Rapport R126:1979

Geoteknisk riskbedömning

Etapp 1: Statistiska metoder tillämpade på svensk geoteknik

Lars Olsson
Håkan Stille

Byggforskningen

R126:1979

GEOTEKNISK RISKBEDÖMNING

Etapp 1: Statistiska metoder tillämpade på svensk geoteknik

Lars Olsson
Håkan Stille

Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 760942-4 från Statens råd för byggnadsforskning till Institutionen för jord- och bergmekanik, Tekniska högskolan, Stockholm

I Byggforskningsrådets rapportserie redovisar forskaren sitt anslagsprojekt. Publiceringen innebär inte att rådet tagit ställning till åsikter, slutsatser och resultat.

R126:1979

ISBN 91-540-3124-9
Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

LiberTryck Stockholm 1979 957860

INNEHÅLL

FÖRORD

Denna rapport är första delen av ett BFR-projekt, som behandlar hur statistiska och probabilistiska metoder kan tillämpas inom geotekniken för att möjliggöra en riskbedömning.

Rapporten har till syfte att ge den teoretiska bakgrunden till säkerhetsbegreppet och riskbedömningsmetodik. I det fortsatta projektet visas den praktiska tillämpningen.

Denna rapport är uppdelad i fyra huvuddelar:

SÄKERHETSBEGREPPET. Denna del ger synpunkter på dagens säkerhetsfaktor samt påvisar och diskuterar alternativ. Den kan läsas relativt lätt.

TILLGÄNGLIGA RISKBERÄKNINGSMETODER. Här ges en kortfattad orientering om de metoder, som i dag används för riskberäkning.

RISKBEDÖMNING MED BAYESIANSK STATISTIK. I detta kapitel redogörs för grunderna för så kallad bayesiansk statistik (Bayes 1763), och visas hur den kan användas vid riskberäkning. Kapitlet är något läroboksaktigt, men detta har bedömts nödvändigt, då lämplig svensk litteratur ej finns samtidigt som metodiken har uppenbara fördelar för geotekniken.

FORSKNINGSBEHOV. Här redogörs för den forskning, som erfordras, speciellt med tanke på kommande normer.

Stockholm augusti 1979

Lars Olsson   Håkan Stille

I föreliggande forskningsuppgift har studerats den teoretiska bakgrunden till metoder för riskberäkning inom geotekniken.

I kapitlet SÄKERHETSBEGREPPET påvisas att dagens säkerhetsfaktor ingalunda är ett entydigt mått på risken (= brottsannolikheten). Den måste i stället uppfattas som ett beslutskriterium, där beslutet gäller om man skall acceptera en geoteknisk konstruktion etc eller ej. Beslutet måste fattas trots att man arbetar under stor osäkerhet. Denna osäkerhet delas upp i tre klasser, probabilistisk, statistisk och professionell, som alla bidrar. Dagens säkerhetsfaktor diskuteras sedan utifrån dessa aspekter och det konstateras att en övergång till ett system där man i stället för säkerhetsfaktorn använder risken som beslutskriterium ger mycket stora fördelar.

Kapitlet TILLGÄNGLIGA RISKBERÄKNINGSMETODER ger en överblick av de metoder för beräkning av risken (eller något riskkorrelerat tal) som i dag används. Principerna för de olika metoderna anges, med speciell betoning på de metoder (nivå 2-metoder och partialkoefficientmetoden) som kommer att föreskrivas i kommande svenska normer.

Kapitlet RISKBEDÖMNING MED BAYESIANSK STATISTIK innehåller dels en diskussion av sannolikhetsbegreppet, dels en exemplifierad redogörelse för hur Bayes' teorem och så kallad bayesiansk statistik kan tillämpas på geotekniska problem. Speciellt visas hur man genom tillämpning av denna statistik kan ta hänsyn till de olika osäkerheterna, som råder och få fram en bästa riskuppskattning ur tillgängliga data som på ett stringent sätt kombineras med erfarenhetsvärden och subjektiva bedömningar.

I rapportens avslutande kapitel, FORSKNINGSBEHOV, redogörs för de forskningsområden, som primärt behöver behandlas, för att partialkoefficientmetoden skall kunna tillämpas inom geotekniken. Partialkoefficientmetoden skall nämligen införas i kommande svenska byggnormer.
Denna forsknings huvudfrågeställningar är:

"Hur skall man utforma undersökningen (inklusive observationssystem och provbelastningar) så att man når önskad tillförlitlighet?"

"Vilka krav måste ställas på analysmetod och beräkningar för att resultatet skall ha tillräcklig tillförlitlighet?"

Det teoretiska underlaget för att lösa dessa frågor finns och forskningen bör därför inriktas på att uforma metodik för det praktiska arbetet.

SÄKERHETSBEGREPPET

Dagens säkerhetsfaktor - ett beslutskriterium

I den allmänna diskussionen om olika verksamheter, som upplevs som farliga, stöter man ofta på order "säker".

Man hör uttryck som "säker", "helt säker" och "tillräckligt säker".

Redan häri syns tvetydigheten i begreppen: Om man, vilket ju är det vanliga, med "säker" avser att kollaps etc. etc. överhuvudtaget inte kan inträffa, betyder ju "helt säker" identiskt samma sak att möjligheten för skada inte existerar.

Men så snart man börjar använda begreppet "tillräckligt säker" gör man en extremt betydelsefull, fastän sällan uttalad, ändring av innebörden i "säker". "Säker" betyder inte längre att någon viss skada omöjligen kan inträffa, utan att det är osannolikt men möjligt att den inträffat.

"Tillräckligt säker" får då betydelsen: Händelsen ifråga kan visserligen inträffa, men det är så osannolikt, att den gör det, att vi kan acceptera denna sannolikhet.

Ofta kallar man denna skadesannolikhet för "risk". Denna terminologi kommer att användas i det följande i denna rapport, alltså:

Risken för en viss skada = P (skadan inträffar). P (skadan inträffar) betyder "sannolikheten för att skadan inträffar".)

Det är väsentligt att notera, att människan är van att leva med risker både medvetet (t ex bilkörning) och omedvetet (t ex risken att huset man bor i rasar).

I vissa fall upplevs till och med risken som önskvärd, i vissa sporter bl a där man frivilligt utsätter sig för risken, och där den ingår som en del av den upplevelse man eftersträvar.

Vanligen är dock risken oönskad, det vore ju att föredra att t ex bilkörning vore helt riskfri, så att inga skador inträffade.

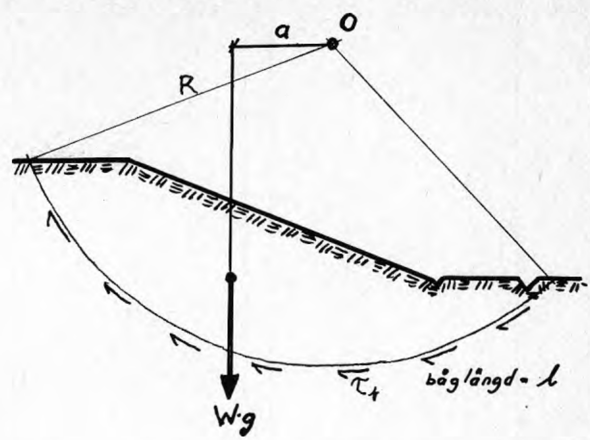
Vilken ståndpunkt man skall inta i frågan om säkerhet blir följaktlingen beroende av om man överhuvudtaget kan uppnå total säkerhet, dvs ett tillstånd där en oönskad händelse är helt eliminerad.

Att en oönskad händelse är helt eliminerad, betyder att sannolikheten för dess inträffande är noll

P (brott) = 0.

Kan detta uppnås vid geotekniska problem?

Låt oss ta en enkel lerslänt som exempel:



Mothållande moment = $R \cdot \tau \cdot l$

Pådrivande moment = $W \cdot g \cdot a$

Figur 1. Cirkulärcylindrisk glidyta

Vid en s k c-analys med cirkulär cylindrisk glidyta antar man att brottet sker längs en yta som är en del av en (liggande) cylinder samt att skjuvhållfastheten τ är helt mobiliserad över hela ytan. Ett tillräckligt stabilitetsvillkor för den beräknade glidytan blir då:

$$\frac{\text{Mothållande momentet}}{\text{Pådrivande momentet}} \geq 1$$

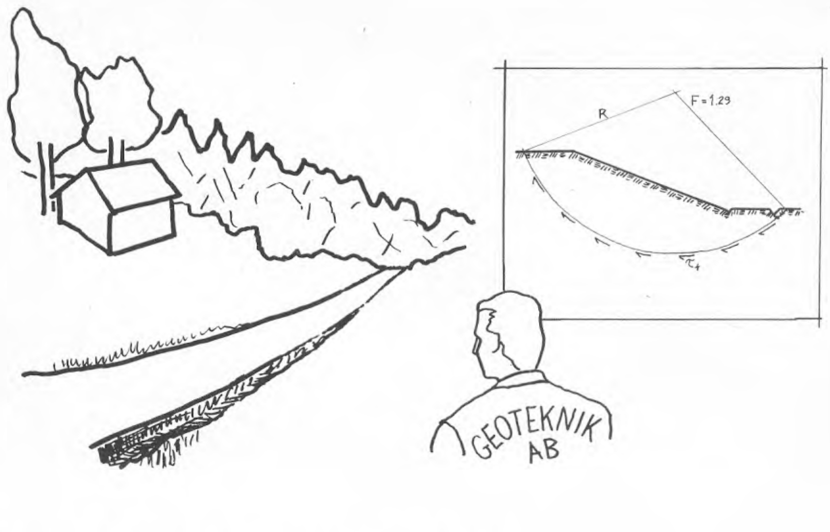
Genom olika åtgärder kan detta villkor uppfyllas t ex genom minskning av påförd last, flackare slänt etc etc.

Det tycks alltså som om det vore möjligt att ernå full säkerhet, dvs att skredsannolikheten = 0. Tyvärr är det inte så enkelt.

Visserligen är det sant, att man kan beräkna stabiliteten för slänter och konstruera den så att stabilitetsvillkoret är uppfyllt, men denna beräkning gäller den teoretiska slänten, den man ritat upp på papperet och inte den verkliga!

Som skisserats i fig. 1a är det enda sambandet mellan den verkliga slänten och den teoretiska den högst individuella tolkning, som den aktuella geoteknikern gör. Vid denna tolkning vägs en hel rad faktorer in, t ex:

- Val av brottmodell och följaktligen beräkningsmodell
- Översättning av mätdata till data för beräkning
- Bedömning av inverkande, men ej uppmätta faktorer



Figur 1a. Subjektiv verklighetsuppfattning

Det val som träffas, är beroende av geoteknikerns erfarenhet av liknande fall där han gjort motsvarande bedömningar och "lyckats" resp "misslyckats". Även andras erfarenhet spelar in, men i sådana fall är det ju någon annan som gjort bedömningen utifrån sin erfarenhet och sina andra bedömningsgrunder.

Tolkningen av data påverkas också av en rad andra faktorer:

- Riskovillighet
- Önskan att göra en billig konstruktion
- Värden som står på spel osv.

Alla dessa faktorer, som gör att sambandet mellan den verkliga och den teoretiska slänten blir osäkert och bundet till individuella tolkningar gör att man i stället för stabilitetskriteriet för den teoretiska slänten

$$\frac{\text{Mothållande momentet}}{\text{Pådrivande momentet}} \geq 1$$

använder ett acceptanskriterium för den verkliga slänten

$$\frac{\text{Mothållande momentet}}{\text{Pådrivande momentet}} \geq F$$

där F kallas säkerhetsfaktor ($F > 1$)

Säkerhetsfaktorns uppgift är alltså att gardera mot de osäkerheter som ligger i tolkningen mellan verkligheten och den antagna matematiska modellen för jordens egenskaper och uppträdande.

Den är alltså inte ett direkt mått på hur stabil den verkliga slänten är annat än för det hypotetiska och aldrig uppnåeliga fall då man i varje punkt känner jordens egenskaper och dessutom entydigt kan beskriva brottmekanismen. Den skall i stället användas endast som ett beslutskriterium, när det gäller att acceptera eller förkasta en verklig slänt.

När säkerhetsfaktorn betraktas på detta sätt, dvs som beslutskriterium, inser man att om den ges "rätt" storlek kan den medföra att en del osäkerheter neutraliseras och att man därför kan använda den praktiskt efter att den kalibrerats. Denna kalibrering har skett empiriskt genom att man med tiden fått erfarenhet från verkliga konstruktioner. Kalibreringen blir givetvis grov, då man tvingas arbeta med ett stort antal variabler samtidigt och inte kan upprepa försöken (dvs oftast verkliga konstruktioner).

Användandet av säkerhetsfaktorn kan därför tolkas på följande sätt: "Om man gör en grundundersökning av sedvanlig omfattning och därur på brukligt sätt bedömer jordparametrarna och sedan använder dessa i en vedertagen beräkningsmetod och därvid finner att säkerhetsfaktorn är större än vad som vedertaget krävs, så kan konstruktionen accepteras. Om man upprepar detta för ett stort antal konstruktioner har man inte skäl att anta att de verkliga konstruktionerna skall vara instabila i mer än ett litet antal fall."

Genom erfarenhet har man alltså nått fram till ett läge där konstruktionerna misslyckas med en frekvens som är acceptabel, även om denna frekvens (brottsannolikheten) inte är direkt angiven.

Fyller då geoteknikens traditionella säkerhetsfaktor de krav man kan ställa på ett bra beslutskriterium?

Kraven kan sammanfattas så:

Den bör leda till mest ekonomiska lösningar utan att man för den skull utsätts för oacceptabla risker.

Svaret måste bli nej av följande skäl:

- Säkerhetsfaktorn måste täcka en stor osäkerhet.

Eftersom säkerhetsfaktorn behandlar ett genomsnittsfall med en sammansatt osäkerhet i data och beräkningsmetod finns det ingen möjlighet att direkt tillgodogöra sig en minskning av osäkerheten i det speciella fallet.

Även om man subjektivt kan tjäna in en förbättrad grundundersökning genom att man vågar åsätta högre hållfasthetsvärden, t ex täcker själva säkerhetsfaktorbegreppet inte in detta tillvägagångssätt förrän ny erfarenhet vunnits.

- Risken är inte definierad.

När man arbetar med säkerhetsfaktorn som beslutskriterium har man ingen uttalad risk som är acceptabel. Ofta arbetar man tvärtom under vanföreställningen att man är "helt säker".

•E k o n o m i s k t b e t r a k t e l s e s ä t t ä r o m ö j l i g t.

Det är omöjligt att optimera en konstruktion eftersom skadeverkningarna vid en eventuell olycka inte beaktas. Samma säkerhetsfaktor används för likartade problemställningar oavsett antal människor i riskzon osv.

•B e g r e p p s m ä s s i g t s v å r.

Vid inträffade skador har det ofta hänt, att man i efterhand visat att den "sanna" säkerhetsfaktorn var mindre än 1.0 och att skadan därför var förutsebar. Normalt torde det vara riktigt att en extensiv undersökning i de flesta fall kunnat förutsäga olyckan men detta synsätt torde vara fel. Om ett beslutskriterium används rätt är beslutet rätt. Däremot kan utfallet av beslutet vara det icke önskade, utan att för den skull själva beslutet var fel!

Den väsentligaste anmärkningen torde vara den att man inte arbetar med en definierad risk. Endast om man kan göra detta öppnar sig några möjligheter att gå vidare och att börja optimera konstruktioner, både i lokal (byggherrens) och mera global (samhällets) synpunkt. Och av det föregående torde ha framgått att få konstruktioner är optimerade i dag.

