Diamant – diagnoser i matematik

GOTHENBURG STUDIES IN EDUCATIONAL SCIENCES 392

Diamant – diagnoser i matematik

Ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys

Madeleine Löwing

GÖTEBORGS UNIVERSITET
ACTA UNIVERSITATIS GOTHOBURGENSIS

ISBN 978-91-7346-893-0 (tryckt)
ISBN 978-91-7346-894-7 (pdf)
ISSN 0436-1121

Avhandlingen finns även i fulltext på:
http://hdl.handle.net/2077/47607

Prenumeration på serien eller beställningar av enskilda exemplar skickas till:
Acta Universitatis Gothoburgensis, Box 222, 405 30 Göteborg, eller till
acta@ub.gu.se

Foto: Karin Löwing

Tryck:
Kompendiet, Göteborg, 2016

Abstract

Title: Diamant – diagnoser i matematik. Ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys
Language: Swedish.
Keywords: Mathematics education, subject matter analysis, diagnose, Diamant, formative assessment.
ISBN: 978-91-7346-893-0

This book reports on the construction of *Diamant (Diamond)*, a national diagnosis system in mathematics for school years 0 to 9, and its follower *Brilliant* adapted for year 10. Both systems diagnose basic mathematics skills, rather than more involved mathematical abilities. The diagnoses are designed for teachers to follow up their students' development of basic mathematical knowledge.

Educational Subject Matter Analysis is presented as a tool within a theoretical framework for constructing the diagnoses, and for structuring diagnose results in lattices based on a pre-knowledge relation between mathematical concepts and aspects of such concepts.

The educational subject matter analysis used is based on an interpretation of the current Mathematics syllabus of the Swedish curriculum, Lgr11. With the core content of the syllabus in focus 127 diagnoses have been constructed, labelled *Diamant*. The diagnoses, covering the "tool box" needed by students to cover the syllabus of primary and lower secondary school (years 1 to 9), are described in detail.

In order to test the educational analyses, but also to map students' basic mathematics knowledge, empirical results based on some 2.3 million diagnose results from Swedish students in grades 1 to 10 are used. The results are shown mainly to support the educational analyses.

Parallel to developing diagnoses and educational subject matter analyses, the author has used the diagnoses as a tool for school improvement. This work has been done in cooperation with separate schools and with ten whole communities in Sweden. The results of this work is also reported on, and discussed.

Innehåll

Förord

I snart tio år har jag arbetat med olika forsknings- och utvecklingsarbeten som tillsammans utgör den studie som här redovisas. Mycket av arbetet har jag haft glädjen att göra tillsammans med kollegor inom forskningsgruppen **AKUT, A**nalys, **K**unskapsuppföljning och **UT**värdering av matematikkunskaper, vid Göteborgs universitet.

Grundstenen i arbetet har varit att kontinuerligt utveckla en didaktisk ämnesteori för skolmatematiken. Denna studie har bidragit till att fördjupa detta arbete. Med hjälp av didaktiska ämnesanalyser har vi utvecklat strukturscheman som beskriver samband mellan matematiska begrepp, och samband mellan olika aspekter inom ett begrepp. Under alla mina år som lärare, lärarutbildare och forskare har matematikinnehållet och hur det undervisas på olika sätt stått i fokus.

Studien syftar till att analysera grundläggande matematiska begrepp och skapa strukturer som kan hjälpa lärare i undervisningen.

Arbetet började med konstruktionen av Skolverkets bedömningsstöd Diamant. Under arbetes gång strukturerades innehållet didaktiskt och när sedan diagnoserna testades blev det möjligt att verifiera våra antaganden om grundläggande begrepps didaktiska struktur

Ett stort tack vill jag rikta till mina kollegor Christian Bennet och Marie Fredriksson.

Marie har hela tiden varit ett starkt stöd och alltid haft kloka synpunkter när vi utvecklat Diamantdiagnoserna. Marie och jag genomförde även utvärdering av Matematiksatsningen för Skolverket tillsammans, ett arbete som gav oss möjligheter att direkt i klassrummen få studera lärares matematikundervisning. Denna utvärdering har ytterligare förstärkt min uppfattning om det stora behovet av att studera skolans matematikinnehåll på djupet.

Christian gav oss en värdefull förstärkning i senare delar av Diamantarbetet. Hans goda förmåga att verbalisera det arbete vi utfört har varit synnerligen betydelsefullt för utvecklingen. Våra paxisnära analyser av matematiska begrepp sammanfattades av honom under benämningen didaktisk ämnesanalys. Under åren har vi hunnit med många diskussioner som varit värdefulla för att föra arbetet framåt, vilket betytt mycket för mig. Tack, Christian, också för den språkgranskning du har gjort och för att du har varit ett stöd när det gäller språk och struktur.

I samband med de olika kartläggningar som ingår i studien har jag haft kontinuerliga möten med de ansvariga i olika kommuner och med medverkande lärare. Såväl kommunansvariga som lärare har dessutom varit ansvariga för datainsamlingen, vilket har krävt specifika insatser i form av fortbildningsträffar där vi tillsammans har diskuterat metodologiska frågor.

Ett speciellt tack vill jag rikta till Karin Stacksteg, Kajsa Wejryd och Eva Pennegård som med sitt engagemang i respektive kommuns utvecklingsprojekt gjort det möjligt för mig att få tillgång till värdefullt forskningsmaterial. Jag hoppas innerligt att vårt samarbete varit till nytta för lärare och elever i era kommuner.

Under arbetes gång har vi mött engagerade lärare, som med intresse genomfört och rättat olika diagnoser och på olika sätt konstruktivt bidragit till studien. Vi har återkommande mött elever som med stort intresse löst uppgifterna på olika diagnoser. Vi är glada för att ni lärare och elever på ett positivt sätt har deltagit i dessa kartläggningar. Tack alla för era viktiga bidrag till studien!

Jag vill även rikta ett varmt tack till Berner Lindström som med intresse deltagit i diskussioner kring studien och kommit med goda råd angående uppläggning och utformning av rapporten.

Inom studien finns en omfattande dataproduktion som har bearbetats och analyserats på olika sätt. Tack Mats, för det arbete som du har lagt ner på detta, och för all annan hjälp jag har fått av dig under arbetets gång.

Göteborg, september 2016

Madeleine Löwing

Inledning

Bakgrund

Som grund för denna studie finns en personlig, men även allmän, oro över varför svenska elever lyckas mindre bra i matematik såväl i jämförelse med andra länder (TIMSS, PISA) som över tid i Sverige (Skolverket, 2014). Redan som nyutbildad adjunkt på 70-talet funderade jag mycket över varför även duktiga elever kunde ha svårt med de mest elementära beräkningarna. Många av dem hade inte automatiserat subtraktionstabellen utan löste grundläggande kombinationer som 15 – 8 på en rad olika sätt. När några av dessa elever i åk 8 via exempel förstod att det var viktigt att kunna sådana kombinationer utantill fick de, i avskildhet, träna med vinettkakort. Det tog inte lång tid förrän hela gruppen behärskade subtraktionstabellen. Kommentaren från en elev var ”Nu går det ju mycket fortare att räkna, så här borde vi lärt oss från början”.

Matematikresultaten på 60- och 70-talen i grundskolan var mindre bra. Resultaten som svenska elever i årskurs 7 visade var redan 1964 internationellt sett svaga medan gymnasieelevers (ÅK 3 N- och T- linjerna) resultat var goda. Då ansågs undervisningen fungera bra för duktiga elever och mindre bra för svagare elever (DsU 1986:5). När resultaten från IEA-undersökningen 1980 (Murray & Liljefors, 1983) blev kända i mitten av 80-talet anordnade dåvarande skolministern Bengt Göransson en studiedag i matematik för samtliga lärare och dåvarande chefen för utbildningsdepartementet, statsrådet Lena Hjelm-Wallén, tillsatte i juni 1985 en arbetsgrupp som skulle se över matematikundervisningen i skolan. I tidningarna hade man under våren 1985 kunnat läsa de något onyanserade rubrikerna. ”Svenska elever är nästan sämst i världen i matematik” och ”Svenska elevers matematikkunskaper på U-lands nivå”. Orsakerna till de dåliga resultaten var enligt arbetsgruppen: kurs och timplanekonstruktionen, undervisningsmetoder, läromedlens dominerande roll, undervisningens organisation, tidsanvändning, bristande diagnostisering och uppföljning samt dåligt utnyttjande av forskningsresultat (DsU 1986:5).

I mitten av åttiotalet övergick jag från att vara lärare i grundskolan och gymnasieskolan till att bli lärarutbildare. Min oro över bristerna i grundläggande matematikkunskaper kvarstod dock, eftersom även flera av våra lärarstuderande hade problem med grundläggande räkning. När den då nya utbildningen till grundskollärare 1 – 7 och 4 – 9 infördes 1989 genomförde studenterna bland annat en fältstudie som inkluderade att diagnostisera elevers kunskaper inom subtraktion. Resultaten var mindre goda och även lärarna, studenternas handledare, var överraskade. Inom utbildningen förde vi då fördjupade diskussioner om vikten av att behärska grundläggande räknekombinationer inom de fyra räknesätten.

Som lärarutbildare, fortbildare och forskare har det varit möjligt att följa utvecklingen när det gäller elevers grundläggande kunskaper. Ute på skolorna har jag mött lärare som verkligen anstränger sig att förklara matematik och vill att eleverna ska förstå och elever som vill lära sig och verkligen försöker förstå. Min huvudfråga när jag år 2000 startade mitt avhandlingsarbete blev varför inte dessa ambitioner hos lärare och elever leder till bättre resultat, en fråga som fortfarande i hög grad är aktuell.

Lärare som jag har mött under olika fortbildningsdagar har ofta uppskattat när jag diskuterar vikten av att behärska baskombinationer. Här utgör inte utantillkunskaper en motsättning till förståelse. Det finns mycket att förstå under ett inlärningsskede och utantillkunskap när det gäller basfakta kan senare generaliseras till mer komplexa talområden.

I den här studien hoppas jag att kunna visa att begreppsförståelse och räknefärdigheter är intimt förknippade med varandra och hur en didaktisk analys av matematiken kan utgöra såväl en bas för didaktiska ämneskunskaper som ett hjälpmedel när det gäller att diagnostisera och analysera elevers grundläggande kunskaper i matematik.

Övergripande syfte

Den internationella kunskapsundersökningen PISA, Programme for International Student Assessment, fokuserar på elevers förmåga att använda kunskaper i ett relevant sammanhang. Inom matematik undersöks elevers förmåga att förstå processer och att tolka och reflektera över information i samband med problemlösning. För att kunna utveckla de förmågor som beskrivs i kursplanen i matematik behöver eleverna behärska en mängd olika begrepp, beskrivna som centralt innehåll i Lgr11.

Genom att analysera matematikinnehållet didaktiskt synliggörs innebörden i didaktiska ämneskunskaper, det vill säga den typ av professionskunskaper inom ämnet som lärare behöver och som ryms inom det som Schulman (1986) kallar, Pedagogical Content Knowledge. Den didaktiska ämnesanalysen används alltså för att inom olika matematiska begrepp, ur ett didaktiskt perspektiv synliggöra olika aspekter av ett begrepp, vilka sedan struktureras efter komplexitet utifrån ett förkunskapsperspektiv. Matematikämnets kumulativa struktur kräver att lärandet i matematik sker enligt en väl definierad förkunskapsstruktur. Ny matematikkunskap som eleven ska lära sig bygger på förkunskaper, både gällande begreppet självt och gällande relationer mellan olika begrepp. Mitt och mina kollegors arbete har bestått i att med hjälp av strukturscheman beskriva dessa samband, vilka kan bidra till att synliggöra progressionen inom undervisningen.

En avsikt med denna studie är att beskriva hur den didaktiska ämnesanalysen har utvecklats och fördjupats i samband med konstruktionen av det nationella bedömningsinstrumentet Diamant (Skolverket, 2013a). Detta gjordes på uppdrag av Skolverket och i uppdraget ingick att utveckla ett bedömningsinstrument med vars hjälp lärare skulle kunna följa elevernas kunskapsutveckling avseende grundläggande matematikkunskaper. Detta diagnosinstrument har sedan i sin tur använts för att kartlägga elevers matematikkunskaper för att därigenom synliggöra och precisera vilka eventuella brister eleverna har. Den didaktiska analysen gör det således möjligt att presentera diagnosresultaten på ett för lärare professionsutvecklande sätt i form av didaktiska strukturer eller kartor.

I rapporten beskrivs ett teoretiskt analysinstrument såväl som strukturerade empiriska resultat. Även teorin bakom den didaktiska analysen beskrivs. Den empiriska delen består av elevresultat gällande olika aspekter av matematiska begrepp och färdigheter, alltså på vilken nivå elever förstår olika begrepp och samband. Strukturer inom och mellan begrepp synliggörs i dessa resultat på ett sådant sätt att de kan utgöra stöd för lärare i praktiken. Kartläggningen avser ett stort antal elevers grundläggande matematikkunskaper från förskoleklass till årskurs 9 och även gymnasiets årskurs 1. Sammantaget har över två miljoner resultat behandlats från mellan två och femtusen elever per årskurs inom aritmetik och cirka ett tusen femhundra elever per årskurs i geometri.

Denna empiri används sedan i studien på två sätt, dels för att kartlägga elevers kunnande och dels för att empiriskt stödja de didaktiska ämnesanalyser som gjorts. Det senare sker genom att tolka resultatscheman där elevernas resultat strukturerats utifrån den didaktiska analysen. Analysen av ämnesinnehållet jämförs då med elevernas svarsfrekvenser.

Mot denna bakgrund utreds och redovisas hur didaktisk ämnesanalys användas för att designa ett diagnosinstrument som kartlägger elevers grundläggande matematikkunskaper och hur diagnosinstrumentet sedan användas för att kartlägga elevers matematikkunskaper, samt hur resultat kan presenteras på ett för lärare professionsutvecklande sätt.

Innehållet som analyserats är bestämt utifrån kursplanen i matematik för grundskolan och utgångspunkten har varit att konstruera kunskapsdiagnoser. Kursplanens centrala innehåll har tolkats och operationaliserat i form av kriterieuppgifter. Genom att bygga in kriterieuppgifterna i strukturer och sedan testa dem, har det varit möjligt att följa lösningsfrekvenser på uppgifterna. På så sätt kan man finna avgörande delkunskaper, alltså viktiga aspekter, av begreppet vilket måste synliggöras för eleverna. Genom att göra den innehållsliga strukturen av matematiska begrepp transparant och samla in lösningsfrekvenser på de olika uppgifterna, som testar aspekter av begreppet, går det att beskriva hur komplexitet och progression inom de olika områdena uppfattas och förstås av elever. Detta exemplifieras och beskrivs tydligare längre fram i texten. Den ursprungliga avsikten, enligt uppdraget, vid konstruktionen av diagnoserna var att det skulle vara möjligt att följa kunskapers utveckling och fördjupning. Genom att studera lösningsfrekvenser har det blivit möjligt att se i vad mån våra antaganden om strukturer har varit korrekta.

Diskussioner om de mindre goda elevresultaten i matematik relateras ibland till undervisningsprocessen. Här går vi ett steg vidare och fokuserar på matematikinnehållets betydelse. I diskussioner om resultat och elevers kunskaper i matematik tas innehållet, på en nivå, ofta för givet av dem som för diskussionen. Det finns idag ett antal forskningsstudier av elevers uppfattningar av olika matematiska begrepp, men det verkar saknas teorier för hur begreppen ska uppfattas för att vara användbara och utvecklingsbara. Det är detta som blir möjligt att beskriva genom didaktisk ämnesanalys.

Den forskning som redovisas här är starkt kopplad till utvecklingsprojekt i ett tiotal kommuner. Kunskapskartläggning, med hjälp av de konstruerade diagnoserna, har genomförts i flera hela kommuner, i skolområden och på enskilda skolor. Den totala omfattningen framgår av bilaga 2. Matematikinnehållet omfattar här aritmetik, inklusive rationella tal och geometri. Detta är centrala områden inom skolans matematik och tillhör de områden inom vilka elever visat mindre bra resultat, såväl i nationella som internationella kunskapsundersökningar. De elever som kartlagts har läst enligt Lpo 94 (SKOLFS 1994:1), men innehållet som testas är detsamma i nuvarande kursplan. De insamlade resultaten ingår således i en forskningsstudie, men är på kommunnivå även en del i olika utvecklingsprojekt.

Ett bakomliggande syfte har i viss mån varit att få en uppfattning om huruvida någon speciell faktor påverkar resultaten på kommunnivå. Det skulle kunna handla om socioekonomisk struktur eller kommunens lokala styrning. Jämförande studier av kommuner, rektorsområden och skolor bekräftar dock vid en jämförelse att resultaten väsentligen är allmängiltiga.

Disposition

I inledningskapitlet beskrivs resultaten i PISA och TIMSS kort. Vidare lyfts några internationella forskningsrapporter fram där betydelsen av grundläggande matematiska kunskaper synliggörs. Innehållet i den svenska kursplanen i matematik tas också upp.

I det andra kapitlet redogörs för forskning och utvecklingsarbeten som fokuserar på matematikinnehållet i undervisningen. De första avsnitten beskriver vilka olika typer av kunskaper en lärare behöver ha för att undervisa i matematik. De följande avsnitten behandlar Shulmans (1986) Pedagogical Content Knowledge, PCK, och den forskning som Ball, Thames och Phelps (2008) har bedrivit kring de specifika matematikkunskaper som en lärare behöver ha. Därefter beskrivs kort didaktisk ämnesteori och den didaktiska ämnesanalysens teoretiska grund. Det förra är en teori som ramar in matematiken i skolan och det senare är ett analysverktyg med vilket olika aspekter av matematiska begrepp kan synliggöras.

Det tredje kapitlet behandlar konstruktionen av Diamantdiagnoserna. Kapitlet inleds med en kort beskrivning av det uppdrag som Skolverket gav. Därefter presenteras det bakomliggande teoretiska ramverk som ligger till grund för konstruktionen av Diamantdiagnoserna, begreppet kunskapsdiagnos problematiseras och valet av matematikinnehåll i diagnoserna motiveras.

Det fjärde kapitlet utgör studiens centrala del. Här beskrivs de strukturer som ligger till grund för Diamantdiagnoserna och hur diagnoserna empiriskt har testats för att pröva relevansen i uppgiftsstrukturen inom diagnoserna. Detta har gjorts via kartläggning av elevers kunskaper, med hjälp av lösningsfrekvenser för de olika uppgifterna inom varje diagnos. De strukturer som testats empiriskt gäller områdena potenser, rationella tal, grundläggande aritmetik och mätning.

I kapitel 5 beskrivs hur Diamantdiagnoser har använts vid kartläggning av elevers matematikkunskaper och en del resultat presenteras. Vid jämförelse av resultaten i ett antal kommuner framträder likheter i såväl lösningsfrekvenser som mönster för hur eleverna behärskar olika begrepp. Resultaten av dessa kartläggningar förstärker därför trovärdigheten av de strukturscheman som konstruerats på basis av den didaktiska ämnesanalysen. Ett par kommuner har gjort upprepade kartläggningar och samtidigt satsat på kompetensutbildning av lärarna. På så sätt har resultaten kunnat användas i skolutvecklingssyfte.

Därefter, i kapitel 6, redovisas en kartläggning som gjorts direkt vid terminsstart i årskurs 1 på gymnasiet. Kapitlet inleds med en bakgrund som fokuserar behovet av att göra en kunskapstest i matematik vid starten av gymnasieskolan relaterat till de betyg eleverna får i matematik i årskurs 9. Områden som diagnostiserats och redovisas här är tal i decimalform, procent och ekvationer.

Avslutningsvis diskuteras den didaktiska ämnesteorin som ett ramverk inom vilket verktyg kan utvecklas, verktyg som ger läraren förutsättningar att hjälpa individer att lära sig matematik. Ett syfte med detta ramverk är att beskriva matematiken utifrån ett lärandeperspektiv. Detta görs genom den didaktiska ämnesanalys, som lägger en grund för de strukturscheman som har presenterats i tidigare kapitel. De underliggande strukturer är väsentligen förkunskapsstrukturer och kan därmed beskriva en progression för elevers begreppsbildning. Kännedom om dessa strukturer kan vara ett värdefullt redskap för en lärare som ska planera, genomföra och utvärdera sin undervisning.

Ords betydelse och valörer är beroende av den kontext i vilken de används. Många ord och begrepp finns på svenska men i bilaga 1 beskrivs hur de används här. Dessutom har några begrepp skapats som tidigare inte finns i svensk matematikdidaktisk forskning och i bilagan förklaras även hur dessa begrepp används i detta sammanhang.

1 Matematiken i skolan

Hösten 2013 kom ytterligare en nedslående rapport angående svenska elevers matematikkunskaper. Den internationella studien PISA 2012, som undersöker i vilken grad utbildningssystemet bidrar till att ge femtonåriga elever förutsättningar att möta framtiden, visade att svenska elevers matematikkunskaper ytterligare hade försämrats (Skolverket, 2013). Studien är ett OECD-projekt och undersöker elevernas förmågor inom tre kunskapsområden; matematik, naturvetenskap och läsförståelse. Tyngdpunkten i PISA-undersökningen är elevers förmåga att använda sina kunskaper i en vardaglig kontext där de får visa att de förstår processer, kan reflektera över information och lösa problem. Från att i matematik ha presterat över OECD-genomsnittet i PISA 2000 ligger Sveriges resultat 2012 klart under genomsnittet. PISA är utformat så att det är möjligt att jämföra matematikkunskapernas utveckling i skolan och därmed kan man se den nedåtgående trenden.

De svenska resultaten (medelpoängen) i matematik har sjunkit från 510 poäng i PISA 2000 till 478 poäng i PISA 2012. Genomsnittet för OECD-länderna var 498 poäng år 2000 och 494 poäng 2012. För första gången presterar svenska elever 2012 signifikant under OECD-genomsnittet i matematik och alla andra nordiska länder når nu bättre resultat än Sverige. Skolverket (2013b) skriver följande:

> Målet med matematik i PISA är att utvärdera elevers förmåga att integrera och tillämpa matematiska kunskaper och färdigheter i en mängd olika realistiska situationer. Detta innebär en förskjutning i synen på matematik, från att se matematik som en samling begrepp och färdigheter att bemästra, till att förstå matematik som en meningsfull problemlösande aktivitet. (s. 8)

Skolverket nämner här en förskjutning i synen på matematik. Kanske skulle man i stället kunna tolka det som att innehållet som testas har fått en annan inriktning, vilket innebär att begreppen och färdigheterna testas i adekvata problemlösande sammanhang i stället för som isolerade kunskaper. Svenska elevers mindre bra resultat kan bero på en rad faktorer. En sådan kan vara att de saknar de grundläggande kunskaper och färdigheter som behövs för att lösa mer komplexa uppgifter. Här är det dessa basala kunskaper som fokuseras och de resultat som presenteras kan utgöra en delförklaring till varför eleverna inte lyckas så bra.

Även i andra internationella undersökningar visar svenska elevers kunskaper en nedåtgående trend. TIMSS, Trends in International Mathematics and Science Study, är en återkommande studie, som syftar till att belysa elevernas kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt jämförande perspektiv. TIMSS 2011 visar ett resultat under genomsnittet i såväl årskurs 4 som i årskurs 8. Kunskapsnivån i årskurs 4 år 2011 är oförändrad jämfört med 2007, men resultaten är lägre för svenska elever än genomsnittet för elever i OECD-länderna (Skolverket, 2012).

För elever i årskurs 8 har resultatutvecklingen försämrats påtagligt från 1995 till 2011, även om försämringstakten har avtagit något efter 2003. De svenska elevernas resultat är lägre än genomsnittsresultaten i OECD-länderna och Sverige är ett av fåtal länder som uppvisar en kontinuerlig resultatförsämring under 2000-talet. I stort sett samma länder som presterar bra i årskurs 4 har också bra resultat i årskurs 8. Singapore, Sydkorea, Hongkong (Kina), Taiwan och Japan har bäst resultat.

De elever som testades i årskurs 8 2012 hade tidigare testats i årskurs 4 år 2007. Kunskapsnivån är självklart högre i årskurs 8 än i årskurs 4 men Sverige visade en mindre kunskapsutveckling mellan årskurs 4 och årskurs 8 än flertalet andra länder.

Områden som har testats i årskurs 4 är taluppfattning och aritmetik, geometriska former och mått samt datapresentation. Elever i årskurs 4 lyckas relativt väl med datapresentation men är sämre i taluppfattning och aritmetik samt vad gäller geometriska begrepp. I årskurs 8 testas taluppfattning och aritmetik, algebra, geometri samt statistik och sannolikhet. Även elever i årskurs 8 klarade datapresentation inom områdena statistik och sannolikhet bäst. Resultaten i taluppfattning och aritmetik var något bättre jämfört med algebra och geometri.

Sett över åren är det idag fler elever som har sämre resultat och färre elever som har lyckat bra. Sverige är det land i OECD där andelen lågpresterande elever ökat mest. Här analyseras några tänkbara orsaker till denna utveckling, orsaker som har sin grund i hur matematikämnet behandlas i undervisningen,

Olika styrdokument är förstås centrala för såväl innehåll som utformning av denna undervisning. Därför är det naturligt att inledningsvis säga några ord om svenska läroplaner och kursplaner i matematik.

1.1 Kursplanen i matematik

Matematikinnehållet för de tidiga skolåren har inte ändrats i någon större omfattning under de senaste 150 åren (Landgren, 1866). Den grundläggande aritmetiken är densamma. Däremot har det hänt mycket vad gäller synen på elever och på hur undervisningen kan gå till. Detta går att följa genom att studera läroplaner och kursplaner. I senare läroplaner, Lpo 94

(SKOLFS 1994:1) och Lgr11 (SKOLFS 2010:37), har synen på kunskap förändrats genom förskjutning från utantillinlärning till förståelse.

Lpo 94 grundar sig på en annan kunskapssyn än tidigare läroplaner, vilket uttrycks i läroplanskommitténs betänkande (SOU 1992:94). Detta medförde att kursplanen i matematik beskrev mål att uppnå i årskurs 5 och 9 samt mål att sträva mot för hela grundskolan (År 2007 infördes mål att uppnå även för årskurs 3). Den kunskapssyn som genomsyrade läroplanen och sättet att beskriva ämnesinnehållet innebar även förändringar i klassrummet. Eleven skulle ta ett större ansvar för sitt eget lärande och lärarens roll blev mer handledande. Dessutom ställdes större krav på läraren att tolka kursplanen och ta ansvar för vilket innehåll som skulle undervisas i olika årskurser.

Matematikinnehållet i kursplanen till Lpo 94 och nuvarande kursplan i Lgr11 skiljer sig knappast åt. Det är formuleringar och uttryckssätt i texterna som är olika. Målen i kursplanen i matematik till Lpo 94 var av en öppen och övergripande karaktär och lämnade stort tolkningsutrymme åt läraren. I kursplanen i Lgr11 kopplas matematiken i en syftestext till förmågor. Beskrivningen av förmågor och det centrala innehållet är något mer preciserat än i Lpo 94, men fortfarande lämnas mycket åt läraren att tolka. Syftena i Lgr11 innebär att eleverna ska ges möjlighet att utveckla sina förmågor att lösa matematiska problem och då använda adekvata modeller och även kunna resonera kring detta och se samband inom matematiken. Det som beskrivs i förmågorna är kunskaper som utmärker matematikers förhållningssätt till matematik och deras problemlösningsförmåga.

Kunnande i form av förmågor eller kompetenser uttrycks generellt och är i Lgr11 inte kopplat till något specifikt område inom ämnet. Men en förmåga eller kompetens kan inte utvecklas i ett vacuum, utan endast i relation till ett ämnesinnehåll (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Niss & Højgaard-Jensen, 2002). Det centrala innehållet utgör således navet i matematikundervisningen, medan syftestexten beskriver vilka förmågor som eleverna ska utveckla med hjälp av undervisningen.

Exempelvis kan en elev som saknar en grundläggande förståelse av multiplikation knappas förväntas utveckla sin problemlösningsförmåga när det gäller volym- eller areaberäkning eller något annat område som involverar aritmetik. Inte heller kan en elev med bristande baskunskaper om bråk förväntas utveckla sin resonemangs- eller kommunikationsförmåga i en kontext som handlar om likadelning eller om förhållanden. Att resonera utan att ha något att resonera *om* eller att kommunicera utan att kommunicera ett *innehåll*, är helt enkelt inte möjligt. På motsvarande sätt behöver den som skall analysera samband mellan begrepp, först ha förstått begreppen och den som skall välja mellan och värdera strategier, först behärska dessa.

1.2 Centrala matematikkunskaper

Elevens mest grundläggande taluppfattning handlar om de naturliga talen och ”The learning of whole-numbers arithmetic is foundational for a persons mathematical education.” (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Grundläggande aritmetik är det område som elever möter först i undervisningen. Där ska eleverna få möjlighet att se mönster och samband samt lösa problem och resonera. Om den grundläggande aritmetiken då behandlas på ett uttömmande sätt så synliggörs den inneboende algebran och arbetet tjänar som grund för fortsatt formell algebra. I övrigt utgör aritmetiken en nödvändig grund i andra delar av matematiken

Det är viktigt att elever lär sig att behärska basfakta, alltså fakta som 8+7 = 15, 14 – 6 = 8 och $5 \cdot 8 = 40$ under de tidiga skolåren och det finns en hel del matematik som kan lyftas fram vid inlärning av dessa basfakta. Detta är ett tydligt exempel på att det inte råder någon motsättning mellan de båda aspekterna av lärande, förståelse och utantillkunskap, utan att de snarare kompletterar varandra och samverkar.

För att kunna vara delaktig i samhället behöver vi alla ha grundläggande matematikkunskaper. Detta poängteras bland annat av Kilpatrick m.fl. (2001). Matematisk kompetens kan användas för att uttrycka en sammanvävning av matematikkunskaper såsom att förstå begrepp, operationer och relationer och direkt med flyt kunna utföra operationer. Vidare ingår att kunna formulera och lösa problem samt att kunna förklara och motivera och se nyttan av matematiken. Kilpatrick m.fl. använder här begreppet ”Mathematical Proficiency” och de ger följande rekommendationer angående delar av innehållet:

- Förstå tiobassystemet och talens namn vilka inte alltid språkligt är logiskt uppbyggda.
- Förstå innebörden i tal skrivna i bråkform och i decimalform och förstå samband mellan talen och operationerna i de olika talsystemen.
- Lära sig basfakta med förståelse
- Förstå och på ett generellt och effektivt sätt kunna använda algoritmer för de fyra räknesätten.
- Uppskattning och huvudräkning.
- Grundlig förståelse av och operationer med rationella tal i olika representationsformer såsom tal i bråkform, tal i decimal och procent.

Liknande rekommendationer ges av en annan forskargrupp i USA som har försökt att uttrycka en gemensam grundsyn på skolans matematikinnehåll och bringa klarhet i viktigt innehåll i ett F – 12 perspektiv (Ball, Ferrini-Mundy, Kilpatrick, Milgram, Schmid & Richard Schaar, 2005). Några av de centrala punkterna som man var överens om rörde även här den grundläggande aritmetiken och förståelsen av bråk. Att förstå tal i bråkform är nödvändigt för att på djupet förstå förhållande, proportionalitet och procent. Bråk är också en nödvändig förkunskap för räkning med tal i decimalform och för algebra.

Det matematikinnehåll som lyfts fram i rapporterna är viktigt för eleven såväl i vardagen som för fortsatta studier. Det har dock visat sig att vissa elever vid problemlösning visar svag förståelse av grundläggande numeriska beräkningar. De kan följa beräkningsprocedurer som de har lärt sig, men förstår inte innebörden i procedurerna (Hiebert, 1986; McIntosh, Reys, Reys, Bana & Farrell, 1997). Detta grundläggande matematikinnehåll kan användas för att förutsäga hur elever kommer att lyckas i framtiden. Kunskaper i grundläggande bråkräkning och division i de tidiga skolåren kan förutsäga vilka kunskaper elever uppnår i senare årskurser. Det har visat sig att kunskaper om bråk vid 10 års ålder är en prediktor för algebrakunskaper och andra matematikkunskaper vid 16 års ålder (Siegler, Duncan, Davis-Kean, Duckworth, Claessens, Engel, Susperreguy & Chen, 2012).

En studie som visar att tidiga matematikkunskaper är en god prediktor för hur väl en elev lyckas senare i såväl matematik som läsförståelse, har fått betydelse för att förstärka matematikundervisningen från förskolan till årskurs 3. Det går även att se samband mellan tidiga matematikkunskaper och resultat på gymnasienivå (Watts, Duncan, Siegler & Davis-Kean, 2014).

Den grundläggande aritmetiken och bråkräkning har varit föremål för en hel del forskning. Fokus har legat på hur elever tänker och räknar och med detta som utgångspunkt har elevers missuppfattningar och hur undervisning kan planeras beskrivits (Hart, 1984; Kerslake, 1986; Streefland, 1993; McIntosh, 2008). Särskilt Kerslake (1986) framhåller vikten av att elever förstår bråk som ett tal i ett utvidgat talsystem. Det finns således många utmaningar som såväl lärare som elever möter i undervisningen, när det gäller grundläggande aritmetik, förståelse av bråkbegreppet och räkning med tal i bråkform (Littwiller & Bright, 2002; Clarke, Roche & Mitchell 2008).

Det innehåll som inom denna forskning anses utgöra en viktig grund inom matematikkunnande är vad som står i fokus även i denna studie.

2 Den didaktiska analysens teoretiska grund

I detta kapitel redogörs för forskning och utvecklingsarbeten som fokuserar på matematikinnehållet i undervisningen. De första avsnitten beskriver vilka olika typer av kunskaper en lärare behöver ha för att undervisa i matematik. De följande avsnitten behandlar Shulmans (1986) Pedagogical Content Knowledge, PCK, och den forskning som Ball, Thames och Phelps (2008) har bedrivit kring de specifika matematikkunskaper som en lärare behöver ha. Ambitionen här är inte att ge en heltäckande forskningsöversikt, utan snarare att uppmärksamma vad lärarkunskap i matematik *kan* innebära. Därefter beskrivs kort didaktisk ämnesteori och didaktisk ämnesanalys. Det förra är en teori som ramar in matematiken i skolan och det senare är ett analysverktyg med vilket olika aspekter av matematiska begrepp kan synliggöras.

Föreliggande studie utgör en naturlig fortsättning på tidigare arbeten (Löwing, 2002; Löwing, 2004; Skolverket, 2011) och visar hur didaktisk ämnesteori kan användas för att förstå den förförståelse som behövs för individers lärande inom matematik. Den didaktiska ämnesteorin har visat sig vara ett användbart ramverk (Emanuelsson, Fainesilber, Häggström, Kullberg, Lindström & Löwing, 2011). Teorin kan användas för att analysera lektioner men även för att utveckla matematikinnehåll, didaktiska ämneskunskaper, det vill säga den typ av kunskaper som lärare behöver, och som torde rymmas inom det som Shulman (1986) kallar Pedagogical Content Knowledge, PCK. Didaktiska ämneskunskaper är således professionskunskaper inom ämnet som en lärare behöver för att kunna planera, genomföra och utvärdera undervisning.

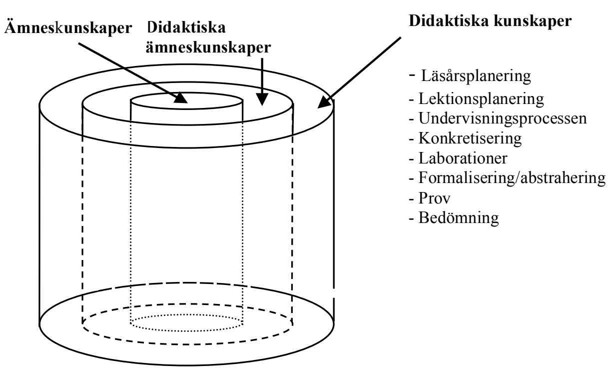
Enligt skollagens 1 kap 5 § om utformning av utbildning så ska utbildningen vila på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet (Sverige, 2015). Detta innebär förstås att exempelvis undervisning och läromedel skall vara utprövade, erfarenhetsmässigt såväl som vetenskapligt, men också att innehållet i undervisningen är vetenskapligt genomlyst. I föreliggande studie visas hur en didaktisk analys av skolans matematik kan se ut och hur en strukturerad presentation av en sådan analys kan utgöra en grund för diagnostisering av elevers kunskaper och för planering av undervisning. Den didaktiska ämnesanalysen står alltså i fokus i detta arbete. Avsikten är att visa vari en sådan analys består och hur den kan ges empiriskt stöd, men också att peka mot hur en didaktisk analys av undervisningens innehåll kan vara ett stöd när det gäller att förstå elevers kunskapsutveckling och, därmed, för lärarens planering.

2.1 Lärares professionskunskaper

Den avgjort viktigaste kunskapen som en lärare behöver för att kunna hjälpa elever att utveckla sitt matematiska kunnande är ämneskunskaperna och kunskaper om hur dessa kan undervisas (Gustafsson & Myrberg 2002; Hattie, 2009). Förutom egna matematikkunskaper behöver läraren ha professionskunskaper i form av didaktiska ämneskunskaper, vilka bildar utgångspunkten för undervisningen. Utöver dessa kunskaper behövs även allmänna didaktiska kunskaper.

Utgående från kursplanen i matematik Lgr11 ska lärare planera sin undervisning. Detta kräver funktionella didaktiska ämneskunskaper som hjälper läraren att urskilja vilka begrepp som är viktiga att undervisa och vilka elevuppfattningar som kan accepteras och är utvecklingsbara. I kursplanen finns centralt innehåll som eleven ska lära sig men det finns även krav på hur eleven ska behärska detta innehåll (SKOLFS 2011:19). Det betyder att undervisningsprocessen inte enbart omfattar hur matematiska begrepp transformeras till individuella uppfattningar av motsvarande begrepp utan även hur dessa begrepp ska relateras till de förmågor som beskrivs i matematikkursplanens inledande syftestext.

De egna matematikkunskaperna utgör kärnan i lärarens matematikdidaktiska kunnande. Utöver ämneskunskaper, adekvata för undervisning av den åldersgrupp elever läraren undervisar, behövs didaktiska ämneskunskaper. Utgående från dessa grundläggande professionskunskaper avseende matematikämnet, kan läraren planera undervisning, välja arbetssätt, bedöma elevens kunskaper med mera.



Figur 2.1. Modell av ämnesdidaktik som professionskunskap.

Hela cylindern (Figur 2.1) åskådliggör ämnesdidaktik som är ett vidare begrepp än didaktiska ämneskunskaper som i sin tur vilar på en didaktisk ämnesteori. Generella teorier om hur lärare, utgående från givna förutsättningar såsom mål och resurser, kan designa och utvärdera undervisningen samt välja arbetsform och arbetssätt behövs också. Om allt detta är anpassat till undervisning i matematik kan det benämnas matematikdidaktik.

Matematikdidaktik är således ett omfattande territorium där en didaktisk ämnesteori för matematikinnehållet är central. Det behövs en teoretisk grund för hur innehållet i matematikundervisningen ska väljas och presenteras för eleverna. Teorin ger även förutsättningar för att kunna göra didaktiska ämnesanalyser vilka ligger till grund för att synliggöra vilka förkunskaper som behövs för att ha möjlighet att förstå ett speciellt innehåll.

Oavsett vilka teoretiska utgångspunkter en lärare har, så krävs det att hon har didaktiska ämneskunskaper avseende matematik för att kunna orientera sig i matematiklandskapet och göra kloka val för undervisningen. Kullberg (2010) citerar exempelvis (de Groot, 1965; Bransford, Brown & Cocking, 2000) ”All experts certainly have discerned more features of the object of their expertise then novices”. Vad en person kan uppfatta och urskilja beror av egna tidigare kunskaper att referera till. Den som kan mycket om till exempel bilar eller fjärilar har lättare att urskilja modeller, arter, särdrag med mera. Detsamma gäller inom matematiken. Didaktisk ämnesanalys kan hjälpa lärare att bli varse vilka olika aspekter av ett begrepp som behöver exponeras för eleverna så att de ska få en bred bas som grund för att kunna bygga vidare från, alltså vad det är en elev behöver förstå för att ha möjlighet att förstå fortsättningen. En genomtänkt variation av begreppet som exponeras i undervisningen möjliggör för eleven att bygga upp en förståelse/uppfattning som har god överensstämmelse med det matematiska begreppet (Häggström, 2008).

En central del av en didaktisk ämnesteori består i att skapa preliminära och utvecklingsbara aspekter av begrepp anpassade till elever i olika åldrar och med olika förförståelse. Dessa ska kunna kommuniceras på ett för eleverna uppfattbart språk och på ett sådant sätt att språk och begrepp blir successivt utvecklingsbara. Samtidigt måste begreppen på alla nivåer kunna användas till att tolka och lösa situationer/problem av matematisk natur som uppstår i elevernas omvärld.

En didaktisk ämnesteori kan beskrivas på en rad olika sätt, precis som all annan teori. Teorin handlar om att ge läraren ett instrument som möjliggör individuella val av ämnesdidaktikens "vad" och "hur". Detta i sin tur ger många valmöjligheter i undervisningen som skapar goda förutsättningar för elevens fortsatta lärande.

2.2 Pedagogical content knowledge.

När Shulman (1986) och hans kollegor myntade begreppet PCK, pedagogical content knowledge, innebar det ett genombrott inom undervisningsområdet. Att lärare behövde förstå ett innehåll på ett speciellt sätt, rönte stort intresse världen över. Det Shulman gjorde var att peka på en koppling mellan ämneskunskaper och pedagogik.

Ball, Thames, och Phelbs (2008) skriver emellertid ”However, after two decades of work, this bridge between knowledge and practice was still inadequately understood and the coherent theoretical framework Shulman (1986) called for remained underdeveloped”. Ball m.fl. (2008) menar vidare att trots att termen PCK används frekvent så har innebörden och omfattningen (potentialen) behandlats i begränsad omfattning. I slutet av 80-talet visade forskarvärlden ett stort intresse för de idéer som presenterades av Shulman och hans kollegor, men trots att många forskare refererar till PCK så har det inte hänt så mycket när det gäller att beskriva innebörden i relation till olika innehåll.

Idén har ännu inte funnit något stabilt teoretiskt ramverk. Parallella arbeten mellan och inom olika ämnen pågår, men i många fall refererar man till PCK och använder begreppet som om ”its theoretical foundations, conceptual distinctions, and empirical testing were already well defined and universally understood”. I många fall skiljer man inte ut PCK från allmänna pedagogiska kunskaper.

Ett exempel på definitioner av PCK är:

> For example, pedagogical content knowledge has been defined as “the intersection of knowledge of the subject with knowledge of teaching and learning” (Niess, 2005, p. 510) or as “that domain of teachers’ knowledge that combines subject matter knowledge and knowledge of pedagogy” (Lowery, 2002, p. 69). In even broader terms, pedagogical content knowledge is defined simply as “the product of transforming subject matter into a form that will facilitate student learning” (de Berg & Greive, 1999, p. 20). (Ball m.fl. 2008, s. 394)

Shulman (1987) skriver att PCK, som utgör kittet mellan ämnesinnehållet och pedagogiken, saknades inom lärarutbildningen i USA på den tiden. Han menade att det inte räcker för en lärare att själv behärska innehållet, utan läraren behöver även förstå ämnets övergripande struktur och regler för hur innehållet kan behandlas.

I samband med undervisning och utveckling av matematikkurser inom lärarutbildningen har utgångspunkten varit att studenterna skulle ta ett lärarperspektiv på ett ämnesinnehåll (Löwing, 2006). En lärare har ansvar för att möta alla elevers behov och måste därför kunna ta elevernas perspektiv och behärska ett språk som fungerar i klassrummet. Detta är samma tankegångar som Shulman uttrycker. Shulman (1986) skriver vidare att PCK också innefattar att förstå vad som gör inlärning av ett speciellt innehåll lätt respektive svårt. Han lyfter då fram att elevers uppfattning och förförståelse av återkommande grundläggande innehåll är viktigt att känna till och ta hänsyn till och att det även ska relateras till ålder och bakgrund. Detta kan tolkas som att Shulman talar om betydelsen av förkunskaper.

2.3 Balls praxisbaserade teori för matematikundervisning.

Ball m.fl. (2008) menar att innebörden i PCK behöver utvecklas teoretiskt och testas empiriskt. Balls ambition har varit att undersöka vilka ämneskunskaper i matematik som en lärare behöver ha för att undervisa i matematik. Detta har forskargrupper runt Ball gjort genom att studera lärare i klassrummet och då studera vilket matematikinnehåll de möter. Därigenom har forskarna kunnat urskilja och beskriva olika delar av PCK.

Ball menar att de, till skillnad från andra forskare, har startat sitt arbete ute i verksamheten. En vanlig uppfattning är att lärare behöver kunna sitt ämne och pedagogiken samt ha kunskaper om läroplan och kursplan. Detta behöver en lärare självklart ha, men vad som behövs mer försöker Balls forskargrupp få syn på ute på fältet. De har närmat sig området på två sätt. Dels har de gjort videoinspelningar av lektioner. Genom att analysera filmerna har de kunnat se vilka återkommande moment och matematikuppgifter som läraren måste kunna hantera. Dels har de kartlagt vilka matematikkunskaper som behövs för de matematikuppgifter som frekvent undervisas. Genom dessa studier har Balls forskargrupp kunnat se mönster i vilka kunskaper som krävs av en lärare och på så sätt har kunskaperna inom PCK fördjupats. Genom att i analyserna koordinera matematiken med ett pedagogiskt perspektiv i de inspelningar som gjorts försöker Ball utforma en praxisbaserad teori för matematikkunskaper så som de kommer till uttryck i undervisningen.

I sitt första forskningsområde, klassrumsstudier, lyfter Ball m. fl. (2008) fram hur matematiska idéer konkretiseras och pekar på att detta utgör en del inom PCK. En annan professionskunskap som synliggjordes i Balls forskning var de speciella nyckelidéer som en lärare samtidigt måste behärska, ”key ideas in the content”, och hur elever uppfattar detta innehåll. Här ingår även kända missuppfattningar som kan förekomma hos eleverna. (Se även Macintosh, 2008.)

Inom den andra forskningsinriktningen som Ball och hennes forskargrupp har arbetat med under åren har de utvecklat ett instrument för att ta reda på hur ett innehåll behöver förstås för att man ska kunna undervisa om det. Instrumentet består av, i matematikundervisningen, frekvent förekommande uppgifter. Uppgifterna var subtraktion med lån, alltså av typ 307 – 198, multiplikation av flersiffriga tal, 123 · 645, och division med tal i bråkform, som 1 ¼ delat med ½. Genom att låta lärare arbeta med denna typ av uppgifter blev det möjligt att undersöka vilka matematikkunskaper som behövdes för undervisning. Dessa uppgifter har även använts av Ma (1999) och det är samma typ av uppgifter som har uppmärksammats inom svensk lärarutbildning (Kilborn, 1989; Löwing & Kilborn, 2002; Löwing, 2008).

Utgående från arbetet med dessa uppgifter synliggörs en viktig underkategori till PCK, nämligen Specialized Content Knowledge, ”pure content knowledge unique to the work of teaching”.

Balls forskargrupp har även funnit att PCK bör kompletteras med ämnesspecifik kunskap – Subject Matter Knowledge. Det handlar då om den speciella kunskap inom matematik som en lärare behöver för att kunna förklara olika typer av uppgifter för elever. Specialized Content Knowledge, utgör en del av innehållet i Subject Matter Knowledge, de två andra delarna är Common Content Knowledge och Horizon Content Knowledge. Bortsett från detaljer, är det intressant här är att notera att de tydligt markerar att lärarkunskaper skiljer sig från Common Content Knowledge, de kunskaper som alla behöver ha i matematik.

Enligt Ball måste läraren själv behärska Common Content Knowledge. När de analyserade videoinspelningar av lektioner visade det sig att denna kunskap var viktig för läraren. Den andra underkategorin, Specialized Content Knowledge, utgörs av de matematikkunskaper som är väsentliga specifikt för läraren. Det handlar om hur man kan hantera den matematik som behandlas i undervisningen för att därigenom kunna förklara innehållet för eleverna. Det kan även vara av intresse för läraren att finna mönster i elevers fel. Vidare utgör Horizon Content Knowledge matematikkunskaper som läraren behöver för att se vart deras undervisning ska leda.

Något som Ball m.fl. lyfter fram är att lärare behöver behärska olika aspekter av ett speciellt innehåll. Som exempel tar de subtraktion.

> For instance, it requires understanding different interpretations of the operations in ways that students need not explicitly distinguish; it requires appreciating the difference between “take-away” and “comparison” models of subtraction and between “measurement” and “partitive” models of division. (Ball m. fl. 2008, s. 400).

Att kunna handskas med problem av denna typ är rutingöromål som läraren måste behärska. Dessa kunskaper har bland andra även Carpenter och Moser (1984) beskrivit som centrala i sin forskning.

Exemplet som Ball m. fl. valt, subtraktionen 307 – 168, menar de kanske inte är det bästa att använda för att förstå den begreppsliga strukturen i uppställningen.

De har följande funderingar:

> Should the numerical examples require two regroupings, as in this case, or should examples be sequenced from ones requiring no regrouping to ones that require several? What about the role of zeros at different points in the procedure? Should the example include zeros—or perhaps not at first? Questions such as these, as well as those posed in the discussion above, require mathematical reasoning and insight, crucial to teaching, yet foreign to most well-educated adults. This is what we mean by the special mathematical demands of teaching mathematics. (s. 398)

Denna typ av sekvensering som hjälp till lärare i undervisningen beskrev Johansson och Kilborn redan på 70-talet (Kilborn, 1979), något som utvecklats vidare i arbetet med Diamantdiagnoserna (Skolverket, 2013a).

Genom att kartlägga de matematikkunskaper som en lärare behöver ha, fann Balls forskargrupp att det är centralt för läraren att på djupet förstå den matematik som tas upp i kursplanen för att kunna planera och genomföra undervisning. Här överlappar de beskrivningar som ges av Knowledge of Content and Curriculum, och Horizon Content Knowledge, delvis varandra och sådana kunskaper återfinns inom båda dessa områden.

Ball lyfter vid flera tillfällen fram att ”Our theory is framed in relation to practice”. Den forskning som de har som grund för sin teori har strävat efter att synliggöra delar i den komplexa undervisningssituationen.

> We want to understand the mathematical reasoning that underlies the decisions and moves made in teaching. The questions we pose in our measures of mathematical knowledge for teaching are designed to situate knowledge in the context of its use, but how such knowledge is actually used and what features of pedagogical thinking shape its use remain tacit and unexamined. (Ball m. fl. 2008, s.403)

Detta är viktiga aspekter av lärarkunskaper som de vill fördjupa sig i. Forskargruppen diskuterar även i vilken mån den teori de börjat utveckla är kulturberoende eller påverkas av lärares undervisningsstil. De tror emellertid inte att det är så, utan att de kunskaper de beskriver, som läraren behöver ha, är allmängiltiga. Ett exempel de tar upp är att oavsett om läraren arbetar i en hel klass eller rättar hemuppgifter behöver de försöka förstå hur eleven tänker. Vidare menar de att uppgifter till prov och bedömning är kärnverksamhet i lärarens undervisning och därför förekommer i olika kulturer. Se vidare artiklar i temanumret Nomad, Volume 19, no 3-4, oktober 2014.

2.4 Didaktisk ämnesteori

Didaktisk ämnesteori behandlar hur en individ kan tillägna sig ämneskunskaper i en given situation. Ett led i denna teori är att beskriva matematiken som sådan, det vill säga den matematiska begreppsapparaten, utifrån ett lärandeperspektiv, till skillnad från en beskrivning utifrån ett logiskt eller ett inommatematiskt eller ett filosofiskt perspektiv, vilket också är möjligt. I denna studie beskrivs hur didaktiska ämnesanalyser, en del i den didaktiska ämnesteorin, ligger till grund för konstruktioner av strukturer inom och mellan matematiska begrepp. Analyserna leder till förkunskapsstrukturer som kan bidra till att synliggöra progressionen inom matematikundervisningen. Dessa strukturer ligger även till grund för konstruktionen av diagnosmaterialet Diamant (Skolverket, 2013a), ett nationellt bedömningsstöd. Diamantdiagnoserna beskrivs i kapitel 3, den didaktiska ämnesanalysen presenteras i detalj i kapitel 4 och resultaten av kartläggningar som gjorts med hjälp av diagnoserna redovisas i kapitel 5.

Under mer än 30 års forskning inom matematikdidaktik har forskare beskrivit hur elever tänker i matematik i olika situationer och om olika matematikinnehåll. Exempel på forskning inom grundläggande matematikkunskaper som involverar teoretiska analyser av empirisk data, är Gelman och Gallistel, (1978), Kilborn, (1979) och Carpenter, Moser och Romberg, (1982). En mer omfattande strukturerad bild av hur skolans matematikinnehåll hänger samman saknas emellertid. En didaktisk karta över det matematiska landskapet som beskriver innehållet i skolans matematik skulle dock kunna hjälpa lärare att utveckla sin undervisning.

I mitten av 1980-talet beskrevs idéer om utbildningsvetenskapliga teorier för skolämnena och då hur en teori för skolmatematiken skulle kunna se ut (Marton, 1986).

> Det är vår uppfattning att den grundläggande orsaken till dessa skillnader i val av innehåll ligger i det faktum att vi saknar en *didaktisk ämnesteori*, en ämnesteori för *skolämnet* matematik. Denna teori går inte att härleda ur den akademiska disciplinen matematik.. … (s. 92)
>
> En didaktisk ämnesteori för skolämnet matematik går heller inte att härleda från erfarenheter av några begränsade fenomen, som man ofta arbetar med inom den pedagogiska och inlärningspsykologiska forskningen…. Istället behöver vi en teori som innehåller *omvärldsrelaterade* kunskapsstrukturer och som samtidigt är väl anpassad till kunskaper om hur lärare och elever uppfattar detta innehåll. (Johansson & Kilborn,1986, s. 93)

En didaktisk ämnesteori för matematikundervisning har senare utvecklats och knutits till internationell forskning (Löwing, 2002).

Schulman (1986) har uttryckt att det inom skola och utbildning ställs krav på PCK, en syn på lärarkunskap som utgör grundtankar i teorier för matematikundervisning (Leinhart, Putnam, Stein & Baxter, 1991; Kanes & Nisbet, 1996; Ball & Bass, 2000; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Grundtankarna inom denna typ av teoribildning hämtas från såväl ämnet matematik som från det pedagogiska fältet. Dessa bör bygga på ett förhållande mellan ämnet matematik och hur inlärning av matematik går till.

Avsikten med den didaktiska ämnesteorin (Löwing, 2002) är därför att beskriva, systematisera och förutsäga vilket matematikinnehåll elever i olika åldrar kan tillgodogöra sig och att utgöra en teoretisk grund för att analysera, planera och bedöma undervisning i en vidare mening. En sådan teoretisk grund inkluderar, men definieras troligen inte av, följande:

- Kunskap om matematikens interna, eller logiska, struktur
- Kunskap om matematikens didaktiska struktur
- Kunskap om matematikens historiska utveckling, såväl inom som utom skolan
- Kunskap om matematikens tillämpbarhet och dess begränsningar
- Kunskap om kulturella, språkliga och sociala aspekter av matematiken och dess lärprocesser
- Kunskap om lärande- och undervisningsteorier
- Kunskap om såväl formell som informell kommunikation av matematik
- Kunskap om hur lärare och elever tänker kring matematik.

Den didaktiska ämnesteorin är delvis empiriskt grundad och tar bland annat sin utgångspunkt i forskning om individers lärande och möjlighet att tillgodogöra sig olika typer av matematikinnehåll. En kärna i den didaktiska ämnesteorin är även den didaktiska ämnesanalysen, där matematikinnehåll studeras, beskrivs och struktureras ur ett didaktiskt perspektiv.

Denna teori har som syfte att systematisera och förklara kunskaper om individens möjligheter att tillgodogöra sig matematiska kunskaper. Teorin avser även att utgöra grund för förenklade matematiska förklaringsmodeller som kan uppfattas av elever i olika åldrar och för hur ett matematiskt begrepp som behandlas på ett sätt successivt kan transponeras och efter individuella behov göras allt mer stringent.

2.5 Matematiska begrepp och elevers uppfattningar

Det krävs kunskaper om matematiska begrepp och beräkningsmetoder för att kunna förstå och bearbeta matematiska uppgifter och för att lösa problem av olika slag. Vissa av dessa matematiska uppgifter och problem kan vara enkla och konkret formulerade vardagsproblem, andra kan vara abstrakta och mer komplexa. Alla individer bör kunna lösa, var och en på sin kunskapsnivå, för dem relevanta matematiska problem med någon acceptabel matematisk metod som bygger på för dem uppfattbara begrepp. Detta innebär att de begrepp som eleverna möter i skolan inte kan vara konstanta över tid utan att de efter hand som eleverna utvecklar sitt matematikkunnande ska förfinas och göras allt mer generella och abstrakta. De förklaringar av begrepp som eleverna möter under de första skolåren är således preliminära och, matematiskt sett, ofullständiga. Samtidigt måste dessa förklaringsmodeller vara sådana att de är tillräckligt matematiskt korrekta för att de på relevant kognitiv nivå ska kunna ligga till grund för matematiska metoder som är användbara vid problemlösning. Marton och Booth (2000) beskriver motsvarande tankar så här:

> Ur vår synvinkel går lärande i regel framåt från en odifferentierad och mindre sammanhängande förståelse av helheten till en ökad differentiering och integration av helheten och dess beståndsdelar. På så sätt framskrider lärandet inte så mycket från delar till helheter utan från helheter till helheter. (s. 10)

Ett matematiskt begrepp kan uttryckas och förstås på flera olika sätt. Det kan i ett första steg beskrivas på en konkret nivå och vara funktionellt i ett begränsat talområde. Därefter kan det efter hand formuleras allt mer abstrakt och generellt beroende på elevernas behov och förmåga att abstrahera. Detta är en syn som genomsyrar van Hieles (1986) analys av geometriska begrepp i de så kallade van Hielenivåerna. Van Hiele beskriver hur man med succesivt ökande abstraktion kan beskriva olika geometriska begrepp.

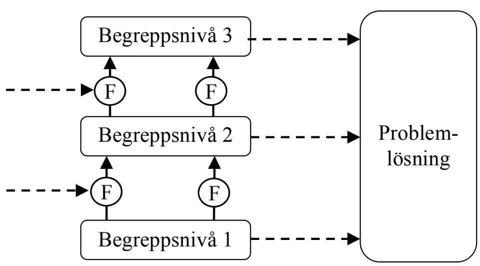
Under sina tidiga levnadsår utvecklar barn en första uppfattning om matematiken och dess strukturer. Gelman och Gallistel (1978) beskriver med hjälp av fem principer barns grundläggande taluppfattning. Carpenter och Moser, (1984) beskriver hur de grundläggande additionerna och subtraktionerna utförs av små barn. Denna inledande förståelse av matematiken är ur barnets synvinkel en helhet, men är relativt det matematiska begreppet preliminär. Efter hand som barnet tillägnar sig fler matematiska begrepp, och fördjupar sin förståelse av dem, sker omvärderingar av och förändringar i kunnandet.

Med hjälp av ramverket didaktisk ämnesteori kan man, utgående från denna syn på begreppsutveckling, ge struktur åt elevernas lärande och även beskriva hur elevens matematiska tänkande kan gå från en förståelse av ett begrepp till en mer utvecklad förståelse av begreppet. Eleven förstår begreppet på den nivå den klarar av. Som lärare måste man vara medveten om vilka delar de olika begreppen består av, för att kunna stödja elevens lärande.

Detta betyder att inom matematikdidaktiken bör inte ett matematiskt begrepp uppfattas som något konstant och absolut. Begreppen bör i stället byggas upp successivt från enklare och mer konkret förankrade begrepp, till abstrakta och mer generella. Med hjälp av didaktisk ämnesanalys kan man skapa en struktur för hur denna väg mellan olika begreppsnivåer kan se ut och vilka förkunskaper, termer och delbegrepp, som krävs för att gå från en förståelse av ett begrepp till en annan, mer fördjupad, förståelse, alltså från enklare till mer komplexa begreppsnivåer.

Exempel

Här illustreras hur ett aritmetiskt begrepp, i detta fall multiplikation, utvecklas i undervisningen. Multiplikation kan på begreppsnivå 1 beskrivas som upprepad addition. När begreppet ska utvecklas vidare till multiplikation med tvåsiffriga tal krävs för effektiva beräkningsstrategier, nya förkunskaper i form av termer, regler och räknelagar inom ett utvidgat talområde. Dessa förkunskaper markeras i Figur 2.2 med cirklar. Inom begreppsnivå 2, multiplikation med tvåsiffriga tal, kan man med hjälp av räknelagarna utveckla multiplikationsstrategier för skriftlig räkning och huvudräkning. Dessa går utöver den ursprungliga modellen med multiplikation som upprepad addition, även om modellen fortfarande duger på ett abstrakt plan. Nästa begreppsnivå 3 kan omfatta multiplikation av rationella tal, vilket kräver nya förkunskaper inom ett utvidgat talområde. Här krävs dessutom en omtolkning av multiplikation till något annat. Produkten av två bråk kan inte längre ses som upprepad addition, utan kanske i stället som en kartesisk produkt. När talområdet utvidgas till negativa tal eller när multiplikation ska förstås i mer komplexa sammanhang, krävs förståelse på ytterligare nivåer.



Figur 2.2. Modell av utveckling av matematiska begrepp.

Figur 2.2 beskriver alltså hur ett matematiskt begrepp successivt utvecklas och fördjupas samtidigt som begreppet är användbart vid problemlösning på lämplig nivå. En illustration av detta är att koppla begreppet multiplikation till problemlösning inom geometri – fyrhörningars area:

- På begreppsnivå 1 är det möjligt att lösa problem som ”Beräkna arean av en rektangel med sidorna 3 cm och 4 cm”. Arean beräknas med hjälp av formeln $A = b \cdot h$. Den tecknas $A = 4 \cdot 3$ och multiplikationen kan här räknas ut med hjälp av upprepad addition 3 + 3 + 3 + 3.

Modellen upprepad addition går bra att använda vid denna typ av beräkning men är inte funktionell vid multiplikation av tvåsiffriga tal.

- På begreppsnivå 2 är det fortfarande multiplikationsbegreppet som är i fokus men nu är de ingående talen tvåsiffriga. Uppgiften gäller fortfarande arean av en rektangel: Beräkna arean av en rektangel med sidorna 16 cm och 24 cm. Nu är upprepad addition inte funktionellt. Med hjälp av den distributiva lagen kan beräkningen utföras på en rad olika sätt skriftligt i en uppställning eller med huvudräkning. Vid beräkningen $A = 16 \cdot 24$ ingår olika deloperationer som med hjälp av räknelagarna kan beskrivas på följande sätt: (10 + 6) · 24 = 10 · 24 + 6 · 24 = 10 · 20 + 10 · 4 + 6 · 20 + 6 · 4. För att utföra dessa deloperationer krävs kunskaper i basfakta som 6 · 4. Vid huvudräkning går det till exempel att använda följande strategi: 16 · 24 = 16 · 25 – 16 · 1, som med hjälp av den associativa lagen kan beräknas som 4 · (4 · 25) – 16 = 400 – 16.

Den typ av beräkningar som används här är generella och kan användas för multiplikationer, med såväl tvåsiffriga som tresiffriga naturliga tal.

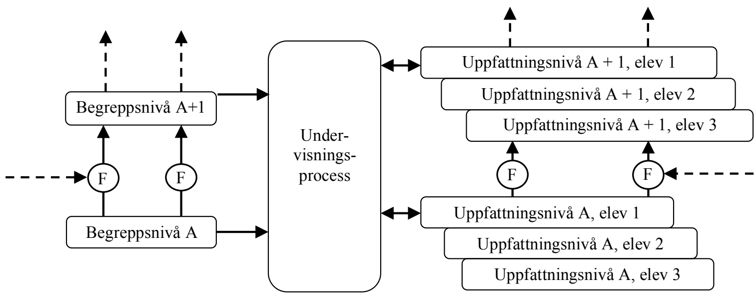
- På begreppsnivå 3 är de ingående talen givna i bråkform vid areaberäkningen: Beräkna arean av en rektangel med sidorna $2\frac{1}{3}$ cm och $1\frac{5}{6}$cm. Vid denna beräkning krävs kunskaper inom ett utvidgat talområde, de rationella talen, och en annan definition av räknesättet multiplikation: $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{6} = \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{6}$.

Exemplet visar hur problemlösning är kopplad till begrepp, i det här fallet aritmetiska begrepp, som krävs för lösandet, men även till ett geometriskt begrepp, area. Ju högre begreppsnivå, desto mer komplexa problem går att lösa.

Det finns således ett "objektivt" begrepp multiplikation som är det begrepp eleverna skall förstå i slutändan och lärandet består i att elevernas uppfattning av begreppet multiplikation skall närma sig detta begrepp så mycket som möjligt. På vägen duger elevernas mindre utvecklade begrepp till problemlösning och resonemang inom begränsade områden (t.ex. begränsade talområden) och dessa områden kan vidgas i takt med att elevernas uppfattning av begreppet utvecklas.

Det är samtidigt viktigt att skilja mellan de matematiska begreppen på olika nivåer i utvecklingen (fördjupningen) och hur olika individer uppfattar eller förmår uppfatta motsvarande begrepp. Detta illustreras nedan (Figur 2.3).

Undervisningen innehåll **Individers uppfattningar**



Figur 2.3. Modell av utveckling av begrepp och individers uppfattningar av motsvarande begrepp.

Till vänster i Figur 2.3 beskrivs det matematiska begreppet på olika utvecklingsnivåer, olika aspekter av begreppet. Genom didaktisk ämnesanalys kan dessa aspekter beskrivas och struktureras.

I undervisningsprocessen behandlas begreppet på nivå A+1, och resultatet blir att elever uppfattar eller förstår begreppet på olika sätt. I figuren beskrivs det aktuella begreppet på två nivåer och mot varje sådan nivå svarar olika elevuppfattningar (till höger i Figur 2.3). Målet är att de olika elevernas uppfattningar så nära som möjligt skall överensstämma med motsvarande begrepp. Skillnaden mellan begrepp och elevens uppfattning av begreppet beror på hur begreppet lyfts fram i undervisningen och elevens möjlighet att förstå det. Genom att på detta sätt skilja mellan undervisningens innehåll (begrepp), undervisningsprocessen och elevers uppfattningar av det undervisade begreppet får man ett instrument med vars hjälp man kan analysera undervisningens kvalitet.

Figur 2.3 visar inte bara hur olika begreppsnivåer hänger ihop och i vilken utsträckning eleven har uppfattat motsvarande begrepp. Den visar även undervisningsprocessen som ligger emellan och som omfattar planering, presentation av innehåll, arbetsformer, arbetssätt med mera. Undervisningsprocessen har stor betydelse för elevers möjligheter att uppfatta begrepp som undervisas (Niss 1994; Kilpatrick m.fl, 2001; Hattie 2009).

Ett exempel på hur en mindre god relation mellan begreppet och elevens uppfattning av motsvarande begrepp kan leda till onödiga missuppfattningar beskriver Riesbeck (2008) i sin avhandling. Elever i studien resonerar om hur de skall tillämpa matematiska modeller.

> Eleverna lyckas i vår studie inte med att hålla isär de olika resonemangskedjorna. Eleverna reder inte ut hur logiken ser ut och vilka argument som är giltiga i ett givet ögonblick. Istället anförs skäl, belägg eller information hörande till olika matematiska modeller utan att man frågar sig om just den aktuella modellen kan ta hänsyn till detta. (s.227)

Enligt syftestexten i kursplanen för matematik i Lgr11, beskrivs målen att utveckla just denna typ av förmågor, att kunna se samband och resonera kring dem. Förutsättningen för att klara detta är att eleverna har förstått begreppet på ett adekvat sätt eller att diskussionen leder till att eleverna uppfattar begreppet på ett adekvat sätt. Det är lärarens ansvar att detta blir möjligt.

2.6 Didaktisk ämnesanalys.

Den begreppsliga strukturen som beskrevs i förra avsnittet kan utvecklas med hjälp av en didaktisk ämnesanalys. Vid denna typ av didaktisk analys framträder såväl de olika begreppsnivåerna som de förkunskaper och delkunskaper som krävs för att gå från en begreppsnivå till nästa. En analys av matematiken ur ett didaktiskt perspektiv är en nödvändig förutsättning för att avgöra vilka vägar som är möjliga för en elev att följa i lärandeprocessen, samt förstå vilka konceptuella samband som möjliggör eller begränsar denna process.

I exemplet i det tidigare avsnittet fokuserades begreppet multiplikation och det geometriska begreppet, arean av en rektangel, hölls konstant. I detta avsnitt analyseras areaberäkning av två olika fyrhörningar. Dessa areaberäkningar ligger på olika begreppsnivåer i och med att komplexiteten ökar genom de nödvändiga förkunskaper avseende begrepp och aritmetik som behövs för förståelsen.

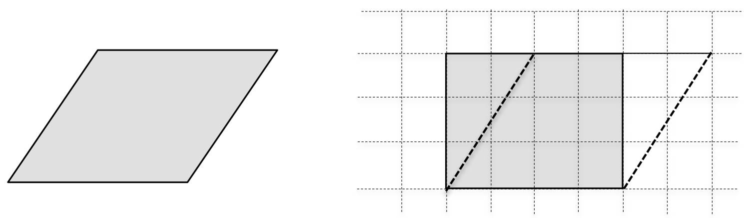
Den didaktiska ämnesanalysen består i att utreda matematikens didaktiska struktur. Med denna struktur menas de didaktiska relationer som råder mellan olika aspekter inom ett begrepp och mellan olika matematiska begrepp. Att analysera matematiken didaktiskt är inte detsamma som att analysera matematiken ur ett logiskt eller ett vetenskapsteoretiskt perspektiv. Det är inte heller detsamma som att analysera matematiken ur matematikerns (the working mathematican) perspektiv. Den didaktiska analysen avser att beskriva matematik ur ett lärande- och undervisandeperspektiv.

Didaktisk ämnesanalys av ett innehåll kan göras av enskilda begrepp eller av hela matematikområden. Resultatet kan tolkas som en didaktisk karta över olika aspekter av ett begrepp eller samband mellan olika begrepp.

Denna karta kan utgöra grund för att se kvaliteter i elevens matematikkunnande.

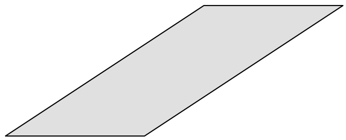
Nedan ges två enkla exempel på didaktisk ämnesanalys på begreppsnivå, beräkning av arean av en parallellogram och av ett parallelltrapets. Utgångspunkten är vad eleven redan behöver förstå, för att ha möjlighet att förstå den nya areaberäkningen.

Förutsättningen för att kunna resonera om parallellogrammens och parallelltrapetsets area är att eleven behärskar ett antal begrepp samt förstår olika samband mellan dem. För att resonera om parallellogrammens area krävs att eleven behärskar följande begrepp: area, bas, diagonal, höjd, hörn, normal, parallell, parallellogram, punkt, rektangel, sida, sträcka, triangel, vinkel, vinkelrät. Eleven ska dessutom behärska en bildlig representationsform (Figur 2.4).



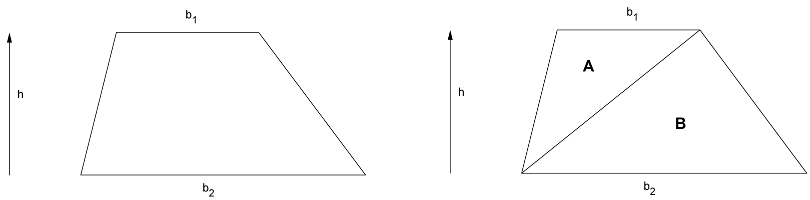
Figur 2.4. Ett sätt att visualisera att arean av en parallellogram är samma som arean av en rektangel med samma bas och höjd.

Bland nödvändiga förkunskaper ingår även att eleven har förstått area på ett sådant sätt att hon har en utvecklingsbar tankemodell. Det är en hjälp att kunna tänka på area som rutor, cm^2, vilka täcker ytan. Vidare bör eleven tidigt ha förstått att area kan konserveras (Piaget, 1960), alltså kan flyttas runt utan att den ändras. Parallellogrammen till vänster i Figur 2.4 kan inte direkt relateras till en tidigare känd area. Om eleven däremot betraktar Figuren till höger som täcks av ett rutmönster, kan den triangel som framträder till höger i parallellogrammen flyttas till vänster sida. På så sätt kan parallellogrammens area jämföras med arean av en rektangel med samma bas och samma höjd. Rektangelns area förutsätts vara känd för eleven och parallellogrammens area bestäms alltså på samma sätt. Resonemanget ovan måste utvidgas för att vara generellt giltigt och även omfatta parallellogrammer som till exempel den i Figur 2.5.



Figur 2.5. Parallellogram.

När det gäller parallelltrapetsets area (Figur 2.6) krävs att eleven behärskar begrepp som area, bas, diagonal, höjd, hörn, normal, parallell, parallelltrapets, punkt, sida, sträcka, triangel, vinkel, vinkelrät.



Figur 2.6. Ett parallelltrapets.

För att kunna resonera kring de beräkningar som ska göras och samtidigt förstå att formeln är generell, krävs att eleven har abstraherat sin kunskap, alltså har lärt dig att tänka och resonera kring begreppen. Det innebär till exempel att eleven inte behöver använda sig av synliga rutmönster som stöd i areaberäkningen.

Beräkningarna kräver att eleven behärskar multiplikation, division, prioriteringsregler och parenteser samt har kunskaper i algebra. Ett sätt att bestämma arean av ett parallelltrapets är att dela upp den i trianglar vars area förutsätts att eleverna kan beräkna. Parallelltrapetset, (Figur 2.6), har med hjälp av en diagonal delats upp i två trianglar, A och B, vars areor är:

$\mathrm{A} = \frac{b_1 \cdot h}{2}, \quad \mathrm{B} = \frac{b_2 \cdot h}{2}$

Vid beräkningen av parallelltrapetsets area måste eleven även kunna använda sig av den distributiva lagen och den kommutativa lagen för att förenkla och utföra nödvändiga beräkningar. Exempelvis ska eleven kunna bryta ut en faktor, som i 3a + 4a = a(3 + 4).

Parallelltrapetsets area blir då $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2} = \frac{h \cdot (b_1 + b_2)}{2}$

Denna typ av analys gör det möjligt att överblicka vad som ska tas upp i undervisningen och vilka förkunskaper eleverna behöver ha för den aktuella undervisningen. Det blir även möjligt att bedöma elevens aktuella kunskaper, och använda informationen formativt i den fortsatta undervisningen.

En didaktisk ämnesanalys av det beskrivna slaget hjälper lärare att få syn på de aspekter som behövs för att behärska ett visst begrepp, den didaktiska kartan. Analysen synliggör vad som är möjligt att resonera om, vilka egenskaper som är relevanta för figuren i fråga samt innebörden i begreppen och samband mellan olika begrepp som används. Den didaktiska ämnesanalysen kan även synliggöra en progression i undervisningen upp genom årskurserna, något som behandlas mer ingående i kapitel 4 nedan.

2.7 Den didaktiska ämnesteorin testas kontinuerligt

Tanken bakom en didaktisk ämnesteori är att med dess hjälp samla kunskap och erfarenheter så att val av innehållet i skolans matematikundervisning och metoder att presentera det, inte endast grundas på enbart empiri utan även bygger på teori. Med teorins hjälp gäller det att inte enbart konstatera fakta utan även förklara givna fakta och förutsäga nya. Denna typ av teori kan sägas vara empirisk eftersom den delvis är baserad på praktiska erfarenheter, till skillnad från teorier som är helt deduktiva såsom matematiken och logiken.

Med hjälp av olika uppgifter går det att beskriva hur man kan systematisera och konkretisera didaktiska matematikkunskaper. För att inhämta kvantitativ information gällande lösningsfrekvenser för olika uppgifter användes en diagnos framtagen genom didaktisk ämnesanalys. Syftet med denna typ av kartläggning är att undersöka i vilken utsträckning elever i olika åldrar behärskar ett innehåll. Som exempel tas division av tal i bråkform.

Uppgiften $\frac{6}{5}/3$ hade en lösningsfrekvens på 33% i skolår 8 och 44% i årskurs 1 på gymnasiet, medan uppgiften $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$ hade en lösningsfrekvens på endast 17% i skolår 8 och 33% i årskurs 1 på gymnasiet.

Vid analys av lösningsfrekvenserna framträder bland annat hur vanligt ett visst fel är. Den skriftliga kartläggningen följs sedan upp med så kallade kliniska intervjuer (Piaget, 1952) för att synliggöra de kvalitativa orsakerna till att elever inte klarar att lösa uppgiften. Dessa intervjuer visar att de elever som löser uppgifterna korrekt i allmänhet använder sig av en formel med följande innebörd: För att utföra divisionen $\frac{6}{5}/3$ ska nämnaren inverteras och därefter byts divisionstecknet ut mot ett multiplikationstecken. Denna teknik ger $\frac{6}{5}/3 = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3}$, vilket är en av flera möjliga tekniker för att lösa uppgiften.

Vid intervjuerna framkommer att ytterst få elever förstår varför denna teknik fungerar. Att de kan lösa uppgiften handlar alltså inte om en matematisk insikt utan om en ren manipulation av siffror enligt en inlärd teknik. För dem som inte kan lösa uppgiften är orsaken ofta att de har glömt tekniken. Eftersom de flesta av eleverna inte heller har någon konkret uppfattning om operationens innebörd, eller har någon metafor att falla tillbaka på, så kan de inte rekonstruera tekniken eller finna alternativa lösningsstrategier. Det här är ett exempel på hur man inom en matematikdidaktisk teori kan samla in och systematisera kunskap i avsikt att kunna förklara orsakerna till aktuella fenomen.

Nästa steg i en teoriprövning kan bestå i att man söker och analyserar olika sätt att förklara denna operation för eleverna så att den blir lättare att förstå. En källa för detta är matematikens historia, där man ofta kan finna enkla lösningar som inte har tagit omvägen över algebran. Mot denna bakgrund kan man uppfatta bråket $\frac{6}{5}$ som att det består av 6 stycken av enheten femtedel. Ur det perspektivet kan den nyss beskrivna uppgiften tolkas som en uppdelning av 6 enheter, femtedelar, i 3 delar. Svaret blir då 2 enheter, alltså $2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. Detta är en alternativ typ av förklaring. Denna kunskap kan nu användas som en del i en struktur som tillsammans bidrar till att systematisera och förutsäga fler fenomen inom matematikundervisningen, till exempel vad som blir följden av olika sätt att presentera ett visst matematikinnehåll. En annan fördel med denna förklaringsmodell är att den lätt kan konkretiseras, vilket kan bidra till en djupare förståelse av divisionen, även om många elever senare kommer att använda tekniken ovan som gör beräkningen snabb och effektiv och är nödvändig inom algebran. Men utan förståelse kan matematiken verka som rent trolleri.

Den andra uppgiften där lösningsfrekvensen presenterades ovan är $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$, där det finns ett bråk även i nämnaren. Intervjuerna visar att de flesta eleverna tänkte att de skulle dela $\frac{3}{4}$ på $\frac{1}{4}$ personer (dela $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$ högar). Anledningen till att de tänker sig en sådan strategi är att de under tidigare skolår lärt sig division som likadelning. En lämpligare strategi kan i stället vara ett tänka innehållsdivision. Då man frågat hur många ”kvartar” som finns (innehålls) i 3 kvartar visar det sig att de flesta elever direkt kunde ge svaret 3. Kunskap om tänkande som kallas innehållsdivision får man genom att studera svensk skolhistoria (Nilsson & Wigforss,1951). Detta är också exempel på hur man kan söka och systematisera kunskap i avsikt att förklara vissa fenomen och förutsäga andra. Med denna insikt och genom en systematisk planering av undervisningen kan man förebygga svårigheter som elever skulle kunna hamna i senare.

Det vetande som framkommer genom systematiska test och intervjuer som beskrivits ovan måste kompletteras med kunskaper om vilka förkunskaper som krävs för att kunna uppfatta de beskrivna strategierna. Förkunskaperna kan synliggöras genom didaktisk ämnesanalys som beskrivits tidigare. Till detta kommer att det innehåll som eleverna ska förstå måste kunna kommuniceras med olika individer. Det betyder i sin tur att man måste analysera såväl det språk som kan eller bör användas, som de konkretiseringsmodeller och metaforer som leder till förståelse av den aktuella kunskapen.

Man kan sammanfatta teoriuppbyggnaden så här: Genom att utföra studier av ovan beskrivna slag och analysera hur olika uppgifter är uppbyggda och vilka strategier elever använder för att lösa uppgifterna, kan man efter hand systematisera de vunna erfarenheterna. Denna kunskap kan därefter användas till att analysera hur olika problem som elever får uppstår, för att förutse problemen och därmed undvika att de uppstår. Eftersom det territorium som beskrivs är skolans matematikundervisning, så är det naturligt att relevanta exempel på teorins styrka och användbarhet kopplas till detta territorium. Det är innehållet för uppbyggnaden av elevers matematikkunskaper som utgör objektet för den didaktiska ämnesteorin.

