GÖTEBORGS UNIVERSITET

Problemlösning

Nyckeln till PISA?

Johan Sandin

Självständigt arbete (examensarbete) 1 för ämneslärare år 7-9, L9MA1G, VT15.

Handledare: Jonny Lindström

Examinator: Laura Fainsilber

Rapportnummer: VT15-3001-003-L9MA1G

Uppsats/Examensarbete:	15 hp
Kurs:	L9MA1G
Nivå:	Grundnivå
Termin/år:	VT/2015
Handledare:	Jonny Lindström
Examinator:	Laura Fainsilber
Kod:	VT15-3001-003-L9MA1G

Nyckelord: matematik, problemlösning, PISA, styrdokument, kursplan, lärare, lärande.

Abstract

I det här examensarbetet har jag studerat hur matematisk problemlösning framställs i de svenska, finska och kinesiska styrdokumenten. Sverige har de senaste åren halkat efter sett till internationella undersökningar som PISA. Uppgifterna i PISA har visat sig vara av problemlösande karaktär. De elever i Sverige som gjort testet har alla varit utbildade enligt Lpo 94:s kursplan. I den nya läroplanen Lgr 11 har problemlösning fått ett större utrymme. Det uttrycks både som ett centralt innehåll och som en av de fem förmågorna som eleverna ska få möjlighet att utveckla i skolan. Återstår att se ifall förändringarna i kursplanen omsätts i fler poäng på PISA-testet. Den finska kursplanen liknar i stora delar Lgr 11 till struktur, form och innehåll. Däremot är problemlösning mer integrerat bland det andra innehållet i den finska kursplanen jämfört med Lgr 11 där problemlösning står som en egen rubrik under det centrala innehållet. Skolverket vill att matematikundervisningen ska bedrivas *genom* problemlösning, men sättet som det framställs på i det centrala innehållet kan tolkas som att undervisningen ska handla *om* problemlösning. Av egen erfarenhet och beskrivet i forskningen används problemlösning ofta som extrauppgifter. Att studera enbart Lgr 11 ger ingen tydlig bild av hur det är tänkt att lärare och elever ska arbeta med problemlösning.

Den kinesiska kursplanen är betydligt mer detaljerad än både Lgr 11 som den finska kursplanen. Det är inte enbart det centrala innehållet som är mer detaljerat, utan kursplanen är fylld med exempel på relevanta uppgifter för det angivna innehållet och även instruktioner på hur läraren kan lägga upp sin undervisning.

Genom att planera lektioner runt problem som alla elever kan delta i uppstår många tillfällen till lärande. Då eleverna arbetar med ett problem de inte vet hur de ska lösa väcks kreativitet och matematiska idéer. Eleverna måste lära sig att samarbeta med sina kamrater och att kommunicera sin tankegång eller idé. Då alla elever arbetar med samma problem finns möjlighet att upptäcka olika sätt att lösa ett och samma problem på. Rätt problem kan bygga broar mellan flera olika delar av matematiken.

Innehållsförteckning

1 Inledning

Svenska elever presterar allt sämre i matematik, åtminstone enligt internationella studier som PISA och TIMSS. Sverige är ett av de länder vars resultat har försämrats mest mellan 2003 och 2012. Detta har vållat stor debatt inom media och ute bland allmänheten. ”Regeringens skolpolitik ger negativa resultat!”, ”...betygssystemet främjar inte lärande!”, ”...det är lärarnas fel!”, ”...svenska ungdomar är för lata!”, är några exempel på hur det låtit.

Under min uppväxt i Tornedalen på gränsen mellan Sverige och Finland gick jag i en tvåspråkig skola där hälften av eleverna kom från den svenska sidan och den andra hälften från den finska sidan. Jag tänkte inte så mycket på det under den tiden, som tonåring var jag mest inne i min egen bubbla, men det konstiga var att eleverna från den finska sidan, räknade svårare matematik än vad vi svenskar gjorde. De kunde exempelvis sitta och räkna med cosinus och tangens redan i högstadiet, något som vi svenskar först stötte på i gymnasiet. Det skilde ju trots allt enbart en älv och ett språk mellan oss. Knappt det, de flesta eleverna på skolan var mer eller mindre tvåspråkiga. Hur kommer det sig att kunskaper i matematik kan skilja sig åt, beroende på vilken sida om ett vattendrag man bor på? Vad gör de annorlunda på den andra sidan älven? För än idag presterar Finland betydligt bättre än Sverige i de internationella studierna som PISA och TIMSS.

När jag ögnade igenom de uppgifter från PISA som finns offentliggjorda så fick jag känslan av att det var väldigt mycket problemlösning. Varje uppgift innehöll mycket text och krävde i stor utsträckning att man matematiserade innehållet för att kunna lösa uppgiften. Tanken slog mig, kunde problemlösning vara nyckeln till PISA? Jag hade hört talas om problembaserad undervisning som var vanligt i många östasiatiska länder. Det var kanske inte någon tillfällighet att Sydkorea, Japan, Kina, Taiwan och Singapore var de länder som presterade absolut bäst på de senaste PISA-undersökningarna.

Det är svårt att undersöka och jämföra hela utbildningssystem, därför valde jag att titta på hur systemen styrs från toppen, dvs. hur styrdokumenten ser ut. Av ren nyfikenhet ville jag se hur de finska och kinesiska styrdokumenten såg ut. De finska, pga. min koppling till Finland, och de kinesiska för att Kina är ett av de länderna som utmärker sig i toppen av de internationella undersökningarna. Framför allt var jag nyfiken på att se hur just problemlösning framställdes i de finska och kinesiska styrdokumenten. Kunde man redan där se att de ville jobba med problemlösning på något specifikt sätt?

Det här arbetet har gett mig möjlighet att få en bättre inblick i hur PISA-undersökningarna går till och hur kursplaner kan se ut i olika länder. Jag har också fördjupat mig i matematisk problemlösning, något som jag varit nyfiken på, och som jag anser att vi bara skrapat lite på ytan under utbildningen.

1.1 Syfte och frågeställning

Arbetets huvudsyfte är att undersöka hur problemlösning framställs i de svenska styrdokumenten jämfört med länder som presterar bra i de internationella undersökningarna. Jag har för avsikt att till en början titta på läro- och kursplaner. Kan man redan där se klara skillnader som potentiellt kan orsaka att vi halkar efter sett ur ett internationellt perspektiv?

Skolverkets kommentarmaterial till kursplanen i matematik uppger bland annat PISA som en viktig utgångspunkt för förändringarna i den nya kursplanen. Då uppgifterna i PISA-undersökningen har en problemlösande karaktär är det intressant att undersöka om detta framkommer i den nya kursplanen.

Vad säger forskningen om problemlösning?

Genom att studera kursplaner och relevant forskning och litteratur förväntas följande frågor kunna besvaras:

- Finns ett större fokus på problemlösning i Lgr 11 jämfört med Lpo 94?
- Hur står sig den svenska kursplanen jämfört med andra länder, sett ur ett problemlösningsperspektiv?
- Vad är problemlösning?
- Varför ska elever lösa problem?

1.2 Metod

Arbetet är en litteraturstudie som jag delat in i tre delar. I den första delen har jag tagit reda på information om PISA och OECD (som är den organisation som är ansvarig för PISA-projektet). Jag har även studerat de frisläppta uppgifterna från PISA för att bilda mig en egen uppfattning om uppgifternas karaktär, men jag har också tagit del av Skolverkets analyser av uppgifterna. Främst har jag hittat information om PISA på OECD:s hemsida och i Skolverkets PISA-rapport. Jag har även tagit del av kritiska artiklar om OECD och PISA för att få en mer nyanserad bild av projektet.

I den andra delen har jag valt att studera och jämföra kursplanerna från Sverige, Finland och Kina. Jag har också jämfört läroplanerna Lpo-94 och Lgr-11. De svenska kursplanerna hittade jag via Skolverkets hemsida. Den finska kursplanen hittade jag i svensk version på den finska utbildningsstyrelsens hemsida. Den kinesiska kursplanen hittade jag översatt till engelska via NCM:s hemsida.

I del tre har jag studerat forskning inom matematisk problemlösning. Jag har läst två böcker av författare som väldigt ofta är refererade i forskningen. Den första är Mathematical thinking and problem solving av Alan H. Schoenfeld och den andra är How to solve it av George Pólya. Artiklar har jag hittat främst genom Google Scholar med sökorden 'mathematical', 'problem', 'solving', 'matematisk' och 'problemlösning'.

2 PISA

I det här avsnittet ska jag kortfattat beskriva vad PISA-undersökningen är för någonting, vilka som ligger bakom den, hur den utförs och vilka kunskaper som testas. Jag ska även ge några exempel på hur uppgifterna i PISA kan se ut.

2.1 Historik och fakta

The Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD hädanefter) är en organisation med idag 34 medlemsländer över hela världen. Några stora aktörer som Kina och Ryssland är ännu inte medlemmar i organisationen, men ett nära samarbete är upprättat. Organisationen bildades redan 1961 och har som uppdrag att förse medlemsländernas regeringar med information och data som ska gynna ekonomin och den sociala välfärden i länderna.