I optimeringen ligger givetvis inte bara ett krasst penningtänkande. Först och främst måste man se till människoliv, men absolut säkerhet går ej att få! Man får därför kanske göra så att man jämför nuvarande risker inom geotekniken med andra risker, allmänna och sådana förknippade med byggnadsverksamhet. Utgående härifrån kan man sedan kanske utveckla ett system med största tillåtna risker och därifrån optimera. Det finns relativt sparsamt med data om brottfrekvensen inom det geotekniska arbetsfältet. Ofta tiger man helst om inträffade skador eller bortser man helt från smärre skred i schakter o s v.

En sammanställning har gjorts av Meyerhof (1970) se fig. 2.

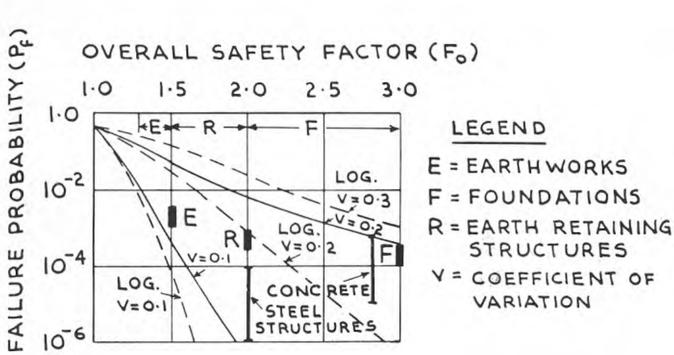


Fig. 2 Samband säkerhetsfaktor och brottrisk enl Meyerhof (1970).

Som framgår av denna figur arbetar man inom geotekniken med högre brottsannolikheter än för den statiska konstruktionen. Dessutom framgår, att de säkerhetsfaktorer, som normalt används inte svarar mot samma brottsannolikhet för olika typer av arbeten.

Riskerna i samhället

För att kunna få en uppfattning om storleken av de brottsannolikheter man arbetar med, måste man ha något att jämföra med. Människans förmåga att uppfatta och förstå små tal är nämligen begränsad. För att förstå talen måste man ha erfarenhet och det ligger i sakens natur att man har svårt att få denna erfarenhet. En sannolikhet av 10^{-2}(1/100) kan man kanske förstå men om sannolikheten blir 10^{-3} eller mindre torde det vara omöjligt att förstå den. De blir bara jämförelsetal och det är så man får arbeta. Man får alltså jämföra med kända sannolikheter och "gaffla" målet.

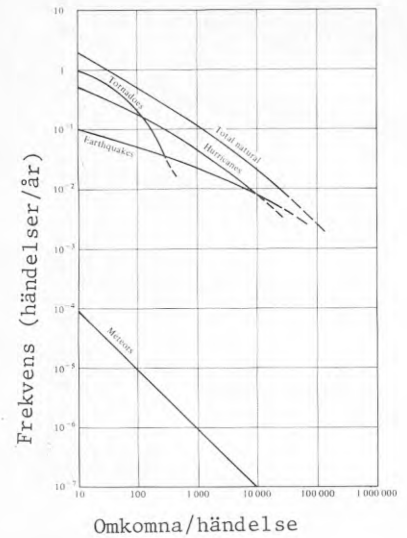
Nedan ges i tabell 1 några brittiska värden på dödsrisk fördelade på olika orsaker (Ciria Rep. 63 1977).

Tabell 1 *Comparative annual probability of death per 10 000 persons*

		Hours exposure/ annum	Annual risk/10 000 persons	Approx. annual risk/person
Mountaineering (International)		100	27	10^{-2}
Distant water trawling (1958 - 72)		2900	17	
Air travel (crew)		1000	12	10^{-3}
Coal mining		1600	3.3	
Car travel		400	2.2	2×10^{-4}
Construction site		2200	1.7	
Air travel (passenger)		100	1.2	
Home accidents (all persons)		5500	1.1	10^{-4}
Home accidents (able bodied)		5500	0.4	4×10^{-5}
Manufacturing		2000	0.4	
STRUCTURAL FAILURE		5500	0.001	10^{-7}
All causes	Male age 30	8700	13	10^{-3}
(England and Wales)	Female age 30	8700	11	
(1960 - 1962)	Male age 50	8700	73	
	Female age 50	8700	44	
	Male age 53	8700	100	10^{-2}

Beträffande "structural failures" bör beaktas två saker: dels är materialet för litet för att vara statistiskt tillförlitligt, dels omfattas bara sådana fall där någon omkommit. Den verkliga siffran för sannolikheten att en bärande konstruktion skall rasa (oavsett någon dör) är därför högre. Samtidigt måste man komma ihåg att orsaken till kollapsen i många av fallen varit vad som kallas "grova fel", dvs misstag i konstruerande eller utförande. Konstruktören kanske bortser ifrån ett avgörande belastningsfall eller entreprenören schaktar för djupt osv.

I fig. 3 visas kurvor över frekvens (händelser/år) och antal döda/händelse för naturliga och av människan orsakade händelser.



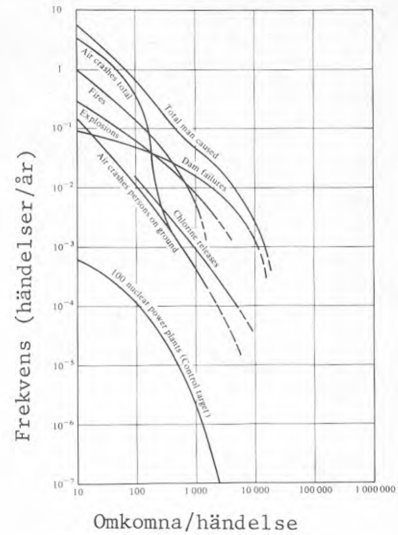


Fig. 3a Dödsfall p g a naturliga orsaker

Fig. 3b Dödsfall p g a mänskliga aktiviteter

En sammanställning av olika risker och samhällets inställning redovisas av Holmqvist (1978).

Dödsrisk per år	Exempel på kategori	Samhällsreaktion
1:100 eller 10^{-2}	Biologisk totalrisk	-
1:100 eller 10^{-3}	Kolbrytning	Sällsynta riskområden, omedelbara åtgärder vidtas för deras reducering.
1:10 000 eller 10^{-4}	Trafiken, fritiden, arbetet	Den viktigaste och vanligaste nivån. Individen är villig att anslå pengar, särskilt andra skattebetalares, för att reducera risken. Lagar och inspektionsmyndigheter finns. Propagandan har inslag av fruktan och egosim. "Det liv du kan rädda kan vara ditt eget".
1:100 000 eller 10^{-5}	Drunkning, kvävning, plötslig förgiftning	Samhällets intresse väsentligt lägre, lagstiftning vag och utan sanktioner, propagandan är av allmän karaktär.
1:1 000 000 eller 10^{-6}	Biologisk brusnivå, t ex blixt, getingstick	Samhället ointresserat (av att t ex utrota getingar). Att dö av blixtnedslag betraktas som osannolik kuriositet. Den, som ställt sig under eken, är "dum".

Osäkerheterna vid geotekniska beslut

Geoteknikerns arbete består till en stor del av beslutsfattande. Beslutet kan vara att välja grundläggningsmetod, att göra ytterligare grundundersökningar, att inte bygga osv men det viktiga är att slutprodukten av verksamheten är ett beslut. Dessutom skall beslutet vara det bästa beslutet, där "bästa" är definierat genom beslutskriterier.

Det stora problemet vid detta beslutsfattande är att det måste ske under osäkerhet. Vore allting helt känt är beslutsfattandet trivialt. De osäkerheter, som finns i den geotekniska beslutsprocessen kan indelas i tre klasser

- probabilistisk osäkerhet
- statistisk osäkerhet
- professionell osäkerhet

Probabilistisk osäkerhet uppkommer av att naturen är stokastisk (slumpmässig), dvs att det finns en slumpmässig variation i t ex skjuvhållfastheten. Man kan visserligen mycket väl hävda att hållfastheten har ett bestämt värde i varje punkt, men det väsentliga är att vi inte kan mäta i varje punkt utan av praktisk nödvändighet måste uppfatta naturen som slumpmässig. Denna slumpmässighet kan beskrivas med statistiska mått, man kan t ex ange att skjuvhållfastheten inom området är normalfördelad med medelvärdet 17 kPa och standardavvikelsen 3 kPa (Fig. 4).

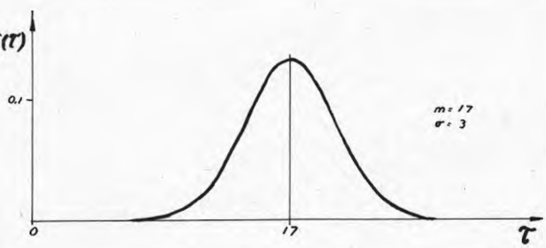


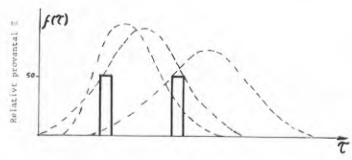
Fig. 4 Normalfördelad skjuvhållfasthet

På detta sätt har vi entydigt beskrivit skjuvhållfasthetens slumpmässiga variation. För en viss skjuvhållfasthet kan man alltså ange sannolikheten att verkliga värdet är lägre.

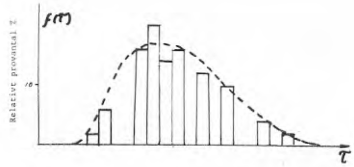
Den probabilistiska osäkerheten är alltså egentligen en följd av vår oförmåga att ange naturens egenskaper i varje punkt.

Statistisk osäkerhet uppkommer genom att vi, när vi vill beskriva den probabilistiska osäkerheten endast har ett begränsat antal mätningar att utgå ifrån. Intuitivt inser man att ju fler prover man har, desto säkrare kan man uttala sig om den verkliga variationen. Om man har ett litet antal prover, finns det ett flertal olika fördelningar som är lika troliga, se fig. 5a.

Om provantalet ökar minskar osäkerheten om vilken fördelning som är troligast, både till typ och parametrar (läges- och spridningsmått) se fig. 5b.



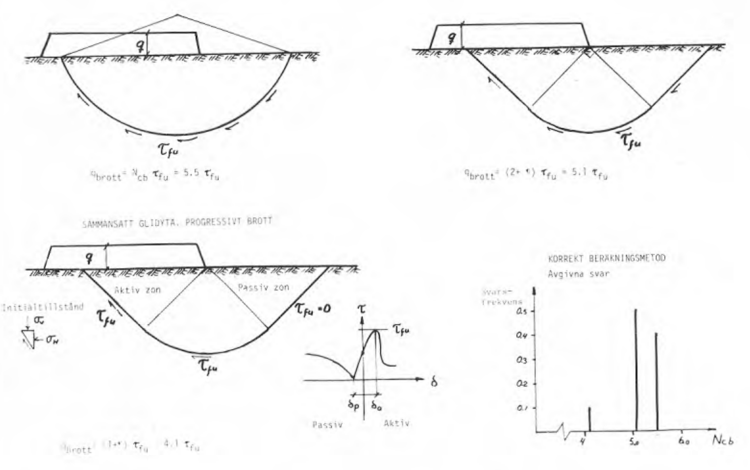
Figur 5a. Några tänkbara fördelningar vid få prov.(2 st)



Figur 5b. Sannolik fördelning vid stort provantal.

Professionell osäkerhet finns vid alla geotekniska beräkningar. Denna osäkerhet har inte med materialdata att göra utan med val av beräkningsmetod. Man är osäker på vilken metod som är representativ, tolkningen av mätvärden till de värden som skall användas i formlerna osv.

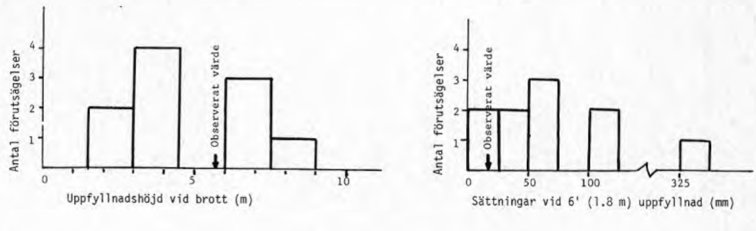
Ett exempel på denna professionella osäkerhet är resultatet av en enkät av Stille (1978). Härvid skulle deltagarna ange rätt beräkningsformel för beräkning av en bank på lera, där ju flera alternativa brottfigurer kan tänkas. Alternativen visas i fig. 6. I figuren anges också hur stor andel av de tillfrågade som ansåg respektive beräkningsmetod vara korrekt.



Figur 6. Professionell osäkerhet. Bank på lera. (Stille 1979)

Den professionella osäkerheten är som synes betydande även på ett så enkelt problem och måste alltså verkligen beaktas vid beräkningar. Metoder finns för detta, vilket kommer att illustreras i beräkningsexempel.

Att det finns en stor osäkerhet inom geotekniska beräkningar illustreras också av det kända försöket vid MIT, där 10 erkända geotekniker fick förutsäga uppfyllnadshöjden vid brott och sättningarna för en bank som uppfylldes på lera. Resultaten av förutsägelserna visas i fig. 7 (Hynes & Vanmarcke, 1975).



Figur 7. Professionell osäkerhet. Förutsägelser vid MIT-försöket.

Alternativt beslutskriterium - Förlustrisken

I det tidigare har risk definierats som sannolikhet för skada. Denna definition behålls framgent, bl a för att passa in i gängse språkbruk i svenska byggnormer etc.

Ofta är det dock inte denna risk man är intresserad av. Om man söker få fram ett system där man vill få den optimeringsmöjlighet som med konventionell säkerhetsfaktor saknas, måste man ha ett kriterium som har ett ekonomiskt mätetal.

Ett sådant är produkten av skadesannolikheten och skadans konsekvenser. Detta har tidigare framförts av författarna (Olsson & Stille, 1978) men då under beteckningen risk. För att som ovan sagts inte ha en annan definition på risk än den i Sverige antagna kommer i fortsättningen denna produkt att betecknas förlustrisk. (Ekonomisk risk är en annan möjlig beteckning, men eftersom skadan kan innebära andra förluster än pengar, t ex människoliv, föredras beteckningen förlustrisk.)

Detta tankesätt är intuitivt tilltalande, en skada med bagatellartade konsekvenser kan man acceptera att den händer, medan en skada med stora (eller troligen stora men okända) konsekvenser "aldrig" får inträffa. "Aldrig" måste här ses som en finit sannolikhet, dock måste den vara så liten att den inte nämnvärt inverkar på den totala förlustrisk vi lever under. (Med de beteckningar som anammats är dödsrisken en förlustrisk där konsekvensen = förlust av livet.)

Man kan nu sätta upp ett kriterium för att en konstruktion skall anses säker:

En konstruktion anses säker om dess förlustrisk kan accepteras.