3 Konstruktion av Diamantdiagnoserna

Kapitlet inleds med en kort tillbakablick. Därefter presenteras det bakomliggande teoretiska ramverk som ligger till grund för konstruktionen av Diamantdiagnoserna. Begreppet kunskapsdiagnos problematiseras och valet av matematikinnehåll i diagnoserna motiveras.

3.1 Tillbakablick

DIAMANT (*DIA*gnoser i *MA*tematik *N*a*T*ionella) är ett diagnosmaterial som har konstruerats på uppdrag av Skolverket. Bakom materialet står, förutom denna studies författare, Christian Bennet, Marie Fredriksson och Susanne Frisk. Diagnosmaterial är ett bedömningsstöd avsett att hjälpa lärare att följa elevers kunskapsutveckling i matematik. Materialet består av 127 diagnoser, avsedda för grundskolans årskurser F - 9. Syftet är i huvudsak formativt och diagnoserna kan ge ett underlag för planering av undervisning så att denna blir välstrukturerad och därmed ger eleven möjlighet att få kontinuitet i sitt lärande. På så sätt kan diagnoserna utgöra ett stöd för läraren att skapa goda förutsättningar för eleven att utveckla de kunskaper och förmågor som kursplanen beskriver. Diagnoserna syftar till att säkerställa att eleverna har verktyg i form av de begrepp, metoder och färdigheter som behövs för att utveckla ett matematiskt kunnande.

Uppdraget inleddes 2005 och gällde initialt ett diagnostiskt material avsett för grundskolans fem första år. Detta material var klart 2007, men publicerades inte förrän våren 2009, då mål att uppnå även fanns för årskurs 3. I samband med införandet av den nya läroplanen, Lgr11, reviderades diagnosmaterialet och utvidgades till att gälla även årskurs 6. Därefter kom ytterligare tilläggsuppdrag att göra diagnosmaterial för hela grundskolan till och med årskurs 9. Konstruktionsarbetet har således skett i tre olika omgångar under åren 2005 - 2012 och var klart i sin helhet i februari 2013.

Diamant utgör en länk i kedjan av styrdokument – kursplaner, kommentarmaterial, nationella prov och bedömningsmaterial – som Skolverket erbjuder.

Skolverkets uppdrag innebar att ta fram ett material som skulle:

- Diagnostisera elevernas starka och svaga sidor.
- Visa hur långt eleven nått i sin kunskapsutveckling mot kursplanens (uppnåendemål) kunskapskrav. Ange vilka tidpunkter för avstämning som bedöms lämpliga före de redan fastställda uppnåendemålen i år 5 i grundskolan och årskurs 6 i specialskolan samt varför just dessa tidpunkter valt.

- Ge läraren analysverktyg för att kartlägga elevens förkunskaper och brister inom det aktuella kunskapsområdet.
- Ge läraren exempel på olika sätt att åtgärda konstaterade brister.
- På ett tydligt sätt beskriva hur materialet kan användas i undervisningen.

De teoretiska utgångspunkterna för utformningen av materialet skulle beskrivas och en så noggrann beskrivning som möjligt av konstruktionen av det färdiga materialet efterfrågades också. Vidare fanns en ambition att prioritera elektronisk distribution när det gällde hur materialet skulle erbjudas till lärare.

3.2 Formativ bedömning

Som tidigare nämnts, är det övergripande syftet med kunskapsdiagnoser att lärare med dess hjälp skall kunna följa elevernas kunskapsutveckling. Därför krävs att diagnoserna är uppbyggda på ett sådant sätt att det utifrån testresultaten med så god exakthet som möjligt går att avgöra vilka kunskaper en elev har respektive inte har. Denna information utgör sedan stöd vid planering av undervisning. Diagnostisering är således tänkt att utgöra en naturlig del av skolarbetet och vara ett redskap som används i formativt syften för planering av elevers fortsatta lärande.

De kunskaper eleverna bygger upp under de första skolåren kan betraktas som en hierarkiskt uppbyggd struktur, men denna struktur består av en rad olika delar. Eftersom dessa delar är relaterade till varandra så är det önskvärt att varje sådan del av ett innehåll kan diagnostiseras. Det räcker att en av delarna saknas för att helheten skall gå förlorad och eleven få svårt att förstå innebörden i nya begrepp. Diagnoserna måste därför kunna ges till hela klassen/gruppen eller individuellt och då i sin helhet eller i form av utvalda delar.

All verksamhet, muntlig och skriftlig, som går ut på att kartlägga elevers kunskaper kan definieras som diagnostik. Avsikten med att diagnostisera är att inhämta kunskaper för att individualisera, anpassa, undervisningen till elevernas/elevens förkunskaper. Därför bör diagnosresultaten alltid följas upp, annars är det inte meningsfullt att använda ett sådant instrument. Att diagnostisera innebär alltså inte enbart att ge skriftliga test. Ett skriftligt test kan endast beskriva resultatet av en elevs kunnande, inte hur detta resultat kommit till. För att få reda på detta bör en diagnos alltid följas upp med en intervju där man försöker kartlägga elevens tänkande. Med intervju menas här några korta frågor i direkt anslutning till en specifik uppgift, Piaget (1952) kallade detta klinisk intervju. Först när man vet hur eleven tänkt blir det möjligt att sätta in adekvata åtgärder.

Det finns ett antal begrepp som behöver redas ut i samband med konstruktion av ett nationellt diagnosmaterial. Vad innebär det att materialet ska vara diagnostiskt? Det är viktigt här att skilja mellan en diagnos och ett prov. Ett prov är summativt och skall visa vilka mål (kunskapskrav) en elev har uppnått. En uppgift på ett prov mäter oftast flera olika kvaliteter i kunnandet samtidigt. Diagnosen är i stället tänkt att vara formativ och är ett pedagogiskt instrument som skall hjälpa läraren att planera och genomföra undervisningen. Diagnosen skall visa vad som för tillfället saknas för att eleven ska behärska ett visst innehåll. Konstruktionen av ett diagnosinstrument måste därför bygga på en didaktisk ämnesanalys av ämnesinnehållet. Genom diagnosen ska det gå att urskilja om eleven behärskar enskilda begrepp eller färdigheter. Såväl prov som diagnoser bör konstrueras så att de är oberoende av vilken metodik som använts i undervisningen.

Ett diagnosmaterial ska alltså vara neutralt avseende hur kunskapen har inhämtats. Diagnoskonstruktören måste därför tydligt hålla isär kunskaper som ska mätas från metodik som används för att inhämta kunskapen. Eftersom matematik handlar om att abstrahera, att se sammanhang och strukturer i det man lärt, samt att kunna använda och bygga vidare på dessa strukturer, är det detta som ska diagnostiseras. Diagnostisering kan ske på olika sätt, men det krävs alltid en klar bild av hur kunskaper kan byggas upp på olika sätt. Sådana bilder kan utvecklas med hjälp av didaktiska ämnesanalyser av det centrala innehållet i kursplanen.

Att fördjupa sig i vad andra forskare tänker om diagnostik inom undervisning är inte helt enkelt. Avsikten med en diagnostisering kan vara den samma som här, men utan att det tydligt framgår hur uppgifterna har valts. Det går emellertid att se paralleller med diagnostik inom medicin, vilket är ett väl etablerat fält. Diagnostik som det beskrivs inom medicin (enligt Nationalencyklopedin, 1989-1996) kan överföras till det utbildningsvetenskapliga fältet och en analogi kan se ut som följer:

Medicin: Diagnosen bygger på en syntes av information från och om patienten.

Undervisning: Diagnostik omfattar information, formell som informell, som kan bidra till att ge en helhetsbild av elevens aktuella kunskaper. En skriftlig diagnos ger information om elevens kunskaper, en muntlig diagnos ger information från eleven, hur hon beskriver sitt sätt att tänka.

Medicin: För att kunna ställa en korrekt diagnos krävs kunskap om kroppens normala uppbyggnad (anatomi) och funktion (fysiologi) och om sjukdomslära (patologi).

Undervisning: För att ge korrekt information måste en kunskapsdiagnos bygga på teorier om hur elever lär, hur teorin kan omsättas i undervisning samt vilka typer av problem som kan uppstå vid inlärning av matematik.

Medicin: I vissa fall bildar kombinationer av symptom och kliniska fynd entydiga diagnosmönster.

Undervisning: En diagnos måste innehålla en kombination av uppgifter som ger en mångsidig bild av elevens kunskaper inom det område som diagnostiseras.

Medicin: Diagnosen skall leda till att patienten får en specifik och riktad behandling.

Undervisning: Diagnosresultatet ska leda till att eleven får en anpassad och välplanerad undervisning av innehållet.

Diamant är tänkt som stöd för läraren att följa elevernas kunskapsutveckling i matematik och det ska även vara ett stöd vid planering av en strukturerad undervisning. Diamantmaterialet har således ett formativt syfte. Detta påverkar självklart konstruktionen av materialet såväl vad avser uppgifternas utformning som testets sammansättning. En motsvarande ambition är svårt att finna i internationell litteratur. Wiliam (2007) noterar följande:

> To a first approximation, then, the research literature on assessment, both generally and in mathematics education, is almost entirely about the formal methods of assessment, particularly tests and examinations. To make matter worse, even when less formal methods on assessment, such as teacher-made tests are discussed, the purpose of an assessment is far more likely to be that of making determination of a student's existing state of knowledge. Glaser and Silver (1994) observed that, "Aside from teacher-made classroom tests, the integration of assessment and learning as an interacting system has been too little explored. (p. 403).

Han fortsätter:

> As Kilpatrick, Swafford, and Findell (2001) noted in their survey *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics,* "Even less attention appears to have been paid to how teachers' assessments might help improve mathematics learning" (p. 40). (s. 1053)

Wiliam lyfter sedan fram flera forskare som uttrycker behovet av koppling mellan bedömning och undervisning, något som Messick (1990) menar är nödvändigt för att ett utvärderingsinstrument ska ha hög validitet.

> Shavelson, Baxter, and Pine (1992) noted "a good assessment makes good teaching activity, and good teaching activity makes a good assessment" (p. 22). (Wiliam, 2007, s. 1054).

Tidigare har nämnts att en diagnos varken behöver vara formell eller skriftlig. I själva verket bör diagnostik omfatta all den information, formell som informell, som kan användas för att underlätta elevernas inlärning. Däremot bör all diagnostik vara medveten och målinriktad.

Wiliam tar även upp att en vanlig uppfattning är att test kan användas såväl formativt som summativt

> …the same assessment can be used both formally and summatively. These terms are more usually applied to the *use* to which the information arising from assessments is put. (s.1062).

Detta kan delvis ifrågasättas eftersom huvudsyftet med provet eller diagnosen påverkar utformningen av uppgifterna. Nationella prov har till uppgift att tjäna som stöd för en rättvis och likvärdig betygssättning, inte till att planera undervisning. Den information som läraren får via det nationella provet kan självklart påverka hennes fortsatta undervisning, men det är inte huvudsyftet. Diamantmaterialet har till huvudsaklig uppgift att stödja lärarens planering av undervisningen för eleverna. Därför har strävan varit att bygga diagnoserna efter en förkunskapsstruktur där läraren kan få hjälp med hur olika delar inom matematiken hänger ihop och på så sätt få hjälp att planera sin undervisning på såväl kortare som längre sikt.

> To be formative, feedback needs to contain an implicit or explicit recipe for future action. (Wiliam, 2007, s. 1062)

Det finns även andra ståndpunkter som beskrivs av Wiliam:

> An assessment *monitors* learning to the extent that it provides information about whether the student, class, school, or system is learning or not; it is *diagnostic* to the extent that it provides information about what is going wrong; and it is *formative* to the extent that it provides information about what to do about it. (s. 1062).

Diamantdiagnoserna har konstruerats så att en del av de kriterier som beskrivs av Wiliam när det gäller formativ bedömning uppfylls. Diagnoserna är konstruerade för att med hög precision visa vad eleven kan eller ännu inte kan. Wiliam presenterar följande modell för bedömning för lärande:

> I suggest that the effective use of assessment for learning consists of five strategies:
>
> Clarifying and sharing learning intensions and criteria for success;
>
> (a) Engineering effective classroom discussions, questions, and learning tasks that elicit evidence for learning;
> (b) Providing feedback that moves learners forward;
> (c) Activating students as instructional resources for one another; and
> (d) Activating students as the owners of their own learning. (s.1054).

För att läraren sedan utifrån diagnosresultaten ska kunna arbeta enligt denna modell krävs att hon snabbt kan uppfatta vad eleven uttrycker och sedan direkt ge adekvat feedback. Här kan strukturscheman men även didaktiska kommentarer som följer med Diamantmaterialet vara till hjälp. Tankar om formativ bedömning eller bedömning för lärande finns inbyggt i materialet.

3.3 Internationell forskning som grund

Det centrala innehållet i den svenska kursplanen i matematik utgör naturligtvis en utgångspunkt för Diamantdiagnoserna. En internationell utblick känns dock nödvändig för att få ett perspektiv på tolkningen av detta innehåll. I USA har en grupp bestående av framstående matematikdidaktiker och matematiker diskuterat fram en gemensam grundsyn på skolans matematikinnehåll, *Common ground* (Ball m.fl., 2005). Några av de centrala punkterna som ingår i denna är:

- *Automatical recall of basic facts.* Man menar att vissa procedurer och algoritmer inom matematiken är så grundläggande och så generellt tilllämpbara att de måste behärskas med automatik.
- *Learning algorithms.* Eleverna ska med säkerhet kunna använda effektiva algoritmer gällande de fyra räknesätten. Det är också viktigt att de förstår hur algoritmerna är uppbyggda och fungerar. Ett skäl till detta är att algoritmerna bygger på räknelagar och strukturen i vårt talsystem med basen 10, varför en sådan förståelse stödjer elevernas taluppfattning.
- *Fractions.* Förståelsen av bråk är viktig eftersom det är omöjligt att på djupet förstå förhållande, proportionalitet och procent utan att behärska bråk. Bråk är också en nödvändig förkunskap för räkning med tal i decimalform och för algebra.

Det amerikanska arbetet med Common Ground har varit ett stöd under utarbetandet av diagnosmaterialet inom aritmetiken.

För att underlätta matematikinlärningen under de första skolåren är det avgörande att eleverna har tillägnat sig grundläggande matematiska idéer och strategier. Det finns en hel del forskning om hur elevers grundläggande matematikinlärning går till och som det råder koncensus om. Denna kunskap utgör därför en grund för att bygga upp diagnoser om grundläggande taluppfattning. För förskoleklassen utgör Gelman och Gallistels (1978) teorier en bas. De beskriver fem principer för hur barn tillägnar sig taluppfattningens grunder, vad de behöver förstå för att lära sig att addera och subtrahera. Detta kompletteras med resultat och erfarenheter från svensk praxisnära forskning (Doverborg & Pramling Samuelsson,1999; Johansson & Wirth, 2007). Diagnosmaterialet inkluderar här en muntlig diagnos tänkt att använda i förskoleklassen inför skolstarten. En prototyp till denna diagnos av förberedande aritmetik utformades redan av Löwing (2000) och Löwing och Kilborn (2003).

Ytterligare stöd, när det gällde den grundläggande aritmetiken under de första skolåren, utgörs av forskning som bland annat beskrivs av Carpenter, Moser och Romberg (1982), Carpenter och Moser (1984), Steffe och Cobb (1988) och Fennema, Carpenter, Franke, Jacobs och Empson, (1996), Clarke (2001) och Stephens, (2004). Tidigare erfarenheter från konstruktion av diagnoser för tal i bråkform och tal i decimalform återfinns i (Löwing & Kilborn, 2002).

Det bör i det här sammanhanget nämnas att talens namn är uppbyggda på olika sätt i olika språk och i olika kulturer samt att uppställningar inom den grundläggande aritmetiken görs på olika sätt i olika kulturer (Löwing & Kilborn, 2010). Detsamma gäller kursplanernas utformning och vad som prioriteras i dessa. Detta innebär i förlängningen att ett diagnosinstrument framtaget i en kultur, utgående från den kulturens kursplaner och matematikdidaktiska syn, inte direkt kan översättas till en annan kultur.

Inom andra områden som Mätning, Geometri, Statistik och Algebra är den empiriska erfarenheten av diagnostik inte lika omfattande som inom aritmetiken. Inom geometri ger dock van Hiele (1986) ett visst stöd i de didaktiska ämnesanalyserna och Wittmann (2004) beskriver grundläggande idéer för hur man kan utvärdera förskoleelevers geometriska kunnande bland annat utgående från Freudenthals idéer. Vidare har Littler och Jirotkova (2004) i sin forskning identifierat olika tankeprocesser hos eleverna när de undersöker och löser uppgifter med geometriska kroppar.

Det finns exempel utomlands på diagnosinstrument i matematik som avviker från ett summativt tänkande, och där tonvikten ligger på att pröva elever vid läsårsstarten, för att sedan låta resultaten ligga till grund för kommande undervisning. Sådana tankar liknar de idéer som ligger till grund för konstruktionen av Diamantdiagnoserna. Ett sådant exempel är från NEDP, National Education Monitoring Project i Nya Zeeland (Flockton, Crooks, Smith & Smith, 2005). Ett annat är MDTP, Mathematics Diagnostic Testing Program, från San Diego, i USA.
(http://www.cpp.edu/~sci/mathematics-statistics/mdpt/)

3.4 Teoretiskt ramverk för diagnosmaterialet

Matematik är generellt tillämpbart i en rad olika kontexter. Därmed är matematiken med nödvändighet abstrakt, något som gäller även den enklaste matematik: ”Redan påståendet att två plus två är lika med fyra utgör en svindlande abstraktion i förhållande till den konkreta verkligheten: två äpplen eller två tankar gör ingen skillnad" (Liedman, 2001).

I skolans undervisning går ofta vägen till abstraktion via konkretisering. För att göra skolans matematik generell och funktionell måste eleven emellertid lämna konkretiseringen bakom sig och abstrahera. Konkretiseringen är alltså att medel via vilket eleven ges möjlighet att utveckla ett abstrakt tänkande redan under de tidigare årkurserna. Syftet att testa i vilken mån eleven har abstraherat sitt kunnande, har varit en utgångspunkt vid konstruktionen av diagnosmaterialet.

För att lösa ett matematiskt problem räcker det inte med att förstå problemet och att ha en lösningsmetod. Det krävs dessutom så goda räknefärdigheter som behövs för att få ett korrekt svar. Behärskar inte eleven sådana färdigheter riskerar lösningen att bli felaktig, eller så krävs så mycket tankekraft att eleven får svårt att bearbeta uppgiften. Man kan säga att eleven då saknar flyt i sitt räknande, analogt med att en del elever saknar flyt i sitt läsande och därmed får en grund läsförståelse. Det är därför angeläget att diagnoser inte enbart kartlägger begreppsförståelse, utan även i vad mån eleven har flyt i sitt räknande. Detta har också under senare år betonats inom den didaktiska forskningen (Ball, Ferrini-Mundy, Kilpatrick, Milgram, Schmid & Schaar, 2005). Diamant fokuserar just på sådana grundläggande färdigheter och begrepp som utgör de verktyg eleverna behöver för att utveckla sin problemlösningsförmåga och för att kunna se samband och resonera om, i och med hjälp av matematik. Diagnoserna testar inte alla i kursplanen beskrivna förmågor, däremot testar de om elever har abstraherat sitt kunnande inom olika områden.

God kännedom om var eleven befinner sig i sin matematiska kunskapsutveckling är en central faktor för att kunna planera en strukturerad undervisning för den enskilda eleven och, därmed, för att erbjuda en individualiserad undervisning som främjar lärandet. Diagnoserna är därför uppbyggda enligt en förkunskapsstruktur som i sin tur bygger på en didaktisk analys av det matematiska innehållet (mer om detta längre fram), en didaktisk karta om man vill.

En utgångspunkt här är konstaterandet att matematikens begreppsvärld utgör en hierarkisk, om än inte linjär, struktur – varje moment kräver sina speciella förkunskaper. Utgående från en tolkning av det centrala innehållet i kursplanen tillsammans med en analys av matematikens inre struktur, har innehållet i skolans matematik analyserats didaktiskt. Denna didaktiska ämnesanalys har resulterat i strukturscheman, schematiska strukturer som visar relationen mellan olika matematiska innehåll (delområden) och mellan olika aspekter av samma innehåll. Diagnoserna har sedan utformats med dessa strukturscheman som grund. Att analysera den matematik som behandlas i de tidigare årskurserna är förstås här betydligt enklare än det mer komplexa innehåll som behandlas i senare årskurser. Redan analysen av matematikinnehållet för årskurserna 7 – 9 ger upphov till förhållandevis komplexa förkunskapsstrukturer.

De olika diagnoserna är konstruerade för att användas kontinuerligt och göra det möjligt att följa elevens kunskapsutveckling under flera år. Flera faktorer pekar mot att tydliga mål för undervisningen och en kontinuerlig uppföljning är avgörande faktorer för elevers framgång (Hodgen & Wiliam, 2006; Hattie, 2012; Wiliam, 2013).

Den didaktiska ämnesteori som beskrivs i kapitel 2 ovan innefattar att synliggöra förkunskaper som krävs för ett visst lärande och strategier som kan behövas i undervisningen inom olika områden av matematiken. Dessa utgångspunkter överensstämmer väl med det ramverk för formativ bedömning som Wiliam (2007), med hänvisning till Ramaprasad (1983), sammanfattar i tre centrala processer; att fastställa

- var eleven befinner sig i sin kunskapsutveckling,
- vilka målen är och
- vilket innehåll eleven behöver förstå för att nå målen.

Retoriken här harmonierar väl med metaforen om en didaktisk karta över det matematiska landskapet, med vars hjälp läraren kan orientera sig.

Krav på en funktionell diagnos gäller inte endast hur matematikinnehållet väljs, utan även att det finns en teori för hur urvalet och sammansättningen av uppgifter går till. Dessa krav ska även harmoniera med krav på validitet och reliabilitet, att diagnosinstrumentet mäter vad det avser att mäta, och att det finns litet utrymme för tolkningsfel.

För att uppnå hög reliabilitet har strävan varit att konstruera uppgifter som är så enkla att såväl rätta som tolka, att olika lärare bedömer lösningarna på samma sätt. Detta underlättar även för läraren att avgöra vilka elevens eventuella brister är. På så sätt blir det möjligt att kommunicera och med precision följa upp och åtgärda aktuella kunskapsbrister.

När det gäller urvalet av uppgifter används två dimensioner som kompletterar varandra. De olika uppgifterna i diagnosmaterialet ska täcka, i någon mening, samtliga aspekter av det begrepp som testas, samtidigt som varje enskild uppgift inte får testa mer än en aspekt av begreppet. Mäter man flera aspekter samtidigt är det svårt att entydigt tolka resultatet. Den ökande komplexiteten inom matematikämnet i kombination med större krav på förkunskaper gör emellertid detta svårare i diagnoser som rör de senare årskurserna.

För uppgifter av färdighetstyp inom grundläggande aritmetik har, vid urvalet och valet av antal uppgifter i respektive diagnos, använts en särskild utgångspunkt. Denna bygger på beräkningar av sannolikheten att en elev inte ska klara en diagnos utan att behärska motsvarande kunskapsområde. Det är till exempel inte ovanligt att en elev gör fel på var fjärde uppgift av ett visst slag. Detta tolkas ofta av lärare som slarvfel, trots att eleven ifråga alltid har en återkommande felprocent på den typen av uppgift. I själva verket kan det i stället vara så att uppgifterna i en viss, skenbart homogen, grupp av uppgifter, kräver något olika förkunskaper och att de uppgifter eleven missar är sådana som kräver någon speciell förkunskap som eleven saknar. Konsekvenserna av detta blir att en elev som brukar gör rätt på tre av fyra uppgifter av ett visst slag, med ca 56% sannolikhet får rätt på två uppgifter i rad och med ca 42% sannolikhet får rätt på tre uppgifter i rad. Om antalet uppgifter som behandlar ett sådant kunskapssteg i en diagnos är för få, är därför risken stor att en elev ger intryck av att klara av en diagnos trots att hon inte behärskar det aktuella området. Mot denna bakgrund är det inte bara valet av uppgifter, utan även valet av antal uppgifter, som måste göras på ett genomtänkt sätt. Denna typ av överväganden ligger till grund för valet av uppgifter när det gäller ett antal av aritmetikdiagnoserna.

För att utföra en multiplikation som $6 \cdot 897$ måste man räkna rätt tre gånger i rad på kombinationer av typen $6 \cdot 8$. Detta missar många elever eftersom de inte behärskar multiplikationsfakta. För att ta reda på reliabiliteten av ett test på multiplikationsfakta kan man då göra följande typ av beräkningar:

Utgå från att en elev gör systematiska fel på var åttonde kombination i multiplikationsfakta. Sannolikheten att eleven gör rätt på en slumpvis vald uppgift är då $7/8 \approx 87{,}5\%$. En sannolikhetsberäkning visar att sannolikheten att räkna rätt på

2 kombinationer i rad är $(\frac{7}{8})^2 \approx 77\%$

4 kombinationer i rad är $(\frac{7}{8})^4 \approx 59\%$

6 kombinationer i rad är $(\frac{7}{8})^6 \approx 45\%$

8 kombinationer i rad är $(\frac{7}{8})^8 \approx 34\%$

Det här innebär att om ett test omfattar 6 kombinationer av multiplikationsfakta så har att en elev som brukar göra fel på var åttonde uppgift, 45 procents chans att klara testet. Med sex kombinationer av samma typ avslöjas alltså troligen även mindre brister i elevens kunnande. Vidare måste den här typen av grundläggande operationer kunna hanteras med flyt – inte efter en stunds räkning på fingrarna. Mot denna bakgrund är de inledande diagnoserna inom aritmetik uppbyggda med uppgiftsgrupper om sex kombinationer (uppgifter) av samma karaktär och tänkta att genomföras på tid.

En uppgift som utgör kriterium på att en elev behärskar ett innehåll, kan ibland lösas på flera olika sätt. Vilken strategi man än väljer så bygger den på speciella förkunskaper eller en speciell förförståelse. När en uppgift besvaras fel beror det troligen på att eleven saknar någon nödvändig förkunskap eller har brister i förförståelsen. För att säkerställa kunskapen ifråga och få hög validitet och reliabilitet skulle det därför krävas ett stort antal uppgifter av liknade slag. Ett enklare alternativ är att bygga upp strukturerade nätverk av uppgifter. Dessa uppgifter kan då tillsammans ge den information, eller omfatta de olika aspekter av det aktuella begreppet, som läraren behöver för att planera sin vidare undervisning.

Hur de nämnda sambanden mellan och inom olika kunskapsområden i Diamant ser ut beskrivs i materialet med hjälp av strukturscheman. Genom denna uppbyggnad minskar risken för att en elev ska ge intryck av att klara en diagnos trots att hon har brister inom det aktuella området, till exempel som följd av att inte, i undervisningen, ha mött olika aspekter av ett begrepp eller inte ha tillgodogjort sig en nödvändig förkunskap.

En vidare utgångspunkt har varit att diagnosmaterial ska kunna användas mer flexibelt:

- Som fördiagnos, till exempel för att kartlägga elevernas kunskaper inför ett nytt skolår eller inför ett nytt moment. Avsikten är då att de förkunskapsbrister man kartlagt skall kunna åtgärdas innan det finns behov av dem inom aktuella moment.
- Som efterdiagnos, till exempel för att utvärdera om undervisningen givit önskat resultat. Det är då möjligt att avgöra, inte bara vilka brister som kvarstår utan också, med hjälp av diagnosernas uppbyggnad, möjliga orsaker till dessa brister. Man ska alltså med diagnosmaterialets hjälp kunna spåra möjliga felkällor.
- Som underhandsdiagnos för att följa upp hur eleverna successivt tillägnar sig ny kunskap. Avsikten är att kunna åtgärda inlärningsproblem direkt när de uppstår.

3.5 Några ställningstaganden

En förutsättning för att kunna konstruera ett nationellt diagnosmaterial är att det finns tydliga kunskapskrav att utvärdera mot. De nationella kunskapskraven finns i gällande styrdokument, men dessa är dynamiska och under utvecklingsarbetet har styrdokumenten ändrats och fått en delvis annorlunda utformning. I kursplanen till Lpo 94 fanns det uppnåendemål för årskurs 5 och 9 (de sista åren även för årskurs 3) och nu i Lgr11 finns centralt innehåll för årskursspannet 1 – 3, 4 – 6 och 7 - 9. Diagnosmaterialet är utformat mot bakgrund av rimliga tolkningar av vad som skrivs i dessa texter.

Det kan också konstateras att ett diagnosmaterial inte kan vara didaktiskt neutralt. Det måste vara knutet till eller åtminstone ansluta till de olika didaktiska idéer som lärare kan tänkas använda vid planering av undervisning. Detta finns inbyggt i Diamantmaterialets struktur och framgår bland annat av de didaktiska kommentarer som finns till varje område och delområde (Skolverket, 2013a).

Här följer tre exempel:

- En subtraktion som 324 – 176 kan som algoritm utföras på en rad olika sätt och olika elever, även i samma klass, kan använda olika metoder. Problemet med detta är att övergripande subtraktionsmetoder såsom ”lika tillägg”, ”utfyllnad” och ”lånemetod” förutsätter helt olika förkunskaper. Ett nationellt diagnosmaterial måste kunna identifiera och hantera förkunskapsbrister i förhållanden till samtliga dessa metoder.
- Procenträkning: 3% av 420 kr beräknas av olika elever på olika sätt. Vissa elever beräknar först 1% av 420 kr och multiplicerar därefter resultatet 4,20 kr med 3. Andra skriver om 3% i decimalform som 0,03 och multiplicerar sedan 420 kr med 0,03. Ytterligare andra elever skriver 3% av 420 som $\frac{3}{100}$ av 420. De här olika sätten att beräkna uppgiften leder till olika förkunskapsmönster, som behöver täckas upp i materialet.
- Subtraktion av tal skrivna i bråkform som $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$ utförs ofta av elever som 0,75 – 0,40, alltså i decimalform. Det gäller för läraren att få syn på denna typ av syntaxbyte eftersom de elever som gör så senare kan få svårt att bestämma differenser som $\frac{3}{a} - \frac{2}{a+1}$, vilket förutsätter färdigheter i bråkräkning.

Att beskriva exakt vilka diagnoser en elev förväntas behärska i en viss årskurs är inte önskvärt eftersom centralt innehåll beskrivs i årskursspann på tre år och kunskapskraven är relaterade till årskurserna 3, 6 och 9. Inom ramen för dessa årskurser är läraren fri att planera sin undervisning. Det är emellertid både rimligt och önskvärt att lärare anpassar sina delmål i planeringen så att arbetet kan leda fram till att eleverna når kunskapskraven för årskurserna 3, 6 och 9. Detta medför att diagnoserna får en naturlig anknytning till olika årskurser genom lärarens planering.

3.6 Konstruktionsarbetet

Diagnosmaterialet Diamant är utarbetat under två olika läroplansperioder; Lpo 94 (SKOLFS 1994:1,) och Lgr11 (SKOLFS 2010:37). Matematikinnehållet i dessa båda kursplaner skiljer sig inte så mycket åt, utan det är främst formuleringar och uttryckssätt i texterna som är olika. Målen i kursplanen i matematik till Lpo 94 var av en öppen och övergripande karaktär och lämnade stort tolkningsutrymme åt läraren. I Lgr11 är beskrivningen av förmågor och det centrala innehållet mer preciserat, men även här lämnas ett tolkningsutrymme.

Konstruktionsarbetet inleddes därför med att förutsättningslöst tolka det centrala innehållet och ställa upp kriterier för vad eleverna förväntas kunna. Målen i Lpo 94 och Lgr11 jämfördes med målen i ett antal kursplaner från andra jämförbara länder samt med äldre svenska kursplaner. Med tanke på en allt mer omfattande internationalisering ansågs det viktigt att få en uppfattning om vad som är rimligt att lära för elever i olika åldrar.

Vid den inledande konstruktionen av diagnosmaterialet för årskurserna 1-5 var utgångspunkten de kunskaper som krävs för att nå uppnåendemålen i årskurs 9. Även om diagnosmaterialet avsåg att användas i årskurserna 1-5, måste det byggas in en kontinuitet i materialet som tillät en generalisering upp till årskurs 9. Detta inledande arbete kom till stor nytta senare när uppdraget utvidgades till att gälla diagnoser upp till och med årskurs 9. Ett annat krav på ett väl konstruerat diagnosmaterial är att varje delkunskap som diagnostiseras kan relateras till andra närbesläktade kunskaper eller moment. Användaren (läraren) måste kunna se, inte bara vilka förkunskaper som krävs för ett aktuellt undervisningsmoment, utan även hur detta moment i sin tur ingår i ett mönster av förkunskaper.

I samband med tolkningen av kursplanens innehåll studerades även de nationella proven, läromedel med mera, som stöd i tolkningsarbetet. Det råmaterial som då arbetades fram, delades upp i ett antal övergripande områden enligt kursplanen: *Aritmetik*, *Mätning och Geometri*, *Sannolikhet och Statistik*, *Rationella tal* samt *Talmönster och Algebra*. Dessa områden justerades efterhand och de färdiga 127 diagnoserna är nu grupperade i sex områden: *Aritmetik*, A, *Rationella tal*, R, *Talmönster och algebra*, TA, *Mätning*, M, *Geometri*, G, samt *Sannolikhetslära och statistik*, S. Se Bilaga 3.

Studier av kursplanen gav oss en uppfattning om innehåll som ska testas och en didaktisk ämnesanalys visade hur en progression av innehållet i ett 1-9-perspektiv kan se ut. Därmed synliggjordes vilka förkunskaper som olika innehåll förutsätter. Det gällde att avgöra hur de kunskaper ser ut som svarar mot kursplanens krav, alltså att materialisera kraven. Varje kunskapsområde (matematikinnehåll) omfattar vidare en rad olika aspekter. Dessa aspekter är inte isolerade från varandra utan är sammanlänkade på olika sätt. När man bygger upp en diagnos är det därför nödvändigt att kartlägga hur dessa olika aspekter är relaterade till varandra. En sådan kartläggning utgör essensen i den didaktiska ämnesanalysen.

Diagnostik handlar emellertid inte enbart om att fastställa vilka kunskapsmål eleverna har nått utan även om att visa såväl läraren som eleven hur långt eleverna nått i sin kunskapsutveckling mot kursplanens kunskapskrav, (SKOLFS 2011:19). Lärare bör alltså med hjälp av diagnoserna kunna avgöra vad olika elever kan respektive vad som ännu saknas för att de skall behärska ett centralt innehåll på ett adekvat sätt och nå uppsatta delmål på vägen dit. Detta förutsätter i sin tur att varje kunskapsmål bryts ner i sådana delmål som bedöms nödvändiga för att nå det slutliga kunskapskravet.

Utarbetandet av diagnoserna har skett i tre faser. Först en *planeringsfas* då kursplanen i matematik, som nämnts ovan, har tolkats och analyserats. Detta arbete utmynnade i ett antal kriterieuppgifter. Kraven i kursplanen överfördes till mätbara enheter vilka bedömdes svara mot olika aspekter av innehållet. Kriterieuppgifterna utformades så att det skulle vara rimligt för en elev att lösa dem och så att de skulle motsvara kunskapskraven.

Sedan följde en *konstruktionsfas* där kriterieuppgifterna först analyserades för att synliggöra vilka förkunskaper som krävs för att lösa dem. När det var klart gjordes nya kriterieuppgifter för de olika förkunskaperna eller delinnehållen. Varje sådan kriterieuppgift analyserades därefter med didaktisk ämnesanalys för att komma fram till vad eleven måste ha förstått för att ha möjlighet att förstå och kunna lösa uppgiften. Innehållet analyserades alltså succesivt ”nedåt” för att sedan göra det möjligt att bygga strukturer ”uppåt”. Detta gjorde det möjligt att bygga en kunskapsstruktur, en didaktisk kartbild, underifrån.

Efter analysarbetet grupperades uppgifterna i sammanhängande grupper som bildade underlag för konstruktionen av preliminära diagnoser. Konstruktionen av diagnoserna för senare årskurser har sedan gått till på samma sätt. De didaktiska ämnesanalyserna visar tydligt att förkunskapskraven i matematik blir mer komplexa när man kommer högre upp i årskurserna. Detta beror på att begreppsstrukturen i sig blir mer komplex, men också på att eleven, utöver att förstå olika aspekter av ett visst begrepp, behöver kunskaper i aritmetik. Allt mer aritmetik blandas in när det gäller exempelvis geometri, funktionsbegreppet eller procentbegreppet. Det har därför gällt att i uppgiftskonstruktionerna inom dessa diagnoser använda mycket enkel aritmetik för att på så sätt göra det möjligt att urskilja elevens förståelse av det begrepp som prövas.

Efter detta arbete vidtog en *utprövningsfas* som omfattade två steg. I ett första steg utprövades de preliminära diagnoserna i ett antal klasser då såväl uppgifternas kvalitet som testens sammansättning diskuterades och analyserades. Även lärarinstruktioner utformades. Efter denna utprövning skedde en bearbetning av de olika diagnoserna inför en större fältutprövning av materialet.

Resultaten från de första utprövningarna kompletterades med intervjuer av elever och lärare. Detta gav ett underlag till en revidering och förbättring av materialet. Efter denna revidering av materialet följde en ny, liknade utprövning. Detta utprövningsförfarande upprepades tills diagnoserna i fråga blev funktionella och lätta att använda. Uppgifterna i diagnoserna gavs till ett antal elever i olika åldrar. Studier av lösningsfrekvenser och analyser av eventuella mönster i fel på individnivå, gav då underlag för att modifiera och komplettera det preliminära materialet.

I samband med detta arbete började uppbyggnaden av strukturscheman. Dessa beskriver den inbördes relationen mellan de olika diagnoserna inom varje område. På så sätt blev det möjligt att organisera innehållet i diagnosmaterialet. Arbetet med att formulera kriterieuppgifter och att bryta ner kursplanekraven i delmål av förkunskapskaraktär ledde efter hand till alltmer detaljerade strukturer. Diagnosernas olika delar måste passa in i ett didaktiskt motiverat mönster. I annat fall blir det svårt att tolka helheter och att följa upp med åtgärder. Sådana strukturscheman är resultatet av didaktiska ämnesanalyser. I nästa kapitel beskrivs hur dessa strukturscheman kan utgöra underlag för undervisningens innehåll, även om de inte direkt pekar ut en given undervisningsstruktur.

Med hjälp av didaktisk ämnesanalys av ett matematikinnehåll har det varit möjligt att skapa förkunskapsstrukturer för området. Dessa strukturer är oberoende av hur det aktuella innehållet sedan undervisas, det vill säga hur läraren väljer att ”förpacka” innehållet. Olika lärare kan utgå från olika arbetssätt, olika sätt att ”distribuera” innehållet till eleverna. Olika elever uppfattar sedan innehållet på olika sätt och diagnostik handlar om att ta reda på om eleverna har uppfattat begreppen på ett adekvat och generaliserbart sätt. Det här innebär att vid konstruktioner av enskilda uppgifter och diagnoser ligger fokus vid hur eventuella kunskapsluckor kan följas upp. Det är inte någon idé att låta eleverna göra en diagnos om man inte vet hur den kan följas upp.

Efter hand som delar av de slutgiltiga diagnoserna tog form började arbetet med att skriva en lärarhandledning. Till varje område och delområde finns didaktiska kommentarer i sammanlagt 29 olika texter. Avsikten med dessa är att beskriva innehållet för läraren och texterna ger en bakgrund till varför diagnoserna ser ut som de gör. Till varje diagnos finns instruktioner som beskriver vad de olika uppgifterna avser att mäta, hur diagnosen är tänkt att genomföras samt tankar kring hur en uppföljning kan gå till. Där finns även facit och resultatblanketter att fylla i. Som hjälp till läraren finns kopieringsunderlag till utvecklingsscheman där läraren kan bokföra varje elevs kunskaper. Dessa utvecklingsscheman följer respektive strukturschema. Det totala materialet är omfattande och kan i sin helhet fritt användas av den som önskar på www.skolverket.se/diamant.

Allt innehåll i kursplanerna går inte att diagnostisera skriftligt. Under arbetets gång diskuterades att inkludera ytterligare två områden, huvudräkning och problemlösning, men dessa togs inte med i diagnosmaterialet. Den viktigaste motiveringen till att inte ta med dessa båda områden var att det inte gick att garantera vare sig validitet eller reliabilitet. När det gäller huvudräkning så handlar det inte enbart om att svara rätt på ett antal uppgifter, utan om att eleverna skall behärska ett antal strategier. Detta kräver en muntlig diagnostisering. Samma sak gäller för problemlösning, och i det fallet tillkommer en annan faktor, nämligen kontextens betydelse. En utgångspunkt har därför varit att de elever som behärskar diagnoserna inom området Aritmetik, därigenom har visat att de har de förkunskaper som krävs för att gå vidare och arbeta med huvudräkning. Motsvarande gäller för problemlösning. Behärskar eleven diagnoserna i Diamantmaterialet som fokuserar på grundläggande färdigheter och begreppsförståelse så finns goda förutsättningar att för eleven att lösa problem.

Med hjälp av den typ av diagnoser som Diamant innehåller kan lärare säkerställa att eleven har ett relevant förråd av verktyg i form av begrepp och färdigheter för att kunna utveckla sina förmågor inom matematiken, även om förmågorna i sig inte testas i diagnoserna. Styrkan i materialet är att varje diagnos tar kort tid att genomföra, går snabbt att rätta och ger hög precision när det gäller information om vad eleven kan och ännu inte kan.

3.7 Diagnosernas uppbyggnad

Diagnoserna inom Diamant är uppbyggda på olika sätt beroende på innehåll och de bygger, som beskrivits ovan, på såväl matematikens struktur som på väl kända och allmänt accepterade forskningsresultat om hur barn och ungdomar tillägnar sig matematik.

Det är till exempel allmänt känt att det inom områden som aritmetik, mätning, geometri och statistik krävs en inledande förförståelse för att komma vidare. Denna förförståelse finns forskningsbelagd, vilket tidigare redovisats, samt beskriven i läroplan för förskolan Lpfö (SKOLFS 2011:69). Till dessa områden finns därför muntliga diagnoser för att läraren ska kunna kartlägga elevernas förförståelse av grundläggande begrepp och termer. Dessa diagnoser kan användas i förskoleklassen eller innan man börjar med ett område i årskurs 1.

Diagnosen Förberedande aritmetik, AF, utvecklades redan i början av 90-talet (Löwing, 2000) för att kunna undersöka vilka förkunskaper de elever hade som började i årskurs 1. Diagnosen bygger på internationell forskning (Gelman & Gallistel, 1978). Sin nuvarande form fick denna diagnos efter en fältutprövning, språket modeniserades delvis och en ny uppgift tillkom.

Det andra delområdet av Aritmetik, Grundläggande Aritmetik, AG, är ett område där det fanns erfarenhet sedan tidigare. (Kilborn, 1979). Dessa erfarenheter bygger i sin tur på internationell forskning som bedrivits av bland andra Carpenter och Moser (1984).

Det innebar att såväl analyser av mål som nedbrytningen i delmål tog relativt kort tid. Alla diagnoserna i delområdet Grundläggande aritmetik, AG, gjordes tillgängliga redan under våren 2006. Detta möjliggjorde för skolor och klasser att använda diagnoserna och kontinuerliga rapporter från fältet inkom, vilket i sin tur ledde till vissa korrigeringar och förtydliganden i materialet.

Även när det gällde det tredje delområdet inom Aritmetik, Skriftlig Aritmetik, AS, fanns erfarenheter att falla tillbaka på. Det betydde att även detta delområde kunde prövas tidigt på en rad skolor. Den vidare utvecklingen av Skriftlig Aritmetik som omfattar beräkning med tal i decimalform utarbetades på samma sätt som diagnoserna för de naturliga talen.

Vissa förkunskaper är viktigare än andra eftersom de behövs inom många olika matematikområden. Exempel på detta är den grundläggande aritmetiken. Utformningen av diagnoserna inom AG, skiljer sig från övriga diagnoser. Det beror på att basfakta som subtraktioner av typen 7 – 5 och 14 – 8 eller multiplikationer som 7 · 8 bör vara så väl automatiserade att eleverna med flyt, alltså utan större belastning av arbetsminnet, ska kunna använda dessa som delberäkningar vid såväl skriftlig räkning och huvudräkning som vid problemlösning. Sådana uppgifter förekommer därför i diagnoserna i homogena uppgiftsgrupper omfattande sex uppgifter (se avsnitt 3.4). Målet är att eleverna ska behärska dessa uppgifter på ett sådant sätt att alla uppgifter och uppgiftsgrupper på en diagnos blir rätt lösta inom ett begränsat tidsintervall. Tidsintervallet fastställdes under utprövningen genom att den tid det tog för elever som behärskade innehållet att genomföra diagnosen noterades. För vissa elever med speciella behov kan diagnosen genomföras muntligt. Det viktiga är att man kan kontrollera om eleven har flyt i sitt räknande.

De nya diagnoserna som konstruerats efter införandet av Lgr11 täcker in ett vidare matematikinnehåll än tidigare diagnoser. Exempel på nytt innehåll i diagnoserna som tillkommit är tal i decimalform och procent (inom området Rationella tal), vilket inte tidigare fanns med i kursplanen för årskurserna 1 - 5. Inom området Aritmetik, A, tillkom ett nytt delområde, Utvidgad Aritmetik, AU, som innehåller negativa tal, potenser och rötter.

3.7.1 Diagnosernas inbördes samband

Tack vare diagnosernas uppbyggnad kan man följa upp hur en speciell kunskap utvecklas och generaliseras år för år. Ett exempel på detta går att se i följande delar av diagnoserna AG1, AG2 och AG4.

AG1

2a		2b	
4 + 4 = __	3 + 5 = __	9 – 4 = __	6 – 3 = __
3 + 3 = __	5 + 4 = __	7 – 4 = __	9 – 5 = __
4 + 5 = __	4 + 3 = __	8 – 4 = __	7 – 3 = __

AG2

3a			
14 + 3 = __	13 + 5 = __	19 – 4 = __	16 – 3 = __
3 + 13 = __	5 + 14 = __	17 – 4 = __	19 – 15 = __
14 + 5 = __	4 + 13 = __	18 – 14 = __	17 – 12 = __

AG4

27 + 1 = __	24 + 2 = __	38 – 2 = __	57 – 5 = __
5 + 42 = __	6 + 62 = __	77 – 75 = __	58 – 57 = __
72 + 6 = __	4 + 13 = __	8 – 14 = __	17 – 12 = __

Figur 3.1. Jämförelse mellan diagnosuppgifter på olika diagnoser.

Den kunskap som eleven visat på AG1 (Figur 3.1) skall senare kunna generaliseras till ett större talområde. Exempelvis ska 9 – 4 generaliseras till 19 – 4 och senare till 39 – 4. Genom att följa upp elevens kunskaper på det här sättet kan man avgöra om undervisningen har gjort det möjligt för eleven att generalisera kunskapen till det större talområdet. I de didaktiska kommentarerna till delområdet beskrivs bland annat hur innehållet kan generaliseras till större talområden. Tanken bakom denna uppbyggnad av diagnoserna är att läraren med hjälp av strukturscheman ska kunna följa elevens kunskapsutveckling och med precision kunna spåra var eventuella kunskapsbrister uppstår.

Olika områden inom matematiken är uppbyggda på olika sätt vilket medför att diagnoserna ser olika ut. Detta framgår tydligt om man jämför diagnoser i Aritmetik som AG1 eller AG6 med diagnoserna i Statistik. I det första fallet krävs stor säkerhet av eleven och alla uppgifter på en diagnos ska besvaras korrekt. När det gäller statistik har uppgifterna inom varje diagnos en stegrad svårighetsgrad avseende såväl kontext som den aritmetik som ingår. Man kan i det senare fallet välja vilka uppgifter man vill använda i en viss årskurs utifrån sin kunskap om var elever bör befinna sig i sin kunskapsutveckling inom statistik.

Uppgifterna i de övriga diagnoserna är alltså av en annan karaktär än dem inom aritmetiken och bygger i stället på en sekvensering där komplexitetsnivån successivt höjs och olika aspekter av begreppet prövas. Det betyder att man som lärare, förutsatt att man satt sig in i diagnosernas uppbyggnad, kan avgöra vilken nivå och vilka aspekter respektive elev behärskar och vad som fattas för att eleven ska komma vidare.

3.7.2 Utprövningens påverkan på diagnosernas utformning

Det har i flera fall varit stora utmaningar att konstruera uppgifter och utforma de olika diagnoserna. Området Statistik, S, utvecklades inledningsvis för årskurserna 1 – 5. En diagnos testar stapeldiagram, en annan diagnos linjediagram eller cirkeldiagram. Inom varje diagnos utformades uppgifter av stigande svårighetsgrad så att läraren ska kunna välja uppgifter som passar för den aktuella elevgruppen eller årskursen. Efter en första utprövning gjordes stora förändringar i materialet, speciellt för att höja validiteten och reliabiliteten. Det visade sig att de flesta lärare hoppar över stora delar av statistiken i årskurserna 1 – 5, varför delar av utprövningen fick utföras i år 6. Inom detta område blev det i ett senare skede aktuellt att utforma uppgifter i sannolikhet, ett område som lärare inte tidigare undervisat i under de tidigare skolåren. Sannolikhet och kombinatorik är ett nytt innehåll i Lgr11 redan från årskurs 1 och det var därför inte lätt att få adekvat respons vid utprövningar.

De två områdena Mätning, M, och Geometri, G, flyter delvis samman och mätning är i många fall en förkunskap till geometri. Av det skälet utvecklades en gemensam fördiagnos till dessa båda områden. Analyserna visade att dessa båda områden var betydligt mer omfattande än beräknat. Området mätning är omfattande under de tidiga skolåren medan geometrin ökar i omfattning under senare årskurser. Under en större utprövning visade det sig att en del elever hade problem med såväl det innehåll som det språk som används inom mätning och geometri. Dessa problem är väl dokumenterade i Löwings (2004) och Nilssons (2005) avhandlingar. Det gällde därför att modifiera såväl språket i som utformningen av diagnosuppgifterna utan att göra avkall på det matematiska innehållet. Tanken att avgränsa det innehåll som testas i en diagnos visade sig inte helt enkel när det gäller uppgifter i geometri. Många av uppgifterna som gäller begränsningsarea och volym som kan verka klart avgränsade får ändå en karaktär av problemlösning, vilket inte går att undvika.

Diagnoserna utprövades i olika omgångar. Under en första omgång, i samband med den inledande konstruktionsfasen, gällde det att undersöka hur lärare och elever uppfattade olika idéer och hur uppgifter ska formuleras. Det var också nödvändigt att undersöka uppgifternas svårighetsgrad i relation till elever i olika åldersgrupper. Därför gavs samma diagnos till elever i flera olika årskurser. När denna utprövning, av ett preliminärt instrument, var klar påbörjades analyser av diagnosernas validitet och reliabilitet. Detta ledde i allmänhet till relativt stora förändringar, speciellt inom områdena AU, M, G och S.

När bearbetningen efter den först utprövningen var klar vidtog utprövning nummer två. Denna genomfördes på två olika sätt och i ett flertal skolor på olika håll i landet. Varje områdes diagnoser prövades först och främst ut av projektets personal som direkt i klassrummet kunde iaktta diagnostiseringsprocessen och följa upp en rad frågeställningar. Detta gav goda möjligheter att föra diskussioner med lärare och elever direkt på plats. Det var även möjligt att notera hur lång tid olika elever använde sig av, iaktta på vilka uppgifter de fastnade, samt testa den instruktion som skulle följa med respektive diagnos. Varje grupp av diagnoser prövades dessutom på ett antal skolor utan att någon från projektet deltog. Detta gav besked om hur lärare som endast kunnat läsa sig till instruktionerna lyckades genomföra diagnoserna och sammanställa resultat. Detta gav en helt annan typ av information och i detta sammanhang påbörjades utformningen av en lärarhandledning. Denna skulle även omfatta förslag till åtgärder för elever som hade bristande kunskaper inom området som diagnosen testade. Även detta material utprövades successivt och förfinades. Utprövningen gick då in i en ny fas, där de utprövande lärarna fick genomföra diagnoserna på egen hand, enbart med hjälp av den preliminära lärarhandledningen. Under den delen av utprövningen studerades inte bara hur diagnoser och lärarhandledning fungerade utan även vilka problem lärare kunde ha vid användning och uppföljning av diagnoserna. Efter detta gjordes nya revisioner.

Efter en tredje och slutlig utprövning vidtog en sista genomgång av all text i relation till erfarenheter från utprövningarna. Denna text kontrollästes och kommenterades av ett antal lärare samt av ett antal kolleger som inte tidigare varit engagerade i projektet.

Nedan följer exempel på överväganden och ställningstaganden som blivit aktuella i processen att konstruera enskilda diagnoser. Av platsskäl har antalet exempel begränsats.

3.7.3 Exemplet Potenser och rötter

Diagnosen Potenser och rötter, PA11 (Se Figur 3.2), är en preliminär diagnos som prövats ut under arbetsnamnet Briljant. Denna diagnos har använts vid en större kartläggning och lösningsfrekvenserna i procent och andel elever som hoppat över uppgifterna i diagnosen (visas inom parentes) för ca 1500 elever i årskurs 8 framgår nedan.

Skriv som ett tal utan potenser

1) $3^2 =$ ……. 61% (6%) 2) $2^5 =$ …….. 52% (7%)

3) $(3 + 2)^2 =$ …45% (10%) 4) $4^3 + 5 =$ …..40% (9%)

5) $3 + 3^2 =$ ……53% (9%) 6) $2^2 \cdot 2^3 =$….. 38% (12%)

Skriv så enkelt som möjligt

7) $\sqrt{49} =$ ……. 43 % (4%) 8) $\sqrt{16} + \sqrt{9} =$……30% (50%)

9) $\sqrt{16+9} =$….. 26% (52%) 10) $\sqrt{17^2} =$ …… 16% (64%)

11) $\sqrt{32} =$ …… 2 % (64%) 12) $\sqrt{48} =$ ……. 2 % (67%)

Figur 3.2. Diagnos PA 11, potenser och rötter.

En analys av resultaten visar att när komplexiteten på uppgifterna ökar, i flera fall här endast genom att uttrycksformen ändrats, så är det allt färre elever som löser uppgiften rätt och allt fler som lämnar den obesvarad. I samråd med lärare som hjälpt oss att pröva diagnosen och utgående från kartläggningsresultaten delades innehållet upp i flera diagnoser, för att få mer precisa kunskap om vari elevernas problem kan bestå.

Den typ av uppgifter som testades i diagnosen ovan är nu uppdelade på fem olika diagnoser inom delområdet Utvidgad Aritmetik, AU.

- AUp1, Grundläggande potenser, (Figur 3.3)
- AUp2, Potenslagar positiva tal, (Figur 3.4)
- AUp3, Potenslagar negativa tal, (Figur 3.5)
- AUp4, Kvadratrötter samt
- AUp5, Potenser och kvadratrötter.

Ett av syftena med att dela upp innehållet i flera diagnoser är att öka precisionen i diagnostiseringen. Även detta är exempel på innehåll som tidigare rymts inom högstadiets kursplan och som det även nu går att tolka in i det centrala innehållet i Lgr11.

Progressionen inom och mellan diagnoserna kan komma till uttryck på olika sätt vilket framgår av nedanstående genomgång.

I AUp1 testas om eleven förstår tal skrivna i potensform:

AUp1

1. Beräkna
   a. 3^2 = …….   b. 2^5 = …….
2. Beräkna
   a. 4^1 = …….   b. 5^0 = …….
3. Skriv som potens med bas 2
   a. 8 = …….   b. 64 = …….

Figur 3.3 Exempel från diagnos AUp1, grundläggande potenser.

I AUp2 testas om eleven kan förenkla och använda räknelagarna för potenser när dessa är positiva och kan förenkla uttryck skrivna i potensform:

AUp2

Förenkla

1a. $3^2 \cdot 3^3$ = …….   b. $5^{12} \cdot 5^7$ = …….

2a. $3 \cdot 3^2$ = …….   b. $3^0 \cdot 3^2$ = …….

3a. $\frac{4^{35}}{4^{25}}$ = ……….   b. $\frac{12^{18}}{12^{10}}$ = ……….

osv

Figur 3.4 Exempel från diagnos AUp 2, potenslagar, positiva tal.

I AUp3 testas om eleven kan använda räknelagar för potenser när dessa är negativa eller när basen är ett negativt tal:

AUp3

Beräkna

1. a. $(-4)^2 =$ ……… b. $(-1\,)^5 =$ …….

2. a. $5^{-2} =$ ……. b. $2^{-4} =$ …….

3. a. $(-3)^{-2} =$ ……. b. $(-1)^{-7} =$ …….

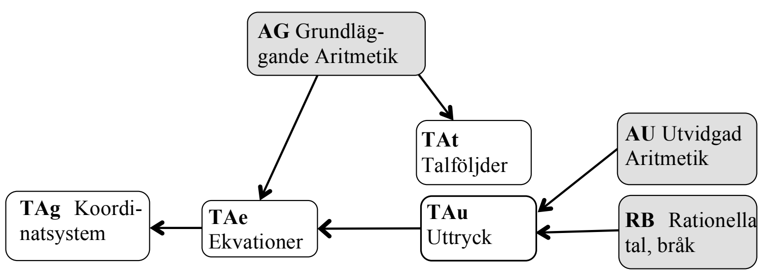
osv

Figur 3.5 Exempel från diagnos AUp 3, potenslagar, negativa tal.

Uppgifterna inom diagnoserna är varierade på ett sådant sätt att de testar olika aspekter av förenklingar och beräkningar med hjälp av potenslagarna. Genom att studera vilka uppgifter eleverna löst respektive inte klarat av, kan man få en uppfattning om vad vissa elever behöver ytterligare undervisning om.

3.7.4 Exemplet Talmönster och algebra

Talmönster och Algebra, TA, erbjöd en stor utmaning eftersom det är ett relativt outvecklat område didaktiskt sett. Utprövning och bearbetning av dessa diagnoser tog därför tid och talmönster och algebra var det område där de mest omfattande omarbetningarna gjordes. Strukturschemat för området (Figur 3.6) visar att det krävs förkunskaper från flera andra områden och delområden.



Figur 3.6 Strukturschema, Talmönster och algebra, TA.

För att ge en inblick i den typ av dilemman som varit aktuella beskrivs här lite av arbetet med ekvationer. I Kursplanen för årskurs 7–9 under centralt innehåll Algebra, ingår ”Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer” och ”Metoder för ekvationslösning”. För årskurs 4–6 ingår ”Enkla algebraiska uttryck och ekvationer” och ”Metoder för enkel ekvationslösning”. I kunskapskraven för motsvarande årskurser finns ingen direkt beskrivning i relation till det centrala innehållet, men eleven ska i senare årskurser kunna välja ur ett utbyggt förråd av begrepp och färdigheter samt kunna använda sig av olika matematiska uttrycksformer vid problemlösning. I årskurs 7–9 sker en utveckling av elevens kunskaper från vardagens matematik till en mer formell och generell matematik. För att kunna förstå arbetet med reella tal och algebra krävs det att eleven har en djupare förståelse av den grundläggande aritmetiken, räknelagar och räkneregler.

Efter att ha genomlyst begreppet ekvation och metoder för att lösa ekvationer har sju diagnoser konstruerats:

- TAe1, enkla ekvationer, en grundläggande förståelse där eleven kan pröva sig till svaret.
- TAe2, ekvationer, som ska lösas formellt med generellt användbara metoder.
- TAe3, ekvationer där koefficienter och/eller lösning är ett rationellt tal.
- TAe4, avgöra om ekvationer har en lösning, saknar lösning eller har oändligt många lösningar.
- TAe5 handlar om olikheter.
- TAe6 andragradsekvationer.
- TAe7 ekvationssystem, algebraiskt, som ska lösas på olika sätt.

Ytterligare relevant innehåll för ekvationer finns inom delområdet Koordinatsystem och grafer i form av diagnoserna, Räta linjens ekvation, TAg3, och Ekvationssystem grafiskt, TAg4.

Innehållet i de sist liggande diagnoserna inom detta (och även de andra) delområdena kan uppfattas som lite för svårt för grundskolan. Men tanken med diagnoserna är inte att alla elever ska göra alla diagnoser. Diagnoserna är avsedda som hjälp åt läraren att kunna följa elevernas kunskapsutveckling. Det är läraren själv som väljer vilka diagnoser som används i vilka årskurser, och till vilka elever, utgående från den egna planeringen. Materialet är konstruerat så att det ska finnas diagnoser för alla elever, även för de elever som kommit långt i sitt matematiska kunnande och behöver få visa sina kunskaper och utmanas lite extra. Det innehåll som finns med i dessa diagnoser är sådant som för ett antal år sedan fanns inom undervisning och läromedel för årskurserna 7-9 och som till stora delar i dag gör det i andra länder. Nationellt önskas en ökad kunskapsnivå i matematik hos alla elever i svensk skola, därför är det motiverat att ha med dessa delar i ett nationellt diagnosinstrument.

Närmare detaljer kring den empiri som samlats in under och efter utprövningen av olika diagnoser återfinns i kapitel 4 nedan.

3.8 Avslutande kommentarer

När man bygger upp ett diagnosmaterial av det här slaget är det viktigt att se framåt. Det är till exempel inte lämpligt att välja uppgifter utgående från hur dagens läromedel ser ut eller från var en acceptabel ”godkäntnivå” ligger. Man skulle i så fall missa ett av syftena med dessa diagnoser; att öka alla elevers måluppfyllelse. En grund har därför varit följande:

- De uppgifter som 5 - 6 elever i de flesta klasser i en årskurs lyckas lösa kan anses ligga på en rimlig nivå för merparten elever i den ålderskategorin. Att inte fler elever löst uppgifterna beror troligen på undervisningens och läromedlens kvalitet.
- Om flera elever har problem med samma uppgifter måste diagnosen kompletteras med enklare uppgifter inom samma område, för att med precision kunna kartlägga alla elevers kunskapsnivå.
- Det är inte bara de svagaste elevernas kunskaper och färdigheter som skall kartläggas. Även de allra duktigaste elevernas kunskaper måste kartläggas. Dessa elever ska ha samma möjligheter att få hjälp på sin nivå som andra elever.
- I olika klasser eller skolor planerar man på olika sätt. Det betyder att man inte generellt kan ange när en diagnos bör göras. Det är inte heller rimligt att hantera ett diagnosinstrument som innehåller alltför många diagnoser för samma åldersgrupp. Lösningen är här att det i vissa av diagnoserna (såsom i Statistik och Sannolikhet) kan finnas uppgifter av olika svårighetsgrad. Detta är enkelt att hantera för läraren. Man talar bara om för eleverna vilka av uppgifterna de skall lösa eller ännu bättre att uppgifterna är av olika svårighetsgrad. Om en elev inte förstår en uppgift bör det ses som en naturlig sak att eleven hoppar över uppgiften eller, ännu hellre, åtminstone försöker att lösa uppgiften.

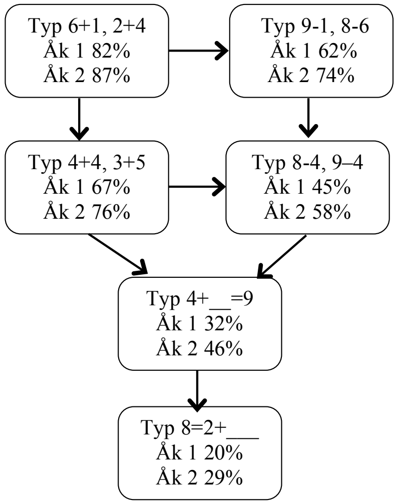
Kunskapsdiagnostik handlar inte om att rangordna eleverna utan om att hjälpa eleverna i deras kunskapsutveckling. Detta bygger på ett ömsesidigt förtroende mellan lärare och elev. En del av diagnoserna går lite längre inom vissa av kunskapsområdena än vad de flesta lärare undervisar om i årskurs 9. Samtidigt ligger svenska elevers kunskapsnivå, inom flera områden, under andra länders. Diagnoserna handlar alltså inte om vad elever kan idag utan vad som är rimligt för elever att lära sig med en väl genomtänkt och väl planerad undervisning. Detta kan ses som en utgångspunkt för ökad måluppfyllelse.

4 Empiri och didaktisk ämnesanalys

I föregående kapitel beskrevs hur Diamantdiagnoserna har konstruerats. Här beskrivs hur de strukturer som ligger till grund för Diamantdiagnoserna empiriskt har testats för att pröva relevansen i uppgiftsstrukturen inom diagnoserna. Detta har gjorts via kartläggning av elevers kunskaper, med hjälp av lösningsfrekvenser för de olika uppgifterna inom varje diagnos. De strukturer som testats empiriskt gäller områdena Potenser, Rationella tal, Grundläggande aritmetiken och Mätning.

Diagnoserna testar olika aspekter av ett matematiskt begrepp, sekvenserade efter en förkunskapsstruktur. Det innebär att uppgifternas komplexitet successivt ökar inom varje diagnos. Strukturschemat för en diagnos visar därmed ett internt samband mellan olika aspekter av ett och samma begrepp, medan mer övergripande strukturscheman visar sambanden mellan olika begrepp. Vid utprövningen har lösningsfrekvenser för de olika uppgifterna samlats in. På så sätt har det gått att få stöd för att begreppsstrukturerna är korrekta.

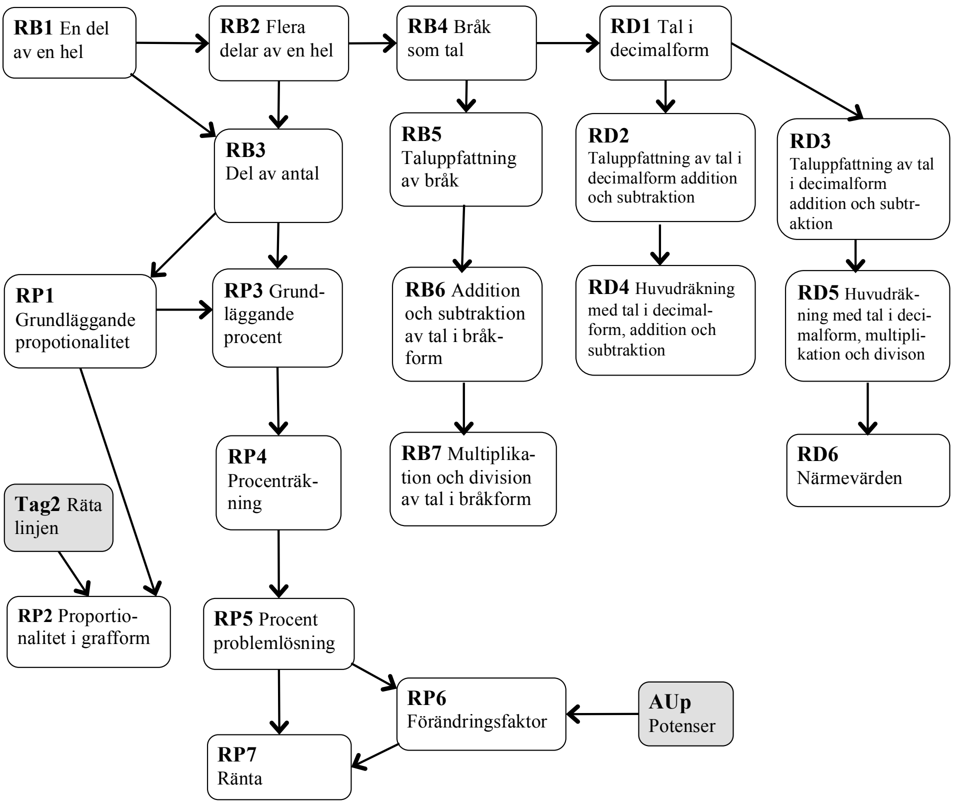
Genom att skriva in lösningsfrekvenser i respektive strukturschema erhålls resultatscheman som avslöjar i vad mån den didaktiska ämnesanalysen är rimlig. Resultatscheman har sammanställts på olika nivåer utifrån underlag från klasser, skolor och kommuner eller, som i det första exemplet nedan (Figur 4.1), en samlad lösningsfrekvens för ca 5000 elever på skolor runt om i landet. Det har visat sig att mönstret i dessa lösningsfrekvenser ser i stort sett likadant ut oberoende av på vilken nivå resultaten sammanställts. Sammantaget grundar sig lösningsfrekvenserna i detta kapitel på mellan 2000 och 5000 elever per diagnos och årskurs. Den didaktiska ämneasanalysen, i form av preliminära strukturer har i hög grad visat sig hålla. Frekvenserna följer de konstruerade strukturerna, med högre lösningsfrekvenser för uppgifter som ligger ”högre upp” i strukturerna, det vill säga för uppgifter med färre förkunskapskrav, till lägre lösningsfrekvenser för uppgifter som ligger ”längre ner”, det vill säga uppgifter som ställer högre krav på förförståelse av olika slag. Varje resultatschema bekräftar i den meningen motsvarande strukturschema och sammantaget utgör empirin därmed ett stöd för den didaktiska ämnesanalysen.



Figur 4.1 Resultatschema för diagnos AG1. Lösningsfrekvenserna minskar uppifrån och ner i schemat.

Varje diagnos prövar olika aspekter av ett och samma begrepp. Den elev som har alla uppgifter rätt på en diagnos kan således anses behärska begreppet. Vid utprövningen av diagnoserna har säkerställts att ett antal elever i relevant årskurs har löst alla uppgifter på en diagnos rätt, varför det kan anses rimligt att klara de aspekter som testas under det stadium dessa elever befinner sig på.

Hur de olika diagnoserna är kopplade till varandra framgår av mer övergripande strukturscheman som presenterar hur begrepp hänger ihop inom varje område och delområde (www.skolverket.se/diamant). Även dessa är resultatet av en didaktisk ämnesanalys av aktuellt område. Ett exempel är strukturschemat för området Rationella tal nedan (Figur 4.2). De heldragna pilarna visar hur diagnoserna hänger samman i en översiktlig förkunskapsstruktur. De grå rutorna indikerar relvanta förkunskaper från andra områden.



Figur 4.2. Strukturschema för området Rationella tal.

Ett strukturschema kan ses som en bild av ett matematiklandskap. På samma sätt som det finns olika kartor, ekonomiska, topografiska och tematiska, över omgivningen går det att tänka sig att det finns olika typer av kartor över matematiklandskapet. Strukturschemana utgör således didaktiska kartor över matematiklandskapet i olika skala, alltså med olika detaljeringsgrad. Det finns till exempel strukturscheman över hela områden, som i Figur 4.2 och strukturschema över enskilda begrepp, som resultatschemat i Figur 4.1.

En enskild elevs resultatschema synliggör hur en progression inom det aktuella begreppet uppfattats och förståtts av eleven. Den ursprungliga tanken vid konstruktionen av diagnoserna var att det skulle vara möjligt att följa kunskapers utveckling och fördjupning, alltså hur ett begrepp inledningsvis testas med uppgifter som kräver få förkunskaper för att successivt testa uppgifter som kräver mer förförståelser av olika slag. Genom att studera lösningsfrekvenser blir det möjligt att se om dessa antaganden varit rimliga.

I följande avsnitt presenteras de strukturer som en didaktisk ämnesanalys resulterat i, i form av ett strukturschema. Det matematikinnehåll som exemplifieras nedan är hämtade från såväl grundskolans tidiga årskurser som grundskolans senare årskurser.

Inledningsvis beskrivs Potenser, ett område som introduceras på högstadiet. Detta område presenteras först eftersom det är relativt begränsat och strukturen framträder tydligt. Därefter presenteras tal i bråkform inom området Rationella tal. Områdets komplexitet består delvis i att begreppet inledningsvis utgår från vardagssituationer för att sedan övergå till ett inommatematiskt begrepp, bråk som tal. Detta område behandlas genom hela grundskolan och utgör centrala förkunskaper till tal i decimalform, proportionalitet, procent och algebra. En förutsättning för att klara beräkningarna inom dessa områden är goda kunskaper i den grundläggande aritmetiken.

Grundläggande aritmetik, som presenteras efter tal i bråkform, utgör således en viktig grund för förståelse av alla beräkningar där den första delen, talområdet 0 – 10, senare generaliseras och ligger till grund för förståelse av mer komplexa beräkningar. Området är väl utforskat men kanske inte strukturerat på det sätt som gjorts här. Sist ges exempel från området Mätning vilket är en central del av den grundläggande geometrin. Även där är begreppen nära kopplade till aritmetiken.

I samband med att diagnoser och strukturscheman beskrivs, ges kommentarer rörande undervisning inom respektive område. Anledningen till det är att tydliggöra hur diagnosresultat och didaktisk ämnesanalys kan ligga till grund för undervisningens planering.

4.1 Potenser

Begreppen potenser och rötter har i diagnosmaterialet placerats i ett område som kallas Utvidgad Aritmetik, AU. Inom detta område blir det tydligt att eleven måste få möjlighet att lära sig olika konventioner som matematiska notationer och de sätt man förväntas skriva på. Man kan beskriva detta som något av matematikens grammatik. Ett exempel är hur tecken i vissa situationer inte skrivs ut. Inom algebra betyder 3x, $3 \cdot x$, multiplikationstecknet skrivas inte ut. Motsvarande gäller uttryck som 3(5 + 7), men inte 35. Ett annat algebraiskt uttryck är x, som betyder detsamma som $1 \cdot x$, något som inte är självklart för den som inte fått det förklarat för sig.

På motsvarande sätt är det inte självklart för alla elever att 5 i samband med potensräkning kan skrivas som 5^1. Den som behärskar denna typ av konventioner funderar aldrig djupare på dessa skrivsätt, utan använder uttrycken och förstår såväl dolda operationssymboler som dolda siffror.

Den diagnos som har använts för att testa elevernas kunskaper om potenser täcker det innehåll som en tolkning av kursplanen ger vid handen att elever kan möta under årskurserna 7 – 9. Enligt det centrala innehållet i Lgr11 ingår ”talsystemets utveckling från naturliga tal till rationella tal”, de ”reella talens egenskaper och användning i vardagliga och matematiska situationer” samt ”potensform för att uttrycka små och stora tal”. Läraren ska tolka denna text och förväntas förstå innebörden och operationalisera detta i undervisning. Under arbetet med diagnoserna tolkades texten, varefter innehållet analyserades didaktiskt, operationaliserades i en diagnos och sammanfattades i en förkunskapsstruktur, ett strukturschema.

Diagnosen Potenser, POT, (Figur 4.3) användes vid en kartläggning i terminsstarten i gymnasieskolan. Diagnosen avser att testa vilka kunskaper eleverna har med sig från högstadiet och bedöms testa om eleven uppnått kunskapskraven inom området i grundskolans kursplan.

Potenser

1. Beräkna

a. $3^2 =$ ……. b. $2^5 =$ ……. c. $5^0 =$ …….

2. Skriv utan potenser

a. $5 \cdot 10^2 =$ ……. b. $4 \cdot 10^{-3} =$ ……. c. $3{,}2 \cdot 10^4 =$ …….

3. Beräkna

a. $(3 + 2)^2 =$ …….. b. $3 + 3^2 =$ ……. c. $(-3)^{-2} =$ ………

4. Förenkla

a. $2^2 \cdot 2^3 =$ ……. b. $5 \cdot 5^7 =$ ……. c. $3^0 \cdot 3^2 =$ …….

5. Beräkna

a. $\frac{4^{31}}{4^{29}} =$ ………. b. $\frac{4^4 \cdot 3^7}{4^3 \cdot 3^5} =$ …… c. $\frac{6^4}{3^4} =$ ……

Figur 4.3. Diagnos, Potenser, POT.

Här följer en beskrivning, baserad på den didaktiska ämnesanalysen, av tanken bakom de olika uppgifterna och reflektioner kring möjliga lösningar. Lösningsfrekvenserna som anges i texten hänför sig till en utprövning av diagnosen av alla elever i gymnasiets åk 1 i en mellansvensk kommun (Jmf Figur 4.4).

Uppgifterna 1a – 1c i diagnosen testar grunden när det gäller förståelse av potenser. Att $3 \cdot 3 = 3^2$ följer enligt definition av exponentiering som upprepad multiplikation när exponenten är ett positivt heltal. Lösningsfrekvensen är 88% vid starten i åk 1 i gymnasieskolan. Uttrycket 3^2 är endast ett annat sätt att representera multiplikationen $3 \cdot 3$. Denna kunskap ska sedan generaliseras till beräkningar som $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Här har emellertid lösningsfrekvensen sjunkit till 69%. Att $5^0=1$ vet endast 50% av eleverna. Redan när tal skrivs i potensform finns således en stegrad svårighet och tydligen är $5^0=1$ en komplex, men central, aspekt som ingår för att fullständigt förstå vad tal skrivna i potensform innebär.

Uppgift 2 testar grundpotensform. Uppgiften att skriva $5 \cdot 10^2$ utan potens löser 81% av eleverna. När det gäller $3{,}2 \cdot 10^4$ och $4 \cdot 10^{-3}$ så sjunker lösningsfrekvensen till 62% respektive 56%. Här kan man se att om talet före tiopotensen är skrivet med decimaler blir det svårare och om sedan tiopotensen är negativ så är det ytterligare en kritisk aspekt.

I uppgift 3 testas prioriteringsregler vid räkning med potenser. Här ska man veta att termerna i uttrycket $3 + 3^2$ evalueras var för sig och att multiplikationen 3^2 därför räknas ut före additionen, alltså att $3 + 3^2 = 3 + 9 = 12$. 75 % av eleverna klarar detta. Tolkningen av uttrycket $(3 + 2)^2$, där uttrycket inom parentesen beräknas först, visar sig inte helt självklar. Där blir $(3 + 2)^2 = 5^2$ samma som definitionen; $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$. Endast 63% av eleverna har förstått detta.

När det gäller prioriteringsreglerna är det så här långt egentligen inte något som är svårt. Det som krävs är dock att eleven har förstått ”spelreglerna”, konventioner och räkneregler. Dessa går inte att gissa sig till utan läraren måste synliggöra dem för eleven.

Uppgiften att beräkna $(-3)^{-2}$ involverar flera olika delkunskaper. Eleven ska förstå vad det innebär att exponenten är negativ, att $3^{-2} = \frac{1}{9}$, och vad som händer när två negativa tal multipliceras: $(-3) \cdot (-3) = 9$. Detta är nödvändiga förkunskaper för att kunna lösa denna uppgift. Av lösningsfrekvensen, 8%, framgår att det är viktigt att befästa dessa förkunskaper och sedan visa hur de fungerar tillsammans när man utför denna typ av beräkning.

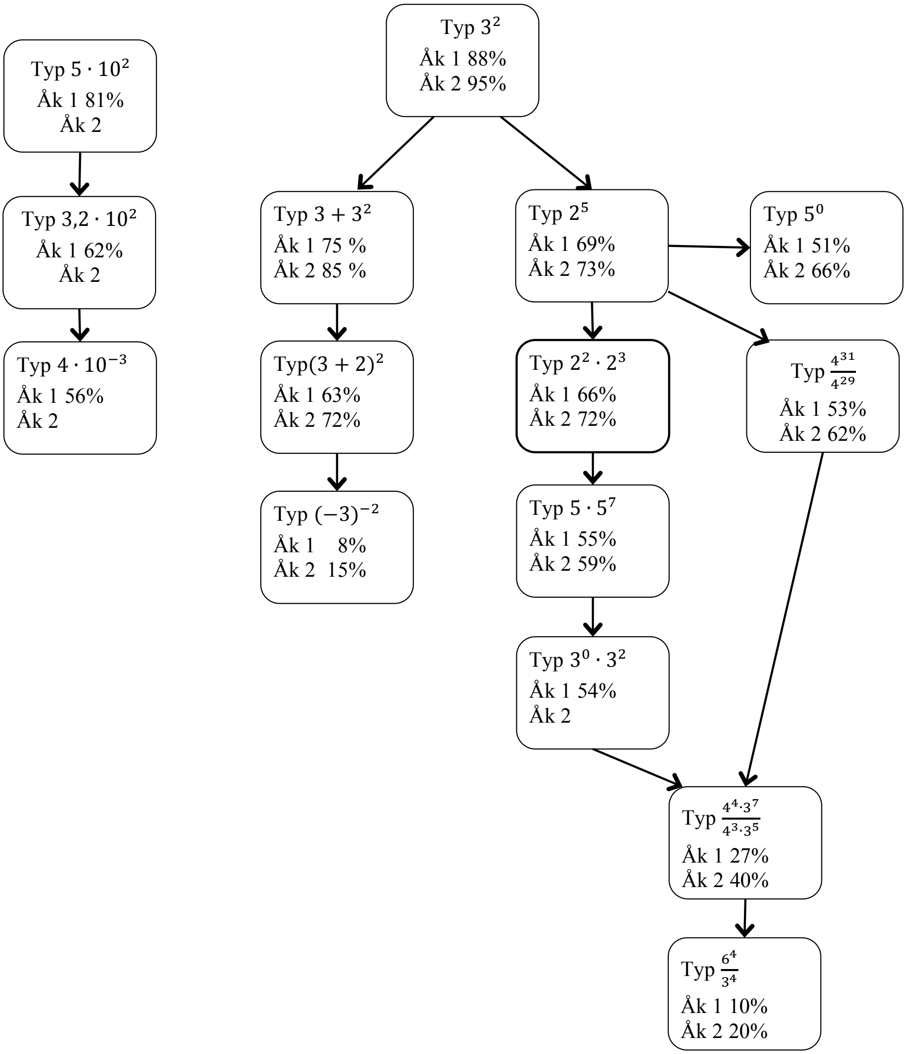
Uppgift 4 testar potenslagarna vid multiplikation, vilka i sin tur är beroende av att eleven har förstått definitionen av tal skrivna i potensform och sedan kan hantera den kunskapen på ett rationellt sätt genom att addera potenserna: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

I uppgift 4a gäller det att förenkla: $2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$. Efter förenklingen har uppgiften reducerat till samma uppgift som 1b på diagnosen. 66% av eleverna klarar detta. Finns det sedan med en dold etta som i $5 \cdot 5^7$, sjunker lösningsfrekvensen till 55%. Detsamma gäller för $3^0 \cdot 3^2$, där lösningsfrekvensen är 54%. Alltså är tolkningen av 5 som 5^1 i detta sammanhang och att $3^0 = 1$ kritiska för eleverna. Tidigare framkom att hälften av eleverna inte fullständigt har förstått vad tal skrivna i potensform innebär. Dessa elever kan troligen inte heller förenkla uttryck med hjälp av potenslagen för multiplikation.