PISA (The Programme for International Student Assessment) är en internationell studie som OECD utför var tredje år. Den första studien utfördes år 2000. I studien testas 15-åringars kunskaper i matematik, naturkunskap och läsförståelse. Under varje testtillfälle ges, i turordning, ett område större fokus. År 2012 var matematiken testets huvudämne.

Skolor som ska delta i undersökningen väljs slumpmässigt ut i OECD-länderna och andra PISA-anslutna länder. I de utvalda skolorna gör alla elever som är mellan 15 år och 3 månader och 16 år och 2 månader gamla provet, istället för att enskilda klasser väljs ut. Detta för att få en testgrupp med en medelålder på 15 år, vilket är åldern då elever närmar sig slutet av den obligatoriska skolan i de flesta OECD-länderna. Det finns 13 olika provhäften och varje elev får ett provhäfte tilldelat slumpmässigt. Provhäftena sätts ihop av 13 olika kluster som innehåller uppgifter i ett specifikt ämne (matematik, naturvetenskap, läsförståelse). Varje kluster beräknas ta ungefär en halvtimme att slutföra, vilket medför att hela provhäftet ska ta ungefär två timmar att skriva. Fördelningen mellan de olika ämnena är inte jämn, utan huvudämnet för det gällande året har sju kluster och de två övriga ämnena har tre kluster vardera. Genom att para ihop fyra kluster skapas 13 olika provhäften. Detta innebär att varje elev inte kommer stöta på uppgifter från varje ämne. Ett av provhäftena består endast av uppgifter från provets huvudämne (OECD 2012).

Utöver provet får varje elev även svara på en enkät som tar ungefär 20-30 minuter. Där svarar eleven på frågor om sig själv, om sin bakgrund, sitt hem och attityder till lärande. Enkäten är till för att länder ska kunna koppla resultaten i PISA-undersökningen till faktorer som migration, kön, socioekonomisk bakgrund, samt elevens egna attityder till skolan och sitt eget lärande (OECD 2015).

PISA-testerna är inte direkt bundna till någon läroplan utan de använder ett eget ramverk. Testerna designas för att pröva elevernas förmåga att applicera sina inhämtade kunskaper i verkliga problem. Uppgiftstyperna skiljer sig mellan flerval, kortsvar och svar som kräver redovisning. Matematikuppgifterna i PISA delas in i fyra olika kategorier: kvantitet, rum och form, samband och förändring, och osäkerhet. Detta kan jämföras med till exempel det svenska ämnesprovet i matematik som har sex olika kategorier: taluppfattning och tals använding, algebra, geometri, sannolikhet och statistik, samband och förändring, och slutligen problemlösning. Varje uppgift i PISA sätts dessutom in i en kontext. Vid det senaste provtillfället 2012 fanns fyra olika kontextkategorier: vetenskaplig, samhällsliv, personlig och yrkesliv. Varje uppgift består av en text och eventuellt en graf, tabell eller figur som måste tolkas för att kunna lösa uppgiften (OECD 2015).

2.2 Kritik mot PISA

OECD har fått ta emot en del kritik från olika håll för PISA-undersökningarna. Sjöberg (2012) påpekar det paradoxala i att PISA, enligt OECD, inte testar mot skolornas kursplaner, utan mot ett eget ramverk. Men ändå används det som ett giltigt verktyg för bedömning av länders skolsystem. Detta sker även i OECD:s egna rapporter. Sjöberg (2012) påstår också att det finns flera exempel som indikerar på att nationella kursplaner blir åsidosatta till förmån för det ramverk som gäller för PISA. Detta skapar en så kallad *dold läroplan*.

Holm (2012) tar i sin artikel upp hanteringen av statistiken i PISA. Han menar att mycket relevant data försvinner då PISA gallrar ut vissa uppgifter som sticker ut för mycket. Ifall ett land exempelvis är särskilt bra (eller dåligt) på att lära ut ett visst område, så tas de uppgifterna bort för det landet. Holm menar att det är just de systematiska avvikelserna som är viktiga när länder ska jämföras mot varandra. Han kritiserar också PISA:s sätt att slumpa fram elevresultat. Då varje elev inte gör uppgifter i varje ämne använder PISA en modell kallad Rasch-modellen för att slumpa fram artificiella elevresultat. Elever som inte gjort någon uppgift eller bara ett halvt prov i ett visst ämne, får ändå ett helresultat i det ämnet. PISA använder sedan resultaten som plausibla värden och får väldigt stora stickprov med väldigt kort konfidensintervall, data som sedan används för att exempelvis rangordna länderna. Holm menar att metoden visar upp ”en falsk och alldeles för optimistisk bild av slumpvariationernas storlek” (Holm 2012, s. 14).

2.3 Exempel på uppgifter

Här nedan har jag tagit ut tre olika uppgifter som blivit offentliggjorda av PISA. Alla uppgifter som ingår i PISA offentliggörs inte eftersom de återanvänder uppgifterna för att kunna få fram statistik över tid. Uppgifternas svårighetsgrad klassas in i tre olika kompetensklasser, där 1 är den lättaste och 3 är den svåraste. Kompetensklass 1 kan oftast ses som rutinuppgifter som kan lösas genom reproduktion. Uppgifterna behöver oftast inte lösas i flera steg. Kompetensklass 3 kräver att eleven analyserar, tolkar och matematiserar innehållet i uppgiften. Eleven behöver även kunna argumentera för sin lösning.

Nedan ska jag visa exempel på en uppgift ur varje kompetensklass. Samtliga exempel är från PISA 2003 då de uppgifterna var de enda där kompetensklassen var angiven.

2.3.1 Exempel 1

BÄSTA BILEN

En biltidning använder ett poängsystem för att utvärdera nya bilar och ger priset ”Årets bil” till den bil som får högsta sammanlagda poängen. Fem nya bilar har utvärderats, och deras poäng visas i tabellen nedan.

Bil	Säkerhet (S)	Bränsleförbrukning (B)	Utseende (U)	Inredning (I)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Poängen tolkas på följande sätt:

3 poäng = Utmärkt
2 poäng = Bra
1 poäng = Godkänd

Fråga 1: BÄSTA BILEN

För att beräkna en bils sammanlagda poäng, använder biltidningen följande regel som innebär en viktad summa av de enskilda poängen:

$$\text{Sammanlagd poäng} = (3 \cdot S) + B + U + I$$

Beräkna den sammanlagda poängen för bil ”Ca”. Skriv ditt svar på raden nedan.

Sammanlagd poäng för ”Ca”: ....

Fråga 2: BÄSTA BILEN

Tillverkaren av bilen ”Ca” tyckte att regeln för den sammanlagda poängen var orättvis.

Skriv ned en regel för beräkning av den sammanlagda poängen så att bilen ”Ca” vinner.

Din regel bör omfatta alla fyra variablerna, och du skriver ned din regel genom att fylla i positiva tal på de fyra streckade linjerna i ekvationen nedan.

Sammanlagd poäng = ...· S + ...· B + ...· U + ...· I

Uppgiften ovan är indelad i två deluppgifter. Fråga 1 är av kompetensklass 1. För att lösa uppgiften behöver man endast sätta in de angivna värdena för rätt bil i formeln och utföra beräkningen. Uppgiften visar prov på något som är vanligt bland uppgifterna i PISA, att man får mer information än vad som krävs för att lösa uppgiften. Bland de svenska eleverna hade 57 % löst uppgiften jämfört med 73 % i hela OECD. Fråga 2 är av kompetensklass 3. Där behöver eleven eventuellt pröva sig fram för att komma på en lösning. Vanligt för uppgifter av kompetensklass 3 är att det ofta finns flera korrekta lösningar. Fråga 2 löste 20 % av eleverna i Sverige och 25 % av eleverna i hela OECD.

2.3.2 Exempel 2

BOKHYLLOR

För att tillverka en komplett bokhylla behöver en snickare följande komponenter:

4 långa brädor.

6 korta brädor.

12 små vinkeljärn.

2 stora vinkeljärn och

14 skruvar.

Snickaren har 26 långa brädor, 33 korta brädor, 200 små vinkeljärn, 20 stora vinkeljärn och 510 skruvar i lager.

Hur många bokhyllor kan snickaren tillverka?

Svar: ....

Uppgiften om bokhyllor är av kompetensklass 2. Utöver divisionerna (eller annan lösningsstrategi) för att se vilken komponent som tar slut först behöver eleven även kunna avmatematisera svaret för att undvika att svara med ett decimaltal. 61 % av de svenska eleverna löste uppgiften, vilket även var snittet i hela OECD.

2.4 Diskussion

Skolverket (2015) har analyserat uppgifterna i PISA 2012 och jämfört dem med uppgifterna i ämnesprovet i matematik. När de kategoriserade uppgifterna i PISA efter ämnesprovets kategorier visade det sig att 100 % av uppgifterna i PISA kunde kategoriseras med innehållet Problemlösning. Lgr 11 beskriver innehållet i problemlösning som ”Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden” och ”Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer och olika ämnesområden” (Skolverket 2011a, s. 67). Eftersom varje uppgift i PISA sätts in i en kontext, leder det till att samtliga uppgifter i PISA kategoriseras som problemlösning (Skolverket 2015). Detta går i linje med vad OECD vill testa, det vill säga hur pass bra ungdomarna klarar av att lösa morgondagens problem som de kan komma att stöta på i en vetenskaplig, personlig, samhällelig eller yrkesutövande kontext.