Givetvis är det så, att man inte direkt kan multiplicera ihop sannolikhet och t ex antal döda. Katastrofer och liknande händelser måste vara mer sällsynta än vad en direkt proportionalitet ger. Man får en kurva för accepterandet av förlustrisken, som är en funktion av förlusten. Ett enklare sätt är att ändra skadekonsekvensen med en lämplig funktion så att man i beräkningarna använder en justerad konsekvens, som beaktar speciella omständigheter. Sådana kan vara stor förlust av människoliv, men också en jämförelsevis mindre förlust av pengar, om denna förlust kan sätta ett företag i konkurs. Om man i stället för den direkta konsekvensen använder den justerade fås det enklare uttrycket

Förlustrisk = P (skada) x skadekonsekvens

Ett exempel på dessa tankegångar återfinns i CIRIA Rep 63 (1977), där man inför "social criterion factors" som man dividerar antalet riskexponerade personer med (eller multiplicerar bassannolikheten med):

$$P_{ft} = \frac{10^{-4}}{n_r} K_s n_d$$

in which n_r is the average number of people within or near to the structure during the period of the risk

K_s is a social criterion factor, given in Table 3 for various types of structure

P_{ft} is the target probability of failure of the structure due to any cause in its design life

n_d is the design life of the structure in years

Tabell 2 Social criterion factors K_s (CIRIA Rep. 63)

Nature of structure	K_s
Places of public assembly, dams	0,005
Domestic, office or trade and industry	0,05
Bridges	0,5
Towers, masts, offshore structures	5,0

Vid uppgörandet av denna tabell har man utgått från en basrisk och sedan beaktat sådana faktorer som om man frivilligt utsatt sig för risken, behovet av tillflyktsort, stora konsekvenser etc.

Denna basrisk har satts till 10^{-4}, vilket man antagit vara den risk som man (i England) kan tolerera. Den är av samma storleksordning som olycksfall i hemmet. Det bör observeras, att den förlustrisk man här talar om, dödsrisken, ses som ett samhällsproblem. Man tar inga ekonomiska hänsyn.

Vid konstruktionsarbete har man förutom konsekvenser i form av riskerade människoliv även ekonomiska konsekvenser. Dessa kan ses som varande av två slag:

dels samhällets samlade förluster för denna verksamhet,
dels förluster som är förknippade med ett speciellt projekt.

Förlusterna behöver inte nödvändigtvis vara orsakade av skador! Ett konservativt byggande med onödigt låg skadesannolikhet medför ju också förluster, fastän dessa inte är i iögonfallande. Det har därför föreslagits bl a av Stille (1976) att man som optimal konstruktion väljer den där förväntad förlust blir minst, givetvis under bivillkoret att man även ur andra synpunkter är beredd att acceptera förlustrisken.

Man får ett uttryck av formen

$$E_t = E_i + p_f E_f$$

där E_t = förväntad total kostnad
E_i = initial kostnad
E_f = skadekostnad
p_f = risk (brottsannolikhet)

Med utnyttjande av denna princip får man ett instrument att balansera olika tänkbara kostnader mot varandra. Man kan t ex väga bättre förundersökning (= mindre brottsannolikhet) med dess kostnader mot totala förlustrisken (p_f E_f) o s v. Man har alltså genom användandet av förlustrisktänkandet fått en möjlighet att direkt "få betalt" för bättre grundundersökningar, tillförlitligare beräkningsmetoder etc.
Användandet av en förlustriskbaserad konstruktionsprincip ger även andra möjligheter. Förlustrisken är ju sammansatt av risken (= brottsannolikheten) och förlusten (=skadekonsekvensen). Man kan givetvis även operera med att minska konsekvenserna vid en given risk. Detta kan ske t ex genom att välja deformationståliga konstruktioner. Ett annat intressant alternativ är användandet av varningssystem, t ex skredvarnare.
Detta förfarande, att göra ett optimalt val mellan olika kostnader, kan ses som en applikation av beslutsteori på geotekniska problem. Vid beslutsteoretiska överväganden har man, förenklat uttryckt, ett antal möjliga vägar att gå, som var och en ger ett resultat (utfall), som är beroende av "Naturen". Med "Naturen" avser man de förhållanden, som visar sig råda, men som är obekanta när beslutet fattas. Tillvägagångssättet kan åskådliggöras med ett enkelt exempel:

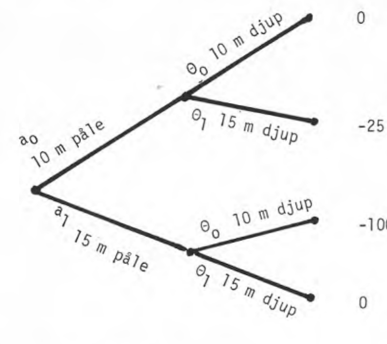
Man skall slå stödpålar till berg. Man vet att djupet till berg i området är antingen 10 eller 15 m, men man vet inte vilket djup som rådet på platsen. Skall man beställa 10 eller 15 m långa pålar?

Beroende på vad djupet visar sig vara får de olika valen följande utfall:

Vald åtgärd / Naturen	a_o Slå 10 m lång påle	a_1 Slå 15 m lång påle
Θ_o Djupet är 10 m	Ingen förlust	Pålen måste kapas. Förlust 25 enheter
Θ_1 Djupet är 15 m	Pålarna måste skarvas Förlust: 100 enheter	Ingen förlust

Figur 8a. Betalningsmatris

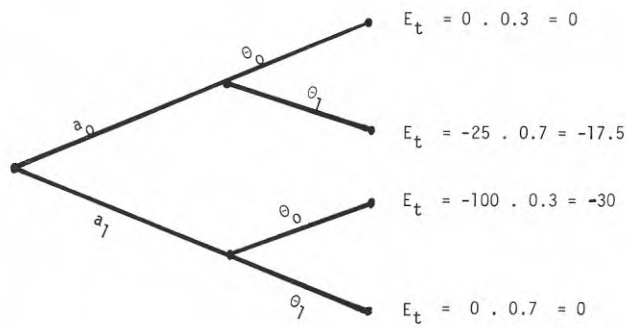
Ofta återger man alternativen i form av ett så kallat beslutsträd:



Figur 8b. Beslutsträd

Om man, förutom tänkbara åtgärder och möjliga förhållanden θ, även känner sannolikheten för att respektive θ skall vara det verkliga, kan man fatta ett optimalt beslut. Man väljer då det som har minsta förväntade förlusten min $\theta_n \cdot p(\theta_n)$.

Antag t ex att man av erfarenhet bedömer att sannolikheten för att djupet till berg är 10 m är 0.3, dvs p (θ_o) = 0.3 och p (θ_1) = 0.7. Beslutsträdet får då följande utseende med utsatta förväntade förluster E_t:



Figur 8c. Fullständigt beslutsträd

I detta fall bör man alltså välja att beställa 10 m långa pålar, eftersom man med den tillgängliga informationen då får den mindre förväntade förlusten (0 - 17.5 = -17.5).

Beslutsteorin kan sedan utvidgas så att man kan bedöma värdet av ytterligare information, dvs värdet av åtgärden a_n = bättre grundundersökning. (I detta fall bättre kunskap om djupet till berg.)

Sammanfattning

En övergång från dagens säkerhetsfaktor till ett system där risken eller förlustrisken används som beslutskriterium ger alltså många fördelar.

- Man får möjlighet att beakta och diskutera varje osäker del i beslutsprocessen för sig, vilket gör det möjligt att optimera sina insatser vad gäller konstruktionsarbetet

- Man får en möjlighet att direkt beakta konsekvenserna av en skada. Ur samhällets synpunkt torde detta främst komma att gälla personskador men för enskilda byggherrar kan det givetvis bli aktuellt att beakta även rent ekonomiska konsekvenser.

Övergången till detta tänkesätt är redan påbörjad i svenskt normarbete. I kommande normer för bärande konstruktioner kommer man nämligen att övergå till riskbaserade metoder, antingen genom att man gör en analys av risken eller genom att man använder den så kallade partialkoefficientmetoden. (Dessa metoder beskrivs i avsnittet Tillgängliga riskberäkningsmetoder.)

Av geotekniskt intresse är, att jord och berg i dessa normer betraktas som en del av konstruktionen. Man kommer alltså i framtiden i svensk geoteknik att arbeta enligt samma riktlinjer som gäller för övrigt konstruktionsarbete.

I Danmark och Norge finns motsvarande tendenser. I Danmark är den gällande grundläggningsnormen baserad på partialkoefficienter och i Norge arbetar Norska Geotekniska Föreningen på "sikkerhetsprinsipper" som också är baserade på partialkoefficientmetoden.

Även i övriga utlandet finns ett stort intresse för riskanalys inom geotekniken, speciellt kanske inom offshore- och jordbävningsområdena.

Ett slutligt påpekande bör göras: Ett "rätt" beslut behöver inte nödvändigtvis medföra att resultatet (utfallet) blir det önskade. Med "rätt" menas ett beslut fattat i enlighet med något accepterat beslutskriterium, t ex en norm eller ett ekonomiskt optimeringskriterium.

I normer etc har man ju de facto inte helt uteslutit möjligheten av skador, man har bara gjort den så liten att det är osannolikt att skador inträffar. En enstaka skada behöver därför inte innebära att beslutskriteriet är fel om det har följts i det aktuella fallet.

Följande exempel brukar ibland användas för att påvisa att ett beslut kan vara rätt även om utfallet blir fel:

Antag att man erbjuder följande vad:

Du skall singla slant 10 gånger i följd. Om Du inte får upp klave minst en gång har Du förlorat och får betala 1 krona. Om Du däremot får upp klave en eller flera gånger har Du vunnit och får då 1 000 kronor. Skall Du anta vadet?

Låt oss anta att Du accepterar vadet och får upp krona 10 gånger i följd och alltså förlorar. Var då beslutet att anta vadet felaktigt? Skulle Du trots utfallet anta vadet igen om det erbjöds Dig?

TILLGÄNGLIGA RISKBERÄKNINGSMETODER

På senare år har ett omfattande arbete gjorts runt om i världen för att utveckla beräkningsmetoder där hänsyn tas till risk. Merparten av arbetet har gjorts inom byggnadsstatiken och därför är metoderna inte alltid direkt lämpade för geotekniken med dess speciella förutsättningar. Även i Sverige arbetas med detta och det bör en än gång påpekas, att framtida normer kommer att vara mer eller mindre riskbaserade. Metoderna brukar indelas i tre nivåer, där skillnaden mellan nivåer bl a ligger i hur fullständig den statistiska analysen är.

Definitionerna av de tre nivåerna har varit något varierande. Vid en workshop 1976 (Dialog) angavs den nordiska uppfattningen vara följande:

Nivå 1: "Semi-probabilistisk" med karakteristiska värden och multiplikationsfaktorer.

Nivå 2: en interpolering mellan nivåerna 1 och 3, men inte helt definierad. Associeras ofta med andramomentets statistiska metoder.

Nivå 3: fullständig sannolikhetsteori, modellers händelser och sannolikhetsfördelning hos ingående variabler.

En tydligare definition är den som föreslagits av the Sub-Committee on First Order Reliability Concepts for Design Codes of the CEB-CECM-CIB-FIP-IABSE Joint Committee on Structural Safety:

Nivå 1: en designmetod vid vilken tillämplig säkerhetsnivå fås på (konstruktiva) elementnivå, genom att ett antal partiella säkerhetsfaktorer föreskrivs, vilka är relaterade till något i förväg definierat karakteristiskt värde på basvariablerna.

Karakteristiska värden ges som en funktion av medelvärden, variationskoefficienter och fördelningstyp. För givna karakteristiska värden, kan de partiella säkerhetsfaktorerna härledas från nivå 2, beroende på graden av säkerhet och variationen hos basvariablerna. Nivå 1 metoder kan göras identiska med nivå 2 metoder om säkerhetsfaktorerna är kontinuerliga funktioner av basvariablernas medelvärden och varianser och av säkerhetsindex. Existerande nivå 1 metoder ersätter dessa kontinuerliga funktioner med diskreta värden på faktorerna.

Nivå 2: en designmetod som innehåller säkerhetskontroll för bara en utvald punkt (eller punkter) på brottgränsen (sådan den definieras av tillämplig gränstillståndsekvation), snarare än en kontinuerlig process, som vid nivå 3. En nivå 2 metod innefattar att denna kontrollpunkt identifieras med en lämplig algoritm och att brottgränsen idealiseras i det området. Säkerhetsnivåer kan definieras genom säkerhetsindex eller ekvivalenta "operationella" sannolikheter på motsvarande sätt som för nivå 3-metoder.

Nivå 3: säkerhetskontroll baserad på en "exakt" probabilistisk analys för hela stomsystem och som använder fullständiga fördelningar, med säkerhetsnivåer som är baserade på överenskomna brottsannolikheter, vilka tolkas som relativa frekvenser.

Nedan följer en kortfattad beskrivning av metoderna. Den som är intresserad av ett fördjupat resonemang hänvisas till CIRIA Rep. 63 (1977). En svensk genomgång av främst nivå 2 metoder återfinns i Åkerlund (1974).

Fullständig statistisk analys - nivå 3

Detta är den mest fullständiga metoden men den innehåller många teoretiska och numeriska svårigheter. Metoden torde knappast komma till användning som rutinmetod, men är intressant dels som kalibreringsmetod för de förenklade metoderna, dels för stora projekt (t ex offshore) eller där man vill optimera en konstruktion på beslutsteoretiska grunder. Geotekniska beräkningar ger en del speciella problem. Dessa orsakas främst av det begränsade antalet prov och av osäkerheten i beräkningsmodellen. Av dessa skäl förordas användandet av s k bayesiansk statistik. Teorin för denna och exempel på användningen ges i kapitlet "Riskbedömning med bayesiansk statistik".

Brottsannolikheten (risken) beräknas som sannolikheten att mothållande krafter är mindre än pådrivande. Detta görs bäst genom att man först tecknar det allmänna uttryck $g(R,L) \leq 0$ som beskriver brottvillkoret,
där R är mothållande krafter och
L är pådrivande krafter.

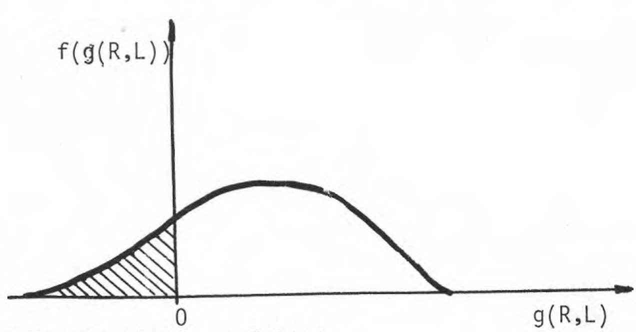
Därefter sätts aktuella värden på ingående variabler in i uttrycket $g(R,L)$.
Brottsannolikheten blir då sannolikheten för alla kombinationer av R och L, som uppfyller brottvillkoret $g(R,L) \leq 0$.

Genom att sedan införa alla osäkerheter, inklusive den professionella, får man en bästa uppskattning av risken:

$$\tilde{P}_{brott} = P(\tilde{X} \cdot g(\tilde{R},\tilde{L}) \leq 0)$$

där $\tilde{X}$ är bästa (bayesianska) uppskattning av kvoten mellan sant värde och det beräknade värdet och $\tilde{R}$ resp $\tilde{L}$ är bästa uppskattningar av mothållande resp pådrivande krafter. (Givetvis ingår oftast en del parametrar, som inte har någon osäkerhet, d.v.s är deterministiska).

Den sökta sannolikheten motsvaras av den skuggade ytan i figur 9.

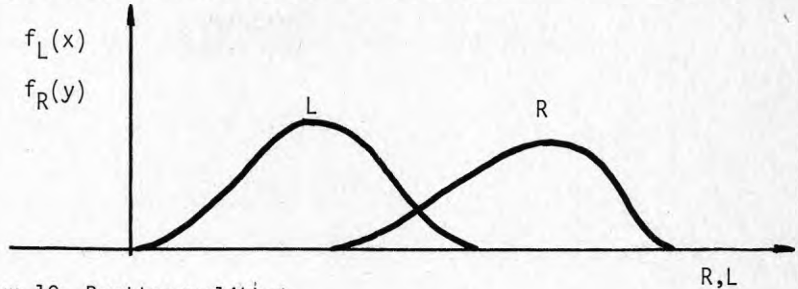


Figur 9. Brottsannolikhet

Ibland uttrycker man mothållande krafter och laster separat och för ett uttryck för brottsannolikheten av formen

$$P_{brott} = P\left(R \leq L\right)$$

vilket kan återges grafiskt som i figur 10.



