten indelas i

sig = antal inlästa spänningsvärden

Antalet lagrade tal S som funktion av antalet element redovisas grafiskt i fig 3.3 för ett exempel.

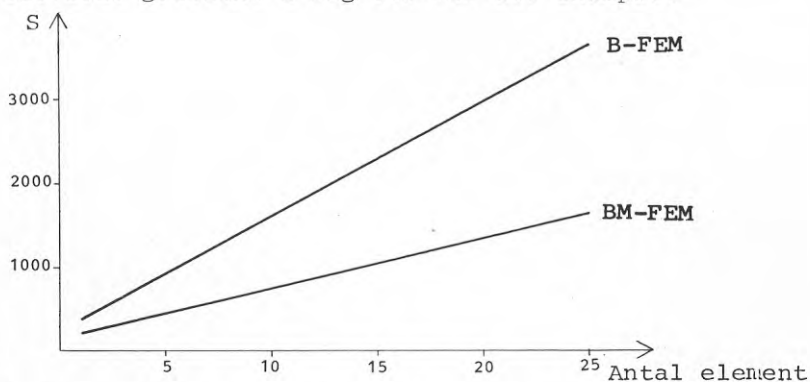


FIG. 3.3. Antalet lagrade tal som funktion av antalet element för ett exempel med $st = tv = 1$, $pr = 6$, $r = 10$ och $sig = 20$

Av fig 3.3 framgår att platsbehovet i datorns kärnminne för lagring av tal är drygt dubbelt så stort för B-FEM som för BM-FEM. (Man ser att $S_B/S_{BM} \approx (75+6r)/58$ för ett stort antal element.) Även själva programmet B-FEM är större, 1370 programrader mot 890 för BM-FEM.

3.5. Felkällor

De väsentligaste approximationerna i elementanalysen i programmet B-FEM är följande:

- 1^o Försummande av axialkraftens bidrag till balkmomentet samt böjningens bidrag till axiella deformationer.

- 2° Integration längs elementet
(tre integrationspunkter)
- 3° Integration över tvärsnitten
(cirka tio integrationspunkter)
- 4° Interpolation i tabellen med spännings-
töjningsvärden
- 5° Avrundningsfel

Felkällan under punkt 2° ovan är normalt den dominerande. Felets storlek är beroende av faktorer som elementets längd, krökningens storlek och moment-krökningskurvans utseende. Speciellt för material med liten töjhårdning kan felet bli betydande. En ökning av antalet integrationspunkter reducerar felet, men medför å andra sidan en avsevärd ökning av beräkningstiden och lagringsbehovet i datorn. Både felet under punkt 1° och 2° kan minskas genom att göra elementindelningen finare (vilket ökar platsbehovet i kärnminnet).

Betydelsen av felkällorna under punkterna 3° och 4° har analyserats av Ågårdh (1974). Felens storlek är beroende av antalet integrationspunkter respektive interpolationsstegens storlek, men är normalt små jämförda med felet enligt punkt 2°.

I elementanalysen i BM-FEM förekommer två felkällor av betydelse:

- 1° Försummande av axialkraftens bidrag till balkmomentet samt böjningens bidrag till axialdeformationer.
- 2° Fel på grund av idealisering av det analytiska moment-krökningssambandet
- 3° Avrundningsfel

Storleken på felet under punkt 2° är beroende av hur väl man lyckas anpassa det analytiska uttrycket till de verkliga moment-krökningsskurvorna. Avrundningsfelet ger sig till känna först vid ett stort antal element, säg $n > 500$. Vid ett så stort antal element är detta fel av betydelse även vid linjär analys. Vid numerisk

beräkning av olinjära problem torde dessa fel vara större än vid analytiska beräkningar av olinjära strukturer enligt här föreslagen metod. Storleken av felen under 1° kan göras godtyckligt litet med en fin elementindelning. Lagringsbehovet ökar mindre vid den analytiska beräkningen av styvhetssambanden jämfört med motsvarande numeriska beräkningsmetod enligt ekv (3.1) och (3.2). Ökningen i beräkningstid domineras av ekvationssystemlösningens ökade tidsåtgång.

4. EXEMPEL

4.1. Allmänt

I detta kapitel skall resultaten från tre olika exempel redovisas. I de första två exemplen är en konsolbalk av aluminium beräknad för två olika lastfall. Det tredje exemplet utgörs av en portalram av stål.

Samtliga exempel är beräknade både med programmet BM-FEM och B-FEM (se kap 3). Avsikten har i första hand varit att göra jämförelser beträffande beräkningsnoggrannhet och beräkningstid mellan metoderna med analytiskt respektive numeriskt beräknade elementstyhveter och deformationer. Resultat betecknade "ANALYTISK" är erhållna med programmet BM-FEM, "NUMERISK" med B-FEM.

4.2. Konsolbalk av aluminium med transversell last

Konsolbalken i fig 4.1 har beräknats med en indelning i 1, 5 och 10 element. Tvärsnittet är rektangulärt och materialet är en aluminiumlegering betecknad CIII-1 i Baehre, Bröchner, Sjölund (1965). (Se även del 1.)

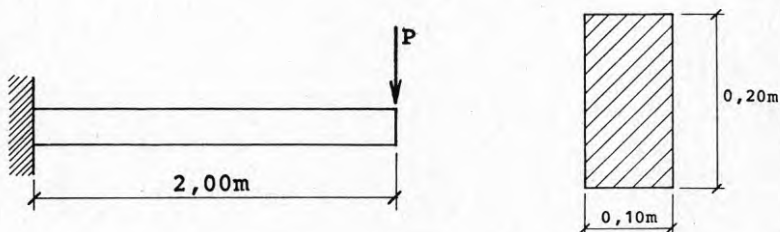


FIG. 4.1. Transversellt belastad konsolbalk av aluminium med rektangulärt tvärsnitt

Ett analytiskt uttryck på moment-krökningssambandet har bestämts med metoder enligt del 1. Krökningspolynom i dimensionslös form kan skrivas som

$$\kappa = \frac{M}{EI} \sum_{i=0}^4 d_{1i} \left(\frac{N}{EA}\right)^i + \left(\frac{M}{EI}\right)^3 \sum_{i=0}^4 d_{2i} \left(\frac{N}{EA}\right)^i + \left(\frac{M}{EI}\right)^7 \sum_{i=0}^4 d_{3i} \left(\frac{N}{EA}\right)^i \quad (4.1)$$

med koefficienterna

$$\begin{aligned} d_{10} &= 1 & d_{11} &= 0 & d_{12} &= 0 & d_{13} &= 0 & d_{14} &= 0 \\ d_{20} &= -0.03922 & d_{21} &= 0 & d_{22} &= 2.8311 & d_{23} &= 0 & d_{24} &= 3.4869 \\ d_{30} &= 0.1203 & d_{31} &= 0 & d_{32} &= 0.0594 & d_{33} &= 0 & d_{34} &= -0.5602 \end{aligned}$$

I fig 4.2 och 4.3 visas resultat av beräkningar med BM-FEM respektive B-FEM för olika elementindelningar.