Huruvida man ska tolka uppgifterna i PISA som problemlösningsuppgifter eller modelleringsuppgifter kan diskuteras. I det danska KOM-projektet (Niss & Jensen 2002) kartlades och definierades de matematiska kompetenserna (i svensk skolkontext används begreppet förmåga). Enligt deras definition handlar problemlösningskompetensen om att kunna formulera, identifiera, specificera och lösa olika typer av matematiska problem. Det kan exempelvis handla om att undersöka om en triangel kan konstrueras av tre godtyckligt långa linjer eller att undersöka vilka belopp man kan betala om man endast har mynt med värdena 3 och 5 (Niss & Jensen 2002). Modelleringskompetensen handlar om att kunna analysera och bygga matematiska modeller. Det handlar om att matematisera och avmatematisera situationer, dvs. att kunna bygga en matematisk modell av en verklig situation eller händelse och att sedan kunna tolka de resultat som modellen ger tillbaka till situationen eller händelsen. Niss och Jensen (2002) menar att det handlar om matematisk modellering varje gång matematik används utanför en matematisk kontext. Uppgifter kan variera mellan att analysera existerande modeller och att bygga egna modeller. BMI-modellen för undervikt, normalvikt, övervikt och fetma är ett exempel på en existerande modell man kan analysera (Niss & Jensen 2002). Uppgifter där man själv bygger modellen kan exempelvis handla om att undersöka hur planlösningen för ett hus som är 120 m^2 kan se ut eller att ta reda på hur dyrt det är att prata i mobiltelefon (Niss & Jensen 2002). I Lgr 11 har Skolverket valt att integrera matematisk modellering under problemlösning. I syftesdelen står det att undervisningen ska ”bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, *modeller* och resultat.” (Skolverket 2011, s. 62. Anm: Egen kursivering) Under området problemlösning i det centrala innehållet för årskurs 7-9 hittar man en punkt som säger: ”Enkla *matematiska modeller* och hur de kan användas i olika situationer.” (Skolverket 2011, s. 67. Anm: Egen kursivering) Bland kunskapskraven för slutet av årskurs 9 hittar man följande: ”Eleven kan lösa olika problem i bekanta situationer på ett **i huvudsak** fungerande sätt genom att välja och använda strategier och metoder med **viss** anpassning till problemets karaktär samt **bidra till att formulera** enkla *matematiska modeller* som kan tillämpas i sammanhanget.” (Skolverket 2011, s. 70. Anm: Egen kursivering.) Samma formulering hittas i kunskapskraven för de andra betygen, med andra fetmarkerade värdeord. Modellering nämns alltså alltid i samband med problemlösning i kursplanen. Eftersom jag kommer arbeta i Sverige har jag i det här arbetet valt att gå efter Skolverkets beskrivning av problemlösning och modellering. Det vill säga, modellering som en underkategori till problemlösning.

Ett problem med uppgifterna i PISA är att de innehåller mycket text. Detta leder till att det krävs en viss nivå av läsförståelse för att förstå uppgifterna, vilket påverkar provets validitet (Henriksson 2010). Skolverket har gjort en jämförelse mellan PISA och de nationella proven i matematik där det visar sig att PISA innehåller mer än dubbelt så många ord per uppgift och tiden som eleverna har på sig för varje uppgift är hälften så lång jämfört med de nationella proven. Detta påverkar provets reliabilitet negativt ur en svensk synvinkel, då svenska elever kan känna av stress ifall de är vana vid att ha mer tid på sig för varje uppgift. Denna faktor är dock svår att undvika som provkonstruktör för PISA då det alltid kommer finnas kulturella skillnader mellan länder.

3 Problemlösning i kursplanerna

I det här avsnittet har jag undersökt hur problemlösning framställs i olika kursplaner. Jag jämför den tidigare svenska kursplanen Lpo 94 med den nuvarande Lgr 11 för att se om problemlösning framställs annorlunda. Jag har dessutom tittat på kursplanerna från Finland och Kina, två länder som utmärker sig med goda resultat i PISA-testerna. På vilket sätt framställs problemlösning i dessa två länders kursplaner?

3.1 Jämförelse mellan den svenska kursplanen och matematiken i PISA

De elever som gjorde undersökningen PISA 2012 är skolade enligt den tidigare läroplanen (Lpo 94) från 1994. Skolverkets rapport PISA 2012, från 2013, har jämfört PISA 2012 med Lpo 94, Kursplan 2000 och ämnesprovet i årskurs 9 år 2012. Enligt rapporten har den svenska läroplanen många gemensamma punkter med PISA-projektets ramverk gällande innehåll och anda. Elever som avslutar grundskolan ska enligt kursplanen ”[...] behärska ett grundläggande matematiskt tänkande och kunna tillämpa det i vardagslivet.” (Skolverket 2013) Matematiken i PISA går till stor del ut på att testa i vilken mån elevern är redo att möta de olika problem och situationer man kan stöta på i det verkliga livet. Problemen i PISA har oftast en verklighetsbaserad och realistisk karaktär.

Innehållet i PISA 2012 kategoriseras enligt OECD i fyra olika kategorier: *Förändring och samband* som behandlar funktioner, statistik och algebra, *Kvantitet* som behandlar aritmetik och taluppfattning, *Rum och form* som behandlar geometri och mätning, samt *Osäkerhet* som behandlar sannolikhet och statistiska frågeställningar. Allt det matematiska innehållet i PISA finns representerat i den svenska kursplanens centrala innehåll.

Skolverket har i rapporten PISA 2012 framförallt analyserat PISA-undersökningen i relation till ämnesprovet i matematik för årskurs 9. Klara skillnader de hittat är bland annat att *undersökningarna har olika provformat*. Svenska elever är inte vana vid att koncentrera sig så länge som 120 minuter i sträck. Uppgifterna i PISA-testet är inte heller ordnade i svårighetsgrad, vilket de nationella proven brukar vara för att ge eleverna en slags ”mjukstart” i provet. En annan skillnad är att PISA-provet har en *högre andel flervalsuppgifter*. Cirka 40 procent av uppgifterna i PISA:s test är flervalsuppgifter, jämfört med ungefär 10 procent i de nationella proven. En del av flervalsuppgifterna i PISA-provet är sammansatta. Eleverna ges en rad olika påståenden och ska svara på om de är sanna eller falska. Alla påståendena måste besvaras korrekt för att poäng ska utdelas på frågan. Motsvarande uppgifter finns inte representerade i ämnesprovet i matematik för årskurs 9. Om liknande uppgifter funnits hade troligtvis delpoäng delats ut för varje korrekt besvarat påstående, menar Skolverket.

Andra saker som skiljer de nationella proven från PISA-provet är att de nationella proven har en *större variation av bedömningsformer och uppgiftsformat*. Ämnesprovet har till exempel en muntlig del och en mer omfattande problemlösningsuppgift. Även *bedömningsmodellen* skiljer sig åt mellan de två proven. Fler uppgifter i ämnesprovet kräver redovisning. Upp emot 50 procent av uppgifterna i ämnesprovet kräver redovisning jämfört med cirka 30 procent i PISA-testet. Ämnesprovet tillämpar också positiv bedömning, vilket betyder att eleven kan erhålla delpoäng om han/hon lyckats lösa en uppgift till en viss del. PISA har också ett större fokus på rätt svar.

PISA har betydligt mer text. I medeltal har PISA cirka 75 ord per uppgift jämfört med 28 ord per uppgift i ämnesprovet. Om man jämför antal ord mot provtiden har eleverna som skriver PISA-testet ungefär 29 ord per minut jämfört med 5 ord per minut för ämnesprovet.

Eleverna har också kortare tid på sig för varje uppgift i PISA, cirka 2,5 minuter per uppgift har de på sig jämfört med 5 minuter per uppgift på ämnesprovet.

En likhet mellan proven var enligt Skolverkets rapport *spridningen av uppgifternas innehåll och svårighet*. Spridningen mellan de svåraste respektive de lättaste uppgifterna är dock lite större i PISA. Enligt Skolverket skulle de allra svåraste respektive lättaste uppgifterna i PISA inte komma med i ämnesprovet.

En av anledningarna till skillnaderna mellan ämnesprovet och PISA är dess olika syften. Ämnesprovets huvudsyfte är att stödja en likvärdig och rättvis betygsättning medan PISA:s huvudsyfte är att undersöka ifall femtonåringar är redo för vuxenlivet och framtidens behov. En annan skillnad är att ämnesprovet är en totalundersökning av en population elever medan PISA använder sig av ett representativt urval av elever. (Skolverket 2013)

Enligt Skolverkets rapport kan svenska elevers ovana vid PISA-testets uppgiftsformat och bedömningsmodeller påverka resultaten negativt. De menar att många av uppgifterna i PISA skulle bedömas med delpoäng samt kräva ytterligare redovisning ifall de skulle vara med i ämnesprovet. Även antal ord per fråga skulle reduceras.