Figur 10. Brottsannolikhet

Brottsannolikheten ges i detta fall av:

$$P(brott) = \iint\limits_{x>y} f_L(x)\, f_R(y)\, dx\, dy$$

Sannolikheten för brott (risken) och vår uppskattning är inte ett fixerat värde utan ändras om vi får mer information. Man får alltså ett ändrat värde på risken, om man uppdaterar någon av de ingående stokastiska variablerna. Sådan uppdatering kan göras t ex på basis av ytterligare provtagning. Om observationer av hela konstruktionens uppförande finns, t ex genom lastmätningar, kan den professionella osäkerheten (genom stokastiska variabeln X) uppdateras.

Genom tillämpning av beslutsteori fås möjlighet att optimera ett mätprogram så att man får "bästa utdelning" i form av minskad osäkerhet.

Approximativa statistiska metoder - nivå 2

Dessa metoder torde bli de metoder som föreskrivs t ex i kommande svenska normer, som alternativ till Nivå 1 metoder (partialkoefficientmetoden).

Nedanstående beskrivning avser endast att belysa principerna och går inte in på en del problem som ofta förekommer och som gör att en mer avancerad form av metoden krävs. Se Ciria Rep. 63 (1977) och/eller Åkerlund (1974).

a) definiera brottgränstillståndet i basvariabler

b) beskriv basvariablerna med följande statistiska mått: medelvärde, standardavvikelse och möjligen fördelningsform

c) bestäm den punkt på brottgränsen där (eller nära den punkt där) det är troligast att brott inträffar (punkten kallas vanligen designpunkt)

d) linearisera brottgränsen vid designpunkten och uppskatta konstruktionens tillförlitlighet, antingen som säkerhetsindex β eller som en sannolikhet. Om man konstruerar för att nå en viss tillförlitlighet varierar man en parameter (t ex en dimension) tills man når önskad tillförlitlighet.

Ett exempel (hämtat ur Ciria Rep. 63) kan tjäna till att klargöra förfarandet.

Exempel:

Betrakta en dragen cylindrisk stång. Den funktion, som definierar brottgränstillståndet kan tecknas:

$$Z = \frac{\pi \ d^2 \cdot \sigma_b}{4} - P = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} d & = & \text{stångens diameter} \\ \sigma_b & = & \text{stångens brotthållfasthet} \\ P & = & \text{lasten på stången} \end{array}\right\} \text{basvariabler}$$

Om endast d och σ_b antas vara variabler och P är en känd, konstant last beskriver ekvationen Z=0 en kurva i σ_b-d-planet. Denna kurva skiljer det säkra området från brottområdet (Z<0).

Basvariablerna d och σ_b antas ha följande statistiska fördelningar:

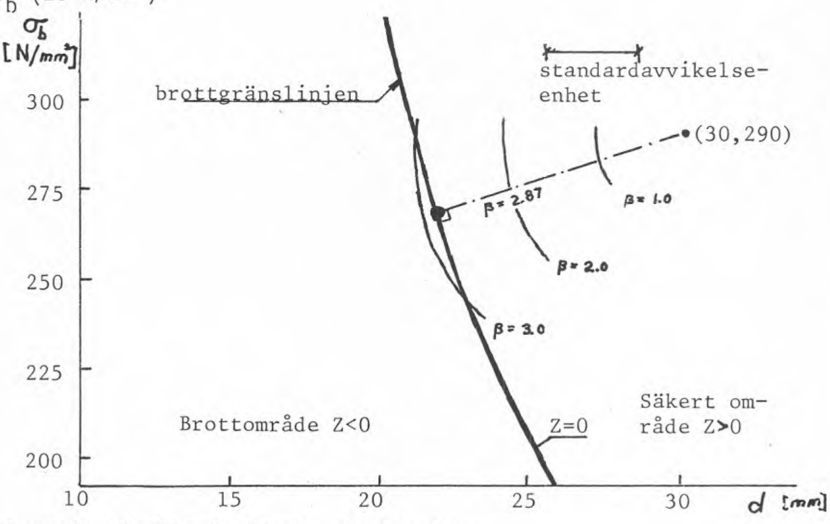
d normalfördelad med medelvärde 30 mm och standardavvikelse 3 mm

σ_b normalfördelad med medelvärde 290 N/mm^2 och standardavvikelse 25 N/mm^2

I fig. 11 visas en del av brottgränslinjen för P =100 kN, d.v.s

$$Z = 0 \Rightarrow \sigma_b = \frac{4\ P}{\pi\ d^2} = \frac{400}{\pi\ d^2}$$

Skalorna längs d- och σ_b- axlarna har valts så att en standardavvikelse av d (3mm) har samma längd som en standardavvikelse av σ_b (25 N/mm^2).



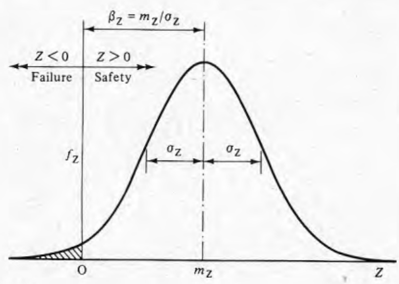
Figur 11. Brottgränslinje. Designpunkt.

Under dessa villkor är linjen från medelpunkten (30, 290) till designpunkten på brottgränslinjen normal mot denna och avståndet från medelpunkten har sitt minimum. Detta avstånd, mätt i standardavvikelseenheter, kallas s ä k e r h e t s i n d e x β.

Ingenting hindrar att man har flera basvariabler eller en mer komplex funktion Z = 0, som beskriver brottgränsen. Funktionen kan omfatta flera bärande enheter och även omfatta flera brottmekanismer.

Det är även möjligt att kompensera för osäkerheter i den matematiska modellen genom att som en variabel införa kvoten x_m mellan observerade och beräknade värden med dess medelvärde och standardavvikelse.

Avståndet mätt i standardavvikelseenheter från m_z till Z = 0, d.v.s säkerhetsindex β, kan vid vissa av nivå 2-metoderna ses som kvoten mellan medelvärdet och standardavvikelsen för Z. Se figur 12.



Figur 12. Säkerhetsindex β

Under vissa förutsättningar, nämligen att Z är en linjär funktion av basvariablerna och att dessa är normalfördelade kan brottsannolikheten som är förknippad med ett visst β lätt beräknas som Φ $(-\beta)$ där Φ betecknar normalfördelningen.

Partialkoefficientmetoden - nivå 1

Den metod, som torde bli den mest använda vid dimensionering enligt kommande svenska normer är en nivå 1-metod, partialkoefficientmetoden. Den torde bli rutinmetoden och de mer komplicerade metoderna lär användas främst för kalibrering samt i viss mån för sådana projekt där säkerhetsnivån är av kritisk betydelse eller där man vill optimera.

Partialkoefficientmetoden har följande principiella uppbyggnad: Laster och materialegenskaper uttrycks genom så kallade k a r a k t e r i s t i s k a v ä r d e n. Dessa omformas till d i m e n s i o n e r i n g s v ä r d e n genom att karakteristiska värdena för lasterna multipliceras och för materialegenskaperna (främst hållfasthet) divideras med en p a r t i a l k o e f f i c i e n t för last respektive hållfasthet.

Sedan kan bärförmågan R och lasteffekten S tecknas som funktion av dimensioneringsvärdena.

Villkoret blir då $S \leq R$

Karakteristiska värden brukar oftast avse en bestämd fraktil (t ex 5- respektive 95-percentilen) av hållfasthetens respektive lastens statistiska fördelning.

Partialkoefficienternas uppbyggnad bestäms i normer och de kan ta hänsyn till olika osäkerheter och eventuellt även till konsekvenser av brott.

Som exempel visas här den i Statens planverks förslag (daterat 78-06-27) till Allmänna bestämmelser för bärande konstruktioner (AK 78) föreslagna uppbyggnaden av partialkoefficienter för materialegenskaper:

"Partialkoefficient γ_m

Genom γ_m tas hänsyn till

- risken för att värdet på materialegenskapen avviker ogynnsamt från det karakteristiska värdet

- osäkerheter i relationen mellan materialegenskaper i konstruktionen och resultat erhållna vid materialprovning, dvs osäkerheter i omvandlingsfaktorn eller omvandlingsrelationen enligt kap. 5

- osäkerheter hos storheter som beskriver mått och form i de fall dessa osäkerheter inte beaktas särskilt, se nedan

- osäkerheter i beräkningsmodellen, såvitt den avser faktorer som är materialberoende

- säkerhetsklass för aktuell konstruktionsdel

Partialkoefficienter γ_m ges i konstruktionsbestämmelserna."

Det är visserligen möjligt att välja partialkoefficienter så att de svarar mot en bestämd brottsannolikhet eller ett bestämt värde på säkerhetsindex β, men då måste de uttryckas som funktioner av basvariablerna och deras variationskoefficienter. För att kunna behålla enkelheten hos metoden och utnyttja fixa värden på partialkoefficienterna tvingas man därför acceptera att man för olika konstruktioner kan få olika tillförlitlighet. Bestämningen av lämpliga partialkoefficienter är därför viktig, så att man dels får en acceptabel tillförlitlighet för olika konstruktioner, dels får ekonomiska konstruktioner. Väsentligt är bl a att partialkoefficientmetoden inte leder till ändrade dimensioner hos konstruktioner av vilka man har lång erfarenhet och kan betrakta som (sub-)optimala.

Inom geotekniken är bestämningen av karakteristiska värden och även partialkoefficienter förknippade med speciella problem. Detta kommer att behandlas i avsnittet "Forskningsbehov".

Sammanfattning

Tre metoder finns för dimensionering och kontroll där man har en accepterad risk som bas:

Nivå 3 Fullständig statistisk analys. Risken beräknas.

Nivå 2 Förenklad statistisk analys. Ett riskkorrelerat säkerhetsindex β används som kriterium.

Nivå 1 Partialkoefficientmetoden.
Risken beräknas inte. I stället söker man genom så kallade karakteristiska värden och partialkoefficienter få en konstruktion som har en tolerabel risknivå. I praktiken får olika typer av konstruktioner olika risk.

Samtliga metoder torde komma att användas inom geotekniken. Huvudsakligen blir det partialkoefficientmetoden, vilken kommer att bli rutinmetod. De övriga två kommer dels att användas i normarbetet för bestämning av partialkoefficienter, dels för projekt där optimering är väsentlig eller där man vill noggrant bestämma risken (nivå 3-metoden).

RISKBEDÖMNING MED BAYESIANSK STATISTIK

Inledning

Som tidigare diskuterats, kommer normarbetet på det geotekniska området att kräva tillgång till statistiska analysmetoder. Dessa kommer givetvis också att användas vid analys av kvalificerade geotekniska problem. På grund av geoteknikens speciella förhållanden (litet provantal, empiriska beräkningsmetoder) kan s.k bayesiansk statistik ge vissa fördelar.
I det följande kommer först begreppet sannolikhet och sedan bayesiansk statistik att behandlas.
Användandet av statistiken på ett geotekniskt problem kommer slutligen att illustreras med ett exempel.

Sannolikhet

I rapportens inledande delar användes begreppet sannolikhet utan att närmare definieras. Detta var avsiktligt, eftersom tankegångarna där kunde följas med en intuitiv uppfattning om innebörden av sannolikhet. I det följande krävs dock att begreppet definieras och diskuteras, eftersom det kan tolkas på olika sätt. De två definitioner av sannolikhet, som här kommer att diskuteras är den frekventistiska och den subjektiva.
Det bör framhållas, att samma räkneregler för båda tolkningarna kan härledas ur samma axiom (Kolmogorovs axiomsystem).

<u>Kolmogorovs axiomsystem</u>. Ett sannolikhetsmått $P(\cdot)$ är en funktion som åt händelser A, B etc i ett utfallsrum Ω tilldelar tal $P(A)$, $P(B)$ etc, kallade sannolikheten för A, B etc, så att följande axiom gäller:

Axiom 1. $0 \leq P(\cdot) \leq 1$

Axiom 2. $P(\Omega) = 1$

Axiom 3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ om A och B är disjunkta

Ibland måste man ersätta axiom 3 med

Axiom 3'. Om A, B, C,... är en uppräknelig följd av parvis disjunkta händelser, gäller att $P(A \cup B \cup C \cup \ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots$

Man brukar kalla Ω och $P(\cdot)$ gemensamt för ett <u>sannolikhetsrum</u> (probability space). För att detta skall vara klart beskrivet har man också att ange för vilka händelser som $P(\cdot)$ är definierat.

Antag att dessa händelser tillsammans kallas för $\mathcal{F}$, dvs $\mathcal{F}$ är ett antal delmängder av Ω. Då kan vi ge axiomsystemet en matematiskt sett något fullständigare beskrivning: Ett sannolikhetsmått $P(\cdot)$ är en funktion som åt varje händelse $A \in \mathcal{F}$ tilldelar ett tal $P(A)$ osv.

Det skall understrykas att de tre axiomen icke utsäger något i detalj om hur sannolikheterna skall väljas - det får, som redan sagts, avgöras från fall till fall. Axiomsystemet beskriver därför bara den allmänna strukturen hos en slumpmodell.

ur Blom (1970)

Den "klassiska", frekventistiska tolkningen av sannolikhet är de flesta bekanta med : "$\dfrac{\text{Antalet gynnsamma händelser}}{\text{Totala antalet händelser}}$"

Korrekt definierat

$$P(E) = \frac{\text{antalet elementarhändelser som utgör E}}{\text{totala antalet elementarhändelser i utfallsrummet } \Omega}$$

Det måste observeras, att definitionen talar om totala antalet elementarhändelser, inte om antalet händelser "i långa loppet". Man kan dock visa att om man upprepar ett försök n gånger och att om r är antalet händelser som E inträffade så gäller

$$P\left[\left(\frac{r}{n} - P(E)\right) \geq \varepsilon\right] \to 0 \quad \text{för } n \to \infty$$

eller i ord: sannolikheten att kvoten $\frac{r}{n}$ skall skilja sig från den sökta sannolikheten med värdet ε eller mer kan fås att gå mot noll om antalet försök är mycket stort.

Problemet för geoteknikern är att man oftast inte är intresserad av denna sannolikhet som ju beskriver troliga utfallet av ett stort antal identiska försök. Även om alltså en frekventistisk tolkning är begreppsmässigt klar och tilltalande är det ofta så att den i praktiken inte är speciellt användbar, detta på grund av kravet på ett stort antal likadana prov. Man saknar oftast tillräcklig erfarenhet av t ex skred under jämförbara förhållanden för att därur kunna göra en "objektiv" (helt försöksbaserad) uppskattning av skredsannolikheten för dessa slänter. Oftast har man ju bara ett "försök", t ex en lerslänt och är intresserad av sannolikheten för att just denna lerslänt skall skrida.

En möjlighet att komma förbi detta problem är att arbeta med subjektiva sannolikheter. Ämnet är, åtminstone i statistiska fackkretsar, kontroversiellt, men användadet av denna typ av sannolikheter är accepterat och har stora fördelar. Denna subjektiva sannolikhet är dessutom den "sannolikhet" man använder i dagligt tal:"Sannolikheten att det skall snöa i morgon är 70%."