I uppgift 5a ska eleven beräkna $\frac{4^{31}}{4^{29}}$. På motsvarande sätt som i multiplikation används potenslagen för division. Lösningsfrekvensen är 53%, ungefär samma som vid multiplikation. I uppgifterna 5b och 5c kombineras tidigare kunskaper. Uppgiften 5b löser 27% av eleverna och uppgift 5c löser 10% av eleverna. Där behöver eleven kunna faktorisera talet 6 och förstå betydelsen av en parentes i detta sammanhang. Denna operation kräver att eleven har en god taluppfattning och ser hur talet kan skrivas om enligt $6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$ för att sedan kunna förkorta med 3^4.

Uppgifterna på diagnosen, resultatet av den didaktiska analysen av begreppet potens, ordnades i ett preliminärt strukturschema enligt en förkunskapsstruktur. Efter kartläggningen noterades lösningsfrekvenserna i strukturschemat och ett resultatschema erhölls. Det framgår av detta att lösningsfrekvensen sjunker för varje ny aspekt som testas (Figur 4.4), vilket stöder den didaktiska analysen och de antaganden som gjorts om att komplexiteten inom begreppet ökar ju fler delkunskaper som krävs för att klara en viss uppgift. På detta sätt kan empirin bekräfta de didaktiska strukturerna. Den sjunkande lösningsfrekvensen beror troligen på att elever saknar de förkunskaper som krävs för att förstå en ny delkunskap, något som även bekräftas i kliniska intervjuer med elever.

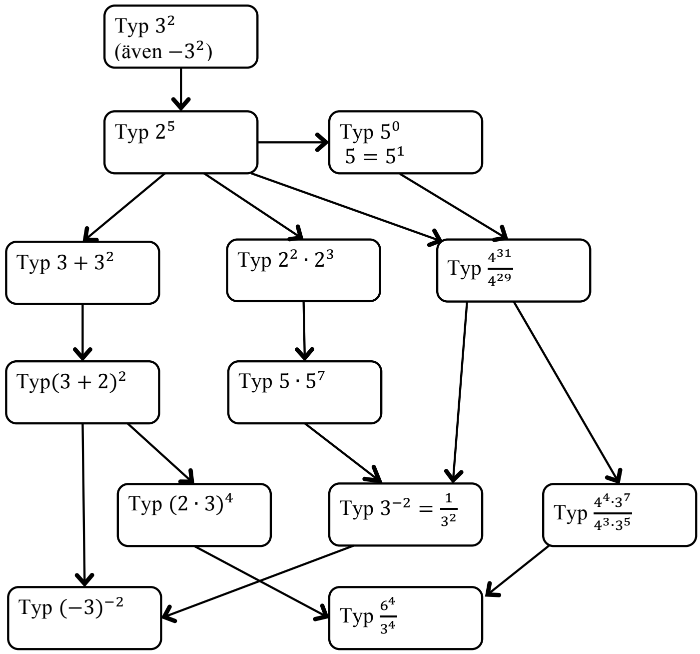
I resultatschemat nedan finns lösningsfrekvenser för såväl årskurs 1 som årskurs 2 i gymnasieskolan inom en och samma mellansvenska kommun. Ytterligare en iakttagelse som stärker den didaktiska analysen empiriskt är att de minskande lösningsfrekvenserna i såväl årskurs 1 som årskurs 2 i gymnasieskolan visar i väsentliga avseenden samma mönster.



Figur 4.4. Resultatschema, Potenser, POT. Gy åk 1 n≈1500 elever, Gy åk 2 n≈900 elever.

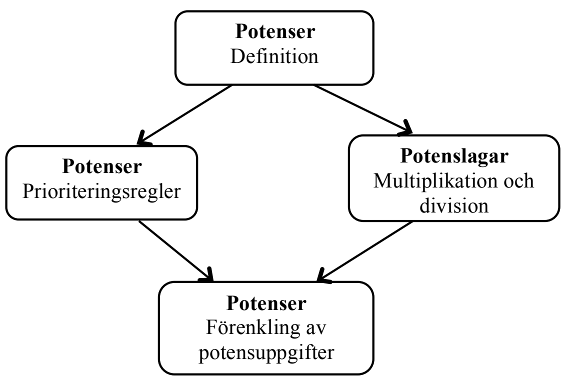
Didaktisk karta

Utgående från resultatschemat (Figur 4.4) kan strukturschemat förfinas. Varje ruta i resultatschemat beskriver en aspekt av potensbegreppet. För varje sådan aspekt behövs förkunskaper, vilka är såväl delkunskaper inom begreppet som kunskaper om andra, i någon mening närliggande begrepp. En sådan förfinad analys ger, till exempel, vid handen att faktorisering är en avgörande förkunskap vid förenkling av uttryck i potensform. Det förfinade strukturschema som denna vidare analys resulterar i (Figur 4.5) utgör en mer detaljerad didaktisk karta över begreppet potenser. Denna karta ger en tydlig bild av vilka delkunskaper som är viktiga att synliggöra för eleverna i undervisningen så att de ska förstå olika aspekter av tal skrivna i potensform och hur man räknar med denna typ av uttryck. Observera dock att strukturschemat inte rakt av är att betrakta som en undervisningsstruktur.



Figur 4.5. Strukturschema/Didaktisk karta, potenser.

Strukturschemat i Figur 4.5 kan beskrivas mindre detaljerat (Figur 4.6) med en didaktisk karta i en annan skala.



Figur 4.6. Övergripande strukturschema, potenser.

I samband med utprövningen av den här diagnosen intervjuades ett tiotal gymnasielärare som genomfört diagnosen, angående deras syn på strukturscheman, resultatscheman och lösningsfrekvenser. Det framkom då att flera av de steg som visar sig i strukturschemat, togs för givna eller inte reflekterats över som eventuellt problematiska för eleverna. I och med att dessa aspekter synliggjordes, menar de att de kunde bli tydligare i sin undervisning och på så sätt ge eleverna bättre möjligheter att förstå begreppet och operationerna.

4.2 Rationella tal

Bråkens roll i samhället har successivt övertagits av tal i decimalform. Detta innebär inte att undervisningen om bråk i skolan ska få en mindre framträdande roll. Kunskaper om tal i bråkform utgör förkunskap bland annat till tal i decimalform. Bråk används också när det gäller att beskriva andelar och är således även en förkunskap vid procenträkning. Tal i bråkform är vidare en central förkunskap för algebra och för hantering av ekvationer. Att elever kan multiplicera, dividera eller förlänga tal i bråkform är nödvändigt på flera av gymnasieskolans program och grunden ska läggas i grundskolan.

Under rubriken Centralt innehåll i Lgr11 för årskurserna 1 – 3 ingår ”Del av helhet och del av antal. Hur delarna kan benämnas och uttryckas som enkla bråk samt hur enkla bråk förhåller sig till naturliga tal”. Vidare ingår ”Naturliga tal och enkla tal i bråkform och deras användning i vardagliga situationer”.

För årskurserna 4 – 6 ingår ”Rationella tal och deras egenskaper” samt ”Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.”, och för årskurserna 7 – 9 ingår ”Reella tal och deras egenskaper samt användning i vardagliga och matematiska situationer.”, samt ”Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkning med skriftliga metoder och digital teknik.”

Denna text ska tolkas av lärare och omsättas i undervisning som ska leda till att eleverna når de nationella kunskapskraven. Kunskapskraven i Lgr11 för årskurserna 1 – 3 inbegriper att ”Eleven visar grundläggande kunskaper om tal i bråkform genom att dela upp helheter i olika antal delar samt jämföra och namnge delarna som enkla bråk”.

Texterna i kunskapskraven för årskurserna 4 – 9 är inte direkt kopplade till det centrala innehållet, utan uttrycker olika kvaliteter i kunnandet som eleven ska visa. Det betyder att läraren i sina bedömningar själv måste koppla samman kunskapskraven med det aktuella centrala innehållet.

Figur 4.2 utgörs av ett övergripande strukturschema för området Rationella tal. När man studerar hur bråkbegreppet behandlas i vardagen, och hur detta speglas i läromedel och under lektioner, visar det sig att bråk förekommer i en rad olika situationer. Det är emellertid inte lätt att genomskåda på vilket sätt de matematiska strategierna för bråkräkning används i dessa olika situationer, utan olika aspekter av bråkbegreppet framträder i olika situationer. Ett bråk kan uppfattas på bland annat följande sätt:

- som ett tal,
- som en del av en hel,
- som en del av ett antal,
- som en andel,
- som en proportion,
- som ett förhållande eller
- som en skala.

För att lösa problem som hör samman med de olika situationerna används bråken som rationella tal och man opererar med dem enligt gällande räknelagar. För en elev är det inte alltid lätt att se sambanden mellan de olika situationerna. Det inte självklart att man kan arbeta med $\frac{3}{4}$ av en helhet och $\frac{3}{4}$ av ett antal utgående från samma matematiska modell, eller att en strategi som beskrivits för del av en hel också gäller för en del av ett antal. För den som behärskar detta och därmed kan ta det för givet, kan det vara svårt att föreställa sig vad som behöver lyftas fram i undervisningen.

Bråkbegreppet grundläggs redan under de tidigaste skolåren och ska successivt formaliseras. I början grundläggs bråkbegreppet utgående från vardagliga situationer och eleverna får lära sig del av helhet, del av antal och grundläggande proportionalitet. Men innan eleverna börjar operera med tal i bråkform krävs att de behärskar ett antal grundläggande begrepp. En didaktisk analys visar här att det handlar om att behärska tre grundläggande insikter:

- nämnarens innebörd,
- täljarens innebörd,
- varje tal i bråkform kan skrivas på (oändligt många) olika sätt.

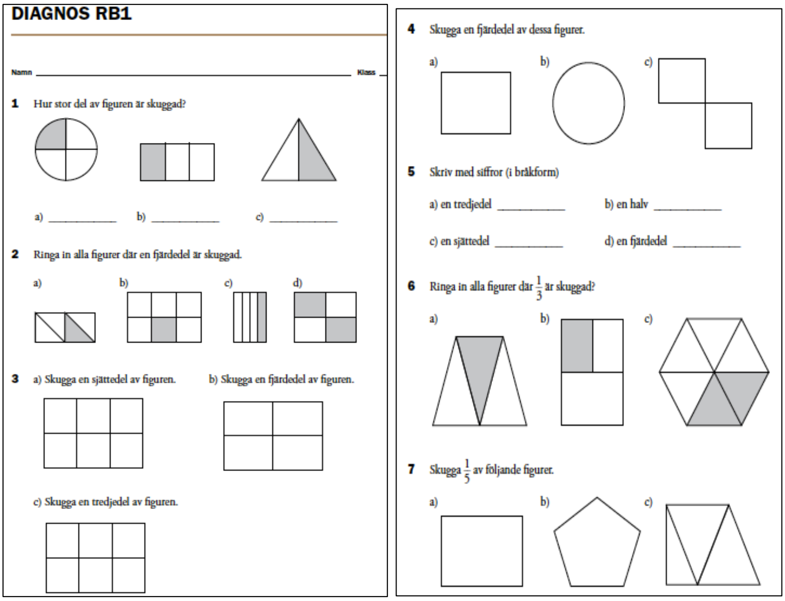
Eleven möter dessa insikter i tidigare årskurser och då genom aspekterna del av en helhet och del av ett antal. På detta sätt kan de olika räkneoperationerna inledningsvis ges en konkret förankring. Den didaktisk analysen synliggör den komplexitet som råder här, dels när det gäller att lösa olika typer av vardagsproblem där tal i bråkform förekommer och dels när det gäller att förstå algebra och närliggande områden där hantering av tal i bråkform är centralt.

4.2.1 Nämnarens och täljarens betydelse

Undervisningen inleds ofta med aspekten en del av en hel. Redan på förskolan får elever dela frukter i två halvor och använda begreppet hälften. Även hemma delar syskon i halvor eller tredjedelar. Det verkar i dessa sammanhang som barn intuitivt förstår att värdet en halv är beroende av ingångsvärdet. Delar de på en liten chokladkaka så blir halvan mindre jämfört med om de delar på en större chokladkaka. En grundläggande tanke om rättvisa gör att barn kan ha uppfattningen att halvorna ska vara lika stora. Dessa erfarenheter utgör inledningen till strukturbyggandet i delområdet Bråk, RB, inom området Rationella tal, R.

Med den första diagnosen inom området Rationella tal, En del av en hel, RB1, testas elevens förståelse av nämnarens betydelse. Diagnosen omfattar sju uppgifter och alla uppgifterna utgår från stambråk, det vill säga bråk där täljaren är 1. Diagnosen har genomförts i årskurserna 4 och 5.

Uppgifterna i diagnosen är av olika slag (Figur 4.7). Uppgifterna 1, 2 och 6 handlar om att avläsa eller urskilja en markerad andel i en figur. På uppgifterna 3, 4 och 7 krävs att eleven själv konstruerar givna andelarna. För att, till en viss del, kunna se kvalitet i elevens kunskaper bygger uppgiftskonstruktionen på en skillnad mellan passiv och aktiv kunskap. Passiv kunskap innebär en avläsning, och aktiv kunskap kräver att eleven själv markerar eller ritar ut andelen. Härigenom går det att se hur långt eleven har kommit i sin kunskapsutveckling när det gäller denna inledande förståelse av bråkbegreppet.



Figur 4.7. Diagnos, En del av en hel, RB1.

Här följer en beskrivning av de didaktiska idéerna bakom de olika uppgifterna. I texten och i resultatschemat nedan (Figur 4.8) anges lösningsfrekvenser för årskurserna 4 och 5. Underlaget är 3150 elever i årskurs 4 och 1920 elever i årskurs 5.

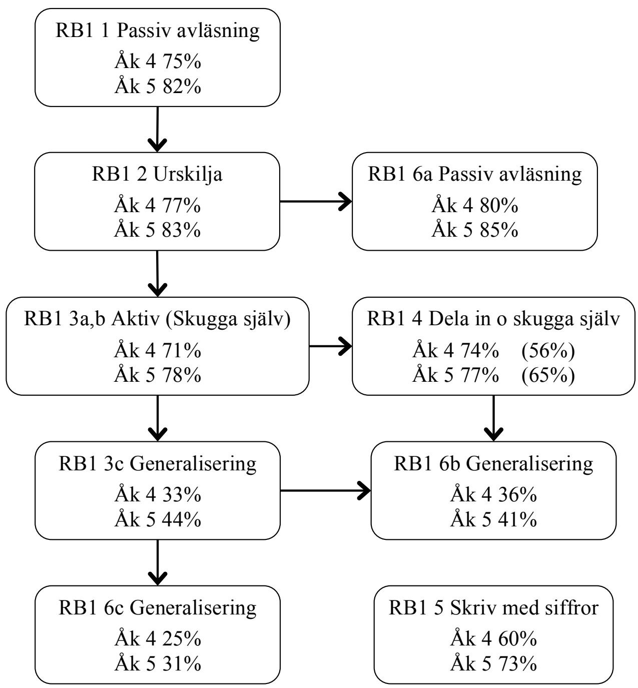
De inledande uppgifterna visar om eleven förstått innebörden av begreppet andel. Det är här liten skillnad i lösningsfrekvenserna mellan uppgifterna 1, 2 och 6a där kunskapen visas passivt och i uppgifterna 3a, 3b och 4 där kunskapen kräver ett aktivt lösande. Detta indikerar att den elev som har förstått begreppet andel, cirka 75% i årskurs 4, kan såväl avläsa, urskilja, som att själv dela in och markera en andel.

Uppgifterna i 3a och 3b är av typ ”Skugga en fjärdedel av fyra givna rutor” och testar den grundläggande definitionen av fjärdedel. Detta klarar 71% av eleverna i årskurs 4. När de sedan i uppgift 3c ska skugga en tredjedel av 6 rutor så är lösningsfrekvensen endast 33%. Även uppgift 6c testar samma aspekt och har lösningsfrekvens 36%. Två tredjedelar av eleverna kan alltså inte generalisera den grundläggande kunskap de har. Analysen visar att denna generalisering utgör en delkunskap som är en betydelsefull aspekt vid lärande av det generella begreppet andel.

Även uppgift 6b har låg lösningsfrekvens, 36% i årskurs 4, vilket visar att det inte är självklart för en elev att delarna i en helhet ska vara lika stora när man till exempel talar om tredjedelar. Denna kunskap har förskolebarn intuitivt, men när innebörden i stambråket ska formaliseras behöver detta tydligt synliggöras i undervisning.

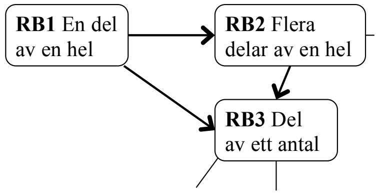
Uppgiften 4c och uppgifterna 7b och 7c, att dela upp fjärdedelar respektive femtedelar, har visat sig vara svåra, troligen beroende på elevers ovana vid arbete med denna typ av geometriska figurer som verkar vara avgörande, för att kunna lösa uppgifterna.

En annan aspekt som testas, i uppgift 5, är om eleven kan använda matematisk notation när det gäller stambråk. 60% av eleverna i årskurs 4 kan detta. Lösningsfrekvensen visar att inte alla elever som kan tolka och markera andelar (uppgifterna 1, 2, 3a och 3b), kan uttrycka andelen som ett bråk.



Figur 4.8. Resultatschema, En del av en hel, RB1.

Diagnos RB1 testar, som sagt, nämnarens betydelse. Diagnosen Flera delar av en hel, RB2, testar täljarens betydelse och med diagnos Del av ett antal, RB3, testas båda dessa begrepp, men perspektivet har förskjutits från del av en hel till del av ett antal. De övergripande sambanden framgår av Figur 4.9.



Figur 4.9 De första diagnoserna inom området Rationella tal.

I diagnosen RB2 är det således täljarens betydelse, som står i fokus. Här kan man iaktta om eleven förstår att 2:an och 3:an i bråket $\frac{2}{3}$ har olika funktion. Siffran 3, som står i nämnaren, ska i detta sammanhang inte tolkas som ett separat tal utan hela bråkuttrycket $\frac{1}{3}$ måste beaktas. Talet 2 står för att man avser summan av två sådana stambråk, alltså $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

På uppgifter där två av fem rutor är skuggade i olika Figurer ska eleven ange andelen $\frac{2}{5}$. Lösningsfrekvensen i årskurs 4 är 67%. Något färre elever löser samma typ av uppgift när täljaren är störrre än 1. Detta framgår vid jämförelse med en uppgift på RB1 där en ruta var skuggad. Den uppgiften hade lösningsfrekvens ca 75%. På diagnos RB2 har abstraktionsgraden höjts. När eleverna själva ska skugga en andel så är bråket uttryckt med siffror i stället för i text som på RB1. Detta verkar dock spela mindre roll. Däremot är formen på figuren avgörande.

Figur 4.10. Uppgift 4, RB2.

Endast 40% av eleverna i årskurs 4 klarar att skugga $\frac{1}{4}$ respektive $\frac{2}{3}$ av figurerna (Figur 4.10). Elevens förståelse av geometriska figurer är förstås en viktig förkunskap i detta sammanhang.

Diagnoserna RB1 och RB2 har genomförts i årskurserna 4 och 5 och lösningsfrekvenserna för de olika uppgifterna är cirka tio procentenheter högre i årskurs 5. Mönstret i lösningsfrekvenserna mellan olika uppgifter eller grupper av uppgifter är dock desamma. Detta stöder empiriskt såväl val av kriterieuppgifter som relevansen i strukturschemana.

Lösningsfrekvenserna för diagnos RB3, som testar delar av ett antal, ger liknande information som för RB1 och RB2. Diagnosen RB3 har genomförts i årskurs 5 och årskurs 6. Även i detta fall skiljer endast tio procentenheter i lösningsfrekvenserna och mönstret är detsamma i båda årskurserna.

Diagnosen RB3 testar om eleven förstår andelar av ett antal, uppgifter av typ ”Här är fem ringar varav två är skuggade. Hur stor andel av ringarna är skuggade? Svara i bråkform.” 79% av eleverna i årskurs 5 klarar detta. När de sedan själva aktivt ska skugga $\frac{3}{4}$ av åtta cirklar så klarar 51% detta. Återigen är det bristande förmåga att generalisera en erövrad kunskap som visar sig.

Uppgifter som en ”en femtedel av 10” eller ”en tredjedel av 6”, alltså andelar där täljaren är 1, har en lösningsfrekvensen på ca 60%. På uppgiften ”två femtedelar av 10” eller ”två tredjedelar av 9”, alltså där täljaren är större än 1, så är lösningsfrekvensen nere på 40%. Även här är det generaliseringsförmågan som brister. Uppgifter av denna typ utgör en förkunskap till proportionalitet.

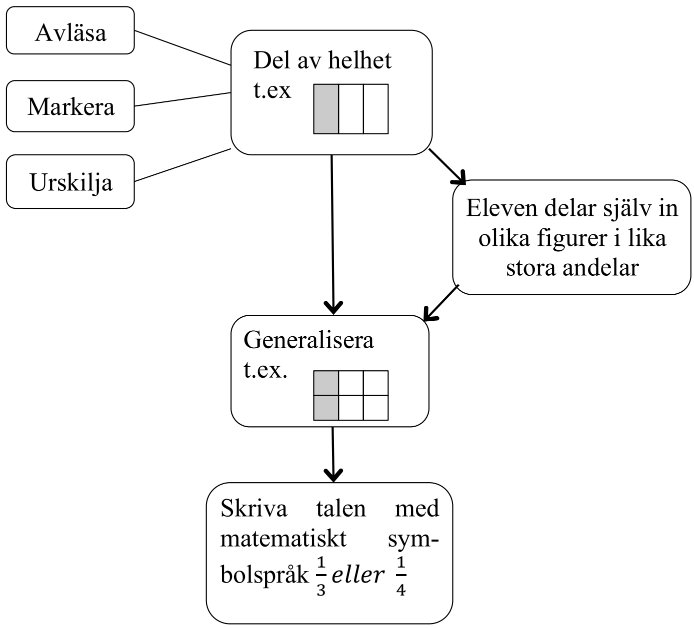
Samtliga tre diagnoser RB1, RB2 och RB3 har lösts av elever i årskurs 5. Då har 65% av eleverna alla eller nästan alla uppgifter rätt på RB1 medan 86% har det på RB2 och 43% på RB3. Att det är större andel som får ett högt resultat på RB2 än RB1 beror troligen på att uppgifter som testar elevens förmåga att generalisera begreppen har missats på RB2, en komplettering som behöver göras. Diagnos RB3 som testar delar av ett antal är det färre elever som klarar. Slutsatsen blir att denna aspekt av bråk måste synliggöras och diskuteras mer i undervisningen.

Didaktisk karta

Lärare i skolan har under många år introducerat bråkbegreppet på det sätt som speglas i resonemangen bakom konstruktionen av diagnosernas uppgifter. Den didaktiska analysen ger vid handen att det finns många delkunskaper inom området Bråk som behöver uppmärksammas i undervisningen; En del av en hel, nämnarens betydelse och flera delar av en hel, täljarens betydelse är centrala aspekter inom bråkräkning. Det är viktigt att även kunna koppla dessa aspekter till del av ett antal, något som utgör en konkretiserande grund för att sedan betrakta bråk som tal.

Inledningsvis kan eleverna laborativt avläsa, urskilja och skapa olika andelar av en helhet. Då ska man tydligt betona att andelarna är lika stora. Den inledande kunskapen generaliseras sedan för att fördjupa förståelsen. Eleven ska även lära sig att abstrahera och kunna uttrycka de olika andelarna med hjälp av matematiskt symbolspråk.

Utgående från lösningsfrekvenserna vid diagnostisering och en didaktisk analys av kriterieuppgifterna i diagnoserna framkommer en förkunskapsstruktur när det gäller de aspekter som behöver synliggöras. Strukturschemat, den didaktiska kartan (Figur 4.11), visar aspekter av den grundläggande förståelsen av bråkbegreppet utgående från konkretisering.



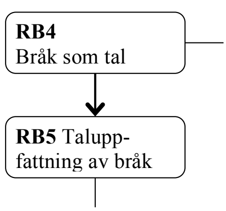
Figur 4.11 Strukturschema/Didaktisk karta, nämnarens betydelse.

När eleven behärskar en grundläggande förståelse av bråkbegreppet kan hon gå vidare till aspekten bråk som tal.

4.2.2 Bråk som tal

Tal i bråkform är rationella tal. Varje tal i bråkform har en bestämd plats på tallinjen och kan därmed storleksordnas.

Den grundläggande förståelsen av bråk som tal testas med hjälp av de två diagnoserna, Bråk som tal, RB4 och Taluppfatttning av bråk, RB5, (Figur 4.12). Dessa båda diagnoser har genomförts i årkurserna 5 och 6.



Figur 4.12. Sambandet mellan diagnoserna RB4 och RB5.

Uppgifterna på RB4 testar dels tals placering på tallinjen, dels storleksordning av tal i bråkform. I uppgift 1 ska talen $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$ placeras på en tallinje som är delad i fyra lika långa delar. På motsvarande sätt, i uppgift 2, ska $\frac{1}{3}$ och $\frac{5}{6}$ placeras på en tallinje som är delad i sex lika delar. Av lösningsfrekvenserna framgår att i årskurs 5 är det mellan 40% och 50% av eleverna som löser dessa uppgifter rätt och i årskurs 6 mellan 50% och 60%.

Andra uppgifter på RB4 är av typ ”Vilket av talen är störst, $\frac{1}{7}$ eller $\frac{1}{4}$?”, där talen ska storleksordnas genom jämförelse. De två talen har samma täljare och olika nämnare, en inledande aspekt vid storleksordning. 62% av eleverna i årskurs 5 löser uppgiften. I en annan uppgift ska eleven jämföra två tal i bråkform och avgöra om utsagor av typ $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ och $\frac{2}{3} = \frac{2}{4}$ är sanna eller falska. Detta klarar 67% av eleverna. Dessa uppgiftet testar en första förståelse av gemensam nämnare vid jämförelse.

Att ange olika uttryck för samma bråktal genom att fylla i rätt täljare i uppgifter av typ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{}{9} = \frac{}{12}$ löser ca 50% av eleverna. Om däremot något tal i nämnaren hoppas över som i $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{}{15} = \frac{}{18}$ så löser endast 10% av eleverna det. En tolkning av detta är att även om en elev kan följa ett mönster så ökar komplexiteten när den kunskap som krävs blir mer generell. Detta pekar mot en kritisk delkunskap som är nödvändig vid operationer med tal i bråkform. Det är förstås avgörande att kunna uttrycka ett bråk på olika sätt, eftersom detta krävs för att göra talen liknämniga vid beräkningar.

Även på RB4 följer lösningsfrekvenserna samma mönster i båda årskurserna. Skillnaden är att lösningsfrekvenserna i årskurs 6 är cirka 10 procentenheter högre än i årskus 5.

Nästa diagnos, Taluppfatttning av bråk, RB5, (Figur 4.13) testar grundläggande taluppfattning av bråk som tal och har genomförts i årkurs 6. Denna taluppfattning är en central aspekt inom bråkbegreppet och innebär abstraktion av kunskaper som inledningsvis kopplats till vardagen. Kunskapen krävs när man ska operera med tal i bråkform.

1	a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$ ______	b) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$ ______	c) $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=$ ______
2	a) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=$ ______	b) $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=$ ______	c) $1-\frac{3}{4}=$ ______
3	a) $3\cdot\frac{1}{5}=$ ______	b) $2\cdot\frac{2}{5}=$ ______	c) $4\cdot\frac{1}{3}=$ ______
4	a) $\frac{2}{3}/2=$ ______	b) $\frac{4}{5}/2=$ ______	c) $\frac{3}{4}/3=$ ______
5	a) $1/\frac{1}{2}=$ ______	b) $1/\frac{1}{3}=$ ______	c) $\frac{2}{3}/\frac{1}{3}=$ ______

Figur 4.13. Diagnosen, Taluppfattning av bråk, RB5.

Efter den didaktiska analysen organiserades här uppgifterna i grupper om tre, där varje uppgift i gruppen testar olika uttryck av en aspekt av begreppet. Tanken med diagnosen är att testa om eleven har abstraherat sin förståelse av bråk som tal.

Uppgift 1 testar täljarens innebörd och lösningsfrekvens på denna typ av uppgifter är 73%. Här redovisas ett medeltal av lösningsfrekvenserna per uppgiftsgrupp eftersom lösningsfrekvenserna är mycket lika på de tre uppgifterna, 1a är 73%, 1b är 74% och 1c är 73%. Lösningsfrekvensen på samtliga uppgiftsgrupper inom diagnosen följer samma mönster.

En grundläggande förståelse innebär att veta att täljaren beskriver hur många delar som avses; att $\frac{2}{4}$ betyder $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}$, att $\frac{3}{4}$ betyder $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=3\cdot\frac{1}{4}$ och att fyra fjärdedelar är lika mycket som en hel.

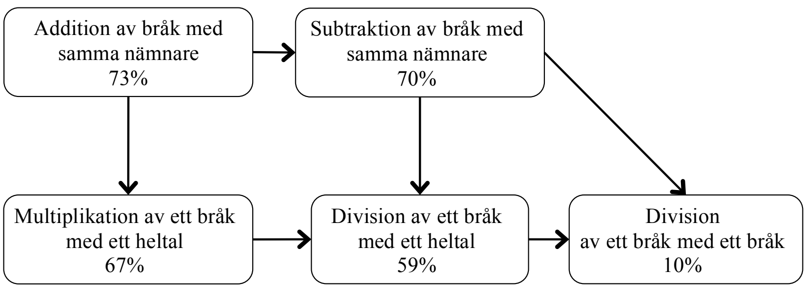
I uppgift 2 testas subtraktion av tal i bråkform med lika nämnare. Lösningsfrekvens 70% är något lägre än vid motsvarande additioner. Detta är samma tendens som vid beräkningar inom den grundläggande aritmetiken. Intervjuer med elever tyder på att de inte ser sambandet mellan räknesätten, något som är grundläggande och därför behöver synliggöras i undervisningen.

Uppgift 3 testar multiplikation av ett tal i bråkform med ett naturligt tal. Lösningsfrekvens 67% är något lägre än lösningsfrekvensen på uppgift 1b som i grunden är samma uppgift som 3a fast skriven i en annan uttrycksform. Detta samband behöver analyseras vidare.

Uppgift 4 testar division av ett tal i bråkform med ett naturligt tal, typ $\frac{4}{5}/2$, där det går att tänka likadelning eller delningsdivision, eftersom täljaren i bråket är jämnt delbar med 2. Här är lösningsfrekvensen 59%.

Uppgift 5a och 5b, av typ $1/\frac{1}{3}$, testar egentligen innebörden i bråkbegreppet. Det är samtidigt en annan aspekt av division än i uppgift 4, nämligen innehållsdivision; Hur många halva respektive tredjedelar får det plats i en hel? Intervjuer visar att elever inte ser det enkla i uppgiften utan tolkar uppgiften som en division, vilken de inte kan utför. Lösningsfrekvensen 10% tyder på att detta är en typ av uppgifter som måste belysas ordentligt för eleverna.

Resultatschemat för RB5 (Figur 4.14) visar lösningsfrekvenserna på de olika aspekterna av taluppfattning av bråk som tal. Även här bekräftas i en mening strukturschemat empiriskt.

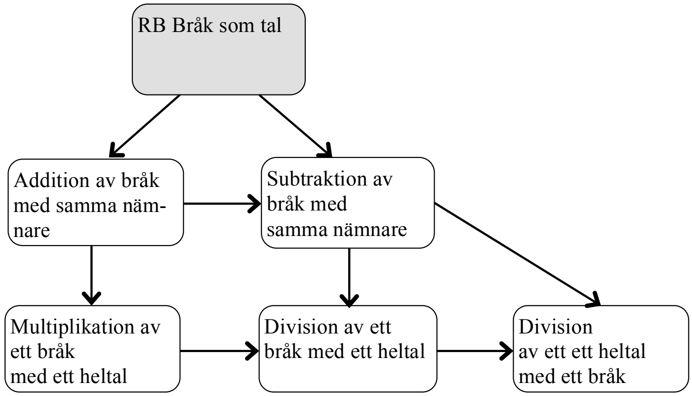


Figur 4.14. Resultatschema, Taluppfattning av bråk, RB5.

De båda diagnoserna RB4 och RB5 har genomförts i årskurs 6. Lösningsfrekvenserna för hela diagnosen visar andelen elever som behärskar det begrepp som testas, alltså grundläggande taluppfattning av bråk som tal. Andelen elever som hade alla eller nästan alla uppgifter rätt på dessa diagnoser utgjorde 53% respektive 51%. En naturlig tolkning av dessa resultat är att hälften av eleverna behärskar begreppet bråk som tal i slutet av årskurs 5, men i årskurs 6 är det inte en större andel elever som behärskar begreppet.

Didaktisk karta

Vid en analys av lösningsfrekvenserna för uppgifterna på diagnos RB5 framkommer olika delkunskaper som krävs för att kunna operera med tal i bråkform (Figur 4.15).



Figur 4.15. Strukturschema/Didaktisk karta, taluppfattning av bråk.

Undervisningen om tal i bråkform startar med bråkaspekter hämtade från vardagen för att skapa en förståelse av innebörden i andelsbegreppet. Därefter flyttas fokus till aspekten bråk som tal. Denna undervisning ska lägga grund för att eleverna sedan ska kunna operera med tal i bråkform vilket krävs exempelvis inom algebra och vid problemlösning. Grunden ligger i att förstå hur ett tal i bråkform är uppbyggt med nämnare och täljare samt att kunna tolka till exempel att $\frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4}$. I grundläggande taluppfattning ingår att kunna tolka och uttrycka tal på annat sätt: $1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$. Innebörden i de olika operationerna kan inledningsvis konkretiseras genom att tydligt visa en grundläggande beskrivning, till exempel multiplikationen $2 \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$. Detta är ett steg mot den abstraktion som krävs för fortsatt arbete med tal i bråkform.

4.2.3 Operera med tal i bråkform

Uppgifterna, som testas med de båda diagnoser Addition och subtraktion av tal i bråkform, RB6, och Multiplikation och division av tal i bråkform, RB7, innebär att operera med tal i bråkform, alltså en övergång till en mer formell behandling av dessa tal. För de elever som har en god taluppfattning och som behärskar de vanligaste strategierna för huvudräkning med naturliga tal är dessa typer av uppgifterna enkla att lösa. Lösningsfrekvenserna är emellertid relativt låga, troligen beroende på att eleverna i undervisningen har arbetat så procedurellt med liknande uppgifter att de inte ser hur enkla de är. För att lösa denna typ av uppgifter gäller det att tänka innan man börjar räkna. Beräkningarna är ett led i att senare kunna utnyttja räkneregler inom algebra.

Addition och subtraktion av tal i bråkform.

Diagnosen RB6 (Figur 4.16), som testar addition och subtraktion av tal i bråkform, genomfördes i årskurs 8 och på gymnasiet i början av årskurs 1.

1	a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=$ ______	b) $\frac{5}{9}+\frac{3}{9}=$ ______	c) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=$ ______
2	a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=$ ______	b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ ______	c) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=$ ______
3	a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$ ______	b) $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=$ ______	c) $1\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=$ ______
4	a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$ ______	b) $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=$ ______	c) $2\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=$ ______

Figur 4.16. Diagnos, Addition och subtraktion av tal i bråkform, RB6.

Här följer en beskrivning av de didaktiska idéerna bakom uppgifterna och en reflektion kring möjliga sätt att tänka.

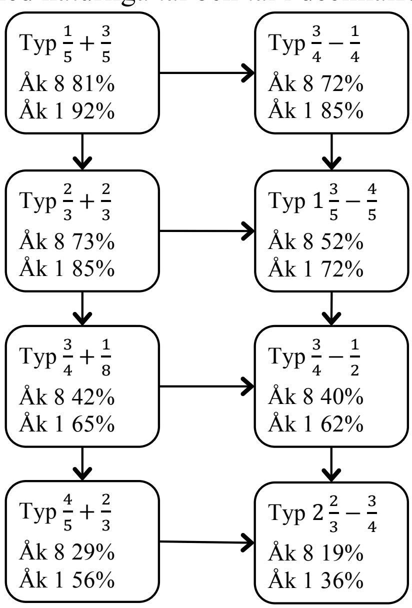
Uppgift 1 testar additioner där termerna har samma nämnare: Lösningsfrekvensen i årskurs 8 på uppgift 1a, och 1b, är 81% respektive 79%. Uppgifter av denna typ handlar om täljarens innebörd. Uppgiften 1c, $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$, har den något lägre lösningsfrekvensen 73%. De tre uppgifterna är av samma typ men i 1c kan svaret även skrivas i blandad form alltså $\frac{4}{3}$ eller $1\frac{1}{3}$. Bråk uttryckt i blandad form är en konvention där en addition uttrycks utan additionstecken: $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}$. Detta skrivsätt av bråk i blandad form får inte blandas samman med algebraiska uttryck av typ $x\cdot\frac{y}{z}=x\frac{y}{z}$. Lösningsfrekvensen indikerar en delkunskap som behöver synliggöras i undervisningen, alltså hur tal kan skrivas när täljaren är större än nämnaren, och innebörden i detta skrivsätt.

I uppgift 2 testas additioner där termerna har olika nämnare. Dessa uppgifter handlar om nämnarens innebörd och att man inte direkt kan addera två tal med olika nämnare utan att man först måste göra bråken liknämniga. Lösningsfrekvensen är markant lägre på dessa tre uppgifter än på uppgifterna med samma nämnare. Uppgiften $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$, där endast första termen behöver förlängas, har lösningsfrekvensen 42%. De två andra uppgifterna 2b och 2c där det är svårare att finna en gemensam nämnare, har lösningsfrekvenserna 34% respektive 29%. Jämfört med lösningsfrekvenserna på uppgift 5 på diagnos RB4, som innebär att skriva ett tal i bråkform med olika nämnare, så var lösningsfrekvensen 50% när nämnarna var 3, 6, 9, 12 etc. men endast 10% när nämnarna var 3, 6, 15, 18. Liknämnighet är en central aspekt som tydligt måste synliggöraras i undervisningen och då hur detta görs generellt.

De två följande uppgifterna 3 och 4 testar subtraktioner. Uppgift 3 är subtraktioner där termerna har samma nämnare. Lösningsfrekvensen på 3a och 3b är 72% respektive 77%, medan lösningsfrekvensen på 3c, där ena termen är skriven i blandad form, $1\frac{3}{5} - \frac{4}{5}$, har lösningfrekvensen 52%. Det enda egentliga svårigheten i uppgiften är att det ena bråktalet uttrycks i blandad form. För den som vet att $1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ blir uppgiften relativt enkel, $\frac{8}{5} - \frac{4}{5}$. Att lösningsfrekvensen sjunker på subtraktionsuppgifter när det finns med ett tal i blandad form är samma tendens som vid addition. Att hantera tal där täljaren är större än nämnaren, eller där talet är skrivet i blandad form, utgör en kritisk aspekt.

Uppgift 4 utgörs av subtraktioner där termerna har olika nämnare. Även vid subtraktion med tal i bråkform måste bråken först göras liknämniga. Uppgift 4a, där endast andra termen behöver förlängas, har en lösningsfrekvens på 40% medan 4b, där omskrivning av båda termerna krävs för att få en gemensam nämnare, har en lösningsfrekvens på 27%. När sedan, som i uppgiften 4c, den ena termen är uttryckt i blandad form, är lösningsfrekvensen endast 19%.

Lösningsfrekvenserna på subtraktionsuppgifter är även på denna diagnos lägre än på motsvarande additionsuppgifter, ett mönster som återkommer på diagnoser med naturliga tal och tal i decimalform.

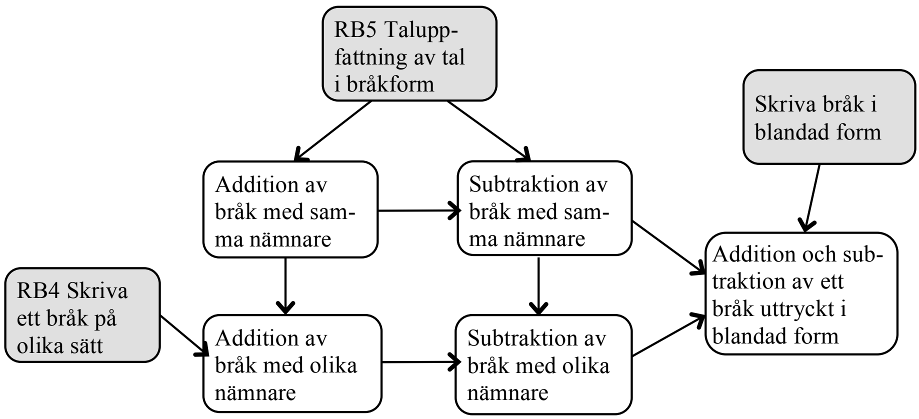


Figur 4.17 Resultatschema, Addition och subtraktion av tal i bråkform, RB6.

Lösningsfrekvenserna (Figur 4.17) stöder empiriskt tanken att komplexiteten ökar ”nedåt” i strukturschemat för de aspekter som uppgifterna testar. Den didaktiska analysen bekräftas således i denna mening av empirin. De moment som behöver belysas i undervisningen framträder tydligt. Analysen av resultatschemat bekräftar de preliminära antagandena att liknämnighet och blandad form är avgörande aspekter vid beräkning av tal i bråkform.

Didaktisk karta

Vid en analys av resultatschemat för diagnos RB6 framkommer olika delkunskaper som krävs för att kunna addera och subtrahera tal i bråkform. Ett strukturschema över begreppen kan se ut som i Figur 4.18



Figur 4.18 Strukturschema/Didaktisk karta, Addition och subtraktion av tal i bråkform.

Av denna didaktiska karta framgår vilka förkunskaper som krävs för att kunna operera med tal i bråkform, i detta fall med addition och subtraktion. De grå rutorna markerar förkunskaper som krävs från närliggande områden. Utöver att kunna skriva bråk på olika sätt, vilket testades i RB4 behöver eleverna lära sig att utföra detta på ett generellt sätt. Den räkneregel som används kan algebraiskt skrivas på följande sätt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b . d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Multiplikation och division av tal i bråkform.

Diagnosen Multiplikation och division av tal i bråkform, RB7, (Figur 4.19), har genomförts i årskurs 8 och vid starten av gymnasieskolans årskurs 1.

1	a) $6 \cdot \frac{1}{2} =$ ______	b) $\frac{1}{4} \cdot 6 =$ ______	c) $4 \cdot 1\frac{1}{5} =$ ______
2	a) $3 \cdot \frac{5}{6} =$ ______	b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} =$ ______	c) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} =$ ______
3	a) $\frac{6}{5} / 3 =$ ______	b) $\frac{1}{3} / 4 =$ ______	c) $1\frac{3}{5} / 4 =$ ______
4	a) $2 / \frac{1}{3} =$ ______	b) $\frac{3}{4} / \frac{1}{4} =$ ______	c) $\frac{2}{5} / \frac{3}{4} =$ ______

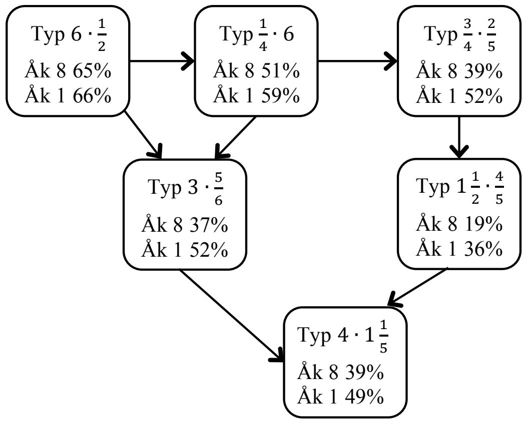
Figur 4.19. Diagnos, Multiplikation och division av tal i bråkform, RB7.

Här följer en beskrivning av de didaktiska idéerna bakom uppgifterna och en reflektion kring möjliga sätt att tänka vid lösandet av dem.

Uppgift 1 testar multiplikationer där den ena faktorn är ett naturligt tal. Uppgift 1a, $6 \cdot \frac{1}{2}$ har lösningsfrekvens 65% i årskurs 8 (Figur 4.20). En intressant jämförelse kan göras med motsvarande uppgifter på RB5, $3 \cdot \frac{1}{5}$ som gavs i årskurs 5 och hade då lösningsfrekvensen 67%. En tolkning av denna jämförelse är att de elever som kunde utföra operationen i årskurs 5 även kan det i årskurs 8. Sannolikt har ingen explicit undervisning ägt rum sedan årskurs 5 och elever lär sig inte detta på egen hand. Uppgift 1b är, via kommutativitet, i princip samma uppgift som 1a, men här sjunker lösningsfrekvensen till 51%. Att lösningsfrekvensen är lägre indikerar att kommutativitet för multiplikation av ett bråk med ett heltal, inte är självklart för dessa elever. Uppgift 2a, $3 \cdot \frac{2}{5}$ är av samma typ som uppgift 1a men bråket är inte längre ett stambråk. Lösningsfrekvensen har sjunkit och är 37%, vilket är en indikation på att när ett begrepp utvecklas så innebär det en svårighet.

I uppgift 1c, $4 \cdot 1\frac{1}{5}$, är ena faktorn uttryckt i blandad form och då är lösningsfrekvensen, 39%. Skrivs uppgiften om som $4 \cdot \frac{6}{5}$ är den lik uppgift 2a. Lösningsfrekvens på dessa båda uppgifter är i stort sett lika vilket kan tolkas som att de elever som löst uppgift 2a sannolikt är samma elever som dem som löst uppgift 1c.

Uppgifterna 2b och 2c testar multiplikation när båda faktorerna är tal i bråkform. Uppgift 2b, har lösningsfrekvensen 39% och uppgiften 2c, har lösningsfrekvensen 19%. Återigen syns att en uppgift med bråk skrivet i blandad form har lägre lösningsfrekvens.



Figur 4.20. Resultatschema, multiplikation av tal i bråkform, RB7.

Resultatschemat (Figur 4.20) verifierar att strukturschemat beskriver en reell förkunskapsstruktur.

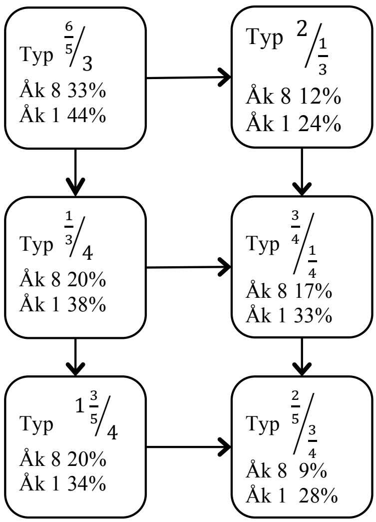
Diagnosen RB7 testade även divisionsuppgifter. Lösningsfrekvenserna för dessa uppgifter (Figur 4.21) är klart lägre än för multiplikationsuppgifterna. Även divisionsuppgifter kräver förstås god grundläggande taluppfattning när det gäller tal i bråkform.

I uppgift 3 testas divisioner där nämnaren är ett naturligt tal. När det gäller dessa tre deluppgifter kan man tänka i termer av likadelning. I uppgiften 3a, $\frac{6}{5}/3$, är täljaren i bråket jämnt delbar med 3, vilket någon med god taluppfattning ”ser”. Lösningsfrekvensen är 33%.

Uppgifterna 3b, och 3c, har båda lösningsfrekvensen 20%. De elever som löst dessa båda uppgifter har använt sig av generell metod $\frac{1}{3}/4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ vilket har konstaterats såväl vid rättning och som vid uppföljande intervjuer.

Uppgift 4, slutligen, testar divisioner där nämnaren är ett tal i bråkform. Uppgiften 4a, $2 / \frac{1}{3}$, har en lösningsfrekvens på 12% i årskurs 8. Uppgiften går egentligen tillbaka till en grundläggande egenskap hos tal i bråkform, nämligen att det går 3 tredjedelar på en hel. Motsvarande uppgift, $1/\frac{1}{3}$, testas i diagnosen RB5, som getts i årskurs 5. Lösningsfrekvensen var där 10% alltså ingen större skillnad på lösningsfrekvensen i årskurs 5 och 8.

För uppgift 4b, $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$, är lösningsfrekvensen något högre, 17%. Av elevlösningar framgår att dessa elever använt formeln och inte ställt sig frågan hur många gånger $\frac{1}{4}$ ryms i $\frac{3}{4}$. Uppgift 4c, $\frac{2}{5}/\frac{3}{4}$, däremot, löses snabbast genom ett formellt tänkande; multiplikation med den inversa nämnaren. Lösningsfrekvensen här är 9%. Denna formella beräkningsmetod krävs bland annat vid fortsatt räkning med tal i bråkform och inom algebra.

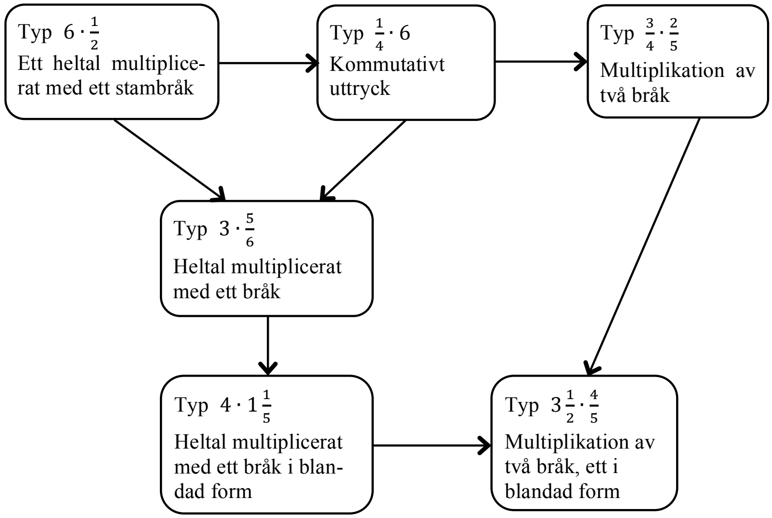


Figur 4.21. Resultatschema, division av tal bråkform, RB7.

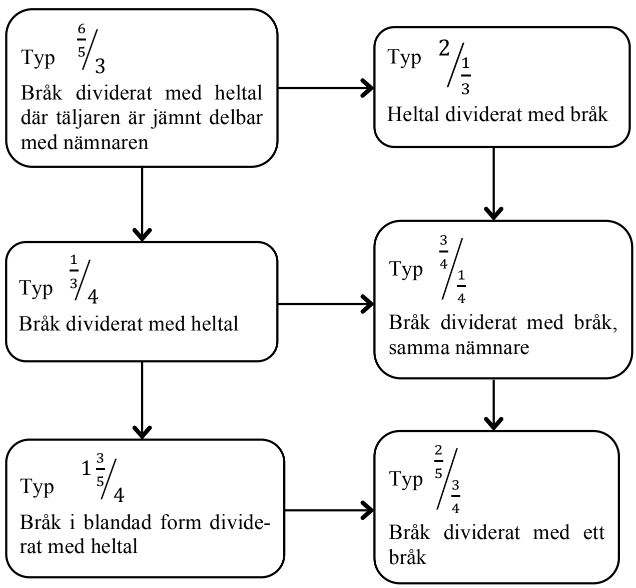
Diagnoserna RB6 och RB7 har även genomförts i årskurs 1 på gymnasieskolan och då ser mönstret för lösningsfrekvenserna likadant ut som i årskurs 8. Betraktas resultaten ur ett elevperspektiv framgår att det inte skett någon större utveckling av deras kunskaper från slutet av åk 8 till början av gymnasiet. De elever som behärskar att operera med tal i bråkform i årskurs 8 kan det vid starten av gymnasiet medan de som inte klarar sådana operationer då, troligen inte får möjlighet att lära sig det under årskurs 9.

Didaktiska kartor

Vid analys av resultatscheman för diagnos RB7 blir olika delkunskaper, som krävs för att kunna multiplicera och dividera tal i bråkform transparanta. Strukturscheman över begreppen kan se ut som i Figur 4.22 och Figur 4.23 nedan.



Figur 4.22. Strukturschema/Didaktisk karta, multiplikation av tal i bråkform.



Figur 4.23. Strukturschema/Didaktisk karta, division av tal i bråkform.

För att kunna multiplicera och dividera tal i bråkform som dessa didaktiska kartor visar krävs samma förkunskaper som för addition och subtraktion

(Figur 4.18). Det behövs succesivt mer förkunskaper för varje ny aspekt av begreppen, i takt med att komplexiteten ökar, något som bör avspegla sig i undervisningen.

För att utföra multiplikationer som $3 \cdot \frac{2}{5}$ kan man utgå från täljarens innebörd, det vill säga att $\frac{2}{5}$ betyder $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ och använda en konkretiserande förklaring. Upprepad addition är en strategi som används i den inledande undervisningen av multiplikation; $3 \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$. Av detta framgår att 3 skall multipliceras med täljaren 2, medan nämnaren 5 talar om att man arbetar med "enheten" $\frac{1}{5}$. Ännu tydligare blir detta om man skriver enheten med bokstäver, alltså som 3 · 2 femtedelar vilket är lika med 6 femtedelar. Sättet att tänka kan ses som en konkretisering av den formella operationen.

Med hjälp av den associativa lagen kan beräkningen $3 \cdot \frac{2}{5}$ synliggöras som $3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = 6 \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$. Detta utgör en förklaring till varför man endast multiplicerar täljaren i $\frac{2}{5}$ med det naturliga talet 3, en förklaring till räkneregeln $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$.

I motsvarande undervisning kan man inledningsvis visa eleverna lämpliga tankeformer för att senare kunna övergå till mer formella beräkningar. Denna övergång är något som behöver lyftas fram och synliggöras för eleverna.

Inom vissa områden av matematiken, exempelvis rörande ekvationer och funktioner som omfattar rationella tal, blir det aktuellt att multiplicera två rationella tal. Uppgiften $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$ tillhör en typ av uppgifter som kräver en formell beräkning. Om det sedan ingår ett tal i blandad form, som i $1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$, så blir operationen mer komplex. Tidigare i undervisningen har det varit möjligt att konkretisera operationer. Multiplikation av två tal i bråkform utgör en övergång till att det verkligen krävs en formel eller en regel. Matematiken har i och med denna typ av beräkning fått en algebraisk karaktär, som bygger på definitioner vilka knappast går att konkretisera. Det gäller att få eleven att förstå att matematiken efter hand blir allt mer formell och allt mer handlar om ett intellektuellt "spel" som utgår från ett antal definitioner och "spelregler".

Allteftersom matematiken under högstadiet och gymnasiet blir mer komplex behöver alltså undervisningen inriktas mot att modifiera elevens uppfattning om ämnet. Ett lämpligt område att börja med kan just vara multiplikation av två tal i bråkform. Den definition man då måste ge är att om talen a, b, c och d alla är naturliga tal och b och d är skilda från 0 så gäller det att

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

En vanlig metafor som används i undervisningen för denna operation är arean av ett rektangelområde. Detta förutsätter emellertid att eleverna behärskar, och har generaliserat, areabegreppet.

Räknesättet division kan definieras som den inversa operationen till multiplikation. Räknesätten hör därmed samman i en förkunskapsstruktur i analogi med addition och subtraktion.

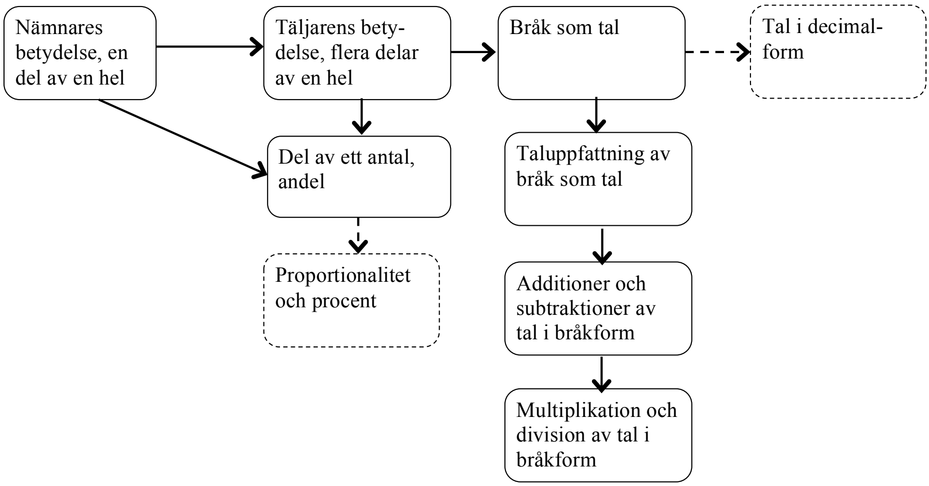
Av strukturschemat i Figur 4.23 framgår olika aspekter av begreppet division med tal i bråkform. Inledningsvis kan uppgifter väljas så att de går att förklara med en typ av konkretisering. Syftet är att eleven sedan ska förstå och använda generella metoder.

I uppgifter av typ $\frac{6}{5}/3$ kan femtedelen betraktas som enhet och divisionen kan konkretiseras på följande sätt: $\frac{6}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = (\frac{1}{5} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{5})$. En uppdelning av termerna i tre grupper ger att varje grupp blir $\frac{2}{5}$. Eleven får på detta sätt en bild att falla tillbaka på vid liknande beräkningar. Vid divisionen räcker det att dividera 6 med 3 och veta att svaret blir 2 av enheten en femtedel.

Det går att tänka på samma sätt även för uppgifter av typ $\frac{1}{3}/4$ men då behöver bråket uttryckas på ett annat sätt: $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Uppgiften blir lätt att lösa, genom att tänka 4 tolftedelar delat med 4. Samma sätt att tänka kan användas på uppgiften $1\frac{3}{5}/4$. Veta man att $1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ syns lösningen direkt. Det behövs således inte någon formel för att lösa dessa uppgifter, men det krävs god taluppfattning. Självklart ska eleverna också behärska en formel för denna typ av beräkningar. Annars klara de inte algebraiska uttryck. Det är emellertid viktigt att ha flexibilitet i tänkandet och därför bör undervisningen hjälpa eleven att se det enkla i matematiken, samtidigt som de ska förstå en formell behandling av uppgiften.

Får eleverna en grundlig förklaring kommer de säker lättare ihåg regeln $\frac{a}{b}/\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. Visas även den tekniska förklaringen att förlänga med samma tal så att nämnaren blir 1, som i $\frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, så blir det tydligt att regeln att multiplicera med det inverterade värdet inte är något trolleri, utan följer tidigare inlärda räkneregler. Detta förutsätter dock att eleven har förstått förlängning av tal i bråkform.

En övergripande didaktisk karta som beskriver en förkunskapsstruktur inom den grundläggande förståelsen av bråkbegreppet och operationer med tal i bråkform kan se ut enligt nedan (Figur 4.24).



Figur 4.24. Bråk, översiktlig didaktisk karta.

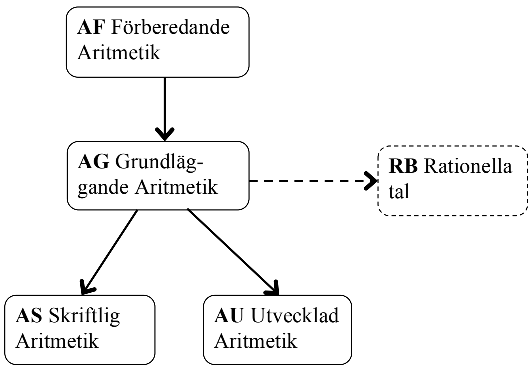
Med hjälp av diagnoser som bygger på en förkunskapsstruktur blir det alltså möjligt att se vad eleven kan eller ännu inte kan. Genom att därefter orientera sig i motsvarande strukturschema kan läraren se var undervisningen kan börja utgående från ”fast mark”, stabila förkunskaper. Såväl översiktliga som detaljerade strukturscheman kan hjälpa läraren att finna en utgångspunkt som även ger idéer om hur undervisningen kan planeras.

4.3 Grundläggande aritmetik

Den grundläggande aritmetiken är ytterligare ett område som har studerats med hjälp av didaktisk ämnesanalys. I detta avsnitt, som föregår beskrivningen av diagnoserna inom aritmetik, ges en mer ingående beskrivning av grunderna för aritmetiken. En anledning till det är att aritmetiken i sin tur utgör en viktig grund för samtliga övriga områden, en annan är att visa hur även ett område, som i alla fall ytligt sett kan te sig elementärt, kan visa sig vara komplext ur ett didaktiskt perspektiv.

Inom aritmetik bygger individen inledningsvis upp en första förståelse av att mängder går att kvantifiera och av antalsbegreppet. Detta kallas i diagnosmaterialet förberedande aritmetik. Med hjälp av denna förförståelse är det möjligt att utföra de mest grundläggande operationerna inom addition och subtraktion.

Kunskaper inom Förberedande Aritmetik, AF, testas muntligt för att kartlägga elevernas förförståelse. Diagnoserna inom Grundläggande Aritmetik, AG, testar de basfakta som eleven ska behärska med flyt. Dessa basfakta utgör sedan grunden för Skriftlig räkning, AS, och Utvidgad Aritmetik, AU, (Figur 4.25) samt för Rationella tal, R. (Figur 4.2)



Figur 4.25. Samband mellan delområden inom Aritmetik.

En förutsättning för att kunna operera med tal, alltså för att kunna räkna, är att behärska talen och dess egenskaper på ett sådant sätt att operationerna kan ske med flyt, ungefär som att man för att kunna läsa med förståelse måste kunna avkoda bokstäverna och bilda ord och meningar med automatik. Detta sker vid läsning så snabbt, att den som kan läsa inte längre är medveten om hur det går till. En duktig räknare opererar med de grundläggande talkombinationerna (basfakta) på motsvarande sätt. Taluppfattning handlar om att ha en sådan känsla för hur talen är uppbyggda att man direkt, utan att reflektera över detta, kan operera med dem.

En central del av denna taluppfattning är att med flyt behärska basfakta, de så kallade tabellerna för addition, subtraktion, multiplikation och division. En god taluppfattning inom grundläggande aritmetik omfattar därmed bland annat följande:

- *En känsla för hur tal är uppbyggda*

Talens ordning och talens grannar är viktiga utgångspunkter. Elever ska till exempel känna till att 6 + 1 = 7 eftersom 7 är talet efter 6 och att 8 – 7 = 1 eftersom talen 7 och 8 är grannar. Ett annat exempel är uppbyggnaden av vårt positionssystem med basen10. Eleverna behöver också behärska 10-tals- och 100-talsövergångarna såsom 8 + 3 = 11 och 11 – 2 = 9, vilket senare generaliseras till 98 + 3 = 101 och 101 – 2 = 99.

- *De grundläggande räknelagarna*

Räknelagar som man ska behärska och kunna tillämpa, är i första hand de kommutativa räknelagarna: $a + b = b + a$ och $a \cdot b = b \cdot a$ och de associativa räknelagarna $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ samt den distributiva lagen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. För yngre elever krävs att de förstår innebörden i dessa räknelagar men utan att känna till namnen.

Det är med hjälp av dessa räknelagar man kan analysera tal och dela upp dem i termer och faktorer. Ett enkelt exempel där den associativa lagen används är när 8 + 7 beräknas genom att talet 7 delas upp i 2 + 5 för att använda att 8 och 2 är tiokamrater, 8 + 2 = 10; 8 + 7 = 8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5 = 10 + 5.

Räknelagarna kan även användas vid huvudräkning. Det är lättare att beräkna 5 + 32 som 32 + 5, med användande av den kommutativa lagen. För den som vill utveckla sin huvudräkningsförmåga är det alltså av central betydelse att behärska denna typ av operationer med flyt.

En grundläggande taluppfattning bygger individen inte upp av sig själv. Niss (1994) betonar lärarens roll i skolans matematikundervisning: ”As the learning of mathematics does not take place spontaneously and automatically, mathematics needs to be taught.” Det krävs en genomtänkt planering av läraren och att eleven ges rika tillfällen att praktisera kunskapen. Kilpatrick m.fl (2001) framhåller på motsvarande sätt att ”What is learned depends on what is taught”. Den grundläggande aritmetiken bör därefter följas upp och fördjupas i undervisningen under hela skoltiden för att på sikt omfatta irrationella och komplexa tal.

Redan före den just beskrivna grundläggande taluppfattningen lär sig det lilla barnet innebörden i antal och talens ordning. För att ange antal brukar man använda sig av räkneord. Vad som menas med begreppet antal beskrevs för svenska lärare i samband med mängdläran under 1960-talet Matematik NU, (Håstad & Svensson, 1969). Man utgick då från den mängdlära som har sitt ursprung i arbeten av Cantor (1883), Frege (1903) och Russel (1903). Mängdläran byggs enligt dem upp med hjälp av element (föremål) som tillhör väl definierade mängder. I en mängd A finns det ett antal element, men för att kunna avgöra hur många de är måste man ha tillgång till en känd referensmängd, C, som till exempel innehåller 4 element. Då säger man att referensmängden har kardinaltalet 4.

För att avgöra kardinaltalet för mängden A, alltså hur många element som tillhör A, kan man använda sig av parbildning (en bijektion). Varje element i mängden A paras ihop med ett element i referensmängden C. Svarar då varje element i A entydigt mot ett element i C (inget element blir över i någon av mängderna) så finns det lika många element i de båda mängderna. Även mängden A innehåller alltså fyra element – den har kardinaltalet 4.

Om man på motsvarande sätt försöker bilda par mellan elementen i en annan mängd B och referensmängden C kan resultatet bli ett annat. Ett av elementen i B blir över. Principen att två mängder har lika många element precis när deras element kan passas ihop på det här sättet (att det finns en bijektion mellan dem), brukar kallas för ett-till-ett-principen eller, i mer formella sammanhang, för Humes princip. Denna princip utgör i själva verket grundstenen i Cantors och Freges definitioner av begreppet antal och av de naturliga talen (som kardinaltal): 0, 1, 2, ...

När ett barn använder fingrar för att visa hur många dockor eller kamrater det har, så använder barnet idén med parbildning, till exempel ett finger för varje kamrat. Samtidigt är det viktigt att uppmärksamma skillnaden mellan att bestämma ett kardinaltal (genom parbildning) och att göra det med hjälp av uppräkning. Att efter parbildning kunna visa upp tre fingrar för att ange 3 syskon eller åldern 3 år är något helt annat än att kunna räkna tre föremål.

Den italienske matematikern och filosofen Giuseppe Peano (1973) använde sig av en annan strategi för att introducera de naturliga talen. Han utgick från ett antal axiom, varav det första var existensen av ett första tal 0. Det andra axiomet var att det till varje tal n finns ett efterföljande tal n*. 0* kallas för 1, 1* för 2, etcetera. Det är på det sättet barn brukar uppfatta tal och räkna föremål. Om ett barn skall räkna antalet föremål i en mängd A, så börjar det med ett av elementen och lägger det för sig. Nu har barnet 1 element. I nästa steg tas ytterligare ett element som läggs till det första. Detta efterföljande element 1* kallas, som sagt, för 2. Barnet fortsätter därefter sin uppräkning genom att lägga till ett nytt element i sänder. Efter element 2 kommer ett efterföljande element 2* som kallas för 3, och därefter ett nytt som kallas för 4. Detta förutsätter att det finns en rad med talnamn som har en bestämd ordning, i det här fallet ett, två, tre, fyra, … då kan man på det här sättet sluta sig till att det finns fyra föremål i mängden A.

Skillnaden mellan de två tillvägagångssätten är tydlig. I det första fallet gäller det att finna en referensmängd med lika många element som A. I det andra fallet gäller det att behärska talraden och att successivt göra en parbildning mellan elementen i A och de ordnade talen i denna talrad. Man bestämmer i det senare fallet antalet element genom att numrera dem med hjälp av talraden. I båda fallen är emellertid parbildning ett centralt begrepp.

Det ovan beskrivna är två kompletterande definitioner av naturliga tal som på olika sätt används som utgångspunkt för vår taluppfattning. I mängdteorin svarar dessa mot definitionen av kardinaltal (antal) och ordinaltal (ordningstal). De amerikanska forskarna Gelman och Gallistel (1978) har studerat hur barn uppfattar antal. De beskriver detta utgående från fem principer som i själva verket bygger på de definitioner som beskrivits ovan. De tre första av Gelmans och Gallistels fem principer är:

1. *Abstraktionsprincipen* som innebär att det är möjligt att bestämma antalet föremål (element) i varje väl avgränsad mängd.

2. *Ett-till-ett- principen* (Humes princip) som innebär att man, genom att ordna föremål parvis, kan avgöra om två mänger innehåller lika många eller olika många föremål.

3. *Principen om godtycklig ordning* som innebär att man får samma resultat oavsett i vilken ordning man räknar föremålen.

Gelman och Gallistel menar att de här tre principerna är genetiskt nedärvda och att de utvecklas i mycket tidig ålder. För att barn skall kunna hantera dem krävs det emellertid en miljö där principerna kan användas. Denna miljö möter barnet i förskolan där en grund läggs för skolans matematikundervisning.

De övriga två principerna är annorlunda. De utvecklas i en social kontext och kräver övning. Dessa principer är:

4. *Principen om talens stabila ordning*. För att kunna ange antalet föremål i en mängd krävs det att man gör en ett-till-ett- tillordning (parbildning) mellan räkneord och föremål. Detta kräver att man lärt sig talens namn och ordningsföljd.

5. *Antalsprincipen* som innebär att det sist nämnda räkneordet (talnamnet) vid en uppräkning (enligt princip 4) anger antalet föremål i den uppräknade mängden.

De här fem principerna, som samtliga har motsvarigheter i Cantors mängdlära, utgör en nödvändig grund för att individen skall kunna bygga upp en taluppfattning och lära sig matematik. Förståelsen av de fem principerna behöver vara färdigutvecklade vid skolstarten för att individen ska förstå och kunna abstrahera den grundläggande matematiken.

Forskare som Gelman och Gallistel har visat att genom att uppmärksamma individens förståelse av de fem principerna kan man redan innan skolstart förebygga kommande problem. Samtidigt är det viktigt att de åtgärder man vidtar, utgår från en diagnostisering av vad som brister, alltså vilka av de fem principerna barnet i fråga ännu inte har tillgodogjort sig. Först därefter är det möjligt att hjälpa barnet att bygga upp den kunskap som saknas. Ett instrument för detta utgörs av Diamantdiagnosen Förberedande Aritmetik, AF. (Skolverket, 2013a).

4.3.1 Förberedande aritmetik

Inom förberedande aritmetik testas de kunskaper som är utgångspunkt för den grundläggande addition och subtraktion som brukar kallas tabellkunskaper eller basfakta. Dessa basfakta kan sedan generaliseras till större talområden.

Diagnosen Förberedande Aritmetik, AF, som testar elevers antalsuppfattning bygger på Gelman och Gallistels fem principer och har genomförts av elever vid slutet av förskoleklassen eller vid starten av årskurs 1 sedan slutet av 90-talet. Diagnosen består av 10 muntliga uppgifter och syftet är att kartlägga vilken förförståelse eleven har inför arbetet med matematik i årskurs 1. De olika uppgifterna beskrivs nedan tillsammans med lösningsfrekvenser för uppgifterna, baserade på intervjuer vid skolstart med cirka 1650 elever. Fredriksson (2009) har i en masteruppsats redovisat följande data för diagnosen AF

De tre först uppgifterna testar om eleverna behärskar principen om talens stabila ordning och om de kan röra sig framåt och bakåt i talraden. Detta utgör nödvändiga förkunskaper för att kunna börja addera och subtrahera.

Uppgift 1. Hur långt kan du räkna?
Här kan man urskilja tre nivåer på elevers kunnande, att kunna räkna till 10, till 30 och till 100. Ett barn som kan räkna till 10 har tagit ett första steg. Den som kan räkna till 30 har i allmänhet förstått hur man kombinerar tiotal och ental. För att räkna till 100 krävs att eleven ser en struktur och kan namnen på tiotalen. En del forskare (Carpenter & Moser, 1984) anser att förmågan att kunna räkna till 100 är ett bra kriterium för att lyckas med matematik. Den som klarar detta har knäckt en avgörande kod, nämligen hur man konstruerar tal av tiotal och ental och hur man bygger upp namnen på tiotalen (över 20) utgående från motsvarande ental. Detta är grundläggande för att sedan generalisera 4 + 3 till 14 + 3, till 24 + 3 eller till 40 + 30. Lösningsfrekvensen visade att 57% av eleverna i förskoleklassen kunde räkna till 100 eller längre, 28% av samtliga elever stannar vid en tiotalsövergång lägre än 100 och 14% stannar på 29 eller lägre.

Uppgift 2. Börja på 5 och fortsätt räkna.
För att addera 5 + 3 brukar barn till en början räkna ”från början” alltså börja på ett och räkna alla. För att utveckla sitt räknande är det nödvändigt att ha additionsstrategier som att ”räkna från första”, alltså att börja med 5 och räkna vidare. Detta förutsätter emellertid att de kan börja räkna var som helst i talraden och räkna framåt. Om en elev i årskurs 1 inte kan detta blir redan additioner som 15 + 3 omständliga. Lösningsfrekvensen var här 97,7%.

Uppgift 3. Börja på 10 och räkna bakåt.
Att räkna bakåt i talraden är en av flera strategier vid subtraktion. Om man skall subtrahera ett litet tal såsom 2 från 8, är en lämplig strategi att räkna bakåt från 8 i två steg. Om man istället skall subtrahera med att ett stort tal, såsom i subtraktionen 9 – 7, är det enklare att komplettera, alltså räkna uppåt från 7 till 9. En förutsättning för att behärska subtraktion med flyt är att kunna räkna bakåt i talraden. Lösningsfrekvens: 94,2%.

Drygt hälften av eleverna, 57%, kan räkna till 100 och troligen har en uppfattning om talens uppbyggnad. Över 90% kan börja på ett godtyckligt tal i talraden och fortsätta talraden eller räkna bakåt i talraden inom ett mindre talområde upp till 10 eller 20. De har förstått principen och sedan gäller det att kunna praktisera den i ett större talområde upp till 100. Detta förutsätter att de behärskar motsvarande talrad.

De två följande uppgifterna testar elevernas antalsuppfattning genom att fokusera olika aspekter av begreppet.

Uppgift 4. Eleven ska lägga upp 14 knappar (föremål) på bordet.
För att kunna räkna ett antal föremål räcker det inte med att behärska talraden. Man måste även kunna koppla varje räkneord till precis ett föremål, alltså använda ett-till-ett-principen. Eleven visar här att hon kan räkna upp, eller ta fram, ett visst antal föremål. Denna kunskap är en förutsättning för att kunna konkretisera räkneoperationerna. Lösningsfrekvens: 92,3%.

Uppgift 5. Läraren lägger upp ett antal knappar. Hur många knappar ligger det på bordet?
Det visade sig svårare att räkna ett antal föremål, ta reda på hur många, än att själv räkna upp föremålen. För att räkna ett givet antal föremål måste eleven hålla reda på vilka föremål som är räknade och vilka som ännu inte är räknade. Det behövs en struktur, till exempel gruppera föremålen i grupper om 10. Lösningsfrekvens här var 85,6%.

Uppgift 6. Principen om godtycklig ordning.
När en elev har räknat föremålen i föregående fråga, ställer man frågan hur många det blir om man räknar föremålen i en annan ordning. En elev som

är säker på antalsbegreppet vet att det inte spelar någon roll i vilken ordning föremålen räknas. Den elev som är osäkert kan acceptera att det vid omräkning blir ett annat antal. Det kan ibland vara svårt att ställa denna fråga på ett korrekt sätt och därför är resultat inte helt rättvisande. Det gäller emellertid att var uppmärksam på hur eleven uppfattar antalsbegreppet. Metodiskt har detta begrepp visat sig lättare att undersöka genom att till exempel fråga: Hur många är ni i klassrummet nu? Om ni går runt och sätter er på en annan plats hur många är ni då? De flesta elever brukar då inse att det fortfarande är lika många. En elev som inte förstår principen om godtycklig ordning förstår inte att 2 + 7 = 7 + 2 eller att 9 = 7 + __ har en entydig lösning. Lösningsfrekvens 61,5%.

Inom matematik är det centralt att kunna abstrahera, alltså att kunna tänka sig olika operationer i huvudet. Detta testas med två uppgifter.

Uppgift 7. Addition med 1.
Eleven skall i det här fallet avgöra hur många apelsiner man har om man från början har 6 stycken och sedan får en till. Detta skall utföras i huvudet utan att man ser apelsinerna, och är ett exempel på konkretisering via erfarenhet. I stort sett alla elever klarade av den här uppgiften. Kan de sedan tala om resultatet efter att ha fått två apelsiner till, så behärskar de redan en stor del av de mest grundläggande additionsfakta. Tanken är att eleven ska kunna generalisera denna kunskap till additioner som 6 + 1 eller 16 + 1. Lösningsfrekvens: 94,7%.

Uppgift 8. Subtraktion med 1.
Eleverna skall här avgöra hur många apelsiner man har om man från början har 6 stycken och sedan ger bort en. Även detta skall utföras i huvudet utan att man ser apelsinerna och är återigen ett exempel på konkretisering via erfarenhet. I stort sett alla elever klarade den här uppgiften. Lösningsfrekvens: 96,3%.

Lösningsfrekvenserna visar att eleverna, vid denna typ av uppgift, redan kan abstrahera i detta fall, något som är centralt i fortsatt matematik. Den moderna västerländska kulturen kräver en hög nivå av abstrakt tänkande och därför är det nödvändigt att tidigt uppmuntra barn till detta abstrakta tänkande. Det är lärarens uppgift att hjälpa barnet vidare i hennes tankeutveckling.

När det gäller att operera med tal, alltså räkna, så finns olika strategier som förenklar tänkandet. Den grundläggande additionen är den första operationen eleverna möter och då krävs att de får lära sig effektiva och generaliserbara additionsstrategier. Nästa uppgift testar om eleven redan har någon strategi för addition.

Uppgift 9. Att ta reda på barnens additionsstrategier.
När man skall addera en uppgift som 3 + 5 (med eller utan föremål) finns det tre grundläggande strategier: att ”räkna alla”, att ”räkna från den första termen” eller att ”räkna från den största termen”. Skillnaden är inte så stor när man håller sig inom talområdet 1-10, men blir desto viktigare när man kommer till uppgifter som 3 + 45. De innebär inte att eleven skall kunna svaret utantill utan snarare att hon inser det smarta i att räkna från den största termen. Nästan alla elever har ju på fråga 2 visat att de har förkunskaper för att göra detta genom att starta mitt i talraden och räkna uppåt.

Lösningsfrekvenserna här var: adderar från början, 46,4%, adderar från första, 8,3%, adderar från största, 19,3%, och automatiserad addition, 23,5%. Över hälften av eleverna har någon additionsstrategi när de börjar skolan. 46,4% av eleverna räknar alla eller från början, vilket inte är en additionsstrategi utan innebär att man omgrupperar två mänger till en ny mängd, som innehåller de båda mängderna och sedan räknar den nya mängden.

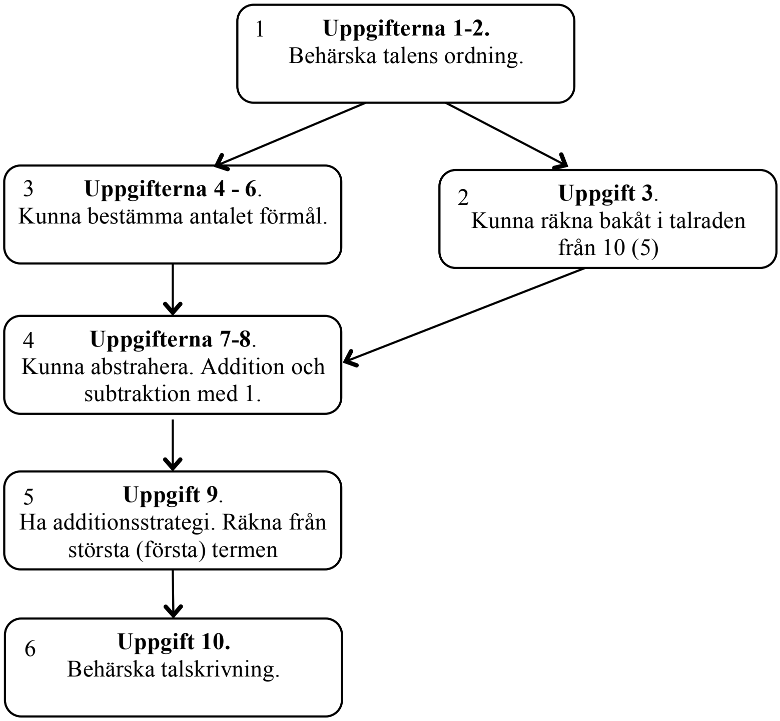
Bo Johansson (2013) visar i sin forskning att talskrivning är en god prediktor när det gäller en individs kommande matematikkunskaper. Detta prövas i diagnosens sista uppgift.