3.2 Jämförelse mellan kursplan 2000 och Lgr 11

De elever som deltog i undersökningen PISA 2012 var alla skolade enligt den förra läroplanen Lpo 94 och den reviderade kursplanen för matematik från år 2000. I Lpo 94 kan man läsa följande punkt under rubriken *Mål att uppnå i grundskolan*: ”Skolan ansvarar för att varje elev efter genomgången grundskola [...] behärskar grundläggande matematiskt tänkande och kan tillämpa det i vardagslivet” (Skolverket 2009, s. 10). Det fanns även ett antal *Mål att sträva mot* i 1994 års läroplan. Under den rubriken kunde man hitta punkter som:

- utvecklar nyfikenhet och lust att lära,
- utvecklar tillit till sin egen förmåga,
- tillägnar sig goda kunskaper inom skolans ämnen och ämnesområden, för att bilda sig och få beredskap för livet,
- lär sig lyssna, diskutera, argumentera, och använda sina kunskaper som redskap för att
    - formulera och pröva antaganden och lösa problem,
    - reflektera över erfarenheter och
    - kritiskt granska och värdera påståenden och förhållanden, (Skolverket 2009, s. 9-10)

I den reviderade kursplanen för matematik från år 2000 kan man läsa att skolan ”har till uppgift att hos eleven utveckla sådana kunskaper i matematik som behövs för att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället.” (Skolverket 2008, s. 26) Även denna kursplan är uppbyggd av strävansmål respektive mål som eleverna skulle ha uppnått vid slutet av skolgången. Bland strävansmålen kan man hitta följande punkter:

- utvecklar intresse för matematik samt tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och att använda matematik i olika situationer,
- utvecklar sin förmåga att formulera, gestalta och lösa problem med hjälp av matematik, samt tolka, jämföra och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen,

- utvecklar sin förmåga att använda enkla modeller samt kritiskt granska modellernas förutsättningar, begränsningar och användning, (Skolverket 2008, s. 26-27)

Vidare står det:

”Strävan skall också vara att eleven utvecklar sin tal- och rumsuppfattning samt sin förmåga att förstå och använda

- grundläggande talbegrepp och räkning med reella tal, närmevärden, proportionalitet och procent,
- olika metoder, måttsystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma storleken av viktiga storheter,
- grundläggande geometriska begrepp, egenskaper, relationer och satser,
- grundläggande statistiska begrepp och metoder för att samla in och hantera data och för att beskriva och jämföra viktiga egenskaper hos statistisk information,
- grundläggande algebraiska begrepp, uttryck, formler, ekvationer och olikheter,
- egenskaper hos några olika funktioner och motsvarande grafer,
- sannolikhetstänkande i konkreta situationer, (Skolverket 2008, s. 27)

Under rubriken *Ämnets karaktär och uppbyggnad* kan man läsa följande stycke om problemlösning:

> Problemlösning har alltid haft en central plats i matematikämnet. Många problem kan lösas i direkt anslutning till konkreta situationer utan att man behöver använda matematikens uttrycksformer. Andra problem behöver lyftas ut från sitt sammanhang, ges en matematisk tolkning och lösas med hjälp av matematiska begrepp och metoder. Resultaten ska sedan tolkas och värderas i förhållande till det ursprungliga sammanhanget. Problem kan också vara relaterade till matematik som saknar direkt samband med den konkreta verkligheten. För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer. Detta gäller alla elever, såväl de som är i behov av särskilt stöd som elever i behov av särskilda utmaningar. (Skolverket 2008, ss. 27-28)

I slutet av nionde klass var målet enligt den reviderade kursplanen från år 2000 att: ”Eleven skall ha förvärvat sådana kunskaper i matematik som behövs för att kunna beskriva och hantera situationer samt lösa problem som vanligen förekommer i hem och samhälle och som behövs som grund för fortsatt utbildning.” (Skolverket 2008, s. 30) Inom den ramen skulle eleven:

- ha utvecklat sin taluppfattning till att omfatta hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform,
- ha goda färdigheter i och kunna använda överslagsräkning och räkning med naturliga tal och tal i decimalform samt procent och proportionalitet i huvudet, med hjälp av skriftliga räknemetoder och med tekniska hjälpmedel,
- kunna använda metoder, måttsystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma längder, areor, volymer, vinklar, massor, tidpunkter och tidsskillnader,
- kunna avbilda och beskriva viktiga egenskaper hos vanliga geometriska objekt samt kunna tolka och använda ritningar och kartor,

- kunna tolka, sammanställa, analysera och värdera data i tabeller och diagram,
- kunna använda begreppet sannolikhet i enkla slumpsituationer,
- kunna tolka och använda enkla formler, lösa enkla ekvationer, samt kunna tolka och använda grafer till funktioner som beskriver verkliga förhållanden och händelser. (Skolverket 2008, s. 30)

I den nya läroplanen Lgr 11 är mycket sig likt från den föregående, åtminstone vad gäller kunskapsmålen. Men det finns en del skillnader. Många av målen har omformulerats, något mål har slagits ihop med ett annat och något mål har tagits bort. Sedan finns det några ”nya” kunskapsmål som tidigare klassades som strävansmål i Lpo 94. Vi hittar bland annat punkten som säger att eleven ska kunna ”lösa problem och omsätta idéer i handling på ett kreativt sätt” (Skolverket 2011a, s. 13) efter genomförd grundskoleutbildning.

I kursplanen för matematik står det att eleverna ska ges möjlighet att utveckla sin förmåga att

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder,
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp,
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter,
- föra och följa matematiska resonemang, och
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. (Skolverket 2011a, s. 63)

I Skolverkets kommentarmaterial till matematiken i Lgr 11 kan man läsa om förändringarna som gjorts till den nya kursplanen. Ett av målen var att göra kursplanen mer konkret. Förändringarna gjordes med underlag från dels nationell och internationell ämnesdidaktisk forskning, dels resultat från Skolverkets nationella utvärdering av undervisningen i matematik, NU-03, men även internationella undersökningar som PISA och TIMSS har varit med och påverkat. Andra viktiga utgångspunkter var analyser av elevernas resultat i de nationella proven.

Utvärderingarna och granskningarna visade att svensk matematikundervisning fokuserade för mycket på enskild räkning, vilket begränsade elevernas möjlighet att lösa problem, men också deras möjligheter till att använda matematiken i vardagen och inom olika ämnesområden. Ambitionen med den nya kursplanen var att ”eleverna ges möjlighet att använda matematiken i olika sammanhang, utveckla förmågan att lösa problem, använda logiska resonemang samt att kommunicera matematik med hjälp av olika uttrycksformer” (Skolverket 2011b, s. 6).

Rapporterna och analyserna visade också att eleverna behövde utveckla bättre kunskaper inom specifika kunskapsområden. Bland yngre elever var det framförallt förståelsen för de fyra räknesätten som behövde förbättras och bland elever i alla åldrar behövdes bättre kunskaper om matematiska begrepp samt bättre kunskaper inom algebra och geometri.

Problemlösning, som i den förra kursplanen endast var ett mål att sträva mot, är i Lgr 11 ett eget kunskapsområde under det centrala innehållet där vi hittar följande tre punkter:

- Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder.

- Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer och olika ämnesområden.
- Enkla matematiska modeller och hur de kan användas i olika situationer. (Skolverket 2011a, s. 67)

Kommentarmaterialet förklarar att kursplanen lyfter fram de olika verktyg som eleverna behöver för att utveckla kunskaper i och om problemlösning. Att känna till tillvägagångssätt, eller strategier, samt att kunna tolka och formulera frågeställningar anser Skolverket vara viktiga verktyg vid problemlösning. Skolverket beskriver problemlösning på följande sätt i sitt kommentarmaterial:

> Matematiska problem är situationer eller uppgifter där eleverna inte på förhand känner till hur problemet ska lösas. Istället måste de undersöka och prova sig fram för att finna en lösning. Matematiska problem kan också beskrivas som uppgifter som inte är av rutinkaraktär. Oftast förekommer ett problem i en konkret situation som gör att eleverna behöver göra en matematisk tolkning av situationen. Ibland är problemen inommatematiska och saknar då direkt anknytning till en vardaglig situation. (Skolverket 2011b, s. 25)

Strategier för problemlösning beskriver Skolverket som olika tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i vardagen och inom olika ämnesområden. Progressionen går från att eleverna i årskurserna 1-3 ska få möta strategier för problemlösning i enkla situationer, till strategier för problemlösning i vardagliga situationer i årskurserna 4-6. I årskurserna 7-9 ökar komplexitetsgraden genom att eleverna ska kunna värdera valda strategier och metoder.

Den tredje och sista punkten under Problemlösning handlar om matematisk modellering. Skolverkets kommentarmaterial beskriver det som förmågan att göra en matematisk modell av en ickematematisk situation. Det handlar också om att kunna analysera modellens giltighet samt att kunna översätta modellen tillbaka till den ursprungliga situationen.