Hur skall man då uppfatta en subjektiv sannolikhet?

Ett sätt att tolka den är som mått på den tilltro man har till att en händelse skall inträffa, "strength-of-belief".

En annan tolkning är den som ges av Tribus (1970): "an encoding of knowledge",alltså ett sätt att ge ett numeriskt värde på den totala kunskap vi har,som är relevant för händelser i fråga, eller mer lösligt uttryckt, vår erfarenhet.

Man måste observera, att en subjektiv sannolikhet är något man åsätter en händelse, man kan givetvis inte mäta den. Vid åsättandet måste man också följa de axiom (Kolmogorovs) som man har som bas för sitt räknesystem för sannolikheter.

Givetvis kräver åsättandet av subjektiva sannolikheter mer än att man bara "tycker till" även om erfarna personer direkt kan ge ett relativt gott värde baserat på lång erfarenhet. Normalt krävs ett mera metodiskt förfarande och det finns flera alternativ. För enstaka händelser används bl a

- jämförelse med sannolikheten för händelser, som personen är kant med, ofta av typen sannolikhet för händelser i kortspel etc.

Uttalandet "Det är troligare att jag kan säga vilket kort som ligger överst i en lek än att sponten rasar" betyder att P (sponten rasar) < 0,02.

att ge odds för en händelse

"Jag tycker att oddsen 15 till 1 att skjuvhållfastheten är större än 13 kPa är rätt" betyder

$$P\ (\tau > 13\ \text{kPa}) = \frac{15}{15+1} \approx 0{,}94$$

att utnyttja s k ekvivalenta lotterier, där personen får välja mellan ett lotteri med givna sannolikheter och ett där händelsen ingår.

Lotteri A

Du vinner 100 kr med sannolikheten 0.1.
Du vinner 0 kr med sannolikheten 0.9.

Lotteri B

Du vinner 100 kr om huset sätter sig mindre än 3 cm.
Du vinner 0 kr om huset sätter sig mer.

Genom att variera sannolikheterna i lotteri A kan man komma till det läge där personen inte föredrar det ena lotteriet före det andra utan de är likvärdiga. Då har man fått fram den subjektiva sannolikheten för den aktuella händelsen.

När det gäller att få fram fördelnings- eller frekvensfunktioner brukar man använda en liknande metod. Man kan t ex ta fram det värde som det är lika troligt att det sanna värdet ligger över som under (50-percentilen) osv. Metodiken finns beskriven t ex av Baecher (1972). Ett exempel med geoteknisk anknytning redovisas av Folayan, Hoeg & Murarka (1970).

Det måste observeras, att subjektiva sannolikheter inte utesluter användandet av prover. Det är endast ett sätt att tolka begreppet sannolikhet. Den väsentliga skillnaden mellan den frekventistiska och den subjektiva, icke-frekventistiska, uppfattningen är att man vid den icke-frekventistiska uppfattningen får åsätta sannolikheter på naturen. "Sannolikheten att det finns ett siltlager på denna plats är 80%" är ett uttalande som inte är acceptabelt vid den frekventistiska tolkningen ty enligt den uppfattningen måste man utgå från att det antingen finns ett siltlager (P = 1) eller att det inte finns ett (P=0). Frekventistiskt anger man i stället sannolikheten att vid ett försök finna ett siltlager om det i verkligheten existerar "Sannolikheten att finna ett existerande siltlager med denna metod är 80%."

Med hänsyn till den frekventistiska metodens inskränkningar torde den subjektiva tolkningen vara den som är mest lämplig inom geotekniken, framförallt därför att den är praktiskt användbar, operationell (Winkler, 1972).

Något som ytterligare talar för den subjektiva uppfattningen är att den kan kopplas med Baye's teorem, vilket kommer att beskrivas nedan. Då utnyttjar man möjligheten att utgå från en a priori-sannolikhet (a priori betyder här: före försöket) och sammanväga den med ett försöksutfall för att få en a posteriori-sannolikhet. De beskrivna metoderna för åsättande av subjektiva sannolikheter får då en mycket stor betydelse när det gäller att på ett strikt sätt tillvarata geoteknisk erfarenhet från liknande objekt och objekt i närheten.

Bayes' teorem

En gren av statistiken, som på senare tid fått stor tillämpning bl a inom geotekniken är vad som lösligt kallas bayesiansk statistik. Den användes både för inferens och beslut och kan egentligen användas oberoende av vilken tolkning man har av sannolikhet. I praktiken har det dock blivit så att man med bayesiansk statistik avser statistik där man utnyttjar Bayes' teorem kombinerat med subjektiv sannolikhetstolkning. Nedan kommer att ges en kortfattad redogörelse för de viktigaste dragen, ytterligare information kan lämpligen hämtas ur Benjamin & Cornell (1970) eller Ang & Tang (1975).

Betrakta n st ömsesidigt uteslutande händelser E_1, E_2 ... E_n som tillsammans fyller upp hela utfallsrummet, dvs endast en av händelserna kan inträffa men någon av dem måste inträffa.

Bayes teorem ger svar på frågan:

Om händelsen A har inträffat, vad är då den betingade sannolikheten att händelsen E_i också inträffar? Svaret är:

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)\,P(E_i)}{P(A)}$$

dvs

sannolikheten att E_i inträffar om A har inträffat är lika med den betingade sannolikheten att A inträffar om E_i har inträffat multiplicerad med sannolikheten att E_i inträffar och dividerad med sannolikheten att A inträffar.

Nämnaren kan även uttryckas som

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|E_j)\,P(E_j)$$

Man får då följande lydelse på Bayes' teorem.

$$P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)\,P(E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|E_j)\,P(E_j)}$$

Om händelsen A betecknar utfallet av ett försök inser man lätt att Bayes'teorem kan användas för att uppdatera en sannolikhet: $P(E_i)$ är sannolikheten att E_i skall inträffa innan försöket utförts, a priori sannolikheten för E_i . $P(A|E_i)$ är sannolikheten att händelsen A skall inträffa om E_i har inträffat, likelihood.

$P(E_i|A)$ är sannolikheten för E_i när A har inträffat a posteriori-sannolikheten för E_i.

Nämnarens funktion är att normera $P(E_i|A)$ så att denna blir en sannolikhet som uppfyller axiomen. Kravet på händelserna E_i kvarstår, de måste vara ömsesidigt uteslutande och uppfylla hela utfallsrummet.

Exempel:

Provbelastning av pålar.
För pålarna i ett projekt gäller att de konstruerats för en last av 60 ton vilket under normala förhållanden är tillräckligt. Under mycket extrema förhållanden kan pålarna komma att belastas med 90 ton.
Baserat på sin erfarenhet, grundundersökningar och slagningsprotokoll, åsätter geoteknikern en sannolikhet av 70% på händelsen att en godtycklig påle kan bära 90 ton. Erfarenhetsmässigt vet han också att av provbelastade liknande pålar, som inte kunnat bära 90 ton, 60% gick till brott vid en last mindre än 80 ton. Geoteknikern vill förbättra sin uppskattning av sannolikheten att en påle kan bära extremlasten och låter därför provbelasta en påle till 80 ton. Vad är den nya sannolikheten att pålen kan bära 90 ton?

Inför följande beteckningar:

E_1 = pålen kan bära 90 ton

E_2 = pålen kan inte bära 90 ton

A = pålen kan bära 80 ton vid provbelastningen

$\bar{A}$ = pålen kan inte bära 80 ton vid provbelastningen

Ur den givna informationen fås följande sannolikheter

$P(E_1) = 0.70$

$P(E_2) = 0.30$

$P(A|E_1) = 1.0$ (om pålen kan bära 90 ton kan den bära 80!)

$P(\bar{A}|E_2) = 0.60$

$P(A|E_2) = 0.40$ (av provbelastade pålar som inte burit 90 ton har 40% burit 80 ton. Ges av $P(\bar{A}\ E_2) = 0.60$)

Tillämpa Bayes' teorem på försöksresultatet (pålen bär 80 ton = A):

$$P(E_1|A) = \frac{P(A|E_1)\ P(E_1)}{P(A|E_1)\ P(E_1) + P(A|E_2)\ P(E_2)}$$

$$P(E_1|A) = \frac{1.0\ .\ 0.70}{1.0\ .\ 0.70 + 0.40\ .\ 0.30} = 0.85$$

Sannolikheten att pålen skall bära lasten 90 ton har alltså ökat från 0.70 till 0.85 efter det att provresultatet erhölls.

Villkoret för nämnaren är uppfyllt, händelserna E_1 och E_2 är ömsesidigt uteslutande och $E_1 + E_2 = 1$.

Likelihood är som sagts sannolikheten att få ett viss experimentresultat om en given händelse antas ha inträffat.

Ibland är experimentmetoden man använder inte 100% rättvisande. Uppfattningen om metodens tillförlitlighet kan då bakas in i likelihood. Likelihood är ju också en sannolikhet och den kan subjektivt åsättas, t ex enligt metoder som tidigare angivits. Följande exempel, idén hämtad ur Benjamin & Cornell (1970) får illustrera:

Man önskar vid en ombyggnad utnyttja befintliga grundplintar på berg och behöver uppskatta använd betongkvalité i plintarna. Ansvarig ingenjör studerar plintarnas utseende och utgående från sin erfarenhet och plintarnas tidigare bärförmåga åsätter han följande a priori-sannolikheter för olika betongkvalitéer:

Betongklass	A priori-sannolikhet
K 150	0.3
K 200	0.6
K 250	0.1
	1.0

För att göra uppskattningen säkrare tänker man borra ur cylindrar och provtrycka dem. Ingenjören anser sådana prov relativt tillförlitliga men inte helt avgörande. Han åsätter därför provningsmetoden tal, som återspeglar dess tillförlitlighet i form av betingade sannolikheter:

P(testresultat/verklig hållfasthet)

Testresultat	Hållfasthet		
	K 150	K 200	K 250
z_1 (stöder antagandet K 150)	0.7	0.2	0
z_2 (stöder antagandet K 200)	0.3	0.6	0.3
z_3 (stöder antagandet K 250)	0.0	0.2	0.7
	1.0	1.0	1.0

Ett prov borras ur och provas och resultatet (med hänsyn till hållfasthetstillväxt etc) stöder antagandet K 150, dvs man har observerat z_1.

De av provresultatet betingade sannolikheterna blir då enligt Bayes' teorem

$$P(K\ 150|z_1) = \frac{0.7 \cdot 0.3}{0.7 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.6 + 0.1} = \frac{0.21}{0.33} = 0.635$$

$$P(K\ 200|z_1) = \frac{0.2 \cdot 0.6}{0.33} = 0.365$$

$$P(K\ 250|z_1) = \frac{0 \cdot 0.1}{0.33} = 0$$

Provresultatet har alltså uteslutit K 250 som en möjlig hållfasthet och skiftat a priori-sannolikheten mot K 150, det värde som stöds av provet.

Sammanfattning:

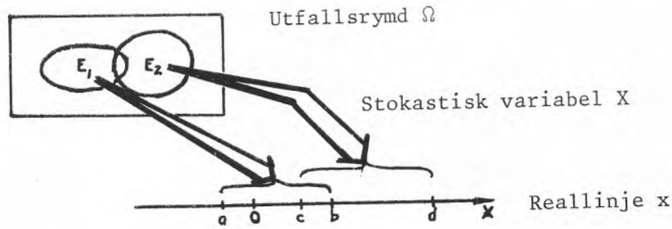
Ovan har visats hur man med Bayes´ teorem kan väga samman en a priori-sannolikhet för en händelse med ett provresultat till en a posteriori-sannolikhet. Denna är en betingad sannolikhet, nämligen en sannolikhet betingad av provresultatet.

(Egentligen är också a priori-sannolikheten betingad, nämligen av all information som använts vid åsättandet. Man ser därför ibland den skriven t ex som $P(A|I)$ och motsvarande a posteriori-sannolikhet som $P(A|T,I)$ där T är provutfallet. I denna rapport görs för enkelhetens skull avsteg från detta skrivsätt.)

Bayesiansk statistik

I det föregående visades tillämpningen av Bayes´ teorem. I det praktiska arbetet har man behov av att arbeta med stokastiska variabler och sannolikheter.

En stokastisk variabel är en funktion som överför en händelse i ett utfallsrum till reallinjen.



Figur 13. Stokastiska variabeln X

Eftersom ett visst värde på en stokastisk variabel representerar en händelse, kan den stokastiska variabeln anta detta värde med en viss sannolikhet. Den regel, som beskriver sannolikheten att den stokastiska variabeln X skall vara mindre än ett givet värde kallas dess fördelningsfunktion $F_X(x)$.

$$P(X \leq x) \equiv F_X(x)$$

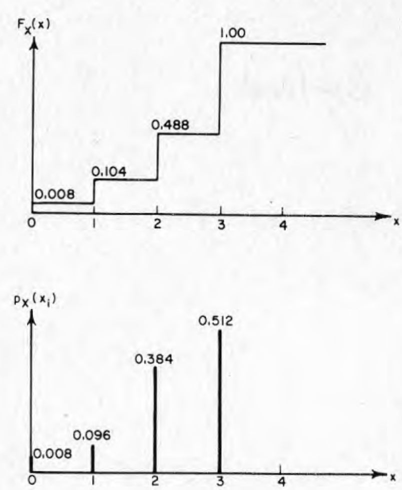
X kallas en diskret stokastisk variabel om endast vissa diskreta värden på x har en sannolikhet större än 0. Om det finns ett sannolikhetsmått förknippat med varje värde på x kallas X en kontinuerlig stokastisk variabel.

För en diskret stokastisk variabel X kan dess fördelningsfunktion också beskrivas av dess sannolikhetsfunktion, vilken helt enkelt uttrycker $P(X = x)$ för alla x. Se figur 14.

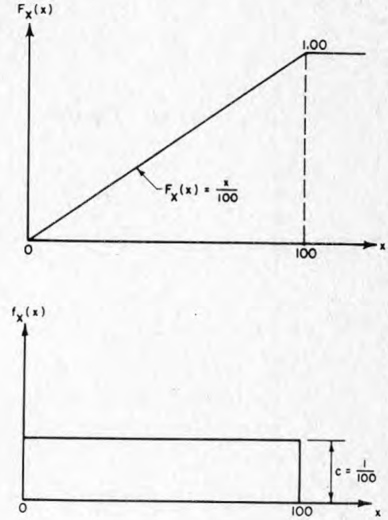
För en kontinuerlig stokastisk variabel kan man istället för fördelningsfunktionen ange frekvensfunktionen

$$f_X(x) = \frac{d\,F_X(x)}{dx}$$

$f_X(x)$ anger inte sannolikheten att X skall anta värdet x. Däremot anger $f_X(x)\,dx$ sannolikheten att X skall ligga i intervallet x till $x+dx$.



Figur 14a. Fördelnings- (överst) och sannolikhetsfunktion för en diskret stokastisk variabel.



Figur 14b. Fördelnings- (överst) och frekvensfunktion för en kontinuerlig (rektangelfördelad) stokastisk variabel.

Ofta använder man sig av ett förkortat skrivsätt för fördelningsfunktionen etc. Man beskriver funktionen med karakteriserande mått, parametrar. Exempelvis kan en typ av fördelningsfunktion, normalfördelningen, anges med de två parametrarna medelvärde och standardavvikelse.

Precis som för händelser kan Bayes´teorem tecknas för stokastiska variabler. Detta görs via fördelningsfunktionens parametrar.