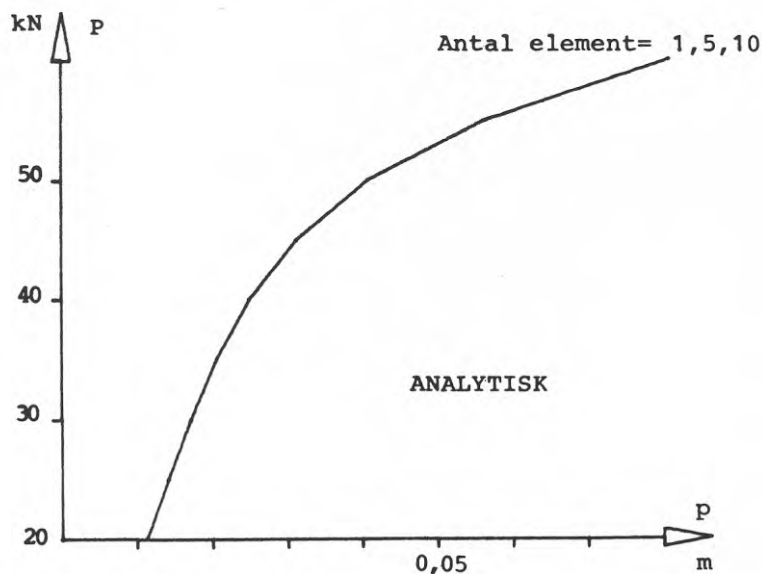


FIG. 4.2. Samband mellan last och vertikal ändförskjutning beräknade med BM-FEM

Av fig 4.2 framgår att resultaten erhållna med BM-FEM är oberoende av antalet element medan, enligt fig 4.3, förskjutningarna beräknade med B-FEM beror av elementindelningen. Dessa skillnader mellan de båda metoderna beror på att i metoden med analytiskt beskrivna elementegenskaper, integrationen över elementet sker analytiskt, medan i metoden med numeriskt beräknade elementstyheter motsvarande integraler beräknas numeriskt i tre punkter.

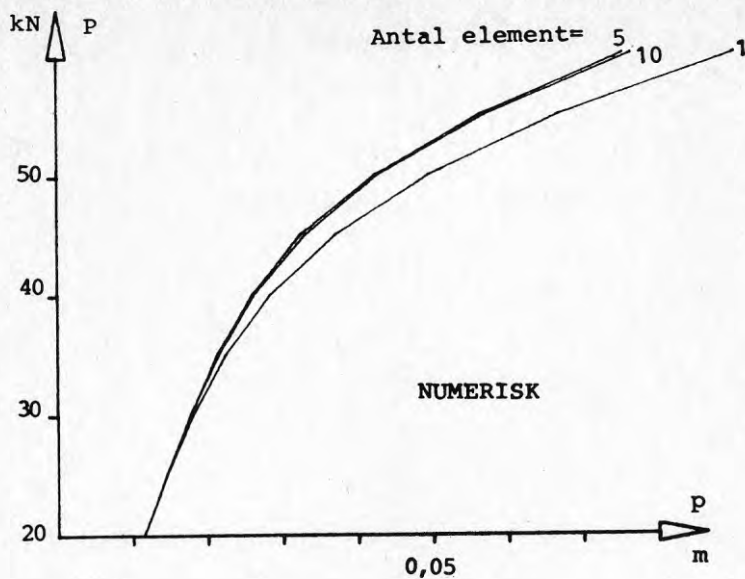


FIG. 4.3. Samband mellan last och vertikal ändförskjutning beräknade med B-FEM

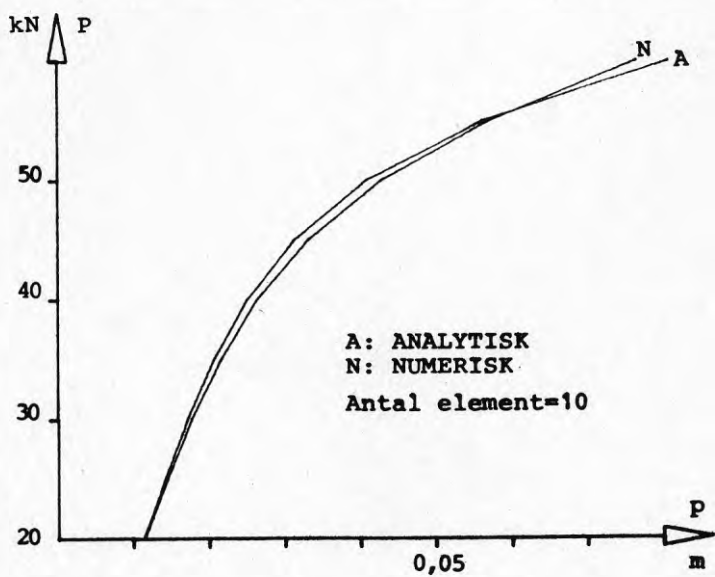


FIG. 4.4. Samband mellan last och vertikal ändförskjutning beräknade med BM-FEM respektive B-FEM

I fig 4.4 jämförs last-förskjutningskurvor erhållna med BM-FEM respektive B-FEM vid indelning i 10 element. Vid denna elementindelning blir felet i den numeriska integrationen över elementen obetydligt. Skillnaden mellan kurvorna kan hänföras till idealiseringsfel i det analytiska moment-krökningssambandet.