3.3 Kursplaner i andra länder

3.3.1 Finland

Den aktuella finska läroplanen är från 2004 och togs i bruk samma år. En ny läroplan har tagits fram år 2014 och ska sättas i bruk mellan 2016-2019. Likt den svenska kursplanen för matematik börjar även den finska med att förklara ämnets syfte:

> Undervisningen i matematik har som uppgift att ge eleven möjligheter att utveckla ett matematiskt tänkande och lära sig matematiska begrepp och de mest använda lösningsmetoderna. Undervisningen skall utveckla ett kreativt och exakt tänkande hos eleven och skall lära eleven att hitta och matematisera problem och söka lösningar på dem. Matematikens betydelse bör ses ur ett brett perspektiv – den påverkar elevens andliga tillväxt och främjar hans eller hennes förmåga till målmedvetet handlande och social växelverkan.
> Undervisningen i matematik skall framskrida systematiskt och den skall lägga en bestående grund för eleven att tillägna sig matematiska begrepp och strukturer. Konkretisering kan fungera som ett viktigt hjälpmedel då elevens erfarenheter och tankesystem förenas med matematikens abstrakta system. Läraren bör effektivt utnyttja problem ur vardagen som kan lösas med hjälp av matematiskt tänkande

eller matematiska metoder. Informations- och kommunikationsteknik bör användas för att stödja elevens lärande. (Utbildningsstyrelsen 2004, s. 158)

Kursplanen är likt Lgr 11 indelad i tre ”stadium”, med skillnaden att den finska kursplanen är indelad i årskurserna 1-2, 3-5 samt 6-9. Varje stadium innehåller mål, centralt innehåll samt kriterier för vad som anses vara goda kunskaper i slutet av varje stadium.
Målen för elever i årskurserna 6-9 är att de skall:

- lära sig att i matematiken lite på sig själv och ta ansvar för den egna inlärningsprocessen
- lära sig att förstå betydelsen av matematiska begrepp och regler och lära sig att se sambanden mellan matematiken och den reella världen
- lära sig räknefärdigheter och att lösa matematiska problem
- lära sig ett logiskt och kreativt tänkande
- lära sig att tillämpa olika metoder för att hämta och bearbeta information
- lära sig att uttrycka sina tankar entydigt och att motivera sitt handlande och sina slutsatser
- lära sig att ställa frågor och dra slutsatser utgående från observationer
- lära sig att upptäcka lagbundenhet
- lära sig att arbeta koncentrerat och långsiktigt och att fungera i grupp. (Utbildningsstyrelsen 2004, ss. 163-164)

Det centrala innehållet i den finska kursplanen är indelat i sex kategorier, Tankeförmåga och tankemetoder, Tal och räkneoperationer, Algebra, Funktioner, Geometri samt Sannolikhet och statistik. Ordet problemlösning finns inte explicit utskrivet i det centrala innehållet, men under rubriken Tankeförmåga och tankemetoder hittar man punkter som har med problemlösning att göra:

- att utföra uppgifter som kräver logiskt tänkande såsom att klassificera, jämföra, ordna, mäta, konstruera, ställa upp modeller, söka regler och beroenden och att presentera dem
- att tolka och använda begrepp som behövs vid jämförelser och i beroenden
- att tolka och producera matematiska texter
- enkel bevisföring: motiverade uppskattningar och försök, den systematiska försök- och misstag- metoden, att påvisa fel, direkt bevisföring
- att lösa kombinatoriska problem med olika metoder
- att använda skisser och redskap som stöder tänkandet. (Utbildningsstyrelsen 2004)

Under kriterierna för slutbedömning för vitsordet 8 hittar vi följande punkter under rubriken Tankeförmåga och tankemetoder

Eleven
- [...]
- kan matematisera ett enkelt textproblem och göra upp en plan för att lösa problemet, lösa det och granska lösningens riktighet
- kan använda klassificering vid lösning av matematiska problem
- kan systematiskt presentera möjliga lösningsalternativ genom att använda tabell, träddiagram, stigschema, eller annat diagram. (Utbildningsstyrelsen 2004, s. 164)

Under rubriken Tal och räkneoperationer hittar vi följande punkt

Eleven

- [...]
- kan använda proportionalitet, procenträkning och andra räkneoperationer vid lösning av problem som man stöter på i vardagen. (Utbildningsstyrelsen 2004, s. 164)

Under rubriken Algebra hittar vi

Eleven

- [...]
- kan bilda ekvationer ur ett enkla vardagsproblem och lösa dem algebraiskt eller via slutledningar
- kan använda ekvationssystem för att lösa enkla problem
- kan bedöma hur förnuftig en lösning är och granska de olika skedena i sin lösning. (Utbildningsstyrelsen 2004, s. 164)

3.3.2 Kina

Kina är inte medlem i OECD men är ett av de länder som brukar prestera allra bäst i PISA. I 2012 års PISA-test presterade Shanghai-Kina ett medel på 613, Hongkong-Kina 561 och Macao-Kina 538, jämfört med Sveriges medel på 478.

Den kinesiska kursplanen för matematik är, likt den finska, också från 2004. Om den finska kursplanen var mer detaljerad än den svenska så är den kinesiska ytterligare ett par snäpp mer detaljerad. Kursplanen delar upp skolgången i tre stadier, första (årskurs 1-3), andra (årskurs 4-6) och tredje (årskurs 7-9), med detaljerade hänvisningar om vad eleverna ska lära sig i varje stadium. Kursplanen förser även lärarna med exempel på uppgifter.

De övergripande målen för matematikundervisningen delas in i fyra kategorier, kunskaper och färdigheter, matematiskt tänkande, problemlösning samt tillgivenhet och attityder. Under rubriken Kunskaper och färdigheter hittar vi följande mål:

- Involve in processes of how authentic problem situations are abstracted as number and algebra problems; master fundamental knowledge and basic skills pertaining to numbers and algebra; able to solve simple problems.
- Involve in and explore the processes of how shapes, sizes and positions of objects and figures are related and transformed; master fundamental knowledge and basic skills pertaining to space and figures; able to solve simple problems.
- Involve in the processes of problem posing, data collection and processing, decision making and prediction; master fundamental knowledge and basic skills pertaining to statistics and probability; able to solve simple problems. (Ministry of Education 2004, s. 10)

Rubriken Matematiskt tänkande handlar om att lära sig använda det matematiska symbolspråket för att beskriva världen samt att utveckla ett abstrakt matematiskt tänkande. Det handlar även om att lära sig experimentella matematiska metoder, samt att utveckla ett logiskt tänkande och en initial matematisk deduktionsförmåga.

Under rubriken Problemlösning hittar vi följande mål:

- Begin to learn how problems can be posed and comprehended from the mathematical perspectives; able to apply knowledge and skills acquired for problem solving in an integrated manner; develop application awareness.
- Formulate some strategies for problem solving; experience that problems can be solved in a variety of ways; develop practical abilities and creative spirits.
- Learn how to cooperate with others; able to communicate with others about one's processes and products of thinking.
- Begin to form an awareness of evaluation and reflection. (Ministry of Education 2004, s. 11)

Tillgivenhet och attityder handlar om visa positiv attityd, att vara nyfiken, utveckla en vilja att ta sig förbi svårigheter och att utveckla tillförsikt till sin egen förmåga. Det handlar också om att börja se kopplingarna mellan matematiken och livet självt, samt vilken betydelse matematiken haft för den mänskliga civilisationen. Eleverna ska även utveckla pragmatiska och realistiska attityder, en vana att se kritiskt på saker och ha en egen åsikt.

Efter de övergripande målen följer en mer detaljerad målbeskrivning för varje stadium.

Det centrala innehållet i den kinesiska kursplanen är indelat i fyra kategorier, Nummer och algebra, Volymer och figurer, Statistik och sannolikhet samt Praktiska och integrerade tillämpningar. Den sista kategorin, Praktiska och integrerade tillämpningar, är till för att eleverna ska få använda sina förvärvade kunskaper i praktiken. I årskurs 1-3 ligger fokus på enkla praktiska aktiviteter. I årskurs 4-6 ska eleverna lära sig mer om hur de olika matematiska områdena hänger ihop. Och slutligen i årskurs 7-9 gör eleverna större tematiska studier där de fördjupar sina matematiska kunskaper och utvecklar en mer holistisk syn på matematiken.

För att sätta perspektiv på detaljnivån kan vi titta på antal objekt i kategorin Nummer och algebra för årskurserna 7-9 och jämföra det med motsvarande innehåll i den svenska kursplanen. Kategorin Nummer och algebra behandlar innehåll som nummer, uttryck, algebra, ekvationer, olikheter samt funktioner. Sammanlagt innehåller kategorin 49 punkter. Motsvarande innehåll i den svenska kursplanen får vi om vi slår ihop kategorierna Taluppfattning och tals användning, Algebra samt Samband och förändring. Sammanlagt innehåller de rubrikerna 10 punkter. Den kinesiska kursplanen är nästan fem gånger mer detaljerad än Lgr 11 om man ser till antal punkter i det centrala innehållet.