Baye's teorem säger att a posteriori-sannolikheten för en parameter Θ är en produkt av tre faktorer

$$\begin{pmatrix}\text{A posteriori-}\\ \text{sannolikhet för}\\ \Theta\text{, givet test-}\\ \text{utfallet } z_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{normaliserande}\\ \text{konstant}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{likelihood för}\\ \text{provutfallet } z_k\\ \text{givet } \Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{a priori-}\\ \text{sannolikheten}\\ \text{för } \Theta\end{pmatrix}$$

För det diskreta fallet

$$P(\Theta = \theta_i \mid z_k) = \frac{P(z_k \mid \Theta = \theta_i)\ P(\Theta = \theta_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(z_k \mid \Theta = \theta_i)\ P(\Theta = \theta_i)} \qquad i = 1.2 \ldots n$$

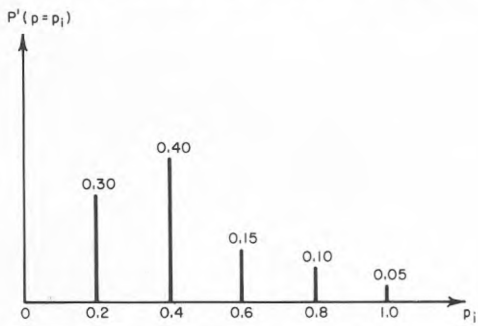
Man brukar använda beteckningarna P" och P' för a posteriori- respektive a priori-sannolikheterna. Ofta brukar man i formlerna inte heller sätta ut den stokastiska variabeln.

Ovanstående formel blir då

$$P''(\Theta_i) = \frac{P(z_k \mid \theta_i)\, P'(\theta_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(z_k \mid \theta_i)\, P'(\theta_i)}$$

A priori och a posteriori avser liksom tidigare i förhållande till när ytterligare information (provresultat) blir inkluderat. En a posteriori-funktion kan bli en a priori-funktion om nya prov tas, nämligen a priori den nya informationen.

Exempel (ur Ang & Tang, 1975). Pålarna för en hög byggnad var ursprungligen konstruerade för en last av 250 ton, men hänsyn hade inte tagits till sällsynta extrema vindlaster som kan öka pållasterna upp till 300 ton. Man önskar uppskatta konstruktionens säkerhet med hänsyn tagen till extremlasterna. Konsulterande ingenjören uppskattar att sannolikheten p att pålarna inte bär lasten 300 ton varierar mellan 0.2 och 1.0. Utgående från sin erfarenhet åsätter han en sannolikhetsfunktion på p, se fig. 15a. (Eftersom inga försöksresultat finns är detta en a priorifördelning.)



Figur 15a. A priorifördelning för p

Utgående från teoremet om totala sannolikheten fås den uppskattade sannolikheten för pålbrott vid en last av 300 ton:

$$\hat{p} = E(p') = 0.2 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 0.1 +$$

$$+ 1 \cdot 0.05 = 0.44$$

Man provbelastar en påle och finner att brott uppträder för en last som understiger 300 ton. Med detta provresultat uppdaterar man sedan sannolikhetsfunktionen för p:

$$P''(p = 0.2) = \frac{0.2 \cdot 0.3}{0.2 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.05} =$$

$$= \frac{0.06}{0.44} = 0.136$$

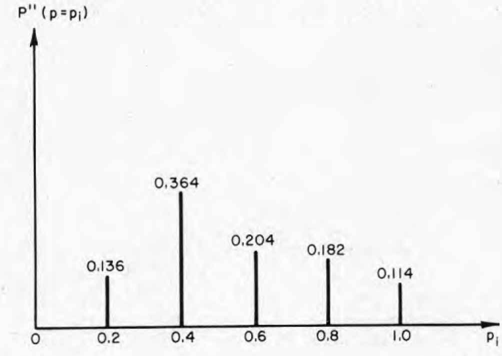
$$P''(p = 0.4) = \frac{0.4 \cdot 0.4}{0.44} = 0.364$$

$$P''(p = 0.6) = \frac{0.6 \cdot 0.15}{0.44} = 0.204$$

$$P''(p = 0.8) = \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.44} = 0.182$$

$$P''(p = 1) = \frac{1 \cdot 0.05}{0.44} = 0.114$$

Den uppdaterade a posteriori-sannolikhetsfunktionen för p visas i fig. 15b.

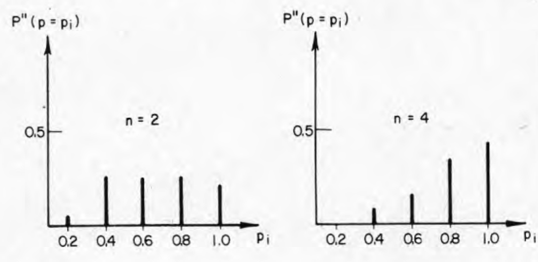


Figur 15b. A posteriorifördelning för p

Den uppdaterade bayesianska uppskattade brottsannolikheten blir

$$\hat{p}'' = E(p|z_k) = 0.2 \cdot 0.136 + 0.4 \cdot 0.364 + 0.6 \cdot 0.204 +$$
$$+ 0.8 \cdot 0.182 + 1.0 \cdot 0.114 = 0.55$$

Om ytterligare pålar provas och visar sig inte kunna bära 300 ton kan a posteriorifunktionen ovan uppdateras. I Fig. 15c visas sannolikhetsfunktionerna för 2 resp 4 sådana provresultat.



Figur 15c. A posteriorifördelningar för p. (Flera uppdateringar).

I många fall kan parametern anta kontinuerliga värden. Låt Θ vara parameterns stokastiska variabel. För det kontinuerliga fallet lyder då Bayes' ekvation:

$$f''(\theta) = \frac{P(z_k | \theta)\, f'(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(z_k | \theta)\, f'(\theta)\, d\theta}$$

$f''(\theta)$ är a posteriori frekvensfunktionen för Θ

$f'(\theta)$ är a priori frekvensfunktionen för Θ

z_k är ett försöksutfall

$P(z_k | \theta)$ är den på θ betingade sannolikheten eller sannolikheten att få försöksutfallet z_k om parametern antas ha värdet θ.

$P(z_k | \theta)$ är alltså en funktion av θ och kallas ofta likelihoodfunktionen för θ och betecknas $L(\theta)$.

Nämnaren är oberoende av θ, den är en normaliserande konstant som behövs för att $f''(\theta)$ skall bli en korrekt frekvensfunktion.

Formeln kan alltså skrivas

$$f''(\theta) = k\, L(\theta)\, f'(\theta)$$

där $k = [\int_{\infty}^{\infty} L(\theta)\, f'(\theta)\, d\theta]^{-1}$ och

$L(\theta)$ = likelihoodfunktionen, sannolikheten att få försöksutfallet z_k om man antar ett givet θ.

Som estimator av parametern använder man ofta väntevärdet av Θ. Den uppdaterade estimatorn blir alltså

$$\hat{\theta}'' = E(\Theta | z_k) = \int_{\infty}^{\infty} \theta\, f''(\theta)\, d\theta$$

Exempel (Från Ang & Tang, 1975):

Samma pålar som i förra exemplet, men nu antas att sannolikheten p (att pålen inte kan bära lasten) är en kontinuerlig stokastisk variabel. Man antar i detta fall en rektangelfördelning på p, en s k diffus a priorifördelning:

$$f'(p) = 1 \quad 0 \leq p \leq 1$$

Om man bara provar en påle, är likelihoodfunktionen lika med sannolikheten för händelsen z_k=(pålen bär ej 300 ton), vilken ju är lika med p. A posteriorifördelningen blir då enligt ovan

$$f''(p) = kp \cdot 1.0 \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$\text{där } k = [\int_0^1 p\, dp]^{-1} = 2$$

$$f''(p) = 2 \cdot p \cdot 1.0 = 2p \quad 0 \leq p \leq 1$$

Bayesianska estimatet av p blir

$$\hat{p}'' = E(p | z_k) = \int_0^1 p \cdot 2p\, dp = 0.667$$

Om man testar n stycken pålar, av vilka r går till brott för en last som är mindre än 300 ton blir likelihoodfunktionen just sannolikheten att få r brott vid n försök. Om brottsannolikheten för varje påle är p, och statistiskt oberoende antas mellan pålarna, blir likelihoodfunktionen

$$L(p) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}$$

Med den antagna diffusa a priorifördelningen blir a posteriorifördelningen av p

$$f''(p) = k\binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} 1 \qquad 0 \leq p \leq 1$$

$$\text{där} \quad k = \left[\int_0^1 \binom{n}{r} p^r (1-p)^{nr} dp\right]^{-1}$$

Den bayesianska estimatorn är

$$\hat{p}'' = E(p|z) = \frac{\int_0^1 p\binom{n}{r} p^r (1-p)^{nr} dp}{\int_0^1 \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} dp} = \frac{r+1}{n+2}$$

Man bör observera, att för ett stort antal försök närmar sig den bayesianska estimatorn den klassiska:

$$\frac{r+1}{n+2} \rightarrow \frac{r}{n} \quad \text{för stora } n$$

Ofta är beräkningen av a posteriori-fördelningen förknippad med matematiska svårigheter, när det gäller att beräkna konstanten

$$k = \left[\int_{-\infty}^{\infty} L(\theta)\, f'\theta \; d\theta\right]^{-1}$$

I bland går det att lösa den analytiskt. Detta är fallet om man använder så kallade konjugerade a priorifördelningar. När man gjort ett antagande om fördelningen hos den underliggande populationen, t ex att den är normalfördelad, är likelihoodfunktionen entydigt bestämd. Det finns då för vissa likelihoodfunktioner sk konjugerade fördelningar, vilka, om de kan accepteras som a priorifördelningar för θ, ger a posteriorifördelningar för θ av samma familj.

> Om t ex den underliggande (datagenererande) processen är Bernoulli blir likelihoodfunktionen binomial. Om man då väljer en beta-fördelning som a priorifördelning för Bernoulliprocessens parameter p, blir också a posteriorifördelningen för denna parameter en betafördelning. Betafördelningen är alltså en konjugerad fördelning till en Bernoulliprocess.

Om man inte kan hitta (eller acceptera) en konjugerad fördelning kan beräkningarna ibland underlättas om man ersätter den kontinuerliga fördelningen med en diskret (Winkler, 1972).

I varje fall kan man alltid lösa problemet genom numerisk integration, t ex med datamaskin.

Bayesiansk statistik tillämpad på geoteknisk osäkerhet

I geotekniken vill man vanligen göra uttalanden om en stokastisk process (ekvivalent med en population) eller fatta beslut om åtgärder, där beslutet är beroende av processen. Exempelvis kan jordens skjuvhållfasthet i en slänt betraktas som en sådan process och beslutet kan gälla behovet av förstärkningsåtgärder.

Naturens stokastiska egenskaper kan analyseras om naturen betraktas som en stokastisk process som genererar en följd X_1, X_2... av oberoende stokastiska variabler, som har samma fördelning $f_X(x)$. Dessa stokastiska variabler kan t ex vara jordens hållfasthet i olika punkter. Vi antar tills vidare att vi känner formen på den gemensamma fördelningen men inte dess parametrar Θ, om vilka vi är osäkra.

I likhet med det "ingenjörsmässiga" betraktelsesättet på sannolikheten för händelser, betraktar vi dessa parametrar också som stokastiska variabler. Detta är liktydigt med att vi uttrycker vår osäkerhet om parametrarna genom att säga att parametrarna själva följer en fördelningsfunktion. I den klassiska statistiken intar man en annan ståndpunkt:

Parametrarna har ett konstant värde, men detta är okänt för oss. Man uttrycker där sin osäkerhet t ex i form av konfidensintervall som dock inte talar om osäkerheten i parametern utan i metoden att bestämma den.

För att kunna utnyttja bayesstatistiken är det dock bättre att inta den subjektiva, mer operationella inställningen. Man kan då direkt utnyttja tidigare angivna metoder för att uppdatera parameterns fördelning.

Ibland är det parametervärdet som är av intresse, man vill kanske arbeta med t ex sanna medelvärdet av skjuvhållfastheten i jordvolymen. I ett annat fall kan t ex det minsta skjuvhållfasthetsvärdet vara det bestämmande.

Parameteruppdateringen sker på samma sätt som beskrivits tidigare, för det diskreta respektive det kontinuerliga fallet.

Val av a priori-fördelning för parametern sker enligt samma principer som tidigare diskuterats men man kan förutse större svårigheter eftersom det inte är lika lätt att åsätta en a priori-fördelning på t ex en varians som på t ex en händelse.

Genom att använda det subjektiva betraktelsesättet kan man härleda en fördelning, som tar hänsyn till den statistiska osäkerheten och bakar in den. Om man anser att parametrarna θ för den stokastiska variabeln X själva är stokastiska variabler kan man utgående från en sammansatt fördelning (compound distribution) definiera en ny fördelning av X:

$$\tilde{f}_X(x) = \int f_X(x|\theta)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta$$

Detta är den bayesianska fördelningen av X till skillnad från modellfördelningen av X, $f_X(X;\theta)$ (Benjamin & Cornell, 1970). Man kan tolka den som ett vägt medelvärde av alla fördelningar $f_X(x|\theta)$ som är tänkbara med olika värden på parametrarna θ. Parametrarna θ finns inte med i fördelningen $\tilde{f}_X(x)$, eftersom de integrerats ut. Den bayesianska fördelningen kallas ibland prediktionsfördelningen (Winkler, 1972, Zellner, 1971). Namnet kommer sig av att den kan användas för att göra förutsägelser ("predictions") om ännu inte observerade värden på den stokastiska variabeln.

Beroende på om fördelningen av θ, $f_\Theta(\theta)$ är en a priori- eller en a posteriorifördelning kan man tala om en a priori-fördelning $f'_X(x)$ eller en a posteriori-fördelning $f''_X(x)$. Vartefter man får mer data och uppdaterar $f_\Theta(\theta)$, närmar man sig den sanna fördelningen för X, eftersom fördelningen $f_\Theta(\theta)$ koncentreras kring parameterns sanna värde. I allmänhet har den bayesianska fördelningen $\tilde{f}_X(x)$ en större spridning än den sanna fördelningen $f_X(x)$, eftersom den bayesianska omfattar såväl den inneboende probabilistiska osäkerheten som den statistiska.

Den bayesianska fördelningen kan , som nämnts, uppdateras. Man kan dock inte uppdatera den direkt, utan man måste uppdatera parameterfördelningen $f_\Theta(\theta)$ och först därefter beräkna en ny, uppdaterad bayesiansk a posteriorifördelning.

Om man har försöksresultat z (t ex mätvärdena X_1, X_2 ....X_n) så får man följande uttryck för den uppdaterade fördelningen:

$$\tilde{f}''_X(x) = \int f_X(x|\theta)\, f''_\Theta(\theta)\, d\theta = \int f_X(X|\theta) N\, L(\theta|z)\, f'_\Theta(\theta)\, d\theta$$

Man måste för att kunna göra uppdateringen alltså känna såväl modellfördelningen som parameterfördelningen.

Man kan alltså delvis ta hänsyn till den statistiska osäkerheten genom att använda den bayesianska fördelningen för en stokastisk variabel, en fördelning som alltså innehåller den osäkerhet, som betingas av ett litet provantal.

Men den statistiska osäkerheten omfattar ytterligare ett element Man är ju osäker även på vilken fördelning som är den rätta, modellosäkerheten.

På senare tid har det framkommit metoder att ta hänsyn även till denna osäkerhet. Detta görs, genom att man arbetar med en bayesiansk modell, som är sammansatt av olika modeller.