I fig 4.5 redovisas beräkningstiden (centralenhetstid) för BM-FEM respektive B-FEM som funktion av antalet element. Det framgår att beräkningstiden med BM-FEM är endast cirka hälften av den för B-FEM.

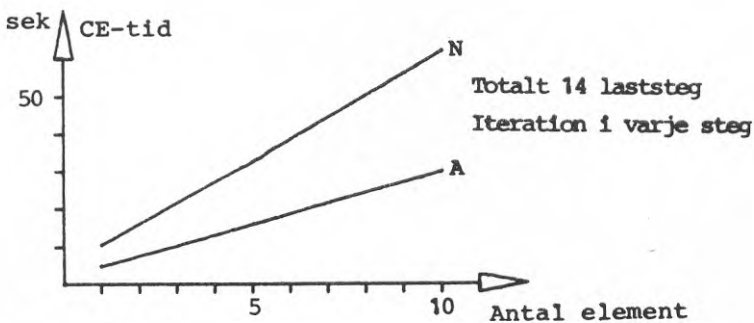


FIG. 4.5. Beräkningstid (centralenhetstid) som funktion av antal element för BM-FEM (A) respektive B-FEM (N)

4.3. Konsolbalk av aluminium med axiell och transversell last

Samma balk som i avsnitt 4.2 har analyserats belastad både med axiell och transversell last.

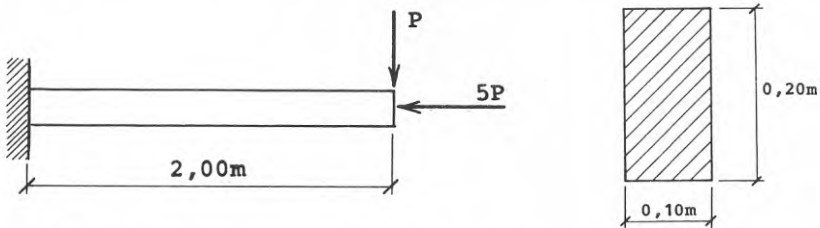


FIG. 4.6. Transversellt och axiellt belastad konsolbalk av aluminium med rektangulärt tvärsnitt

I fig 4.7 - 4.10 redovisas samma jämförelser som i föregående avsnitt.

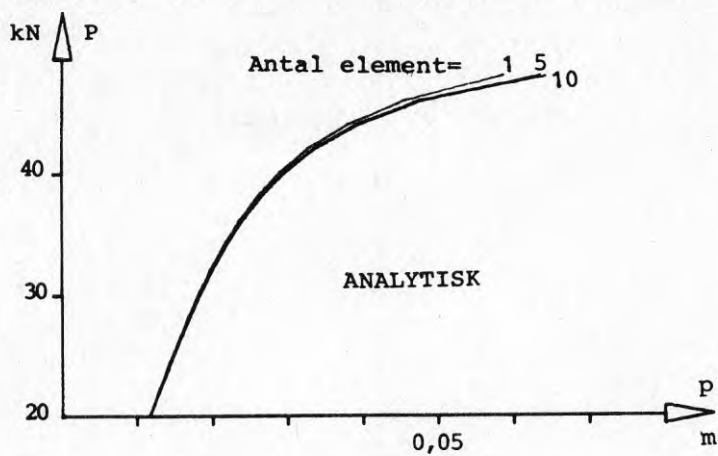


FIG. 4.7. Samband mellan last och vertikal ändförskjutning beräknade med BM-FEM

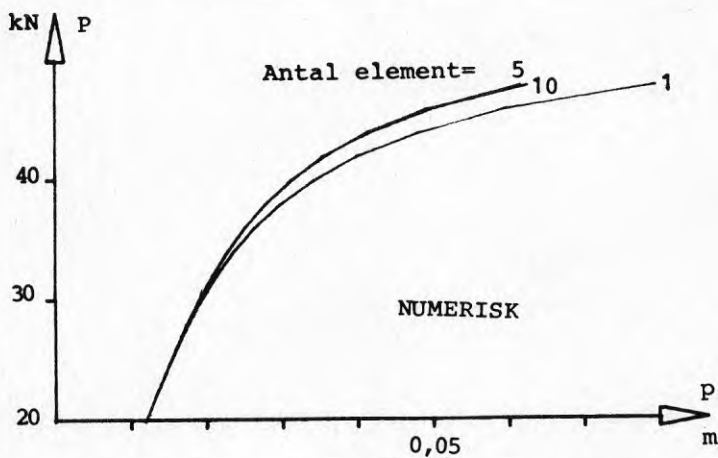


FIG. 4.8. Samband mellan last och vertikal ändförskjutning beräknade med B-FEM

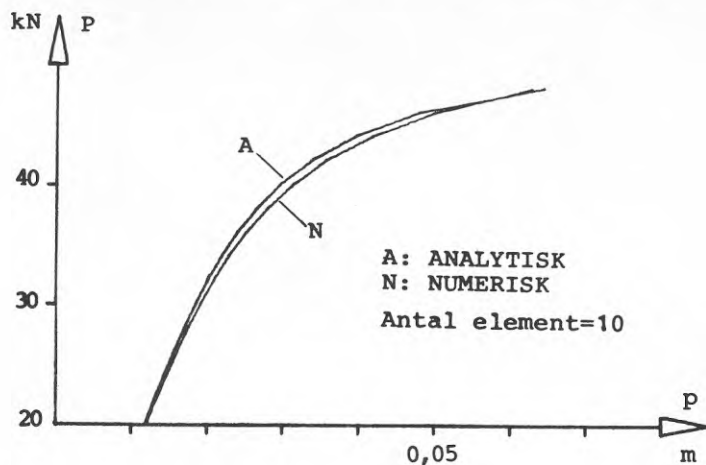


FIG. 4.9. Samband mellan last och vertikal ändförskjutning beräknade med BM-FEM respektive B-FEM