Uppgift 10. Att kunna skriva siffror.
Drygt hälften av eleverna kan skriva talen 5, 12 och 27 med siffror. Dessa elever har inte bara abstraherat kopplingen mellan tal och antal utan också kopplingen mellan tal, antal och ett tecken. Lösningsfrekvens: 65%.

Av lösningsfrekvenserna framgår sammantaget att en stor andel elever behärskar den beskrivna grundläggande kunskapen om antalsbegreppet vid skolstart.

Didaktisk karta

Nedanstående strukturschema (Figur 4.26) beskriver avgörande moment när det gäller att stödja elevens uppbyggnad av sin antalsuppfattning.



Figur 4.26. Strukturschema/Didaktisk karta, Förberedande Aritmetik.

Ruta 1 och 2: När barn lär sig talraden finns en väl dokumenterad utveckling (Gelman & Gallistel, 1978). Upp till 29 kan eleven lära sig en ramsa. Det avgörande är att förstå att talen sedan konstrueras av ett tiotal och ett ental som $45 = 4 \cdot 10 + 5$. Eleven bör kunna namnen på tiotalen. De ska inte bara behärska talraden framåt och bakåt utan de ska även kunna börja var som helst i talraden och räkna.

Ruta 3: Eleven måste få möta olika aspekter av antalsbegreppet för att få en förståelse och möjlighet att behärska det. Samtidigt måste eleven förstå konservering av antal (Piaget, 1960). Eleven ska själv kunna lägga fram ett givet antal föremål och även kunna tala om hur många föremål det finns i en given mängd. När det gäller att bestämma antalet i en given mängd så behöver eleven få lära sig att skapa någon form av struktur, till exempel tiogrupper, för att veta vilka föremål som är räknade och vilka som ännu inte är räknade. Eleven måste också förstå att det inte spelar någon roll var räknandet börjar – principen om godtycklig ordning.

Ruta 4: Ett mål med skolans matematikundervisning är att eleverna skall lära sig abstrahera matematiska idéer och operationer på ett sådant sätt att de kan generaliseras till nya talområden och till att lösa problem av olika slag, i olika situationer. Ett första steg är att tänka enkla operationer som addition och subtraktion med 1 och 2.

Ruta 5: Den inledande additionen innebär att eleven ges möjlighet att lära sig utvecklingsbara strategier (Carpenter & Moser, 1984). På sikt ska basfakta vara så väl befästa, automatiserade, att eleven simultant ser svaret. Vägen dit kan vara att räkna från första och räkna från största. Den senaste varianten är nödvändig för att på ett enkelt sätt lösa 3 + 65, alltså se operationen som 65 + 3 istället.

Ruta 6: Att eleven har tillägnat sig en mental talrad med talen i korrekt ordning krävs för att kunna placera siffrorna i rätt ordning. För att göra detta krävs först att eleven vet hur siffrorna ser ut, i vilken ordning de kommer samt vilket talord och antal de är förenade med (Johansson & Wirth, 2007).

Slutsatsen blir att utgående från tidigare väl känd forskning går det att rita en didaktisk karta som kan bilda stommen i de matematiska aktiviteter som förskolan och förskoleklassen kan arbeta med.

4.3.2 Skolans krav på kunskaper inom grundläggande aritmetik

I kursplanens, Lgr11, centrala innehåll och kunskapskrav för årskurserna 1–3 ingår den grundläggande aritmetiken i *Taluppfattning och tals användning.* De Diamantdiagnoser som testar elevernas kunskaper inom detta område, Grundläggande aritmetik, är AG1, AG2, AG3, AG4. De testar följande centrala innehåll årskurserna 1 - 3:

- Naturliga tal och deras egenskaper samt hur talen kan delas upp och hur de kan användas för att ange antal och ordning.
- Hur positionssystemet kan användas för att beskriva naturliga tal. Symboler för tal. De fyra räknesättens egenskaper och samband samt användning i olika situationer.
- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal, vid huvudräkning och överslagsräkning och vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. Metodernas användning i olika situationer.
- Rimlighetsbedömning vid enkla beräkningar och uppskattningar. (Lgr11)

Elevens arbete med ovan nämnda innehåll ska leda till att hon når kunskapskraven i årskurs 3:

> Eleven har grundläggande kunskaper om naturliga tal och kan visa det genom att beskriva tals inbördes relation samt genom att dela upp tal.
>
> …

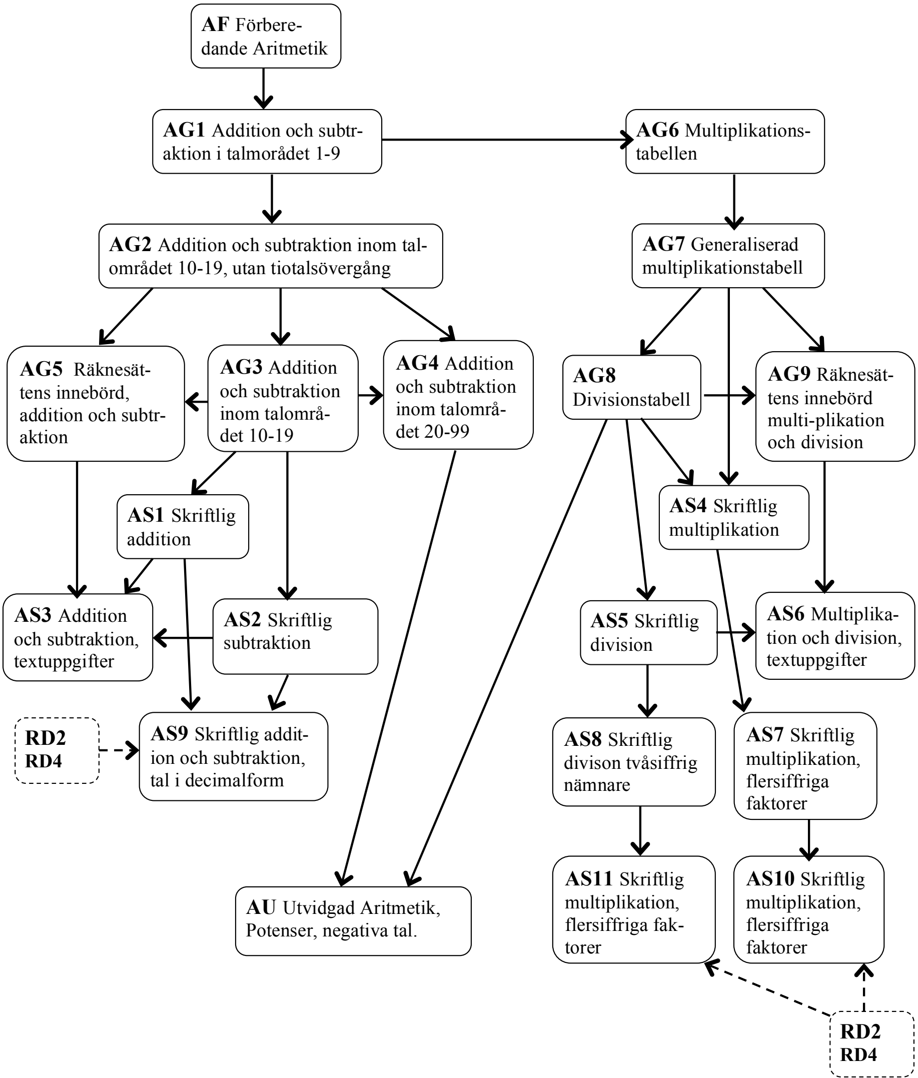
> Eleven kan välja och använda i huvudsak fungerande matematiska metoder med viss anpassning till sammanhanget för att göra enkla beräkningar med naturliga tal och lösa enkla rutinuppgifter med tillfredsställande resultat. Eleven kan använda huvudräkning för att genomföra beräkningar med de fyra räknesätten när talen och svaren ligger inom heltalsområdet 0–20, samt för beräkningar av enkla tal i ett utvidgat talområde. Vid addition och subtraktion kan eleven välja och använda skriftliga räknemetoder med tillfredsställande resultat när talen och svaren ligger inom heltalsområdet 0–200. Eleven kan hantera enkla matematiska likheter och använder då likhetstecknet på ett fungerande sätt. (Lgr11)

Inom det centrala innehållet för årskurserna 4 – 6 utvidgas talområdet till de rationella talen och deras egenskaper. Vidare tas centrala metoder upp för beräkningar med naturliga tal vid huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. Relevanta diagnoser här är Multiplikation AG6, AG7 och Skriftlig räkning AS2, AS4.

En del av syftet med undervisningen i matematik är att eleven ska lära sig att abstrahera, alltså lämna det konkretiserande arbetet och utföra matematiska operationer i huvudet. Det som diagnostiseras med AG-diagnoserna inom Diamant är om eleverna nått detta stadium i sin utveckling i förhållande till de kunskaper som beskrivs i styrdokumenten. Uppgifterna i de nämnda diagnoserna ska alltså lösas som huvudräkning, inte med hjälp av fingrar eller laborativt material. För diagnoserna inom den grundläggande aritmetiken finns därför en tidsbegränsning på 3 eller 4 minuter, vilket är gott om tid för den som behärskar innehållet. Detta är jämförbart med läsning där läshastighet kan utgöra ett bra kriterium på läsförmåga. Den elev som verkligen förstått behöver inte mycket mer än en sekund för att veta att $1 + 6 = 6 + 1 = 7$ eller att $9 - 8 = 1$ eftersom talen är grannar. Eleverna bör behärska de här uppgifterna i huvudet och på rimlig tid för att få flyt i sitt räknande.

4.3.3 Begreppsstruktur inom den grundläggande aritmetiken.

För att kartlägga området grundläggande aritmetik har åtta diagnoser från Diamantmaterialet valts. Dessa diagnoser är inte oberoende av varandra, utan ingår i en begreppsstruktur (Figur 4.27). Detta strukturschema visar hur olika moment är sammanlänkade ur ett didaktiskt perspektiv. Momenten bygger på gemensamma räknelagar, räkneregler och begrepp.



Figur 4.27 Strukturchema för området Aritmetik.

Följande diagnoser ligger till grund för kartläggningen:

Diagnos AG1: Additioner och subtraktioner inom talområdet 1 – 9

Diagnos AG2: Additioner och subtraktioner inom talområdet 10 – 19, utan tiotalsövergång

Diagnos AG3: Additioner och subtraktioner inom talområdet 10 – 19, med tiotalsövergång

Diagnos AG4:	Additioner och subtraktioner inom talområdet 20 – 99, med och utan tiotalsövergång
Diagnos AG6:	Multiplikation av ental upp till 100 (multiplikationstabellen)
Diagnos AG7:	Generaliserad multiplikationstabell
Diagnos AS2:	Skriftlig subtraktion
Diagnos AS4:	Skriftlig multiplikation

Varje diagnos som använts i kartläggningen finns beskriven i kommande avsnitt och vidare beskrivs sambanden mellan diagnoserna, alltså hur ett begrepp som testas i en tidigare diagnos utvecklas och generaliseras och testas i en senare diagnos. Diagnoserna testar till exempel hur 7 – 3 generaliseras till 17 – 3 eller 17 – 13. Diagnosen AG1 testar kombinationer av typen 7 – 3 och i AG2 testas generaliseringen till 17 – 3 och 17 – 13.

4.3.4 Addition och subtraktion inom talområdet 1 – 9

De mest grundläggande kunskaperna i addition och subtraktion, basfakta i talområdet 1 – 9 anses det att eleverna ska behärska i slutet av årskurs 1. Diagnosen AG1 har därför genomförts i slutet av årskurs 1 och i slutet av årskurs 2. Diagnosen omfattar sex uppgiftsgrupper om vardera sex uppgifter. Varje uppgiftsgrupp testar en aspekt av de talfakta som hela diagnosen testar.

Nedan följer en beskrivning av uppgiftsgrupperna och motsvarande lösningsfrekvenser framgår av resultatschemat (Figur 4.28). Samtliga lösningsfrekvenser när det gäller aritmetiken hänför sig till mellan 2000 och 5000 elever per årskurs.

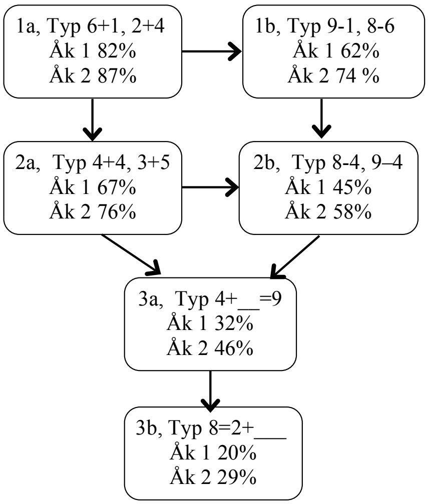
I uppgiftsgrupp 1a testas uppgifter av typ 8 + 1 och 6 + 2 och deras kommutativa varianter 1 + 8 och 2 + 6 alltså talens grannar till höger.

I uppgiftsgrupp 1b testas uppgifter av typ 7 – 1 och 9 – 2 alltså talens grannar till vänster och avståndet till grannarna typ 7 – 6 och 9 – 7 .

I uppgiftsgrupp 2a testas uppgifter av typ 4 + 4, 4 + 5 och 3 + 5 alltså dubblor och dubblor ± 1. I uppgiftsgrupp 2b testas uppgifter av typ 8 – 4 och 9 – 4 alltså hälften och hälften ± 1 samt resten av kombinationerna inom talområdet 1 – 10.

I uppgiftsgrupp 3a testas tals uppdelning i termer av typ 4 + __ = 9 och i uppgiftsgrupp 3b testas tals uppdelning i termer av typ 8 = 3 + __. I dessa båda uppgiftsgrupper testas även likhetstecknets betydelse.

Uppgifterna är konstruerade på ett sådant sätt att man kan avgöra nyanser i elevernas kunskaper. Det är förstås inte så att eleverna antingen behärskar eller inte behärskar uppgifter inom detta talområde. Snarare behärskar vissa elever några uppgiftstyper men inte andra. I resultatschemat nedan kan man se hur många procent av eleverna som har sex rätt på respektive uppgiftsgrupp, alltså behärskar den kunskap som diagnostiseras.



Figur 4.28 Resultatschema, Addition och Subtraktion inom talområdet 1-9, AG1.

Lösningsfrekvenserna (Figur 4.28) sjunker för varje fördjupande aspekt av begreppet. Följs lösningsfrekvenserna från additionerna i uppgiftsgrupp 1a, 1+6 till uppgiftsgrupp 2a, 3+5 framgår det att de sjunker från 82% till 67% i årskurs 1. Jämförs i stället additioner i uppgiftsgrupp 1a och 2a med motsvarande subtraktioner i uppgiftsgrupp 1b och 2b har lösningsfrekvensen sjunkit, från 82% till 62% i addition och från 67% till 45% i subtraktion. Subtraktion uppfattas tydligen av eleverna som mer komplex än addition. Relativt få elever klarar sedan att dela upp tal eller förstå betydelsen av likhetstecknet som testas i uppgiftsgrupperna 3a och 3b.

Detaljanalyser av resultaten på denna diagnos visar att ett stort antal elever inte löst eller hunnit med att lösa uppgiftsgrupperna 3a och 3b. Detta beror troligen på att de använt alldeles för lång tid på de första uppgiftsgrupperna. Därför får man göra en annan tolkning av dessa resultat, till exempel att elever löst de första uppgiftsgrupperna genom att räkna på fingrarna och därför inte hunnit med alla uppgifter. Relationen mellan lösningsfrekvenserna på de olika uppgifterna är samma i årskurs 1 och 2. Lösningsfrekvensen minskar när komplexiteten ökar och nya aspekter av begreppet testas.

Av lösningsfrekvenserna framgår också att subtraktion upplevs som svårare än addition inom samma talområde.

Didaktisk karta för talområdet 1 – 9

En självklar utgångspunkt för att lära sig något nytt är det man redan kan och vet, här kallat förkunskaper. Inom talområdet 1 – 9 finns 36 kombinationer i addition samt 36 kombinationer i subtraktion (fortsättningsvis kallade basfakta). Dessa utgör grunden för det fortsatta räknandet. Det är dessa basfakta som på olika sätt används och generaliseras vid alla beräkningar. Lösningsfrekvenserna på diagnosen, som framgår av resultatschemat (Figur 4.28) ger en bild av vad som behöver synliggöras i undervisningen för att eleven ska förstå de olika aspekterna som krävs för att behärska dessa basfakta. Varje aspekt, bör även omfatta färdighetsträning så att eleven lär sig att behärska innehållet med flyt. En central del vid lärandet är att få syn på sambanden mellan de olika aspekterna.

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6		
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5			
5+1	5+2	5+3	5+4				
6+1	6+2	6+3					
7+1	7+2						
8+1							

Figur 4.29 Additionskombinationer i talområdet 1-9.

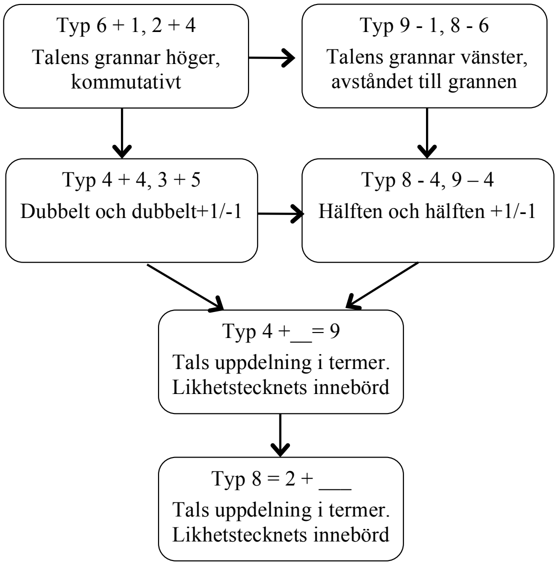
I triangeln ovan (Figur 4.29) framgår att kombinationerna i kolumn 1 och 2 samt rad 1 och 2 svarar mot uppgiftsgruppen 1a. För dessa kombinationer kan eleverna inledningsvis tänka på talen i talraden och dessa grannnar, samt avståndet mellan talen. Övriga kombinationer som testas i uppgiftsgrupp 2a löses genom att tänka på dubblor och dubbelt ± 1. Diagnosen AG1 är avsedd att användas när eleverna har abstraherat dessa begrepp.

9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	9-6	9-7	9-8
8-1	8-2	8-3	8-4	8-5	8-6	9-8	
7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6		
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5			
5-1	5-2	5-3	5-4				
4-1	4-2	4-3					
3-1	3-2						
2-1							

Figur 4.30 Subtraktionskombinationer i talområdet 1-9.

På motsvarande sätt testar uppgiftsgrupperna i 1b och 2b grundläggande subtraktion (Figur 4.30).

En didaktisk karta kan se ut som i Figur 4.31. Den visar en didaktisk struktur som är sammankopplad med de relationer som ligger till grund för undervisningen.



Figur 4.31. Strukturschema/Didaktisk karta, Addition och subtraktion inom talområdet 1-9, AG1.

Uppgifterna i ruta 1a och 1b behandlar addition och subtraktion med 1 och 2. Elever som är säkra på talraden kan, när det gäller dessa uppgifter, tänka +1, talets granne till höger, eller + 2, grannens granne till höger. När fokus flyttas från addition till subtraktion så upplevs dessa beräkningar som mer komplexa.

Det är viktigt att eleverna behärskar dessa basfakta med flyt eftersom de ingår som delkunskaper i beräkningar inom andra talområden. En uppgift som 6 + 3 ingår som en del i uppgifter som 16 + 3, 26 + 13, 60 + 30. Att behärska basfakta kan jämföras med vikten av att kunna avläsa enkla ord som ”mor”, ”tal”, ”plus” och ’katt”. Den som inte kan det saknar flyt i sitt läsande och får problem med att tolka innehållet i en text. Det här innebär således att alla elever bör behärska uppgifterna i talområdet 1 – 9 tidigt.

En analys av de grundläggande räkneoperationerna ger vid handen att olika uppgifter inte är oberoende av varandra, utan att de följer olika mönster såsom att

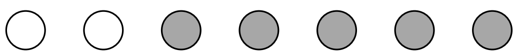
- 6 + 1 är talet efter 6
- 1 + 6 = 6 + 1
- 4 + 3 är ett mer än 3 + 3
- 5 + 3 = 4 + 4 genom att man tar ett från 5 och lägger till 3.

Att förstå addition innebär på den här nivån att behärska dessa mönster och de mönster som kan härledas från dem. Det handlar om de räknelagar och räkneregler som i en mening utgör aritmetikens kärna. Dessa mönster och strukturer ska tidigt synliggöras för eleverna i undervisningen.

Motsvarande gäller för subtraktion där 7 – 1 eller 7 – 2, är talens grannar till vänster, och kan beräknas genom att räkna bakåt i ett eller två steg. Uppgifter som 7 – 6 och 7 – 5 kan även beräknas genom att man lägger till, räknar uppåt, ett eller två steg från det mindre talet.

En central kunskap inom matematiken är likhetstecknets innebörd, alltså att de båda leden i en sann identitetsutsaga har samma värde. En uppgift som 5 + 3 = 8 tolkas ofta som att summan av 5 och 3 blir 8. Detta är en aspekt av likhetstecknets innebörd men begreppet behöver direkt fördjupas, vilket kan göras i samband med kopplingen mellan addition och subtraktion. En uppgift som 4 + __ = 9 knyter addition till utfyllnadsmetoden i subtraktion, medan en uppgift som 8 = 3 + __ handlar om tals uppdelning i termer.

Additions- och subtraktionskombinationerna inom området 1 – 9, som beskrivs i strukturschemat ovan (Figur 4.31) kan lyftas fram i undervisningen ur olika aspekter, vilket kan beskrivas på följande sätt. Väsentligen samma utsaga kan skrivas på olika sätt: 5 + 2 = 7, 2 + 5 = 7, 7 = 5 + 2, 7 = 2 + 5. Endast termernas ordning skiljer. Alla dessa kombinationer kan beskrivas med konkretiserande material (Figur 4.32).



Figur 4.32. Modell för att konkretisera olika sätt att uttrycka additioner och subtraktioner av typ 2 + 5 = 7.

Samma material kan även tolkas som 7 – 2 = 5 eller 7 – 5 = 2 samt som utsagorna 2 + __ = 7, __ + 5 = 7, 7 – __ = 5 och 7 – __ = 2 osv.

Redan i den inledande undervisningen inom talområdet 1 – 9 behöver matematiken, de matematiska strukturerna, i beräkningarna synliggöras. Man ska alltså kunna tolka och beskriva samma uttryck på olika sätt. Gör man det så blir subtraktion lika naturligt som addition.

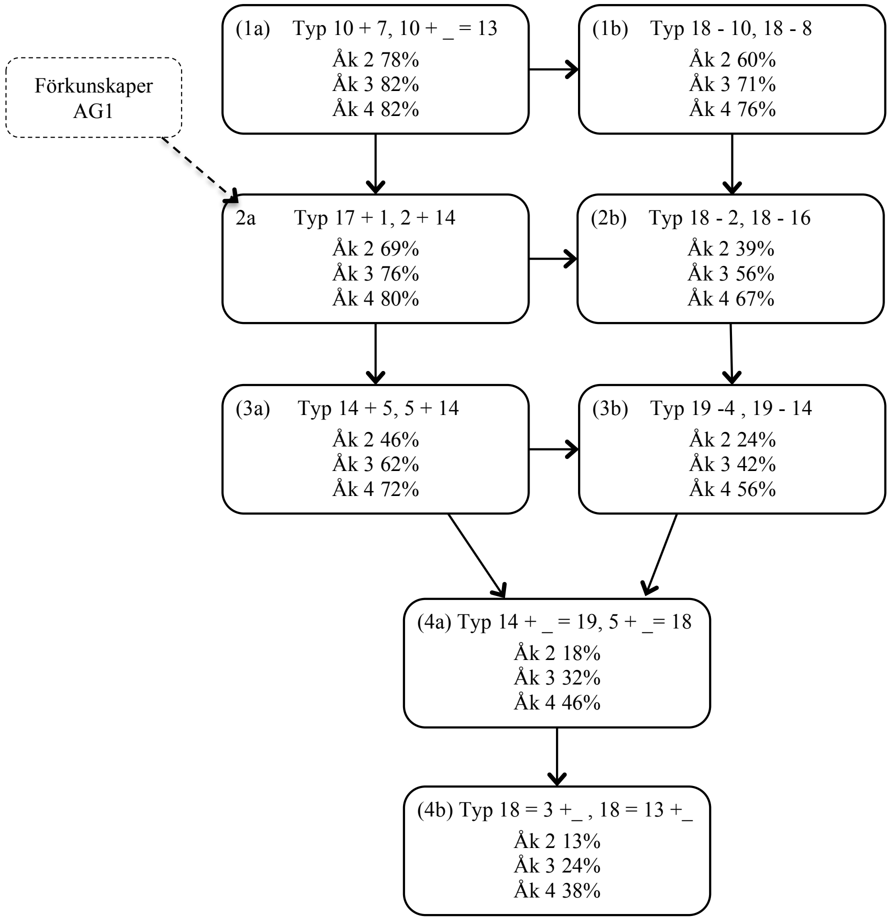
4.3.5 Addition och subtraktion inom talområdet 10-19, utan tiotalsövergång

En generalisering av innehållet som testas med diagnosen AG1 testas med diagnosen AG2. Vidare finns uppgifter som testar om eleven förstå hur talen mellan 10 – 20 är uppbyggda. Diagnosen omfattar åtta uppgiftsgrupper och varje uppgiftsgrupp testar en aspekt av det begrepp som diagnosen testar.

Uppgiftsgrupp1a testar addition av 10 och ett ental, typ 10 + 7 och 7 + 10, samt motsvarande öppna utsagor, alltså hur talen mellan 11 och 19 är uppbyggda. Uppgiftsgrupp 1b testar subtraktion av ett tal mellan 11 och 19 och talet 10 eller ett ental, alltså uppgifter av typen 18 – 10 och 18 – 8, samt motsvarande öppna utsagor. Dessa uppgifter testar hur talen är uppbyggda decimalt. Övriga uppgiftsgrupper testar:

- Uppgiftsgrupp 2a; generalisering av uppgifter typ 5 + 2 (1a i AG1) till 15 + 2
- Uppgiftsgrupp 2b; generalisering av uppgifter typ 8 – 2 (1b i AG1) till 18 – 2
- Uppgiftsgrupp 3a; generalisering av uppgifter typ 4 + 3 (2a i AG1) till 14 + 3
- Uppgiftsgrupp 3b; generalisering av uppgifter typ 9 – 4 (2b i AG1) till 19 – 4
- Uppgiftsgrupp 4a; generalisering av uppgifter typ 4 + _ = 9 (3a i AG1) till 14 + __ = 19
- Uppgiftsgrupp 4b; generalisering av uppgifter typ 8 = 3 + __ (3b i AG1) till 18 = 3 + __

Bortsett från uppgiftsgrupperna 1a och 1b är de övriga uppgiftsgrupperna i stort sett likadana som motsvarande uppgiftsgrupper på AG1, fast nu har ett tiotal lagts till. Resultatschemat i Figur 4.33 visar lösningsfrekvensen för sex rätt på respektive uppgiftsgrupp, alltså andelen elever som behärskar den aspekt av begreppet som diagnostiseras. Diagnos AG2 har genomförts i årskurserna 2, 3 och 4 och relationen mellan lösningsfrekvenserna på de olika uppgiftsgrupperna är samma i de olika årskurserna.



Figur 4.33 Resultatschema, Addition och subtraktion talområdet 1-19, utan tiotalsövergång, AG2.

Analys av lösningsfrekvenserna på AG1 i årskurs 2 avslöjar hur väl eleverna behärskar de grundläggande räkneoperationerna i talområdet 1 – 9. För att dessa additionsfakta skall kunna kombineras med ett tiotal, krävs det att de kan hanteras med flyt. Redan resultaten på uppgiftsgrupp 2a på AG2 och framför allt uppgiftsgrupp 2b visar att alltför få elever har ett sådant flyt.

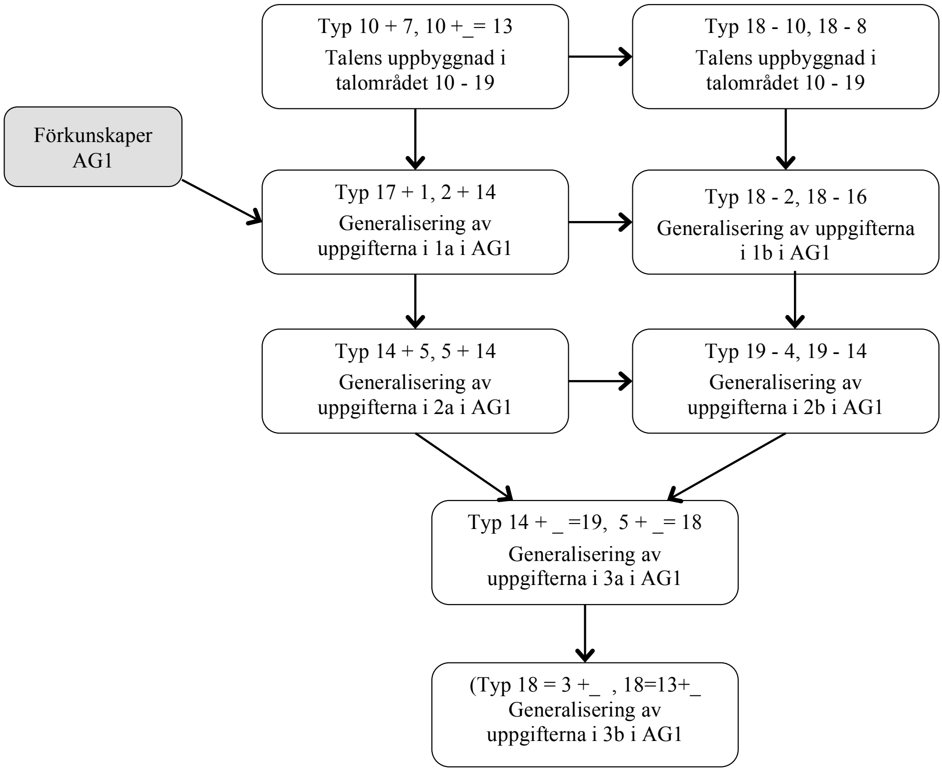
Lösningsfrekvensen minskar när komplexiteten ökar. I uppgiftsgrupp 2b, generaliseras subtraktioner från 8 – 2 till 18 – 2 eller 18 – 12, alltså subtraktioner med 1 och 2 eller differenserna 1 och 2. Här sjunker lösningsfrekvensen avsevärt jämfört med additionerna i 2a. Även på denna diagnos visar lösningsfrekvenserna att subtraktion upplevs svårare än motsvarande addition inom samma talområde. Detta är ett mönster som återkommer även under de följande läsåren.

Även på denna diagnos visar bakgrundsstudier att ett stort antal elever inte löst eller hunnit med uppgiftsgrupperna 4a och 4b inom den avsatta tiden. Detta beror troligen på att dessa elever använt för lång tid på de först uppgiftsgrupperna, troligen för att de saknar det flyt som krävs. Därför får man göra en annan tolkning av dessa resultatt, till exempel att eleverna löst de första uppgiftsgrupperna genom mindre effektiva strategier eller att de räknat på fingrarna och därför inte hunnit med alla uppgifter.

Didaktisk karta

Att tolka tiotalets innebörd är en central kunskap när talområdet utvidgas och går från uppgifterna i AG1 ttill uppgifterna i AG 2. Vid en addition som 14 + 5 eller en subtraktion som 19 – 5 kan man först bortse från tiotalet och utför entalsoperationen. För en elev som behärskar entalsoperationer, blir uppgifterna på AG2 relativt enkla.

Strukturschemat för talområdet 10 – 19 (Figur 4.34) är uppbyggt på samma sätt som för talområdet 1 – 9. Det som tillkommer är uppgiftsgrupperna i 1a och 1b, vilka innehåller uppgifter som testar talens uppbyggnad från tiotal och ental.



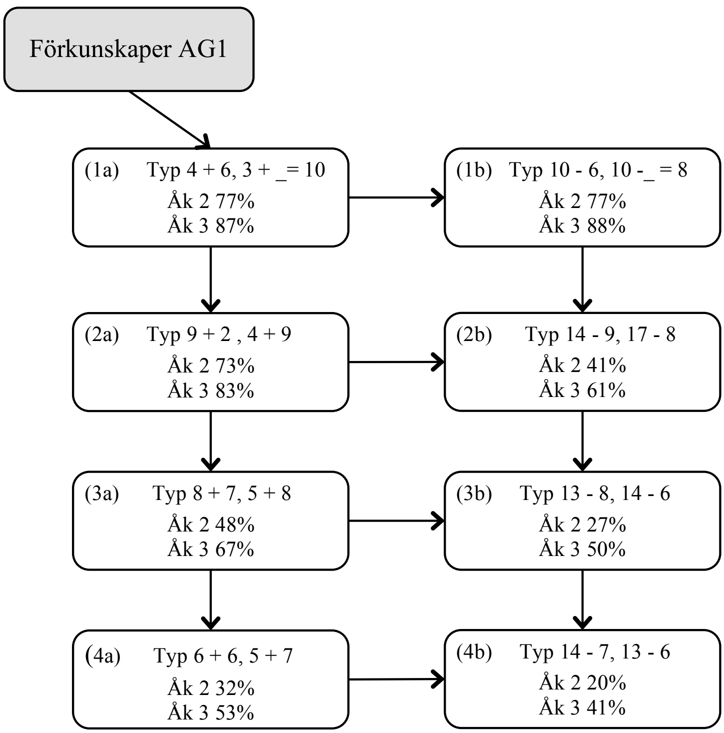
Figur 4.34 Strukturschema/Didaktisk karta, Addition och subtraktion utan tiotalsövergångar.

Som nämnts tidigare visar dessa strukturscheman inte på en strikt undervisningsstruktur, utan de ska ses som en didaktisk karta som beskriver olika aspekter av begreppet som behöver förklaras. I det här fallet är det olika aspekter av samma typ av beräkningar.

4.3.6 Addition och subtraktion inom talområdet 10-19 med tiotalsövergång

Hittills har det handlat om uppgifter som inte inneburit övergång till ett nytt tiotal. Med diagnos AG3 fördjupas beräkningarna och omfattar additioner och subtraktioner som rör sig mellan två tiotalsområden. Även dessa uppgifter utgör centrala förkunskaper inom aritmetiken, såväl vid huvudräkning som vid additionsuppställningar med minnessiffra och vid subtraktionsuppställningar. På grund av sin centrala betydelse har även denna diagnos genomförts i olika årskurser, årskurs 2 och 3 (Figur 4.35). De olika uppgiftsgrupperna testar följande:

- Uppgiftsgrupp 1a; uppgifter vars summa är 10, tiokamraterna vid addition
- Uppgiftsgrupp 1b; subtraktion från 10, tiokamraterna vid subtraktion
- Uppgiftsgrupp 2a; addition med 9, typ 9 + 3 och 4 + 9.
- Uppgiftsgrupp 2b; subtraktion med 9 och då differensen blir 9, typ 14 – 9 och 15 – 6.
- Uppgiftsgrupp 3a; additioner med 8 typ 8 + 5 och 6 + 8.
- Uppgiftsgrupp 3b; subtraktion med 8 och då differensen blir 8, typ 13 – 8 och 15 – 7.
- Uppgiftsgrupp 4a; dubblorna 6 + 6, 7 + 7 och 8 + 8 samt dubbelt ± 1 såsom 6 + 7 och 5 + 7.
- Uppgiftsgrupp 4b; hälften och hälften ±1 alltså typerna 14 – 7, 13 – 7, 13 – 6.



Figur 4.35. Resultatschema, Addition och subtraktion inom talområdet 10-19, AG3.

Diagnosens uppgiftsgrupper bygger på en didaktisk struktur för lärande av tiotalsövergångar. Vid addition och subtraktion med 9 och 8 kan man låtsas 10 och därefter korrigera med 1 respektive 2. I uppgiftsgrupperna 4a och 4b testas uppgifter där det går att använda strategier som utgår från dubbelt och hälften. Genom att strukturera diagnosen på detta sätt kan man få en uppfattning om var eleverna stöter på problem, vilket är till hjälp vid planering av undervisningen. Även här styrker empirin de antaganden som ligger till grund för konstruktionen. För varje ny aspekt sjunker lösningsfrekvensen och även här har subtraktion lägre lösningsfrekvenser än motsvarande addition.

Lösningsfrekvensen 77% på uppgiftsgrupperna 1a och 1b tyder på att ungefär tre fjärdedelar av eleverna i årskurs 2 har förståelse av 10-kamraterna. Uppgiftsgruppen 2a, alltså addition med talet 9 som innebär en tiotalsövergång, klarar samma andel av eleverna i årskurs 2. På uppgiftsgrupperna 2b, 3a, 3b, 4a och 4b är lösningsfrekvensen betydligt lägre, såväl när det gäller addition som subtraktion. Detta indikerar att många elever upplever en svårighet när det gäller att förstå operationerna vid tiotalsövergång.

Addition och subtraktion av den typ som testas i AG3 är centralt och används vid problemlösning och andra tillämpningar. I de flesta matematikproblem ingår beräkningar, vilka i sin tur kräver att de utförs i huvudet utan extra tankekraft. Denna färdighet bygger på att eleven förmår se strukturer i uppgifterna, strukturer som i sin tur kan läggas till grund för att få flyt i räknandet. För att få en bild av i vilken mån eleverna har flyt i sitt räknande har det varit nödvändigt att studera hur många elever i respektive årskurs som inte gjort eller hunnit med alla uppgifter inom uppgiftsgrupperna 3b, 4a och 4b (Tabell 1).

Tabell 1

Elever som inte gjort uppgifter i uppgiftsgrupperna, 3b, 4a och 4b på diagnos AG3 i procent.

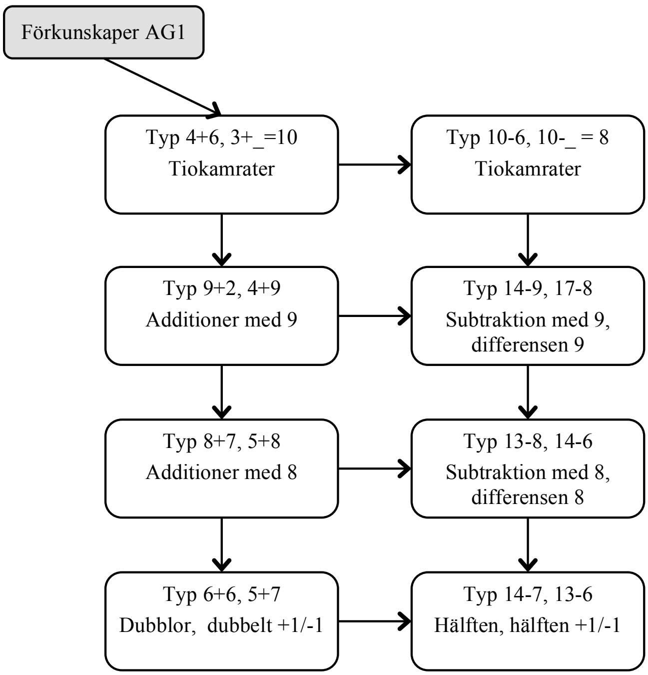
	Årskurs 2, 3314 elever			Årskurs 3, 5346 elever		
	3b	4a	4b	3b	4a	4b
Ej löst	40	46	57	24	30	40

Tolkningen av dessa resultat är att de elever som inte gjort alla uppgiftsgrupper har använt för lång tid på de andra uppgiftsgrupperna. Detta innebär att lösningsfrekvenserna för de andra uppgiftsgrupperna omfattar elever med mindre bra beräkningsstrategier. Resultatet i en del klasser och på en del skolor visar att det är fullt möjligt för elever att behärska de här tiotalsövergångarna på rimlig tid i slutet av årskurs 3.

Didaktisk karta

Vid lärande av basfakta inom talområdet 10 – 19 används ofta associativa lagen och uppdelning av tal. Exempelvis används detta vid beräkning av 8+7 det som kallas tiotalsövergång. Det innebär att man utgår från 8 och söker tiokamraten, 8 + 2 = 10. Tvåan får man genom att 7 delas i 2 + 5. Nu kan uttrycket beräknas enligt 8 + 7 = 8 + (2 + 5) = (8+2) + 5 = 10 + 5 = 15 och associativa lagen används.

För att utföra denna typ av addition och subtraktion inom talområdet 10 - 19 med tiotalsövergång behöver eleven behärska tiokamraterna och basfakta i talområdet 1 – 10. Förutom basfakta som testas i AG1,1a, 1b, 2a och 2b krävs att eleven behärskar uppdelning av tal, vilket testas i AG1, 3a och 3b. Ett annat sätt att förstå tiotalsövergångar kan vara att man vid addition och subtraktion med 9 och 8 tänker 10 istället och därefter lägger till eller drar ifrån 1 respektive 2. Att använda strategierna där dubbelt och hälften tas som hjälp går också bra.



Figur 4.36. Strukturschema/Didaktisk karta, Addition och subtraktion, talområdet 10-19.

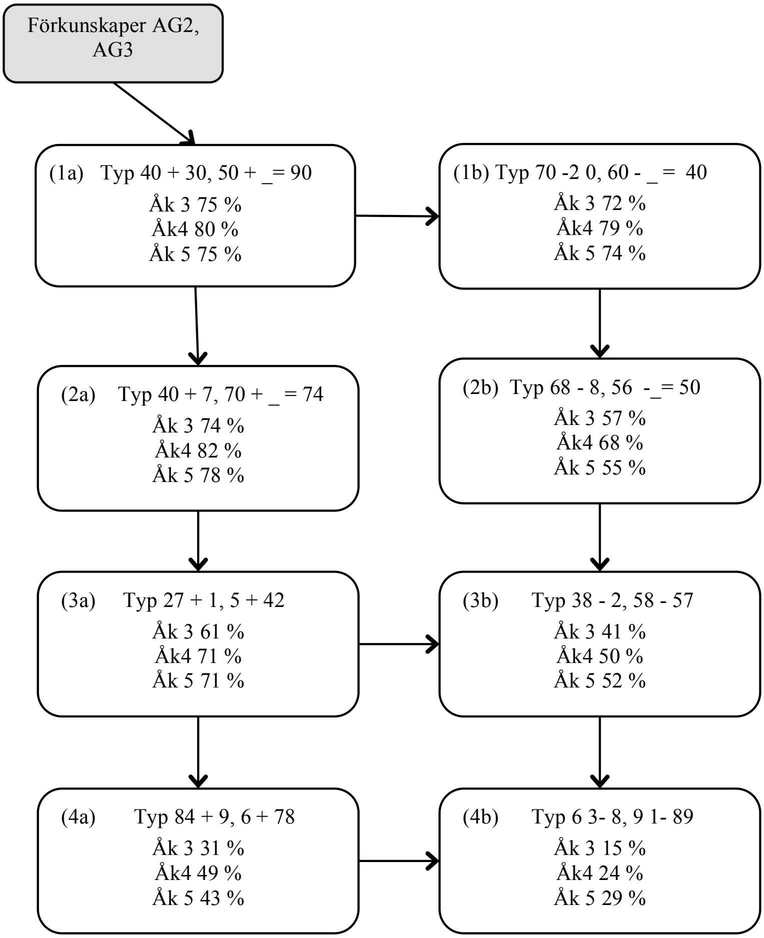
Strukturschemat i Figur 4.36 utgör en didaktisk karta som visar olika strategier att förklara tiotalsövergångar. Grundläggande i tänkandet är begreppet tiokamrater, tals uppdelning och associativa lagen. Den didaktiska kartan synliggör aspekter som ska lyftas fram i undervisningen.

4.3.7 Addition och subtraktion inom talområdet 20 – 99

En fortsatt generalisering är att tidigare vunna kunskaper fördjupas inom talområdet upp till 100. Diagnosen AG4 testar sådana beräkningar och har genomförts i årskurserna 3 och 4 med tiden begränsad till 4 minuter. Uppgiftsgrupperna är av följande typer:

- Uppgiftsgrupp 1a och 1b; generalisering av uppgifterna i diagnos AG1 men nu med tiotal, såsom 40 + 30, 70 – 20 och 60 + __ = 80
- Uppgiftsgrupp 2a; addition av tiotal och ental, typ 40 + 7 och 70 + __ = 74
- Uppgiftsgrupp 2b; subtraktion med ett ental så att svaret blir ett tiotal, typ 68 – 8 och 84 – __ = 80
- Uppgiftsgrupp 3a; generalisering av additionsuppgifterna i AG2, utan tiotalsövergångar, till ett större talområde, typ 27 + 1 och 72 + 6
- Uppgiftsgrupp 3b; generalisering av subtraktionsuppgifterna i AG 2, utan tiotalsövergångar, till ett större talområde, typ 38 – 2 och 58 – 57
- Uppgiftsgrupp 4a; generalisering av additionsuppgifterna i AG3, med tiotalsövergångar, till ett större talområde, typ 84 + 9
- Uppgiftsgrupp 4b; generalisering av subtraktionsuppgifterna i AG3, med tiotalsövergångar, till ett större talområde, typ 63 – 8 och 91 - 89

I resultatschemat i Figur 4.37 syns lösningsfrekvenserna för respektive uppgiftsgrupp i tre olika årskurser. Denna diagnos testar så centrala kunskaper att den ger ett tydligt besked om elevernas taluppfattning och flyt i räknandet.



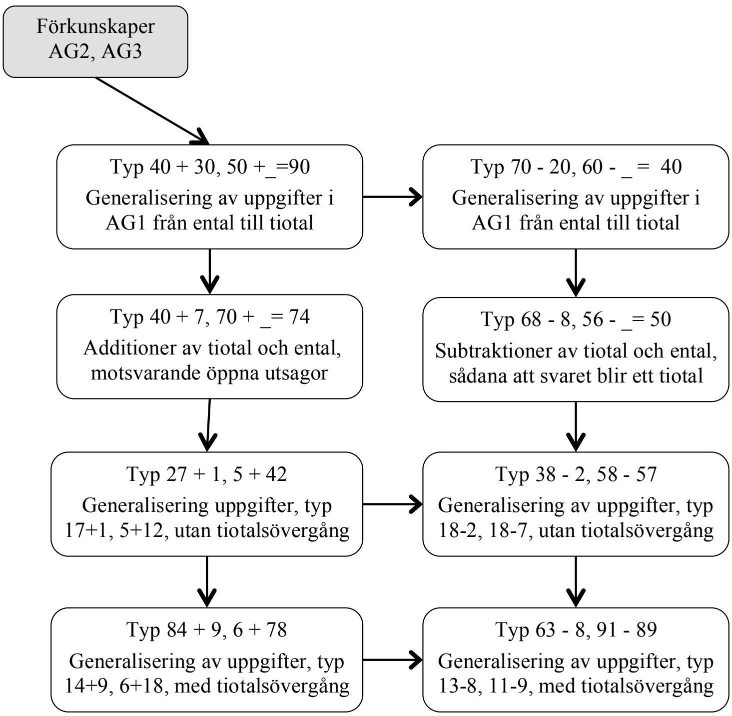
Figur 4.37. Resultatschema, Addition och subtraktion inom talområdet 20-99, AG4.

Uppgiftsgrupperna 1a, 1b, 2a och 2b, testar relationen mellan tiotal och ental, en generalisering av uppgiftsgrupperna 1a och 1b på diagnoserna AG2 och AG3. Vid jämförelse av lösningsfrekvenserna på motsvaraande uppgifter på AG2 framgår att det är mer komplext att arbeta med flera tiotal. Man kan dra slutsatsen att en del elever inte har utvecklat taluppfattningen till att fungera när de passerar talet 20, vilket påverkar resultatet på den andra halvan av diagnosen.

Uppgiftsgrupperna 3a och 3b, på AG4 är i stort sett desamma som uppgiftsgrupperna 2a och 2b på AG2. Lösningsfrekvensen på AG4 är betydligt lägre, vilket pekar på ökad komplexitet när beräkningarna innehåller flera tiotal snarare än ett. Kliniska intervjuer visar att eleverna inte ser kopplingen mellan att operera med ett tiotal och med flera tiotal. Återigen är det här förståelsen att generalisera som brister.

Didaktisk karta

Resultaten på AG4 är ytterligare ett exempel på hur man genom att analysera data kan beskriva en didaktisk komplexitet. Valet av uppgifter i diagnoserna pekar mot aspekter som behöver synliggöras i undervisningen. Även här syns stora skillnaderna i lösningsfrekvens mellan addition och subtraktion. Detta tyder, vilket redan tidigare framkommit, på att elever saknar de mest basala kunskaperna inom subtraktion. Att eleverna uppfattar subtraktion som mer komplext än addition tyder på att sambandet inte synliggjorts tillräckligt tydlig i undervisningen (Kilpatrick m fl 2001).



Figur 4.38. Strukturschema/Didaktisk karta, Adddition och subtraktion av tal 20-99.

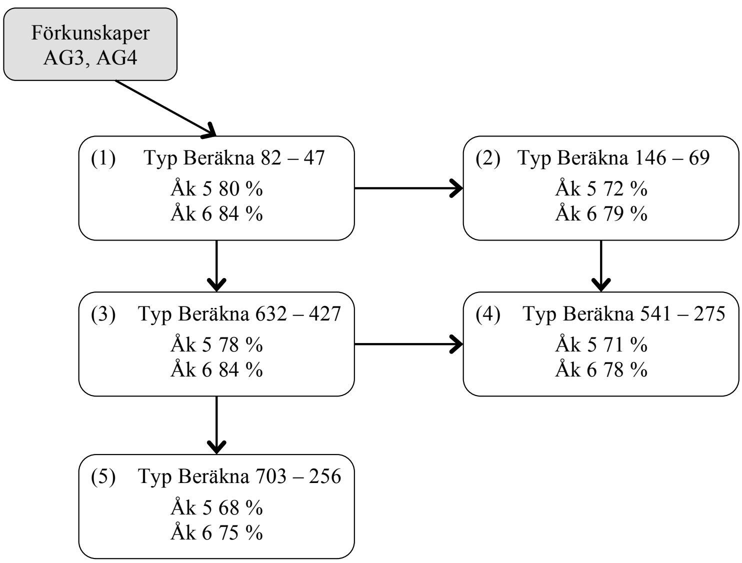
En didaktisk karta, som byggts med hjälp av strukturschemat ovan, visar en förkunskapsstruktur (Figur 4.38). Förståelse av hur talen i talområdet 20 – 99 är uppbyggda föregår beräkningar där dessa tal ingår.

I senare årskurser blir det tydligt hur viktiga de allra mest grundläggande matematikkunskaperna är. En naturlig tolkning av empirin pekar mot att de basfakta som eleven bör ha med sig från årskurs 1 – 3 har stor betydelse för beräkningar inom ett utvidgat talområde. När eleverna saknar flyt i att hantera grundläggande operationer, med omständliga och tidsödande strategier, så är det svårt att samtidigt generalisera begreppen ifråga till större talområden.

4.3.8 Skriftlig subtraktion

De flesta av diagnoserna inom området AG omfattar grundläggande kunskaper i de fyra räknesätten. Dessa utgör i sin tur nödvändiga förkunskaper för såväl huvudräkning som skriftlig räkning. Sådana förkunskaper behöver eleverna, som tidigare nämnts, behärska med flyt. Därför testas de på tid. Vid skriftlig räkning tillämpas de ovan nämnda förkunskaperna i ett vidare sammanhang. Kravet på tidsbegränsning när skriftlig subtraktion testas är därför inte lika viktigt. Gränser är satta av praktiska skäl. Trots generöst tilltagen tid är det en del elever som inte hinner med alla uppgifter. En tolkning av detta är att dessa elever antingen har mindre bra förkunskaper eller att de inte behärskar någon effektiv metod för skriftlig räkning. Detta har även verifierats vid kliniska intervjuer med elever.

Diagnos AS2 innehåller fem uppgifter som testar subtraktion med två eller tresiffriga tal, med skriftlig metod, inom talområdet 0 - 999. Alla uppgifter innehåller en eller två tiotalsövergångar. Den här diagnosen har genomförts i årskurs 5 och 6. Intervjuade lärare bedömer att eleverna ska behärska skriftliga metoder i subtraktion i slutat av årskurs 5.



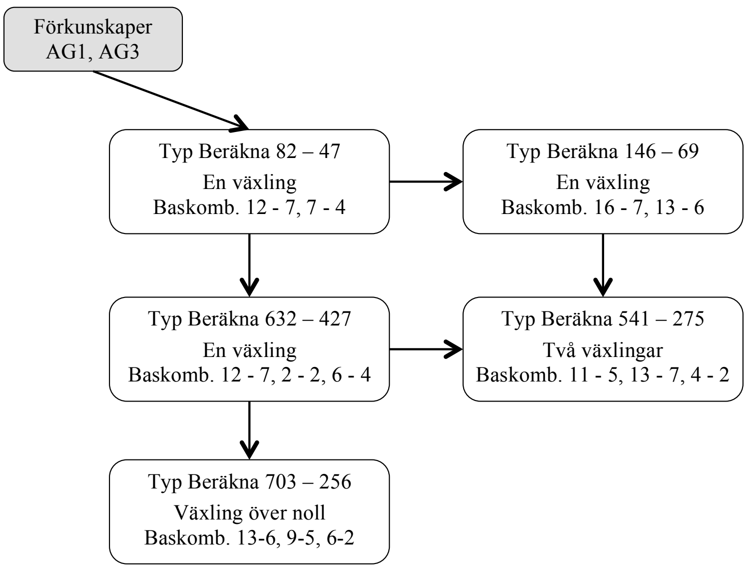
Figur 4.39. Resultarschema, Skriftlig subtraktion, AS2.

Av lösningsfrekvenserna (Figur 4.39) framgår att de elever som förstått hur uppställningen fungerar klarar såväl en som två växlingar och växling över noll. Det är dock något färre elever som klarar två växlingar och växling över noll. Detta indikerar en komplexitetsökning, vilken är känd av erfarna lärare.

För de elever som lycktas mindre bra med skriftliga subtraktion på AS2 kan problemen härledas till att de inte behärskar subtraktion enligt AG3 och AG4, alltså nödvändiga basfakta och dess generaliseringar. Detta har konstaterats vid jämförelse av resultat på olika diagnoser för samma elever, men även efter kliniska intervjuer.

Didaktisk karta

Subtraktion med skriftlig metod kan utföras på olika sätt. Det är emellertid viktigt att den skriftliga metod eleven använder är generell och inte endast duger för att lösa vissa typer av uppgifter. De generella metoderna tillåter att man subtrahera hur stora tal som helst med entalsberäkningar (Figur 4.40).



Figur 4.40 Strukturschema/Didaktisk karta. Skriftlig subtraktion.

Skriftlig subtraktion handlar om mer än att bara utföra beräkningar mekaniskt. Arbetet med algoritmerna i klassrummet gör det möjligt att diskutera räknelagar och räkneregler samt visa på hur de kan användas på ett effektivt sätt. För eleven handlar det om förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp och förmågan att välja lämpliga matematiska modeller och uttrycksformer.

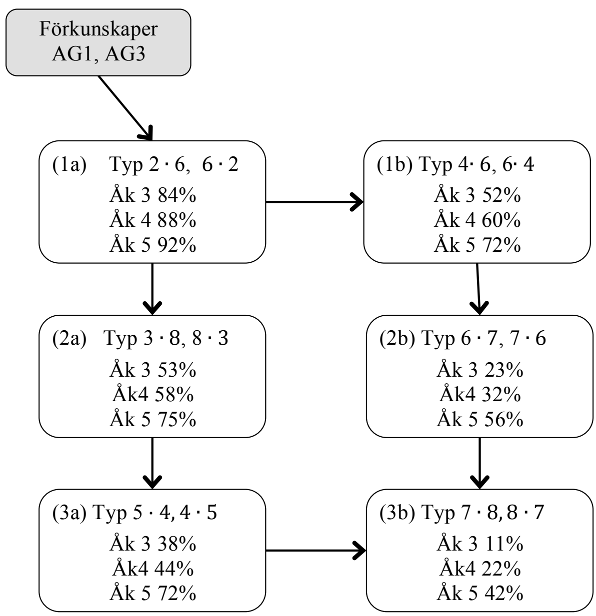
4.3.9 Multiplikationsfakta

I den inledande undervisningen av multiplikation utgår man från upprepad addition. Detta medför att eleverna behöver kunskaper från AG1, uppgiftsgrupperna 2 och 3. Diagnosen AG6, som testar multiplikationsfakta är uppbyggda på följande sätt:

- Uppgiftsgrupp 1a; multiplikation med 2
- Uppgiftsgrupp 1b; multiplikation med 4
- Uppgiftsgrupp 2a; multiplikation med 3
- Uppgiftsgrupp 2b; multiplikation med 6
- Uppgiftsgrupp 3a; multiplikation med 5
- Uppgiftsgrupp 3b; övriga multiplikationer, som enbart innehåller faktorerna 7, 8 och 9.

Denna gruppering av uppgifterna är vald för att relativt lätt kunna avgöra hur eleverna uppfattar svårighetsgraden på olika typer av uppgifter. Diagnos AG6 har genomförts i årskurserna 3, 4 och 5 och tiden har begränsats till 3 minuter. Detta innebär 5 sekunder per uppgift, vilket är en lång tid för den som behärskar dessa multiplikationsfakta.

Följande resultatschema (Figur 4.41) visar lösningsfrekvenser för elever som har rätt på respektive uppgiftsgrupp.



Figur 4.41. Resultatschema, multiplikationsfakta, AG6.

Tendensen är här densamma i de tre årskurserna. Lösningsfrekvensen för uppgiftsgrupperna 2b och 3b är klart lägre än för övriga uppgiftsgrupper. Emperin bekräftar den didaktiska analysen – att multiplikation med 6, och multiplikationer där minsta faktorn är 7, 8 eller 9 uppfattas som mer komplexa. Slutsatsen är inte ny, utan rimmar med erfarenheten hos erfarna lärare.

Didaktisk karta

Inlärning av basfakta i multiplikation bör ske systematisk utgående från räknelagarna och resultatschemat ovan ger underlag för ett sätt att strukturera lärandet. I kvadraten i Figur 4.42 finns samtliga multiplikationskombinationer. På grund av kommutativitet, räcker det att betrakta triangeln till vänster i figuren.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	28	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Figur 4.42 Multiplikationens kombinationer.

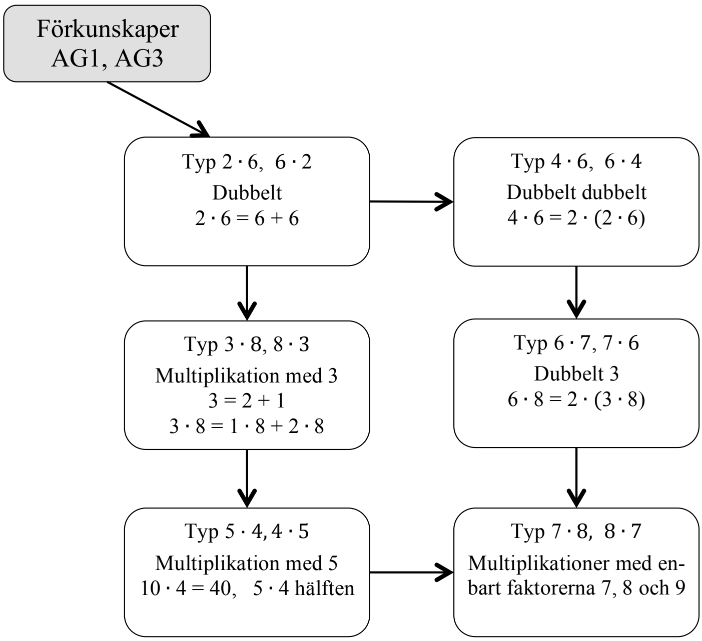
Ett strukturerat lärande utgår från den andra kolumnen. Redan tidigt talar elever om dubbelt och detta sätt att tänka kan utnyttjas. Multiplikationskombinationen $2 \cdot 6$ uttrycks då som $6 + 6$. En liknande strategi kan användas vid multiplikaton med fyra. Nu utnyttjar man basfaktan två gånger talet och tänker dubbelt, dubbelt, $4 \cdot 6= 2\cdot (2 \cdot 6)$, enligt de sex kombinationerna i den fjärde kolumnen. Här är det den asssociativa lagen som används.

Vid multiplikation med 3 utnyttjas multiplikation med två tillsammans med en till, alltså blir $3 \cdot 8 = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 8$. Detta utnyttjas på de sju kombinationerna i den tredje kolumnen. Här används den distributiva lagen.

För att fortsätta från redan lärda basfakta, kan man ta sex gånger som dubbelt 3, $6 \cdot 8 = 2 \cdot (3 \cdot 8)$ i de fyra kombinationerna i den sjätte kolumnen.

Multiplikation med tio innebär att man får samma antal tiotal som entalet, alltså $6 \cdot 10 = 60$. Denna tanke kan användas vid multiplikation med fem. Multiplikation med 5 innebär att man tar tio gånger och sedan hälften av det. Multiplikation med fem utgör de fem kombinationerna i den femte kolumnen.

Nu återstår fem kombinationer, multiplikationer med enbart faktorerna 7, 8 och 9. Vid multiplikation med sju går det att tänka sex gånger plus en gång, åtta gånger som dubbelt 4 och nio gånger dubbelt fyra och en gång.



Figur 4.43. Strukturschema/Didaktisk karta. Multiplikationsfakta.

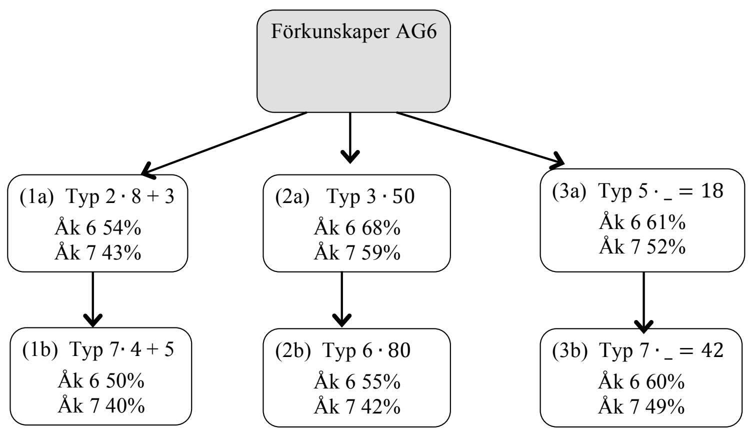
Genom att strukturera inlärningen av multiplikationsfakta på detta sätt ges även tillfälle att tala matematik, om uppdelning av tal och olika räknelagar. Detta ger också tillfälle att synliggöra hur matematiken hänger ihop och hur man succesivt utnyttjar sina kunskaper för att lära och förstå nya begrepp (Figur 4.43).

4.3.10 Generaliserad multiplikationsfakta

I olika sammanhang, exempelvis i samband med problemlösning, behöver man behärska multiplikationsfakta. Diagnos AG7 testar inledande generaliseringar av multiplikationsfakta. De sex uppgiftsgrupperna, består av följande uppgiftstyper:

- Uppgiftsgrupp 1a testar generaliserad multiplikationsfakta där multiplikationen följs upp med en ”minnessiffra”, av typen 2 · 8 + 3, och additionen inte leder till en tiotalsövergång.
- Uppgiftsgrupp 1b testar generaliserad multiplikationstabell där multiplikationen följs upp med en ”minnessiffra”, av typen 7 · 4 + 5, och där additionen leder till en tiotalsövergång
- Uppgiftsgrupp 2a testar generaliserad multiplikationstabellkunskap där ena faktorn är ett tiotal. Den ena faktorn är högst 5, eller 5 tiotal, typ 6 · 30. Uppgiftsgrupp 2b testar generaliserad multiplikationstabellkunskap där ena faktorn är ett tiotal och alla faktorer är större än 5, eller 5 tiotal, typ 7 · 60.
- Uppgiftsgrupp 3a testar öppna multiplikationer där en av faktorerna är högst 5, typ 4 · __ = 28.
- Uppgiftsgrupp 3b, slutligen, testar öppna multiplikationer där båda faktorerna är större än 5, typ 9 · __ = 54.

Diagnosen AG7 gavs i årskurserna 6 och 7 och resultatschemat visar lösningsfrekvensen för rätt svar på alla sex uppgifterna i en uppgiftsgrupp (Figur 4.44). Eftersom den tillåtna tiden var hela 8 minuter hann de allra flesta eleverna räkna alla uppgifter. Lösningsfrekvenserna visar samma tendens i de båda årskurserna.



Figur 4.44 Resultatschema, Generaliserad multiplikationsfakta, AG7.

Tanken bakom uppgiftsgrupperna 1a och 1 b är att de testar den förkunskap som krävs vid skriftlig multiplikation med minnessiffror. För att utföra dessa beräkningar i huvudet, krävs det att man behärskar multiplikationsfakta följt av en addition som i uppgiftsgrupp 1a och 1b. Lösningsfrekvenserna på de båda uppgiftsgrupperna är relativt lika, vilket tyder på att för elever som behärskar dessa beräkningar spela det inte någon roll om additionsberäkningen är med eller utan tiotalsövergång.

När det gäller uppgiftsgrupperna 2a och 2b märks en skillnad i lösningsfrekvens, troligen beroende på att elever inte behärskar den del av multiplikationstabellen som rör faktorer större än 5. Detta bekräftas av elevintervjuer, där det framgår att det ofta är multiplikationsfakta och inte att den ena siffran är ett tiotal som elever missar.

Uppgiftsgrupperna 3a och 3b testar öppna multiplikationer. Dessa uppgifter utgör en förkunskap till division. Av lösningsfrekvenserna, som i stort sett är lika för de båda uppgiftsgrupperna, framgår att elever som klarar dessa uppgifter behärskar samtliga basfakta i multiplikation.

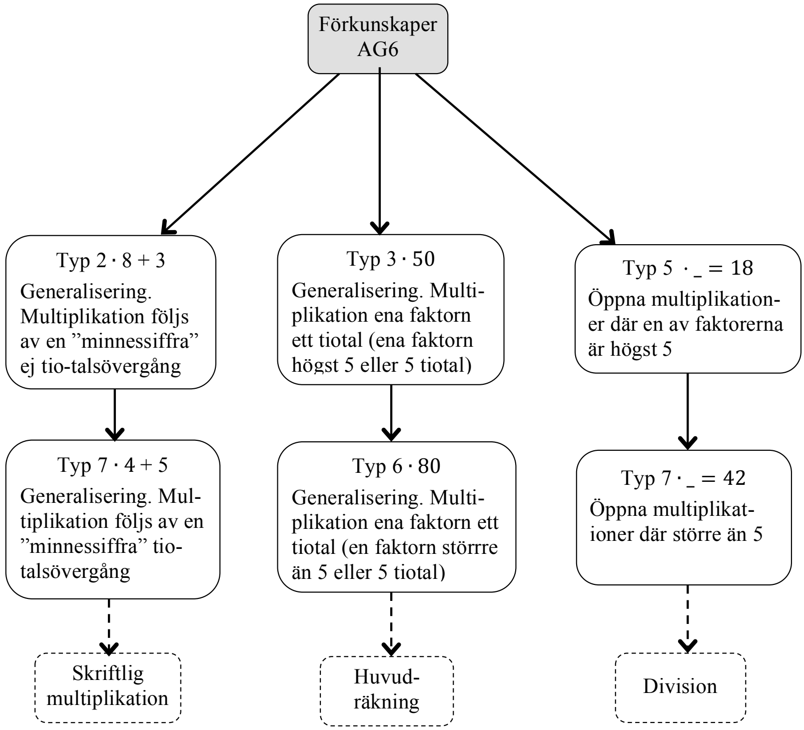
Didaktisk karta

När eleverna lärt sig multiplikationsfakta kan de använda dessa och generalisera till olika beräkningar inom större talområden såväl i huvudet som med skriftlig metod (Figur 4.45).

Vid skriftlig multiplikation kombineras multiplikation med addition. Genom att färdighetsträna denna typ av beräkningar får eleverna relevanta förkunskaper till skriftlig multiplikation med minnessiffror. Även detta är en typ av beräkning som eleven behöver utföra med flyt, vilket kräver att de behärskar multiplikationsfakta. Vidare behöver de behärska den typ av beräkningar som testas i AG4, alltså $56 + 3$ eller $63 + 9$. För de elever som behärskar detta verkar det inte spela någon roll om additionsberäkningen är med eller utan tiotalsövergång.

En vanlig operation vid huvudräkning är att multiplicera tiotal, uppgifter av typerna $3 \cdot 80$ och $90 \cdot 8$. Detta är inget annat än multiplikationsfakta, där ena faktorn är ett tiotal. Behärskar eleven motsvarande multiplikationsfakta är det endast att tänka 3 gånger 8 tiokronor. De ser då att $3 \cdot 80 = 240$.

Multiplikation och division är olika aspekter av samma beräkning vilket innebär att de öppna utsagorna $5 \cdot \_\_ = 30$ utgör förkunskaper till division. När eleven arbetar med multiplikationsfakta ska de även arbeta med denna typ av uppgifter för att se sambandet mellan operationerna. Om man till exempel skall dividera 369 med 9 så är den första frågan som ställs hur många gånger 9 går i 36. Detta svarar mot uppgiften $9 \cdot \_\_ = 36$.



Figur 4.45 Strukturschema/Didaktisk karta, generaliserad multiplikationsfakta.

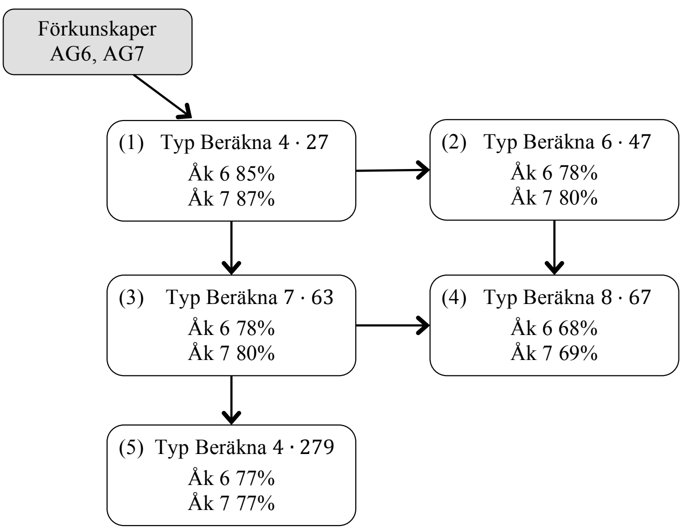
För den här diagnosen ser man av lösningsfrekvenserna att brister från tidigare diagnoser, såsom AG4 och AG6, i kombination med varandra, utgör hinder för alltför många elever vid dessa beräkningar. De uppgifter som beskrivs i strukturschemat ovan utgör förkunskaper vid inlärningen av såväl skriftlig multiplikation och division, som motsvarande huvudräkning. Strukturschemat (Figur 4.45) utgör en didaktisk karta som synliggör olika aspekter av generaliserad multiplikation. De olika uppgiftsgrupperna är inte direkt förkunskaper till varandra, utan till ytterligare fördjupning.

4.3.11 Skriftlig multiplikation

Enligt matematikkursplanen i Lgr11 ska eleven behärska skriftliga räknemetoder även för multiplikation. Denna kunskap har testats med diagnosen AS4, multiplikation där den ena faktorn är ensiffrig. Uppgifterna testar om eleverna kan multiplicera ett två- eller tresiffrigt tal med ett ensiffrigt tal med skriftlig metod inom talområdet 1 - 999. De fem uppgifterna på diagnosen innehåller någon tiotalsövergång och ska lösas med en generellt användbar metod som innebär att operationer med stora tal kan utföras i steg med hjälp av ental. Diagnosen har genomförts i årskurserna 6 och 7 och den tillåtna tiden var 10 minuter, alltså hela 2 minuter per uppgift. Uppgifterna har lite olika svårighetsgrad.

- Uppgift 1; $4 \cdot 27$, kräver multiplikationsfakta som testas i AG6, 1b och en minnessiffra utan tiotalsövergång som testas i AG7, 1a. Denna uppgift har något högre lösningsfrekvens än övriga uppgifterna
- Uppgift 2; $6 \cdot 47$, kräver multiplikationsfakta som testas i AG6, 2b och en minnessiffra utan tiotalsövergång (AG7, 1a).
- Uppgift 3; $7 \cdot 63$, kräver multiplikationsfakta som testas i AG6, 3b och en minnessiffra utan tiotalsövergång (AG7, 1a). Lösningsfrekvenserna på uppgift 2 och 3 är lika. Innehållsmässigt är det endast olika ingående multiplikationsfakta som skiljer uppgifterna åt.
- Uppgift 4; $8 \cdot 67$, har lägst lösningsfrekvens. Den kräver multiplikationsfakta som testas i AG6, 3b, med en minnessiffra och tiotalsövergång (AG7, 1a). Troligen är det 6-, 7-, 8- och 9-mötena i multiplikationen, i kombination med en tiotalsövergång, som upplevs svårare.
- Uppgift 5; $4 \cdot 279$, testas samma saker som uppgift 2 och 3, fast nu med två minnessiffror och multiplikatonsfakta som testats i hela AG6. Det är ungefär samma lösningsfrekvens som på uppgift 3 vilket indikerar att inte komplexiteten direkt ökar med fler siffror om man behärskar denna typ av skriftlig multiplikation.

I följande resultatschema (Figur 4.46) anges lösningsfrekvenserna för respektive uppgift.



Figur 4.46. Resultatschema, Skriftlig multiplikation, AS4.

Det är möjligt att uppgifterna i denna diagnos kan väljas lite annorlunda. Eftersom det inte är någon skillnad på lösningsfrekvenserna när additionerna är med eller utan tiotalsövergång eller om det är en eller två minnessiffror. En rimlig slutsats är att det är kunskapen i multiplikationsfakta som är avgörande. Denna slutsats stärks av en jämförelse med resultaten på flera diagnoser för samma elever samt genom kliniska intervjuer.

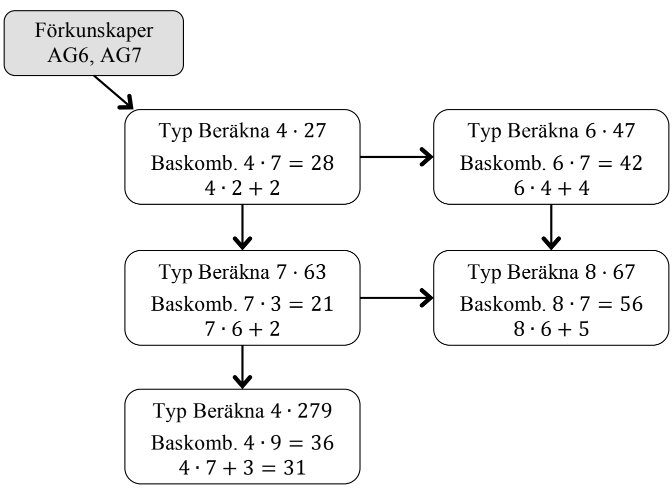
Skriftlig multiplikation är en typ av uppgift som eleverna bör behärska i årskurs 6 enligt matematikkursplanen i Lgr11. Resultatet på några skolor visar att det är rimligt att behärska algoritmen i årskurs 6.

Av eleverna i årskurs 6 löser 54% hela diagnosen AS4, skriftlig multiplikation, rätt. I årskurs 7 är motsvarande siffra 52%. Troligen är det så att den andel av eleverna som inte klarar dessa uppgifter har brister i sina förkunskaper.

Didaktisk karta

Multiplikationsberäkningar med skriftlig metod kan göras på olika sätt. Den skriftliga metod som krävs ska vara generell och inte enbart duga för att lösa vissa specifika typer av uppgifter. Skriftlig multiplikation handlar om mer än att bara utföra beräkningar mekaniskt. Arbetet med algoritmerna gör det möjligt att diskutera räknelagarna och visa hur de kan användas på ett effektivt sätt. Det handlar om förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp och elevens förmåga att välja lämpliga matematiska modeller och uttrycksformer (Figur 4.47).

En förutsättning för eleven att lösa de här uppgifterna, är att hon behärskar multiplikationsfakta och kan koppla dessa till en minnessiffra. Detta måste återigen kunna utföras med flyt för att algoritmen skall fungera.



Figur 4.47. Strukturschema/Didaktisk karta, skriftlig multiplikation.

I det centrala innehållet i matematikkursplanen ingår skriftliga metoder för de fyra räknesätten. Det finns emellertid anledning att diskutera värdet av att skriftligt kunna utföra multiplikation av till exempel typ $8 \cdot 267$ idag, när detta lätt beräknas med hjälp av räknare. Men en anledning att kunna göra sådana beräkningar är för att därigenom fördjupa matematikkunnandet genom att se hur räknelagarna utnyttjas. En annan anledning kan vara att det ger ett historiskt perspektiv. Här i Sverige har det inte direkt förekommit någon allmän diskussion om detta. I USA har man däremot låtit matematiker och matematikdidaktiker ge sin syn (Ball, m.fl., 2005). De menar att alla elever skall behärska algoritmerna för de fyra räknesätten och förstå hur de är uppbyggda. De menar vidare att algoritmerna genom sin uppbyggnad, baserat på vårt talsystem, förstärker elevernas taluppfattning. Enligt deras uppfattning bygger dessutom algoritmerna på en rad fundamentala idéer inom matematiken. Genom arbete med algoritmerna kan eleverna alltså få syn på fundamentala delar av matematiken, vilket är viktigt för att ge ökad förståelse, bland annat inför fortsatta studier.

4.3.12 Sambandsanalyser inom grundläggande aritmetik

Även om den grundläggande aritmetiken hänger samman där ett antal basfakta utgör det nav kring vilket fortsatta beräkningar byggs upp, är det intressant att kunna följa elevers kunskapsutveckling inom olika delområden. Här ges några exempel på hur detta kan gå till med utgångspunkt i resultatscheman. Det visar sig då att små steg i undervisningen är betydelsefulla för elevernas förståelse.

Redan tidigt möter eleverna implicit de olika räknelagarna. Den associativa lagen möter de i de inledande tiotalsövergångarna. För att beräkna $8 + 7$ söker de tiokamraten till 8 och får tvåan genom att dela upp 7 i $2 + 5$. Vid inledande multiplikation möter de den distributiva lagen i beräkningar som $3 \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4$. Genom att redan tidigt i undervisningen få möta räknelagarna och få hjälp att förstå hur de olika operationerna beror av dessa kan eleverna ges en grund att så småningom arbeta vidare med i algebra.

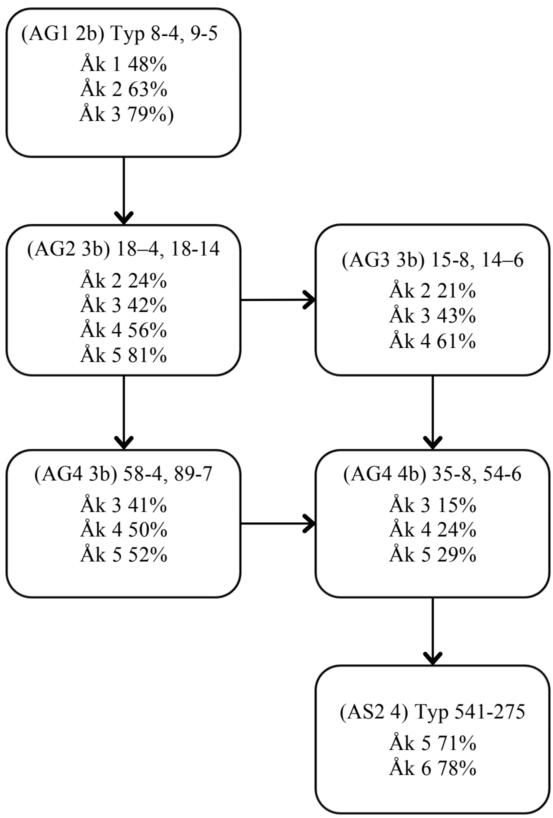
Diagnoserna inom det här området har genomförts i olika årskurser för att göra det möjligt att följa elevernas kunskapsutveckling relaterat till kunskapskraven i kursplanen. Lösningsfrekvenser på olika diagnoser har studerats såväl inom en och samma årskurs som för att följa hur kunskaperna utvecklas från en årskurs till nästa. På så sätt har det även gått att följa hur kunskaperna utvecklas när talområdena utvidgas. De lösningsfrekvenser som har analyserats gäller inte samma elever i de olika årskurserna, men antalet elever i varje årskurs är relativt stort (cirka 2000 – 5000), så resultaten kan troligen tolkas som en tendens.

Tolkningarna av elevers kunskaper och förkunskaper grundar sig, förutom i lösningsfrekvenser från diagnoserna, i hundratals kliniska elevintervjuer, där elever fått lösa diagnosuppgifterna och samtidigt berätta hur de tänker.