Principen är analog med den som användes för att ta hänsyn till parameterosäkerheten. Man inför (som ytterligare en parameter) sannolikheten att en viss modell, normal, log-normal etc, är den rätta.

Man får sedan en fördelning, som är sammansatt av de bayesianska fördelningarna, viktade med sannolikheter att respektive fördelning är den rätta. Dessa sannolikheter kan uppdateras om ytterligare information blir tillgänglig.

För ytterligare detaljer hänvisas till litteraturen, t ex Wood (1974).

För att man skall kunna göra en relevant beräkning av brottsannolikheten, måste man kunna ta med den professionella osäkerheten, dvs den osäkerhet som uppkommer genom att beräkningsmetoden inte är perfekt.

Ett sätt att göra detta är att införa en stokastisk variabel X, som är kvoten mellan sant värde och beräknat värde och multiplicera sitt beräknade värde med denna stokastiska variabel. Om $\tilde{Z} = g(\tilde{R}, \tilde{S})$ är den bästa, bayesianska, uppskattning av brottsannolikheten vi kan göra med till buds stående beräkningsmetoder, så kan vi få en uppskattning av den sanna brottsannolikheten $\tilde{Z}_T$ ur uttrycket

$$\tilde{Z}_T = \tilde{X} \cdot \tilde{Z}$$

Eftersom vi inte känner den sanna variabeln X använder vi den bästa uppskattningen $\tilde{X}$. Vi kan ju givetvis behandla X som övriga stokastiska variabler, åsätta en fördelning (med parametrar som är stokastiska variabler) och uppdatera den osv. Som a priorifördelning kan man lämpligen utgå från kvoten mellan uppmätta och beräknade värden från liknande fall. Det finns sedan kanske möjlighet att i det aktuella fallet göra mätningar på ett provobjekt etc och därigenom få data för en uppdatering av $\tilde{X}$. Uppdateringen kan ibland göras ur indirekta mätningar, man har t ex kanske observerat enbart att konstruktionen "överlevt" en viss belastning. Exempel från off-shore industrin på detta visas av Moses (1976).

Det är troligt, att den professionella osäkerheten svarar för en stor del av den totala osäkerheten. En följd härav är, att det vid en ekonomisk analys kan visa sig mer lönsamt att installera olika typer av observationssystem, öka kontrollen etc än att öka provtagningen. Likaledes kan det vara mer lönsamt att övergå till mer förfinade beräkningsmetoder, som är förknippade med en lägre professionell osäkerhet. I vart fall har man genom riskanalys och beslutsteori möjlighet att optimera hela konstruktionsförfarandet.

Sammanfattning och exempel

De tre osäkerheter under vilka man arbetar vid det geotekniska beslutsfattandet är:

- probabilistisk osäkerhet
- statistisk osäkerhet
- professionell osäkerhet

I det föregående har visats hur man kan ta hänsyn till dessa osäkerheter:

- Probabilistisk osäkerhet beaktas genom att man arbetar med en stokastisk beskrivning av naturen, dvs arbetar med fördelningsfunktioner för ingående fysikaliska parametrar.
- Stokastisk osäkerhet beaktas genom att man inför osäkerhetsmått i sina fördelningsfunktioner genom att låta de statistiska parametrarna ha en fördelning. Om man är osäker på om vilken fördelning, som är den rätta, kan man arbeta med en sammansatt fördelning, som är ett viktat medelvärde av de

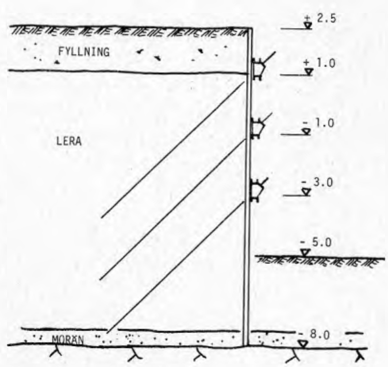
tänkbara fördelningarna.

- Den professionella osäkerheten uttrycks bäst som en stokastisk variabel som är kvoten mellan samt och beräknat värde. Genom att man multiplicerar sitt beräknade värde med denna stokastiska variabel fås en bättre uppskattning av det verkliga värdet.

Exempel: Probabilistisk beräkning av stagkrafter

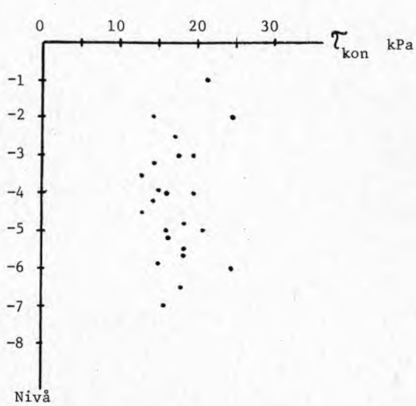
Nedan kommer att ges ett exempel på tillämpning av statistiska metoder på ett geotekniskt problem.
Beräkningarna är förenklade speciellt vad gäller det numeriska arbetet eftersom endast metodiken skall illustreras.

Exemplet avser en spont, som är förankrad på tre nivåer och dubbad i berg, se figur 16.



Figur 16. Sektion genom spont.

Lerans skjuvhållfasthet framgår av figur 17, där resultat från konprovningar redovisas.



Figur 17. Lerans skjuvhållfasthet.

I detta exempel betraktas endast lasten P_2 kN/m, som verkar på det mellersta hammarbandet i schaktens slutstadium.

P_2 beräknas med den metod, som föreslagits av Stille (1976). Om endast skjuvhållfastheten anses stokastisk, dvs vi anser att vi känner övriga storheter helt eller att deras variation är så liten att resultatet inte nämnvärt påverkas, fås följande uttryck för P_2:

$$P_2 = 149 - 2.4\, c_u \qquad (kN/m)$$

När en lämplig fördelning för c_u skall införas, måste den fysikaliska brottmodellen beaktas.

Om jorden anses bestå av ett stort antal små element, där vardera är perfekt elasto-plastiskt och har skjuvhållfastheten τ_i, så inses att vid brott längs en glidyta alla elementen samverkar. Detta betyder att brottskjuvhållfastheten längs glidytan är $\tau_f = \bar{\tau}_i$, dvs medelvärdet av elementens skjuvhållfasthet. Om man vidare antar, att de brottfigurer, som orsakas av konen vid laboratorieprovningen, är av samma typ, så är konskjuvhållfastheten τ_{kon} själv ett medelvärde av ett (mindre) antal element. Det värde på skjuvhållfastheten c_u som skall användas är alltså medelvärdet av τ_{kon}, som i fortsättningen betecknas $\bar{\tau}_{kon}$.

Hammarbandslasten P_2 blir alltså

$$P_2 = 149 - 2.4\, \bar{\tau}_{kon}$$

Den stokastiska process, som ger de olika värdena på τ_{kon} modelleras här med en normal-fördelning, detta med hänsyn till att den är summan av inverkan av ett antal små element.

Vår kunskap om skjuvhållfasthetens medelvärde $\bar{\tau}_{kon}$ a priori (före provtagningen) formuleras: "Det troligaste medelvärdet är 12 kPa och värden inom intervallet 9-15 kPa är dubbelt så troliga som värden utanför detta intervall."
Ur detta kan härledas ett väntevärde och en ungefärlig varians för $\bar{\tau}_{kon}$, nämligen

$$E(\bar{\tau}) = 12 \text{ kPa}$$

$$V(\bar{\tau}) = 9$$

Ur litteraturen kan fås en uppskattning av variansen för τ_{kon}. Uppskattningen att en variationskoefficient för skjuvhållfastheten mellan 30 och 50% svarar för ca 60% av rapporterade värden (Harr 1977) och ett troligaste värde på variationskoefficienten av 40% ger följande ungefärliga värden på väntevärde och varians för variansen hos τ_{kon}:

$$E(\sigma_\tau^2) = 23$$

$$V(\sigma_\tau^2) = 39$$

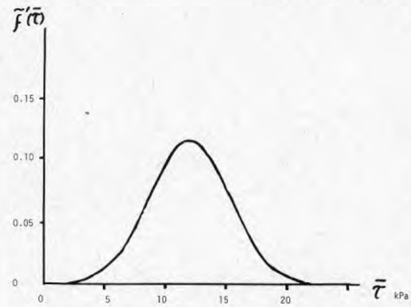
För att förenkla beräkningarna väljs den konjungerade a priorifunktionen för parametrarna till den antagna normalfördelningen.

Då blir a priorifördelningen för medelvärdet (se Vicens m fl, 1975) en Student-t fördelning:

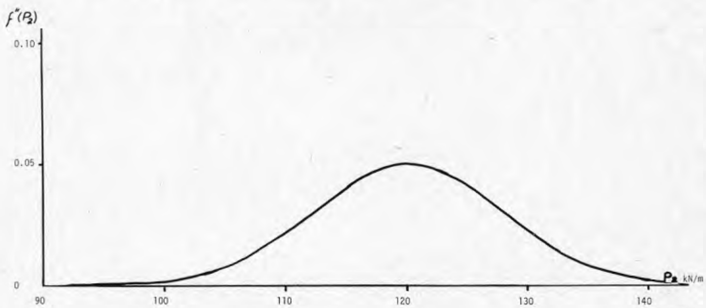
$$f'(\bar{\tau}) = f'_s \ (\bar{\tau} \mid \bar{y}, \frac{s^2}{n'}, \nu')$$

där $\bar{y}$, s^2, n' och ν' är ekvivalenta provdata. (Så är t ex n' = 2 för våra åsatta erfarenhetsvärden som alltså motsvarar två prov).

A priorifunktionen för $\bar{\tau}$ redovisas på figur 18a och motsvarande frekvensfunktion för P_2 i figur 18b.



Figur 18a. A priorifördelning för $\bar{\tau}$



Figur 18b. A priorifördelning för P_2.

När provdata blir tillgängliga kan fördelningen för $\bar{\tau}$ uppdateras. Genom att den konjugerade fördelningen används blir a posteriorifördelningen av samma form som a priorifördelningen.

$$f'' \ (\bar{\tau}) = f''_s \ (\bar{\tau} \mid \bar{y}'', \frac{s''}{n''}, \nu'')$$

där $\bar{y}$", s", n" och ν" är parametrar som omfattar såväl a priori- som provinformation.

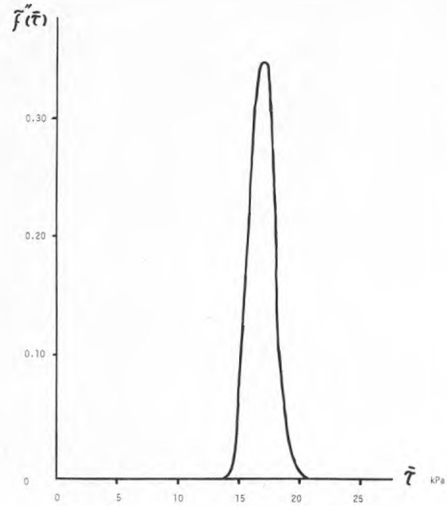
När a priorifördelningen uppdateras med följande provdata

n = 23 (provantal)

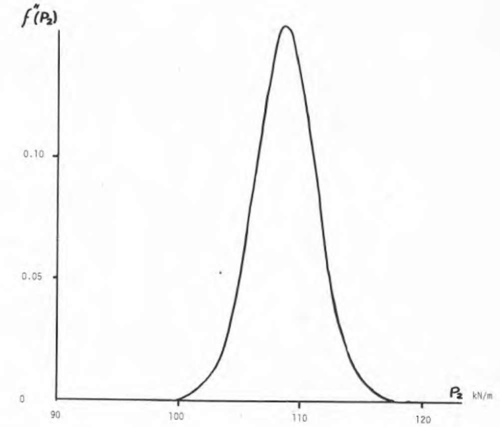
$\bar{y}$ = 17.3 kPa (provens medelvärde)

s = 3.18 kPa (provens standardavvikelse)

fås de uppdaterade fördelningar för $\bar{\tau}$ resp P_2 som visas i fig. 19a och 19b.



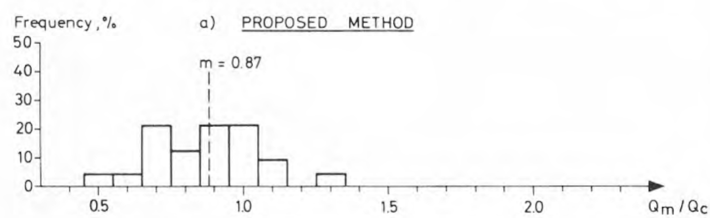
Figur 19a. A posteriorifördelning för $\bar{\tau}$.



Figur 19b. A posteriorifördelning för P_2.

A posteriorifördelningen för $\bar{\tau}$ är vår bästa uppskattning som vi kan göra med hänsyn till probabilistisk och statistisk osäkerhet. Som synes har den ökade information som erhållits ur provet givit dels en förändring av väntevärdet, dels väsentligt minskat spridningen.

För P_2 återstår en osäkerhet, nämligen den professionella. Kvoten mellan uppmätta och beräknade värden på staglaster för ett antal sponter har redovisats av Stille (1976) och återges i fig. 20.



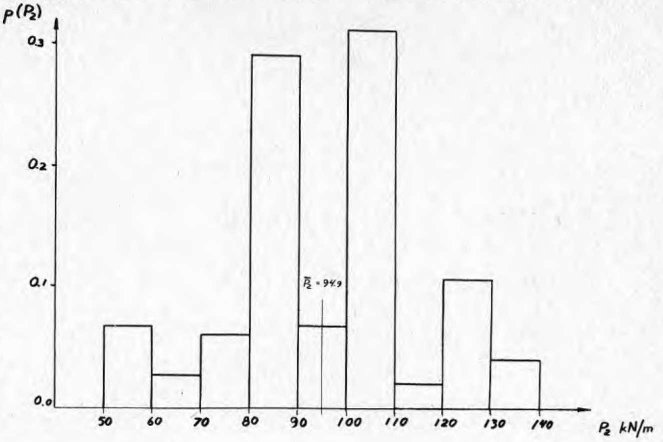
Figur 20. Kvot mellan mätta och beräknade staglaster. (Stille 1976)

Denna kvot införs i beräkningarna som en diskret stokastisk variabel X med vilken P_2 multipliceras

$$\tilde{P}_{2_{sann}} = X \tilde{P}_2$$

Multiplikationen har gjorts numeriskt genom att $\tilde{P}_2$ diskretiseras i ett (litet) antal steg.

Varje sådant steg har sedan multiplicerats med X och resultaten har sammanförts till den i histogramform redovisade fördelningen i fig. 21.



Figur 21. Histogram över beräknad staglast P_2 med hänsyn tagen till den professionella osäkerheten.

Som med alla histogram är utseendet avhängigt av vald cellindelning men det framgår emellertid tydligt vilken stor inverkan den professionella osäkerheten har, jämför fig. 19b och fig. 21!

Fig. 21 representerar vår bästa uppskattning av staglasten P_2. Hänsyn har tagits till alla tre osäkerheterna, probabilistisk, statistisk och professionell.

Ur denna uppskattning av P_2 kan sedan sannolikheten att P_2 skall överstiga ett visst värde lätt beräknas. Så är t ex sannolikheten att värdet 120 kN/m skall överstigas 0.15 , dvs 15%.

Givetvis kan osäkerheten minskas om X (= Q_m/Q_c) uppdateras med mätdata från t ex en provpanel på den uppmätta sponten. Med hänsyn till den inverkan den professionella osäkerheten har kan detta kanske vara mer ekonomiskt än att göra ytterligare provtagning och förbättra uppskattningen av $\bar{\tau}$.