Utöver det mer detaljerade centrala innehållet har även varje kategori exempeluppgifter som länkas samman med det centrala innehållet. Till exempel under rubriken Rationella tal hittar man en punkt som säger ”Able to explain and predict with justification using information of relatively large numbers. [Please refer to example 1]” (Ministry of Education 2004, s. 37) Exempel 1 ser i sin tur ut som följande

> Example 1 Approximately 200 thousands people's everyday living are affected after a flood disaster. This situation is expected to last one month. Please assert: How many tents should be organized? How many tons of food are needed?
> Remark Suppose a family consists of 4 members, and 200 thousands people shall need 50 thousand tents for shelter. Suppose a person on average needs 0.5 kilogram of food, one day will need to consume 100 thousands kilogram of food..... (Ministry of Education 2004, s. 40)

Kursplanen innehåller även riktlinjer för undervisning, utvärdering och val av läromedel. Riktlinjerna innehåller även de exempel på uppgifter. En riktlinje för lärare i årskurserna 4-6 är att ”Uppmuntra elever till att tänka självständigt. Guida eleverna till autonom utforskning och gemensamt utbyte av idéer.” (Ministry of Education 2004, s. 72) Som exempel ger kursplanen ett förslag på uppgift

> Example Fill in numbers in the blanks below so that the sequence formed possesses some form of pattern or regularity. Explain this pattern and regularity.
> 3, 5, 7, ____, ____, ____, (Ministry of Education 2004, s. 72)

Kursplanen ger även exempel på möjliga elevsvar. 9, 11, 13 bildar en serie av udda tal medan 11, 17, 27 tar summan av två påföljande tal och subtraherar 1 från den summan.

Lärarna ska uppmuntra eleverna att tänka själv och utbyta idéer sinsemellan, ty effektivt matematiskt lärande kan inte enbart förlita sig på imitation och memorerade procedurer (Ministry of Education 2004).

3.4 Sammanfattning

I och med Lgr 11 har problemlösning fått en större och mer central roll jämfört med Lpo 94. Det finns med som ett eget område bland det centrala innehållet och målsättningen är att alla elever ska kunna lösa problem i bekanta situationer.

Den finska kursplanen liknar Lgr 11 till stora delar. Eller rättare sagt, Lgr 11 liknar den finska kursplanen, då den är nyare. En skillnad är att problemlösning är mer integrerat i olika delar av det centrala innehållet. Kursplanen antyder också ett högre tempo i den finska matematikundervisningen jämfört med den svenska. Det centrala innehållet för årskurserna 1-3 i Lgr 11 motsvarar innehållet för årskurserna 1-2 i den finska kursplanen. Det finns även innehåll i den finska kursplanen som helt saknas i Lgr 11, exempelvis trigonometri, absolutbelopp, rotbegreppet, andragradsekvationer etc.

En annan skillnad mellan den finska kursplanen och Lgr 11 är kraven på eleverna. Varje stadium har som mål att eleverna ska lära sig att arbeta koncentrerat. För årskurs 6-9 finns även mål som säger att eleverna ska lära sig ta ansvar för den egna inlärningsprocessen.

Även om den finska kursplanen till sitt innehåll liknar de svenska styrdokumenten så ger syftesdelen och en del av innehållet en antydan om en ambition att eleverna ska arbeta som riktiga matematiker. Syftesdelen framhåller att undervisningen ”skall utveckla ett kreativt och exakt tänkande hos eleverna” (Utbildningsstyrelsen 2004, s. 158) och bland det centrala innehållet ska eleverna bland annat lära sig att producera matematiska texter och enkel bevisföring.

Den kinesiska kursplanen ger en bild av att lärarna i Kina är mer toppstyrda än de svenska och finska lärarna. De kinesiska styrdokumenten är betydligt mer detaljerade och ger dessutom exempel på övningar och uppgifter som lärarna kan använda för att lära ut ett visst innehåll.

3.5 Diskussion

Skolverkets jämförelse av PISA och de nationella proven känns lite som ett försök att hitta bortförklaringar. Först skriver de ”PISA-projektets ramverk har stora likheter i innehåll och anda med de sammantagna svenska dokumenten” (Skolverket 2013, s. 39) för att sedan lista upp olikheter som kan påverka resultaten negativt mellan PISA och de nationella proven. Om nu de svenska dokumenten har stora likheter med PISA-projektets ramverk, då borde man också kunna förvänta sig att svenska elever kan stora delar av PISA-provet. Den enligt mig mest relevanta skillnaden mellan PISA och de nationella proven i matematik är andelen text i uppgifterna. Med nästan tre gånger så många ord per uppgift i PISA jämfört med de nationella proven finns det en högre risk att läsförståelsen påverkar elevernas resultat. Detta påverkar i sin tur provets validitet, det vill säga provets förmåga att mäta vad det avser att mäta (Henriksson 2010). Det finns mycket forskning (Svensson 2002, m.fl.) som visar på positiv korrelation mellan läsförståelse och prestationer i matematik och matematisk problemlösning. Det faktum att eleverna som skriver PISA också har kortare tid på sig för varje uppgift gör att provet även tappar i reliabilitet, det vill säga provets pålitlighet (Henriksson 2010).

En annan skillnad mellan PISA och de nationella proven som Skolverket inte tar upp i sin rapport är uppgifter i PISA ofta innehåller information/fakta som inte behövs för att lösa uppgiften. Det är något man sällan ser i varken de nationella proven eller i svenska läroböcker. Ifall eleverna är vana vid att alla givna siffror alltid ska användas för att ta fram lösningen, då kan det bli problematiskt när de måste sålla bland informationen för att ta reda på vad som är relevant för uppgiften och vad som inte är det.

Studien visar att problemlösning har fått en större och mer central roll i den nya kursplanen i Lgr 11. Lpo 94 gav en ganska tvetydig bild av problemlösning. Under rubriken Ämnets karaktär och uppbyggnad stod det att det krävs balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskap om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer för att kunna utöva matematik på ett framgångsrikt sätt. Vidare under rubriken Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det nionde skolåret beskrivs kunskaper som behövs för att ”kunna beskriva och hantera situationer samt lösa problem i hem och samhälle” (Skolverket 2008, s. 30) som ett slags ramverk. Inom ramverket finns sedan de kunskaper som anses vara viktiga. Kursplanen gav stort utrymme för tolkningar vilket ledde till att ett stort ansvar lämnades över till lärarnas kompetens.

Lgr 11 är betydligt mer tydlig och detaljerad jämfört med Lpo 94. Den har ett centralt innehåll som listar vad som anses vara relevant kunskap inom varje delområde. Här har också problemlösning i sig fått en plats bland det centrala innehållet och är dessutom en av de fem förmågorna som elever ska ha möjlighet att utveckla inom matematikämnet. Eleverna ska ges möjlighet att utveckla sin förmåga att ”formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat.” (Skolverket 2011, s. 62) Kursplanen är helt klart mer konkret och tydlig jämfört med Lpo 94, men lämnar fortfarande över ansvaret till lärarna om hur själva undervisningen ska gå till. Det blir intressant att se ifall resultaten börjar peka uppåt i och med den nya kursplanen. Den är trots allt ganska lik den finska kursplanen till sin struktur. Kanske har Skolverket sneglat på både de finska resultaten i PISA och den finska kursplanerna då de satte ihop Lgr 11.

Den kinesiska kursplanen ger ett konkret intryck med alla exempel och riktlinjer. Det ligger ett stort fokus på problemlösning och att få eleverna involverade och aktiva under matematiklektionerna. Något som forskningen pekar på att vara viktiga komponenter i lyckad problemlösningsundervisning. Mer om det i nästa avsnitt. Utbildningen blir mer styrd från ovan i och med den detaljerade kursplanen och lärarna får mindre flexibilitet i sin professionella yrkesutövning. Å andra sidan tror jag det kan bidra till en mer likvärdig skola.

Sett till de uppgifter från PISA som OECD släppt offentligt tycker jag att den svenska kursplanen har täckning för allt. Ur ett kursplansperspektiv ser jag ingen anledning till att svenska elever skulle behöva prestera dåligt i PISA.

Intressant var också uppgifterna från PISA-provets enkätundersökning angående elevers disciplin och attityder till skolan. Undersökningen visade att Sverige hade högst andel sena ankomster bland alla deltagande länder (OECD 2013). Hela 56 procent av de svenska eleverna hade någon gång under de senaste två veckorna kommit för sent till skolan. Snittet i hela OECD låg på 35 procent. I Finland låg siffran på ungefär 43 procent. Asiatiska länder som Japan (9 procent), Hongkong Kina (15 procent), Vietnam (16 procent) och Shanghai-Kina (17 procent) var de med lägst andel sena ankomster till skolan. Sen ankomst har enligt OECD:s (2013) rapport ett samband med färre antal poäng på matematikdelen av PISA.