Som exempel behandlas nedan subtraktion och multiplikation.

Subtraktion

En sambandsanalys för subtraktion (Figur 4.48) visar, via lösningsfrekvenser från uppgifter i olika diagnoser, hur elevernas kunskaper utvecklas från en årskurs till nästa. De lägre lösningsfrekvenserna tyder på att det inte är självklart för eleverna att tänka generaliserande. Kliniska intervjuer har nu bekräftat att så är fallet.



Figur 4.48. Sambandsanalys 1, Grundläggande subtraktion.

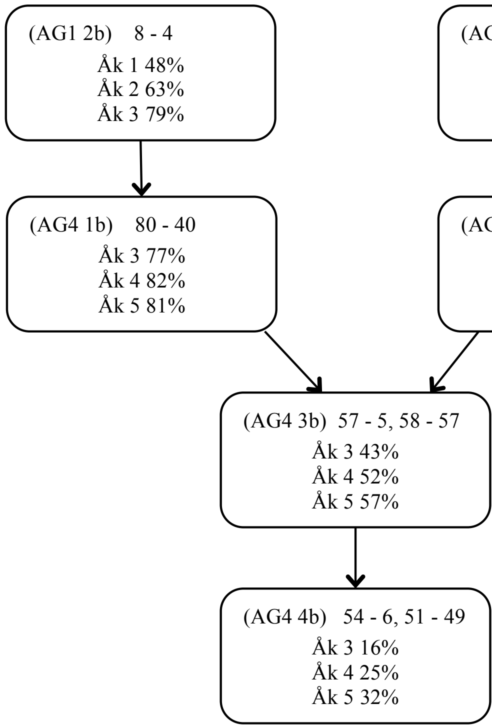
Uppgifter av typ 8 - 4 har en lösningsfrekvens i årskurs 1 på 48% (Figur 4.48). Denna kunskap kan sedan utnyttjas och generaliseras till beräkningar i talområdet 10 – 19 med uppgifter av typ 18 – 4 eller 18 - 14. I årskurs 2 är lösningsfrekvensen 24% på dessa uppgifter. Den lägre lösningsfrekvensen beror troligen på att elever ett år tidigare inte behärskar de grundläggande operationerna 8 – 4 på ett funktionellt sätt och då kan de inte heller utnyttja kunskapen för att generalisera den. Den elev som med automatik behärskar 8 – 4 och förstår 18 som 10 + 8 kan utnyttja basfakta och se att 18 – 4 nu blir 10 mer, alltså 14 istället för 4.

När sedan talområdet ytterligare ett år senare har utvidgats upp till 100 så ska eleverna kunna lösa uppgifter som 58 – 4 med samma strategi; talet 58 byggs upp av 50 + 8 och operationen blir densamma som tidigare. Lösningsfrekvensen är här 41%. Att inte fler elever löser den här uppgiften beror enligt intervjuer på att eleverna inte generaliserar utan löser uppgiften som om den vore unik.

Dessa uppgifter innehåller ingen tiotalsövergång. När det gäller uppgifter som innehåller tiotalsövergångar, typ 15 – 8, så har dessa en lösningsfrekvens på 21% i årskurs 2, medan lösningsfrekvensen på 35 – 8 ett år senare är 15%. Vid kliniska intervjuer med elever blir det tydligt att de inte behärskar de additionsfakta som krävs och inte heller förstår sambandet mellan uppgifterna.

Motsvarande analys, förskjuten en årskurs uppåt, alltså till i årskurs 3 och 4, ger ett liknande resultat. I årskurs 3 har uppgifter som 15 – 8 en lösningsfrekvens på 43%, medan uppgifter som 35 – 8 i årskurs 4 har en lösningsfrekvens på 24%. Här syns samma tendens med sjunkande lösningsfrekvens. Orsakerna är desamma, eleven ser inte kopplingen till tidigare uppgifter och av lösningsfrekvenserna på motsvarande uppgifter i samma årskurs framgår att det är många elever som inte behärskar basfakta automatiskt. Exempelvis behärskar endast 43% i årskurs 3 subtraktionsfakta, 15 – 8, och i samma årskurs behärskar endast 15% uppgifter som 35 – 8.

I sambandsanalysen i Figur 4.49 nedan går det också att följa elevernas kunskaper från basfakta, 8 – 4, till 80 – 40 på vänster sida schemat och hur tiotalen byggs upp till höger i schemat. Dessa båda trådar utmynnar i uppgifter som 57 – 5 och 58 – 57 utan tiotalsövergång och till uppgifter som 54 – 6 och 51 – 49 med tiotalsövergång.



Figur 4.49. Sambandsanalys 2, Grundläggande subtraktion.

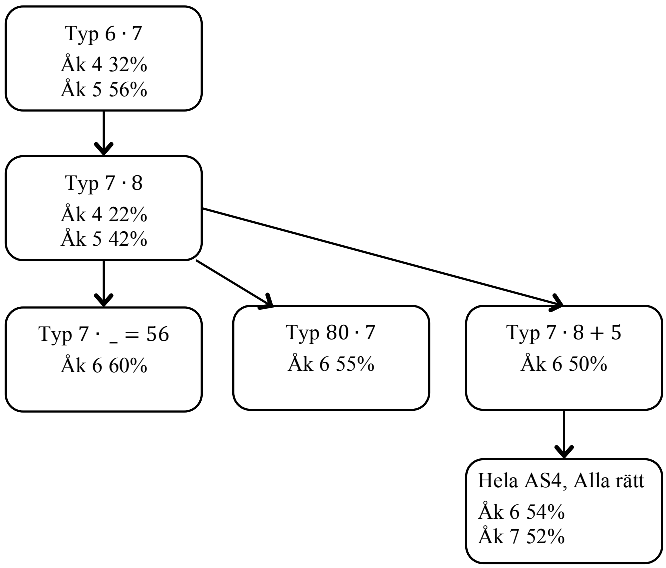
Här studeras lösningsfrekvenserna från årskurs 3 eftersom kunskapskraven för årkurs 3 kan tolkas som att eleven ska behärska dessa kunskaper.

Lösningsfrekvenserna för uppgifterna 8 – 4 (79%) och 80 – 40 (77%) är i stort sett lika. Troligt är att den som behärskar basfakta även kan utföra motsvarande beräkning med tiotal. Däremot verkar det inte vara helt självklart att förstå talens uppbyggnad i ett större talområde även om man kan det i ett mindre; 77% löser 18 – 8 och 60% löser 68 - 8. Dessa båda kunskaper behövs för att lösa uppgifter som 57 – 5 och 58 – 57 (43%) utan tiotalsövergång och uppgifter som 54 – 6 och 51 - 49 med tiotalsövergång (16%).

Dessa sambandsanalyser får illustrera hur flera olika förkunskaper behövs även när en beräkning kan verka mycket enkel. I förlängningen ger på detta sätt didaktiska analyser empiriskt stöd för att en djupare förståelse av operationerna i talområdet upp till 20 är nödvändiga och att dessa kunskaper, automatiserade, är grundläggande och krävs för att förstå och genomföra mer komplexa beräkningar.

Multiplikation

På samma sätt som inom subtraktion går det att göra sambandsanalyser inom multiplikation (Figur 4.50). Här synliggörs hur bristande basfakta-kunskaper påverkar beräkningar i senare årskurser.



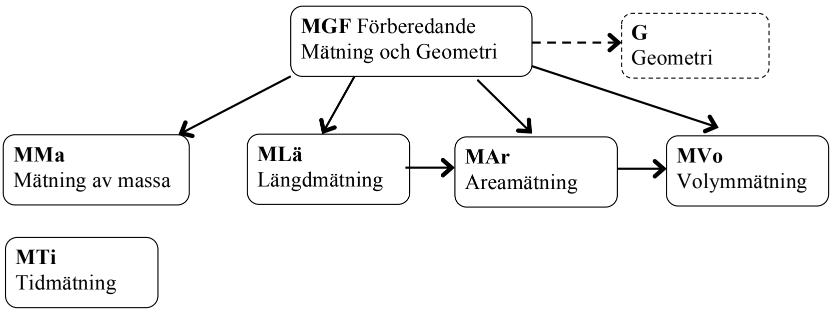
Figur 4.50. Sambandsanalys, Multiplikation.

I slutet av årskurs 5 är lösningsfrekvensen för multiplikationsuppgifter med 7, 8 och 9- möten 42%. I årskurs 6 är det endast runt hälften av eleverna som löser uppgifter vilka kräver en generalisering av dessa multiplikations-fakta. En rimlig tolkning här är att det är de elever som behärskar dessa multiplikationsfakta som ett år senare klarar generaliseringarna. I årskurserna 6 och 7 är det endast hälften av eleverna som behärskar skriftlig multiplikation, 54% respektive 52%. Bristande kunskaper inom multiplikationsfakta är en trolig orsak till detta.

En central kunskap vid mer komplexa beräkningar är att förstå hur de mest grundläggande operationerna kan utföras med hjälp av räknelagar, räkneregler och genom att dela upp tal. Eleverna ska behärska basfakta automatiserat för att de inte ska behöva lägga tankekraft på detta vid problemlösning och mer komplexa beräkningar. Strukturscheman visar hur olika beräkningar hänger ihop och synliggör matematikens didaktiska struktur.

4.4 Grundläggande geometri

Den inledande geometrin, i form av mätning, är ett annat exempel på områden som analyserats didaktiskt. I denna analys framkommer hur beroende geometrin är av den grundläggande aritmetiken. Dels behöver eleven, förutom en mängd geometriska begrepp, utföra beräkningar, dels används beräkningar vid introduktionen av de geometriska begreppen (exempelvis för att resonera om begreppen area och längd). Diagnoserna är här uppbyggda på samma sätt som inom aritmetik och rationella tal. Ett begrepp och olika aspekter av det begreppet, testas i varje diagnos. Vid konstruktionen av diagnoserna har den aritmetik som ingår valts så enkel som möjligt så att dessa kunskaper i aritmetik inte väsentligt ska påverka resultaten.



Figur 4.51. Strukturschema, Mätning.

När man mäter ett föremåls längd kan det ske genom jämförelse på olika sätt. Man kan till exempel jämföra föremålet med en pinne eller ett snöre och finna att det är kortare eller längre. Vill man ha ett mått på föremålet kan man jämföra det med en standardiserad enhet som till exempel 1 cm. Om föremålet är lika långt som 6 enheter av längden 1 cm är det 6 cm långt, en mätning som görs med en graderad linjal.

Inom begreppet mätning är det grundläggande att förstå mätandets idé. Det innebär att man jämför den sträcka man vill mäta med en referent. Denna referent är i vanliga fall ett mätinstrument, en linjal, som är uppbyggd av standardiserade enheter.

Redan tidigt utforskar det lilla barnet omgivningen och är intresserat av olika föremål. Vid samtal kring dessa föremål används en rad olika begrepp för att identifiera och jämföra dem samt lägesbeskriva dem. Detta är centrala aktiviteter som ligger till grund för förståelse av mätning. Att fullt ut förstå vad mätning av längd innebär och hur den utförs är grunden för mätning i andra situationer. I Figur 4.51. visas hur den formaliserade area-mätningen beror av längdmätning. Arean av en rektangel beräknas med hjälp av en formel, A = längden gånger bredden, som föregåtts av längdmätning. Motsvarande gäller för volym. Detta visar att det är centralt att primärt behärska längdmätning.

4.4.1 Förberedande mätning.

Redan i förskolan möter eleven grundläggande geometriska former och kroppar. Då benämns objekten och man talar om storlek med mera på olika sätt. Diagnosen Förberedande Mätning och Geometri, MGF, syftar till att se vilken förförståelse eleverna har inför arbetet med mätning och geometri i grundskolan. Strävansmålet i förskolans läroplan, Lpfö, är att barnen ska utveckla sin förståelse av grundläggande egenskaper i begreppen mätning och form samt sin förmåga att orientera sig i tid och rum. Det är just dessa begrepp som diagnostiseras med MGF.

Ordpar som längst-kortast, lägst-högst, större-mindre eller tyngre-lättare är viktiga när det gäller jämförelser inom mätning och geometri. Under året i förskoleklassen lyfts innebörden i dessa ord fram för att hjälpa eleverna att utveckla sitt språk som grund för förståelse inom undervisningen i mätning och geometri och i vardagen. Saknar eleven förståelse av denna typ av termer och begrepp blir det svårt att följa den fortsatta undervisningen i mätning och geometri. Redan i förskolan förekommer klassificeringsövningar som ger rika möjligheter att träna detta.

Diagnosen MGF genomförs muntligt med en elev i taget. Fråga 1 och 2 handlar om jämförelse av längd. En grundläggande egenskap vid mätning av längd är att kunna göra jämförelser och för att göra det behövs ord och begrepp som det krävs att eleven förstår innebörden av. Eftersom all mätning innebär jämförelse så är detta centrala kunskaper att utgå ifrån innan eleven börjar använda en linjal med standardiserade mått.

För att se om eleven har förstått den grundläggande idén för mätning innebär uppgift 3 att jämföra längden av två pinnar som ligger en bit ifrån varandra och inte kan flyttas. Eleven har tillgång till en tredje pinne, en referent, som är något längre än de övriga. Längdmätning handlar om jämförelse och ofta är man inte intresserad av måttet i sig utan av vilket föremål som är längst eller om föremålen är lika långa. Detta gäller även när man mäter med linjal eller måttband. Lösningsfrekvens, rätt svar på uppgifterna 1, 2 och 3, framgår av Tabell 2. Lösningsfrekvenserna i hela avsnitt 4.4 bygger på ett underlag som omfattar runt 1500 elever per åldersgrupp.

Tabell 2

Lösningsfrekvenser i procent, de tre första uppgifterna MGF, förberedande geometri och mätning.

MGF	Uppg. 1, 2	Uppg. 3
Typ	Jämförelseord vid längd	Mätandets idé
Fsk	93	74
Åk 1	96	81

De flesta elever behärskar jämförelseorden vid längd. Däremot att förstå grunden i mätandets idé, att kunna jämföra längder med hjälp av en referent, är det fortfarande en femtedel av eleverna som inte har förstått efter årskurs 1.

4.4.2 Inledande längdmätning.

Mätning av längd, diagnosen MLä1, testar om eleven har abstraherat begreppet längdmätning och behärskar hur mätning går till. Diagnosen genomfördes i årskurserna 2 och 3 för att ge en uppfattning om när det är möjligt för eleverna att förstå olika aspekter av längdmätning.

Syftet med diagnosen är att testa om eleven kan mäta med standardiserade mått, cm och mm. Uppgifterna 1 och 2 testar om eleven kan bestämma hur lång en sträcka är. En annan aspekt av detta är att eleven själv ska kunna mäta upp en sträcka, uppgifterna 4 och 5 testar detta (Tabell 3).

Uppgift 3 avser att testa om eleven förstår mätandets idé och kan avgöra en sträckas längd, när sträckan jämförs med en avbruten tumstock. Huruvida eleven har kunskap om olika enheter testas i uppgift 6, där rätt enhet ska väljas.

Tabell 3

Lösningsfrekvens i procent, MLä1 (medelvärde av deluppgifterna).

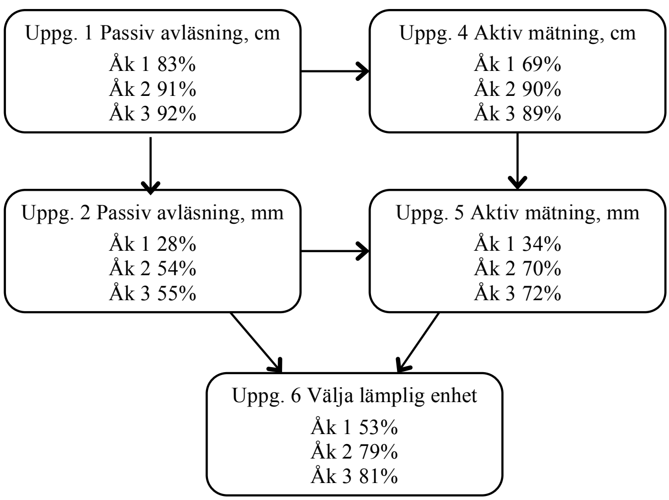
MLä1	Uppg. 1	Uppg. 4	Uppg. 2	Uppg. 5	Uppg. 3	Uppg. 6
Typ	Mäta cm	Mäta upp cm	Mäta mm	Mäta upp mm	Mätandets idé	Välja rätt enhet
Åk 1	83	69	28	34	39	53
Åk 2	91	90	54	70	60	79
Åk 3	92	89	55	72	60	81

Lösningsfrekvenserna visar att hela 40% av eleverna inte förstått mätandets idé i slutet av årskurs 3. Av Tabell 2 framgår att fler elever förstår mätandets idé informellt i såväl förskoleklassen som i årskurs 1. Undervisningen måste alltså tydligt lyfta fram innebörden av längdmätning i relation till standardiserade mått. En intressant aspekt här är att skolans linjaler ser olika ut. Använder eleven en linjal av den typ som avbildats nedan i Figur 4.52 så är det bara att läsa av siffran där föremålet slutar. Använder eleven däremot en linjal av den typ som avbildas i Figur 4.53 så ska mätningen börja vid noll, en bit in på linjalen. Linjalens utformning påverkar därmed lärarens möjlighet att direkt tolka om eleven förstått idén bakom mätning.

Figur 4.52 Linjal där skalan börjar direkt vid kanten av linjalen.

Figur 4.53 Linjal där skalan börjar en bit in på linjalen.

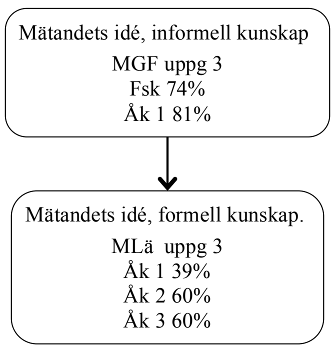
Den formella mätningen med standardiserade måttenheter brukar i undervisningen börja med mätning i cm. Mätningen kan antingen gälla en given sträcka, passiv mätning, eller att eleven själv mäter upp en sträcka, aktiv mätning. I undervisningen behöver dessa båda aspekter uppmärksammas. Av lösningsfrekvenserna på uppgifterna 1 och 4 i årskurs 1 framgår att det är svårare för elever att själva mäta upp en sträcka, än att mäta längden av en given sträcka. När eleven sedan behärskar att mäta är det ingen skillnad, vilket framgår av lösningsfrekvenserna i årskurs 2 och 3. (Tabell 3 och Figur 4.54).



Figur 4.54. Resultatschema, Grundläggande mätning längd, MLä1.

Vid utprövningen av diagnos MLä1 ifrågasatte en del lärare att elever skulle mäta i mm redan i årskurs 1. Lösningsfrekvenserna på uppgifterna 2 och 5, visar emellertid att det är möjligt för eleverna att mäta i mm i slutet av årskurs 1. En dryg fjärdedel av eleverna klarar det. Däremot visar lösningsfrekvensen också att många av eleverna i årskurs 3 ännu inte kan mäta i mm (Figur 4.54).

En reflektion när det gäller lösningsfrekvenserna på uppgifterna där eleven ska mäta i mm är att det är lägre lösningsfrekvenser vid passiv mätning än när de själva aktivt ska mäta upp och rita en sträcka är att detta kan bero på ”mätfel”. Det visade sig att när lärarna skrev ut diagnosen och sedan kopierade den så ändrade figurerna storlek. Detta har påpekats av Skolverket men lärare kan ändå ha rättat efter facit och på så sätt kan det ha blivit fel. I kartläggningen är det inte fler elever som kan mäta i mm i årkurs 3 än vad det är i årskurs 2. Detta visar sig vara ett mönster när det gäller lösningsfrekvenserna på samtliga uppgifter. De är i stort sett lika i båda årskurser. En tolkning kan vara att utan undervisning ges eleven inte möjlighet att utveckla sitt kunnande.



Figur 4.55. Lösningsfrekvenser, progression mätandets idé.

Att mäta med en avbruten linjal brukar vara ett bra kriterium på om elever förstår mätandets idé. Lösningsfrekvenserna (Figur 4.55) visar att 61% av eleverna inte har förstått detta på våren i årskurs 1 och fortfarande två år senare har 40% inte förstått.

Centralt innehåll i årskurs 1 – 3, när det gäller detta, är enligt Lgr11:

> Jämförelser och uppskattningar av matematiska storheter. Mätning av längd, massa, volym och tid med vanliga nutida och äldre måttenheter. Kunskapskraven i slutet av årskurs 3 är: Eleven kan göra enkla mätningar, jämförelser och uppskattningar av längder, massor, volymer och tider och använder vanliga måttenheter för att uttrycka resultatet.

Eftersom längdmätning är en central kunskap, både inom geometrin och i vardagen, krävs att eleven tidigt möter en välstrukturerad undervisning om detta begrepp. Resultatet på denna diagnos visar att alla de aspekter av längdmätning som diagnostiseras är möjliga att undervisa om redan i årskurs 1. När undervisningen sker är däremot en prioriteringsfråga. Samtidigt framgår det av kartläggningen att många elever i årskurs 3 ännu inte behärskar det aktuella innehållet. Resultatet på diagnos MLä1 visar i alla fall att det är möjligt att behandla en del områden betydligt tidigare än vad som görs i dag.

4.4.3 Mätning av omkrets.

När eleverna har förstått mätandets idé, lärt sig att mäta längder, flyttas fokus till att kunna använda sina kunskaper att mäta för att få svar på olika frågor. På diagnosen Mätning av omkrets, MLä2, är uppgifterna konstruerade så att de testar om eleverna kan använda längdmätning i praktiken. De ska mäta och bestämma omkrets av geometriska figurer. Första uppgiften är en triangel med sidornas längder givna. I uppgiften gäller det att förstå begreppet omkrets och sedan addera tre tal. I uppgift 2 och 3 ska eleven själv mäta sidornas längder med linjal.

Tabell 4

Lösningsfrekvenser i procent, Mätning av omkrets, MLä2.

	Uppg. 1	Uppg. 2	Uppg. 3
	Bestäm omkrets givna mått	Mät och bestäm omkrets	Mät och bestäm omkrets
Årskurs 2	87	76	77
Årskurs 3	89	84	85
Årskurs 4	91	83	86

Lösningsfrekvenserna (Tabell 4) visar att det är fullt möjligt för eleverna att använda mätning som redskap vid problemlösning i årskurs 2. Det är emellertid fortfarande 15% av eleverna som inte behärskar detta i årskurs 4. Lösningsfrekvenserna är väsentligen desamma i årskurserna 3 och 4, vilket kan tolkas som att det krävs undervisning för att de elever som inte behärskar detta ska lära sig.

Av lösningsfrekvenserna (Tabell 4) för de olika uppgifterna framgår att om eleven förstått begreppet omkrets och behärskar att mäta med linjal, vilket cirka 90% av eleverna klarar i årskurs 3, så är det ingen direkt skillnad på om längderna är givna eller att de får mäta själva.

4.4.4 Enhetsbyten, längdmätning.

I vardagen väljer man oftast rätt enhet direkt. En sträcka vi åker med bil talar vi om i mil eller kilometer medan rummets längd uttrycks i meter. Förståelse av hur måttsystemet är uppbyggt behövs emellertid, vi måste till exempel veta hur många centimetrar det går på en meter, hur många millimeter det går på en centimeter och kunna byta mellan de olika enheterna.

Diagnosen Enhetsbyte längd, MLä3, består av två grupper med uppgifter vilka testar enhetsbyten vid längdmätning. Den första uppgiftsgruppen testar enhetsbyten med naturliga tal, typ 4 m = ___cm där svaren blir heltal. De övriga uppgifterna testar enhetsbyten där tal i decimalform ingår av typ ½ m =__dm och 37 dm = __m. Diagnosen genomfördes i årskurserna 4, 5 och 6.

Tabell 5.

Lösningsfrekvens i procent MLä3, procentsatsen utgörs av medelvärde på deluppgifterna.

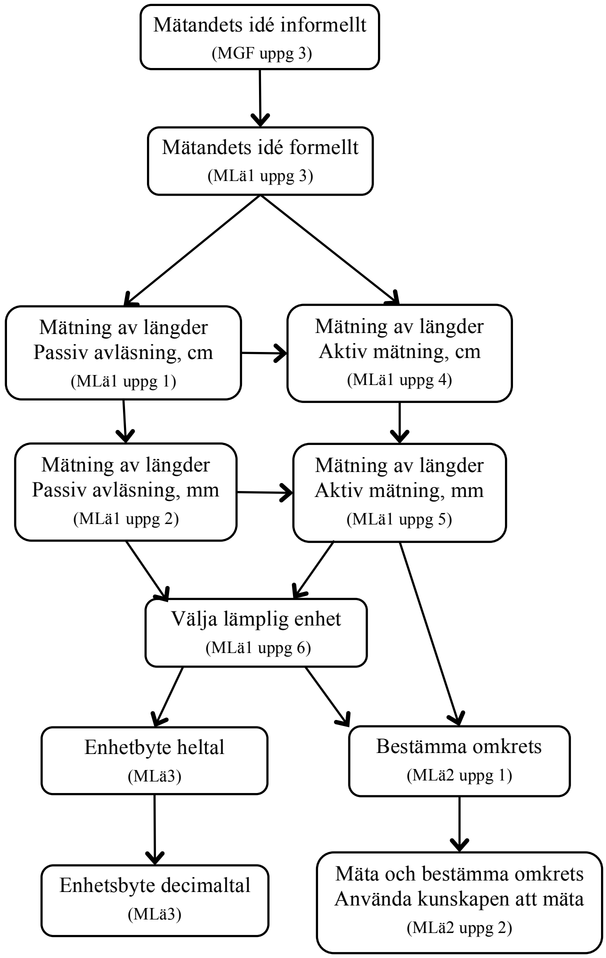
MLä3	Uppg. 1 a, b, d, e	Uppg. 1c, f, 2 a-f
Typ	Enhetsbyte heltal	Enhetsbyte tal i decimalform
Åk4	80	48
Åk 5	86	69
Åk 6	90	76

Lösningsfrekvenserna (Tabell 5) visar att mellan 80% och 90% av eleverna i årskurs 4 – 6 klarar enhetsbyten med heltal. Det innebär att dessa elever har förstått hur måttsystemet är uppbyggt. När sedan enhetsbytet kräver kunskap om tal i decimalform framgår av lösningsfrekvenserna i årskurs 4 att endast 48% av eleverna behärskar detta. En trolig förklaring är att eleverna i årskurs 4 ännu inte arbetat så mycket med tal i decimalform. Det krävs också en förståelse av prefixen, alltså innebörden i deci, centi och milli. Diagnoser inom aritmetik visade att många elever har svårt med tiondelar, hundradelar och tusendelar.

Att behärska dessa enhetsbyten kan uppfattas som ett kunskapskrav i årskurs 6 eftersom ett viktigt inslag i längdmätning omfattar val av lämplig enhet. Av lösningsfrekvenserna framgår även att var fjärde elev har bristande kunskaper när det gäller enhetsbyten mellan de vanligaste längdenheterna när de lämnar årskurs 6, troligen främst beroende på att de inte förstår tal i decimalform.

Didaktisk karta

Genom att didaktiskt analysera grundläggande mätning och empiriskt, med hjälp av lösningsfrekvenserna, bekräfta strukturen har det varit möjligt att skapa en sambandsstruktur (Figur 4.56) som bör kunna utgöra stöd vid planering av undervisningen i de tidiga årskurserna. Det framgår att det är ett antal olika aspekter av mätning som eleverna behöver möta i undervisningen, för att på sikt behärska mätning och kunna använda denna kunskap i praktiska situationer.



Figur 4.56. Strukturschema/Didaktisk karta, delområdet längdmätning.

4.4.5 Grundläggande areamätning.

Behovet av att mäta gäller inte enbart längd utan även exempelvis area och volym. De grundläggande idéerna är här desamma som när det gäller längd och därför är det avgörande att eleven förstår dessa. I mätandets idé ingår att man vet att det går att på något sätt mäta, att använda en referent för att jämföra och att det sedan finns standardenheter.

Arean, storleken av en yta, är ett område som uppmärksammas tidigt i geometriundervisningen. Diagnosen Grundläggande mätning, area, MAr1, består av fem uppgifter som handlar om grunderna för areamätning (Tabell 6). Uppgifterna testar jämförelse med en känd areaenhet och jämförelse med en figur som har en redan känd area. Diagnosen genomfördes i årskurserna 5, 6 och 7.

Tabell 6.

Lösningsfrekvenser procent, MAr1.

MAr	Uppg. 1	Uppg. 2	Uppg. 3	Uppg. 4	Uppg. 5
Typ	Jämföra areor genom att räkna rutor	Bestämma en area genom att jämföra.	Parallelltrapetsets area med hjälp av rutor.	Beräkna arean av en rektangel, kända sidor	Rita en Figur med dubbel arean
Åk 5	93	49	34	75	49
Åk 6	94	53	45	82	57
Åk 7	93	74	48	81	55

I uppgift 1 ska eleven räkna rutor för att bestämma figurens area, vilket de flesta klarar. Det går även relativt bra för dem att använda formeln för att beräkna arean av en rektangel i uppgift 4, runt 80% av eleverna i årskurs 6 och 7 klarar det.

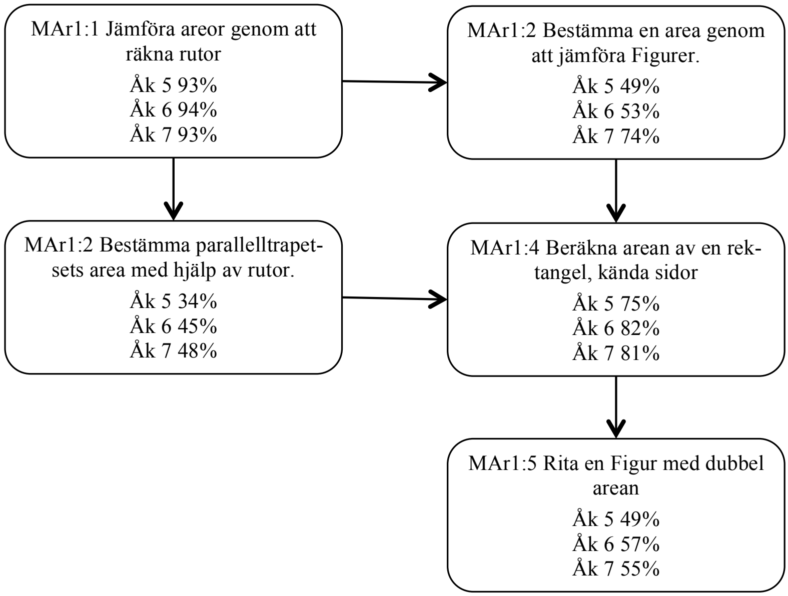
Parallellogrammen i uppgift 2 kan omformas till den i uppgiften givna rektangeln. På så sätt kan det ske en jämförelse med ett redan känt objekt. För att kontrollera att basen är lika lång i de båda figurerna är det bara att mäta med sin penna eller vika papperet och jämföra.

Det här handlar om grundläggande uppfattning av areabegreppet och bör innefattas i följande centrala innehåll för årskurserna 4 – 6: ”Jämförelse, uppskattning och mätning av längd, area, volym, massa, tid och vinkel med vanliga måttenheter.”

Parallelltrapetset i uppgift 3 kan relativt enkelt omformas till en rektangel. Grunden för dessa tankar testas i MGF med uppgift 4 där eleverna får möjlighet att visa att de kan konservera areor, alltså att de vet att man kan flytta delar av en figur utan att areans storlek ändras. Denna typ av kunskaper bör utvecklas och fördjupas från förskoleklass till årskurserna 5, 6 och 7.

Uppgift 5 är en vanligt förekommande uppgift där eleven ska rita en figur med dubbelt så stor area som en given figur. Många elever fördubblar båda sidorna och då blir arean fyra gånger så stor.

Lösningsfrekvenserna i Tabell 6 kan också tolkas i form av ett resultatschema (Figur 4.57), utgående från vilket ett strukturschema kan konstrueras.

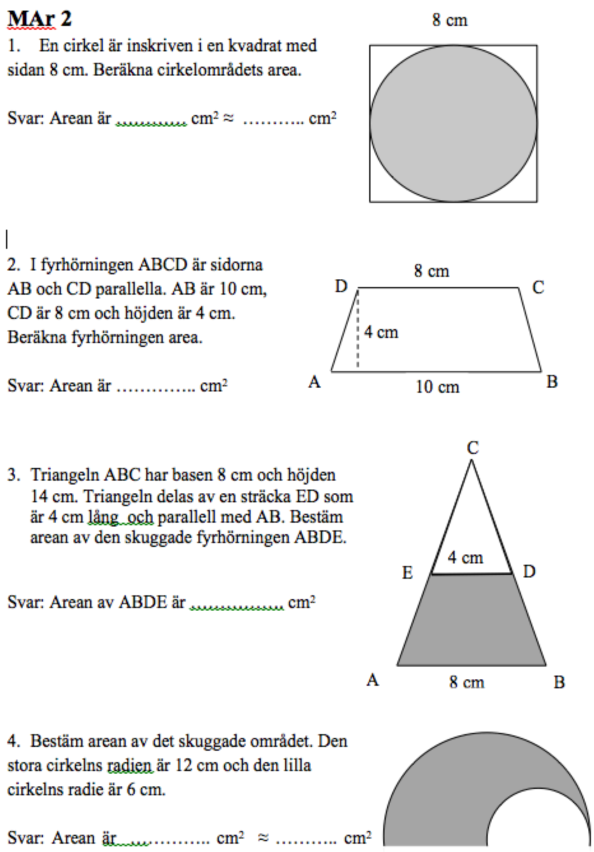


Figur 4.57. Resultatschema, Grundläggande mätning area, MAr1.

4.4.6 Beräkning av area.

I tidigare avsnitt beskrivs elevernas kunskaper om grundläggande mätning av längd och area. Dessa kunskaper ska sedan användas för att beräkna olika areor genom att först kunna se det aktuella områdets area i relation till en känd area. Med känd area menas här en area som kan beräknas med en formel.

Uppgifterna i Diagnosen MAr2 (en utprövningsversion av nuvarande MAr6) testar elevernas förmåga att tillämpa areamätning på grundläggande geometriska figurer (Figur 4.58).



MAr 2

1. En cirkel är inskriven i en kvadrat med sidan 8 cm. Beräkna cirkelområdets area.

Svar: Arean är ………… cm^2 ≈ ………. cm^2

2. I fyrhörningen ABCD är sidorna AB och CD parallella. AB är 10 cm, CD är 8 cm och höjden är 4 cm. Beräkna fyrhörningen area.

Svar: Arean är ………….. cm^2

3. Triangeln ABC har basen 8 cm och höjden 14 cm. Triangeln delas av en sträcka ED som är 4 cm lång och parallell med AB. Bestäm arean av den skuggade fyrhörningen ABDE.

Svar: Arean av ABDE är …………… cm^2

4. Bestäm arean av det skuggade området. Den stora cirkelns radien är 12 cm och den lilla cirkelns radie är 6 cm.

Svar: Arean är ………… cm^2 ≈ ………. cm^2

Figur 4.58. Diagnos, Beräkning av area, MAr2

Uppgifterna kan inte lösas direkt med en formel utan kräver att eleverna planerar sina beräkningar och ser enkla samband. Uppgifterna är inte svåra men kräver att eleven kan använda olika kunskaper tillsammans. Diagnosen gavs i årskurserna 7 och 8.

Tabell 7

Lösningsfrekvens i procent, MAr2.

MAr 2	Uppg. 1	Uppg. 2	Uppg. 3	Uppg. 4
	Beräkna arean av en cirkel som är inskriven i en kvadrat	Beräkna arean av ett parallelltrapets	Beräkna arean av ett parallelltrapets t.ex. med likformighet	Beräkna arean av två halvcirklar och sedan ta differensen
Årskurs 7	3	15	7	1
Årskurs 8	46	26	15	17

Bland förkunskaperna som krävs från tidigare årskurser återfinns konservering av area, begreppen symmetri och proportion samt likformighet (skala).

Dessa kunskaper krävs för att kunna förstå relationer mellan olika delar i figurerna och kunna utnyttja detta vid beräkningar av uppgifterna i diagnosen.

I uppgift 1 krävs att eleven behärskar formeln $\pi \cdot r^2$ för cirkelområdets area och kan utläsa att cirkelns diameter är lika med den omskrivna kvadratens sida.

Ett sätt att lösa uppgift 2 är att se att det går att dela upp parallelltrapetset i en parallellogram med basen 8 cm och en triangel med basen 2 cm. Därefter kan formler för areaberäkning av dessa figurer användas.

Den stora triangeln i uppgift 3 har arean 56 cm^2 eftersom basen är 8 cm och höjden 14 cm. Med hjälp av likformighet går det att se att topptriangeln ECD är en förminskning av den stora tringeln i skala 2:1. Eleverna bör ha arbetat med skala på mellanstadiet och detta utgör alltså en nödvändig förkunskap. Geometri handlar initialt bland annat om att kunna vrida och vända på figurer, ofta mentalt i huvudet. I detta fall kan man vika figuren över sträckan ED (eller mäta höjderna) för att se att sträckan delar höjden mitt itu och att det ryms fyra små trianglar i den stora triangeln.

Uppgift 4 löses genom att den stora halvcirkels area och den lilla halvcirkelns area räknas ut. Därefter subtraheras den mindre arean från den större.

Lösningsfrekvenserna (Tabell 7) visar här att eleverna i maj månad i årskurs 7 ännu inte behärskar de areabegrepp som diagnosen testar. I slutet av årskurs 8 är det fortfarande alldeles för få elever som löser dessa uppgifter.

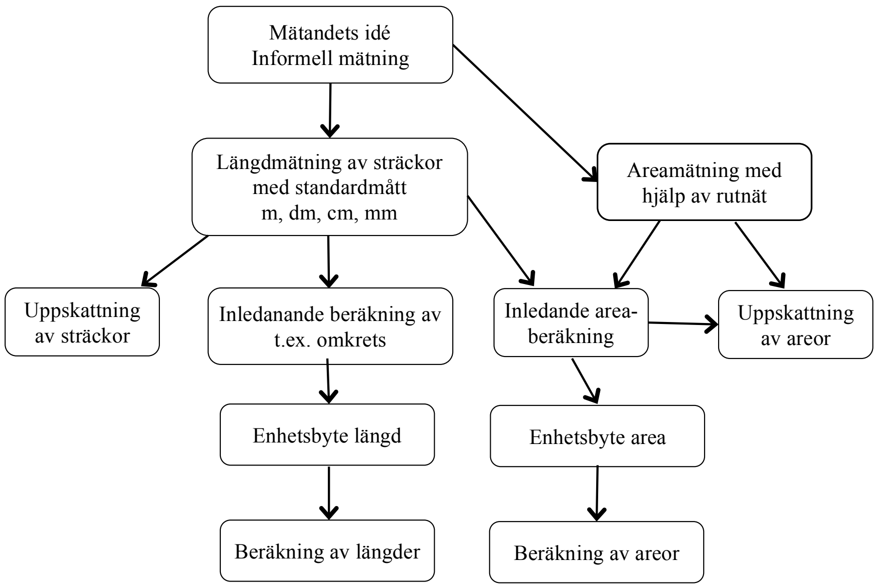
Det centrala innehållet i årskurserna 7 – 9 kan tolkas som att det testade innehållet ska ingå. Eleverna ska klara dessa uppgifter i årskurs 8 eftersom de även ska behärska volymberäkningar i årskurs 9:

- Geometriska objekt och deras inbördes relationer. Geometriska egenskaper hos dessa objekt.
- Avbildning och konstruktion av geometriska objekt. Skala vid förminskning och förstoring av två- och tredimensionella objekt.
- Likformighet och symmetri i planet.
- Metoder för beräkning av area, omkrets och volym hos geometriska objekt, samt enhetsbyten i samband med detta.
- Geometriska satser och formler och behovet av argumentation för deras giltighet. (Lgr11)

4.4.7 Sammanfattning mätning.

Av detta avsnitt framgår att även mätning inom geometrin går att strukturera med hjälp av didaktisk ämnesanalys för att på så sätt rita ett slags didaktisk karta över det matematiska landskapet.

För att kunna beräkna olika areor, likt dem i diagnos MAr2, krävs flera olika förkunskaper för detta område. Figur 4.59 nedan visar ett översiktligt strukturschema/en didaktisk karta.



Figur 4.59. Strukturschema/Didaktisk karta, Beräkning av längd och area.

Även diagnoserna inom mätning har getts till elever i olika årskurser för att kunna avgöra när elever klarar uppgifterna. En intressant iakttagelse är att lösningsfrekvenserna, även när de är relativt låga, för många av uppgifterna är lika i flera på varandra följande årskurser. Detta torde betyda att elevernas kunskaper inte utvecklas utan specifik undervisning.

Uppgifterna i MAr2 visar att för att komma vidare inom geometri och lösa problem krävs att eleven kan såväl arbeta med förmågorna som vidareutveckla sina förmågor. För att göra detta krävs emellertid att eleven behärskar ett antal grundläggande begrepp och formler för areaberäkning, samt att de behärskar de aritmetiska beräkningar som ingår.

Utvecklingen har kunnat följas med utgångspunkt i mätandets idé inom längdmätning. I mätandets ide ingår att man vet att det går att på något sätt mäta, använda en referent för att jämföra och att det sedan finns standardenheter. Nästa steg utgörs av grundläggande areamätning, vilket följer samma utvecklingsmönster. Areamätning börjar med att man täcker en yta med kända areaenheter, ett rutmönster, och därmed grundlägger förståelsen för att sedan övergå till areaberäkningar med hjälp av formler

4.5 Avslutande kommentarer

Som nämnts ligger didaktiska ämnesanalyser till grund för såväl konstruktionen av Diamantdiagnoserna som tolkningen och presentationen av elevresultaten. Analyserna utgör en del i en didaktisk ämnesteori och har till uppgift att synliggöra de didaktiska samband mellan begrepp och aspekter av begrepp som lärare behöver behärska och kunna beskriva. De strukturscheman som konstruerats beskriver en kunskapsdomän, skolans matematik, ur ett lärandeperspektiv.

Vid en sådan analys av matematiken synliggörs strukturellt vilka olika aspekter av ett begrepp en individ behöver förstå för att kunna sägas behärska begreppet. Här har dessa begreppsstrukturer konkretiserats med hjälp av kriterieuppgifter. Den didaktiska ämnesanalysen har alltså resulterat i diagnoser och strukturscheman som täcker centrala aspekter av olika begrepp och i resultatscheman som utgör ett tolkningsunderlag för elevernas diagnosresultat, såväl individuellt som på gruppnivå.

Ett syfte med föreliggande studie är att visa hur ett teoretiskt instrument kan användas på det här sättet. Självklart är det då viktigt att i rimlig mening validera de gjorda analyserna, att visa att analyserna inte bara ”är tagna ur luften”. En sådan validering måste grundas i empiri och här spelar ovan presenterade resultatscheman en avgörande roll. Analyserna har gett upphov till strukturscheman, som i sin tur kan jämföras med resultatscheman. Att ökad komplexitet enligt analyserna speglas i sjunkande lösningsfrekvenser är i den här meningen en indikation på att analyserna är korrekta. Validiteten stärks ytterligare av att de relativa lösningsfrekvenserna genomgående är oberoende av gruppstorlek; Tendenserna är desamma på klass-, skol- och kommunnivå.

Diamantdiagnosernas uppbyggnad innebär att den elev som klarar alla uppgifter på en diagnos, kan anses behärska begreppet på den kognitiva nivå som testas. I detta kapitel har datainsamlingen från kartläggningar med diagnoserna redovisats. Genom att analysera lösningsfrekvenser för de olika uppgifterna har det gått att följa elevernas kunskaper, när det gäller olika aspekter av ett begrepp, aspekter som är centrala för att, i rimlig mening, behärska begreppet. Lösningsfrekvenserna minskar succesivt när ett begrepp fördjupas, vilket innebär att färre elever förstår dessa aspekter av begreppet. När ytterligare en aspekt av begreppet tillkommer innebär det således en innehållslig fördjupning som inte är helt enkel för eleven. Det som vid analysen har visat sig vara en central aspekt av begreppet, har genom denna tendens i lösningsfrekvenserna, visat sig vara aspekter som eleverna inte alltid har förstått.

Den ursprungliga tanken vid konstruktionen av Diamantdiagnoserna var att det skulle vara möjligt att följa kunskapers utveckling och fördjupning för enskilda elever. Genom denna studie av den innehållsliga strukturen och av lösningsfrekvenser för de olika uppgifterna växer det fram en bild av hur progression inom de olika delområdena uppfattas och förstås av elever.

Grundtanken med att analysera matematiska begrepp som används inom skolan didaktiskt är att göra delarna i en helhet, ett begrepp, transparanta. Genom den didaktiska ämnesanalysen bryts grundläggande matematiska begrepp ner i avsikt att med viss precision kunna beskriva vilka aspekter av begreppet som behövs för att behärska det i olika sammanhang. I skolan använder eleverna olika förkunskaper, olika aspekter av begrepp, när de ska utveckla sitt matematiska kunnande eller sina matematiska förmågor. En avsikt här är att synliggöra dessa förkunskaper för lärare så att de i sin undervisning, explicit, kan uppmärksamma dem och planera sin undervisning utifrån ett medvetet didaktiskt perspektiv. Eleverna kommer på sikt att använda sina olika förkunskaper i nya sammanhang när de utvecklar sitt matematiska kunnande.

Resultatet av den didaktiska ämnesanalysen kan jämföras med den beskrivning som Wilkerson-Jerde och Wilensky (2011) gör av hur matematiker utvecklar matematik. De beskriver vilka metoder som används och hur matematiker agerar när de löser problem eller konstruerar bevis. En duktig matematiker har förmåga att känna igen liknande problem eller analoga bevis, vilka de kan bryta ner i delar, för att sedan sammanfoga de olika delarna på ett nytt sätt. I artikeln beskriver Wilkerson-Jerde och Wilensky, utifrån hur matematiker resonerar kring nytt innehåll, ett ramverk för hur matematiska kunskaper utvecklas: RACUM (Resources and Acts for Constructing and Understanding Mathematics). De betonar också användbarheten av detta ramverk för undervisning som "[provides] students experiences with and opportunities for the *deconstruction* and *coordination* of mathematical recourses".

5 Kartläggning av elevers matematikkunskaper i grundskolan

I detta kapitel beskrivs hur Diamantdiagnoser har använts vid kartläggning av elevers matematikkunskaper och en del resultat presenteras. Vid jämförelse av resultaten i ett antal kommuner framträder likheter i såväl lösningsfrekvenser som mönster över hur eleverna behärskar olika begrepp. Resultaten av dessa kartläggningar förstärker därför trovärdigheten hos de strukturscheman som konstruerats på basis av den didaktiska ämnesanalysen. Ett par kommuner har gjort upprepade kartläggningar och samtidigt satsat på kompetensutbildning av lärarna. På så sätt har resultaten kunnat användas i skolutvecklingssyfte.

Av internationella och nationella kunskapsutvärderingar framgår att svenska elevers matematikkunskaper är relativt låga, men enligt min erfarehet funderar den enskilde läraren sällan på dessa förhållanden i relation till de egna eleverna. De ställer inte frågan: Hur förhåller sig mina elevers kunskaper till nationella och internationella mätningar? Lärarens uppfattning om de egna elevernas kunskaper och den egna undervisningen stämmer många gånger inte överens med den övergripande bilden, utan lärare överskattar lätt sina egna elevers prestationer och resultat. Syftet med att göra kartläggningar med Diamantdiagnoser är att komma ner på individnivå avseende specifikt och betydelsefullt innehåll. Det går att systematiskt kartlägga vad elever kan och ännu inte kan. På detta sätt synliggörs orsakerna, till de resultat som lyfts fram på nationell nivå, för såväl lärare och rektorer som för tjänstemän på olika nivåer i utbildningssystemet. Därför fick dessa kartläggningar namnet *Att våga se – för att kunna ta ansvar.*

I samband med att resultaten av olika kunskapsutvärderingar presenterades i landet, önskade flera kommuner utveckla matematikundervisningen för att förbättra elevernas resultat. Dessa utvecklingsarbeten kom att se olika ut i de olika kommunerna. Gemensamt var dock att arbetet startade med en kartläggning av elevernas matematikkunskaper med hjälp av Diamantdiagnoserna. Kartläggningen följdes sedan upp av kompetensutveckling för lärarna i olika former. Några kommuner valde sedan att upprepa kartläggningen för att kunna följa hur elevernas matematikkunskaper utvecklades.

Dessa kartläggningar har gjort det möjligt att jämföra lösningsfrekvenserna för olika uppgifter i olika kommuner. De mönster som då framträder, med sjunkande lösningsfrekvenser när aspekterna av ett begrepp fördjupas, ser likadana ut i kommunerna. Dessa studier av lösningsfrekvenser är intressanta i sig, men är också ett sätt att validera de gjorda analyserna. Ser mönstren likadana ut i de olika kommunerna stärker detta validiteten av de strukturscheman som analysen resulterat i.

Efter olika fortbildningsinsatser i ett antal kommuner går det, med hjälp av elevresultat, också att se att analysen är relevant när det gäller undervisningen, vilket, även det, stärker den didaktiska ämnesanalysen. Syftet med att redogöra för olika kartläggningar i detta avsnitt är att i avsnitten 5.1 och 5.2 exemplifiera hur diagnosmaterialet kan användas och att i 5.3 säga något om tillståndet i landet när det gäller elevers matematikkunskaper. Det går även med hjälp av didaktisk ämnesanalys kombinerad med mätinstrumentet Diamant att med relativt stor säkerhet visa vari bristerna består och säga något om orsakerna till dessa. Denna kunskap ger förutsättningar för att också kunna åtgärda bristerna.

5.1 Kartläggning i olika kommuner

Denna forskningsstudie är starkt kopplad till utvecklingsarbeten i ett tiotal kommuner. Kartläggningar har genomförts i flera olika kommuner, i skolområden och på enskilda skolor. Omfattningen framgår av Bilaga 2. I detta avsnitt beskrivs hur kartläggningarna har genomförts och resultat från olika kommuner jämförs. Matematikinnehållet omfattar aritmetik, inklusive rationella tal, vilket omfattar centrala områden inom den grundläggande matematiken. De elever som kartlagts har läst enligt Lpo 94. Innehållet som testas är emellertid detsamma i nuvarande kursplan.

Den första kartläggningen gjordes under våren 2008 i Uppsala kommun, där skolchef och områdeschefer direkt var positiva till en kartläggning. Uppsala kommun nämns här beroende på att arbetet där varit öppet och presenterats i pressen i olika sammanhang. Ett exempel på detta är (Selin, 2009). Kartläggningen var ett led i kommunens utvecklingsprojekt och resultaten används även i denna forskningsstudie. Beskrivningen av hur kartläggningen genomförts i Uppsala är tillämpligt för övriga kartläggningar som gjorts.

Kartläggningen omfattade årskurserna F till och med 8 och gjordes under månaderna april och maj 2008. Syftet med utvecklingsprojektet beskrevs i den information som gick ut till skolorna och lärarna från den centrala skolförvaltningen:

> [att] använda Diamantdiagnoserna för att ta reda på var eleverna befinner sig i sin matematikutveckling. Det övergripande syftet är att kommunens elever ska bli bättre i matematik. [...] Resultatet av diagnoserna kommer att analyseras på såväl skolnivå som kommunal nivå. Utifrån resultaten kommer förslag på

- *Kompetensutveckling för att ge lärarna möjlighet att följa upp diagnoserna med åtgärder på klass- och elevnivå*
- *Mer omfattande kompetensutveckling av lärare i form av poängkurser.*

Planen som Grundskolans utvecklingsenhet i Uppsala hade, var att såväl kompetensutveckling som poängkurser skulle organiseras i samverkan med Uppsala universitet och Regionalt utvecklingscentrum, vilket också gjordes.

Denna första kartläggning blev ett omfattande projekt eftersom kommunen är stor och har många skolor och elever. Uppsala är Sveriges fjärde största kommun och även fjärde störst avseende antalet elever i grundskolan. Under läsåren 2007/08 – 2011/12 fanns ungefär 15 000 elever i den kommunala grundskolan fördelade med viss variation på de olika årskurserna. Antalet elever i fristående grundskolor var samtidigt cirka 3 000. Andelen elever med utländsk bakgrund var under denna period ungefär 25%, att jämföras med rikets cirka 20%. Antalet kommunala skolor var under dessa år cirka 60 stycken. De olika kartläggningarna i Uppsala har endast gällt de kommunala grundskolorna.

Ett projekt av denna storlek kräver en väl strukturerad organisation för att kunna genomföras. På varje skola utsågs därför en lärare som var skolsamordnare för arbetet på skolan och kontaktperson för kommunens utvecklingsledare och forskarna. Dessa kontaktpersoner fick noggrann information om hur kartläggningsarbetet skulle genomföras.

5.1.1 Val av diagnoser

Sammanlagt valdes 24 diagnoser ut, vilka omfattar områdena aritmetik, bråk, decimaltal, procent samt rötter och potenser. Diagnoserna gavs i 9 årskurser (F – 8) och i varje årskurs gavs mellan en och sex olika diagnoser. Till varje diagnos sattes tidsramar på mellan 3 och 10 minuter. En del av diagnoserna gavs i flera årskurser och valdes på ett sådant sätt att det skulle gå att se hur en kunskap fördjupas och utvecklas från årskurs till årskurs. Resultatet kunde därför även sammanställas i sambandsanalyser som gör det möjligt att studera kunskapsutveckling och effekter av bristande förkunskaper.

En del av diagnoserna har endast gjorts i en årskurs. Detta för att begränsa antalet diagnoser till en rimlig mängd per årskurs. En grundläggande idé med Diamant är att lärare, successivt och vid behov, ska kunna använda en eller flera diagnoser för att följa sina elevers kunskapsutveckling. En översiktlig utvärdering av detta slag blir på så sätt en inkörsport till ett mer systematiskt diagnostiseringsarbete och samtidigt ett led i en kvalitetssäkring av undervisningen.

För att diagnostisera området Grundläggande Aritmetik, användes 14 diagnoser från Diamantmaterialet. Dessa diagnoser är inte oberoende av varandra utan ingår i en kunskapsstruktur.

Diagnoserna genomfördes av den enskilda klassens lärare, som också förde in resultaten på digitala blanketter. Diagnoserna, de digitala blanketterna och detaljerade anvisningar om hur diagnoserna skulle genomföras och bokföras fanns att hämta via kommunens lokala nätverk. Skolsamordnaren ansvarade för att diagnoserna genomfördes och för att resultatet samlades in i en så kallad Skolbok (de samlade digitala blanketterna samt några beräkningsdelar) och skickades till grundskolans utvecklingsenhet. Utvecklingsledaren svarade på lärarnas frågor såväl om diagnoserna som om hur resultaten skulle fyllas i på den digitala blanketten. De vidarebefordrade information om skolor, klasser med mera samt samlade in skolornas resultat och skickade in alla data. Dessa data sammanställdes, resultaten analyserades och tolkades och återfördes sedan till skolorna.

Nedan följer vilka diagnoser som användes inom aritmetik och i vilka årskurser de genomfördes framgår av Tabell 8.

- AF Förberedande aritmetik
- AG1 Addition och subtraktion inom talområdet 1 – 9
- AG2 Addition och subtraktion inom talområdet 10 - 19, utan tiotals övegång
- AG3 Addition och subtraktion inom talområdet 10 – 19, med tiotalsövergång
- AG4 Addition och subtraktion inom talområdet 20 – 99, med och utan tiotalsövergång
- AG5 Räknesättens innebörd, addition och subtraktion
- AG6 Multiplikation av ental upp till 100 (multiplikationstabellen)
- AG7 Generaliserad multiplikationstabell
- AG9 Räknesättens innebörd, multiplikation och division
- AS2 Subtraktion av två tal i talområdet 0–999
- AS3 Addition och subtraktion; textuppgifter
- AS4 Multiplikation där ena faktorn är ensiffrig inom talområdet 0–999
- AS5 Division där nämnaren (divisorn) är ensiffrig inom talområdet 0–999
- AS6 Multiplikation och division; textuppgifter

Tabell 8

Diagnoser inom området grundläggande aritmetik samt de årskurser de genomfördes i, Uppsala 2008.

Åk	AF	AG1	AG2	AG3	AG4	AG5	AG6	AG7	AG9	AS2	AS3	AS4	AS5	AS6
F	x													
1		x	x											
2			x	x		x								
3				x	x	x	x							
4				x	x		x				x			
5							x	x	x	x				x

6	x		x		x	x
7					x	x
8						x

Förutom den grundläggande aritmetiken kartlades elevers kunskaper inom Rationella tal, alltså tal i bråkform och tal i decimalform. Även kunskaper inom den utvidgade aritmetiken såsom procent, rötter och potenser, testades i årskurs 8. Detta tas inte upp här.

De diagnoser som användes inom Rationella tal följer nedan och i vilka årskurser de genomfördes framgår av Tabell 9.

- Delområdet BD (RB)∗ omfattar följande nio diagnoser:
- BD1 (RB1) En del av en hel
- BD2 (RB2) Flera delar av en hel
- BD3 (RB3) Del av ett antal
- BD4 (RB4) Bråk som tal
- BD5 (RB5) Taluppfattning av bråk
- BD11 (RD4) Addition och subtraktion av tal i decimalform
- BD12 (RD5) Multiplikation och division av tal i decimalform
- BD13 (RB6)Addition och subtraktion av tal i bråkform
- BD14 (RB7) Multiplikation och division av tal i bråkform

∗ Beteckningen BD byttes till RB och RD vid revideringen.

Tabell 9

Diagnoser inom området bråk, samt de årskurser som de genomfördes i, Uppsala 2008.

Åk	BD1	BD2	BD3	BD5	BD6	BD11	BD12	BD13	BD14
4	x	x							
5			x						
6				x	x				
7					x	x	x		
8								x	x

Det finns ingen direkt koppling av diagnoserna till olika årskurser. Valet av diagnoser i de olika årskurserna gjordes därför utgående från samtal med lärare under utvecklings- och konstruktionsarbetet med Diamantmaterialet. Med hjälp av diagnoserna inom ett område, till exempel aritmetik, och ett strukturschema över området, har lärare i grupper eller enskilt vid många tillfällen fyllt i vilken årskurs de anser att eleverna bör behärska det innehåll som de olika diagnoserna prövar. När det gäller den grundläggande aritmetiken råder det god koncensus bland lärare när det gäller att koppla samman diagnoser och årskurser.

5.1.2 Konstruktion av instrument för datainsamling.

I Skolverkets Diamantmaterial fanns endast resultatblanketter att skriva ut i pappersform och därefter fylla i. Nya digitala blanketter för resultatinsamlingen och resultatredovisningen behövde därför utvecklas. Resultatblanketterna konstruerades i Excell, ett val som gjordes för att programmet är användarvänligt för lärarna att fylla i och allmänt tillgängligt.

Vid konstruktionen av dessa digitala blanketter togs en del grundläggande beslut. Strukturen skulle vara densamma som på de ursprungliga blanketterna, som skapats åt Skolverket och som finns på deras hemsida. Dessa blanketter möjliggör för läraren att tolka resultat på såväl individ- som gruppnivå. Det går att följa hur varje elev har lyckats med de olika uppgifterna och det är även möjligt att på gruppnivå se om det är någon uppgift som få elever klarar att lösa.

De insamlade resultaten skulle sedan generera olika typer av information på elev- och gruppnivå. Lösningsfrekvens per uppgift eller uppgiftsgrupp ger information om i vilken utsträckning elever kan lösa den specifika uppgiften, alltså en aspekt av ett begrepp. Elevresultat på hela diagnosen ger information om i vilken grad eleven har abstraherat begreppet, alltså behärskar de olika aspekter av begreppet som testats.

De data som genererades var av tre typer:

- Lösningsfrekvens per uppgift, som ger information om vari elevernas eventuella brister består. Läraren kan utgående från resultaten sedan planera sin undervisning på gruppnivå.
- Elevresultat per diagnos, som ger information om i vilken grad elever behärskar begreppet som testas. Elevresultaten visar således hur stor andel av eleverna som kan anses ha nått ett visst kunskapskrav.
- Sambandsanalyser: Diagnoserna är uppbyggda utifrån en förkunskapsstruktur utgående från vilka förkunskaper inom ett eller flera områden som behövs för en viss aspekt. Genom att jämföra resultat på speciella uppgifter från flera olika diagnoser går det, med hög precision, att se vilka förkunskaper som saknas inom klassen/gruppen eller skolan och på så sätt se vari elevernas brister består, för att därefter kunna vidta riktade stödåtgärder.

Instrumentet som använts för datainsamling har fungerat och idag finns inom diagnosområdena Aritmetik och Rationella tal över 1 500 000 specifika resultat på elevnivå från åk 1 till årskurs 9, data sammanställd i tre redovisningsformer och på fyra olika nivåer. Inom diagnosområdena Mätning och Geometri finns data bearbetade på motsvarande sätt av ytterligare drygt 750 000 resultat på elevnivå (Bilaga 2).

5.1.3 Genomförandet av kartläggningen

Andelen elever som genomförde diagnoserna varierar mellan 85% och 90% per skola. I de senare årskurserna var andelen något lägre. I de deltagande klasserna deltog alltså i stort sett alla elever. Bortfallet gällde till exempel vissa elever, där läraren ansåg att innehållet låg i överkant av vad man kunde förvänta sig av elever i just denna årskurs. En annan del av bortfallet gällde elever som varit sjuka under en litet längre period av den tid då diagnoserna genomfördes. I årskurs 8 var antalet elever som genomförde diagnoserna endast 66%. Skälet till det är att lärarna ansåg att några av diagnoserna var för svåra och mätte sådant som de inte ansåg att elever behövde kunna på våren i årskurs 8. Med facit i hand kan man dock konstatera att innehållet i dessa diagnoser, enligt Lgr11:s kursplan och centrala innehåll, hör hemma där.

En teknisk detalj var hur elevnamnen skulle hanteras. Den enskilda elevens specifika resultat är av största intresse för klassens lärare som ansvarar för undervisningen. För den övergripande kartläggningen fanns inget intresse av att ha elevernas namn på resultatblanketterna. Lärarens namn på blanketten var emellertid nödvändigt att ha för att kunna ta kontakt och ställa frågor om något var oklart. Inga namn fanns dock med vid analysarbetet.

På två månader organiserades och tolkades data från 60 skolor, med elever från förskoleklass till årskurs 8, där varje klass oftast hade genomfört 4 - 6 diagnoser. Antalet elever var ca 1500 per årskurs.

I början av höstterminen presenterades resultaten för kommunledning, rektorer och kontaktpersoner. Varje skola fick en mängd information, grundad på data, som beskrev skolans elevers matematikkunskaper inom aritmetik. Varje skola/rektor fick en för skolan anpassad resultatpärm, kallad skolpärmen, (Figur 5.1) samt ett USB-minne med beskrivningar av hur analyserna gjorts och resultatsammanställningar för just deras skola. I pärmen fanns:

1. En beskrivning av diagnoserna och hur analyser av diagnosresultaten gått till (ca 50 sidor, samma för alla).
2. En unik skolanalys av resultaten på olika nivåer för varje skola (60 stycken, ca 25 sidor per skola).
3. En kommunanalys
4. Sambandsanalyser
5. Nästa steg i form av förslag på hur resultaten kan utnyttjas för att komma vidare med matematikundervisningen på skolan.

Samma information lämnades även till kommunledning, som fick resultaten och analyserna för samtliga skolor.

Figur 5.1 Skolpärmar till Uppsala kommun 2008.

Lärarna i Uppsala utsattes i och med den här utvärderingen för en granskning av ett slag, som tidigare inte förekommit i kommunen och troligen inte i Sverige över huvud taget. En sådan granskning kan kännas obehaglig och resultat och beskrivning hanterades med hänsyn till detta. Så här i efterhand står det klart att lärarna reagerade professionellt. De vågade se – och de tog ansvar. Att eleverna i en viss klass inte lyckades lika bra som elever i andra klasser eller andra skolor, ska inte tolkas som att de aktuella lärarna har gjort ett mindre bra arbete. Det finns en rad andra, mer sannolika skäl till detta, såsom att eleverna kommit till klassen med mindre bra förkunskaper, att resurserna varit otillräckliga eller att läraren inte har adekvat utbildning för att undervisa i matematik. Ett mindre bra resultat i en klass eller årskurs är hela skolans ansvar och bör diskuteras i relation till på skolan aktuella förhållanden.

5.1.4 Bearbetning av resultat

När resultaten presenterades betonades att det inte skulle ske någon jämförelse mellan skolor, eftersom skolor kan ha helt olika förutsättningar. Ett resultat behöver emellertid jämföras med någon norm, i detta fall de sammanställda kommunresultaten.

I ett dokument på 50 sidor, som skolorna fick, beskrevs vad respektive diagnos mäter och hur analysen av resultaten gått till. Detta för att lärare och skolledning skulle förstå tankarna bakom analysen. Resultaten hade tolkats i relation till läroplanen och kursplanen. I beskrivningen av hur analysen av diagnosresultaten gått till, gjordes en jämförelse mellan resultaten på tre inte namngivna skolor. Avsikten med denna jämförelse var att visa på skillnader som framträder när resultaten analyseras. Informationen kan användas som bas för en kvalitetshöjning när det gäller såväl planering som undervisning.

I den unika skolanalysen för samtliga 24 diagnoser, beskrevs skolans resultat per årskurs och diagnos. Läraren kunde sedan fundera över sin klass resultat i relation till vad som är rimligt resultat, och till skolans resultat och resultaten i kommunen som helhet.

Vid analyserna var det skolans resultat som beskrevs, eftersom det är rektor som har det övergripande ansvaret för den undervisning som bedrivs. Beskrivningen riktade sig alltså till skolans lärare som grupp för att hjälpa dem att få syn på dagsläget och kunna ta det som utgångspunkt i kommande utvecklingsarbeten. Det är en grannlaga uppgift att göra en analys av denna typ, som riktar sig till en enskild skola som inte är känd i detalj. En utgångspunkt måste vara några grundläggande antagande, till exempel att det på skolan finns någon form av gemensam planering som beskriver vad eleverna skall kunna i respektive årskurs. De resultat eleverna presterar i en årskurs, relateras därför i analysen till vad eleverna presterat i tidigare årskurser. Eftersom många olika faktorer inverkar på resultaten, utgår bedömningen för den enskilda skolan från en tänkt genomsnittsskola, och på skolan får man sedan tolka resultaten utifrån den lokala situationen.

Hur diagnoserna valts och vilka kunskaper man kan förvänta sig efter olika årskurser beskrevs också i dokumentet. En förutsättning för korrekt tolkning av resultatet är att lärarna har följt de instruktioner, till exempel tidsgränser på AG-diagnoserna (Grundläggande aritmetik) som getts, annars blir tolkningen av resultaten på dessa diagnoser felaktig. Har eleverna fått för lång tid går det inte att bedöma om de har flyt i sitt räknande.

Resultatanalysen av den förberedande diagnosen AF gjordes av Marie Fredriksson i en mastersuppsats (Fredriksson, 2009). Diagnos AF består av 10 muntliga uppgifter som gavs i förskoleklassen. Syftet var att se vilken förförståelse eleven har inför arbetet med matematik i årskurs 1. Det Fredriksson kommer fram till är att de flesta elever, när de lämnar förskoleklassen, har relevant förförståelse för att börja addera och subtrahera. Under de senaste tjugo åren har yngre barns förståelse av grundläggande begrepp inom matematiken ökat. Den satsning som gjorts på förskolans och förskoleklassens didaktik har givet en bra utdelning. Det är därför förvånande att kartläggningarna visat att diagnosresultaten i årskurs 1 och årskurs 2 inte har följt med i utvecklingen. Möjligen behöver lärare i dessa årskurser bättre ta tillvara elevers goda förförståelse och bättre vidareutveckla deras nyfikenhet och det matematiska kunnande de har med sig.

5.1.5 Kartläggningsresultat i olika kommuner

Kartläggningar genomfördes, som tidigare nämnts, i ett tiotal olika kommuner, vilket medförde att data från de olika kommunerna kunde jämföras för att studera om det fanns likheter och skillnader i elevers grundläggande matematikkunskaper. Ett annat syfte med detta var att få en uppfattning om ifall det fanns något i en kommun, i det här fallet Uppsala kommun, som påverkar resultaten, såsom socioekonomisk struktur eller kommunens lokala styrning. Dessa breddade studier av fler kommuner, rektorsområden och skolor bekräftar vid jämförelse att resultaten från den inledande studien i Uppsala väsentligen är allmängiltiga.

Nedan följer tabeller som visar jämförelser mellan kommuner. Det är lösningsfrekvenser på uppgifter inom några centrala diagnoser: AG1, AG4, AG6, BD1, BD5, BD13 och BD14. Dessa diagnoser har valts för att de täcker hela grundskolan från årskurs 1 till och med årskurs 8.

Av elevantalet, som syns i tabellerna, framgår att det är två större kommuner, två mindre kommuner och ett skolområde inom en kommun, som jämförs. Vidare framgår av tabellerna att lösningsfrekvensen på olika uppgifter är relativt lika i de olika kommunerna. Även mönstren i lösningsfrekvenserna är i stort sett desamma. Vissa skillnader kan dock iakttas.

Diagnos AG1, Årskurs 1

Diagnos AG1 genomfördes i maj månad i årskurs 1 (.10.) Då anser de flesta lärare att eleverna ska behärska basfakta i addition och subtraktion inom talområdet 1 – 9. Att lösningsfrekvensen är högre för de första uppgifterna i diagnosen beror på att eleverna inte har abstraherat denna kunskap och använder mindre lämpliga strategier. Detta medför att de inte hinner med, eller inte klarar, de sista uppgifterna. Vidare framkommer tydligt att lösningsfrekvensen för subtraktionsuppgifter är lägre än för additionsuppgifter. Mönstret som framträder i lösningsfrekvenserna för denna diagnos är detsamma i de undersökta kommunerna.

Tabell 10.

AG1, Additioner och subtraktioner inom talområdet 0-9. Jämförelse mellan kommuner. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftsstyp	Kommun 1	Kommun 2	Kommun 3	Kommun 4	Kommun 5
n=		1590	97	207	1096	225
1a	6 + 1, 2 + 4	91	97	85	82	95
1b	9 – 1, 8 - 6	74	76	57	55	79
2a	4 + 4, 3 + 5	78	86	59	65	86
2b	8 – 4, 9 - 4	60	69	22	39	55
3a	4 + _ =9	43	61	15	28	37
3b	8 = 2 + _	30	44	4	17	18

Diagnos AG4, Årskurs 4

Diagnos AG4 genomfördes i maj månad i årskurs 4 (Tabell 11). Enligt kunskapskraven i årskurs 3, alltså ett år tidigare, gäller att ”[e]leven kan använda huvudräkning för att genomföra beräkningar med de fyra räknesätten när talen och svaren ligger inom heltalsområdet 0–19, samt för beräkningar av enkla tal i ett utvidgat talområde”. Uppgifterna på diagnosen är generalisering av basfakta inom talområdet 1 – 19 och kan betraktas som enkla. Även på denna diagnos är lösningsfrekvenserna i stort desamma för kommunerna. Ett återkommande mönster är att lösningsfrekvensen för subtraktion är lägre än för addition. Det är också tydligt att eleverna har svårare med tiotalsövergångar i uppgiftsgrupperna 4a och 4b.

Tabell 11.

AG4, Additioner och subtraktioner inom talområdet 20-99 med och utan tiotalsövergångar. Jämförelse mellan kommuner. Lösningsfrekvens i procent.

	Upgiftsstyp	Kommun 1	Kommun 2	Kommun 3	Kommun 4	Kommun 5
n=		1579	85	223	960	147
1a	40+30	87	80	86	80	82
1b	70-20	86	85	79	78	84
2a	40+7	88	89	83	83	84
2b	68-8	78	75	70	66	67
3a	27+1	80	69	71	70	78
3b	38-2	61	46	46	47	52
4a	84+9	51	41	34	35	44
4b	63-8	35	23	17	21	22

Diagnos AG6, Årskurs 5

Diagnos AG6 genomfördes i maj månad i årskurs 5 (Tabell 12). De flesta lärare anser att eleverna då ska behärska multiplikationsfakta, alltså multiplikationstabellen. Enligt centralt innehåll för årskurserna 4-6, ska eleven vid slutet av årskurs 6 behärska ”centrala metoder för beräkningar med naturliga tal vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare”. För att nå kunskapskraven krävs att eleven behärskar multiplikationsfakta. Även på denna diagnos är lösningsfrekvenserna i de olika kommunerna relativt lika och samma mönster framträder. Uppgiftsgrupperna 1a, 1b, 2a och 3a har högre lösningsfrekvenser än uppgiftsgrupperna 2b och 3b, som innehåller uppgifter med 6-, 7-, 8- och 9-möten, vilka uppfattas som svårare av eleverna.

Tabell 12

AG6, Multiplikationstabellen (munltiplikationsfakta). Jämförelse mellan kommuner. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftstyp	Kommun 1	Kommun 2	Kommun 3	Kommun 4	Kommun 5
n=		1615	70	232	933	152
1a	2·6, 6·2	96	90	94	96	94
1b	4·6, 6·4	80	60	74	72	78
2a	3·8, 8·3	82	60	75	76	84
2b	6·7, 7·6	66	34	47	51	61
3a	5·4, 4·5	82	66	72	71	80
3b	7·8, 8·7	49	14	36	38	52

Diagnos BD1, Årskurs 4

Diagnos BD1 (RB1) genomfördes i maj månad i årskurs 4 (Tabell 13). Enligt kunskapskraven i årskurs 3 gäller att ”[e]leven visar grundläggande kunskaper om tal i bråkform genom att dela upp helheter i olika antal delar samt jämföra och namnge delarna som enkla bråk.” Diagnosen testar dessa inledande grunder av bråkbegreppet. Lösningsfrekvenserna är även på denna diagnos i stort sett lika i de olika kommunerna och ett tydligt mönster framträder. På uppgifterna 3c, 6b och 6c är lösningsfrekvenserna betydligt lägre än på övriga uppgifter. Detta beroende på att dessa uppgifter testar fördjupade aspekter av bråkbegreppet där generalisering krävs. Diagnosuppgifterna finns i Figur 4.7.

Tabell 13

BD1, En del av en hel. Jämförelse mellan kommuner. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift	Kommun 1	Kommun 2	Kommun 3	Kommun 4
n=	1417	85	222	934
1a	85	91	80	81
1b	89	92	78	81
1c	89	91	77	80
2a	89	92	84	83
2b	88	89	85	82
2c	92	89	88	83
2d	81	79	73	72
3a	84	82	78	69
3b	87	81	84	75
3c	48	35	35	30
4a	84	84	82	75
4b	82	84	82	73
4c	66	69	66	58

5a	83	94	68	75
5b	76	87	58	61
5c	76	75	60	63
5d	82	96	64	72
6a	91	94	83	86
6b	44	52	35	35
6c	30	18	23	24
7a	57	61	40	46
7b	41	47	31	27
7c	51	60	40	40

Diagnos BD5, Årskurs 6

Diagnos BD5 (RB5) genomfördes i maj månad i årskurs 6 (Tabell 14). Då bör eleverna behärska bråkbegreppet och förstå aspekten bråk som tal. Diagnosen testar grunderna när det gäller bråk som tal. Lösningsfrekvenserna i de olika kommunerna är relativt lika och samma mönster framträder. För uppgifterna 5a – 5c är lösningsfrekvenserna betydligt lägre än för övriga uppgifter. Uppgift 5a, $1/\frac{1}{2}$ och uppgift 5b $1/\frac{1}{3}$ testar egentligen definitionen av tal i bråkform. Diagnosuppgifterna finns i Figur 4.13.

Tabell 14

BD5, Taluppfattning av bråk. Jämförelser mellan kommuner. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift	Kommun 1	Kommun 2	Kommun 3	Kommun 4
n=	1538	958	233	119
1a	77	80	82	78
1b	78	81	86	78
1c	78	80	84	76
2a	72	76	74	81
2b	73	78	75	79
2c	54	49	53	42
3a	72	76	77	63
3b	72	76	76	65
3c	66	73	71	60
4a	63	65	71	55
4b	64	68	72	55
4c	60	61	67	51
5a	9	10	10	15
5b	10	11	9	14
5c	7	8	6	7

De fem ovan redovisade diagnoserna genomfördes i årskurserna 1– 6. Nedan redovisas två diagnoser, BD13 och BD14, som testar räkning med tal i bråkform, och genomfördes i årskurs 8.

Diagnos BD13, Årskurs 8

Diagnos BD13 (RB6) genomfördes i maj månad i årskurs 8 (Tabell 15). Diagnosen testar addition och subtraktion av tal i decimalform. Enligt centralt innehåll för årskurserna 7 – 9 ska eleven vid slutet av årskurs 9 behärska ”Reella tal deras egenskaper samt deras användning i vardagliga och matematiska situationer”. För att göra det är det rimligt att eleverna kan utföra enkel bråkberäkning i slutet av årskurs 8. Lösningsfrekvenserna per uppgift visar ett tydligt mönster, som ser likadant ut i de olika kommunerna. Diagnosuppgifterna finns i Figur 4.16.

Tabell 15.

BD13, Addition och subtraktion av tal i bråkform. Jämförelse mellan kommuner. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift	Kommun 1	Kommun 2	Kommun 3	Kommun 4
n=	1498	947	234	154
1a	84	82	74	94
1b	84	79	73	89
1c	76	72	68	86
2a	46	40	24	53
2b	40	33	13	33
2c	33	29	12	26
3a	76	68	74	82
3b	81	76	74	82
3c	59	45	47	66
4a	46	35	28	47
4b	34	22	11	23
4c	24	16	7	14

Diagnos BD14, Årskurs 8

Diagnosen BD14 (RB7) genomfördes i maj månad i årskurs 8 (Tabell 16). Diagnosen testar multiplikation och division av tal i bråkform. Lösningsfrekvenserna per uppgift visar ett tydligt mönster som ser likadant ut i de olika kommunerna. Detta stärker att diagnoserna som använts är allmängiltiga. Med hjälp av diagnoserna synliggörs huruvida eleven behärskar den specifika uppgiften, alltså en aspekt av begreppet. Diagnosuppgifterna finns i Figur 4.19.

Tabell 16

BD14, Multiplikation och divsion av tal i bråkform. Jämförelse mellan kommuner. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgifter	Kommun 1	Kommun 2	Kommun 3	Kommun 4
n=	1233	902	231	147
1a	67	60	61	80
1b	55	48	43	70
1c	44	34	26	58
2a	40	34	30	51
2b	44	36	35	39
2c	22	16	11	25
3a	36	30	27	38
3b	24	17	9	27
3c	23	19	10	24
4a	13	10	5	18
4b	19	17	10	16
4c	11	9	1	11

Elevresultat per diagnos

Lösningsfrekvensen för en hel diagnos ger information om i vilken grad eleven behärskar eller har abstraherat det begrepp diagnosen testar. De sammanställningar som gjorts innehåller information om huruvida eleven har alla rätt på diagnosen, nästan alla rätt eller för få rätt för att anses behärska begreppet. Avvikelserna mellan kommuner blir något större när man ser på resultaten på detta sätt (Tabell 17). AG–diagnoserna kan i vissa fall visa ett alltför bra resultat eftersom lärare inledningsvis inte förstod vikten av tidsaspekten för att testa om en elev har flyt i sitt räknande.

I Tabell 17 redovisas andelen elever som har för få rätt på diagnoserna, alltså inte behärskar innehållet.

Tabell 17

*Elever med **för få rätt**, alltså som **inte behärskar** begreppet som testas i diagnosen. Lösningsfrekvens i procent.*

	Kommun 1	Kommun 2	Kommun 3	Kommun 4
AG1 åk 1	44 (n=1589)	31 (n=97)	78 (n=194)	64 (n=1096)
AG4 åk 4	40 (n=1557)	51 (n=81)	60 (n=204)	59 (n=960)
AG6 åk 5	24 (n=1589)	57 (n=70)	40 (n=219)	36 (n=933)
BD1 åk 4	37 (n=1451)	32 (n=85)	54 (n=203)	49 (n=934)
BD5 åk 6	50 (n=1494)	82 (n=131)	41 (n=219)	45 (n=902)
BD13 åk 8	58 (n=1491)	65 (n=152)	81 (n= 236)	67 (n=948)
BD14 åk 8	82 (n=1466)	80 (n=147)	94 (n=217)	90 (n=956)

Skillnader mellan skolor och klasser

Bryter man sedan ner kommunresultaten till skolor eller klasser finns det i en del fall något större skillnader. Det är emellertid inte så enkelt att jämföra skolor eftersom de kan ha olika antal elever. Har man en liten skola med få elever i årskursen, kanske under 20, så påverkas resultatet synbart av varje enskild elev. Några exempel på skillnader mellan skolor finns för årskurs 1 (Tabell 18), för årskurs 5 (Tabell 19), och för årskurs 8 (Tabell 20). De skolor som jämförs har ungefär samma elevantal i de aktuella årskurserna. Nedan följer resultat på diagnoserna AG2, AG6 och BD 14 för två skolor inom samma kommun

Diagnos AG2, årskurs 1

Tabell 18.

AG2, Additioner och subtraktioner inom talområdet 10-19, utan tiotalsövergång. Elever med 6 rätt på respektive uppgiftsgrupp. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift		1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b
Typ		7+10,10+5	18-10, 18-8	15+2	18-2	14+3	19-4	14+__=19	18=3+__
Skola A	n=22	72	65	63	26	37	7	13	6
Skola B	n=34	59	37	41	13	15	6	6	2

Diagnos AG6, årskurs 5

Tabell 19.