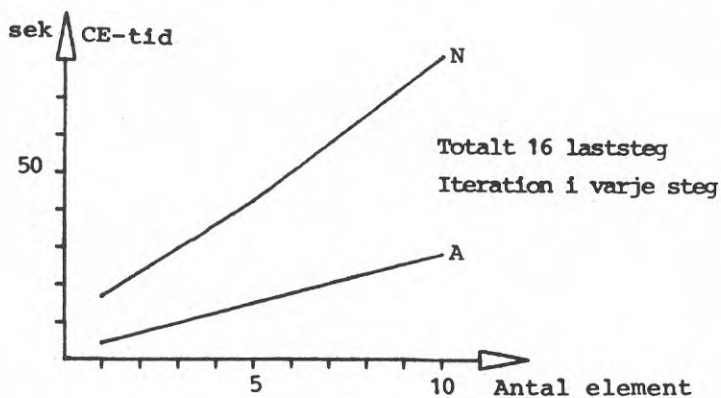


FIG. 4.10. Beräkningstid (centralenhetstid) som funktion av antal element för BM-FEM (A) respektive B-FEM (N)

Samma slutsatser kan dras av dessa resultat som av resultaten i avsnitt 4.2. Skillnaderna mellan last-förskjutningskurvorna för olika elementindelningar i fig 4.7 beror på den geometriska olinjäriteten, dvs att axialkraftens bidrag till balkmomentet försummas inom elementet. Detta fel minskar med en finare elementindelning. Skillnaden i beräkningstid mellan de två metoderna, enligt fig 4.10, är i detta fall ännu mer accentuerad än i exemplet i avsnitt 4.2.

4.4. Portalram av stål

Portalramen i fig 4.11 har tidigare analyserats av Sawko, Wilde (1969) och Bäcklund, Ågårdh (1973).

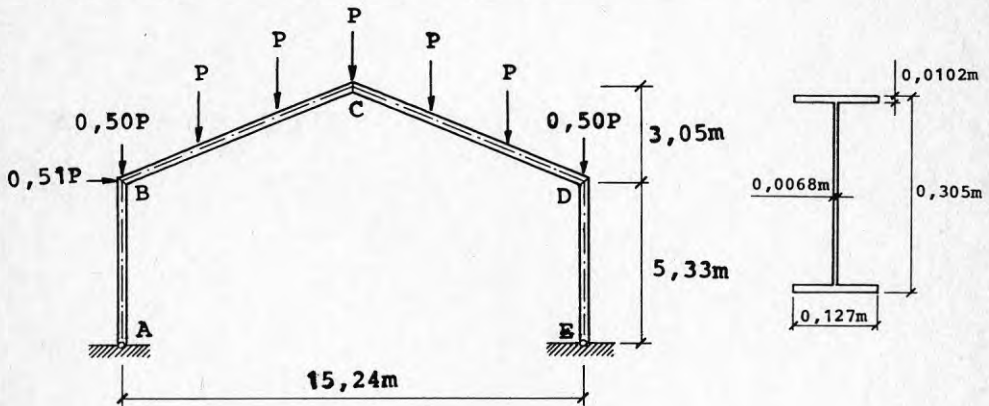


FIG. 4.11. Portalram av stål ledat infäst i A och E samt balktvärsnitt

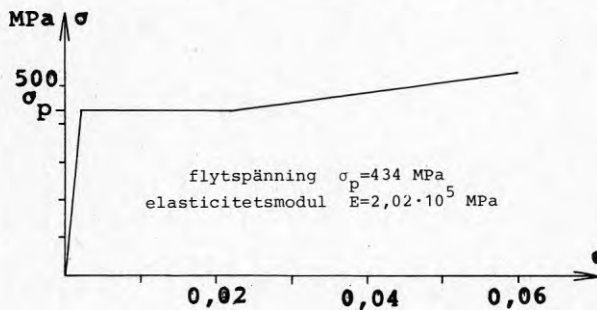


FIG. 4.12. Spännings-töjningsdiagram för stål enligt BS 968

Ett analytiskt uttryck på moment-kröknings sambandet för det aktuella balktvärsnittet och materialet har bestämts enligt del 1. Krökningspolynomet i dimensionslös form har bestämts till

$$\kappa = \frac{M}{EI} \sum_{i=0}^4 d_{1i} \left(\frac{N}{EA} \right)^i + \left(\frac{M}{EI} \right)^3 \sum_{i=0}^4 d_{2i} \left(\frac{N}{EA} \right)^i + \quad (4.2)$$

$$+ \left(\frac{M}{EI} \right)^{31} \sum_{i=0}^4 d_{3i} \left(\frac{N}{EA} \right)^i$$

med koefficienterna

$$d_{10} = 1 \quad d_{11} = 0 \quad d_{12} = 0 \quad d_{13} = 0 \quad d_{14} = 0$$

$$d_{20} = 0.0781 \quad d_{21} = 0 \quad d_{22} = 11.7339 \quad d_{23} = 0 \quad d_{24} = 4.1079$$

$$d_{30} = 0.0248 \quad d_{31} = 0 \quad d_{32} = 0.6800 \quad d_{33} = 0 \quad d_{34} = 24.6986$$

I Bäcklund, Agårdh (1973) har analysen av ramen skett med en indelning i 10 element enligt fig 4.13a. Beräkningarna har visat att flytning först inträffar i knut D, vilket innebär att krökningarna blir mycket stora i anslutande elementändar. Här har ramen beräknats, dels med denna indelning i 10 element, dels med en tätare elementindelning kring knut D, med 12 element enligt fig 4.13b.

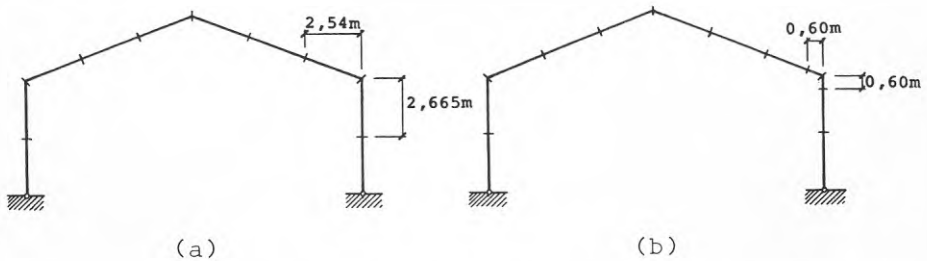


FIG. 4.13. Indelning i 10 (a) respektive 12 (b) element

I fig 4.14 redovisas resultat från olika beräkningar av ramen. Jämförelse görs med beräkningar presenterade av Sawko, Wilde (1969). I deras analys togs ingen hänsyn till flytmomentets reduktion på grund av axialkraften. Dessutom antogs flytningen vara koncentrerad till deformationshårdnande flytleder.