FORSKNINGSBEHOV

Bakgrund

I det föregående har påvisats behovet av nya beslutskriterier som kan ersätta det nuvarande systemet med en säkerhetsfaktor. Risk, dvs brottsannolikhet, eller förlustrisk har föreslagits som ett lämpligt sådant kriterium. Vidare har visats vilka tänkbara metoder som finns för att utföra en riskberäkning eller för att göra en motsvarande säkerhetskontroll.

För svensk geoteknik är dessa metoder av stort intresse, speciellt eftersom kommande normer för bärande konstruktioner kommer att vara baserade på riskbegreppet. Väsentligt är att observera att jord betraktas på samma sätt som övriga material. Detta innebär praktiskt att nuvarande tänkesätt inom geotekniken med säkerhetsfaktor, tillåtna påkänningar etc kommer att ersättas med den så kallade partialkoefficientmetoden eller alternativt av en statistisk analys. Man blir alltså tvungen att anamma ett nytt principiellt tänkesätt.

Det torde tvivelsutan vara så, att den allt överskuggande metoden för praktiskt bruk blir partialkoefficientmetoden. För speciella ändamål torde dock den statistiska analysen bli använd, t ex vid dyra objekt, objekt där skadekonsekvenser blir stora och typobjekt där ett stort antal skall byggas. Dessutom behöver man de statistiska metoderna för kalibrering av partialkoefficientmetoden.

Både partialkoefficientmetoden och statistiska metoder är relativt väl utvecklade för de byggnadsdelar, som inte består av jord. För den geotekniska delen krävs ytterligare forskning, vilken huvudsakligen är betingad av jordmaterialets inhomogenitet och variationer. Av skälen ovan bör forskningen koncentreras på de behov, som ett införande av partialkoefficientmetoden medför, men detta medför även indirekt ett behov av utveckling av statistiska metoder (för kalibreringsändamål).

I det innevarande projektet har framtagits de teoretiska metoder som behövs för en riskberäkning. Den kommande forskningen bör därför inriktas på att omsätta dessa teorier till praktisk användbarhet.

Följande forskningsområden bör primärt behandlas:

- Bestämning av partialkoefficienter och karakteristiskt värde
- Riskbaserade regler för användning av observationssystem och utförande av provbelastning
- Bestämning av professionella osäkerheter

Ytterligare ett område, som inte är av forskningskaraktär, men som bör ingå är

- Upplysning om säkerhet och riskbedömning

Bestämning av partialkoefficienter och karakteristiskt värde

Partialkoefficientmetoden arbetar med dels ett system av partialkoefficienter, dels med s k karakteristiska storheter som skall multipliceras med dessa koefficienter. Kontroll av säkerhet skall enligt normer göras för olika gränstillstånd, t ex brott- och bruksgränstillstånden.

Den forskning, som krävs för geotekniken, gäller främst jordmaterialets egenskaper omsatta till partialkoefficienter och karakteristiska värden.

Det krävs dels ett lämpligt system av partialkoefficienter, dels en metod att bestämma dessas storlek. Vad gäller systemet, bör detta i princip vara uppbyggt på samma sätt som för övriga material och denna del av arbetet bör därför ske i samråd med Statens planverk.

Inom geotekniken torde det dock finnas speciella problem. Det gäller främst de fall där man lämpligen ersätter en brottstadieberäkning med en bruksstadieberäkning och vice versa och alltså måste införa någon form av ekvivalent partialkoefficient.

Även i övrigt måste det system för uppbyggnad av partialkoefficienterna som föreslagits i utkast till kommande normer troligen modifieras för geotekniska problem.

Så medför t ex osäkerheten i materialprovning, osäkerheten i beräkningsmodellen och osäkerheten i bestämning av karakteristiskt värde att man kan tvingas arbeta med ett system med fler värden på varje partialkoefficient. Dessa värden blir då beroende av undersökningsmetod, beräkningsmetod och undersökningens omfattning. Av praktiska skäl måste ett sådant system göras så enkelt som möjligt samtidigt som både osäkra och överstarka konstruktioner undviks. En väsentlig del av forskningen bör alltså gälla denna fråga.

Vissa riktlinjer för bestämning av partialkoefficienternas storlek finns angivna i Ciria Rep. 63 (1977). Dessa kan användas som en bas vid framtagning av en lämplig metodik. Denna metodik bör sedan prövas på ett antal olika problem. De partialkoefficienter som då tas fram bör sedan tillämpas på några typiska konstruktioner och resultaten jämföras med vad som fås med dagens metodik, särskilt i sådana fall där man vet att nuvarande konstruktioner är helt acceptabla.

För jämförelse bör också kontroll göras mot optimerade konstruktioner.

Ett annat stort problem med införande av partialkoefficientmetoden är bestämmandet av de karakteristiska storheterna för jordmaterialet, hållfasthet, moduler osv. Svensk jord är ju oftast mycket heterogen och det finns ingen möjlighet att använda likartade definitioner av de karakteristiska storheterna, som används för andra byggnadsmaterial, dvs någon fraktil, t ex 5- percentilen.
Ett sådant förfarande skulle leda till orimliga insatser vad gäller grundundersökningarna för ett objekt. Bestämning av karakteristiskt värde är i princip ett särfall av undersökningsoptimering, där det gäller att med minsta insats bestämma storhet med en given tillförlitlighet.

Forskningen bör inriktas på flera frågeställningar:

Vilket värde bör användas som karakteristiskt värde?
I vissa fall kanske medelvärdet är lämpligt, medan det kan vara helt felaktigt i andra.

Hur stor omfattning behöver en undersökning ha för att det karakteristiska värdet skall vara tillförlitligt bestämt?

Följande basproblem måste först studeras för bestämning av partialkoefficienter och karakteristiska värden:

- Vilken statistisk fördelning följer jordens egenskaper och hur skall man beakta rymdvariationer?
  Frågan är av stor betydelse när det gäller utnyttjandet av närbelägna undersökningar, bedömning av differentialsättningar osv. Problemet finns principiellt behandlat i litteraturen, se t ex Vanmarcke (1977), Baecher (1972) och David (1977).

- Hur effektiva är olika undersökningsmetoder?
  En metod för bestämning av effektiviteten hos olika metoder har angivits av Ingles (1977). Frågan är av mycket stor vikt. Den kommer delvis att undersökas vid KTH i BFR-projektet "Laboratorieprovningar contra insitubestämningar. Giltighetsanalys" (Stille, Fredriksson) och material från detta projekt bör kunna utnyttjas, liksom material från andra projekt bl a vid SGI.

- Hur kan man ta hänsyn till erfarenhetsvärden och regionala data?
  Det finns ofta en mycket stor erfarenhet regionalt om jordens egenskaper i området. Denna bör tas tillvara, men en för partialkoefficientmetoden lämplig metodik saknas.

- Hur tillförlitligt kan man bestämma förekomsten av svaghetszoner och andra diskontinuiteter, t ex siltskikt?
  Denna fråga avses bl a undersökas vid KTH i BFR-projektet "Gästforskare: Statistiska metoder inom geotekniken"

Riskbaserade regler för användning av observationssystem och utförande av provbelastning.

Observationssystem, t ex skredvarningssystem, kan utnyttjas på två sätt vid en geoteknisk riskberäkning. Man kan kontinuerligt observera och ur observationerna uppdatera analysen genom den professionella osäkerheten. Ibland räcker det med att man observerat att konstruktionen "överlevt" en belastning för att en uppdatering skall vara möjlig (Moses, 1976). Ett annat viktigt område gäller minskning av förlustrisken, genom att man får en förvarning. När det gäller partialkoefficientmetoden skulle detta motsvara att man kan välja en lägre säkerhetsklass.

Två problem är väsentliga att utreda:

- Hur tillförlitligt är systemet?
  Frågan är ekvivalent med frågan om olika undersökningsmetoders effektivitet. Det gäller dels att förutse brottmekanismen, dels att bedöma sannolikheten att systemet observerar denna mekanism.

- Hur mycket minskas konsekvenserna?
  Detta är inte bara en geoteknisk fråga utan också en sociopolitisk.

Ett viktigt område för forskningen gäller hur provbelastningar (av pålar, dragstag etc) skall utföras ur statistisk synpunkt.

I Förslag till Allmänna bestämmelser för bärande konstruktioner (Statens planverk 1979-01-24) föreskrivs bl a "Karakteristisk bärförmåga vid provning av konstruktionsdelar definieras som nedre 5-procentfraktilen bestämd på 75% konfidensnivå" och beträffande formändringar "Vid dimensionering genom provning utvärderas resultaten så att kraven skall uppfyllas av 70% av konstruktionerna och bedömning härav med stickprov skall ske på 75% konfidensnivå."

Precis som för bestämningen av karakteristiskt värde måste dessa bestämmelser modifieras för geotekniskt bruk, där ju provningarna är mycket kostsamma och varje objekt oftast unikt till skillnad från t ex byggnadselement.

Bestämning av den professionella osäkerheten

Den professionella osäkerheten, dvs osäkerheten i beräkningsmodellen torde ofta vara av avgörande betydelse. Dess storlek måste utredas för några typiska problem, eftersom den återspeglas i partialkoefficienten. Bestämningen kan göras på två sätt, dels utgående från objekt där mätning skett (eller brott inträffat) och jämförelse med beräknade värden, dels genom att man utgår från en subjektivt åsatt sannolikhet. Man har givetvis i båda fallen möjlighet att uppdatera genom användandet av Bayes´teorem. Hur man principiellt går tillväga för att åsätta subjektiva sannolikheter har beskrivits i rapporten. Denna metodik bör omsättas i praktiskt användbar form och kalibreras. Det har nämligen visat sig (Baecher, 1972) att så åsatta sannolikheter blir alltför försiktiga, man får inte ut all information. Det kan dessutom bli aktuellt att väga samman olika experters uppskattningar t ex för att ange professionell osäkerhet och till detta ändamål behöver teknik utprovas. (Man kan t ex använda den metodik som föreslagits av Morris, 1977.)

Ett intressant tillämpningsområde är de fall då beräkningsmetoden inte direkt lämpar sig för en probabilistisk analys (t ex FEM) utan ger ett deterministiskt värde. Genom att införa beräkningsosäkerheten som en stokastisk variabel kan man ändock få en uppskattning av sannolikheten att en deformation skall överskridas etc.(Stille, Olsson, Fredriksson 1979).

Upplysning om säkerhet och riskbedömning

Eftersom införandet av riskbaserade metoder inom geotekniken innebär ett nytänkande krävs en kontinuerlig upplysning och utbildning i dessa frågor för praktiskt arbetande geotekniker. Detta medför att forskning inom området bör planeras så att resultat, i synnerhet sådana med praktisk anknytning, kontinuerligt publiceras genom skrifter, föredrag etc.

Sammanfattning av forskningsbehovet

Av det ovanstående framgår, att forskningsbehovet egentligen gäller ett antal frågeställningar som är principiellt likartade.

Huvudfrågeställningarna är:

"Hur skall man utforma undersökningen (inklusive observationssystem och provbelastningar) så att man når önskad tillförlitlighet?"

"Vilka krav måste ställas på analysmetod och beräkningar för att resultatet skall ha tillräcklig tillförlitlighet?"

Det teoretiska underlaget för att lösa dessa frågor finns och forskningen bör därför inriktas på att utforma metodik för det praktiska arbetet.

LITTERATUR

Ang, H-S.A. & Tang, W.H, 1975, Probability concepts in engineering planning and design. (John Wiley & Sons, Ing.) New York.

Baecher, G.G, 1972, Site exploration: A probabilistic approach. Thesis. MIT.

Bayes, T, 1763, An essay towards solving a problem in the doctrine of chance. Philosophical Transactions of the Royal Society. 53. pp. 370-418.

Benjamin, J.R. & Cornell, C.A, 1970. Probability, statistics and decision for civil engineers. (McGraw-Hill Book Company.) New York.

Blom, G, 1970, Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningen (Studentlitteratur), p. 2/9, Lund.

Ciria, Rep. 63, July 1977, Rationalisation of safety and serviceability factors in structural codes. (Construction industry research and information association.) London.

David, M, 1977, Geostatistical ore reserve estimation. (Elsevier Scientific Publishing Company.) New York.

Dialog 2-76, Second international workshop on definition, classification and evolution of code formats. Mexico City 3-5 January, 1976. (Danmarks Ingeniörakademi) Lyngby.

Folayan, J.I, Hoeg, K & Benjamin, J.R, 1970, Decision theory applied to settlement predictions. (ASCE), Journal of the Soil Mechanics and Foundation Div., Vol. 96, No. SM 1, pp. 1127-1141.

Holmquist, C-E, 1978, En ren olycka - en bok om risker och riskbedömning. (Bokförlaget Dialog), p. 78-79, Lund.

Hynes, M.E. & Vanmarcke, E.H, 1975, Subjective reliability assessment in geotechnical engineering: I-95 Embankment Case Study, Rapport MIT CE R 75-42. Boston.

Ingles, O.G, 1977, The rationality of materials appraisal. Probability theory and reliability analysis in geotechnical engineering (RPI), Troy.

Meyerhof, G.G, 1970, Safety factors in soil mechanics. (The National Research Council of Canada.), Canadian Geotechnical Journal, 7, No. 4, Nov. 1970.

Morris, P.A, 1977, Combining expert judgment: a bayesian approach. Management Science, Vol. 23, No. 7, pp. 679-693.

Moses, F, 1976, Note on incorporating bayesian information in a reliability model. (Danmarks Ingenjörakademi.) Dialog 2.76, pp. 20-23. Lyngby.

Olsson, L & Stille, H, 1978. Risk och säkerhet i geotekniken. (SVR) Väg- och vattenbyggaren 3.78. Stockholm

Stille, H, 1976. Behaviour of anchored sheet pile walls. (Inst. för Jord- och bergmekanik, KTH). Stockholm.

Stille, H, 1979, Opublicerat material.

Stille, H, Olsson, L & Fredriksson, A, 1979, Design of an anchored sheet pile wall with reliability analysis. (8. Nord. Geoteknikermöte). Proceedings.Helsingfors.

Tribus, M, 1970, Rational descriptions, decisions and designs. (Pergamon Press), New York.

Vicens, G.J, Rodriquez-Iturbe, I & Schaake Jr, J.C, 1975, A bayesian framework for the use of regional information in hydrology. (American Geophysical Union.) Water Resources Research, Vol. 11, No. 3, pp. 405-414.

Winkler, R.L, 1972, An introduction to bayesian inference and decision. (Holt, Rinehart and Winston, Inc.) New York.

Wood, E.F, 1974, A bayesian approach to analyzing uncertainty among stochastic models. (Inst för Appl. System Analysis), Report RR-74-16. Schloss Laxenburg.

Zellner, A, 1971, An introduction to bayesian inference in econometrics. (John Wiley & Sons, Inc). New York.

Åkerlund, S, 1974, Statistiska metoder för beräkning av skaderisk (Inst för byggnadsteknik, LTH), Rapport 57, Lund.

Denna rapport hänför sig till forskningsanslag 760942-4 från
Statens råd för byggnadsforskning till Institutionen för
jord- och bergmekanik, Tekniska högskolan, Stockholm

R126:1979

ISBN 91-540-3124-9
Statens råd för byggnadsforskning, Stockholm

Art.nr: 6700026

Abonnemangsgrupp:
Ingår ej i abonnemang

Distribution:
Svensk Byggtjänst
Box 7853
103 99 Stockholm

Cirkapris: 20 kr exkl moms