AG6, Multiplikationstabellen (multiplikationstabellen). Elever med 6 rätt på respektive uppgiftsgrupp. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift		1a	1b	2a	2b	3a	3b
Typ		2·6, 6·2	4·6, 6·4	3·8, 8·3	6·7 7·6	5·4, 4·5	7·8, 8·7
Skola C	n=27	96	94	93	87	96	83
Skola D	n=42	98	80	80	60	84	44

Diagnos BD13, årskurs 8

Tabell 20.

BD13/RB6, Adition och subtraktion av tal i bråkform. Elever med rätt på respektive uppgift. Lösningsfrekvens i procent. (Diagnosuppgifterna finns i Figur 4.16.).

Uppgift		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Skola E	n=127	58	58	51	25	18	15	68	69	25	21	18	12
Skola F	n= 78	97	78	66	40	36	22	76	74	58	42	26	19

Om man studerar resultaten på klassnivå kan det förekomma tydliga skillnader på samma skola, men mönstret som lösningsfrekvenserna visar ser i stort sett likadant ut från klassnivå till kommunnivå.

Man kan sedan reflektera över varför det ser ut som det gör, att vissa aspekter av innehållet behärskas av färre elever oavsett klass, skola eller kommun. En gissning kan vara att det finns en tradition i undervisningen när det gäller dessa grunder inom matematiken eller att uppgifter i de läromedel som används ser likadana ut. Detta är dock en av de frågor som behöver studeras mer noggrant.

5.2 Uppföljande kartläggning

Några kommuner har valt att, i olika omfattning, göra om kartläggningen en eller två gånger. Det har då främst skett inom årskurserna F – 6 beroende på att kommunen haft möjligheter att göra detta inom den statligt finansierade Läsa-, Skriva-, Räkna-satsningen. I utvärderingen av denna satsning (Skolverket, 2013c) finns följande att läsa;

> [...] verksamhet som bedrivs enligt förordningen (2008:754) om statsbidrag för åtgärder som syftar till att stärka arbetet med basfärdigheterna läsa, skriva och räkna, nedan kallad förordningen. Uppdraget är givet i Regleringsbrevet 2011
>
> Under åren 2008 – 2012 har 1,5 miljarder kronor beviljats för att stärka arbetet med basfärdigheterna läsa, skriva och räkna.
>
> [...]
>
> Syftet med satsningen är att öka elevernas måluppfyllelse genom att förstärka arbetet med basfärdigheter i tidigare årskurser. Huvudmännen bedömer att framför allt elever i årskurs 1-3 i ökad omfattning når målen i svenska och matematik. För äldre elever, där åtgärderna i huvudsak inriktats mot elever i behov av särskilt stöd, är det färre som uppger ökad måluppfyllelse. En stor andel kan inte alls uppge om eleverna nått ökad måluppfyllelse. Så gott som alla huvudmän uppger att statsbidraget lett till förstärkning av redan pågående arbete, vilket är i enlighet med vad som anges i förordningen. Åtgärderna som statsbidraget finansierat har även möjliggjort delvis nya arbetssätt för lärarna. Sju av tio uppger att statsbidraget lett till ändrade arbetsmetoder. (s.1).

Även om lärarna genom formativa test eller diagnoser fått reda på sina elevers brister så är det inte givet att de åtgärdar problemen på ett sådant sätt att undervisningen förbättras. Detta är ett fenomen som beskrivs av Wiliam (2007) på följande sätt.

> Furthermore, even when teachers do manage to use information about students' achievement to adjust or individualize their instruction, teachers may lack the ability to do so effectively. …. Because the teachers not given the feedback from the expert system tended to re-explain how to do problems with the same algorithms that had led to previous failure (Wiliam, 2007, s. 1061).

Wiliams forskningsöversikt visar att det inte är så enkelt att förbättra elevresultat även om läraren blir medvetna om vari elevernas brister består.

Det blir tydligt i de olika kommunerna att kompetensutveckling är en lång process från ord till effekt. Som exempel kan Uppsala kommun tas, liksom projektet Utsikter i Helsingborg och Landskrona kommuner. I båda dessa fall har kommunerna öppet och i olika sammanhang beskrivet sitt arbete med att öka elevernas matematikkunskaper.

Genom att upprepa en kartläggning i några årskurser och jämföra med resultaten från tidigare kartläggningar går det att studera vad som har hänt med elevernas kunskaper. Detta är ett sätt att se om gjorda insatser leder till resultat.

5.2.1 Uppsala

Uppsala kommun har sedan 2006 satsat på matematik i grundskolan på en mängd olika sätt. De första åren anordnade kommunen en kompetensutbildningskurs för grundskolans lärare, ”Att följa och stödja elevers matematikutveckling i skolår 4 – 9”. Lärarna fick söka till kursen och cirka 40 lärare antogs varje år. Kursen sträckte sig över hela läsåret med 8 heldagsträffar med litteratur som skulle läsas och uppgifter som skulle genomföras i klassen mellan träffarna. Kursen behandlade grundläggande aritmetik inklusive rationella tal. Under tiden medverkade skolor och lärare i Uppsala kommun vid utprövning av Diamantdiagnoserna. Detta ledde till att kommunen beslutade att genomföra den första stora kartläggningen av elevers kunskaper med hjälp av Diamantdiagnoserna 2008. Diagnoser genomfördes då i årskurserna F – 8. Uppföljande kartläggningar gjordes sedan 2010 i årskurserna F-5 och 2012 i årskurs 2 och årskurs 4, eftersom kommunen önskade följa upp elevernas kunskapsutveckling.

Resultaten av kartläggningarna presenterades för tjänstemän på kommunnivå och för utvecklingsledare. Därefter följde en presentation under en halvdag för rektorer och en kontaktlärare från var och en av de cirka 60 skolorna. Varje skola fick en pärm med resultat och analyser, samt ett USB-minne med samma innehåll. Detta beskrevs ovan i avsnitt 5.1.4. Därefter förväntades en uppföljning och diskussion på den enskilda skolan enligt ”Nästa Steg”, en liten text som fanns i Skolpärmarna. Rektorerna fick på så sätt reella möjligheter att ta sitt ansvar och utveckla matematikundervisningen.

Resultaten togs emot och användes olika på skolorna. Det har med tiden visat sig att rektors agerande i detta sammanhang hade stor betydelse för hur utvecklingsarbetet på skolan gestaltade sig. Rektors intresse och engagemang är en förutsättning för att utvecklingsarbetet på en skola ska bli framgångsrikt (Fullan, 1995). Huvudsyftet med analysen av diagnosresultaten är att synliggöra var problemen finns och ge verktyg och stöd vid planering av den fortsatta undervisningen så att eleverna kan förbättra sina matematikkunskaper.

Vid kartläggningarna blev det tydligt att lärare som arbetar med de yngre eleverna har ett stort ansvar i och med att de ska lägga en god grund i matematik. Genom sambandsanalyserna blev det även tydligt att bristande förkunskaper starkt påverkar det fortsatta matematikkunnandet.

I de kvalitetsredovisningar som varje skola årligen lämnade in till kommunen framgick det hur man funderade på de olika skolorna i Uppsala utifrån diagnosresultaten. Diamantdiagnoserna tog en naturlig plats i skolans utvecklingsarbete och de kommunala utvecklingsledarna ansåg att en hel del åtgärder vittnade om att man på skolorna, generellt sett, varit modiga och vågat se bristerna.

I samband med Skolverkets Läsa-, Skriva-, Räkna–satsning fick kommunen möjlighet att starta ett nätverk som bestod av en resursperson från varje skola med årskurserna 1 – 6, samt två centralt placerade matematikutvecklare på halvtid. Matematikutvecklarna ledde arbetet i nätverket och ordnade träffar för resurspersonerna som även hade en central roll i kartläggningarna 2010 och 2012. Resurspersonerna utsågs av rektor och hade mandat att driva utveckling på skolan. De skulle även hjälpa till med implementeringen av den nya läroplanen och kursplanen Lgr11. Rektor fick medel så att resursläraren även skulle få tid för inläsning av didaktisk litteratur för att höja nivån på matematikundervisningen.

Efter den första kartläggningen 2008 togs ett antal olika initiativ på kommunal nivå för att kompetensutveckla lärare som undervisade i matematik. Kommunen fortsatte att ordna fortbildningskurser inom grundläggande aritmetik och geometri för grundskolans lärare samt speciella kurser för kommunens speciallärare. För lärare som inte hade utbildning i matematik beställde kommunen Lärarlyftskurser från Uppsala universitet. Lärare som sökte lärarlyftskurser i matematik under denna period beviljades endast dessa kurser.

Uppsala kommun har alltså sedan höstterminen 2006 strategiskt arbetat med att öka måluppfyllelsen i matematik genom att fortbilda lärare och kartlägga elevers kunskaper i aritmetik, mätning och geometri. Vid redovisning av medel som kommunen tilldelats inom Skolverkets Matematiksatsningen 2009 skrev man från kommunen:

> Kartläggning med hjälp av Diamantdiagnoser inom geometri- och mätningsområdena genomfördes vårterminen 2009. Kartläggningen utgjorde ett mycket tydligt stöd.

Vid ett antal nätverksträffar som matematikutvecklarna i kommunen ordnade för resurslärare från de olika skolorna diskuterades resultaten och idéer för uppföljningsarbetet. Lärarna vittnade om att en större medvetenhet om matematikinnehållets struktur vuxit fram ute på skolorna.

Efter den första utvärderingen 2008 ordnade kommunen en uppföljande kompetensutveckling för lärare, *Att våga se – Vi följer upp aritmetikresultaten*, under våren 2009. Kursen innehöll en fördjupning inom den grundläggande aritmetiken och genomfördes under tre halvdagar i olika grupper, åk 1 – 3 med ca 150 deltagare, åk 4 – 6 med 100 deltagare och åk 7 – 9 med 40 deltagare. I inbjudan stod det:

> Flera av de brister som konstaterats är enkla att åtgärda under förutsättning att lärarna har tillfredsställande kunskaper i matematikämnets didaktik. Nu erbjuds lärarna en skräddarsydd utbildning som omfattar tre halvdagar.

Under kursen diskuterades de mål inom aritmetik som eleverna ska nå i olika årskurser, vad det innebär att behärska det aktuella innehållet och hur undervisningen kan gå till. Vid slutat av kursen gjordes en utvärdering där lärarna ombads att svara på hur resultatet av kartläggningen med Diamant hade påverkat deras sätt att arbeta och vad de lärt sig som är användbart i det dagliga arbetet. Många av lärarna, oavsett i vilken årskurs de undervisade, menade att kartläggningen med Diamantdiagnoserna hade varit en ögonöppnare för dem när det gäller matematikundervisningen och synen på elevernas matematikkunskaper.

Lärare i åk 1 – 3 uttryckte att de nu insåg att de skulle ställa större krav på elever i lägre åldrar, att det är OK att kräva mer av eleverna, att våga återuppta färdighetsträning av typ tabellträning och att dessa kunskaper är viktiga. De tyckte vidare att diagnoserna hade hjälpt dem att se strukturen i matematiken och därmed få en genomtänkt struktur i undervisningen. Genom att de fått en djupare inblick i enskilda elevers kunnande, hade de också ett bättre underlag vid utvecklingssamtal.

Deras syn på läromedel hade förändrats och de menade att de nu vågade vara mer kritiska till läromedel och inte låta dessa styra undervisningen. Detta hängde nära samman med att man på många skolor hade diskuterat en tydligare målinriktning för matematikundervisningen. De hade också blivit mer medvetna om vad som är viktigt att ta upp i undervisningen och även insett betydelsen av elevernas förkunskaper. Flera av lärarna menade att Diamantdiagnoserna hade gett dem underlag för att samtala om matematik med eleverna.

Lärare i årskurserna 4 – 6 sa att de arbetade mer målmedvetet och följde upp resultaten, att de hade fler genomgångar, och att de såg samband och en kontinuitet på ett annat sätt. De uttryckte även att det kändes bra att veta att man kan ställa krav på eleverna och att nivån måste höjas. Vidare uttryckte flera lärare att de nu förstod algoritmernas värde och uppbyggnad och hur man på ett tydligt sätt kan undervisa om dem.

Här är några lärarröster:

> Blivit tydligare i min undervisning med mer fokus på målen för olika delmoment, har förstått färdighetsträningens betydelse.
>
> Ställer högre krav på eleverna. Gett mig vilja och stöd att ta större ansvar för matematiken.
>
> Ger mig en säkerhet att veta var eleverna befinner sig för att ha möjlighet att individualisera.
>
> Jag är mer medveten om hur jag undervisar, hur jag använder matematiskt språk och vilket material jag använder, både jag och eleverna har förstått vad de ska kunna och vad jag ska undervisa om.

Lärarna i årskurserna 7 – 9 tyckte att de hade fått bra redskap för tydlig uppföljning och att de nu vågade kräva mer av eleverna. Flera beskrev att det kändes skönt att veta att de kan fortsätta ställa krav på eleverna när det gäller kunskaper och på så sätt känner de sig tryggare i lärarrollen. Medvetenheten om elevernas brister och hur dessa kan åtgärdas sades också ha bidragit till en trygghet i undervisningen och att de fått stöd i hur viktigt det är att använda ett korrekt matematiskt språk. Dessa lärare vittnade även om att ämneslärarna hade fått igång en bra diskussion och att de insett vikten av att prioritera baskunskaper och att fånga upp elever i årskurs 7 med otillräckliga kunskaper.

Hattie (2009) menar att elevernas framgång i matematik beror till stor del på lärarens förhållningssätt till matematikämnet och de arbetssätt som används i undervisningen. Att förändra förhållningsätt och arbetssätt kan ta tid och kräver tålamod. Förändring behöver därför ses som en långsiktig process.

I Uppsala Nya Tidnings nätupplaga, UNT.SE (2010-02-06) kunde man läsa följande. *”Betygstrenden i nian är klart positiv för de kommunala skolorna i Uppsala. Det var i en artikel för fyra år sedan som Per Pettersson (Skolchef) lovade att avgå om inte betygen i nian förbättrades.”* I artikeln beskrivs vidare att kommunen tagit fram ett system för kvalitetssäkring, uppföljning och stöd. I ett särskilt dokument varje år redovisar skolorna läget enligt en mall med givna parametrar. Vidare beskriver skolchefen att kommunen satsar på kompetenshöjning av lärarna. Detta medvetna arbete, där matematiken varit en del har alltså lett till resultat.

Här följer några exempel från de dokument som lämnas in varje år från skolorna.

> Matematik – Diamantdiagnoser satte fokus på en ökad satsning på 1 – 3. En lärare går på lärarlyftet i kreativ matematik. Skolverkets nya mål för årskurs 3 är tydliga. Diamantdiagnoserna används kontinuerligt i klasserna.
>
> Matematikämnet – en studiecirkel är genomförd där grannskolorna har inbjudits. Lärarna har träffats och gått igenom begrepp, räknelagar och strategier i aritmetiken. Ett läromedel har bytts ut mot ett som svara bättre mot målen. 3 lärare går lärarlyftet i matematik. Diamantdiagnoserna var en väckarklocka och används i bedömningsarbetet. En helt ny medvetenhet har växt fram hos lärarna.
>
> Matematik – diamantdiagnoserna gjorde att skolan valde att arbeta med matematik som utvecklingsområde. Alla elever jobbar med matematik varje dag. Stor vikt har lagts vid att automatisera tabeller i samtliga räknesätt dels som daglig träning och dels som läxor. Färdighetsträningen har givit resultat och mottagande skolor har noterat förbättringen. Eleverna tycker att matematik är roligt.
>
> Matematik – diamantdiagnoserna väckte intresse för att utveckla lärandet av matematik på studiedagar. Mer laborativt material används i skolarbetet. Specialpedagogerna testar elevernas matematikkunskaper varje år. Eleverna visar större glädje för ämnet och de är intresserade av varandras sätt att lösa uppgifter.
>
> Matematik – Diamantdiagnosen och NP-resultat gjorde att det kändes angeläget att göra en insats för att förbättra elevernas kunskaper. Lärare deltar i lärarlyftet i matematik. Deltagandet i kartläggningen har skapat nya kunskaper hos lärarna och påfyllning av nya rön och tid till reflektion har varit stimulerande och bra.

Flera skolor har också skrivit utvecklingsplaner i matematik utifrån Diamantdiagnoserna.

Hur resultaten utvecklats över tid framgår av lösningsfrekvenserna i följande tabeller. Kartläggningarna gjordes i maj månad 2008 samt i början av september 2010 och 2012. Denna skillnad i tidpunkt torde inte ha någon större betydelse för resultaten.

Diagnos AG1, Årskurs 1

Lösningsfrekvenserna på diagnos AG1 visar en långsam förbättring (Tabell 21). Fortfarande är lösningsfrekvenserna på subtraktionsuppgifterna 1b och 2b lägre än för motsvarande additionsuppgifter, 1a och 2a. Något fler elever behärskar även de uppgifter som testas i 3a och 3b.

Tabell 21.

AG1, Addition och subtraktion inom talområdet 1-9. Resultat över tid. Andelen elever med 6 rätt på uppgiftsgrupperna. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftsstyp	Åk 1 maj 2008	Åk 2 sept 2010	Åk 2 sep 2012
n=		1590	1688	1685
1a.	6 + 1, 2 + 4	91	94	94
1b	9 – 1, 8 - 6	74	79	79
2a	4 + 4, 3 + 5	78	81	85
2b	8 – 4, 9 - 4	60	61	66
3a	4 + _ =9	43	45	52
3b	8 = 2 + _	30	27	36

Diagnos AG2, Årskurs 1

Även på diagnos AG2 har en förbättring skett från 2008 till 2010 men sedan planar resultaten ut (Tabell 22). Skillnaden i lösningsfrekvens mellan addition och subtraktion kvarstår och de öppna utsagorna har 2012 lägre lösningsfrekvens.

Tabell 22.

AG2, Addition och subtraktion inom talområdet 10-19 utan tiotalsövergång. Resultat över tid. Andelen elever med 6 rätt på uppgiftsgrupperna. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftsstyp	Maj 2008 i åk 1	Sept 2010 i åk 2	Sept 2012 i åk 2
n=		1552	1639	1574
1a	10+7, 10+_=13	70	80	81
1b	18–10, 18 - 8	49	60	61
2a	17 + 1, 2 + 14	61	70	70
2b	18 – 2, 18 - 16	23	35	39
3a	14 + 5, 5 + 14	41	46	43
3b	19 – 4, 19 - 14	15	23	21
4a	14+_=19, 5+_=18	14	22	17
4b	18=3+_, 18=13+_	10	17	11

Diagnos AG4, Årskurs 4

Diagnos AG4 testar elevernas taluppfattning och förmåga att generalisera basfakta till ett större talområde. Detta är kunskaper som de flesta elever borde ha efter årskurs 3 enligt kunskapskraven. Diagnosen har genomförts i slutet av eller efter årskurs 4 och lösningsfrekvenserna visar att det inte skett någon förändring från 2008 till 2010 (Tabell 23).

Tabell 23.

AG4, Addition och subtraktion inom talområdet 20-99, med och utan tiotalsövergång. Resultat över tid. Andelen elever med 6 rätt på uppgiftsgrupperna. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftsstyp	Maj 2008 i åk 4	Sept 2010 i åk 5
n=		1579	1437
1a	40+30	87	83
1b	70-20	86	82
2a	40+7	88	86
2b	68-8	78	76
3a	27+1	80	80
3b	38-2	61	61
4a	84+9	51	48
4b	63-8	35	36

Diagnos AG6, Årskurs 4

Multiplikstionsfakta testades med diagnos AG6. Även på denna diagnos är lösningsfrekvenserna oförändrade mellan de båda mättillfällena (Tabell 24).

Tabell 24

AG6, Multiplikationsfakta (multiplikationstabellen). Resultat över tid. Andelen elever med 6 rätt på uppgiftsgrupperna. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftsstyp	Maj 2008 i åk 4	Sept 2010 i åk 5
n =		1567	1387
1a	2·6, 6·2	96	95
1b	4·6, 6·4	73	74
2a	3·8, 8·3	77	76
2b	6·7, 7·6	56	57
3a	5·4, 4·5	71	70
3b	7·8, 8·7	41	43

Diagnos RB1 (BD1), Årskurs 4

Diagnos RB1 testar grunderna inom bråkbegreppet. Detta är kunskaper som elever ska ha efter årskurs 3 enligt kunskapskraven. Diagnosen har genomförts i slutet av eller efter årskurs 4 och lösningsfrekvenserna visar en liten positiv förändring från 2008 till 2010 (Tabell 25). Diagnosen finns i Figur 4.7.

Tabell 25.

BD1, En del av en hel. Resultat över tid. Andelen med rätt på uppgiften. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift	Maj 2008 i åk 4	Sept 2010 i åk 5
n=	1417	1362
1a	85	90
1b	89	91
1c	89	91
2a	89	92
2b	88	89
2c	92	93
2d	81	82
3a	84	87
3b	87	87
3c	48	52
4a	84	86
4b	82	85
4c	66	72
5a	83	89
5b	76	82
5c	76	80
5d	82	88
6a	91	93
6b	44	44
6c	30	35
7a	57	62
7b	41	43
7c	51	58

Av resultaten på de olika kartläggningar som gjorts i Uppsala kan elevers kunskapsutveckling under de år som utvecklingsprojekten pågått tyckas obetydliga. Vid intervjuer med lärare och vid utvärderingar som gjorts pekar lärare på att de blivit medvetna om vad som behöver göras och hur viktiga de grundläggande matematikkunskaperna som de arbetar med är. Steget från att förstå vad som är viktigt och vad som behöver göras till att detta syns i klassrummet verkar långt, enkelt uttryckt – det är inte lätt att ändra en vana. Utvecklingen av skolans verksamhet är ofta en trög process, ett fenomen som forskare har studerat under lång tid (Fullan, 1995).

I utvärderingarna av utvecklingsarbetet i Uppsala framkommer, i linje med vad andra forskare beskriver, att bristen på tid är det kanske största hindret för utveckling. All utveckling kräver tid och den dagliga verksamheten fyller redan arbetsdagen.

Sammanfattningsvis kan man alltså se hinder både på organisationsnivå och på individnivå, något som också blev tydligt inom utvecklingsprojektet i Uppsala. Det är viktigt att se förändring som en process över tid och i den processen har skolledare och lärare ofta skilda förhållningssätt till förändringsarbetet. Ur ledningsperspektiv ser man skolan som en helhet medan lärare kan ta utgångspunkt i egna erfarenheter och frågor. I ett förslag till ett uppföljningsarbete för Uppsala kommun pekas detta ansvar ut på olika nivåer, såväl individuellt som gemensamt. Kompetensutveckling i skolan är både en individuell och en kollektiv process. Det kollektiva arbetet består inte sällan av diskussioner som leder vidare till att lärare söker ytterligare ny kunskap och man får vara beredd på att det kan ta ett antal år innan man ser effekter av ett utvecklingsarbete.

5.2.2 Utsikter.

Ett annat projekt inom vilket kartläggningar med Diamantdiagnoserna har använts är Utsikter i Helsingborg och Landskrona kommuner. Utsikter startade 2008 som en följd av det framgångsrika arbetet i SkolFam inom Helsingborgs kommun. Utgångspunkten var forskningsrapporter som visade att barnens framtid påverkas av hur det går för dem i skolan och att det finns vissa grupper av barn som i högre grad än andra riskerar att inte klara sin utbildning. På SkolFams hemsida beskrivs projektets bakgrund så här:

> Bakgrund
>
> Professor Bo Vinnerljung har i vetenskapliga studier visat att samhällets vård av familjehemsplacerade barn inte hjälper barnen på lång sikt. Utifrån resultatet av Vinnerljungs studie startades Skol-Fam® som ett forskarstött projekt i Helsingborg 2005, med fokus på att ge familjehemsplacerade barn bättre framtidsutsikter genom satsningar på goda utbildningsresultat. I projektet medverkade bland annat Bo Vinnerljung och FD, leg. psykolog Eva Tideman. En utvärdering av projektet gjordes 2008 med goda resultat och idag är arbetsmodellen Skol-Fam® en permanent del av familjehemsverksamheten. Arbetet drivs i samverkan mellan skol- och fritidsförvaltningen och socialförvaltningen i Helsingborg och i nuläget arbetar SkolFam®med ett trettiotal familjehemplacerade barn.
>
> Det nationella samarbetet kring arbetsmodellen drivs i samverkan med Sveriges Kommuner och Landsting och Stiftelsen Allmänna Barnhuset.
>
> Syfte: Att öka förutsättningarna för bättre skolresultat bland familjehemsplacerade barn för att skapa bättre framtidsutsikter för målgruppen. (www.skolfam.se)

Projektet PArT, som är kopplat till SkolFam, är också en del i arbetet med att utveckla matematikundervisning i Helsingborg och Landskrona kommuner.

> PArT, Preventivt Arbete Tillsammans, är ett lokalt samverkansarbete i Helsingborg och Landskrona. PArT:s övergripande syfte är att stimulera och stödja framväxten av utvecklande aktiviteter som kan förbättra utvecklingen för barn och ungdomar. I ett försök att konkretisera målet god utbildning har Part valt att fokusera på matematik och språk. Forskning visar att dessa områden är avgörande för fortsatt inlärnings- och kunskapsutveckling för barn.(www.partinfo.se)

Som en del inom PArT, och med utgångspunkt i SkolFam startade projektet Utsikter 2008. Tanken var även här att ta fram kunskapsutvecklingssystem i bland annat matematik. I olika informationsskrifter, exempelvis *Utsikter för bättre utbildning och hälsa* (www.partinfo.se), är olika delar av projektet beskrivet. Här räcker det med en sammanfattande beskrivning:

När Utsikter startade på sju skolor i Helsingborg och Landskrona var målet detsamma som i SkolFam. För de elever som riskerade att inte klara skolan skulle förutsättningarna för god utbildning och hälsa förbättras. En positiv utveckling i skolan skulle ge barnen större möjligheter i framtiden. Från början riktades arbetet till enskilda barn i två riskgrupper: barn i ekonomiskt utsatta familjer och barn som var nyanlända i Sverige. Det utvecklades olika arbetssätt för att stödja eleverna i skolan och för att följa upp deras resultat. Utsikter var ett utvecklingsarbete med mål att alla barn skulle kunna göra det bästa av sina förmågor. Arbetet var direkt knutet till sju skolor där elever, föräldrar, pedagoger och skolledare tillsammans bidrog till att driva utvecklingen framåt.

I arbetet kring de två riskgrupperna blev det uppenbart att det också krävdes satsningar på grupp- och organisationsnivå för att det skulle gå bättre för varje enskilt barn. Utsikter utvecklades därför till ett långsiktigt arbete på de sju skolorna (fem i Helsingborg och två i Landskrona). Olika arbetsmodeller togs fram för att positivt påverka utvecklingen i klasserna.

Redan från början infördes analys av barnens resultatutveckling i matematik och språk (svenska), för att kunna avgöra vilka behov varje enskilt barn hade och för att kunna diskutera vad skolan kunde göra för att optimera undervisningen och stötta barnen. Dessa analyser synliggjorde om insatserna gav positiv effekt på barnens utveckling eller om nya metoder skulle arbetas fram. Från arbete med enskilda barn utvecklades projektet till arbete med hela klasser på några skolor. På kort tid utvecklades Utsikter till ett viktigt, mångfacetterat och verkningsfullt arbete som gjorde positiv skillnad för elever, klasser och skolpersonal. Arbetet byggde på en aktiv samverkan mellan flera förvaltningar inom Helsingborgs stad, Landskrona stad och Region Skåne.

En del inom Utsikter var ett fördjupat analysarbete i matematik för att stötta lärare och rektorer i planeringen av matematikundervisning och utveckling av verksamheten. När Utsikter fokuserade på gruppnivån fortsatte skolorna att systematiskt följa och analysera matematikresultaten i klasserna. Analysarbetet spred sig och kom att ingå som en central del i skolornas utvecklingsarbete. Tillsammans med en analysledare gick lärare, elevhälsoteam och skolledning igenom klassresultaten för att se vad som behövde göras för att förbättra elevernas hälsa och utbildningsresultat. Så långt deras egna beskrivningar.

I Helsingborgs kommun gjordes en kartläggning på samma sätt som tidigare beskrivits i avsnitt 5.1 ovan. Detta blev utgångspunkt för fortsatt fördjupad kartläggning inom de skolor som tillhörde Utsikter. Eftersom denna fördjupade kartläggning var ett mindre projekt än Uppsala kommun (dock cirka 200 elever per årskurs) blev det möjligt att ha nära kontakt med varje skola. Resultatet för hela skolan och även för de enskilda klasserna redovisades för rektor, en grupp lärare och ansvarig speciallärare på varje skola. Resultatredovisningen togs emot positivt på skolorna även om resultaten inte var så positiva.

Redan efter första kartläggningen 2009 startade man inom Utsikters matematikprojekt ett uppföljningsarbete som innebar fortbildning för matematiklärarna på skolan. Lärarna fick hjälp av en handledare, som var en välutbildad lärare från en annan kommun. De studerade didaktisk litteratur och använde samtidigt Diamantmaterialet och tolkade och analyserade resultaten i klassen. På skolan hölls regelbundna träffar där lärarna fick stöd av handledaren att utveckla undervisningen. Även projektets ansvarige speciallärare och rektorn medverkade.

Den första kartläggningen följdes sedan upp med nya kartläggningar i början av vårterminerna 2010 och 2011. Den inom projektet ansvariga specialläraren menade att kontinuiteten och närheten hade hjälpt till att förbättra resultaten. Under våren 2013 ansåg hon att de kommit en bit framåt i sitt systematiska analysarbete med utgångspunkt från Diamantdiagnoserna och såg en positiv utveckling. Hon berättade vidare att resultaten inom skolorna varierar en hel del. Hon refererade då till att målbilder för vad eleverna skulle erövra för kunskaper i aritmetik togs fram och berättade att nu för första gången klarade ettorna på en av skolorna AG1 i god tid före sommarlovet. Hon framhöll att när projektet startade var det inte många som trodde på vad höga förväntningar kunde leda till.

Vidare menade hon att:

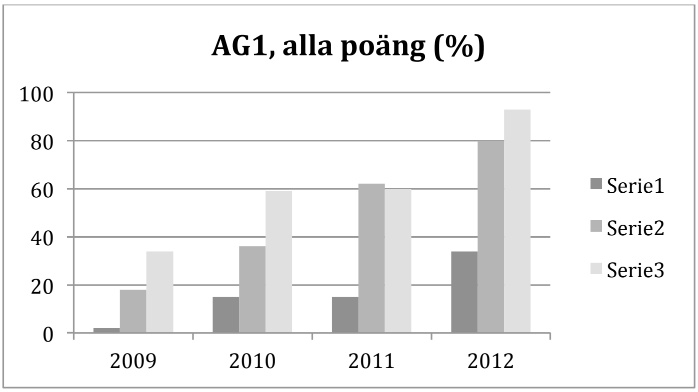
> Intressant är också att vi inte kan koppla resultaten till någon specifik metod utan det vi däremot kan härleda goda resultat till är lärarens känsla av att vara kompetent mattelärare och säkerheten den har att använda många olika metoder. Kom-

munen satsade stort under många år på en speciell metod. Vi ser inte att de klasserna har bättre resultat utan precis lika stor variation som övriga klasser.

Under de år som projektet pågick hade lärarna stöd av en handledare. Cirka en gång i månaden hade man analyssamtal, och handledaren hjälpte även lärarna att lägga upp en långsiktig och hållbar terminsplanering.

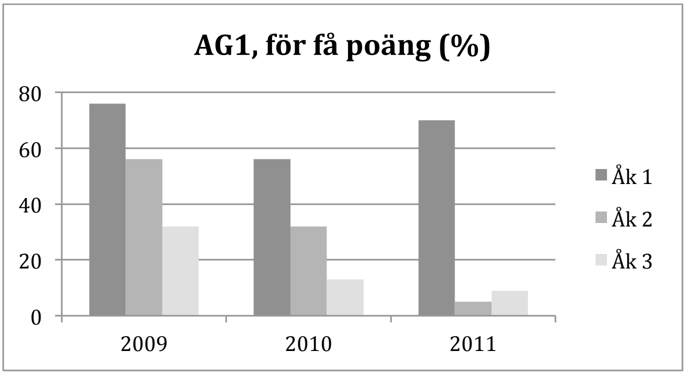
Resultatjämförelser över tid inom projekt Utsikter 2009, 2010, 2011och 2012 i 7 skolor.

De två diagrammen nedan, Figur 5.2 och Figur 5.3, är hämtade från informationsmaterial utgivet av Utsikter. Med hjälp av dem beskrivs hur elevernas matematikkunskaper har utvecklats.



Figur 5.2. Projekt Utsikter, Jämförelser över tid, alla rätt. Addition och subtraktion inom talområdet 1-9, AG1.

Utsikter presenterar sina resultat på AG1 med diagrammet i Figur 5.2. Samma diagnos gavs tidigt under vårterminen i tre årskurser, mörkgrå årskurs 1, mellangrå årskurs 2 och ljusgrå årskurs 3. Innehållet i diagnosen är sådant som alla elever ska behärska i slutet av årskurs 1, så alla elever i årskurs 2 borde ha klarat denna diagnos. År 2012 är det 80% av eleverna inom projektet som klarar den i årskurs 2.



Figur 5.3. Projekt Utsikter, Jämförelser över tid, för få rätt. Addition och subtraktion inom talområdet 1-9, AG1.

Det är intressant att se hur många som har alla rätt i en uppgiftsgrupp. Kravet att inte gör ett enda fel på diagnosen kan synas alltför tufft. Därför redovisas ofta elever som har alla och nästa alla rätt, samt elever som har för få rätt. Detta är möjligt eftersom de uppgifter som testats med Diamantdiagnoserna inom aritmetiken är av den karaktären att man ska behärska alla uppgifter med flyt, för att lyckas med den fortsatta matematiken (Kilpatrick m.fl., 2001). Av Figur 5.3 framgår att det 2011 var endast ca 5% av eleverna i årskurs 2 som hade för få rätt, vilket är ett synnerligen bra resultat.

Från kartläggningarna inom Utsikter för åren 2009, 2010 och 2011 följer här resultat för några centrala diagnoser: AG1, AG4, AG6 och BD1. Resultaten avser runt 200 elever per år.

Diagnos AG1, Årskurs 1

Tabell 26 visar lösningsfrekvenserna på AG1 vid tre mättillfällen. Den visar en förbättring vid andra mättillfället men sedan en viss tillbakagång vid tredje mätningen.

Tabell 26.

AG1, Addition och subtraktion inom talområdet 1-9. Jämförelser över tid. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftstyp	Utsikter 2009	Utsikter 2010	Utsikter 2011
1a	6 + 1, 2 + 4	74	81	78
1b	9 – 1, 8 - 6	43	64	51
2a	4 + 4, 3 + 5	50	64	55
2b	8 – 4, 9 - 4	25	49	33
3a	4 + _ =9	10	36	23
3b	8 = 2 + _	3	20	16

Tabell 27 visar andelen elever som har för få rätt på hela diagnosen. Vid mätningarna 2010 och 2011 är det färre elever i årskurs 2 och 3 som har för få rätt på diagnosen AG1 än vid kartläggningen 2009. Här har således skett en tydlig förbättring.

Tabell 27.

*AG1, Addition och subtraktion inom talområdet 1-9. Andel elever som har **för få** uppgifter rätt lösta. Jämförelser över tid. Lösningsfrekvens i procent.*

AG1	Utsikter 2009	Utsikter 2010	Utsikter 2011
Årskurs 1	76	56	70
Årskurs 2	56	32	5
Årskurs 3	32	13	9

Tabell 27 visar samma resultat som Figur 5.3.

Diagnos AG4 Årskurs 4

Utgående från kunskapskraven i Lgr11 så borde eleverna behärska det innehåll som testas i AG4 på våren i årskurs 4. Lösningsfrekvensen per uppgift på diagnosen AG4 visar en tendens till förbättring (Tabell 28).

Tabell 28.

AG4, Addition och subtraktion inom talområdet 20-99, med och utan tiotalsövergång. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftsstyp	Utsikter 2009	Utsikter 2010	Utsikter 2011
1a	40+30	74	78	81
1b	70-20	73	75	79
2a	40+7	76	83	86
2b	68-8	49	58	58
3a	27+1	60	65	76
3b	38-2	36	42	54
4a	84+9	31	30	41
4b	63-8	15	17	29

När det gäller elevresultaten på hela diagnosen är det färre elever som har för få rätt 2011 än 2009 (Tabell 29).

Tabell 29.

*AG4, Addition och subtraktion inom talområdet 20-99, med och utan tiotalsövergång. Andel elever som har **för få** rätt. Lösningsfrekvens i procent.*

AG4	Utsikter 2009	Utsikter 2010	Utsikter 2011
Årskurs 3	78	75	66
Årskurs 4	67	66	51
Årskurs 5	61	49	47

Diagnos AG6, Årskurs 4

Multiplikationsfakta testas med AG6. Enligt matematikkursplanens kunskapskrav ska eleverna i årskurs 4 behärska de delar av AG6 som testas i 1a, 1b, 2a och 3a. I årskurs 5 bör eleverna behärska samtliga basfakta i multiplikation alltså även 2b och 3b. Av lösningsfrekvenserna framgår att när det gäller multiplikationsfakta har det inte hänt så mycket under åren (Tabell 30). På dessa skolor, precis som i övriga landet, är det alldeles för många elever som inte behärskar multiplikationsfakta.

Tabell 30.

AG6, Multiplikationsfakta (multiplikationstabellen). Resultat över tid. Andelen elever med 6 rätt på uppgiftsgrupperna. Lösningsfrekvens i procent.

	Uppgiftsstyp	Utsikter 2009	Utsikter 2010	Utsikter 2011
1a	2·6, 6·2	85	89	80
1b	4·6, 6·4	54	54	48
2a	3·8, 8·3	50	65	55
2b	6·7, 7·6	20	39	32
3a	5·4, 4·5	41	54	49
3b	7·8, 8·7	16	30	22

Elevresultaten på hela diagnosen AG6 visar emellertid en liten tendens till förbättring (Tabell 31).

Tabell 31.

*AG6, Multiplikationsfakta (multiplikationstabellen). Resultat över tid. Andel elever som har **för få** rätt. Lösningsfrekvens i procent.*

AG6	Utsikter 2009	Utsikter 2010	Utsikter 2011
Årskurs 4	69	53	62
Årskurs 5	27	47	36
Årskurs 6	28	16	29

I Tabell 31 går det även att se en förbättring inom elevgruppen genom att följa den gråmarkerade diagonalen, från årskurs 4 2009 till årskurs 5 2010 och slutligen årskurs 6 2011. Detsamma gäller för åk 4 2010 till åk 5 2011.

När elevernas grundläggande förståelse av bråkbegreppet testades 2009, blev många lärare överraskade. Det var ett begrepp som de inte direkt fokuserat på i undervisningen. De fick genom den första kartläggningen upp ögonen för att arbeta tidigare med bråkbegreppet. Med hjälp av de handledda träffarna har elevernas resultat förbättrats. Av Tabell 32 framgår att lösningsfrekvensen på de olika uppgifterna har ökat. Diagnosuppgifterna finns i Figur 4.7.

Diagnos RB1 (BD1) Årskurs 4

Tabell 32

RB1, En del av en hel. Resultat över tid. Andelen elever med rätt på uppgiften. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift	Utsikter 2009	Utsikter 2010	Utsikter 2011
1a	48	57	75
1b	47	56	73
1c	48	55	74
2a	51	62	73
2b	50	66	74
2c	57	69	76
2d	39	50	54
3a	44	69	57
3b	48	70	59
3c	8	24	12
4a	40	63	64
4b	42	63	61
4c	32	48	38
5a	33	58	62
5b	20	45	49
5c	26	52	57
5d	30	56	59
6a	59	74	78
6b	16	33	27
6c	27	24	19
7a	28	33	31
7b	19	28	23
7c	18	32	25

Den del av bråkbegreppet som testas med RB1 (BD1) ska eleverna, enligt kursplanens kunskapskrav, behärska i slutet av årskurs 3. Det har här skett en liten förbättring av lösningsfrekvenserna från 2009. Lösningsfrekvensen på uppgift 3c och 6 c, som testar en generalisering av elevens förståelse av en del av en hel, är fortfarande betydligt lägre.

Elevresultaten på hela diagnosen (Tabell 33) visar att 35% av eleverna fortfarande har för få rätt på våren i årskurs 5.

Tabell 33.

RB1(BD1), En del av en hel. Resultat över tid. Andelen elever med ***för få*** *rätt på uppgiften. Lösningsfrekvens i procent.*

RB1 (BD1)	Utsikter 2009	Utsikter 2010	Utsikter 2011
Årskurs 4	84	73	72
Årskurs 5	-	40	35

Arbetet med matematik inom Utsikter startade 2008 och fem år senare hade Utsikter vuxit till ett omfattande utvecklingsarbete och resultaten är till stor del positiva. Sommaren 2013 avslutades Utsikterprojektet som Socialförvaltningen ansvarat för. Utbildningsförvaltningarna i båda städerna tog då över ansvaret och avsåg att inom ordinarie verksamhet fortsätta arbetet för bättre utbildning och hälsa för alla barn.

5.3 Svenska elevers matematikkunskaper

Under senare år har svenska elevers grundläggande kunskaper i matematik försämrats, vilket får konsekvenser när de ska utveckla sina kunskaper vidare. Vid de omfattande kartläggningar som gjorts i olika kommuner framträder ett tydligt mönster. Många elever har inte förstått eller befäst de inledande grunderna i årskurserna 1 – 3 och detta får följdverkningar vid fortsatt inlärning av matematik.

5.3.1 Grundläggande addition och subtraktion

All inlärning kräver någon form av förförståelse. Om speciella förkunskaper saknas kan det vara omöjligt att tillägna sig en viss kunskap. Matematik är ett område som bygger på en klar struktur och är därmed starkt beroende av tidigare kunskap. God taluppfattning och att behärska basfakta är nödvändigt för att komma vidare i sin kunskapsutveckling.

Det mest grundläggande inom god taluppfattning är att behärska talens namn och ordning och att med hjälp av detta kunna utföra olika uppräkningar. När eleverna lämnar förskoleklassen har en stor andel av dem denna förförståelse, vilket konstaterats med hjälp av diagnosen AF (Fredriksson, 2009). Det finns därmed en adekvat förförståelse hos de flesta elever att utgå ifrån i undervisningen i årskurs 1.

När man löser matematiska problem så finner man ofta lösningen efter ett resonemang med en annan person. Då använder man sig av ett språk för att diskutera given information och komma fram till en lösning. I det sammanhanget är det viktigt att kunna använda matematikens olika språk, aspekter och uttrycksformer med flyt. För att förstå vad som menas kan man jämföra med hur det är att uttrycka sig på ett nytt språk. Det gäller då att behärska de ord som ska användas och den grammatik som behövs för att göra påståenden i det nya språket. Trots att man känner till såväl orden som grammatiken tar det tid innan man har automatiserat det nya språket som uttrycksmedel. Detta väl kända fenomen orsakas bland annat av människans begränsade minneskapacitet. När man vill uttrycka något är det innehållet som står i fokus. Om man samtidigt måste leta efter ord och grammatik i minnet så klarar man inte att uttrycka det man avser. För att utveckla dessa kunskaper lär man in ett antal glosor och vanliga fraser på ett sådant sätt att man automatiskt kan hämta fram dem och därmed koncentrera sig på innehållet i kommunikationen. Genom att öva sig i att tala språket befästs dessa grundläggande kunskaper.

Att lösa matematiska problem och att använda huvudräkning eller algoritmräkning fungerar på motsvarande sätt. För en elev som ska addera 598 och 236 i huvudet räcker det inte att känna till talens namn och storlek och vad det innebär att addera. Eleven måste också behärska en lämplig strategi för att utföra additionen, bland annat genom att använda räknelagar och räkneregler. Detta förutsätter att hon behärskar delkunskaper som att 8 + 2 = 10 och 6 – 2 = 4 på ett sådant sätt att hon direkt kan använda dem. Dessa delkunskaper ska hon sedan kunna generalisera till exempelvis 598 + 2 = 600 eller 236 – 2 = 234, något som är nödvändigt för att kunna utföra en följd av beräkningar såsom 598 + 236 = 598 + (2 +234) = (598 + 2) + 234 = 600 + 234 = 834 i huvudet. För en person som behärskar detta sker denna beräkning momentant, precis som man direkt språkligt kan uttrycka något, utan att fundera över ordbildning och grammatik. Eleven behöver alltså såväl förstå innebörden i en operation som ha färdighet att utföra operationen. Eftersom beräkningarna ofta är en självklar del i matematisk problemlösning så bör detta ske utan större tankemöda.

Data från kartläggningar visar emellertid elevers bristande kunskaper redan inom detta, för matematikkunskaper, avgörande område. Eleverna behöver behärska ett antal basfakta inom de fyra räknesätten, väl automatiserat, och sedan känna till den grundläggande ”grammatiken”, alltså innebörden i de räknelagar som behövs för att kunna utföra operationer. Dessa lagar och regler är även viktiga när det gäller kommande områden som algebra och ekvationslösning.

I kapitel 3 har konstruktionen av Diamantdiagnoserna beskrivits och där framgår att den elev som behärskar begreppet som testas med en diagnos ska ha alla rätt på diagnosen. Fördjupade studier och analyser visar att så också är fallet. Elever som behärskar de grundläggande begreppen inom aritmetiken, har alla eller nästan alla rätt på diagnoserna inom AG. Dessa förkunskaper krävs för fortsatt lärande inom matematik. Väsentlig information i sammanhanget ges av andelen elever som har för få rätt, eftersom dessa elever troligen kommer att få problem framöver om de inte får ytterligare väl strukturerad undervisning om det aktuella begreppet och därmed lyckas befästa nödvändiga förkunskaper.

Tabellen 34 visar andelen elever som har alla rätt, nästan alla rätt eller för få rätt på diagnoserna för grundläggande addition, subtraktion och multiplikation. Diagnoserna har getts i slutet av respektive läsår och genomförts av mellan 2000 – 5000 elever i respektive årskurs.

Tabell 34.

Grundläggande aritmetik, addition och subtraktion. Andel elever med alla, nästan alla och för få rätt, per diagnos och årskurs. Lösningsfrevens i procent.

		AG1	AG2	AG3	AG4	AS2
	Alla	14	2			
Årskurs 1	Nästan alla	30	11			
	För få	55	86			
	Alla	24	6	11		
Årskurs 2	Nästan alla	33	15	18		
	För få	42	79	70		
	Alla	35	17	27	8	
Årskurs 3	Nästan alla	34	24	26	30	
	För få	30	59	46	62	
	Alla		25	35	13	
Årskurs 4	Nästan alla		33	33	35	
	För få		42	33	52	
	Alla			44	16	51
Årskurs 5	Nästan alla			34	36	22
	För få			22	48	27
	Alla			43	18	56
Årskurs 6	Nästan alla			34	36	23
	För få			22	46	21

Diagnosen AG1 testar addition och subtraktion i talområdet 1 – 9. Enligt samtal med lärare runt om i landet så råder en enighet om att eleverna bör behärska detta innehåll i slutet av årskurs 1. Äldre lärare vittnar idag om att betydligt fler elever behärskade detta innehåll för 20 år sedan. Undervisningen fortsätter i årskurs 2 med utvidgade talområden och då får de elever som inte behärskar grunderna svårt att hänga med. De använder ofta metoden att räkna på fingrarna vilket inte är hållbart vid beräkningar med större tal.

Endast ett fåtal av de elever som lämnar årskurs 1 utan att ha befäst baskombinationerna i addition och subtraktion, lär sig detta under årskurs 2 eller årskurs 3. I årskurs 2 är det fortfarande 42% som har för få rätt och i årskurs 3, 30%. Andelen elever som har alla rätt är endast 35% i årskurs 3. Denna andel borde ligga runt 90 %. Den addition och subtraktion i talområdet 1 – 9 som testas är inte svåra att lära sig eller att komma ihåg. En nära till hands liggande tolkning av dessa resultat är att det redan här går att se en orsak till mindre bra resultat för svenska elever i de internationella kunskapsutvärderingarna.

Som kommentar till mindre bra resultat på AG1, menar lärare i intervjuer att de arbetar med förståelse och inte utantillinlärning. Självklart är förståelse av dessa grundläggande operationer centralt, förutsatt att den bygger på kunskap om räknelagar och räkneregler. Under inlärningen ska man samtala om matematik och synliggöra räknelagar för eleverna, alltså arbeta med förståelse. Resultatet av denna förståelse är att ha automatiserat basfakta. Sättet att tänka som grundläggs inom talområdet 1 – 9 kan sedan användas vid huvudräkning inom större talområden. Lösningsfrekvenser visar att eleverna har svårare för subtraktion än för addition och att det är få elever som ser sambanden mellan tal när de förekommer i en öppen utsaga (Figur 4.28).

Genom att följa elevernas kunskapsutveckling och betrakta resultaten i diagnos AG2, addition och subtraktion inom talområdet 10 – 19, utan tiotalsövergång, framgår att andelen elever som har för få rätt i slutet av årskurs 2 är hela 79%. Det betyder att 4/5 av eleverna inte klarar uppgifter av typen 14 + 5, 19 – 4 eller 19 – 14, efter två år i skolan. Uppgifterna är mycket enkla för dem som fått lära sig att generalisera tidigare kunskaper såsom 4 + 5 = 9 och 9 – 4 = 5. Samma mönster i lösningsfrekvenserna som på AG1 återkommer på AG2. Det är lägre lösningsfrekvens på subtraktionsuppgifterna, (Figur 4.33 och 4.37) och de flesta av de elever som inte behärskar de kunskaper som AG2 testar i slutat av årskurs 2, har samma problem i efterföljande årskurser. I årskurs 4 är det endast en fjärdedel av eleverna som har alla rätt medan hela 42% har för få rätt. Detta är ingen matematikkunskap som kan betraktas som svår och även här ska andelen elever med alla rätt vara runt 90% redan efter årskurs 2.

De kunskaper som testas med diagnosen AG3 är också sådana som eleven ska behärska i slutat av årskurs 2 eller senast i slutet av årskurs 3. Då är det fortfarande 46% som har för få rätt (Tabell 34). Av detta kan slutsatsen dras, att det endast är hälften av Sveriges elever som i någon mån kan anses behärska de grundläggande operationerna inom addition och subtraktion inom talområdet 1 – 19 i slutet av årskurs 3.

Detta är inte i linje med kursplanekraven. Av dem framgår att lärarens undervisning av det centrala innehållet som beskrivs i Lgr11 ska leda till att eleven når följande kunskapskrav i årskurs 3:

> Eleven har grundläggande kunskaper om naturliga tal och kan visa det genom att beskriva tals inbördes relation samt genom att dela upp tal.
>
> …
>
> Eleven kan välja och använda i huvudsak fungerande matematiska metoder med viss anpassning till sammanhanget för att göra enkla beräkningar med naturliga tal och lösa enkla rutinuppgifter med tillfredsställande resultat. Eleven kan använda

> huvudräkning för att genomföra beräkningar med de fyra räknesätten när talen och svaren ligger inom heltalsområdet 0–20, samt för beräkningar av enkla tal i ett utvidgat talområde. Vid addition och subtraktion kan eleven välja och använda skriftliga räknemetoder med tillfredsställande resultat när talen och svaren ligger inom heltalsområdet 0–200. Eleven kan hantera enkla matematiska likheter och använder då likhetstecknet på ett fungerande sätt. (Lgr11)

Elevers kunskaper inom heltalsområdet 1 - 19 som enligt kursplanen krävs efter årskurs 3 är det som har testats med diagnoserna AG1, AG2 och AG3 och visar stora brister i elevernas grundläggande förståelse av matematik.

Diagnosen AG4 har visat sig vara utslagsgivande när det gäller att se kvaliteten i elevers förståelse av den inledande aritmetiken. Den testar om eleven kan använda de kunskaper som de byggt upp inom talområdet 1 – 19 till att generalisera dessa kunskaper till det större talområdet 20 – 99. Detta är kunskaper som eleverna enligt kunskapskraven borde ha i slutet av årskurs 3: ”enkla tal i ett utvidgat talområde”. Så är dock inte fallet. Det är hela 62% av eleverna som har för få rätt på denna diagnos i slutet av årskurs 3 (Tabell 34). Ett år senare, efter årskurs 4, är det 52% och efter årskurs 6 är det 46% som fortfarande har för få rätt på AG4 och alltså inte behärskar dessa basala kunskaper.

Självklart påverkar denna brist på förkunskaper möjligheten för dessa elever att komma vidare i sin kunskapsutveckling inom matematiken. De får troligen svårt med såväl huvudräkning som skriftlig räkning och därmed även med problemlösning. Detta framkommer till exempel vid areaberäkning inom geometrin (Se lösningsfrekvenser i avsnitt 4.4).

Kunskapskraven i årskurs 3 för skriftliga metoder är enligt Lgr11:

> Vid addition och subtraktion kan eleven välja och använda skriftliga räknemetoder med tillfredsställande resultat när talen och svaren ligger inom heltalsområdet 0–200.

För årskurs 6 är kunskapskraven i Lgr11 inte lika tydligt uttalade, men tolkas av lärare på så sätt att man menar att eleverna ska behärska skriftlig subtraktion med naturliga tal när de lämnar årskurs 6.

> Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och miniräknare. Metodernas användning i olika situationer. (Lgr11)

I slutat av årskurs 5 är det 27% av eleverna som löser för få av de fem uppgifter som testar skriftlig subtraktion i AS2 och i årskurs 6 är det fortfarande 21% som löser för få uppgifter rätt (Tabell 34). Endast hälften av eleverna klarar att lösa alla fem uppgifterna korrekt i årskurs 5. Fördjupade studier visar att de elever som inte klarar detta, också har haft sämre resultat på tidigare diagnoser, när det gäller grundläggande subtraktionsfakta.

Intervjuer bekräftar att det ofta är bristande kunskaper av basfakta som gör att eleven löser den uppställda algoritmen fel. Av iakttagelser under genomförandet visade det sig att många elever har räknat med hjälp av fingrarna och det blir tydligt att bristande kunskaper från tidigare blir ett hinder vid beräkningen. Självklart kommer de elever som efter sex år i skolan fortfarande inte till fyllest behärskar grundläggande addition och subtraktion att få stora problem i fortsättningen inom andra områden i matematiken och vid problemlösning.

5.3.2 Grundläggande multiplikation och division

Diagnos AG6 testar multiplikationsfakta, ett klassiskt innehåll i skolans matematikundervisning. Historiskt sett klarade elever multiplikationstabellen betydligt bättre redan i tidigare årskurser. Resultat som tidigare ansågs mindre bra, är klart bättre än dagens resultat (Kilborn, 1979). Redan på 70-talet visade det sig att eleverna hade bristande kunskaper inom grundläggande aritmetik, dock långt ifrån så stora som idag.

Att behärska multiplikationsfakta är betydelsefullt vid till exempel räkning med bråk och potenser, vilka är andra områden som studerats. De mindre bra lösningsfrekvenserna på uppgifter inom dessa diagnoser visar endast resultatet av elevers tankar. Intervjuer av eleverna bekräftar att just multiplikationsfakta har utgjort ett hinder för att kunna lösa uppgifterna rätt.

Tabell 35

Grundläggande aritmetik, multiplikation och division. Andel elever med alla, nästan alla och för få rätt, per diagnos och årskurs. Lösningsfrekvens i procent.

		AG6	AG7	AG8	AS4
	Alla	9			
Årskurs 3	Nästan alla	24			
	För få	67			
	Alla	19			
Årskurs 4	Nästan alla	26			
	För få	55			
	Alla	31	18		
Årskurs 5	Nästan alla	35	29		
	För få	34	53		
	Alla	42	25	23	54
Årskurs 6	Nästan alla	34	33	33	22
	För få	24	42	44	25
	Alla			18	52
Årskurs 7	Nästan alla			32	21
	För få			50	27

Tabell 35, visar andelen elever som har allt rätt, nästan allt rätt eller för få rätt på diagnoserna för grundläggande multiplikation och division. Diagnoserna har getts i slutet av respektive läsår och genomförts av mellan 2000 – 5000 elever.

Vid slutet av årskurs 6 ska alla elever enligt kunskapskraven behärska multiplikationsfakta, men av kartläggningar framgår att 24%, var fjärde elev, inte klarar detta (Tabell 35). Studerar man sedan lösningsfrekvenser på olika uppgiftsgrupper i det resultatschema som finns i Figur 4.41, så framgår det tydligt vilken typ av kombinationer som orsakar störst problem för eleverna. Det är 6-, 7-, 8- och 9-möten och med denna kunskap, hos läraren, borde det inte vara svårt att hjälpa eleverna lära sig dessa få multiplikationsfakta (Figur 4.42).

Vid fortsatt matematikundervisning på högstadiet behöver eleverna kunna använda sina kunskaper i multiplikationsfakta och generalisera denna kunskap, något som testas med diagnos AG7. Av eleverna har 42% för få rätt på denna diagnos vid slutat av årskurs 6. I diagnosen testas bland annat öppna utsagor som innebär uppdelning av tal i faktorer och övergången till division. En konsekvens av att eleverna inte behärskar dessa generaliseringar framgår av att hela 44% i årskurs 6 har för få rätt på diagnosen AG8 som testar division.

Diagnosen AS4 testar skriftlig multiplikation. En fjärdedel av eleverna har för få rätt på dessa multiplikationsuppställningar i årskurs 6 och samma andel har fortfarande problem i årskurs 7. Ett exempel på att om eleven inte behärskar ett innehåll i en årskurs, där det ingår i undervisningen, så kvarstår elevens problem. Detta forsknings- och utvecklingsarbete har gett många exempel på konsekvenserna av bristande förkunskaper. Av sambandsanalyser inom områdena subtraktion och multiplikation i avsnitt 4.3.12 framgår vilka konsekvenser bristande förkunskaper får vid fördjupning av aritmetiken. Det är förstås troligt att dessa förkunskapsbriser även påverkar elevernas problemlösningsförmåga. Vid internationella kunskapsutvärderingar har elevernas mindre bra kunskapsutveckling visat sig.

> Utifrån en analys av den årskull som genomförde TIMSS som årskurs 4-elever 2007 och som årskurs 8 -elever 2011, verkar svenska elever ha en något sämre kunskapsutveckling mellan årskurs 4 och 8 än de 15 andra jämförbara länderna. (Skolverket, 2012)

5.3.3 Grundläggande bråkräkning.

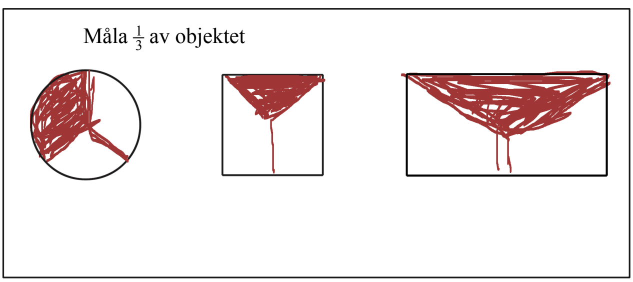
Vid kartläggningen av elevers kunskaper vid starten av gymnasieskolan (Se kapitel 6) synliggörs brister inom bråkräkning. Lösningsfrekvensen på uppgifter av typ $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ vid starten av årskurs 1 i gymnasiet är 62% för samtliga elever (Figur 4.17). Vid slutet av årskurs 8 är den 40%. På uppgifter av typ $6 \cdot \frac{1}{2}$ var lösningsfrekvensen i gymnasiets åk 1 66% (Figur 4.20) jämfört med slutet av årskurs 8, då den var 65%. Uppgifter av typ $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$ hade en lösningsfrekvens i årskurs 1 i gymnasiet på 52% jämfört med slutet av årskurs 8, då den var 39%. Detta är uppgifter som eleverna ska behärska på högstadiet, enligt centralt innehåll i Lgr11:

> Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimalform vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkningar med skriftliga metoder och digital teknik. Metodernas användning i olika situationer. (Lgr11)

Andelen elever som läser kurs 1c och som har för få rätt på hela den bråkdiagnos som gavs i årskurs 1 på gymnasiet är 33% (Tabell 39). Dessa elever går alltså på högskoleförberedande, matematikintensiva program. För de elever som läser kurs 1b, högskoleförberedande program, har 69% för få rätt och av de elever som läser kurs 1a, yrkesförberedande program, hade 77% av eleverna för få rätt.

Dessa mindre goda resultat kan härledas bakåt och har troligen sitt ursprung i bristande förkunskaper. Av resultaten i grundskolans årskurs 4, i form av lösningsfrekvenser på diagnosen RB1 (BD1) för de uppgifter som testar den mest grundläggande förståelsen av bråkbegreppet, framgår det att många elever har förhållandevis ytliga kunskaper. De kan avgöra vad en fjärdedel är om de har ett område som är indelat i fyra rutor. Men när eleverna sedan ska använda denna kunskap och generalisera, när de ska markera en tredjedel av sex rutor så klarar endast 33% detta i årskurs 4 och 44% i årskurs 5. Redan i årskurs 3 ska eleverna enligt kunskapskraven klara av detta.

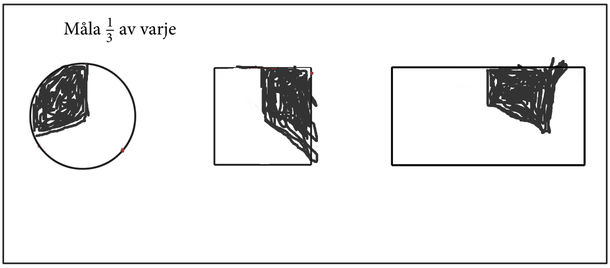
Vid fördjupade studier i årskurs 2 iakttogs hur elever uppfattar den undervisning som läraren ger. Av Figur 5.4 framgår att eleven har utgått från lärarens genomgång då hon använde cirklar och talade om tredjedelar. Eleven har försökt att använda kunskapen från cirkeln även när det gäller en kvadrat eller en rektangel.



Figur 5.4. Exempel på elevlösning, åk 2.

När läraren fick se boken blev hon bekymrad och menade att hon inte hinner rätta alla böcker. Hon skulle kunna använda någon form av diagnos för att kontrollera om eleven förstått alla olika aspekter av begreppet.

En annan elev i samma klass som följt genomgången har, på sitt eget sätt, uppfattat att delarna ska vara lika stora. Figur 5.5 illustrerar hur eleven har markerat en tredjedel i olika figurer. Hon förklarade sin lösning med att ”fröken sa att delarna ska vara lika stora”. Det hon missat var att varje helhet ska delas in i tre lika stora delar varav en utgör en tredjedel.



Figur 5.5. Exempel på elevlösning, åk 2.

Vid den inledande undervisningen om bråk är det inte självklart för en stor andel elever att delarna i en helhet ska vara lika stora. I årskurs 4 gör 64% av eleverna fel på detta och i årskurs 5 gör 39% av eleverna fel.

Många elever får problem när de ska generalisera den vunna kunskapen. När de ska markera, rita och urskilja delar av exempelvis 2/5, där täljaren inte längre är 1, som i stambråken, är det något färre elever som klarar detta, vilket testats med diagnos RB2 (BD2). Mönstret när det gäller lösningsfrekvenser på motsvarande uppgifter är desamma på RD2 (BD2), flera delar av en hel och RB3 (BD3) del av antal, som för RB1, en del av en hel. (Se avsnitt 4.2.1).

Tabell 36.

Tal i bråkform. Andel elever med alla, nästan alla och för få rätt, per diagnos och årskurs. Lösningsfrekvens i procent.

		RB1 (BD1)	RB2 (BD2)	RB3 (BD3)	RB4 (BD4)	RB5 (BD5)	BD13	BD14
	Alla	19	36					
Årskurs 4	Nästan alla	34	29					
	För få	47	35					
	Alla	30	56	27	12			
Årskurs 5	Nästan alla	35	29	16	22			
	För få	34	15	57	66			
	Alla			30	25	6		
Årskurs 6	Nästan alla			17	28	45		
	För få			53	47	49		
	Alla						20	5
Årskurs 8	Nästan alla						18	9
	För få						63	86

Samtliga tre diagnoser RB1, RB2 och RB3 har gjorts av cirka 3000 elever i årskurs 5 (Tabell 36). Där har 65% av eleverna alla eller nästan alla uppgifter rätt på RB1 medan 85% har det på RB2 och endast 43% på RB3. Att det är en större andel som får ett bra resultat på RB2 än RB1 beror troligen på ett misstag vid konstruktionen av diagnos RB2. Uppgifter som testar elevens förmåga att generalisera begrepp saknas. Diagnos RB3, som testar delar av ett antal, är det färre elever som klarar. En slutsats som kan dras är att denna aspekt av bråk måste synliggöras och diskuteras. RB3 testar uppgifter som utgör grunderna till proportionalitet och vidare procent. Att det är hela 57% av eleverna i årkurs 5 som har för få rätt på denna diagnos visar att dessa elever saknar en viktig aspekt inom den grundläggande förståelsen av andelsbegreppet.

Diagnoserna RB1, RB2 och RB3 speglar att man i den inledande undervisningen om bråk använder bråkaspekter från vardagen för att kunna konkretisera begreppet för eleverna. Senare övergår man i undervisningen till aspekten bråk som tal för att kunna operera med bråk i såväl problemlösning som inom algebran.

Diagnoserna RB4 och RB5 testar inledningen av begreppet bråk som tal. Dessa diagnoser genomfördes i årskurserna 5 och 6. Diagnos RB4 testar elevers kunskaper i att ange olika uttryck för samma tal i bråkform Det är viktigt att kunna uttrycka bråk på olika sätt eftersom det krävs att kunna göra bråken liknämniga vid beräkningar. I inledningen på det här avsnitt står att läsa ”Lösningsfrekvensen på uppgifter av typ $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ vid starten av årskurs 1 på gymnasiet är 62% för samtliga elever (i slutet årskurs 8 är det

40%)". Förmodligen har många av de elever som inte klarar denna uppgift missat nödvändiga förkunskaper redan i årskurs 6.

Diagnos RB5 testar om eleven har grundläggande taluppfattning av bråk som tal och har genomförts i årkurs 6. Denna grundläggande taluppfattning visar sig senare vara avgörande när man ska operera med tal i bråkform.

I kursplanen, Lgr11, under centralt innehåll för årskurserna 4 – 6 står det:

> Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.
> Tal i procentform och deras samband med tal i bråk- och decimalform.

En rimlig tolkning av detta är att eleverna behöver ha en grundläggande förståelse av bråk och en grundläggande taluppfattning av tal i bråkform när de lämnar årskurs 6. Hälften av eleverna, 49%, i årskurs 6 har inte denna grundläggande taluppfattning av tal i bråkform (Tabell 36).

Uppgiften $1/\frac{1}{3}$, som egentligen testar innebörden av bråkbegreppet snarare än division, har lösningsfrekvensen 10% (Figur 4.14). Det är 90% av eleverna i årskurs 6 som inte klarar att tolka uppgiften som "Hur många tredjedelar ryms i en hel?". En förklaring kan vara att eleverna inte ser enkelheten i uppgiften, utan tror att det innebär en svår beräkning. Detta är emellertid en grundläggande kunskap som tydligen saknas hos de flesta elever och är en aspekt som tydligt måste lyftas fram i undervisningen.

De båda diagnoserna RB4 och RB5, har genomförts i årskurs 6. Det visar sig att 53% respektive 51% av eleverna har alla eller nästan alla rätt på dessa båda diagnoser (Tabell 36). Endast hälften av eleverna behärskar alltså begreppet bråk som tal i slutet av årskurs 6. När en elev väl förstått ett begrepp så kan eleven troligen markera bråket på tallinjen, storleksordna tal i bråkform samt visa en grundläggande taluppfattning.

Resultaten visar att många elever saknar grunderna när det gäller begreppet bråk när de lämnar årskurs 6. Konsekvenserna av detta framkommer senare när eleverna testas på enkla beräkningar med tal i bråkform. Diagnoserna RB6 (BD13) och RB7 (BD14) har använts i slutet av årskurs 8 och även i början av gymnasiets årskurs 1. I början av detta stycke redovisades resultat för årskurs 1 i gymnasiet. Det är iögonfallande att hela 33% av de elever som valt matematikintensiva linjer på gymnasiet har för få rätt på bråkdiagnosen. I kapitel 6 redovisas vilka konsekvenser just bristande kunskaper inom bråkräkning får för algebra och ekvationslösning.

5.3.4 Mer komplexa matematikkunskaper som i tal i potensform och geometri

Den grundläggande aritmetiken är ständigt aktuell vid fortsatt kunskapsutveckling inom matematik. Här följer ett par exempel från potenser och rötter samt geometri.

Potenser och rötter

Inom området aritmetik ryms även begrepp som potenser och rötter. Vid arbete med dessa begrepp blir det tydligt att olika matematiska notationer och det sätt på vilket man förväntas skriva, är konventioner som eleven måste få möjlighet att lära sig.

Området potenser introduceras på högstadiet men undervisas idag främst på gymnasiet, ett tydligt exempel bland många på hur innehåll flyttats uppåt i årskurserna. För 20 år sedan förekom det betydligt mer undervisning om potenser i grundskolan, men enligt kursplanen Lgr11 ska området finnas med även nu. I centralt innehåll ingår ”potenser för att uttrycka små och stora tal”.

Området är relativt begränsat och har analyserats didaktiskt. Med hjälp av ett resultatschema (Figur 4.4) är det lätt att se var elevernas problem uppstår. Redan att tolka uttryck skrivna enligt definitionen av potenser, typ $3^2, 2^5$ och 5^0, vållar problem för närmare hälften av eleverna i början av gymnasieskolan. Att $3^2 = 9$ vet 88% och att $2^5 = 32$ vet 69% men att $5^0 = 1$ vet endast 51% av dessa elever. Att en elev förstår vad ett tal uttryckt i potensform innebär, betyder att hon förstår dessa tre typer av påståenden. Vidare är det endast runt hälften av eleverna som förstår innebörden av grundpotensform. Definitionen av tal i potensform och grundpotensform är grundläggande kunskaper som eleven behöver för att kunna tolka texter i kurslitteratur inom till exempel naturvetenskap och ekonomi.

Behovet av att använda potenser vid operationer beror på vilket program eller utbildning eleven läser. Med hjälp av didaktisk ämnesanalys och den empiriska studien där lösningsfrekvenser analyserats, framgår vilka olika aspekter som behöver synliggöras i undervisning för att hjälpa eleven att utveckla och behärska begreppet (Figur 4.5). Lärare som intervjuats i samband med dessa resultat menar att de ser en del av dessa aspekter som självklara och kanske inte lyfter fram dem så tydligt i undervisningen, vilket de dock förstår är nödvändigt när de ser resultatschemat.

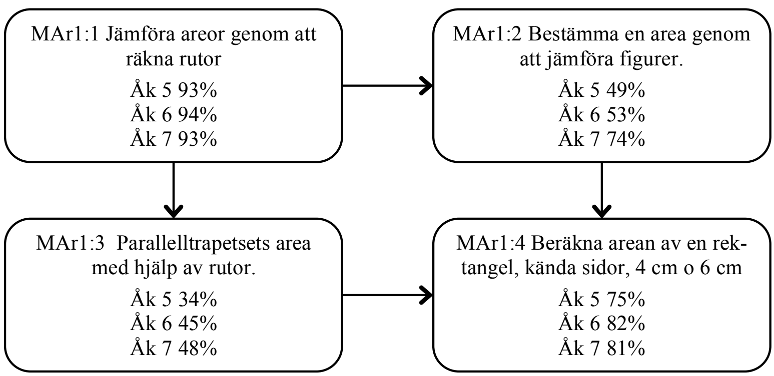
När matematikinnehållet blir mer komplext blir det svårare att skilja själva begreppen från de aritmetiska beräkningar som ingår. Strävan har, som tidigare påpekats, varit att ha den ingående aritmetiken mycket enkel. Trots det kommer självklart vissa elevers mindre goda kunskaper inom aritmetik att påverka deras möjligheter att lösa uppgifter som testar att de behärskar olika begrepp, som i detta fall potenser. Multiplikationsfakta och även grundläggande addition och subtraktion krävs förstås även vid räkning med potenser.

Geometri

Det andra exemplet är geometri, areaberäkning. När eleven ska lämna det konkretiserande stadiet som kan innebära att jämföra arenan av figuren med ett rutmönster, en areamall, för att sedan med hjälp av sidornas längdmått beräkna arean, klarar ett antal elever inte det.

Med hjälp av diagnos MAr1 går det att studera elevernas grundläggande kunskaper om area. De flesta elever klarar att jämföra areor som innehåller rutmönster redan i årskurs 5. De 7% som då inte klarar detta, klarar det inte heller två år senare i årskurs 7. När eleven sedan ska ta ett ytterligare steg och jämföra två figurer där det inte finns stöd i rutmönster, utan det krävs att eleven har abstraherat sina kunskaper så får fler elever problem. I detta fall går det att vika eller mäta med en referent, till exempel en penna, och på så sätt jämföra. I uppgiften behöver eleven även förstå att area kan konserveras, vilket innebär att man kan flytta delar av figuren och bilda en ny figur med samma area. Av lösningsfrekvenserna framgår att endast hälften av eleverna i årskurs 5 och 6 har förstått detta (Figur 5.6).

Att bestämma arean av en enkel figur som en rektangel med hjälp av ett rutmönster gick bra för de flesta elever. När eleverna sedan möter ett parallelltrapets som också stöds av ett rutmönster, förmår en stor del av eleverna inte att generalisera genom att tänka ”flytta en del” och på så sätt få en rektangel vars area lätt kan bestämmas.



Figur 5.6. Lösningsfrekvenser, Grundläggande mätning area, MAr1.

Uppgifterna 2 och 3 på diagnosen MAr1 testar elevens förståelse av areabegreppet och konservering av area, alltså elevens känsla för att hantera geometriska figurer när de ska bestämma arean. Lösningsfrekvensen för uppgift 3 i årskurs 6 är 45% och i årskurs 7 48%. Drygt hälften av eleverna i dessa årskurser, kan alltså inte omsätta och generalisera grundläggande kunskap. Återigen tydliggörs att generalisering av ett begrepp behöver uppmärksammas i undervisningen. Uppgift 4 är en traditionell uppgift: En rektangel är 4 cm lång och 6 cm hög. Hur stor är arean? Cirka 80% av eleverna löser denna uppgift i årskurserna 6 och 7. Den högre lösningsfrekvensen kan bero på att vissa elever lärt sig att använda formeln, utan att förstå begreppet. Lösningsfrekvenserna på uppgifterna 2 och 3 tyder på det.

Detta är återigen ett exempel på att en del elever inte klarar att generalisera en vunnen kunskap. Beräkningen i uppgift 4, multiplikationen $4 \cdot 6 = 24$, kan inte betraktas som svår. Skulle sidorna däremot varit uttryckta med hjälp av decimaltal så hade säker lösningsfrekvensen varit lägre.

Diamantdiagnoserna, visas tydligt var i undervisningsprocessen elevens kunskapsutveckling avstannar och med motsvarande strukturschema, blir det möjligt att få syn på de aspekter av begreppet, som eleven behöver få undervisning om.

5.3.5 Avslutande kommentar

När elevers kunskaper diskuteras i nationella sammanhang är det ofta utgående från betyg i årskurs 9 eller nationella prov. Ett nationellt prov är summativt och innebär stickprov när det gäller elevers kunskaper. De ska mäta elevernas olika förmågor i enlighet med kunskapskraven. I olika sammanställningar från Skolverket får lärare besked om elevernas kunskaper i form av olika tabeller. Under senare år har dessa rapporter varit dyster läsning. På så sätt känner man till inom vilka matematikområden eleverna har mindre bra kunskaper, även om de inte är speciellt bra inom något matematikområde. Som ett komplement går det att med noggrant utarbetade diagnoser i detalj synliggöra vari varje enskild elevs kunskapsbrister finns. Genom att följa strukturscheman går det med precision att avgöra var bristen har uppstått och vilka konsekvenser den får för eleven.

Stora internationella kunskapsundersökningar redovisas på motsvarande sätt som nationella prov. Där ingår även attitydundersökningar, något som inte tas upp här. Elever som deltagit i TIMSS- och PISA-undersökningarna har slumpvis valts ut bland svenska elever i den årskurs som varit aktuell. Resultaten under de senaste decennierna har varit nedåtgående och med hjälp av dem syns en tendens som visar på mindre goda elevkunskaper. Något dessa internationella kunskapsundersökningar inte ger besked om är vilka elever som saknar vilka kunskaper. Med hjälp av Diamantdiagnoser kommer man ner på individnivå och kan på så sätt göra skillnad för den enskilde eleven.

6 Kartläggning av elevers matematikkunskaper vid starten av gymnasieskolan

Föregående kapitel avslutades med en genomgång av svenska grundskoleelevers matematikkunskaper inom några grundläggande områden. Här redovisas en kartläggning som gjorts direkt vid terminsstart i årskurs 1 på gymnasiet. Kapitlet inleds med en bakgrund som fokuserar behovet av att göra en kunskapstest i matematik vid starten av gymnasieskolan relaterat till de betyg eleverna får i matematik i årskurs 9. Områden som diagnostiserats och redovisas här är tal i decimalform, procent och ekvationer.

I en debattartikel i Dagens Nyheter (Bennet & Löwing, 10 april 2014) beskrivs de bristande matematikkunskaper som eleverna har när de börjar årskurs 1 i gymnasieskolan. Här följer ett längre citat ur den artikeln:

> Vi har också resultat från samtliga elever, ca 1500, i gymnasiets årskurs 1 i en större mellansvensk kommun. De elever som testats går på ett nationellt program och har fått godkänt betyg i årskurs 9. Elevernas resultat talar ett entydigt språk; alldeles för många elever har mycket dåliga kunskaper när det gäller så grundläggande färdigheter som att addera och multiplicera enkla bråk eller hantera enkla procentberäkningar, alltså en typ av färdigheter som utgör en lika naturlig grund när det gäller matematisk problemlösning, som läsfärdighet utgör när det gäller att förstå eller skriva en vanlig text. Dessutom ökar inte eleverna sina matematikkunskaper med åren – elevernas resultat när det gäller begrepp och enkla räkneoperationer är ungefär desamma i årskurs åtta som i årskurs sex. Till och med under det första året på gymnasiet har hälften av eleverna problem med grundläggande beräkningar som de borde ha lärt sig under mellanstadiet. Dessa elever har troligen inte förstått den matematik de arbetat med under de första åren i skolan. De har inte heller hämtat in dessa kunskaper senare. Detta måste upplevas problematiskt av såväl eleven som förväntas lära sig ett mer komplext innehåll som av läraren som undervisar om detta innehåll.
>
> De satsningar som gjorts inom skolan har dock inte i första hand handlat om att uppmärksamma lärarna på elevernas basfärdigheter i matematik, utan har snarare handlat om hur undervisningen ska bedrivas. Fokus har förskjutits från innehållet i undervisningen till undervisningens form. Samtidigt trycker exempelvis den amerikanske skolforskaren Liping Ma på den professionalitet som krävs även när det gäller att undervisa om den mest grundläggande matematiken. En av de mer uppmärksammade skolforskarna idag, den nyzeeländske professorn John Hattie, dömer också ut flera av de förslag som nu lanseras i den skolpolitiska debatten, såväl från höger som från vänster. Mindre klasser kan ha en positiv effekt, men bara marginellt, fler undervisningstimmar kan ha effekt, men bara om de fylls med ett meningsfullt innehåll, betygssystem spelar liten roll och det är inte väsentligt om betyg ges första gången i tredje klass eller i sjätte. I stället är det lärarens insats i klassrummet i kombination med realistiska förväntningar på elevernas lärande som spelar roll. Forskningen visar att det är lärarnas ämneskunskaper i kombinat-

ion med kunskaper om hur innehållet ska undervisas som är de faktorer som påverkar elevernas resultat mest.

Förhoppningsvis kan det nu pågående Matematiklyftet leda till förbättrade matematikkunskaper hos svenska elever. Denna fortbildning kan ge lärarna förutsättningar att diskutera sin egen undervisning kollegialt och, i bästa fall, förutsättningar att utveckla sin undervisning. Men om förändringen av undervisningen inte kombineras med korrekt, åldersanpassat matematikinnehåll, kommer elevernas resultat knappast att förbättras. Det är därför dags att fästa blickarna mot den matematik som behandlas i klassrummen, och då framför allt på hur grundläggande matematikkunskaper och färdigheter undervisas och uppfattas av eleverna. Först när eleverna får dessa verktyg, har de möjlighet att utveckla och fördjupa matematiska begrepp och att använda sina kunskaper vid problemlösning eller, för den delen, när det gäller att förstå valresultat, begreppet bränsleförbrukning eller bildskärmsupplösning. Läraren måste behärska grundläggande matematik för att ha möjlighet att entusiasmera sina elever, bedöma deras kunskaper och ge dem möjlighet att bygga upp sin förståelse i ämnet från grunden. Vi anser att det matematiska ämnesinnehållet har försummats inom den fortbildning som hittills erbjudits lärare.

Dagen efter skrev Johannes Åhman (2014), politisk redaktör på Dagens Nyheter med anledning av debattartikel:

Valretoriken om mindre klasser och betyg skymmer det viktiga. Uthållig fokusering på ämnesinnehållet är den enda hållbara vägen till bättre resultat.