Kurvorna A och B i fig 4.14 visar den stora betydelsen av att ta hänsyn till geometrins förändring i beräkningarna. Vidare framgår av kurvorna C och D att en tät elementindelning i områden som börjar plasticeras är nödvändig vid användning av programmet B-FEM. Då det i allmänhet inte är känt från början var plasticering kommer att ske måste en tät elementindelning över hela strukturen göras för att man skall vara säker på resultaten.

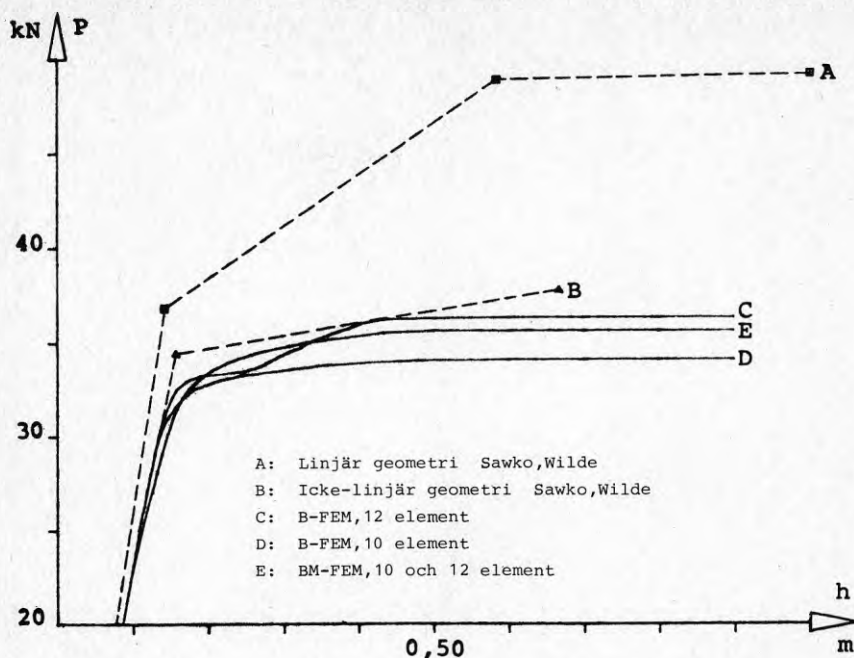


Fig 4.14. Beräknade samband mellan last och horisontell förskjutning av knut D

Beräkningarna med BM-FEM med 10 och 12 element visar däremot inga påtagliga skillnader (kurva E). Avvikelserna mellan kurvorna C och E är liksom tidigare beroende av idealiseringen av moment-krökningssambandet.

Tidsjämförelser visade liksom i tidigare exempel att beräkningstiden för BM-FEM är knappt hälften av den för B-FEM vid en viss elementindelning. Med 10 element och 15 laststeg erhöles

Program	BM-FEM	B-FEM
CE-tid	74 sek	183 sek

4.5. Slutsatser av exempel

Av de exempel som redovisats i detta kapitel kan sammanfattningsvis följande slutsatser dras:

- De fel i beräkningsresultaten som erhålls med metoden med analytisk elementbehandling beror på idealiseringsfel i det analytiska moment-krökningssambandet. Dessa fel har i de redovisade exemplen varit små.
- Metoden med numerisk elementbehandling arbetar med numerisk integration av krökningarna över elementen i tre punkter. I områden som plasticeras, dvs där krökningarna är stora, krävs en fin elementindelning för att noggrannheten i integrationen skall bli godtagbar. I metoden med analytisk elementbehandling sker motsvarande integrationer analytiskt och samma krav på elementindelningens finhet föreligger inte.
- Metoden med analytisk elementbehandling ger betydligt kortare beräkningstider än metoden med numerisk dito och kräver betydligt mindre kärnminnesutrymme. (Mindre än hälften.)

Av de två sista punkterna ovan följer att analytisk elementbehandling ger minskade datorkostnader, vilket har speciellt stor betydelse vid problem med ett stort antal obekanta. Tilläggas bör dock att vid den analytiska metoden moment-krökningsdiagrammets polynomkoefficient först måste bestämmas.

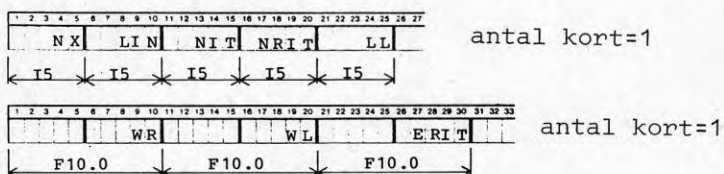
5. INDATABESKRIVNING

Indata till BM-FEM är organiserade i fem grupper

- 1 Allmän information
- 2 Geometri
- 3 Styvhetstyper
- 4 Laster
- 5 Upplagsvillkor

Samtliga heltal i indata ges i format I5, vilket innebär att talen skall stå högerorienterade inom respektive fält. Decimaltal ges i format F10.0.

5.1. Allmän information



- NX = antal element
- LIN = 0 stora förskjutningars teori
1 små förskjutningars teori
- NIT = iteration sker efter vart NIT:e laststeg
- NRIT = max antal iterationer i varje iterationscykel
- LL = totala antalet laststeg
- WR = lastmultiplikator i första laststeget (på inlästa laster)
- WL = maximal lastmultiplikator (vid vilken lastinkrementeringen avslutas)
- ERIT = maximalt värde på förhållandet mellan tillskotts-
förskjutningar pga residualkrafter Δp och total-
förskjutning p

5.2. Geometri

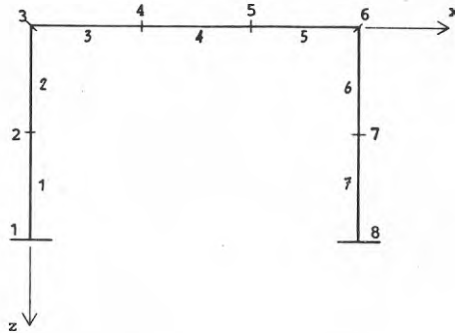
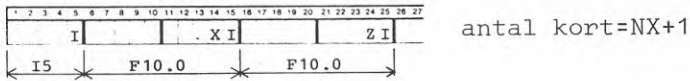


FIG. 5.1. Knut- och elementnummring



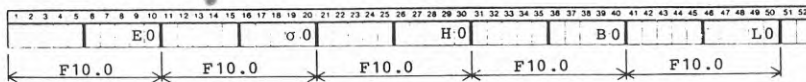
I = knutnummer

XI = x-koordinat för knut nr I

ZI = z-koordinat för knut nr I

5.3. Styvhetstyper

Programmet räknar i dimensionslösa variabler varför globala referensnivåer måste definieras i indata. Värdena på dessa kan väljas godtyckligt, men storleksordningen bör överensstämma med de lokala referensnivåernas.