En annan intressant statistik att titta på är hur eleverna upplever undervisningen. OECD (2013) har delat upp undervisningsdelen i fyra kategorier: kognitiva aktiviteter, lärarorienterad undervisning, elevorienterad undervisning och formativ bedömning. Eleverna fick under enkätundersökningen i samband med PISA-testet ta ställning till ett antal olika påståenden. Kognitiva aktiviteter handlar till stora delar om det som enligt forskningen är viktiga komponenter i problembaserad undervisning (mer om det i nästa del av arbetet). Påståendena handlade om exempelvis ifall läraren gav dem problem där de behöver tänka en längre tid, ifall läraren presenterade problem utan uppenbara lösningsmetoder, ifall läraren bad dem förklara hur de löst ett visst problem. Kategorin lärarorienterad undervisning hade påståenden som ”läraren sätter upp klara mål med undervisningen”, ”läraren ställer frågor för att kolla att vi har förstått vad vi lärt oss”, ”läraren berättar vad vi behöver lära oss”. Kategorin elevorienterad undervisning hade påståenden som ”läraren ger olika uppgifter till elever som har svårt för att lära sig och/eller till elever som lär sig snabbt” och ”läraren delar in oss i små grupper för att ta fram gemensamma lösningar till problem och uppgifter”. Formativ bedömning innehöll påståenden som ”läraren talar om för mig hur bra det går på matematiklektionerna” och ”läraren ger mig återkoppling på mina starka och svaga sidor i matematik”. Ett index har skapats för varje kategori med medelvärdet 0 och standardavvikelsen 1. Ett positivt värde på indexet betyder att elever i det landet upplever att de möter en viss undervisningsstrategi oftare än genomsnittet för OECD. Sveriges värden såg ut som följande: -0.22 på kognitiva aktiviteter, 0.44 på elevorienterad undervisning, -0.04 på lärarorienterad undervisning och 0.07 på formativ bedömning. Stora skillnader hade exempelvis påståendet att läraren delar ut uppgifter som saknar en omedelbart tydlig lösningsmetod. 36 procent av de svenska eleverna påstod att de upplevde det alltid eller ofta jämfört med genomsnittet på 53 procent. Finland låg nära medelvärdet på kognitiva aktiviteter och elevorienterad undervisning, medan både lärarorienterad undervisning (-0.12) och formativ bedömning (-0.17) låg lite under snittet. Anmärkningsvärt var att eleverna i många av de asiatiska länderna som presterar bra i PISA har lågt index på kognitiva aktiviteter. Korea (-0.75) och Japan (-0.50) var de länder med överlägset lägst index och då anses Japan vara ett av de länderna som ligger i framkant vad gäller problembaserad undervisning. Det var också stor variation bland de olika kinesiska distrikten. Macao-Kina och Hongkong-Kina hade ganska likt index, -0.23 respektive -0.21, medan Shanghai-Kina låg på 0.16.

Kan jag efter att ha studerat de olika kurs- och läroplanerna svara på mina initiala frågeställningar? Finns ett större fokus på problemlösning i Lgr 11 jämfört med Lpo 94? Ja, jag tycker att problemlösning har fått en större roll i Lgr 11. Problemlösning är en av de fem huvudförmågorna som eleverna ska få möjlighet att utveckla. Det är även en del av det centrala innehållet i kursplanen. Efter att ha studerat och jämfört de två kursplanerna samt kommentarmaterial får jag definitivt intrycket att Skolverket tycker att problemlösning är en viktig del av matematiken och har därför lagt ett lite större fokus på just den delen i Lgr 11. Däremot tycker jag inte att kursplanen eller kommentarmaterialet beskriver hur lärare ska arbeta med och runt problemlösning på ett konkret sätt.

Hur står sig den svenska kursplanen jämfört med andra länder, sett ur ett problemlösningsperspektiv? De elever i Sverige som gjorde PISA-proven fram till 2012 var alla skolade enligt Lpo 94. Hur mycket den nya läroplan kan påverka framtida resultat återstår att se. Eftersom PISA-proven hålls så sällan måste man se på trenderna ur ett väldigt brett perspektiv. Därför tror jag att det är viktigt att inga nya politiska reformer införs innan man kan se någon tydlig trend från de tidigare reformerna.

Om jag ska spekulera så tror jag inte att den nya läroplanen i sig självt kommer att bidra till någon mätbar positiv (eller negativ) skillnad. Även om den nya läroplanen har ett större fokus på problemlösning så är det inte så att Lpo 94 var en katastrof och att Lgr 11 är helt fantastisk. Jag tycker snarare att Lpo 94 hade täckning för allt tänkbart innehåll som kunde dyka upp PISA-proven.

Ma (1999) har i sin bok Knowing and Teaching Elementary Mathematics undersökt skillnaden mellan kinesiska och amerikanska lärare. En slutsats hon drog var att de kinesiska lärarna i större utsträckning hade det som hon kallade djup förståelse för grundläggande matematik (profound understanding of fundamental mathematics), detta trots att de amerikanska lärarna genomgick en längre utbildning. Anmärkningsvärt var att nyutexaminerade kinesiska lärare inte hade den djupa matematiska förståelsen, utan det var de lite mer erfarna kinesiska lärarna som visade prov på den djupa matematiska förståelsen. Då Ma intervjuade tre av de kinesiska lärarna som hade den djupa matematiska förståelsen så uppgav de ett par faktorer som de tyckte hade utvecklat dem som lärare. Det första var att de studerar kursplanen, läromedlen och lärarhandboken intensivt. De går noggrant igenom det stoff som ska läras ut, analyserar både kursplanernas och läromedlens uppbyggnad för att upptäcka kopplingar mellan olika områden. De funderar på vilka typer av problem eleverna kan stöta på, vilka typer av frågor eleverna kan ställa, olika sätt att lösa uppgifterna på och olika sätt att förklara saker på. En av de intervjuade lärarna uppgav att han eller hon spenderar tre till fyra gånger så mycket tid på förberedelser jämfört med själva lektionstiden (Ma 1999). Lärare i den svenska skolan har väldigt pressade scheman och har inte mycket tid över till att planera och förbereda lektioner. Jag har själv bevittnat lärare som förberett sig inför nästa lektion på vägen mellan lektionssalarna.

Den andra faktorn var att de kinesiska lärarna inte bara studerar kursplaner och läromedel intensivt, de gör det dessutom tillsammans med sina kollegor. Varje vecka träffas lärarna i speciella forskningsgrupper (teacher research groups) för att reflektera kring olika problem och utvärdera den egna undervisningen. De kinesiska lärarna har även gemensamma kontor där de smidigt nå varandra vid behov jämfört med de amerikanska skolorna, där det är vanligare att lärarna har ett eget skrivbord i klassrummet eller i anslutning till klassrummet (Ma 1999). De svenska skolornas infrastruktur liknar mycket de kinesiska. Speciellt då Matematiklyftet är aktivt. Matematiklyftet är ett fortbildningsprojekt för alla matematiklärare i Sverige. Där diskuterades bland annat didaktiska frågor, vanliga missförstånd hos elever och hur ett visst innehåll lärs ut på bästa sätt. Exakt sådant som de kinesiska lärarna gör varje vecka. Bland de lärare jag hade kontakt med under min praktikperiod var Matematiklyftet ett väldigt uppskattat inslag. Jag hoppas att Matematiklyftet blir en fast inslag i den svenska skolan då det är en bra struktur för fortbildning. Svenska högstadielärare undervisar oftast i minst två ämnen och har ofta väldigt diversifierade ämneskombinationer. Detta leder till att det ofta är svårt att organisera lärarna så att de som undervisar i ett specifikt ämne är lokaliserade i samma arbetsrum. Den sammanlagda ämnesdidaktiska kompetensen på skolan blir då utspridd. På en skola där jag haft praktik satt två av skolans matematiklärare i ett arbetsrum och två andra matematiklärare i ett annat arbetsrum. Där hade det artat sig att de två paren, var för sig, gjorde gemensamma planeringar och själva lektionsupplägget skilde sig mellan paren. I slutändan bestämmer lärare självklart alltid själv upplägget på sina lektioner om hur han eller hon vill uppnå de uppsatta målen. Men för att skapa en så jämlik skola som möjligt skulle det inte skada ifall lärarna fick så goda möjligheter som möjligt att dra nytta av varandras erfarenhet.

Den tredje faktorn var att lära sig av sina elever. De kinesiska lärarna menade att deras elever ofta kom med lösningar som de aldrig hade kommit att tänka på själv. Genom att lära sig många olika sätt att lösa problem på menade de kinesiska lärarna att de lättare kunde koppla ihop olika delar av matematiken.

Den fjärde och sista faktorn var att de kinesiska lärarna löste många problem på egen hand. Både som förberedelse och för eget nöjes skull. En av lärarna påstod att hon eller han, som förberedelse, brukade lösa alla problem som eleverna fick. Läraren försökte lösa problemen på så många olika sätt som möjligt, eftersom det då var lättare att hjälpa eleverna ifall de stötte på problem (Ma 1999). Som jag nämnde tidigare har lärare i Sverige inte jättemycket tid över till förberedelser. Detta leder till att det blir svårare för svenska lärare att uppnå samma typ av djupa matematiska förståelse som de kinesiska lärarna har efter att ha jobbat några år. Och ifall lärarna inte har en djup förståelse för matematiken, hur ska de då kunna lära eleverna så att de förstår?