Hur mycket ska man betala om man får 15 procents rabatt på något vars ordinarie pris är 720 kronor? Som läsare av gårdagens DN Debatt fick man inte något facit. Men för alla som genast visste hur uppgiften ska lösas gav exemplet en tydlig bild av hur allvarligt läget är: 54 procent av de testade eleverna i gymnasiets årskurs 1 klarade inte uppgiften.

Läsare som kände sig osäkra inför uppgiften fick i stället en obehaglig påminnelse om att det inte stod så väl till med undervisningen i matematik när de själva gick i skolan heller. Den insikten är inte mindre viktig än den första. (DN 11 april 2014).

Åhman visar att han tydligt förstår allvaret med elevernas bristande kunskaper.

I en kartläggning på gymnasiet som genomfördes vid terminsstart hösten 2013 och som redovisas här har samtliga cirka 1500 elever i årskurs 1 i en större svensk kommun deltagit. Även cirka 900 elever i gymnasiets årskurs 2 i samma kommun genomförde diagnoserna.

6.1 Bakgrund

Den stora fortbildningssatsningen Matematiklyftet riktar sig till alla stadier i skolan, även gymnasiet, (Skolverket, 2015b). Fortbildningen erbjuds i form av internetbaserade moduler avsedda för kollegialt lärande. När gymnasielärare för första gången, hösten 2013, erbjöds denna fortbildning fanns endast en modul, problemlösning, klar. En större svensk kommun planerade samma höst, en första central kartläggning av elevers kunskaper vid starten i gymnasieskolan. Kopplingen mellan den planerade kartläggningen och Matematiklyftet synliggjordes för gymnasiechefen och matematikutvecklarna

Ett stort antal gymnasielärare i kommunen skulle alltså följa matematiklyftets modul problemlösning under höstterminen. Syftet med denna kompetensutbildning var att lärarna skulle utveckla sina kunskaper i att undervisa i problemlösning och modellering. Resultatet av undervisning, i eller via problemlösning, är beroende av elevernas grundläggande kunskaper, deras verktygslåda, eftersom brister där riskerar att påverkar deras förmåga att lösa problem eller att fördjupa sin begreppsförståelse. Detta påverkar i sin tur resultatet av lärarens ansträngningar att utveckla sin undervisning.

Redan i grundskolans läroplan Lpo 94 beskrivs problemlösning som ett verktyg för att nå matematisk förståelse: ”Utbildningen i matematik skall ge eleven möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem” (SKOLFS 1994:1). Texten kan tolkas som att utveckling av matematisk förståelse sker i symbios med problemlösning. Forskare talar om undervisning via problemlösning, (Wyndhamn, Riesbeck & Schoultz, 2000; Taflin, 2007) där problemlösningsaktiviteter används som ett medel för att nå matematisk kunskap.

Undervisning i matematik utifrån problemlösning bedöms som utvecklande för en djupare förståelse av matematiska begrepp och ger eleverna en bättre koppling mellan olika kunskapsområden inom och utanför matematiken (Lester & Lambdin, 2007). För att detta ska lyckas krävs att eleverna har de grundläggande baskunskaper i matematik som behövs för att lösa problem på denna nivå. Det krävs att kunskaper från tidigare, såsom begrepp, procedurer och metoder, används på ett nytt sätt eller att de bekanta begreppen, procedurerna och metoderna används i obekanta situationer. I gymnasiets kursplan (Skolverket, 2011b) ingår utöver problemlösning även modellering, vilket förutsätter kännedom om den aktuella kontexten och goda grundläggande kunskaper.

Om undervisningen i problemlösning och modellering ska ge önskat resultat krävs att eleverna har stabila kunskaper i grundläggande matematik. Därför kartlades elevernas kunskaper vid starten av årskurs 1 i gymnasiet. Det diagnosinstrument som användes var BrilliantGrund. Brilliant är precis som Diamant ett bedömningsstöd som har en del avgränsningar: Brilliant mäter inte elevens problemlösningsförmåga. Diagnoserna testar den ”verktygslåda” eleven har i form av grundläggande begrepp och metoder för beräkningar, alltså förutsättningarna för att kunna lösa matematiska problem. Precis som när det gäller Diamant, är Brilliant konstruerad utifrån en didaktisk ämnesanalys.

Syftet med att genomföra en kartläggning var främst att ge lärarna en preciserad bild av vilka förkunskaper eleverna har och av vad som saknas. Detta kan på sikt hjälpa lärarna att med precision planera undervisningen och sätta in adekvata åtgärder för att öka elevernas möjligheter att förstå det nya matematikinnehåll som de möter. Lärarna får också genom denna kartläggning en uppfattning om i vilken omfattning eleverna har med sig centrala förkunskaper från grundskolan.

Ett annat syfte med kartläggningen var att hjälpa beslutsfattare på olika nivåer i kommunen att bättre förstå vari eventuella kunskapsbrister består, alltså inom vilka områden och årskurser och hos vilka elevgrupper det finns kunskapsbrister. När gymnasiechefer och rektorer får bättre kunskap om detta kan resurserna för kommande åtgärder koncentreras till rätt område och rätt program. Åtgärderna blir därmed relevanta just för de brister som upptäcks, vilket torde vara såväl pedagogiskt som ekonomiskt önskvärt.

Resultatet av kartläggningen redovisades för gymnasielärare, rektorer och kommunansvariga på olika sätt för att ge bästa möjliga information. Lösningsfrekvenserna redovisades per skola och per kurs (per programgrupp; högskoleförberedande och yrkesprogram) och aggregerades sedan till kommunnivå. Tanken med samlade resultat på kommunnivå är att den enskilda klassen/gruppen ska få en referens att jämför sina resultat med. Den samlade bilden utgör dessutom en grund för att diskutera huruvida kommunresultaten är acceptabla eller behöver förbättras. Jämförelse mellan olika skolor var endast möjlig att göra för ansvariga chefer inom kommunen.

En bakgrund avseende elevers matematikkunskaper vid övergången mellan grundskolan och gymnasieskolan kan beskrivas med hjälp av statistik hämtad från Skolverket (Skolverket, 2015a). Denna statistik är emellertid inte helt enkel att tolka, beroende på att det totala elevantalet är olika beroende på vilken typ av statistik som Skolverket redovisar. Underlagen skiljer sig alltså något när det gäller totala antalet elever i årskurs 9, elever som genomfört nationella provet i matematik och elever som fått slutbetyg. Statistiken pekar emellertid mot att ca 10% av eleverna som inte har genomfört det nationella provet har fått godkänt slutbetyg i matematik.

Den bild som framkommer av Skolverkets komplexa statistik visar att elevernas faktiska kunskaper inte alltid stämmer med betyget. Gymnasielärarna är medvetna om detta, och anser att grundskolebetyget bättre borde spegla elevens matematikkunskaper.

Tabell 37.

Betyg och Nationella prov i årskurs 9 läsåret 2013 /2014, Skolverket. Resultatet visas i procent.

Årskurs 9	Provbetyg F	Slutbetyg F	Lägre	Lika	Högre	Antal elever där jämförelse gjorts
Matematik	12,5 *	9,3 **	2,2	67	30,8	87 043
Svenska	3,6	3,9	11,2	65,8	22,9	80 629
Engelska	3,2	6,4	17,6	73,5	8,9	88 299

Elevstatistiken för läsåret 2013/14 visar att:

97 238 elever gick i årskurs 9 i oktober 2013,
96 430 elever fick slutbetyg i matematik våren 2014,
**87 460 elever 90,7% av dessa fick godkänt slutbetyg A-E, i matematik
*87 635 elever genomförde nationella provet i matematik och av dessa fick 87,5% provbetyget A-E.

Det är intressant att studera Tabell 37 ovan och jämföra de tre ämnena matematik, svenska och engelska. I matematik är det flest elever som inte har godkänt på det nationella provet och samtidigt är det här störst andel elever som får högre slutbetyg än betyget på det nationella provet. Lärarna i svenska och engelska verkar, när det gäller slutbetyg, i sin bedömning ligga betydligt närmare resultaten på de nationella proven. Vad är det som gör att bedömningen i matematik är annorlunda jämfört med de båda andra ämnena?

Slutbetyget i årskurs nio borde vara en god indikation på elevens matematikkunskaper, men matematiklärare på gymnasiet vill ändå själva testa vilka grundläggande matematikkunskaper eleverna har med sig från årskurs 9.

Intresset för matematikdiagnoser vid starten av gymnasiet har undersökts i flera högskoleuppsatser. Martinsson (2009) har i sitt examensarbete på Lärarprogrammet studerat diagnosverktyg i matematik vid starten av gymnasieskolan. Med hjälp av en enkät (sänd till cirka 50 gymnasielärare) kom han fram till att majoriteten av lärarna ansåg att det är viktigt att inhämta information om sina kommande elever. Vanligast var skriftliga test vid början av gymnasieskolan. Av de som använde test använde hälften (55%) skriftligt test med egenproducerade uppgifter och den andra hälften (45%) använde skriftligt test med färdigproducerade uppgifter. En femtedel av dem som svarade på enkäten använde inget test alls.

Av dem som använde test menade majoriteten att de ville veta elevens baskunskaper (90%), taluppfattning (78%) och huvudräkningsförmåga (75%), men även mätning, rumsuppfattning och geometriska samband var önskvärda kunskaper att testa. Diagnosen fick, ansågs det, emellertid inte ta längre än 60 minuter och den skulle genomföras i början av höstterminen.

Slutsatsen i Martinssons uppsats är att någon form av kartläggning behövs för att få information om vilka kunskaper och behov som finns i elevgruppen.

I en uppsats på avancerad nivå inom ämnesdidaktik har Andersson (2013) studerat en, på en skola konstruerad, diagnos som under en längre tid genomförts varje år vid terminsstart i årskurs 1 på gymnasiet. Han drar slutsatsen, utifrån de svar som en grupp elever med svaga resultat på diagnosen har lämnat, att många har stora brister i sin förståelse inom grundläggande taluppfattning. Andersson skriver vidare att:

> En diagnos av denna typ bedöms ändå kunna vara en viktig del i en kartläggning för att kunna hitta och ge extra stöd till elever som har svaga förkunskaper i matematik, även om man också kan tänka sig ett arbetssätt där kartläggningen av matematikkunskaper har tydligare formativ karaktär.

Dessa båda uppsatser pekar mot att gymnasielärare önskar information om sina nya elever för att kunna hjälpa dem till bättre resultat. Gymnasielärarna är av erfarenhet vana vid att många elever saknar grundläggande matematikkunskaper när de börjar gymnasieskolan och därför anser de att en kartläggning behövs.

För att komma in på ett nationellt program på gymnasieskolan krävs att eleven har godkänt i matematik. Detta torde innebära att de elever som gick på ett nationellt program på gymnasieskolan läsåret 2013/2014 hade godkänt betyg när de lämnade årskurs 9. Under årskurs 1 läser eleverna kurs 1a, 1b eller kurs 1c beroende på vilket program de valt. Skolverkets statistik visar antalet elever som går på gymnasiets nationella program och inte har fått godkänt på det första nationella provet (Tabell 38). Dessa elever utgör en påfallande stor andel i såväl Matematik 1a som 1b.

Tabell 38.

Nationella prov i matematik läsåret 2013/2014. Gy åk1. Resultaten redovisas i procent.

	HT -13		VT - 14	
Gy åk1	Ej nått målen	Antal elever	Ej nått målen	Antal elever
Matematik 1a	29,5	1 328	**29,8,**	**23 215**
Matematik 1b	19,2	671	**16,7**	**29 094**
Matematik 1c	**4,2**	**11 505**	5,4	4 960

Det går endast att spekulera i varför det är så många elever som inte klarar godkänt resultat efter genomgången första kurs på gymnasiet, trots att eleverna har godkänt betyg i årskurs 9. Är kursen för svår eller har eleverna för stora kunskapsluckor?

Troligen spelar elevernas bristande förkunskaper från tidiga år i grundskolan en roll här. Många gymnasielärare har säkert intentionen att hjälpa eleverna, men av resultaten att döma lyckas de inte. En förklaring kan vara att brister som har uppstått under de tidigaste skolåren kvarstår och orsakar flera svårigheter för eleverna. Att åtgärda dessa förkunskapsbrister, om man inte med precision vet vari de består och har didaktiska kunskaper att undervisa om detta innehåll, är inte helt enkelt.

6.2 Kartläggning och resultat

De diagnoser som genomfördes hösten 2013 och som redovisas här testade grundläggande kunskaper inför fortsatta studier på gymnasiet. Dessa kunskaper utgör delar av den verktygslåda som eleven behöver för att kunna lösa matematikproblem samt utveckla vidare kunskaper och förmågor inom ämnet.

Den elev som saknar grunderna får självklart svårt att lösa uppgifter där olika verktyg behövs. Vidare behöver eleven ha flyt i sitt hanterande av dessa verktyg. För många elever upptar tankar kring begrepp och beräkningar så stor del av arbetsminnet, att deras möjlighet att lösa det aktuella matematikproblemet blir små. Deras fokus hamnar helt enkelt fel (Miller, 1969; Klingberg, 2007).

Det innehåll som testats med BrilliantGrund ingår i grundskolans kurs. Diagnoserna är framtagna på basis av en didaktisk ämnesanalys och i samverkan med gymnasielärare och med baktanken att majoriteten av de elever som börjar gymnasiet borde behärska det som prövas. Uppgifterna är såpass grundläggande och enkla att den elev som behärskar innehållet kan ha allt rätt. Uppgifterna har även utförts av gymnasielärare själva.

Utöver klassen eller gruppens resultat är skolans resultat intressant. På samma sätt som vid kartläggningar i grundskolan (Kapitel 5) redovisas resultaten för de olika diagnoserna i resultatscheman med lösningsfrekvenser per uppgift för respektive kurs på varje skola. För att få en jämförelse fick läraren tillgång till den totala lösningsfrekvensen för alla elever i kommunen (kommunala skolor) som läser respektive kurs. I redovisningen fanns även en tabell som visade andelen elever på skolan respektive kommunen som har för få rätt på de olika diagnoserna. Därigenom får läraren syn på omfattningen av bristande kunskaper och, via lösningsfrekvens per uppgift, var kunskapsbristerna finns.

För varje diagnos presenterades ett resultatschema för samtliga elever som går i årskurs 1 respektive årskurs 2 i gymnasiet i kommunen. Där framträdde ett tydligt mönster som beskriver elevernas kunskaper inom respektive område. Även dessa lösningsfrekvenser bekräftar att de didaktiska ämnesanalyserna synliggör en ökande komplexitet när det gäller olika aspekter av de begrepp som testas.

Kartläggningen gjordes med hjälp av sex diagnoser.

1. AG-GY Multiplikationsfakta och generalisering av multiplikation
2. AU-GY Potenser och rötter
3. RB-GY Tal i bråkform
4. RD-GY Tal i decimalform
5. RP-GY Procent
6. TA-GY Ekvationer.

Tabell 39 nedan beskriver andelen elever med alla, nästan alla och för få rätt lösta uppgifter per diagnos, kurs och totalt. Tabellen ger en överskådlig bild av andelen elever som behärskar de begrepp som testas på respektive diagnos. Överst i tabellen finns elevresultatet för det totala antalet elever som läser matematikkurserna på gymnasiet, alltså elever med godkänt slutbetyg från grundskolan. Därefter finns elevresultat per kurs. Andelen elever som anses behärska ett begrepp beräknas genom att räkna samman alla rätt och nästan alla rätt på diagnosen.

Tabell 39

Gymnasiet årskurs 1. Andel elever med alla, nästan alla och för få lösta uppgifter per diagnos och kurs, samt totalt. [1]Antalet elever kan variera något mellan diagnoserna. Andelen i de olika diagnoserna är dock grundat på de exakta värdena i respektive diagnos. Lösningsfrekvensen i procent.

Kurs	n =	Antal rätt	AG-GY	AU-GY	RB-GY	RD-GY	RP-GY	TA-GY
		Alla rätt	4	1	26	15	25	3
Alla	1475[1]	Nästan alla	55	31	24	27	22	10
		För få	41	68	60	58	53	88
		Alla rätt	1	0	5	5	11	0
1a	387[1]	Nästan alla	36	3	17	18	15	3
		För få	63	97	77	77	74	97
		Alla rätt	3	0	10	9	18	2
1b	632[1]	Nästan alla	61	23	21	22	22	15
		För få	36	76	69	69	60	83
		Alla rätt	11	4	33	31	45	6
1c	456[1]	Nästan alla	65	66	34	41	29	7
		För få	23	31	33	27	25	87

Av denna tabell framgår att 41% av eleverna har för få rätt när det gäller grundläggande multiplikation. Dessa elever har således svårigheter med multiplikationsfakta och generaliserad multiplikation. Tidigare har konstaterats att en fjärdedel av eleverna i årskurs 6 inte behärskar multiplikationsfakta (Tabell 35) och att i sin tur knappt hälften av dessa elever kan generalisera dessa multiplikationsfakta. En rimlig tolkning är att de brister som visar sig i början av gymnasiet kan spåras till tidigare årskurser.

Potenser och rötter (AU-GY) är också begrepp som en stor andel av eleverna inte behärskar; 68% har för få rätt på denna diagnos. Detta kan jämföras med de resultat per uppgift som redovisades i Figur 4.4. När det gäller att räkna med tal i bråkform (RB-GY) har 60% av eleverna svårigheter (Jämför här figurerna 4.17, 4.20 och 4.21). Av Tabell 39 framgår att det i princip är samma andel elever som har svårigheter med tal i decimalform, som andelen elever som inte behärskar tal i bråkform.

Tal i decimalform är endast ett annat sätt att skriva tal i bråkform och har eleven inte förstått tal i bråkform får hon troligen svårt även med tal i decimalform. Andelen elever med för få rätt på hela diagnosen Procent, RP-GY, är 53%, ett resultat liknande dem för diagnoserna RB-GY och RD-GY. De tre begreppen tal i bråkform, tal i decimalform och procent testar nära relaterade samband och därmed är det inte förvånade att lösningsfrekvenserna är relativt lika. Förståelse av dessa begrepp kräver även en övergripande förståelse av sambanden mellan begreppen. Det är troligen de elever som förstår dessa samband, som har löst alla tre diagnoserna.

Här följer en analys av de tre diagnoserna, tal i decimalform, procent och ekvationer. Lösningsfrekvenserna stöder den didaktiska ämnesanalysen även när begreppens komplexitet ökar, såsom vid procentberäkning och ekvationslösning.

6.2.1 Analys av tal i decimalform

Vid beräkningar av tal i bråkform och tal i decimalform visar det sig om eleverna har lärt sig matematik i egentlig mening i skolan eller om de bara har lärt sig att använda procedurer. Att lösa uppgifterna på diagnos RD, Tal i decimalform, kräver god taluppfattning och förmåga att använda räknelagar och räkneregler. Dessa grundläggande räknelagar och räkneregler ska eleverna ha fått undervisning om under tidigare årskurser i samband med operationer med naturliga tal. En och samma uppgift kan ofta lösas med olika strategier, där alla strategier utnyttjar dessa räknelagar och räkneregler. Resultaten tyder emellertid på att elever under de tidigare årskurserna inte har fått möta enkla huvudräkningsstrategier. Resultatet på diagnosnivå (Tabell 39) visar att endast runt 40% av eleverna behärskar grundläggande enkla beräkningar med tal i decimalform i början av gymnasiet, det vill säga har alla eller nästan alla rätt på diagnosen.

Resultatet borde nog varit bättre med tanke på kunskapskraven i Lgr11 och det centrala innehållet. Där ingår för årskurserna 4 – 6:

> Rationella tal och deras egenskaper […]
>
> Positionssystemet för tal i decimal form. [...]
>
> Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i tal i decimal form vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkning med skriftliga metoder och digital teknik. (Lgr11)

För årskurserna 7-9 ingår

> Reella tal och deras egenskaper samt användning i vardagliga och matematiska situationer […]
>
> Centrala metoder för beräkningar med tal i bråk- och decimal form vid överslagsräkning, huvudräkning samt vid beräkning med skriftliga metoder och digital teknik. (Lgr11)

Uppgifterna i diagnosen (Figur 6.1) testar taluppfattning av tal i decimalform. Av lösningsfrekvenserna (Figur 6.2) framträder samma mönster som tidigare iakttagits i grundskolan, att subtraktion är svårare än addition. Lösningsfrekvensen minskar även när det ingår fler decimaler i uppgiften.

1a) 4 + 2,15 = _____	*b)* 4,4 + 5,6 = ____	*c)* 2,3 + 1,8 = _____
2a) 1,07 + 0,20 = _____	*b)* 0,54 + 0,52 = ___	*c)* 7,2 + 7,9 = _____
3a) 5,9 - 2,7 = _____	*b)* 7,2 - 3,9 = _____	*c)* 4,65 - 3,45 = ____
4a) 8,24 - 3,98 = _____	*b)* 1,6 - 0,65 = ____	*c)* 1,56 - 0,57 = ____
5a) 9 · 1,5 = _____	*b)* 30 · 0,04 = ____	*c)* 0,7 · 50 = _____
6a) 0,4 · 0,25 = _____	*b)* 0,5 · 1,4 = ____	*c)* 1,1 · 2,25 = _____
7a) 6,25 / 2 = _____	*b)* 0,16 / 4 = _____	*c)* 10,05 / 5 = _____
8a) 0,16 / 0,8 = _____	*b)* 5 / 0,1 = ____	*c)* 0,7/ 0,01 = ____

Figur 6.1. Diagnosen RD-GY.

Nedan följer en beskrivning av de olika uppgifterna, och reflektioner kring tänkbara lösningar.

Uppgifterna 1a – 4c testar addition och subtraktion av tal i decimalform och är konstruerade så att de kan lösas i huvudet. Det är emellertid ett antal uppgifter här som en stor andel elever inte kan lösa.

Några elever får fel redan på uppgifterna 1a och 2a, som handlar om positionssystemet. Var femte elev har fel på Uppgift 2b. För den som lärt sig innebörden av tal i decimalform finns det dock flera enkla lösningar. Man kan exempelvis räkna 54 + 52 = 106 i enheten hundradelar eller börja med närmevärdena 0,50 + 0,50 = 1 och därefter adderas 4 + 2 hundradelar. En tolkning, baserad på kliniska intervjuer, är att eleverna i grunden inte vet vad 0,54 betyder. De uppfattar detta som ”noll komma femtiofyra” eller ”noll komma fem fyra”, inte som 54 hundradelar, varför de inte kan se de enkla lösningarna.

En annan uppgift, som ett antal elever inte klarat av, är 2c. Den som ser att 7,9 är nästan 8 lägger till en tiondel och drar sedan bort en tiondel från svaret. Egentligen handlar detta om att kunna dela upp tal och sedan använda associativa lagen. Uppgift 1c löses på samma sätt. Tals uppdelning samt kommutativa och associativa lagen arbetar elever med redan i årskurs 1 i grundskolan och sedan förväntas de kunna tänka på detta sätt när talområdet succesivt utökas. Lagarna nämns då inte explicit, men används intuitivt.

En annan uppgift med låg lösningsfrekvens är 3b. Här kan man antingen räkna 72 – 39 som är 33 tiondelar eller ännu enklare göra ett lika tillägg av 0,1 vilket ger 7,3 – 4,0. Detta är grundläggande huvudräkningsstrategier. Uppgift 4a löses på samma sätt med ett lika tillägg av 0,02. Lösningsfrekvensen på dessa båda uppgifter är 68% respektive 56%.

Det är färre elever som klarar två decimaler än en.

Uppgift 4c, kan också lösas med god taluppfattning och uppdelning av tal. Man kan till exempel tänka 1,56 – 0,56 – 0,01 och därmed har man reducerat uppgiften till 1,00 – 0,01. Endast hälften av eleverna i årskurs 1 på gymnasiet löser denna uppgift.

Var fjärde elev klarar inte uppgift 4b. Utgångspunkt vid beräkningar av detta slag är att tänka de ingående talen med lika många decimaler 1,6 – 0,65 = 1,60 – 0,65. Därefter kan beräkningen utföras på samma sätt som uppgift 4c ovan. Även uppgifterna 4b och 4c kan lösas genom att tänka på hundradelar som en enhet.

Lösningsfrekvenserna för subtraktionsuppgifterna är lägre än för additionsuppgifterna. Detta är en tendens som börjar redan i årskurs 1, men som inte borde vara sådan. Subtraktion är i sig inte svårare än addition, utan detta är olika aspekter av samma operation.

Uppgifterna 5a – 8c testar multiplikation och division av tal i decimalform. Även dessa uppgifter är konstruerade så att de kan lösas i huvudet. Nästan 30% av eleverna räknade fel på uppgift 5a. De flesta löser uppgiften genom att tänka 9 hela och 9 halva alltså 9 + 4,5. Då används den distributiva lagen 9 (1 + 0,5) och förutsätter kunskapen att 1,5 innebär 1 + 0,5. Det går också att ”dubbla” sig fram och sedan ta dubbelt dubbelt, alltså 4 · 1,5 till 8 · 1,5 = 12, och därefter addera 1,5. Elever lär sig sådana strategier genom att leka med siffror på det här sättet under de tidiga skolåren.

Att lösa dessa uppgifter i huvudet förutsätter alltså en god taluppfattning, att kunna dela upp tal och ha kunskap om räknelagarna. Uppgifterna 5b och 5c löser 55% respektive 60% av eleverna. Uppgift 5b är 30 · 0,04 = 3 · 10 · 0,04 = 3 · 0,4. Återigen används tals uppdelning och associativa lagen. Även uppgift 5c löses på samma sätt. Den som behärskar beräkningar av detta grundläggande slag ”ser” direkt att det blir 7 · 5 = 35. Att ”se” detta är emellertid inget som kommer av sig själv. Eleven måste få undervisning om varför beräkningen kan göras om till 7 · 5 och färdighetsträna denna typ av beräkningar. Detta borde ske på mellanstadiet.

Även uppgift 6b, har låg lösningsfrekvens. Beräkningen 0,5 · 1,4 kan göras genom att ta hälften av 1,4. Troligen är det många elever som inte fått lära sig detta sätt att tänka.

Uppgift 7a, lyder 6,25 / 2. Division med 2 innebär likadelning. Genom att använda sig av den distributiva lagen kan man tänka detta som (6 + 0,25) / 2 = 6 / 2 + 0, 25 / 2 = 3 + 0,125. På samma sätt löser man 7c, 10,05/5. Även dessa uppgifter har en lösningsfrekvens på lite över hälften, 64% respektive 52%.

När det gäller uppgift 7b, 0,16 / 4, så blir det, vid intervjuer, tydligt att sättet att uttrycka tal i decimalform är avgörande för elevens förståelse. Många elever svarar 0,4, beroende på att de tänker noll komma sexton delat med 4. Hade de istället tänkt 16 hundradelar delat med 4 så hade de fått 4 hundradelar. För den som kan detta spelar det mindre roll hur man uttrycker sig, men i ett inlärningsskede är det avgörande för elevens förståelse. Endast hälften av eleverna klarar denna uppgift.

De sista båda uppgifterna 8b och 8c blir relativt enkla för den elev som lärt sig tänka i termer av innehållsdivision. Detta är återigen en kunskap från de tidiga skolårens division. Uppgiften 5/0,1 löser man exempelvis genom att först fråga hur många gånger 0,1 ryms i 1, vilket ger 10. Då blir 5/0,1 fem gånger mer, alltså 50. Man kan också se det som ett bråk och förlänga med 10. Om man tänker 0,7/0,01 som 0,70/0,01 alltså med samma ”enhet” i både täljare och nämnare så handlar uppgiften om hur många gånger 1 (hundradel) ryms i 70 (hundradelar). Lösningsfrekvenserna här är 44% respektive 38%.

Tabell 40 visar lösningsfrekvenser för respektive uppgift på diagnosen. Tabellen visar även lösningsfrekvenserna per kurser.

Tabell 40.

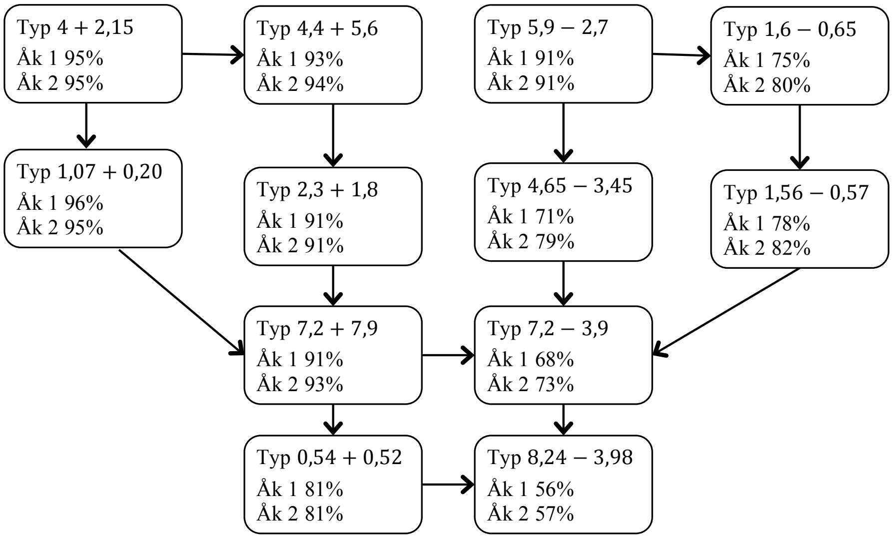
Diagnos RD-GY. Andelen elever, som löst uppgiften rätt. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift Kurs	n=	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4a	4b	4c
totalt	1500	95	93	91	96	81	91	91	68	77	56	75	78
1a	417	94	92	91	96	71	91	90	58	74	46	67	71
1b	628	93	92	89	96	78	88	88	64	71	51	70	73
1c	455	98	97	94	98	93	96	95	82	88	73	88	91

Uppgift Kurs	5a	5b	5c	6a	6b	6c	7a	7b	7c	8a	8b	8c
totalt	71	55	60	39	50	32	64	50	52	35	44	38
1a	62	47	47	31	38	22	53	39	40	29	32	29
1b	65	50	53	28	40	23	56	43	44	30	33	26
1c	88	71	81	60	74	53	85	69	75	46	68	62

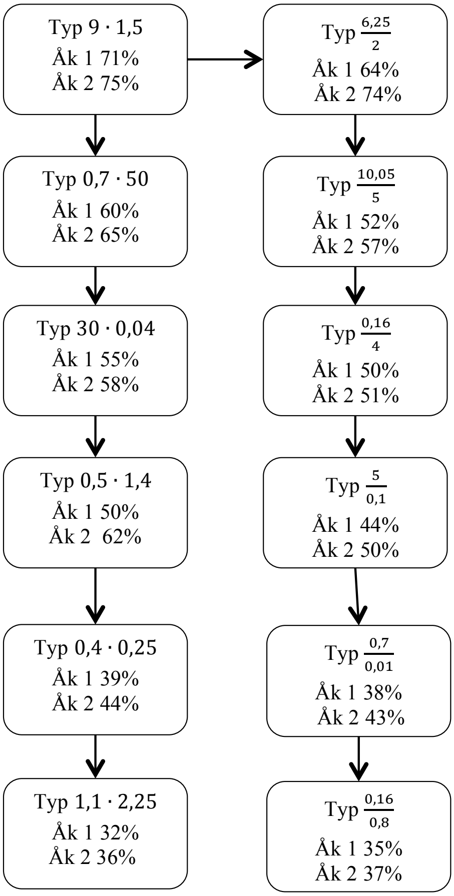
Studerar man de fel som eleverna har gjort beror dessa troligen på att de inte behärskar de grundläggande beräkningarna inom de fyra räknesätten. Resultaten på diagnos AG-GY visade att många elever har svårigheter med multiplikation, vilket torde påverka resultatet på uppgifterna 5 och 6 i diagnos RD-GY. Man kan också konstatera att de svårigheter eleverna har med vissa uppgifter inte direkt har att göra med decimaltalen i sig utan snarare med elevernas taluppfattning och deras bristande förmåga att implicit använda räknelagar och räkneregler.

Figur 6.2 och Figur 6.3 nedan visar resultatscheman för samtliga elever i årskurserna 1 och 2 i kommunens gymnasieskolor. I dessa båda resultatscheman kan man se mönster som visar samband mellan olika aspekter av tal i decimalform.



Figur 6.2 Resultatschema, Addition och subtraktion av tal i decimalform RD-GY, (åk 1, n≈ 1500, åk 2, n ≈ 900).

Lösningsfrekvenserna för de olika uppgifterna är återigen i stort sett samma i början av årskurs 2 som i början av årskurs 1. Bristande kunskaper vid starten av gymnasiet kvarstår och har inte åtgärdas. Detta är samma mönster som framträder på grundskolan. Har inte eleven lärt sig ett innehåll i den årskurs då det undervisas först, så kvarstår problemen.



Figur 6.3. Resultatschema, Multiplikation och division av tal i decimalform, RD-GY (åk 1, n≈ 1500, åk 2, n ≈ 900).

Vid analysen av resultaten på diagnosen RD-GY, Tal i decimalform, blir det tydligt att en stor andel elever saknar grundläggande taluppfattning. De har inte med sig grundläggande kunskaper från de naturliga talen om strukturer och samband inom matematiken eller om hur räknelagar och räkneregler tillämpas vid beräkningar – de saknar matematikens grammatik. De bristande kunskaper som visar sig vid starten av gymnasieskolan, kan härledas till de tidiga skolåren, vilket styrks av data som redovisats i kapitel 4.

6.2.2 Analys av Diagnosen Procent

Procentuppgifter förekommer ofta i vardagen i tidningar och nyhetssändningar. Det gäller reklamerbjudanden, räntor och prisutveckling, men även ekonomi och politik. De matematiska modeller som används vid procenträkning har sitt ursprung i bråkräkning och handlar i grunden om att räkna med andelar. För att klara procenträkning krävs det en god taluppfattning av tal i bråkform och tal i decimalform. Undervisningen i grundskolan syftar till att eleverna ska förstå procentbegreppet och kunna utföra enklare beräkningar. I Lgr11 ingår följande som centralt innehåll för årskurserna 4 – 6:

> Tal i procentform samt deras samband med tal i bråk- och decimalform. […] samt proportionalitet och procent samt deras samband.

För årskurserna 7 – 9 ingår

> Procent för att uttrycka förändring och förändringsfaktor samt beräkning med procent i vardagliga situationer och i situationer inom olika ämnesområden. (Lgr11)

Hälften av de testade eleverna, 53%, hade inte tillägnat sig dessa kunskaper (Figur 6.4) när de lämnade grundskolan, (Tabell 39).

1. Hur mycket är:
   a) 5% av 160 kr? _______ b) 25% av 480 kr? ______ c) 20% av 40 kr? _______
2. För att få en salladsdressing blandar man 3 dl olja och 1 dl vinäger. Hur många procent av blandningen består av vinäger?

   Svar: ……………………………………
3. I en by i Schweiz talar 452 personer franska, 800 personer tyska och 748 personer italienska. Hur många procent av alla i byn talar tyska?

   Svar: ………………………
4. Ett par jeans kostar 720 kr. Man får 15% rabatt. Hur mycket får man då betala?
   Svar: ………………………
5. Lisas månadslön är 25 000 kr. När skatten är dragen har Lisa 21 000 kr kvar. Hur många procent av lönen betalar hon i skatt?
   Svar: ………………………
6. En dator kostar 8 400 kr utan moms. Man får också betala 25% moms. Hur mycket kostar datorn när momsen är inräknad?
   Svar: ………………………
7. Priset på en skjorta som tidigare kostat 400 kr höjs med 15%. På det priset får Erik 15% rabatt. Hur mycket får Erik betala?
   Svar: ……………………………
8. Priset på en jacka är 250 kr. Först höjs priset med 20% och sedan sänks det med 10%. Vad blir det slutliga priset?
   Kryssa i de uttryck som ger korrekt svar på uppgiften.
   a. 250 + 20 - 10
   b. 0,2 · 250 · 0,1
   c. 250 · 1,2 · 0,9
   d. 250 + 1,20 - 0,9

Figur 6.4. Diagnosen Procenträkning, RP-GY.

Lösningsfrekvenserna på de olika uppgifterna visar att alltför många elever har bristande kunskaper när det gäller olika aspekter av procentbegreppet (Tabell 41, Figur 6.5). Samtliga beräkningar är så enkla att de inte ska orsaka några problem för eleverna. Även denna diagnos avser att testa ett begrepp, procentbegreppet. Detta begrepp går emellertid inte att testa utan att aritmetiska beräkningar ingår. Aritmetiken som ingår i uppgifterna ska dock vara så enkel att den kan lösas i huvudet. Flera gymnasielärare menar emellertid att vissa beräkningar är för svåra för eleverna, till exempel uppgift 1b, 25% av 480 kr. I uppgift 3 behöver eleverna utföra additionen 452 + 800 + 748. Även detta anses av lärare vara för svårt. Talen är noga valda. När det gäller 452 + 748 borde eleven se att 52 + 48 = 100 vilket ger den totala summan 1200. Sedan ska de addera 800 och få resultatet 2000. Detta är additioner som eleverna, borde behärska i årskurs 3 eller 4.

Uppgifterna 1 - 3 testar de mest grundläggande aspekterna av att räkna med procent och proportionalitet. Att behärska denna typ av uppgifter är nödvändigt för att kunna tolka och värdera information i olika situationer och inom skolans övriga ämnen.

Var fjärde elev klarar inte att beräkna 5% av 160. Uppgiften kräver inte någon krånglig beräkning, men diagnosresultaten visar att 25% av eleverna inte klarar denna beräkning.

Uppgift 1b är knappast svår, 25% är en fjärdedel och att dela 480 med 4 är enkelt. På samma sätt är uppgift 1a, 20% av 40, en femtedel av 40, och 40 dividerat med 5 är grundläggande multiplikationsfakta. En alternativ lösning är att tänka 10% är 4 kr och 20% blir då 8. Inga av dessa beräkningar är svåra för den som har förstått procentbegreppet och har en grundläggande taluppfattning. Lösningsfrekvenserna här, 84% respektive 78%, visar dock att alltför många elever inte klarar dessa uppgifter.

Uppgifterna 4 och 5 testar vardagssituationer som en medborgare måste behärska. Först är det en rutinuppgift, att beräkna 15% av 720 kr, vilket orsakade drygt hälften av eleverna svårigheter (lösningsfrekvens 46%). Att själv räkna ut en procentsats när brutto- och nettolönen angetts var ännu svårare och uppgift 5 löste endast 40% av eleverna.

Uppgift 6 och 7 prövar en något djupare förståelse av procentbegreppet. Lösningsfrekvensen på uppgift 6 visar att endast drygt hälften av eleverna förstår innebörden av moms. Lösningsfrekvenserna på uppgift 7, en beräkning som innefattar en procentuell höjning och därefter en procentuell sänkning av ett pris, visar att endast en tredjedel av eleverna löser uppgiften.

Uppgift 8, som är enda flervalsfrågan, visar om elever kan förstå matematiska verktyg och hur förändringsfaktor kan användas. Hälften av eleverna klarar detta. Uppgiften är i grunden av samma typ som uppgift 7 men är i form av flervalsalternativ vilket verkar lättare.

Resultatet på denna diagnos är nedslående, men ger troligen en korrekt bild av elevers faktiska kunskaper. Eleverna behöver emellertid behärska samtliga aspekter av procentbegreppet som brukar förekomma i olika sammanhang.

Tabell 41 visar lösningsfrekvenser för respektive uppgift på diagnosen. Tabellen visar även lösningsfrekvenserna per kurs.

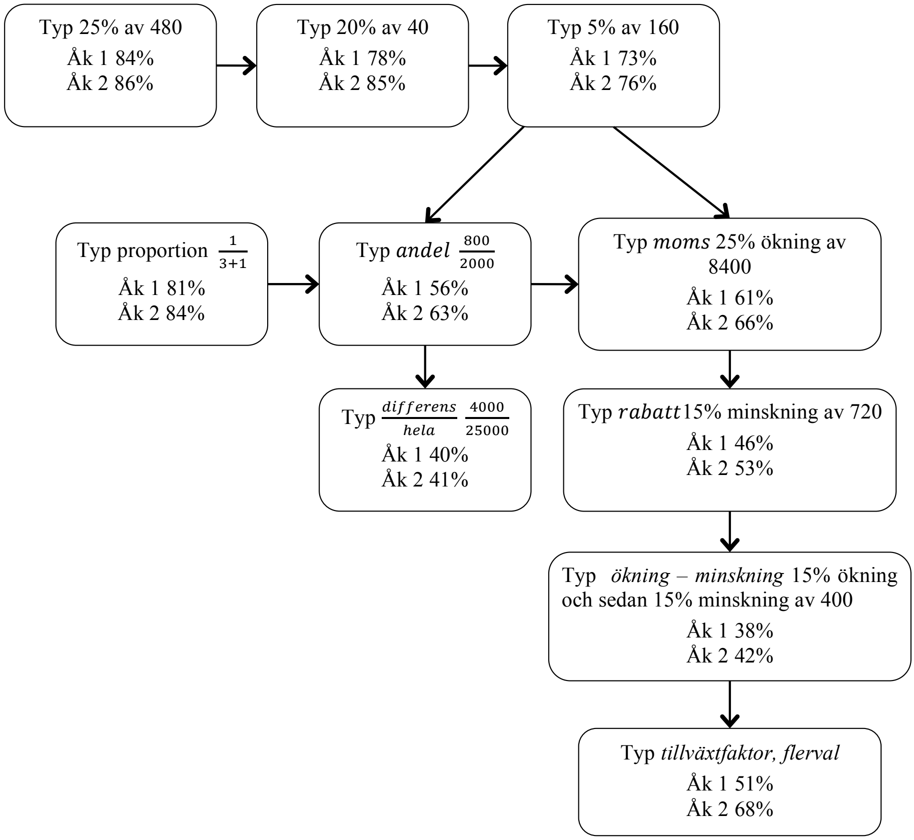
Tabell 41.

Diagnos RP-GY. Andelen elever som löst uppgiften rätt. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift Kurs	n =	1a	1b	1c	2	3	4	5	6	7	8
totalt	1 494	73	84	78	81	56	46	40	61	38	51
1a	451	64	73	66	75	44	37	31	50	26	29
1b	607	69	84	75	79	48	40	32	56	32	43
1c	436	85	93	93	89	77	62	59	77	59	84

Lösningsfrekvenserna visar resultatet av elevers tankar. För denna diagnos var det dock även möjligt att studera en del elevers lösningar. Då framkom att elever som hade alla uppgifter rätt så gott som aldrig gjort några anteckningar på papperet. Dessa elever löste troligen uppgifterna med huvudräkning, vilket var avsikten. Av skriftliga lösningar framgår att elever ofta har ett rent tekniskt tänkande och löser uppgifter enligt någon form av mall.

Nedan visas ett resultatschema (Figur 6.5) över RP-GY för samtliga elever i kommunens gymnasieskolor. I schemat framträder ett mönster som visar samband mellan olika aspekter av procentbegreppet. Inte heller här skiljer sig lösningsfrekvenserna åt mellan årskurs 1 och årskurs 2.



Figur 6.5. Resultatschema, diagnos, RP-GY.

Eleven behöver dels förstå innebörden i procentbegreppet, dels behärska de beräkningar som ingår. Det går alltid att reflektera över relevansen av uppgifterna i diagnosen. Via lärarintervjuer och genom att studera uppgifter i såväl svenska som internationella läromedel, framgår att det är denna typ av uppgifter som används i undervisningen på grundskolan.

Även resultatschemat för grundläggande procenträkning kan, som i figuren ovan, utformas som en didaktisk karta.

6.2.3 Analys av ekvationslösning

Vid problemlösning är ekvationer ett användbart verktyg när samband mellan variabler tecknas. Ekvationerna löses sedan med generella metoder. Redan i årskurserna 4 – 6 ingår ekvationer i centralt innehåll:

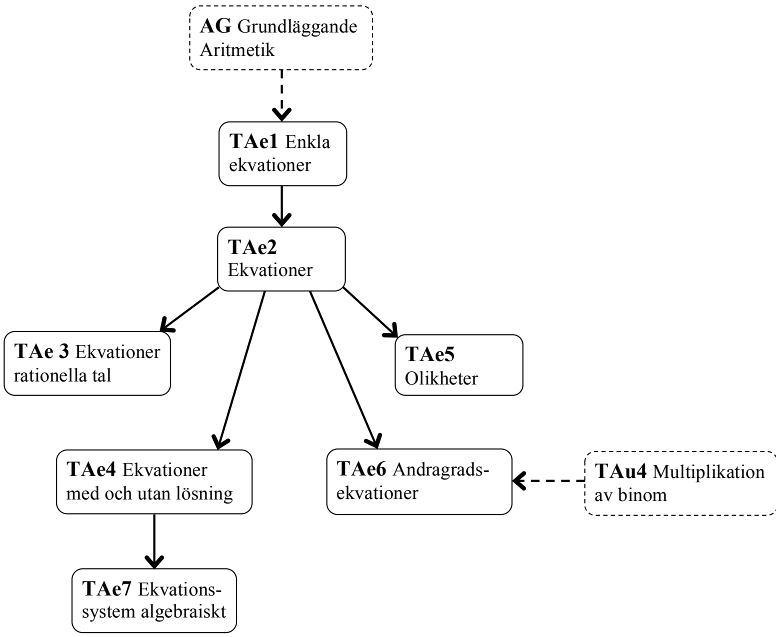
> Enkla algebraiska uttryck och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven […] samt metoder för enkel ekvationslösning. (Lgr11)

Detta gäller även i årskurserna 7 – 9:

> Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer […] och algebraiska uttryck, formler och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven […] samt Metoder för ekvationslösning. (Lgr11)

Vad innebär dessa texter i kursplanen? Lärare förlitar sig ofta på läromedelsförfattarens tolkning, och arbetar med de uppgifter och metoder som finns i läroböckerna. Idag, till skillnad från för 10 - 20 år sedan, löser även elever på högstadiet ekvationer, genom att hålla ett finger över variabeln och gissa lösningen.

Under konstruktionsarbetet med Diamantdiagnoserna jämfördes de tolkningar av kursplanen som gjordes med tidigare nationella kursplaner och även med internationella kursplaner, allt för att nivån skulle bli rimlig. Relevanta diagnoser finns i materialet TAe i Talmönster och Algebra (www.skolverket.se/diamant).



Figur 6.6 Samband mellan diagnoser inom TAe.

Av Figur 6.6 framgår vilka olika typer av ekvationer som kan behandlas i grundskolan. Inom varje diagnos testas olika aspekter av just den ekvationstypen, men i flera av diagnoserna förekommer förstås tal i bråkform. Den diagnos som användes vid kartläggning i början av gymnasiet omfattar ett urval av ekvationer från Diamant (Figur 6.7).

1) $4x - 2 = x + 7$	Svar: ________
2) $4 - x = 2x + 1$	Svar: _______
3) $2x + 8 = 8 + 2x$	Svar: ______
4) $4 - \frac{x}{3} = x + 3$	Svar: _______
5) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{1}{6} + \frac{x}{2}$	Svar: _______
6) $\frac{1}{4} - 2x = \frac{1}{2}\,(2 - 3x)$	Svar: ________

Figur 6.7 Diagnos Ekvationer, TA-GY.

Ekvationerna skulle lösas med en generellt användbar metod (väsentligen annulleringslagen) med lösningen redovisad på papperet.

Uppgifterna 1 och 2 är enkla ekvationer som har en entydig lösning. Cirka 60% av eleverna klarade att lösa dessa ekvationer.

De elever som behärskar ekvationslösningar förstår även att det finns ekvationer som inte går att lösa och ekvationer som har oändligt många lösningar. Uppgift 3 har oändligt många lösningar, något som många elever verkar vara tveksamma inför, endast 26% löste denna uppgift.

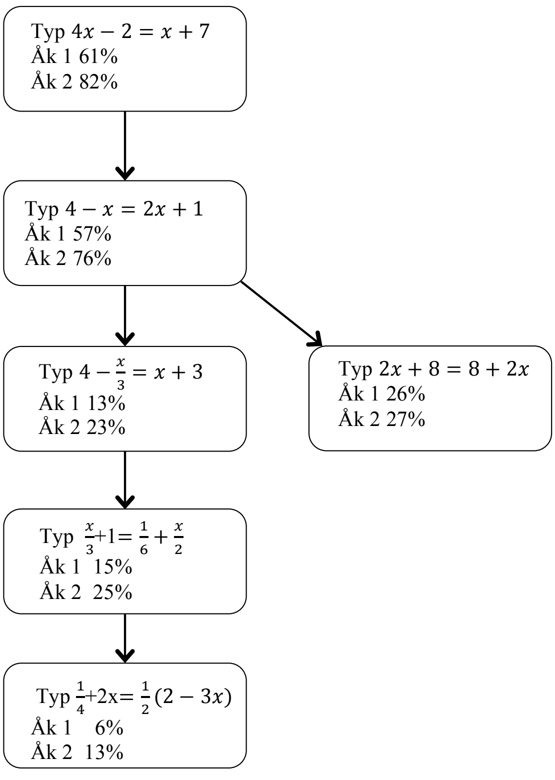
Uppgifterna 4 – 6 är ekvationer där koefficienter eller lösningen är ett tal i bråkform. Det är mycket få elever som löser dessa uppgifter. (Lösningsfrekvens 13%, 15% respektive 6%). I kapitel 5 framgår att många elever saknar tillräckliga kunskaper om tal i bråkform och har därmed inte de förkunskaper som krävs för att lösa ekvationerna i uppgifterna 4 – 6. I Tabell 39 visas att 88% av eleverna har för få rätt på hela diagnosen och således inte behärskar ekvationslösning på denna nivå. Av Tabell 39 framgår även att det är i stort sett lika stor andel elever på de olika kurserna som har för få rätt. Tabell 42 visar lösningsfrekvenser per uppgift, såväl totalt som per kurs i årskurs 1.

Tabell 42.

Diagnos TA-GY. Andelen elever som löst uppgiften rätt. Lösningsfrekvens i procent.

Uppgift / Kurs	n =	1	2	3	4	5	6
	1425	61	57	26	13	15	6
1a	373	40	35	20	8	6	5
1b	607	54	48	18	4	5	2
1c	445	90	87	42	28	36	12

Vid en genomgång av några högstadieböcker framkom att denna typ av uppgifter förekommer inom ekvationslösning i årskurs 8 och 9, men uppgifterna blandas in tillsammans med ekvationer som inte innehåller rationella tal, utan att det finns någon speciell genomgång i boken. Troligen finns ett förgivettagande hos lärarna om att eleverna ska klara av att ta fram minsta gemensamma nämnaren och sedan kunna lösa ekvationen. Resultatschemat nedan visar lösningsfrekvenser per uppgift för samtliga elever i kommunens gymnasieskolor. Av resultatschemat (Figur 6.8) framgår ett mönster som visar komplexiteten av olika aspekter av ekvationslösning.



Figur 6.8. Resultatschema, Ekvationer, TA-GY.

När resultatet återfördes till lärarna rådde samstämmighet om att ekvationsdiagnosen var alldeles för svår för eleverna. För att kunna lösa dessa ekvationer behöver eleven behärska bråkräkningar där det redan i grundskolan finns en hel del brister (Kapitel 4.2). Även av diagnosen RB-GY, tal i bråkform, framgår att 60% av eleverna inte behärskar grundläggande räkning med tal i bråkform. När sedan denna kunskap ska kombineras med att lösa ekvationer så klarar eleverna inte av det.

Till följande kartläggningar år 2014 och år 2015 konstruerades, tillsammans med lärare, en ny enklare ekvationsdiagnos. Huruvida detta är rätt väg att lösa problemet med gymnasieelevernas bristande förmåga att lösa ekvationer, kan diskuteras. Ekvationslösning är, som tidigare nämnts, ett användbart verktyg inom problemlösning. Eleverna förväntas även kunna skapa ekvationer utifrån given information. Beräkningar med hjälp av formler, som till exempel inom olika naturvetenskapliga ämnen, är också en form av ekvationslösnings. Diagnosen testar endast i vilken omfattning eleverna klarar att lösa ekvationer av olika slag, den testar inte deras förmåga att skapa en ekvation, vilket är en väl så väsentlig kunskap.

6.3 Kommentarer till gymnasiediagnoserna

Kartläggningen vid starten av gymnasieskolan har gett en inblick i vilka förkunskaper elever har med sig från grundskolan. Genom lösningsfrekvenser på diagnosernas olika uppgifter framgår vilka kunskaper eleverna saknar. Med hjälp av didaktiska ämnesanalyser går det att härleda dessa brister till bristande förståelse under tidiga skolår. Det handlar här inte enbart om brister som kan ses som dåliga räknefärdigheter. Det som brister är snarare elevers förståelse av matematiken, dess uppbyggnad, struktur och villkor.

Idag talas en hel del om förståelse i motsats till utantillkunskaper. Men förståelse i form av basfakta som grund för att behärska en metod eller ett begrepp, utgörs till stor del av utantillkunskaper. Vad förståelse kan innebära bör synliggöras i matematikundervisningen redan på lågstadiet. Läraren behöver göra olika beräkningar transparanta och visa på matematiken i beräkningarna. Därefter bör det vara möjligt för nästa lärare att knyta till tidigare beräkningar och tydligt visa hur den vunna kunskapen kan användas och utvecklas vidare inom ett nytt talområde.

Tidigare lärde elever sig att 7 + 8 =15 genom att arbeta med många liknande uppgifter och på så sätt nöta in kombinationen. Fortfarande krävs att eleven automatiserar denna typ av basfakta, men vid inlärningen kan läraren visa på olika lösningsstrategier och lyfta fram vilken matematik beräkningen grundar sig på.

Under fortbildningsdagar har lärare, som undervisar i grundskolans tidigare år, fått lösa några av de uppgifter som ingår i diagnosen RD-GY. Sedan har de fått beskriva hur de löst uppgifterna och vilka räknelagar de använt. De kan då ofta förklara hur de löst uppgiften, men vet inte vilka räknelagar de använt. När de sedan får se lösningarna och vilka räknelagar som använts, ser de ofta mycket förvånade ut. Syftet har varit att visa hur man, när man löser dessa uppgifter, kan använda strategier som borde lärts ut i samband med räkning med naturliga tal. Avsikten är att väcka lärarnas intresse för att tala mer matematik med sina elever. Detta kräver dock att läraren själv behärskar det aktuella innehållet med ett adekvat djup.

Det tjänar ingenting till att skuldbelägga grundskolans lärare. De arbetar utifrån de förutsättningar som ges. Här handlar det snarare om ett systemfel. För gymnasielärare gäller det dock att först försöka hjälpa eleverna till förståelse av de områden de ännu inte behärskar. Med rätt förklaringar kan detta gå relativt snabbt. Förhoppningen är att lärare och rektorer genom denna studie får en grund för kommande åtgärder.

7 Diskussion och slutsatser.

Den didaktiska ämnesteorin är ett ramverk inom vilket verktyg kan utvecklas, som ger läraren förutsättningar att hjälpa individer att lära sig matematik. Ett syfte med detta ramverk är att beskriva matematiken utifrån ett lärandeperspektiv. Detta görs genom en didaktisk ämnesanalys, som lägger en grund för de strukturscheman som har presenterats i tidigare kapitel. Dessa strukturer är väsentligen förkunskapsstrukturer och kan därmed beskriva en progression för elevers begreppsbildning. Kännedom om dessa strukturer kan vara ett värdefullt redskap för en lärare som ska planera, genomföra och utvärdera sin undervisning.

Förkunskaperna är särskilt viktiga i ett kumulativt ämne som matematik och de strukturscheman som tas fram med en didaktisk ämnesanalys gör förkunskapsstrukturen synlig. Strukturscheman kan jämföras med den beskrivning som Wilkerson-Jerde och Wilensky (2011) gör av hur matematiker ser på matematik. Grundtanken är densamma, att synliggöra delarna i en strukturerad helhet.

I samband med att olika matematiska begrepp har analyserats, har ett utvärderingsinstrument, Diamant, konstruerats. Med hjälp av detta har det sedan gått att pröva gjorda antaganden om strukturella relationer mellan olika begrepp och mellan olika aspekter av ett och samma begrepp. Det har även varit möjligt att med viss precision kartlägga elevers grundläggande matematikkunskaper.

De empiriska resultaten har slutligen använts på två sätt. Det ena är att via empirin kontrollera om strukturerna är rimliga. Det andra är att beskriva elevers grundläggande matematikkunskaper, individuellt och i grupp.

I följande avsnitt diskuteras några aspekter av den forskning, såväl teoretisk som empirisk, som beskrivits ovan. Självklart är dessa diskussioner inte heltäckande, utan bör snarast betraktas som en inbjudan till fortsatt diskussion.

7.1 Didaktisk ämnesanalys, ett användbart verktyg

I diskussioner kring matematikundervisningen i skolan tas ämnesinnehållet ofta för givet utan att problematiseras. Ett av flera exempel på detta är Skolverkets senaste satsning Matematiklyftet, ”en fortbildning i didaktik för lärare som undervisar i matematik” (matematiklyftet.skolverket.se), där ambitionen har varit att förändra vad man bedömer som en mindre effektiv undervisningskultur, men där en diskussion kring ämnesinnehåll och lärarens ämneskunskaper har stått tillbaka.

Varje lärare har sin förståelse av matematiken, utgående från egna kunskaper och erfarenheter. Läromedel presenterar matematiska begrepp med olika djup beroende av vilken årskurs de är avsedda för. Det kan därmed vara svårt för läraren att få en överblick över vilken förförståelse som behövs för att förstå relevanta aspekter av ett begrepp. Med hjälp av den didaktiska ämnesanalysen har det varit möjligt att synliggöra sådana aspekter och på så sätt visa vad en elev behöver förstå för att behärska begreppet ifråga på relevant kognitiv nivå.

Här är det viktigt att skilja på å ena sidan ett begrepp som sådant och å andra sidan på hur elever uppfattar begreppet (se avsnitt 2.5). Exempelvis är begrepp som ’cirkel’ eller ’multiplikation’ väldefinierade matematiska begrepp, vilka kan representeras på olika sätt; formellt via olika definitioner, med hjälp av bilder och figurer eller på andra sätt. Genom undervisningen ska eleven ges möjlighet att uppfatta begreppen på en för elevens ålder relevant nivå. Denna kunskap utgör sedan förkunskaper när elevens begreppsförståelse utvecklas vidare. För sin planering av undervisningen är det då nödvändigt att läraren inte bara förstår begreppets innebörd utan också har en didaktisk förståelse av olika aspekter av begreppet. I den didaktiska ämnesanalys som presenterats ovan synliggörs didaktiska samband mellan specifika grundläggande matematiska begrepp. Utgångspunkten är här tagen i den matematik som enligt styrdokumenten ska undervisas i grundskolan, eller snarare i en tolkning av dessa dokument.

Med en didaktisk ämnesanalys synliggörs, i form av strukturscheman, bredden och djupet av vad det innebär att behärska olika begrepp. Det går således att på det sättet beskriva karaktären på vissa av de didaktiska ämneskunskaper som behövs för undervisning i matematik. Med hjälp av didaktiska ämnesanalyser ritas delar av strukturkartan i det matematiska landskapet och därigenom synliggörs för läraren viktiga förkunskapsstrukturer. I klassrummet behöver läraren snabbt, utifrån elevers frågor, resonemang och lösningar av uppgifter, uppfatta hur eleven har förstått ett begrepp, eller en aspekt av ett begrepp. Vad som är möjligt för läraren att uppfatta och urskilja beror då av hennes egna kunskaper och erfarenheter inom området. Att uppfatta och urskilja olika elevers förståelse av begrepp utgör en grund för formativ bedömning.

Didaktisk ämnesanalys är alltså ett analysverktyg för att synliggöra och definiera delar av de professionskunskaper som lärare behöver för att kunna förklara olika matematiska begrepp för elever. Det innebär att didaktisk ämnesanalys är ett analysverktyg, med vars hjälp begrepp och samband inom skolans matematik kan beskrivas och de begreppsstrukturer som då synliggörs, den didaktiska kartan, kan lärare ha konkret nytta av i klassrummet. Denna karta utgör dels en grund för en formativt grundad undervisning, men också ett verktyg för att synliggöra en progression från tidigare årskurser till senare.

Den genom didaktisk ämnesanalys gjorda beskrivningen av grundläggande matematikbegrepp kan sägas vara en del av vad Ball m.fl. (2008) kallar Specialized Content Knowledge, med vilket de menar ”pure content knowledge unique to the work of teaching”. Alltsedan Shulman (1986; 1987) beskrev en speciell typ av professionskunskaper som lärare behöver, Pedagogical Content Knowledge, PCK, har detta begrepp flitigt använts. Ball m.fl. (2008) utgår i sin forskning från klassrumsstudier, medan den didaktiska ämnesanalysen snarare utgår i ämnet och analyserar detta utifrån ett didaktiskt perspektiv. Den didaktiska ämnesanalysen utgör ett verktyg som pekar ut lärarkunskaper som kan ingå i PCK, men gör det ur ett ämnesperspektiv snarare än utifrån direkta praktiknära observationer. Båda perspektiven torde vara viktiga utifrån en syn på vad en lärares professionskunskap bör innefatta.

Vid konstruktionen av utvärderingsinstrumentet Diamant användes de framtagna begreppsstrukturerna. Diagnoserna inom Diamant fokuserar på ett begrepp, eller en räknefärdighet, i taget och utgör ett instrument som kartlägger elevers grundläggande kunskaper. De kartläggningar som beskrivs ovan har visat att tanken med Diamantdiagnoserna, att visa hur långt eleverna kommit i sin kunskapsutveckling inom matematik, fungerar. Syftet är att resultaten av diagnoserna i huvudsak ska användas formativt och ge ett underlag för planering av en strukturerad undervisning. På så sätt skapas förutsättningar för eleverna att nå kunskapskraven. Därigenom blir det möjligt att förebygga framtida svårigheter, som eleverna annars kan hamna i beroende på bristande förkunskaper eller färdigheter.

Arbetet med att utveckla diagnoserna och den därpå följande diskussionen om utvärderingsinstrumentets validitet har knutit an till vad som kan göras åt resultaten (Messick, 1989). Det är knappast meningsfullt att utföra en diagnos om man inte är beredd att agera utifrån resultatet. Avsikten är att läraren, tack vare att elevens kunskaper synliggörs, kan undervisa så att bristerna överbryggas. Till sin hjälp har läraren didaktiska kommentarer som finns i Diamantmaterialet. Nu kan de strukturscheman som är konstruerade här utgöra ytterligare stöd vid uppföljning av diagnosresultat. Kartläggningar som inte följs upp riskerar snarast att vara ett onödigt arbete för såväl elev som lärare.

7.2 Empiri som stöd för den didaktiska analysen

En fråga som uppstår när det gäller de strukturscheman som ligger till grund för diagnoserna är om dessa i någon mening är korrekta, det vill säga om de utgör en rimlig didaktisk tolkning av den matematik de är tänkta att beskriva. Utprövningen av diagnoserna var här ett första test av om de byggda strukturerna fungerade för att urskilja hur elever har uppfattat olika begrepp eller olika aspekter av begrepp

De resultatscheman som beskrivs i kapitel 4 har skapats genom att ett stort antal elevers lösningsfrekvenser har lagts in i motsvarande strukturscheman. I praktiskt taget samtliga fall kan man då konstatera att lösningsfrekvenserna sjunker med att komplexiteten, enligt den didaktiska analysen, hos aspekterna av begreppet ökar. Lösningsfrekvenserna visar sig avta med ökande komplexitet på ett likartat sätt inom de olika diagnoserna, och samma mönster går igen oavsett gruppstorlek och återfinns till och med på individnivå.

Diagnosresultaten har i samtliga fall inhämtats inom ramen för den ordinarie undervisningen och resultaten har lärarna använt formativt. Eleverna har därför haft anledning att visa sina kunskaper, precis som i andra bedömningssituationer inom matematikundervisningen. Detta är inte fallet när det gäller test som PISA och TIMSS, som eleverna utför vid sidan av ordinarie skolarbete och utan att de ges någon direkt återkoppling i det ordinarie arbetet.

Med hjälp av lösningsfrekvenser på olika uppgifter inom en diagnos har det, i en mening, gått att styrka att den ämnesdidaktiska analys diagnosen bygger på utgör en rimlig didaktisk tolkning av den matematik diagnosen täcker. Lösningsfrekvenserna så som de visas i resultatschemat faller i enlighet med den förkunskapsstruktur som analysen gett. Empirin stöder i denna mening att analysen är korrekt.

Ytterligare frågor kan naturligtvis ställas kring de konstruerade strukturschemana. Varje ruta i ett strukturschema utgörs av en uppgift i diagnosen. I vissa fall är det möjligt att strukturera frågorna på ett annat sätt, även med bibehållet samband mellan struktur och lösningsfrekvenser – sambandet är inte alltid entydigt – och självklart kan då strukturschemat ritas annorlunda. Grundtanken att bygga strukturerna från enklare aspekter, uppe till vänster, i en trädliknande struktur nedåt och åt höger, kan i vissa fall bibehållas även om uppgifterna ges en något annan ordning. I dessa fall bygger valet av ordning på en tänkt naturlig förkunskapsordning, där en viss aspekt som prövas i en uppgift, av rent matematiska skäl kan anses bero av en annan.

Självklart kan sådana val diskuteras och utvecklas ytterligare, kanske genom att ytterligare aspekter täcks in av nya uppgifter i diagnosen.

Det är alltså fullt möjligt att de strukturscheman som konstruerats kan förfinas genom att fler noder placeras in i strukturerna. Det kan gå att göra nätet mer finmaskigt och rita en än mer detaljerad karta. Här måste dock diagnosverktygets användbarhet vägas in. En alltför omfattande diagnos blir ogörlig att använda i klassrummet och forskningssyftet har här inte getts överhand över praktiken. Troligen har de mest avgörande begreppen och aspekterna av dessa kommit med, samtidigt som antalet uppgifter är begränsat och på så sätt är strukturerna såväl tydliga som användbara. Efter utprövningarna har heller inte några uppenbara luckor i diagnosmaterialet kunnat upptäckas, men här finns självklart utrymme för ytterligare forskning.

7.3 Elevers grundläggande matematikkunskaper

Som framgått i kapitel 5 har resultat från mellan tvåtusen och femtusen elever per årskurs samlats in sedan 2008. Sammantaget ger dessa resultat en bild av påtagligt låga kunskaper när det gäller sådana grundläggande färdigheter som är avgörande för att förstå matematik och för att kunna använda matematik vid problemlösning eller inom fortsatt undervisning i matematik och i andra ämnen.

Kartläggningar har gjorts i ett tiotal hela kommuner och på ytterligare ett stort antal enskilda skolor. Med diagnoserna kan man analysera resultat på individnivå och på så sätt går det att i detalj synliggöra vari elevens kunskapsbrister består. Genom att studera resultatscheman kan man dessutom avgöra var och när bristerna har uppstått och vilka konsekvenser dessa får för eleven när det gäller förståelsen av begrepp som lärs i senare årskurser.

De sambandsanalyser som gjorts (se 4.3.12) visar vidare att när ett begrepp som till exempel subtraktion fördjupas, det vill säga när komplexiteten hos aspekter av begreppet ökar, så kan de allt lägre lösningsfrekvenserna förklaras med de kunskapsbrister som visat sig i tidigare diagnoser. Denna bild förtydligas genom de intervjuer som gjorts med elever i anslutning till att de besvarat diagnoserna. I sådana intervjuer har elever förklarat hur de har tänkt när de har löst uppgifterna.

Kartläggningarna som gjorts med hjälp av Diamantdiagnoser visar att en alltför stor grupp elever inte behärskar de mest elementära grunderna inom matematiken, de basfakta som ingår i matematiken för årskurserna 1–3, och detta får följdverkningar vid fortsatt inlärning av matematik. Redan resultatscheman för diagnoser av addition och subtraktion med naturliga tal visar att elever ofta har endast ytlig kunskap av dessa begrepp. När komplexiteten hos aspekter av begreppen sedan ökar, blir lösningsfrekvensen lägre, alltså färre elever klarar uppgifter som prövar de mer komplexa aspekterna. Tendensen är densamma för alla de diagnoser som använts.

Vidare är lösningsfrekvenserna på många uppgifter desamma från en årskurs till nästa, vilket visar att om eleven inte lärt sig ett begrepp det år som det presenterats, så kommer denna kunskap i ett senare skede inte av sig själv utan explicit undervisning. Troligtvis är det inte ovanligt att elevers bristande förkunskaper inte uppmärksammas i den fortsatta undervisningen, varför deras problem kvarstår år efter år.

Detta arbete pekar ut ett antal exempel på vilka konsekvenser bristande förkunskaper kan få inom matematikundervisningen. Ett väsentligt sådant exempel är hur bristande kunskaper vid räkning med tal i decimalform kan härledas till mindre bra förståelse av beräkningar inom talområdet 1 – 19. Eleverna ser här troligen inte den matematiska strukturen, främst beroende på att de inte under de tidiga skolåren förstått räknelagar och räkneregler och sett samband. Redan resultatscheman för diagnoser av addition och subtraktion med naturliga tal visar att elever ofta har en ytlig kunskap om begreppen. De tappar i förståelse när uttryck omformuleras, även i de fall dessa behåller samma mening. Ett typexempel är elever som inte har getts möjlighet att förstå att ett uttryck som $5 - \_\_ = 3$ uttrycker samma villkor som $3 + 2 = \_\_$. Lösningsfrekvenserna för subtraktion är genomgående lägre än för motsvarande uppgifter när det gäller addition, trots att subtraktionsuppgifterna matematiskt sett inte borde vara svårare. Detsamma gäller förhållandet mellan multiplikation och division. Här skulle en medveten didaktisk analys av de ingående begreppen kunna utgöra ett stöd för läraren att utforma undervisning som tydligare visar sambanden mellan operationerna för eleverna.

Det är troligt att de förkunskapsbrister som framgår av de resultatscheman som presenterats, även påverkar elevernas möjligheter att utveckla matematiska förmågor såsom problemlösningsförmåga och resonemangsförmåga. Matematikkunskaper kan beskrivas i termer av kompetenser (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Niss, & Højgaard Jensen, 2002). Matematisk kompetens innefattar begreppsförståelse och räknefärdigheter men omsluter en större helhet i form av problemlösningsförmåga och resonemangsförmåga. Dessa olika kompetenser är sammanlänkade med varandra och verkar i ett växelspel när eleven använder begrepp och färdigheter för att lösa problem eller när eleven utvecklar nya begreppskunskaper genom att resonera och söka samband eller när problemlösning i form av textuppgifter tjänar som konkretisering av olika begrepp.

Bristande basala matematiska förkunskaper hämmar således elevernas problemlösningsförmåga. Problemen de ska lösa harmonierar inte med deras förkunskaper och förmåga att förstå vad problemen går ut på. Genom att läraren själv gör en enkel didaktisk ämnesanalys av de uppgifter som ska behandlas i undervisningen synliggörs vilka verktyg eleven behöver. Läraren kan förvissa sig om att eleverna behärskar dessa verktyg, i annat fall behövs ytterligare undervisning innan den planerade undervisningen börjar. I och med att didaktisk ämnesanalys har artikulerats så har även lärare fått ett användbart verktyg för att analysera det innehåll som de planerar att undervisa om eller de problemlösningsuppgifter som de tänker använda (se exempel i 2.6).

Att lösa matematiska problem kräver förmåga att använda begrepp, se samband mellan begrepp och kunna utföra beräkningar. Eftersom beräkningarna inte sällan är en självklar del i matematisk problemlösning så bör detta ske utan större tankemöda. Eleven behöver såväl förstå innebörden i en operation som ha färdighet att utföra operationen. Enligt resultaten av kunskapskartläggningar som presenterats ovan är detta kunskaper som många elever saknar. En fara här ligger i att betrakta basfakta som att med flyt kunna utföra enkla multiplikationer eller att faktorisera som ”bara procedurkunskap”. I själva verket utgör dessa basfakta en viktig del i förståelsen av de matematiska begreppen, utan vilka förmågan att resonera eller lösa problem blir lidande.

De mindre bra resultat som svenska elever uppvisar i PISA-undersökningarna kan förstås bottna i en rad olika faktorer. Men *en* orsak kan vara att eleverna helt enkelt inte behärskar den mest grundläggande matematiken. Det är svårt att testa elevens förmåga att lösa problem i realistiska situationer, vilket görs inom PISA, eftersom alltför många elever saknar grundläggande matematikkunskaper och problemlösningsförmåga knappast kan isoleras från rena basfakta. Det blir självklart ett misslyckande för de elever som inte har med sig en adekvat verktygslåda vid provtillfället. De resultat som presenterats ovan kan i själva verket utgöra en delförklaring till varför eleverna lyckas mindre bra i PISA-undersökningen.

Om detta är korrekt, är det förstås av största vikt att snarast ge lärarna de verktyg som krävs för att svenska elever skall få ökade möjligheter att utveckla grundläggande färdigheter i ämnet. Till viss del kan det handla om att hjälpa lärare att få en djupare förståelse av de matematiska begrepp och räknefärdigheter som ingår i skolans undervisning. Den didaktiska ämnesanalysen är ett verktyg som kan användas och de strukturscheman som presenterats här kan utgöra en start på detta arbete.

Fortbildning för lärare i matematik bör innefatta såväl rent didaktiska kunskaper kring lärande, som rena ämneskunskaper och didaktiska ämneskunskaper, bland annat baserade på didaktisk ämnesanalys. Saknas ett av dessa tre ben riskerar undervisningen att bli lidande och elevernas kunskapsutveckling att försvåras.

7.4 Förändring i undervisningen – en långsam process

De resultat som framkommit vid de kartläggningar som beskrivits ovan, har i flera fall tagits på allvar såväl på kommunal nivå som på enskilda skolor. Flera kommuner och skolor har satsat stort på kompetensutbildning för sina lärare i samband med kartläggningarna. Exempel på detta är de projekt som beskrivits i kapitel 5. Utvärderingar (Skolverket, 2013c) tyder på att lärarna uppskattar kompetensutbildning och anser att de har fått en djupare förståelse av betydelsen av olika innehåll och hur detta ska undervisas. Men vilken effekt har dessa satsningar fått på elevernas kunskapsutveckling?

Flera kommuner och skolor har valt att upprepa kartläggningen för att följa elevernas kunskapsutveckling. Dessa upprepade kartläggningar har emellertid endast visat på en mindre förbättring av elevernas kunskaper avseende de testade begreppen och färdigheterna. I denna studie har generellt enskilda individer inte följts över tid, men genom att låta elever i flera på varandra följande årskurser göra samma diagnos, framträder en tendens i elevers kunskapsutveckling. Det går även att följa samma elevgrupp under tre på varandra följande läsår (Tabell 31). Deras kunskaper i multiplikation utvecklas, men inte i den omfattning som vore önskvärt.

Kartläggningarna har i de beskrivna fallen varit en start för utvecklingsarbeten inom skola eller kommun, som syftat till att öka elevernas matematikkunskaper. Genom att synliggöra för lärare de egna elevernas kunskaper, har skolan eller kommunen strävat efter att lösa ett angeläget problem inne i klassrummet. Detta har kanske inte fungerat fullt ut, bland annat på grund av att informations- och beslutskedjan ofta är lång och beroende av hur enskilda kontaktlärare och rektorer agerar på den enskilda skolan. Processen blir därför svår att styra i detalj. Framför allt har rektors engagemang varierat, men de skolor där rektor varit direkt involverad i arbetet har man, enligt vad lärarna på dessa skolor själva berättat, känt att undervisningen har utvecklats.

De resultat som uppnåtts kan tyckas nedslående, men skolutveckling är generellt sett en trög process. Detta fenomen har studerats under lång tid (Fullan, 1995). Skolutveckling kan ses som ett resultat av att den gemensamma kompetensen inom skolan ökar och att kvalitén inom verksamheten höjs.

Hinder för utveckling kan alltså finnas både på olika organisationsnivåer och på individnivå, något som blev tydligt inom de utvecklingsprojekt som beskrivs i kapitel 5. Det är viktigt att se förändring som en process över tid och i den processen har skolledare och lärare ofta skilda förhållningssätt till förändringsarbetet. Ur ledningsperspektiv ser man skolan som en helhet medan lärare kan ta utgångspunkt i egna erfarenheter och frågor.

Dessutom kan förändringar ibland kännas hotande och förvirrande, även om man är öppen för utveckling. Kommer förslagen till förändring dessutom utifrån eller uppifrån blir de svårare att genomföra. Förändring och utveckling i skolan, där lärare behöver lära sig nya färdigheter, kan leda till att dessa känner sig tafatta eller inkompetenta och upplevas som hot mot den egna identiteten som lärare.

Sammanfattningsvis kan man alltså se hinder både på olika organisatorisk nivåer och på individnivå. Förändring är en process över (lång) tid och i den processen har skolledare och lärare ofta skilda förhållningssätt till förändringsarbetet. Det är därför viktigt att låta utvärdera utvecklingsprojekt under kanske så lång tid som en tioårsperiod, innan man drar långtgående, verksamhetsförändrande slutsatser.

7.5 Svensk skoldebatt idag

Skolutveckling och lärares fortbildning diskuteras på olika nivåer i landet och denna debatt, i kombination med försämrade elevresultat och ett sviktande elevintresse för matematik, har lett till att lärare försöker förändra sin matematikundervisning. Men ändå verkar elevernas resultat inte förbättras. I debatten lyfts betydelsen fram av att veta vilka mål eleven ska nå, var eleven befinner sig i sin kunskapsutveckling och hur vägen till att nå målet ser ut.

Väl genomtänkta diagnoser, anpassade till kursplanens målformuleringar, kan här utgöra ett verktyg. Läraren själv måste formulera målen för sin undervisning genom att operationalisera de i kursplanen beskrivna kunskapskraven kopplade till det centrala innehållet. Detta är något som inte enkelt låter sig göras, utan kräver att läraren har såväl goda ämneskunskaper som goda didaktiska ämneskunskaper. Att utveckla sådana borde lärare få hjälp med. Den didaktiska ämnesanalys som presenteras här är ett bidrag, i form av ett analysverktyg, där strukturscheman skapas teoretiskt för att sedan i form av diagnoser resultera i resultatscheman på individ- och gruppnivå. Dessa utgör i sin tur ett stöd för läraren i planeringen av sin undervisning.

I boken *Synligt lärande för lärare* (Hattie, 2012), beskrivs hur läraren, med test gjorda före och efter en speciell aktivitet, kan utvärdera hur och varför elevernas resultat förändras. Motsvarande uttrycks av Wiliam (2007): ”Researchers now have hard empirical evidence that learning does lead to higher achievement when using assessment”. Detta kräver dock väl genomarbetat utvärderingsmaterial vars resultat kan hjälpa lärare, skolledare och politiker att våga se – för att kunna ta ansvar.

Läraren ska anpassa sin undervisning till den enskilda eleven så att denna utvecklas så långt som möjligt. Formativ bedömning, eller bedömning för lärande, handlar just om att bedöma elevernas visade kunskaper i avsikt att anpassa undervisningen. Men en förutsättning för att kunna bedöma elevers matematikkunskaper är att läraren själv har goda ämneskunskaper och goda didaktiska kunskaper inom matematikens olika områden. Med hjälp av en didaktisk karta kan läraren kommunicera vad eleven ska lära sig och vilka kvaliteter som krävs i elevens kunnande. Den didaktiska kartan utgör alltså ett stöd för planering och genomförande av undervisning. Strukturscheman som konstruerats med hjälp av didaktisk ämnesanalys är ett sätt att synliggöra den didaktiska kartan och hjälpa läraren i sin undervisning och bedömning. Kartan utgör ett stöd för att snabbt och korrekt kunna bedöma den kunskap eleven visar vid samtal eller i en lösning av en uppgift.

En grund för bedömning av elevens kunskaper i matematik är att läraren har tydliga mål och vet vad målen innebär och hur eleven ska behärska det aktuella innehållet (Hattie, 2012). Detta är något som inte framgår tydligt i kursplanen i matematik, utan läraren måste själv formulera de operationella målen. Vid uppföljningar av de här beskrivna kartläggningarna framgår att lärare känner sig tveksamma inför att formulera tydliga mål, ofta eftersom de inte fullt ut kan tolka vad olika matematiska begrepp innebär.

I Sverige handlar skoldebatten och skolreformer i stor utsträckning om strukturella och organisatoriska frågor som klasstorlek, när betyg ska ges, med mera. Frågor vilka, enligt Hattie, är relativt oväsentliga i sammanhanget. Han menar att flera politiska beslut baseras på fel antaganden; om man förändrar strukturen och sedan placerar in samma lärare som undervisar på samma sätt i en ny struktur, så får man samma resultat.

Av de kartläggningar som beskrivits ovan framgår att få elever klarar alla eller nästan alla uppgifter i en diagnos, vilket indikerar att det är en del aspekter av det begrepp som prövas som de inte kan. För att leva upp till det Hattie kommit fram till och kunna arbeta som Wiliam beskriver, krävs goda didaktiska ämneskunskaper hos läraren. Behovet av dessa poängterar även Ball m.fl. (2008). Lärare kan påverkas av den typ av forskning som just beskrivits, men att fördjupa de egna kunskaperna i matematikdidaktik är inte helt enkelt och kräver organiserad fortbildning.

Referenser

Andersson, B. (2013). *Om elevers förkunskaper inför gymnasiematematiken. Analys av elva årgångar matematikdiagnoser från en medelstor svensk gymnasieskola* (Masteruppsats), Göteborg: Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet.

Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics. I J. Boaler (Red.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (s. 83-104). Westport: Ablex Publishing.

Ball, D.L., Ferrini-Mundy, J., Kilpatrick, J., Milgram, R.J., Schmid, W., & Schaar, R. (2005). Reaching for Common Ground in K-12 Mathematics Education. *Notices of the AMS,* 52(9), 1055-1058.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelbs, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes It Special. J*ournal of Teacher Education,* 59, 389-407.

Bennet, C., & Löwing, M. (2014, 10 april.) *Dagens Nyheter,* s. 2.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Red.). (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig: B. G. Teubner.

Carpenter, T., Moser, J., & Romberg, T. (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, N J: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T., & Moser, J. (1984). The aquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 179-202.

Clark, D. (2001). Complementary Accounts Methodology. I D. Clark (Red.), *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms* (s. 13-32). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Clarke, D.M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). 10 Practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics teaching in the middle school, 13* (7), 373–379.

Doverborg, E., & Pramling Samuelsson, I. (1999). *Förskolebarn i matematikens värld.* Stockholm: Liber.

DsU 1986:5. *Matematik i skolan. Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet.* Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Emanuelsson, J., Fainesilber, L., Häggström, J., Kullberg, A., Lindström, B., & Löwing, M. (2011). *Voices on learning and instruction in mathematics.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A Longitudinal Study of Lerning to Use Children´s Thinking in Mathematics Instruction. *Journal for research in Mathematics Education,* 27, 403-434.

Flockton, L., Crooks, T., Smith, J., & Smith, L.F. (2005). Mathematic Assessment Results. *National Education Monitoring, Report 37.* New Zealand.

Fredriksson, M. (2009). *Matematiken i förskoleklassen - En totalundersökning där en kommuns samtliga förskoleklasselevers matematiska kunnande kartläggs, i ett formativt syfte* (Mastersuppsats). Göteborg: Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet

Frege, G. (1903). *Grundgesetze der Arithmetik, Band II*. Jena: Verlag Hermann Pohle.

Fullan, M. (1995). *School Development – the new Meaning of Educational Change*. London: Cassell Educational Limited.

Gelman, R., & Gallistel, C. (1978). *The Children's Understanding of Number*. London: Harvard UP.

de Groot, A.D. (1965). *Thought and Choise in Chess.* Hague: Mouton.

Gustafsson, J-E., & Myrberg, E. (2002). *Ekonomiska resursers betydelse för pedagogiska resultat*. Stockholm: Skolverket.

Hart, K. M. (1984). *Children's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor, Berks: NFER-Nelson.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. London: Routledge.

Hattie, J. (2012). *Synligt lärande för lärare.* Stockholm: Natur & kultur.

Hiebert, J. (Red.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics.* Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* London: Academic Press, INC.

Hodgen, J., & Wiliam, D. (2006). *Mathematics inside the black box: assessment for learning in the mathematics classroom*. London: GL Assessment.

Håstad, M., & Svensson, L. (1969). *Matematik NU: För lärare i matematik på högstadiet: Delta-projektet*. Malmö: Hermod.

Häggström, J. (2008). *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: what is made possible to learn?* (Doktorsavhandling, Göteborg Studies In Educational Sciences 262). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Johansson, B. (2013). *Matematik i förskola och förskoleklass: den mentala talraden som didaktiskt verktyg*. Uppsala: Kunskapsföretaget.

Johansson, B., & Wirth, M. (2007). *Så erövrar barnen matematiken. Talradsmetoden ger nya möjligheter.* Uppsala: Kunskapsföretaget.

Johansson, B., & Kilborn, W. (1986). Om matematikämnets innehåll och didaktik. I F. Marton (Red.), *Fackdidaktik volym III.* (s. 87-101). Lund: Studentlitteratur.

Kanes, C., & Nisbet, S. (1996). Mathematics-teachers' knowledge bases: Implications for teacher education. *Pacific Journal of Teacher Education*, 24(2), 159 - 171.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors*. London: NFER-Nelson.

Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter* (FoU-rapport 37). Stockholm: Skolöverstyrelsen.

Kilborn, W. (1989). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1: Grundläggande aritmetik.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Klingberg, T. (2007). *Den översvämmade hjärnan: en bok om arbetsminne, IQ och den stigande informationsfloden*. Stockholm: Natur & kultur.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned: professional insights gained and shared by teachers of mathematics* (Göteborg Studies In Educational Sciences 293). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Landgren, C. J. (1866). *Hufvudräkningskurs för folkskoleläraresеminarier etc*. Stockholm: Hiertas förlagsexp.

Leinhart, G., Putnam, R., Stein, M., & Baxter, J. (1991). Where subject matter knowledge matters. In J. Brophy (Red.), *Advances in research on teaching, Vol. 2*, (pp. 976 - 113). Greenwich, CT: JAI Press.

Lester, F.K. & Lambdin, D. V. (2007). Undervisa genom problemlösning. I J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby & K. Wallby (Red.), *Lära och undervisa i matematik – internationella perspektiv*. Göteborg: NCM, Göteborgs Universitet.

Liedman, S. (2001). *Ett oändligt äventyr. Om människans kunskaper*. Stockholm: Bonnier.

Littler, G., & Jirotkova, D. (2004). Learning about Solids. I B. Clarke, D. M. Clarke, D. V. Lambdin, F. K. Lester, G. Emanuelsson, B. Johansson, A. Wallby, & K. Wallby (Red.), *International perspective on Learning and Teaching Mathematics*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Litwiller, B., & Bright, G. (2002). *Making sense of fractions, ratios, and proportions. 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*. Reston, VA: NCTM.

Löwing, M. (2000). How to handle the teaching and learning of addition and subtraction. *Pythagoras, Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa,* 51, 17-24.

Löwing, M. (2002). *Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning*. (IPD-rapport nr 2002:11) Göteborg: Institutionen för pedagogik och didaktik, Göteborgs universitet.

Löwing, M. (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare – elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. (Doktorsavhandling, Göteborg Studies In Educational Sciences 208). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemma. Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik – matematikdidaktik för lärare.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning. En inkörsport till matematiken.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2010). *Kulturmöten i matematikundervisningen: exempel från 41 olika språk*. Lund: Studentlitteratur.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahawa, NJ: Lawrence Erlbaum.

Martinsson, B. (2009). *Diagnosverktyg i matematik.* (Examensarbete Lärarprogrammet). Karlstad: Karlstad universitet

Marton, F. (Red.). (1986). *Fackdidaktik volym I–III*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbok.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J., & Farrell, B. (1997). *Number sense in school mathematics*. Perth: MASTEC.

MDTP, *Mathematics Diagnostic Test*. Tillgänglig: http://www.cpp.edu/~sci/mathematics-statistics/mdpt/

Messick, S. (1989). Validity. I R.L. Linn (Red.), *Educational Measurement* (Third edition, pp 13-103). New York. American Council on Education/Macmillan.

Messick, S. (1990). *Validity of test interpretion and use*. Princeton: Educational testing service.

Miller, G.A. (1969). *Kommunikation och psykologi: om människan som ett informationssamlande och informationsbehandlande system*. Stockholm: Beckman.

Murray, Å., & Liljefors, R. (1983). *Matematik i svensk skola. Utbildningsforskning (FoU-rapport 46).* Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget

Nationalencyklopedin (1989-1996). Höganäs: Bra Böcker.

Nilsson, G. (2005). *Att äga π: praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer* (Dokktorsavhandling, Göteborg Studies In Educational Sciences 228). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Nilsson. H, & Wigforss. F. (1951). *Aritmetik*. Stockholm: Geber.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society. I R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer & B. Winkelmann (Red.), *Didactics of Mathematics as a Scientific discipline* (pp. 367–378). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (Red.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag.

Nomad Volume 19(3-4), 2014. Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning.

Peano, G. (1973*). Selected works of Giuseppe Peano*. London: George Allen & Unwin.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. London: Ruthledge and Kegean Paul Ltd.

Piaget, J. (1960). *The Child's Conception of Geometry*. New York: Basic books.

Ramaprasad, A. (1983). On the definition of feedback. *Behavioural Science,* 28(1), 4-13.

Riesbeck, E. (2008). *På tal om matematik: matematiken, vardagen och den matematikdidaktiska diskursen* (Doktorsavhandling, Linköping Studies in Behavioural Science No. 129). Linköping: Linköpings Universitet.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Selin, E. (2009). Diamant: Matematikdiagnos med många sidor. *Handledarskap /Grundskoletidningen* 1(09), 4-12

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I. & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 23(10), 691-697.

SKOLFS 1994:1. *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet* (Lpo94).

SKOLFS 2010:37. *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet* (Lgr11).

SKOLFS 2011:19. *Skolverkets föreskrifter om kunskapskrav för grundskolans ämnen*.

SKOLFS 2011:69. *Läroplan för förskolan*.

Skolverket. (2011a). *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverktäder* (Rapport 366). Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnenför gymnasiet*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2012). *TIMSS 2011 Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv* (Rapport 380). Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2013a). *Diagnosmaterial för grundskolan årskurserna 1-9, Diamantdiagnoserna.* Hämtad 2015-10-12: www.skolverket.se/diamant

Skolverket. (2013b). *PISA 2012 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap* (Rapport 398). Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2013c). *Redovisning av uppdrag att utvärdera statsbidraget för basfärdigheterna läsa, skriva och räkna*. Redovisning av regeringsuppdrag, 2013-03-25 Dnr 2009:571

Skolverket. (2014). *Grundskolan i internationella kunskapsmätningar* (Rapport 407). Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2015a). *Betyg och resultat, på grundskolan*. Hämtad 2015-10-12: http://www.skolverket.se/publikationer?id=3132

Skolverket. (2015b). Matematiklyftet (www.matematiklyftet.skolverket.se)

Steffe, L., & Cobb, P. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Stratgies*. New York: Springer.

Stephens, M. (2004). The importence of Generelisable Numerical Expressions. I B. Clarke, D. M. Clarke, D. V. Lambdin, F. K. Lester, G. Emanuelsson, B. Johansson, A. Wallby, & K. Wallby (Red.), *International perspective on Learning and Teaching Mathematics*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. I T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Red.), *Rational numbers: An integration of research* (s. 289-326). Hillsdale: Erlbaum.

SOU 1992:94. Läroplanskommittén. *Skola för bildning: huvudbe-tänkande*. Stockholm: Allmänna förlaget.

Sverige (2015). *Skollagen* (2010:800) *med Lagen om införande av skollagen* (2010:801). (6., [uppdaterade] uppl.) Stockholm: Norstedts juridik.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan: För att skapa tillfällen till lärande* (Doktorsavhandling). Umeå: Institutionen för matematik och matematisk statistik, Umeå högskola.

Utsikter, Hämtad 2016-09-01 från www.skolfam.se.

Utsikter, Hämtad 2016-09-01 från www.partinfo.se.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole numberds concepts and operations. I F. K. Lester Jr (Red.), *Second Handbook of Reseach on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Watts, T. W., Duncan, D. J., Siegler, R. S., & Davis-Kean, P. E. (2014). What's Past Is Prologue: Relations Between Early Mathematics Knowledge and High School Achievement. *Educational reseacher* X, 1-9.

Wiliam, D. (2007). Keep learning on track. I F. K. Lester Jr (Red.), *Second Handbook of Reseach on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Wiliam, D. (2013). *Att följa lärande: formativ bedömning i praktiken.* Lund: Studentlitteratur.

Wilkerson-Jerde, M. H., & Wilensky U. J. (2011). How do mathematicians learn math?: resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational studies in mathematics* 78(1). 21 – 43.

Wittmann, E. (2004). Assessing Preschoolers Geometric Knowledge I B. Clarke, D. M. Clarke, D. V. Lambdin, F. K. Lester, G. Emanuelsson, B. Johansson, A. Wallby, & K. Wallby (Red.), *International perspective on Learning and Teaching Mathematics*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Wyndhamn, J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik.* Linköping: Linköpings universitet.

Åhman, J. (2014, 11 april.) *Dagens Nyheter.* s. 5.

Bilaga 1 Begreppsförklaringar

Centrala begrepp

Abstrahera	Skapa en allmän övergripande föreställning om ett begrepp, bortse från tillfälliga egenskaper
Abstrakt	Något som inte kan uppfattas med sinnena utan endast med tanken
Additionsfakta	Grundläggande uppgifter av typen 7 + 8, additionstabellen
Aktiv kunskap	Eleven själv illustrerar och konstruerar aktivt ett begrepp
Basfakta	Grundläggande aritmetikkunskaper inom de fyra räknesätten. Basfakta används för dessa begrepp. I engelsk litteratur används basic facts. Baskombinationer eller tabellkunskaper är andra ord som används. Basfakta ska behärskas automatiserat
Begreppsstruktur	Olika aspekter av ett begrepp ordnade efter komplexitet
Behärska	Att förstå olika aspekter av begreppet, på passande kognitiv nivå, och kunna använda begreppet i adekvata sammanhang
Didaktisk karta	Synonym till strukturschema
Didaktisk ämnesanalys	Ett analysverktyg, i vilket ämnet analyseras utifrån ett didaktiskt synsätt

Didaktiska ämneskunskaper	Lärarkunskaper, ett matematikinnehåll förstått i didaktiska termer, d.v.s. ur ett undervisnings- och lärandeperspektiv
Didaktisk ämnesteori	Ett ramverk, en teori för hur ett visst ämne kan undervisas och läras
Divisionsfakta	Grundläggande uppgifter av typen 24/3, divisionstabellen
Elevresultat	Elevresultat avser oftast resultat på hela diagnoser
Förförståelse	Företeelser och begrepp som eleven behöver ha tillägnat sig inom grundläggande taluppfattning
Förkunskap	Kunskaper som ligger till grund för att förstå ett aktuellt begrepp
Förkunskapsstruktur	Förkunskaper ordnade enligt vilka begrepp eller aspekter av ett begrepp som är grundläggande för att förstå en helhet
Generalisera	Överföra specifika kunskaper till en ny kontext
Hierarkisk	Ha en bestämd rangordning; vissa uppgifter (kunskaper) kommer före andra
Intuition	Förmåga till omedelbar uppfattning eller bedömning, utan medveten tillgång till alla fakta, ofta till skillnad från logiskt resonerande
Kliniska intervjuer	Intervjuteknik där man kartlägger de kvalitativa orsakerna till problemen.

Kunskap	Kunskap används här som ett samlingsbegrepp för all typ av kunskap: faktakunskap, procedurkunskap, färdigheter, förmåga, förståelse, etc.
Linjär	Utveckling som följer en linje där samma punkt inte återkommer
Lösningsfrekvens	Avser lösningsfrekvens per uppgift
Multiplikationsfakta	Grundläggande uppgifter av typen 7 · 8, multiplikationstabellen
Passiv kunskap	Göra en avläsning i betydelse att ta ställning till en illustration av ett delbegrepp
Resultatschema	Ett strukturschema med lösningsfrekvenser per uppgift införda
Strukturschema	Visar relationen mellan olika aspekter av ett begrepp, en förkunskapsstruktur. Uttrycks till lärare som didaktisk karta
Subtraktionsfakta	Grundläggande uppgifter av typen 15 - 8, subtraktionstabellen

Bilaga 2 Sammanställning av totala analysunderlaget i denna studie.

Aritmetikdiagnoserna, Insamlade 2008-2012

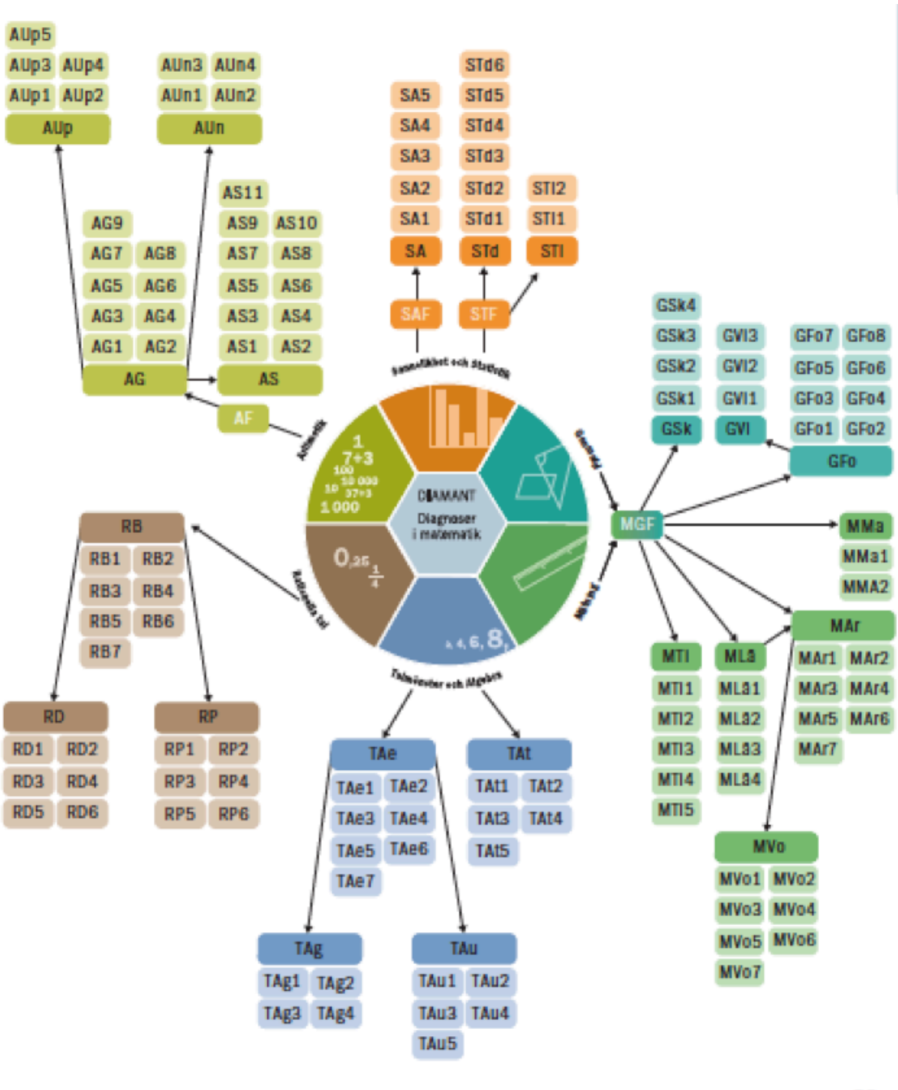
	Antal elever per årskurs som genomfört diagnosen										Antal utförda och bearbetade uppgifter										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summa delta-gade elever	Antal uppg. per dia-gnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Summa gjorda uppgifter**
AG 1	3 769	4 476	629							**8 874**	6	22 614	26 856	3 774	0	0	0	0	0	0	**53 244**
AG 2	1 552	6 954	3 340	2 323	383					**14 552**	8	12 416	55 632	26 720	18 584	3 064	0	0	0	0	**116 416**
AG 3		3 872	5 145	6 581	366	287	13			**16 264**	8	0	30 976	30 976	52 648	2 928	2 928	2 296	104	0	**122 856**
AG 4			3 442	6 635	2 169	282	15			**12 543**	8	0	0	27 536	53 080	17 352	2 256	120	0	0	**100 344**
AG 5		3 255	3 393							**6 648**	8	0	26 040	27 144	0	0	0	0	0	0	**53 184**
AG 6			3 406	6 463	5 020	526	46	31		**15 492**	6	0	0	20 436	38 778	30 120	3 156	276	186	0	**92 952**
AG 7					3 519	4 668	288			**8 475**	6	0	0	0	0	21 114	28 008	1 728	0	0	**50 850**
AG 8						1 566	1 511	24		**3 101**	6	0	0	0	0	0	9 396	9 066	144	0	**18 606**
AG 9										**0**	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
AS1										**0**	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
AS2				1 516	3 051	4 302	324			**9 193**	5	0	0	0	7 580	15 255	21 510	1 620	0	0	**45 965**
AS3				3 333	1 422					**4 755**	7	0	0	0	23 331	9 954	0	0	0	0	**33 285**
AS4						4 259	2 986	249		**7 494**	5	0	0	0	0	0	21 295	14 930	1 245	0	**37 470**
AS5						3 158	2 929	2 901		**8 988**	4	0	0	0	0	0	12 632	11 716	11 604	0	**35 952**
AS6					2 867	33				**2 900**	7	0	0	0	0	20 069	231	0	0	0	**20 300**
BD 1				4 272	3 164					**7 436**	23	0	0	0	98 256	72 772	0	0	0	0	**171 028**
BD 2				3 200	1 926					**5 126**	13	0	0	0	41 600	25 038	0	0	0	0	**66 638**
BD 3				1 238	3 317	1 448				**6 003**	16	0	0	0	19 808	53 072	23 168	0	0	0	**96 048**
BD 4					1 691	1 530				**3 221**	15	0	0	0	0	25 365	22 950	0	0	0	**48 315**
BD 5						3 432	51			**3 483**	15	0	0	0	0	0	51 480	765	0	0	**52 245**
BD 6						3 337	2 758	23		**6 118**	21	0	0	0	0	0	70 077	57 918	483	0	**128 478**
BD11							2 787	1 521	90	**4 398**	12	0	0	0	0	0	0	33 444	18 252	1 080	**52 776**
BD12							2 834	1 550	336	**4 720**	12	0	0	0	0	0	0	34 008	18 600	4 032	**56 640**
BD13								2 961	362	**3 323**	12	0	0	0	0	0	0	0	35 532	4 344	**39 876**
BD14								2 643	358	**3 001**	12	0	0	0	0	0	0	0	31 716	4 296	**36 012**
PP11							2 622	2 905	360	**5 887**	12	0	0	0	0	0	0	31 464	34 860	4 320	**70 644**
PP12								1 447	145	**1 592**	5	0	0	0	0	0	0	0	7 235	725	**7 960**
PA11								1 433		**1 433**	12	0	0	0	0	0	0	0	17 196	0	**17 196**
	5 321	**18 557**	**19 355**	**35 561**	**28 895**	**28 828**	**19 164**	**17 688**	**1 651**	**175 020**	**277**	**35 030**	**139 504**	**136 586**	**353 665**	**296 103**	**269 087**	**199 351**	**177 157**	**18 797**	**1 625 280**

Geometridiagnoserna Insamlade 2009-2012

	Antal elever per årskurs som genomfört diagnosen										Antal utförda och bearbetade uppgifter										
Diagnos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summa elever	Antal uppg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Summa data**
MGF	70									**141**	22	700	0	0	0	0	0	0	0	0	**1 410**
MLä1	1 607	1 556	1 540							**4 703**	13	9 642	9 336	9 240	0	0	0	0	0	0	**28 218**
MLä2		1590	1569	1 498						**4 657**	3	0	12 720	12 552	11 984	0	0	0	0	0	**37 256**
MLä3				1 555	1 596	1 402				**4 553**	12	0	0	0	12 440	12 768	12 768	11 216	0	0	**49 192**
MMa1										**0**	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
MMa2										**0**	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
MTi1										**0**	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
MTi2										**0**	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
MTi3										**0**	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
MTi4										**0**	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
MTi5										**0**	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
MAr1.					1 632	1 390	1 277			**4 299**	5	0	0	0	0	8 160	6 950	6 385	0	0	**21 495**
MAr2.							1 199	1 309		**2 508**	4	0	0	0	0	0	0	8 393	9 163	0	**17 556**
MVo1				1 553	1 586					**3 139**	2	0	0	0	7 765	7 930	0	0	0	0	**15 695**
MVo2					1 560	1 390	1 272			**4 222**	21	0	0	0	0	6 240	5 560	5 088	0	0	**16 888**
MVo3										**0**	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
MVo4					1 479	1 327	1 272	1 271		**5 349**	3	0	0	0	0	34 017	30 521	29 256	29 233	0	**123 027**
Gsy	1 556	1 578	1 526	1 521						**6 181**	13	20 228	20 514	19 838	19 773	0	0	0	0	0	**80 353**
GFo1			1 516	1 566	1 537					**4 619**	11	0	0	24 256	25 056	24 592	0	0	0	0	**73 904**
GFo2					1 556	1 403	1 266			**4 225**	15	0	0	0	0	23 340	21 045	18 990	0	0	**63 375**
GFo3								1 168		**1 168**	5	0	0	0	0	0	0	0	17 520	0	**17 520**
GFo4								1 260		**1 260**	4	0	0	0	0	0	0	0	26 460	0	**26 460**
GSk1			1 472	1 564						**3 036**	2	0	0	17 664	18 768	0	0	0	0	0	**36 432**
GSk2					1 550	1 392	1 274			**4 216**	5	0	0	0	0	18 600	16 704	15 288	0	0	**50 592**
GSk3						1 347	1 294			**2 641**	4	0	0	0	0	0	16 164	15 528	0	0	**31 692**
GVi1						1 348	1 274			**2 622**	9	0	0	0	0	0	16 176	15 288	0	0	**31 464**
GVi2							1 240	1 287		**2 527**	5	0	0	0	0	0	0	14 880	15 444	0	**30 324**
GVi3								1 301		**1 301**	9	0	0	0	0	0	0	0	6 505	0	**6 505**
	3 163	**4 724**	**7 623**	**9 257**	**12 496**	**10 999**	**11 368**	**7 596**	**0**	**67 226**	**219**	**29 870**	**42 570**	**83 550**	**95 786**	**135 647**	**125 888**	**140 312**	**104 325**	**0**	**759 358**

Totalt A+MG	**2 384 638**

Bilaga 3 Diamantdiagnoserna



Tabellförteckning

Figurförteckning

Tidigare utgåvor:

Editors: Kjell Härnqvist and Karl-Gustaf Stukát

1. KARL-GUSTAF STUKÁT *Lekskolans inverkan på barns utveckling.* Stockholm 1966

2. URBAN DAHLLÖF *Skoldifferentiering och undervisningsförlopp.* Stockholm 1967

3. ERIK WALLIN *Spelling. Factorial and experimental studies.* Stockholm 1967

4. BENGT-ERIK ANDERSSON *Studies in adolescent behaviour. Project Yg, Youth in Göteborg.* Stockholm 1969

5. FERENCE MARTON *Structural dynamics of learning.* Stockholm 1970

6. ALLAN SVENSSON *Relative achievement. School performance in relation to intelligence, sex and home environment.* Stockholm 1971

7. GUNNI KÄRRBY *Child rearing and the development of moral structure.* Stockholm 1971

Editors: Urban Dahllöf, Kjell Härnqvist and Karl-Gustaf Stukát

8. ULF P. LUNDGREN *Frame factors and the teaching process. A contribution to curriculum theory and theory on teaching.* Stockholm 1972

9. LENNART LEVIN *Comparative studies in foreign-language teaching.* Stockholm 1972

10. RODNEY ÅSBERG *Primary education and national development.* Stockholm 1973

11. BJÖRN SANDGREN *Kreativ utveckling.* Stockholm 1974

12. CHRISTER BRUSLING *Microteaching - A concept in development.* Stockholm 1974

13. KJELL RUBENSON *Rekrytering till vuxenutbildning. En studie av kortutbildade yngre män.* Göteborg 1975

14. ROGER SÄLJÖ *Qualitative differences in learning as a function of the learner's conception of the task.* Göteborg 1975

15. LARS OWE DAHLGREN *Qualitative differences in learning as a function of content-oriented guidance.* Göteborg 1975

16. MARIE MÅNSSON *Samarbete och samarbetsförmåga. En kritisk granskning.* Lund 1975

17. JAN-ERIC GUSTAFSSON *Verbal and figural aptitudes in relation to instructional methods. Studies in aptitude - treatment interactions.* Göteborg 1976

18. MATS EKHOLM *Social utveckling i skolan. Studier och diskussion.* Göteborg 1976

19. LENNART SVENSSON *Study skill and learning.* Göteborg 1976

20. BJÖRN ANDERSSON *Science teaching and the development of thinking.* Göteborg 1976

21. JAN-ERIK PERNEMAN *Medvetenhet genom utbildning.* Göteborg 1977

Editors: Kjell Härnqvist, Ference Marton and Karl-Gustaf Stukát

22. INGA WERNERSSON *Könsdifferentiering i grundskolan.* Göteborg 1977

23. BERT AGGESTEDT & ULLA TEBELIUS *Barns upplevelser av idrott.* Göteborg 1977

24. ANDERS FRANSSON *Att rädas prov och att vilja veta.* Göteborg 1978

25. ROLAND BJÖRKBERG *Föreställningar om arbete, utveckling och livsrytm.* Göteborg 1978

26. GUNILLA SVINGBY *Läroplaner som styrmedel för svensk obligatorisk skola. Teoretisk analys och ett empiriskt bidrag.* Göteborg 1978

27. INGA ANDERSSON *Tankestilar och hemmiljö.* Göteborg 1979

28. GUNNAR STANGVIK *Self-concept and school segregation.* Göteborg 1979

29. MARGARETA KRISTIANSSON *Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69.* Göteborg 1979

30. BRITT JOHANSSON *Kunskapsbehov i omvårdnadsarbete och kunskapskrav i vårdutbildning.* Göteborg 1979

31. GÖRAN PATRIKSSON *Socialisation och involvering i idrott.* Göteborg 1979

32. PETER GILL *Moral judgments of violence among Irish and Swedish adolescents.* Göteborg 1979

33. TAGE LJUNGBLAD *Förskola - grundskola i samverkan. Förutsättningar och hinder.* Göteborg 1980

34. BERNER LINDSTRÖM *Forms of representation, content and learning.* Göteborg 1980

35. CLAES-GÖRAN WENESTAM *Qualitative differences in retention.* Göteborg 1980

36. BRITT JOHANSSON Pedagogiska samtal i vårdutbildning. Innehåll och språkbruk. Göteborg 1981

37. LEIF LYBECK *Arkimedes i klassen. En ämnespedagogisk berättelse.* Göteborg 1981

38. BIÖRN HASSELGREN *Ways of apprehending children at play. A study of pre-school student teachers' development.* Göteborg 1981

39. LENNART NILSSON *Yrkesutbildning i nutidshistoriskt perspektiv. Yrkesutbildningens utveckling från skråväsendets upphörande 1846 till 1980-talet samt tankar om framtida inriktning.* Göteborg 1981

40. GUDRUN BALKE-AURELL *Changes in ability as related to educational and occupational experience.* Göteborg 1982

41. ROGER SÄLJÖ *Learning and understanding. A study of differences in constructing meaning from a text.* Göteborg 1982

42. ULLA MARKLUND *Droger och påverkan. Elevanalys som utgångspunkt för drogundervisning.* Göteborg 1983

43. SVEN SETTERLIND *Avslappningsträning i skolan. Forskningsöversikt och empiriska studier.* Göteborg 1983

44. EGIL ANDERSSON & MARIA LAWENIUS *Lärares uppfattning av undervisning.* Göteborg 1983

45. JAN THEMAN *Uppfattningar av politisk makt.* Göteborg 1983

46. INGRID PRAMLING *The child's conception of learning.* Göteborg 1983

47. PER OLOF THÅNG *Vuxenlärarens förhållningssätt till deltagarerfarenheter. En studie inom AMU.* Göteborg 1984

48. INGE JOHANSSON *Fritidspedagog på fritidshem. En yrkesgrupps syn på sitt arbete.* Göteborg 1984

49. GUNILLA SVANBERG *Medansvar i undervisning. Metoder för observation och kvalitativ analys.* Göteborg 1984

50. SVEN-ERIC REUTERBERG *Studiemedel och rekrytering till högskolan.* Göteborg 1984

51. GÖSTA DAHLGREN & LARS-ERIK OLSSON *Läsning i barnperspektiv.* Göteborg 1985

52. CHRISTINA KÄRRQVIST *Kunskapsutveckling genom experimentcentrerade dialoger i ellära.* Göteborg 1985

53. CLAES ALEXANDERSSON *Stabilitet och förändring. En empirisk studie av förhållandet mellan skolkunskap och vardagsvetande.* Göteborg 1985

54. LILLEMOR JERNQVIST *Speech regulation of motor acts as used by cerebral palsied children. Observational and experimental studies of a key feature of conductive education.* Göteborg 1985

55. SOLVEIG HÄGGLUND *Sex-typing and development in an ecological perspective.* Göteborg 1986

56. INGRID CARLGREN *Lokalt utvecklingsarbete.* Göteborg 1986

57. LARSSON, ALEXANDERSSON, HELMSTAD & THÅNG *Arbetsupplevelse och utbildningssyn hos icke facklärda.* Göteborg 1986

58. ELVI WALLDAL *Studerande vid gymnasieskolans vårdlinje. Förväntad yrkesposition, rollpåverkan, självuppfattning.* Göteborg 1986

Editors: Jan-Eric Gustafsson, Ference Marton and Karl-Gustaf Stukát

59. EIE ERICSSON *Foreign language teaching from the point of view of certain student activities.* Göteborg 1986

60. JAN HOLMER *Högre utbildning för lågutbildade i industrin.* Göteborg 1987

61. ANDERS HILL & TULLIE RABE *Psykiskt utvecklingsstörda i kommunal förskola.* Göteborg 1987

62. DAGMAR NEUMAN *The origin of arithmetic skills. A phenomenographic approach.* Göteborg 1987

63. TOMAS KROKSMARK *Fenomenografisk didaktik.* Göteborg 1987

64. ROLF LANDER *Utvärderingsforskning - till vilken nytta?* Göteborg 1987

65. TORGNY OTTOSSON *Map-reading and wayfinding.* Göteborg 1987

66. MAC MURRAY *Utbildningsexpansion, jämlikhet och avlänkning.* Göteborg 1988

67. ALBERTO NAGLE CAJES *Studievalet ur den väljandes perspektiv.* Göteborg 1988

68. GÖRAN LASSBO *Mamma - (Pappa) - barn. En utvecklingsekologisk studie av socialisation i olika familjetyper.* Göteborg 1988

69. LENA RENSTRÖM *Conceptions of matter. A phenomenographic approach.* Göteborg 1988

70. INGRID PRAMLING *Att lära barn lära.* Göteborg 1988

71. LARS FREDHOLM *Praktik som bärare av undervisnings innehåll och form. En förklaringsmodell för uppkomst av undervisningshandlingar inom en totalförsvarsorganisation.* Göteborg 1988

72. OLOF F. LUNDQUIST *Studiestöd för vuxna. Utveckling, utnyttjande, utfall.* Göteborg 1989

73. BO DAHLIN *Religionen, själen och livets mening. En fenomenografisk och existensfilosofisk studie av religionsundervisningens villkor.* Göteborg 1989

74. SUSANNE BJÖRKDAHL ORDELL *Socialarbetare. Bakgrund, utbildning och yrkesliv.* Göteborg 1990

75. EVA BJÖRCK-ÅKESSON *Measuring Sensation Seeking.* Göteborg 1990

76. ULLA-BRITT BLADINI *Från hjälpskolelärare till förändringsagent. Svensk speciallärarutbildning 1921-1981 relaterad till specialundervisningens utveckling och förändringar i speciallärarens yrkesuppgifter.* Göteborg 1990

77. ELISABET ÖHRN *Könsmönster i klassrumsinteraktion. En observations- och intervjustudie av högstadieelevers lärarkontakter.* Göteborg 1991

78. TOMAS KROKSMARK *Pedagogikens vägar till dess första svenska professur.* Göteborg 1991

Editors: Ingemar Emanuelsson, Jan-Eric Gustafsson
and Ference Marton

79. ELVI WALLDAL *Problembaserad inlärning. Utvärdering av påbyggnadslinjen Utbildning i öppen hälso- och sjukvård.* Göteborg 1991

80. ULLA AXNER *Visuella perceptionssvårigheter i skolperspektiv. En longitudinell studie.* Göteborg 1991

81. BIRGITTA KULLBERG *Learning to learn to read.* Göteborg 1991

82. CLAES ANNERSTEDT *Idrottslärarna och idrottsämnet. Utveckling, mål, kompetens - ett didaktiskt perspektiv.* Göteborg 1991

83. EWA PILHAMMAR ANDERSSON *Det är vi som är dom. Sjuksköterskestuderandes föreställningar och perspektiv under utbildningstiden.* Göteborg 1991

84. ELSA NORDIN *Kunskaper och uppfattningar om maten och dess funktioner i kroppen. Kombinerad enkät- och intervjustudie i grundskolans årskurser 3, 6 och 9.* Göteborg 1992

85. VALENTIN GONZÁLEZ *On human attitudes. Root metaphors in theoretical conceptions.* Göteborg 1992

86. JAN-ERIK JOHANSSON *Metodikämnet i förskollärarutbildningen. Bidrag till en traditionsbestämning.* Göteborg 1992

87. ANN AHLBERG *Att möta matematiska problem. En belysning av barns lärande.* Göteborg 1992

88. ELLA DANIELSON *Omvårdnad och dess psykosociala inslag. Sjuksköterskestuderandes uppfattningar av centrala termer och reaktioner inför en omvårdnadssituation.* Göteborg 1992

89. SHIRLEY BOOTH *Learning to program. A phenomenographic perspective.* Göteborg 1992

90. EVA BJÖRCK-ÅKESON *Samspel mellan små barn med rörelsehinder och talhandikapp och deras föräldrar - en longitudinell studie.* Göteborg 1992

91. KARIN DAHLBERG *Helhetssyn i vården. En uppgift för sjuksköterskeutbildningen.* 1992

92. RIGMOR ERIKSSON *Teaching Language Learning. In-service training for communicative teaching and self directed learning in English as a foreign language.* 1993

93. KJELL HÄRENSTAM *Skolboks-islam. Analys av bilden av islam i läroböcker i religionskunskap.* Göteborg 1993.

94. INGRID PRAMLING *Kunnandets grunder. Prövning av en fenomenografisk ansats till att utveckla barns sätt att uppfatta sin omvärld.* Göteborg 1994.

95. MARIANNE HANSSON SCHERMAN *Att vägra vara sjuk. En longitudinell studie av förhållningssätt till astma/allergi.* Göteborg 1994

96. MIKAEL ALEXANDERSSON *Metod och medvetande.* Göteborg 1994

97. GUN UNENGE *Pappor i föräldrakooperativa daghem. En deskriptiv studie av pappors medverkan.* Göteborg 1994

98. BJÖRN SJÖSTRÖM *Assessing acute postoperative pain. Assessment strategies and quality in relation to clinical experience and professional role.* Göteborg 1995

99. MAJ ARVIDSSON *Lärares orsaks- och åtgärdstankar om elever med svårigheter.* Göteborg 1995

100. DENNIS BEACH *Making sense of the problems of change: An ethnographic study of a teacher education reform.* Göteborg 1995.

101. WOLMAR CHRISTENSSON *Subjektiv bedömning - som besluts och handlingsunderlag.* Göteborg 1995

102. SONJA KIHLSTRÖM *Att vara förskollärare. Om yrkets pedagogiska innebörder.* Göteborg 1995

103. MARITA LINDAHL *Inlärning och erfarande. Ettåringars möte med förskolans värld.* Göteborg. 1996

104. GÖRAN FOLKESTAD *Computer Based Creative Music Making - Young Peoples´ Music in the Digital Age.* Göteborg 1996

105. EVA EKEBLAD *Children • Learning • Numbers. A phenomenographic excursion into first-grade children's arithmetic.* Göteborg 1996

106. HELGE STRÖMDAHL *On mole and amount of substance. A study of the dynamics of concept formation and concept attainment.* Göteborg 1996

107. MARGARETA HAMMARSTRÖM *Varför inte högskola? En longitudinell studie av olika faktorers betydelse för studiebegåvade ungdomars utbildningskarriär.* Göteborg 1996

108. BJÖRN MÅRDÉN *Rektorers tänkande. En kritisk betraktelse av skolledarskap.* Göteborg 1996

109. GLORIA DALL'ALBA & BIÖRN HASSELGREN (EDS) *Reflections on Phenomenography - Toward a Methodology?* Göteborg 1996

110. ELISABETH HESSLEFORS ARKTOFT *I ord och handling. Innebörder av "att anknyta till elevers erfarenheter", uttryckta av lärare.* Göteborg 1996

111. BARBRO STRÖMBERG *Professionellt förhållningssätt hos läkare och sjuksköterskor. En studie av uppfattningar.* Göteborg 1997

112. HARRIET AXELSSON V*åga lära. Om lärare som förändrar sin miljöundervisning.* Göteborg 1997

113. ANN AHLBERG *Children's ways of handling and experiencing numbers.* Göteborg 1997

114. HUGO WIKSTRÖM *Att förstå förändring. Modellbyggande, simulering och gymnasieelevers lärande.* Göteborg 1997

115. DORIS AXELSEN *Listening to recorded music. Habits and motivation among high-school students.* Göteborg 1997.

116. EWA PILHAMMAR ANDERSSON *Handledning av sjuksköterskestuderande i klinisk praktik.* Göteborg 1997

117. OWE STRÅHLMAN *Elitidrott, karriär och avslutning.* Göteborg 1997

118. AINA TULLBERG T*eaching the 'mole'. A phenomenographic inquiry into the didactics of chemistry.* Göteborg 1997.

119. DENNIS BEACH *Symbolic Control and Power Relay Learning in Higher Professional Education.* Göteborg 1997

120. HANS-ÅKE SCHERP *Utmanande eller utmanat ledarskap. Rektor, organisationen och förändrat undervisningsmönster i gymnasieskolan.* Göteborg 1998

121. STAFFAN STUKÁT *Lärares planering under och efter utbildningen.* Göteborg 1998

122. BIRGIT LENDAHLS ROSENDAHL *Examensarbetets innebörder. En studie av blivande lärares utsagor.* Göteborg 1998

123. ANN AHLBERG *Meeting Mathematics. Educational studies with young children.* Göteborg 1998

124. MONICA ROSÉN *Gender Differences in Patterns of Knowledge.* Göteborg 1998.

125. HANS BIRNIK *Lärare- elevrelationen. Ett relationistiskt perspektiv.* Göteborg 1998

126. MARGRETH HILL *Kompetent för "det nya arbetslivet"? Tre gymnasieklasser reflekterar över och diskuterar yrkesförberedande studier.* Göteborg 1998

127. LISBETH ÅBERG-BENGTSSON *Entering a Graphicate Society. Young Children Learning Graphs and Charts.* Göteborg 1998

128. MELVIN FEFFER *The Conflict of Equals: A Constructionist View of Personality Development.* Göteborg 1999

129. ULLA RUNESSON *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Göteborg 1999

130. SILWA CLAESSON *"Hur tänker du då?" Empiriska studier om relationen mellan forskning om elevuppfattningar och lärares undervisning.* Göteborg 1999

131. MONICA HANSEN *Yrkeskulturer i möte. Läraren, fritidspedagogen och samverkan.* Göteborg 1999

132. JAN THELIANDER *Att studera arbetets förändring under kapitalismen. Ure och Taylor i pedagogiskt perspektiv.* Göteborg 1999

133. TOMAS SAAR *Musikens dimensioner - en studie av unga musikers lärande.* Göteborg 1999

134. GLEN HELMSTAD *Understandings of understanding. An inquiry concerning experiential conditions for developmental learning.* Göteborg 1999

135. MARGARETA HOLMEGAARD *Språkmedvetenhet och ordinlärning. Lärare och inlärare reflekterar kring en betydelsefältsövning i svenska som andraspråk.* Göteborg 1999

136. ALYSON MCGEE *Investigating Language Anxiety through Action Inquiry: Developing Good Research Practices.* Göteborg 1999

137. EVA GANNERUD *Genusperspektiv på lärargärning. Om kvinnliga klasslärares liv och arbete.* Göteborg 1999

138. TELLERVO KOPARE *Att rida stormen ut. Förlossningsberättelser i Finnmark och Sápmi.* Göteborg 1999

139. MAJA SÖDERBÄCK *Encountering Parents. Professional Action Styles among Nurses in Pediatric Care.* Göteborg 1999

140. AIRI ROVIO - JOHANSSON *Being Good at Teaching. Exploring different ways of handling the same subject in Higher Education.* Göteborg 1999

141. EVA JOHANSSON *Etik i små barns värld. Om värden och normer bland de yngsta barnen i förskolan.* Göteborg 1999

142. KENNERT ORLENIUS *Förståelsens paradox. Yrkeserfarenhetens betydelse när förskollärare blir grundskollärare.* Göteborg 1999.

143. BJÖRN MÅRDÉN *De nya hälsomissionärerna – rörelser i korsvägen mellan pedagogik och hälsopromotion.* Göteborg 1999

144. MARGARETA CARLÉN *Kunskapslyft eller avbytarbänk? Möten med industriarbetare om utbildning för arbete.* Göteborg 1999

145. MARIA NYSTRÖM *Allvarligt psykiskt störda människors vardagliga tillvaro.* Göteborg 1999

146. ANN-KATRIN JAKOBSSON *Motivation och inlärning ur genusperspektiv. En studie av gymnasieelever på teoretiska linjer/program.* Göteborg 2000

147. JOANNA GIOTA *Adolescents' perceptions of school and reasons for learning.* Göteborg 2000

148. BERIT CARLSTEDT *Cognitive abilities – aspects of structure, process and measurement.* Göteborg 2000

149. MONICA REICHENBERG *Röst och kausalitet i lärobokstexter. En studie av elevers förståelse av olika textversioner.* Göteborg 2000

150. HELENA ÅBERG *Sustainable waste management in households – from international policy to everyday practice. Experiences from two Swedish field studies.* Göteborg 2000

151. BJÖRN SJÖSTRÖM & BRITT JOHANSSON *Ambulanssjukvård. Ambulanssjukvårdares och läkares perspektiv.* Göteborg 2000

152. AGNETA NILSSON *Omvårdnadskompetens inom hemsjukvård – en deskriptiv studie.* Göteborg 2001

153. ULLA LÖFSTEDT *Förskolan som lärandekontext för barns bildskapande.* Göteborg 2001

154. JÖRGEN DIMENÄS *Innehåll och interaktion. Om elevers lärande i naturvetenskaplig undervisning.* Göteborg 2001

155. BRITT MARIE APELGREN *Foreign Language Teachers' Voices. Personal Theories and Experiences of Change in Teaching English as a Foreign Language in Sweden.* Göteborg 2001

156. CHRISTINA CLIFFORDSON *Assessing empathy: Measurement characteristics and interviewer effects.* Göteborg 2001

157. INGER BERGGREN *Identitet, kön och klass. Hur arbetarflickor formar sin identitet.* Göteborg 2001

158. CARINA FURÅKER *Styrning och visioner – sjuksköterskeutbildning i förändring.* Göteborg 2001

159. INGER BERNDTSSON *Förskjutna horisonter. Livsförändring och lärande i samband med synnedsättning eller blindhet.* Göteborg 2001

160. SONJA SHERIDAN *Pedagogical Quality in Preschool. An issue of perspectives.* Göteborg 2001

161. JAN BAHLENBERG *Den otroliga verkligheten sätter spår. Om Carlo Derkerts liv och konstpedagogiska gärning.* Göteborg 2001

162. FRANK BACH *Om ljuset i tillvaron. Ett undervisningsexperiment inom optik.* Göteborg 2001

163. PIA WILLIAMS *Barn lär av varandra. Samlärande i förskola och skola.* Göteborg 2001

164. VIGDIS GRANUM *Studentenes forestillinger om sykepleie som fag og funksjon.* Göteborg 2001

165. MARIT ALVESTAD *Den komplekse planlegginga. Førskolelærarar om pedagogisk planlegging og praksis.* Göteborg 2001

166. GIRMA BERHANU *Learning-In-Context. An Ethnographic Investigation of Mediated Learning Experiences among Ethiopian Jews in Israel.* Göteborg 2001.

167. OLLE ESKILSSON *En longitudinell studie av 10 – 12-åringars förståelse av materiens förändringar.* Göteborg 2001

168. JONAS EMANUELSSON *En fråga om frågor. Hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap.* Göteborg 2001

169. BIRGITTA GEDDA *Den offentliga hemligheten. En studie om sjuksköterskans pedagogiska funktion och kompetens i folkhälsoarbetet.* Göteborg 2001

170. FEBE FRIBERG *Pedagogiska möten mellan patienter och sjuksköterskor på en medicinsk vårdavdelning. Mot en vårddidaktik på livsvärldsgrund.* Göteborg 2001

171. MADELEINE BERGH *Medvetenhet om bemötande. En studie om sjuksköterskans pedagogiska funktion och kompetens i närståendeundervisning.* Göteborg 2002

172. HENRIK ERIKSSON *Den diplomatiska punkten – maskulinitet som kroppsligt identitetsskapande projekt i svensk sjuksköterskeutbildning.* Göteborg 2002

173. SOLVEIG LUNDGREN *I spåren av en bemanningsförändring. En studie av sjuksköterskors arbete på en kirurgisk vårdavdelning.* Göteborg 2002

174. BIRGITTA DAVIDSSON *Mellan soffan och katedern. En studie av hur förskollärare och grundskollärare utvecklar pedagogisk integration mellan förskola och skola.* Göteborg 2002

175. KARI SØNDENÅ *Tradisjon og Transcendens – ein fenomenologisk studie av refleksjon i norsk førskulelærarutdanning.* Göteborg 2002

176. CHRISTINE BENTLEY *The Roots of Variation of English-Teaching. A Phenomenographic Study Founded on an Alternative Basic Assumption.* Göteborg 2002

177. ÅSA MÄKITALO *Categorizing Work: Knowing, Arguing, and Social Dilemmas in Vocational Guidance.* Göteborg 2002

178. MARITA LINDAHL *VÅRDA – VÄGLEDA – LÄRA. Effektstudie av ett interventionsprogram för pedagogers lärande i förskolemiljön.* Göteborg 2002

179. CHRISTINA BERG *Influences on schoolchildren's dietary selection. Focus on fat and fibre at breakfast.* Göteborg 2002

180. MARGARETA ASP *Vila och lärande om vila. En studie på livsvärldsfenomenologisk grund.* Göteborg 2002

181. FERENCE MARTON & PAUL MORRIS (EDS) *What matters? Discovering critical contitions of classroom learning.* Göteborg 2002

182. ROLAND SEVERIN *Dom vet vad dom talar om. En intervjustudie om elevers uppfattningar av begreppen makt och samhällsförändring.* Göteborg 2002

Editors: Björn Andersson, Jan Holmer and
Ingrid Pramling Samuelsson

183. MARLÉNE JOHANSSON *Slöjdpraktik i skolan – hand, tanke, kommunikation och andra medierande redskap.* Göteborg 2002

184. INGRID SANDEROTH *Om lust att lära i skolan: En analys av dokument och klass 8y.* Göteborg 2002

185. INGA-LILL JAKOBSSON *Diagnos i skolan. En studie av skolsituationer för elever med syndromdiagnos.* Göteborg 2002

186. EVA-CARIN LINDGREN *Empowering Young Female Athletes – A Possible Challenge to the Male Hegemony in Sport. A Descriptive and Interventional Study.* Göteborg 2002

187. HANS RYSTEDT *Bridging practices. Simulations in education for the health-care professions.* Göteborg 2002

188. MARGARETA EKBORG *Naturvetenskaplig utbildning för hållbar utveckling? En longitudinell studie av hur studenter på grunskollärarprogrammet utvecklar för miljöundervisning relevanta kunskaper i naturkunskap.* Göteborg 2002

189. ANETTE SANDBERG *Vuxnas lekvärld. En studie om vuxnas erfarenheter av lek.* Göteborg 2002

190. GUNLÖG BREDÄNGE *Gränslös pedagog. Fyra studier om utländska lärare i svensk skola.* Göteborg 2003

191. PER-OLOF BENTLEY *Mathematics Teachers and Their Teaching. A Survey Study.* Göteborg 2003

192. KERSTIN NILSSON *MANDAT – MAKT – MANAGEMENT. En studie av hur vårdenhetschefers ledarskap konstrueras.* Göteborg 2003

193. YANG YANG *Measuring Socioeconomic Status and its Effects at Individual and Collective Levels: A Cross-Country Comparison.* Göteborg 2003

194. KNUT VOLDEN *Mediekunnskap som mediekritikk.* Göteborg 2003.

195. LOTTA LAGER-NYQVIST *Att göra det man kan – en longitudinell studie av hur sju lärarstudenter utvecklar sin undervisning och formar sin lärarroll i naturvetenskap.* Göteborg 2003

196. BRITT LINDAHL *Lust att lära naturvetenskap och teknik? En longitudinell studie om vägen till gymnasiet.* Göteborg 2003

197. ANN ZETTERQVIST *Ämnesdidaktisk kompetens i evolutionsbiologi. En intervjuundersökning med no/biologilärare.* Göteborg 2003

198. ELSIE ANDERBERG *Språkanvändningens funktion vid utveckling av kunskap om objekt.* Göteborg 2003.

199. JAN GUSTAFSSON *Integration som text, diskursiv och social praktik. En policyetnografisk fallstudie av mötet mellan skolan och förskoleklassen.* Göteborg 2003.

200. EVELYN HERMANSSON *Akademisering och professionalisering – barnmorskans utbildning i förändring.* Göteborg 2003

201. KERSTIN VON BRÖMSSEN *Tolkningar, förhandlingar och tystnader. Elevers tal om religion i det mångkulturella och postkoloniala rummet.* Göteborg 2003

202. MARIANNE LINDBLAD FRIDH *Från allmänsjuksköterska till specialistsjuksköterska inom intensivvård. En studie av erfarenheter från specialistutbildningen och från den första yrkesverksamma tiden inom intensivvården.* Göteborg 2003

203. BARBRO CARLI *The Making and Breaking of a Female Culture: The History of Swedish Physical Education 'in a Different Voice'.* Göteborg 2003

204. ELISABETH DAHLBORG-LYCKHAGE *"Systers" konstruktion och mumifiering – i TV-serier och i studenters föreställningar.* Göteborg 2003

205. ULLA HELLSTRÖM MUHLI *Att överbrygga perspektiv. En studie av behovsbedömningssamtal inom äldreinriktat socialt arbete.* Göteborg 2003

206. KRISTINA AHLBERG *Synvändor. Universitetsstudenters berättelser om kvalitativa förändringar av sätt att erfara situationers mening under utbildningspraktik.* Göteborg 2004

207. JONAS IVARSSON *Renderings & Reasoning: Studying artifacts in human knowing.* Göteborg 2004

208. MADELEINE LÖWING *Matematikundervisningens konkreta gestaltning. En studie av kommunikationen lärare – elev och matematiklektionens didaktiska ramar.* Göteborg 2004

209. PIJA EKSTRÖM *Makten att definiera. En studie av hur beslutsfattare formulerar villkor för specialpedagogisk verksamhet.* Göteborg 2004

210. CARIN ROOS *Skriftspråkande döva barn. En studie om skriftspråkligt lärande i förskola och skola.* Göteborg 2004

211. JONAS LINDEROTH *Datorspelandets mening. Bortom idén om den interaktiva illusionen.* Göteborg 2004

212. ANITA WALLIN *Evolutionsteorin i klassrummet. På väg mot en ämnesdidaktisk teori för undervisning i biologisk evolution.* Göteborg 2004

213. EVA HJÖRNE *Excluding for inclusion? Negotiating school careers and identities in pupil welfare settings in the Swedish school.* Göteborg 2004

214. MARIE BLIDING *Inneslutandets och uteslutandets praktik. En studie av barns relationsarbete i skolan.* Göteborg 2004

215. LARS-ERIK.JONSSON *Appropriating Technologies in Educational Practices. Studies in the Contexts of Compulsory Education, Higher Education, and Fighter Pilot Training.* Göteborg 2004

216. MIA KARLSSON *An ITiS Teacher Team as a Community of Practice.* Göteborg 2004

217. SILWA CLAESSON *Lärares levda kunskap.* Göteborg 2004

218. GUN-BRITT WÄRVIK *Ambitioner att förändra och artefakters verkan. Gränsskapande och stabiliserande praktiker på produktionsgolvet.* Göteborg 2004

219. KARIN LUMSDEN WASS *Vuxenutbildning i omvandling. Kunskapslyftet som ett sätt att organisera förnyelse.* Göteborg 2004

220. LENA DAHL *Amningspraktikens villkor. En intervjustudie av en grupp kvinnors föreställningar på och erfarenheter av amning.* Göteborg 2004

221. ULRIC BJÖRCK *Distributed Problem-Based Learning. Studies of a Pedagogical Model in Practice.* Göteborg 2004

222. ANNEKA KNUTSSON *"To the best of your knowledge and for the good of your neighbour". A study of traditional birth attendants in Addis Ababa, Ethiopia.* Göteborg 2004

223. MARIANNE DOVEMARK *Ansvar – flexibilitet – valfrihet. En etnografisk studie om en skola i förändring.* Göteborg 2004

224. BJÖRN HAGLUND *Traditioner i möte. En kvalitativ studie av fritidspedagogers arbete med samlingar i skolan.* Göteborg 2004

225. ANN-CHARLOTTE MÅRDSJÖ *Lärandets skiftande innebörder – uttryckta av förskollärare i vidareutbildning.* Göteborg 2005

226. INGRID GRUNDÉN *Att återerövra kroppen. En studie av livet efter en ryggmärgsskada.* Göteborg 2005

227. KARIN GUSTAFSSON & ELISABETH MELLGREN *Barns skriftspråkande – att bli en skrivande och läsande person.* Göteborg 2005

228. GUNNAR NILSSON *Att äga π. Praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer.* Göteborg 2005.

229. BENGT LINDGREN *Bild, visualitet och vetande. Diskussion om bild som ett kunskapsfält inom utbildning.* Göteborg 2005

230. PETRA ANGERVALL *Jämställdhetsarbetets pedagogik. Dilemman och paradoxer i arbetet med jämställdhet på ett företag och ett universitet.* Göteborg 2005

231. LENNART MAGNUSSON *Designing a responsive support service for family carers of frail older people using ICT.* Göteborg 2005

232. MONICA REICHENBERG *Gymnasieelever samtalar kring facktexter. En studie av textsamtal med goda och svaga läsare.* Göteborg 2005

233. ULRIKA WOLFF *Characteristics and varieties of poor readers.* Göteborg 2005

234. CECILIA NIELSEN *Mellan fakticitet och projekt. Läs- och skrivsvårigheter och strävan att övervinna dem.* Göteborg 2005.

235. BERITH HEDBERG *Decision Making and Communication in Nursing Practice. Aspects of Nursing Competence.* Göteborg 2005

236. MONICA ROSÉN, EVA MYRBERG & JAN-ERIC GUSTAFSSON *Läskompetens i skolår 3 och 4. Nationell rapport från PIRLS 2001 i Sverige. The IEA Progress in International Reading Literacy Study.* Göteborg 2005

237. INGRID HENNING LOEB *Utveckling och förändring i kommunal vuxenutbildning. En yrkeshistorisk ingång med berättelser om lärarbanor.* Göteborg 2006.

238. NIKLAS PRAMLING *Minding metaphors: Using figurative language in learning to represent.* Göteborg 2006

239. KONSTANTIN KOUGIOUMTZIS *Lärarkulturer och professionskoder. En komparativ studie av idrottslärare i Sverige och Grekland.* Göteborg 2006

240. STEN BÅTH *Kvalifikation och medborgarfostran. En analys av reformtexter avseende gymnasieskolans samhällsuppdrag.* Göteborg 2006.

241. EVA MYRBERG *Fristående skolor i Sverige – Effekter på 9-10-åriga elevers läsförmåga.* Göteborg 2006

242. MARY-ANNE HOLFVE-SABEL *Attitudes towards Swedish comprehensive school. Comparisons over time and between classrooms in grade 6.* Göteborg 2006

243. CAROLINE BERGGREN *Entering Higher Education – Gender and Class Perspectives.* Göteborg 2006

244. CRISTINA THORNELL & CARL OLIVESTAM *Kulturmöte i centralafrikansk kontext med kyrkan som arena.* Göteborg 2006

245. ARVID TREEKREM *Att leda som man lär. En arbetsmiljöpedagogisk studie av toppledares ideologier om ledarskapets taktiska potentialer.* Göteborg 2006

246. EVA GANNERUD & KARIN RÖNNERMAN *Innehåll och innebörd i lärares arbete i förskola och skola – en fallstudie ur ett genusperspektiv.* Göteborg 2006

247. JOHANNES LUNNEBLAD *Förskolan och mångfalden – en etnografisk studie på en förskola i ett multietniskt område.* Göteborg 2006

248. LISA ASP-ONSJÖ *Åtgärdsprogram – dokument eller verktyg? En fallstudie i en kommun.* Göteborg 2006

249. EVA JOHANSSON & INGRID PRAMLING SAMUELSSON *Lek och läroplan. Möten mellan barn och lärare i förskola och skola.* Göteborg 2006

250. INGER BJÖRNELOO *Innebörder av hållbar utveckling. En studie av lärares utsagor om undervisning.* Göteborg 2006

251. EVA JOHANSSON *Etiska överenskommelser i förskolebarns världar.* Göteborg 2006

252. MONICA PETERSSON *Att genuszappa på säker eller osäker mark. Hem- och konsumentkunskap ur ett könsperspektiv.* Göteborg 2007

253. INGELA OLSSON *Handlingskompetens eller inlärd hjälplöshet? Lärandeprocesser hos verkstadsindustriarbetare.* Göteborg 2007

254. HELENA PEDERSEN *The School and the Animal Other. An Ethnography of human-animal relations in education.* Göteborg 2007

255. ELIN ERIKSEN ØDEGAARD *Meningsskaping i barnehagen. Innhold og bruk av barns og voksnes samtalefortellinger.* Göteborg 2007

256. ANNA KLERFELT *Barns multimediala berättande. En länk mellan mediakultur och pedagogisk praktik.* Göteborg 2007

257. PETER ERLANDSON *Docile bodies and imaginary minds: on Schön's reflection-in-action.* Göteborg 2007

258. SONJA SHERIDAN OCH PIA WILLIAMS *Dimensioner av konstruktiv konkurrens. Konstruktiva konkurrensformer i förskola, skola och gymnasium.* Göteborg 2007

259. INGELA ANDREASSON *Elevplanen som text - om identitet, genus, makt och styrning i skolans elevdokumentation.* Göteborg 2007

Editors: Jan-Eric Gustafsson, Annika Härenstam and Ingrid Pramling Samuelsson

260. ANN-SOFIE HOLM *Relationer i skolan. En studie av femininiteter och maskuliniteter i år 9.* Göteborg 2008

261. LARS-ERIK NILSSON *But can't you see they are lying: Student moral positions and ethical practices in the wake of technological change.* Göteborg 2008

262. JOHAN HÄGGSTRÖM *Teaching systems of linear equations in Sweden and China: What is made possible to learn?* Göteborg 2008

263. GUNILLA GRANATH *Milda makter! Utvecklingssamtal och loggböcker som disciplineringstekniker.* Göteborg 2008

264. KARIN GRAHN *Flickor och pojkar i idrottens läromedel. Konstruktioner av genus i ungdomstränarutbildningen.* Göteborg 2008.

265. PER-OLOF BENTLEY *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models. A New Field of Research.* Göteborg 2008

266. SUSANNE GUSTAVSSON *Motstånd och mening. Innebörd i blivande lärares seminariesamtal.* Göteborg 2008

267. ANITA MATTSSON *Flexibel utbildning i praktiken. En fallstudie av pedagogiska processer i en distansutbildning med en öppen design för samarbetslärande.* Göteborg 2008

268. ANETTE EMILSON *Det önskvärda barnet. Fostran uttryckt i vardagliga kommunikationshandlingar mellan lärare och barn i förskolan.* Göteborg 2008

269. ALLI KLAPP LEKHOLM *Grades and grade assignment: effects of student and school charachterisitcs.* Göteborg 2008

270. ELISABETH BJÖRKLUND *Att erövra litteracitet. Små barns kommunikativa möten med berättande, bilder, text och tecken i förskolan.* Göteborg 2008

271. EVA NYBERG *Om livets kontinuitet. Undervisning och lärande om växters och djurs livscykler - en fallstudie i årskurs 5.* Göteborg 2008

272. CANCELLED

273. ANITA NORLUND *Kritisk sakprosaläsning i gymnasieskolan. Didaktiska perspektiv på läroböcker, lärare och nationella prov.* Göteborg 2009

274. AGNETA SIMEONSDOTTER SVENSSON *Den pedagogiska samlingen i förskoleklasen. Barns olika sätt att erfara och hantera svårigheter.* Göteborg 2009

275. ANITA ERIKSSON *Om teori och praktik i lärarutbildningen. En etnografisk och diskursanalytisk studie.* Göteborg 2009

276. MARIA HJALMARSSON *Lärarprofessionens genusordning. En studie av lärares uppfattningar om arbetsuppgifter, kompetens och förväntningar.* Göteborg 2009.

277. ANNE DRAGEMARK OSCARSON *Self-Assessement of Writing in Learning English as a Foreign Language. A Study at the Upper Secondary School Level.* Göteborg 2009

278. ANNIKA LANTZ-ANDERSSON *Framing in Educational Practices. Learning Activity, Digital Technology and the Logic of Situated Action.* Göteborg 2009

279. RAUNI KARLSSON *Demokratiska värden i förskolebarns vardag.* Göteborg 2009

280. ELISABETH FRANK *Läsförmågan bland 9-10-åringar. Betydelsen av skolklimat, hem- och skolsamverkan, lärarkompetens och elevers hembakgrund.* Göteborg 2009

281. MONICA JOHANSSON *Anpassning och motstånd. En etnografisk studie av gymnasieelevers institutionella identitetsskapande.* Göteborg 2009

282. MONA NILSEN *Food for Thought. Communication and the transformation of work experience in web-based in-service training.* Göteborg 2009

283. INGA WERNERSSON (RED) *Genus i förskola och skola. Förändringar i policy, perspektiv och praktik.* Göteborg 2009

284. SONJA SHERIDAN, INGRID PRAMLING SAMUELSSON & EVA JOHANSSON (RED) *Barns tidiga lärande. En tvärsnittsstudie om förskolan som miljö för barns lärande.* Göteborg 2009

285. MARIE HJALMARSSON *Lojalitet och motstånd - anställdas agerande i ett föränderligt hemtjänstarbete.* Göteborg 2009.

286. ANETTE OLIN *Skolans mötespraktik - en studie om skolutveckling genom yrkesverksammas förståelse*. Göteborg 2009

287. MIRELLA FORSBERG AHLCRONA *Handdockans kommunikativa potential som medierande redskap i förskolan*. Göteborg 2009

288. CLAS OLANDER *Towards an interlanguage of biological evolution: Exploring students´ talk and writing as* an arena for sense-making. Göteborg 2010

Editors: Jan-Eric Gustafsson, Åke Ingerman and Ingrid Pramling Samuelsson

289. PETER HASSELSKOG *Slöjdlärares förhållningssätt i undervisningen*. Göteborg 2010

290. HILLEVI PRELL *Promoting dietary change. Intervening in school and recognizing health messages in commercials*. Göteborg 2010

291. DAVOUD MASOUMI *Quality Within E-learning in a Cultural Context. The case of Iran*. Göteborg 2010

292. YLVA ODENBRING *Kramar, kategoriseringar och hjälpfröknar. Könskonstruktioner i interaktion i förskola, förskoleklass och skolår ett*. Göteborg 2010

293. ANGELIKA KULLBERG *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Göteborg 2010

294. TORGEIR ALVESTAD *Barnehagens relasjonelle verden - små barn som kompetente aktører i produktive forhandlinger*. Göteborg 2010

295. SYLVI VIGMO *New spaces for Language Learning. A study of student interaction in media production in English*. Göteborg 2010

296. CAROLINE RUNESDOTTER *I otakt med tiden? Folkhögskolorna i ett föränderligt fält*. Göteborg 2010

297. BIRGITTA KULLBERG *En etnografisk studie i en thailändsk grundskola på en ö i södra Thailand. I sökandet efter en framtid då nuet har nog av sitt*. Göteborg 2010

298. GUSTAV LYMER *The work of critique in architectural education*. Göteborg 2010

299. ANETTE HELLMAN *Kan Batman vara rosa? Förhandlingar om pojkighet och normalitet på en förskola*. Göteborg 2010

300. ANNIKA BERGVIKEN-RENSFELDT *Opening higher education. Discursive transformations of distance and higher education government*. Göteborg 2010

301. GETAHUN YACOB ABRAHAM *Education for Democracy? Life Orientation: Lessons on Leadership Qualities and Voting in South African Comprehensive Schools*. Göteborg 2010

302. LENA SJÖBERG *Bäst i klassen? Lärare och elever i svenska och europeiska policytexter*. Göteborg 2011

303. ANNA POST *Nordic stakeholders and sustainable catering*. Göteborg 2011

304. CECILIA KILHAMN *Making Sense of Negative Numbers*. Göteborg 2011

305. ALLAN SVENSSON (RED) *Utvärdering Genom Uppföljning. Longitudinell individforskning under ett halvsekel*. Göteborg 2011

306. NADJA CARLSSON *I kamp med skriftspråket. Vuxenstuderande med läs- och skrivsvårigheter i ett livsvärldsperspektiv*. Göteborg 2011

307. AUD TORILL MELAND *Ansvar for egen læring. Intensjoner og realiteter ved en norsk videregående skole*. Göteborg 2011

308. EVA NYBERG *Folkbildning för demokrati. Colombianska kvinnors perspektiv på kunskap som förändringskraft*. Göteborg 2011

309. SUSANNE THULIN *Lärares tal och barns nyfikenhet. Kommunikation om naturvetenskapliga innehåll i förskolan*. Göteborg 2011

310. LENA FRIDLUND *Interkulturell undervisning – ett pedagogiskt dilemma. Talet om undervisning i svenska som andraspråk och i förberedelseklass*. Göteborg 2011

311. TARJA ALATALO *Skicklig läs- och skrivundervisning i åk 1-3. Om lärares möjligheter och hinder*. Göteborg 2011

312. LISE-LOTTE BJERVÅS *Samtal om barn och pedagogisk dokumentation som bedömningspraktik i förskolan. En diskursanalys*. Göteborg 2011

313. ÅSE HANSSON *Ansvar för matematiklärande. Effekter av undervisningsansvar i det flerspråkiga klassrummet*. Göteborg 2011

314. MARIA REIS *Att ordna, från ordning till ordning. Yngre förskolebarns matematiserande*. Göteborg 2011

315. BENIAMIN KNUTSSON *Curriculum in the Era of Global Development – Historical Legacies and Contemporary Approaches*. Göteborg 2011

316. EVA WEST *Undervisning och lärande i naturvetenskap. Elevers lärande i relation till en forskningsbaserad undervisning om ljud, hörsel och hälsa*. Göteborg 2011

317. SIGNILD RISENFORS *Gymnasieungdomars livstolkande*. Göteborg 2011

318. EVA JOHANSSON & DONNA BERTHELSEN (Ed.) *Spaces for Solidarity and Individualism in Educational Contexts*. Göteborg 2012

319. ALASTAIR HENRY *L3 Motivation*. Göteborg 2012

320. ANN PARINDER *Ungdomars matval – erfarenheter, visioner och miljöargument i eget hushåll*. Göteborg 2012

321. ANNE KULTTI *Flerspråkiga barn i förskolan: Villkor för deltagande och lärande*. Göteborg 2012

322. BO-LENNART EKSTRÖM *Kontroversen om DAMP. En kontroversstudie av vetenskapligt gränsarbete och översättning mellan olika kunskapsparadigm.* Göteborg 2012

323. MUN LING LO *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning.* Göteborg 2012

324. ULLA ANDRÉN *Self-awareness and self-knowledge in professions. Something we are or a skill we learn.* Göteborg 2012

325. KERSTIN SIGNERT *Variation och invarians i Maria Montessoris sinnestränande materiel.* Göteborg 2012

326. INGEMAR GERRBO *Idén om en skola för alla och specialpedagogisk organisering i praktiken.* Göteborg 2012

327. PATRIK LILJA *Contextualizing inquiry. Negotiations of tasks, tools and actions in an upper secondary classroom.* Göteborg 2012

328. STEFAN JOHANSSON *On the Validity of Reading Assessments: Relationships Between Teacher Judgements, External Tests and Pupil Self-assessments.* Göteborg 2013

329. STEFAN PETTERSSON *Nutrition in Olympic Combat Sports. Elite athletes' dietary intake, hydration status and experiences of weight regulation.* Göteborg 2013

330. LINDA BRADLEY *Language learning and technology – student activities in web-based environments.* Göteborg 2013

331. KALLE JONASSON *Sport Has Never Been Modern.* Göteborg 2013

332. MONICA HARALDSSON STRÄNG *Yngre elevers lärande om natur. En studie av kommunikation om modeller i institutionella kontexter.* Göteborg 2013

333. ANN VALENTIN KVIST *Immigrant Groups and Cognitive Tests – Validity Issues in Relation to Vocational Training.* Göteborg 2013

334. ULRIKA BENNERSTEDT *Knowledge at play. Studies of games as members' matters.* Göteborg 2013

335. EVA ÄRLEMALM-HAGSÉR *Engagerade i världens bästa? Lärande för hållbarhet i förskolan.* Göteborg 2013

336. ANNA-KARIN WYNDHAMN *Tänka fritt, tänka rätt. En studie om värdeöverföring och kritiskt tänkande i gymnasieskolans undervisning.* Göteborg 2013

337. LENA TYRÈN *"Vi får ju inte riktigt förutsättningarna för att genomföra det som vi vill." En studie om lärares möjligheter och hinder till förändring och förbättring i praktiken.* Göteborg 2013

338. ANNIKA LILJA *Förtroendefulla relationer mellan lärare och elev.* Göteborg 2013

339. MAGNUS LEVINSSON *Evidens och existens. Evidensbaserad undervisning i ljuset av lärares erfarenheter.* Göteborg 2013

340. ANNELI SCHWARTZ *Pedagogik, plats och prestationer. En etnografisk studie om en skola i förorten.* Göteborg 2013

341. ELISABET ÖHRN och LISBETH LUNDAHL (red) *Kön och karriär i akademin. En studie inom det utbildningsvetenskapliga fältet.* Göteborg 2013

342. RICHARD BALDWIN *Changing practice by reform. The recontextualisation of the Bologna process in teacher education.* Göteborg 2013

343. AGNETA JONSSON *Att skapa läroplan för de yngsta barnen i förskolan. Barns perspektiv och nuets didaktik.* Göteborg 2013

344. MARIA MAGNUSSON *Skylta med kunskap. En studie av hur barn urskiljer grafiska symboler i hem och förskola.* Göteborg 2013

345. ANNA-LENA LILLIESTAM *Aktör och struktur i historieundervisning. Om utveckling av elevers historiska resonerande.* Göteborg 2013

346. KRISTOFFER LARSSON *Kritiskt tänkande i grundskolans samhällskunskap. En fenomenografisk studie om manifesterat kritiskt tänkande i samhällskunskap hos elever i årskurs 9.* Göteborg 2013

347. INGA WERNERSSON och INGEMAR GERRBO (red) *Differentieringens janusansikte. En antologi från Institutionen för pedagogik och specialpedagogik vid Göteborgs universitet.* Göteborg 2013

348. LILL LANGELOTZ *Vad gör en skicklig lärare? En studie om kollegial handledning som utvecklingspraktik.* Göteborg 2014

349. STEINGERDUR OLAFSDOTTIR *Television and food in the lives of young children.* Göteborg 2014

350. ANNA-CARIN RAMSTEN *Kunskaper som byggde folkhemmet. En fallstudie av förutsättningar för lärande vid teknikskiften inom processindustrin.* Göteborg 2014

351. ANNA-CARIN BREDMAR *Lärares arbetsglädje. Betydelsen av emotionell närvaro i det pedagogiska arbetet.* Göteborg 2014

352. ZAHRA BAYATI *"den Andre" i lärarutbildningen. En studie om den rasifierade svenska studentens villkor i globaliseringens tid.* Göteborg 2014

353 ANDERS EKLÖF *Project work, independence and critical thinking.* Göteborg 2014

354 EVA WENNÅS BRANTE *Möte med multimodalt material. Vilken roll spelar dyslexi för uppfattandet av text och bild?* Göteborg 2014

355 MAGNUS FERRY *Idrottsprofilerad utbildning – i spåren av en avreglerad skola.* Göteborg 2014

Editors: Jan-Eric Gustafsson, Åke Ingerman and
Pia Williams

356 CECILIA THORSEN *Dimensionality and Predictive validity of school grades: The relative influence of cognitive and socialbehavioral aspects.* Göteborg 2014

357 ANN-MARIE ERIKSSON *Formulating knowledge. Engaging with issues of sustainable development through academic writing in engineering education.* Göteborg 2014

358 PÄR RYLANDER *Tränares makt över spelare i lagidrotter: Sett ur French och Ravens maktbasteori.* Göteborg 2014

359 PERNILLA ANDERSSON VARGA *Skrivundervisning i gymnasieskolan. Svenskämnets roll i den sociala reproduktionen.* Göteborg 2014

360 GUNNAR HYLTEGREN *Vaghet och vanmakt - 20 år med kunskapskrav i den svenska skolan.* Göteborg 2014

361 MARIE HEDBERG *Idrotten sätter agendan. En studie av Riksidrottsgymnasietränares handlande utifrån sitt dubbla uppdrag.* Göteborg 2014

362 KARI-ANNE JØRGENSEN *What is going on out there? - What does it mean for children's experiences when the kindergarten is moving their everyday activities into the nature - landscapes and its places?* Göteborg 2014

363 ELISABET ÖHRN och ANN-SOFIE HOLM (red) *Att lyckas i skolan. Om skolprestationer och kön i olika undervisningspraktiker.* Göteborg 2014

364 ILONA RINNE *Pedagogisk takt i betygssamtal. En fenomenologisk hermeneutisk studie av gymnasielärares och elevers förståelse av betyg.* Göteborg 2014

365 MIRANDA ROCKSÉN *Reasoning in a Science Classroom.* Göteborg 2015

366 ANN-CHARLOTTE BIVALL *Helpdesking: Knowing and learning in IT support practices.* Göteborg 2015

367 BIRGITTA BERNE *Naturvetenskap möter etik. En klassrumsstudie av elevers diskussioner om samhällsfrågor relaterade till bioteknik.* Göteborg 2015

368 AIRI BIGSTEN *Fostran i förskolan.* Göteborg 2015

369 MARITA CRONQVIST *Yrkesetik i lärarutbildning - en balanskonst.* Göteborg 2015

370 MARITA LUNDSTRÖM *Förskolebarns strävanden att kommunicera matematik.* Göteborg 2015

371 KRISTINA LANÅ *Makt, kön och diskurser. En etnografisk studie om elevers aktörsskap och positioneringar i undervisningen.* Göteborg 2015

372 MONICA NYVALLER *Pedagogisk utveckling genom kollegial granskning: Fallet Lärande Besök utifrån aktör-nätverksteori.* Göteborg 2015

373 GLENN ØVREVIK KJERLAND *Å lære å undervise i kroppsøving. Design for utvikling av teoribasert undervisning og kritisk refleksjon i kroppsøvingslærerutdanningen.* Göteborg 2015

374 CATARINA ECONOMOU *"I svenska två vågar jag prata mer och så". En didaktisk studie om skolämnet svenska som andraspråk.* Göteborg 2015

375 ANDREAS OTTEMO *Kön, kropp, begär och teknik: Passion och instrumentalitet på två tekniska högskoleprogram.* Göteborg 2015

376 SHRUTI TANEJA JOHANSSON *Autism-in-context. An investigation of schooling of children with a diagnosis of autism in urban India.* Göteborg 2015

377 JAANA NEHEZ *Rektorers praktiker i möte med utvecklingsarbete. Möjligheter och hinder för planerad förändring.* Göteborg 2015

378 OSA LUNDBERG *Mind the Gap – Ethnography about cultural reproduction of difference and disadvantage in urban education.* Göteborg 2015

379 KARIN LAGER *I spänningsfältet mellan kontroll och utveckling. En policystudie av systematiskt kvalitetsarbete i kommunen, förskolan och fritidshemmet.* Göteborg 2015

380 MIKAELA ÅBERG *Doing Project Work. The Interactional Organization of Tasks, Resources, and Instructions.* Göteborg 2015

381 ANN-LOUISE LJUNGBLAD *Takt och hållning - en relationell studie om det oberäkneliga i matematik-undervisningen.* Göteborg 2016

382 LINN HÅMAN *Extrem jakt på hälsa. En explorativ studie om ortorexia nervosa.* Göteborg 2016

383 EVA OLSSON *On the impact of extramural English and CLIL on productive vocabulary.* Göteborg 2016

384 JENNIE SIVENBRING *I den betraktades ögon. Ungdomar om bedömning i skolan.* Göteborg 2016

385 PERNILLA LAGERLÖF *Musical play. Children interacting with and around music technology.* Göteborg 2016

386 SUSANNE MECKBACH *Mästarcoacherna. Att bli, vara och utvecklas som tränare inom svensk elitfotboll.* Göteborg 2016

387 LISBETH GYLLANDER TORKILDSEN *Bedömning som gemensam angelägenhet – enkelt i retoriken, svårare i praktiken. Elevers och lärares förståelse och erfarenheter.* Göteborg 2016

388 cancelled

389 PERNILLA HEDSTRÖM *Hälsocoach i skolan. En utvärderande fallstudie av en hälsofrämjande intervention.* Göteborg 2016

390 JONNA LARSSON *När fysik blir lärområde i förskolan.* Göteborg 2016

391 EVA M JOHANSSON *Det motsägelsefulla bedömningsuppdraget. En etnografisk studie om bedömning i förskolekontext.* Göteborg 2016

392 MADELEINE LÖWING *Diamant – diagnoser i matematik. Ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys.* Göteborg 2016