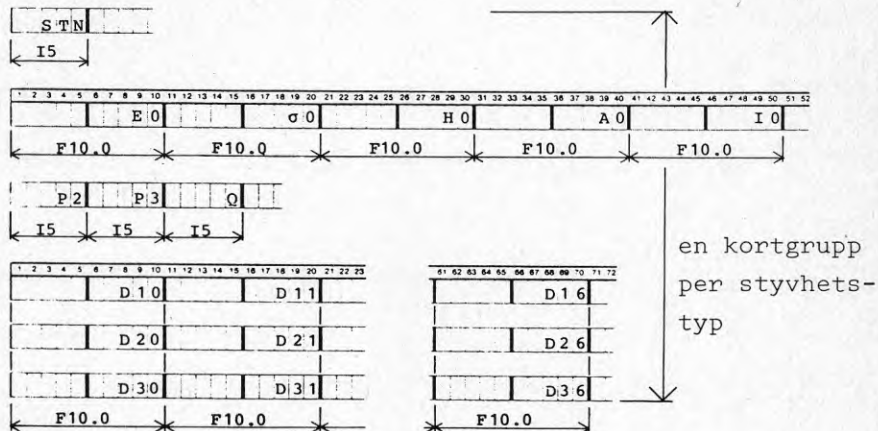
Antal kort = 1

E0, σ0, ... = globala referensnivåer

Styvhetsegenskaperna för ett visst tvärsnitt definieras av de polynomkoefficienter som bestämmer momentkrökningssambandet i dimensionslös form samt av de lokala referensnivåerna. Krökningsspolynommet kan skrivas som

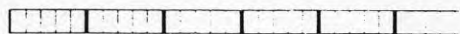
$$\kappa = \frac{M}{EI} \sum_{i=0}^q d_{1i} \left(\frac{N}{EA}\right)^i + \left(\frac{M}{EI}\right) P^2 \sum_{i=0}^q d_{2i} \left(\frac{N}{EA}\right)^i + \quad (5.1)$$

$$+ \left(\frac{M}{EI}\right) P^3 \sum_{i=0}^q d_{3i} \left(\frac{N}{EA}\right)^i$$

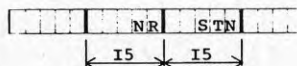


- STN = styvhetsnummer (1-5)
 E0, σ_0, \dots = lokala referensnivåer
 P2, P3 = gradtal på momentet i andra respektive tredje termen i krökningspolynomet
 Q = högsta gradtal på normalkraften i krökningspolynomet (max 6)
 D10-D36 = koefficienter i krökningspolynomet

Efter kortgruppen för sista styvhetsstypen läggs ett blankt kort.

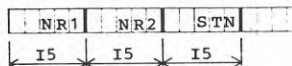
 antal kort=1

Efter det blanka kortet följer ett antal kort som definierar vilka element som är av en viss styvhetsstyp.

 antal kort=NX

NR = elementnummer
STN = styvhetsnummer

Om flera element i nummerföljd är av samma styvhets-
typ kan alternativt ett mer komprimerat sätt att ge
indata användas.



NR1, NR2 = elementen nr NR1 tom NR2 har styvhetsnummer
STN

För båda sätten att ge indata ovan gäller att elementen
skall tas i nummerordning.

5.4. Laster

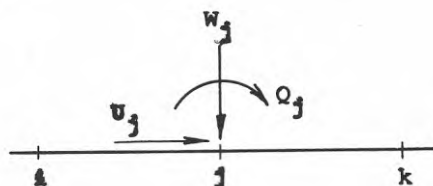
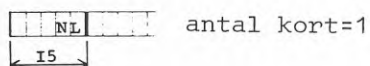
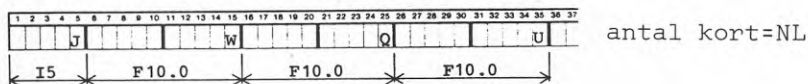


FIG. 5.2. Definition av positiva lastriktningar

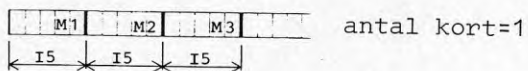


NL = antal knutar med laster



J = knutnummer
W, Q, U = laster med riktningar definierade i fig 5.2
ovan

5.5 Upplagsvillkor

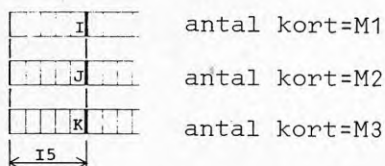


antal kort=1

M_1 = antal knutar med till noll föreskrivna rotationer

M_2 = antal knutar med till noll föreskrivna förskjutningar
i z-riktning

M_3 = antal knutar med till noll föreskrivna förskjutningar
i x-riktning



antal kort=M1

antal kort=M2

antal kort=M3

I = nummer på knut med till noll föreskriven rotation

J = nummer på knut med till noll föreskriven förskjutning
i z-riktning

K = nummer på knut med till noll föreskriven förskjutning
i x-riktning

6. SAMMANFATTNING

Analytiska uttryck för det materiellt olinjära balkpelarelementets flexibiliteter härleddes i del 1 av denna rapportserie (Ågårdh (1976)). Denna del utgör del 2 i rapportserien och behandlar ramanalys baserad på detta element. Ett datorprogram för analys av olinjärt elastiska plana ramar med stora förskjutningar har utvecklats. Uppbyggnad av och indata till programmet beskrivs. Hänsyn till stora förskjutningar tas i programmet genom uppdatering av nodkoordinaterna i varje beräkningssteg och genom olinjära kraft- och förskjutningstransformationer. Det olinjära problemet löses med stegmetod med en iterativ förbättring av lösningen enligt Newton-Raphsons metod efter ett godtyckligt valt antal steg. Metoden med analytisk elementbeskrivning jämförs ur olika aspekter med en motsvarande metod med numeriskt beräknade elementegenskaper. Det framgår att beräkningstid och kärnminnesutrymme i datorn för den aktuella metoden är betydligt mindre jämfört med den numeriska metoden. Numeriska exempel visar god överensstämmelse mellan metoderna. Eventuella avvikelser i resultaten visar sig huvudsakligen bero på idealiseringsfel i det analytiska moment-krökningssambandet. Kravet på finhet i elementindelningen är emellertid mindre för den aktuella metoden, eftersom integrationen längs balk-elementet sker analytiskt.

7. APPENDIX 1

I detta appendix beräknas ändvinklarna i ett balkpelarelement belastat med ändmoment och axialkraft. Beräkningarna följer del 1 sid 68.

$$m_1 = -\int_0^L (L-x)\kappa(x)dx/L = -\int_0^L (L-x) \sum_{k=1}^P c_k M^k dx / (EI)^k L$$

$$= L \sum_{k=1}^P \sum_{j=0}^k c_k (k-j+1) (-1)^j M_1^{k-j} M_2^j / (k+1)(k+2)(EI)^k \quad (A1)$$

$$m_2 = L \sum_{k=1}^P \sum_{j=0}^k c_k (k-j+1) (-1)^j M_1^j M_2^{k-j} / (k+1)(k+2)(EI)^k \quad (A2)$$

Den axiella förlängningen n_2 kan uttryckas:

$$n_2 = \int_0^L \epsilon_T(x) dx = \int_0^L (N_2/EA + \sum_{k=1}^P c_k M^{k+1} / (k+1)(EI)^k) dx$$

$$= N_2 L / EA + L \sum_{k=3}^P \sum_{j=0}^{k+1} c_k (-1)^j M_1^{k+1-j} M_2^j / (k+1)(k+2)(EI)^k \quad (A3)$$

Koefficienten $c_k(N)$ beror av axialkraften N enligt följande formel

$$c_k(N) = \sum d_{ik} N^i / (EA)^i \quad k = 3, 5, \dots \quad (A4)$$

varvid efter derivering:

$$c'_k = \sum i d_{ik} N^{i-1} / (EA)^i \quad k = 3, 5, \dots \quad (A5)$$

Koefficienterna d_{ik} bestäms med numeriska metoder, så att

$$k = \sum_{j,k} d_{jk} N^j M^k / (EA)^j (EI)^k \quad (A6)$$

Överensstämmer med acceptabel noggrannhet med $\kappa(M,N)$ beräknad med analytiska metoder enligt del 1.

Balkpelarelementets sekantflexibilitetsmatris blir då

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{e1} (M_1, M_2, N_2) \\ f_{e2} (M_1, M_2, N_2) \\ f_{e3} (M_1, M_2, N_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A7})$$

med f_{ej} enligt ovan.

Elementen i sekantflexibilitetsmatrisen är således beräknade ur polynom i axialkraft och ändmoment. Koefficienterna i dessa polynom bestäms genom anpassning till noggrant beräknade analytiska samband mellan moment, axialkraft och krökning. Denna idealisering av tvärsnittets styvhet innebär i allmänhet inga större avvikelser från verkligt beteende, men medger en effektiv beräkning av elementen styvhetsmatriser i varje laststeg.

8. APPENDIX II

Analysen enligt kapitel 2 har genomförts i dimensionsberoende form. Vid val av dimensionslösa variabler måste gemensamma referensnivåer för alla element väljas i strukturanalysen. I del 1 diskuteras val av referensnivåer för elementet. Här skall endast kompletteras med en diskussion av valet av referensnivåer för variabler i det globala koordinatsystemet. I detta avsnitt betecknas dimensionsberoende variabler med \bar{A} , referensnivåer med \bar{A}_0 så att den dimensionslösa formen blir $A = \bar{A}/\bar{A}_0$. Referensnivåerna här är helt allmänna.

Med

$$\bar{q}_0 = \bar{m}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 / \bar{h}_0 \quad (A8)$$

$$\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 \quad (A9)$$

$$\bar{Q}_0 = \bar{M}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{D}_0 \bar{h}_0^2 \quad (A10)$$

$$\bar{U}_0 = \bar{V}_0 = \bar{N}_0 = \bar{\sigma}_0 \bar{D}_0 \bar{h}_0 \quad (A11)$$

fås ekv (2.16), (2.15)

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\alpha} &= (c \Delta \bar{w}_{21} - s \Delta \bar{u}_{21}) / \bar{L} = \\ &= \bar{\epsilon}_0 (c \Delta w_{21} - s \Delta u_{21}) / L = \bar{\epsilon}_0 \Delta \alpha \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{L} &= (c \Delta \bar{u}_{21} - s \Delta \bar{w}_{21}) = \\ &= \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 (c \Delta u_{21} - s \Delta w_{21}) = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 \Delta L \end{aligned} \quad (A13)$$

varvid ekv (2.12) - (2.24) blir:

$$\Delta m_1 = \Delta q_1 + \Delta \alpha \cdot \bar{h}_0 / \bar{L}_0 \quad (A14)$$

$$\Delta m_2 = \Delta q_2 + \Delta \alpha \cdot \bar{h}_0 / \bar{L}_0 \quad (A15)$$

$$\Delta n_2 = \Delta L$$

Sammanfattningsvis fås då:

$$\Delta n_e = T \Delta q \quad (\text{A17})$$

där

$$T = \frac{\bar{h}_0}{\bar{L}_0} \begin{bmatrix} \bar{L}_0/\bar{h}_0 & 0 & s/L & -s/L & -c/l & c/L \\ 0 & \bar{L}_0/\bar{h}_0 & s/L & -s/L & -c/L & c/L \\ 0 & 0 & -c\bar{L}_0/\bar{h}_0 & c\bar{L}_0/\bar{h}_0 & -s\bar{L}_0/\bar{h}_0 & s\bar{L}_0/\bar{h}_0 \end{bmatrix}$$

I ekv (2.25) fås

$$\Delta Q_\sigma = F_\sigma \Delta q \quad (\text{A18})$$

där

$$F_\sigma = \bar{F}_\sigma \cdot \bar{\varepsilon}_0 \bar{L}_0 / \bar{\sigma}_0 \bar{b}_0 \bar{h}_0 = \bar{F}_\sigma \bar{L}_0 \bar{h}_0^2 / \bar{E}_0 \bar{I}_0$$

Ekv (2.27) slutligen

$$\Delta Q = (T^t F_e^{\text{tan}T} + F_\sigma) \Delta q \quad (\text{A19})$$

med

$$F_e^{\text{tan}} = \frac{\bar{L}_0}{\bar{E}_0 \bar{I}_0} \left[\begin{array}{cc|c} \bar{x} & \bar{x} & \bar{h}_0 \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \end{Bmatrix} \\ \bar{x} & \bar{x} & \\ \hline \bar{h}_0 \cdot \{ \bar{x} & \bar{x} \} & \bar{h}_0^2 \cdot \{ \bar{x} \} \end{array} \right] \quad (\text{A20})$$

där \bar{x} betecknar absoluta (dimensionsberoende) matris-element. Slutligen fås enligt ekv (A17)-(A20), jämför del 1, sid 18,

$$F_{eg}^{\text{tan}} = \frac{\bar{L}_0}{\bar{E}_0 \bar{I}_0} \left[\begin{array}{cc|cccc} \bar{x} & \bar{x} & \bar{h}_0 \begin{Bmatrix} \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \end{Bmatrix} \\ \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ \hline \bar{h}_0 \begin{Bmatrix} \bar{x} & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x} \end{Bmatrix} & \bar{h}_0^2 \begin{Bmatrix} \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \end{Bmatrix} & & & & \end{array} \right] \quad (\text{A21})$$

vilket ger korrekta dimensionslösa matriselement i strukturstyvhetsmatrisen med följande val av referensnivåer för strukturvariablerna enligt del 1 sid 17:

$$\bar{p}_{10} = \bar{q}_0 = \bar{\kappa}_0 \bar{L}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 / \bar{h}_0 \quad (\text{A22})$$

$$\bar{p}_{20} = \bar{p}_{30} = \bar{u}_0 = \bar{\epsilon}_0 \bar{L}_0 \quad (\text{A23})$$

$$\bar{p}_{10} = \bar{q}_0 = \bar{M}_0 \quad (\text{A24})$$

$$\bar{p}_{20} = \bar{p}_{30} = \bar{w}_0 = \bar{N}_0 \quad (\text{A25})$$

I detta avsnitt har visats att valet av referensnivåer, som träffats i del 1 och ovan, leder till systemekvationer i dimensionslös form, som står i enkla förhållande till motsvarande absoluta systemekvationer.

REFERENSER

Baehre, Bröchner, Sjölund, Untersuchungen zur Anwendung der plastischen Tragwerksbemessung bei Aluminium Konstruktionen. Väg och Vattenbyggaren Nr 9, Stockholm 1965.

Bergan, P G, Söreide, T, A comparative study of different numerical solution techniques as applied to a nonlinear structural problem, Computer methods 2 (1973).

Blaauwendraad, J, Realistic analysis of reinforced concrete framed structures. Heron, Vol 18 (1972), No 4 pp 1-31.

Bäcklund, J, Tågnfors, H, Ramfem datorprogram för analys av plana icke linjära balkar, bågar och ramar. Chalmers tekniska högskola, Institutionen för byggnadsstatik, publikation 75:7, Göteborg 1975.

Bäcklund, J och Ågårdh, L, Finit elementmetod för elasto-plastiska balkar och ramar med stora förskjutningar. Chalmers tekniska högskola, Institutionen för byggnadsstatik, publikation 73:2, Göteborg 1973.

Cohn, M Z and Rafay, T, Deformations of plastic frames considering axial forces. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 103 (1977), EM4 pp 725-745.

Cohn, M Z and Rafay, T, Collapse load analysis of frames considering axial forces. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 100 (1974) EM4 pp 773-794.

Ersvik, O, Nonlinear Analysis of Beam-column Structures and Influence of Imperfections, Bygghöskningens dokumentserie D4:1978, Stockholm 1978.

Gunnin, B L, Rad F N and Furlong, R F, A general nonlinear analysis of concrete structures and comparison

with frame tests. Computers and Structures, Vol 7 (1977), pp 257-265.

Hays, C O and Matlock, H, Nonlinear discrete element analysis of frames. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 99 (1973), ST10 pp 2011-2029.

Jennings, A, Frame analysis including change of geometry Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 94, No ST 3, March 1968.

Mattiasson, K och Ågårdh, L, Analytical moment-curvature axial force diagrams for simply symmetric cross-sections of strain-hardening materials. Chalmers tekniska högskola, Institutionen för byggnadsstatik, Publikation 74:1, Göteborg 1974.

Oran, C, Tangent stiffness in plane frames, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol 99, No ST 6, June 1973.

Pettersson, B och Runesson, K, Böjförsök på axiellt och transversellt belastade aluminiumbalkar, Chalmers tekniska högskola, Institutionen för byggnadsstatik, Skrift 75:23, Göteborg 1975.

Sawko, F and Wilde, A M B, Automatic analysis of strain hardening structures. IABSE Publications, Vol 29-I (1969), pp 51-71.

Ågårdh, L, Analysis of non-linear beams. Chalmers tekniska högskola, Institutionen för byggnadsstatik, Publikation 68:3, Göteborg 1968.

Ågårdh, L, Analytical and numerical analysis of non-linear beam elements with special consideration of initial and numerical errors. Doktorsavhandlingar vid Chalmers tekniska högskola, No 152, Göteborg 1974.

Ågårdh, L, Ett olinjärt elastiskt balkpelarelement, Byggeforskningens rapportserie R44:1976, Stockholm 1976.

**Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 690502-7 från
Statens råd för byggnadsforskning till Inst. för byggnadsstatik,
CTH, Göteborg.**

R31:1979

ISBN 91-540-2983-X

Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

Art.nr: 6600931

**Abonnemangsgrupp:
Ingår ej i abonnemang**

**Distribution:
Svensk Byggtjänst, Box 1403
111 84 Stockholm**

Cirka pris: 20 kr exkl moms