Slutligen är det svårt att säga hur stor inverkan kursplanen har på elevernas prestationer i PISA. Jag tror att de kulturella skillnaderna i de olika länderna gör det svårt att hitta klara samband mellan olika aspekter och elevernas prestationer. PISA:s egna undersökning visade bland annat att vissa attityder hade stor korrelation med elevprestationer. Detta var sant i ett stort antal länder, men samtidigt fanns det länder som avvek från det sambandet. Med detta i åtanke borde man fråga sig om det är så klokt att låta ett enda prov jämföra nästan alla världens utbildningssystem. En sådan sak som att PISA-testet är obligatoriskt för alla utvalda elever men inte påverkar betyget kan göra utslag på elevernas inställning till testet.

För att kunna dra några klara slutsatser hade jag nog behövt titta på betydligt fler läroplaner än bara tre stycken. Men jag är osäker på om jag hade kunnat dra någon slutsats om läroplanens betydelse för prestationer i PISA även om jag tittat på varenda läroplan som finns. De kulturella skillnaderna och elevernas attityder har nog betydligt större inverkan på resultaten än läroplanen. Den svenska och den finska läroplanen känns ganska lika (jämfört med den kinesiska). Men ändå skiljer sig resultaten såpass mycket åt. Välijärvi (2002) skriver att läraryrket är ett av de högst ansedda yrkena i Finland, där lärarutbildningen är så populär att endast 10 procent av de sökande kommer in. Jag tror att det har en mycket större inverkan på Finlands framgångar än vad läroplanen har. Välijärvi (2002) tar dessutom upp det faktum att den finska läroplanen var väldigt strikt och styrd fram till 1990-talet. Förändringar gav sedan lärarna en större autonomi och pedagogisk frihet som enligt Välijärvi (2002) är en av nycklarna till Finlands goda resultat.

4 Problemlösning

I den här delen ska jag fördjupa mig i vad forskningen säger om problemlösning. Vad är problemlösning och varför ska elever syssla med problemlösning? Vilka metoder eller strategier finns för att lösa problem?

4.1 Vad säger kursplanen om problemlösning?

Enligt den nuvarande kursplanen Lgr 11 är problemlösning ett av matematikämnets huvudsyften.

> Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Eleverna ska även ges förutsättningar att utveckla kunskaper för att kunna tolka vardagliga och matematiska situationer samt beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer. (Skolverket 2011)

Under det centrala innehållet för årskurs 7-9 finns följande punkter under rubriken Problemlösning:

- Strategier för problemlösning i vardagliga situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder.
- Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer och olika ämnesområden.
- Enkla matematiska modeller och hur de kan användas i olika situationer. (Skolverket 2011)

Under kunskapskraven hittas följande:

> Eleven kan lösa olika problem i bekanta situationer på ett **i huvudsak** fungerande sätt genom att välja och använda strategier och metoder med viss anpassning till problemets karaktär samt **bidra till att formulera** enkla matematiska modeller som kan tillämpas i sammanhanget. Eleven för **enkla och till viss del** underbyggda resonemang om val av tillvägagångssätt och om resultatets rimlighet i förhållande till problemsituationen samt kan **bidra till** att ge **något** förslag på alternativt tillvägagångssätt. (Skolverket 2011)

Ovanstående kunskapskrav är för betyget E i slutet av årskurs 9. Kunskapskraven för högre betyg ser nästan likadana ut, endast de fetmarkerade värdeorden är utbytta.

4.2 Vad är problemlösning?

Enligt Skolverkets (2011) kommentarmaterial är matematiska problem uppgifter eller situationer där eleverna inte direkt känner till hur problemet ska lösas. Det krävs undersökning och prövning för att komma fram till en lösning. Problemen kan kopplas till olika områden inom matematiken och kan ta sin utgångspunkt i egna intressen, fantasier eller verkliga situationer. Ibland kan ett problem kräva en tolkning av situationen och en matematisk formulering. Problemen kan också vara helt abstrakta och sakna koppling till verkligheten.

Vidare skriver Skolverket (2011) i sitt kommentarmaterial att ett matematiskt problem kan upplevas olika av olika elever, beroende på hur långt de kommit i sin kunskapsutveckling. En elev som kommit långt i sin kunskapsutveckling kan uppleva ett problem som en rutinuppgift medan en annan elev kan behöva undersöka och pröva sig fram för att lösa samma uppgift.

Undervisningen ska syfta till att eleverna utvecklar en förtrogenhet med problemlösningens alla delar. Vilket betyder att de ska kunna tolka vardagliga och matematiska situationer, kunna beskriva och formulera dessa med hjälp av matematikens uttrycksformer samt kunna reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat (Skolverket 2011). En matematisk modell beskrivs som en generell beskrivning av en vardaglig situation.

Lester (1996) beskriver problemlösningsförmågan som en funktion av åtminstone fem kategorier av faktorer:

- kunskapande och användning
- kontroll
- uppfattningar av matematik
- affekter
- socio-kulturella sammanhang (Lester 1996)

Till kunskapande och användning hör kunnande om till exempel fakta, definitioner, algoritmer, strategier, kännedom om problemtyper samt mängder av rutinmässiga procedurer. Särskilt betydelsefullt, menar Lester (1996), är förmågan att organisera, representera och använda sin kunskap. När elever sysslar med problemlösande aktiviteter är sannolikheten stor att vissa av de, för sammanhanget, betydelsefulla begreppen fortfarande är under utveckling. Att i de tillfällena kunna anpassa sina begrepp är viktigt för att kunna lösa problemet (Lester 1996).

Kontroll handlar om att kunna planera, utvärdera och styra sitt eget tänkande. Metakognition är förmågan att vara medveten om sitt eget tänkande och handlande. Studier har visat att brist på kontroll kan ha katastrofala effekter på problemlösningen (Lester 1996).

Uppfattningar av matematik handlar om vilka subjektiva uppfattningar en person har om sig själv, om matematik, omgivningen och de moment som behandlas i matematikuppgifter (Lester 1996).

Affekter handlar om känslor och attityder. Forskning har ofta fokuserat på sambandet mellan attityder och prestationer i matematik. Det har visat sig att attityder som motivation, intresse, självförtroende, förmåga att stå emot svårigheter, villighet att ta risker, tolerans för osäkerhet och förmåga att inte ge upp har en påverkan på prestationerna. Lester skiljer attityder från känslor genom att betrakta attityder som egenskaper hos personen medan känslor är situationsspecifika. Attityder kan te sig som att en elev exempelvis ogillar en viss typ av uppgift medan känslor kan framstå som frustration då en elev exempelvis inte lyckas lösa ett problem. Affekter kan påverka prestationen i matematik, ”ibland i sådan utsträckning att det kan dominera tänkande och handlingar (Lester 1996, s 86).”

Socio-kulturellt sammanhang handlar om hur socio-kulturella faktorer inverkar på bildandet av kunskap. Utveckling av, förståelse för och användning av idéer och tekniker inom matematik växer fram i sociala och kulturella situationer. I klassrummet sker hela tiden ett samspel elever sinsemellan och mellan elever och läraren. Även förväntningar och värderingar har en påverkan på vilken matematik som lärs in, hur den lärs in och hur den förstås (Lester 1996).

De fem kategorierna har en inbördes påverkan och överlappar varandra. Det kan enligt Lester (1996) vara en av orsakerna till att problemlösning är svårt för eleverna.

4.3 Strategier för problemlösning

Ett ord som förekommer i styrdokumenten i samband med problemlösning är strategier. En strategi är enligt SAOL (2006) samma sak som ett välplanerat tillvägagångssätt och det är också den definitionen Skolverket (2011) använder i sitt kommentarmaterial till kursplanen. Trots att kursplanen framför att strategier för problemlösning är något som eleverna ska få tillfälle att utveckla så beskriver varken kursplanen eller kommentarmaterialet vilka dessa strategier kan vara. Det finns dock forskning (bland annat Pólya 1945; Lester 1996) som listar och beskriver olika typer av problemlösningsstrategier. Följande är Lesters lista på strategier som enligt honom bör ingå i undervisningen:

- välj en eller flera operationer att arbeta med
- rita en bild
- gör en lista
- skriv upp en ekvation
- dramatisera situationen
- gör en tabell eller ett diagram
- gissa och pröva
- arbeta baklänges
- lös ett enklare problem
- använd laborativa material eller modeller (Lester 1996)

Lester (1996) påstår att elever ofta bara får undervisning om en strategi, den att välja en eller flera operationer och sedan göra beräkningarna. Detta påverkar elevernas möjligheter att lösa problem.

Lester (1996) redogör också för vad undervisning som ska utveckla strategier för problemlösning bör innehålla. Han delar in undervisningen i två faser. I den första fasen lär sig eleverna de olika strategierna och de tekniker som hör till respektive strategi. Därefter får eleverna öva på strategin genom att lösa problem. Den andra fasen går ut på att eleverna löser problem där det inte är givet vilken strategi som ska användas. Lester (1996) betonar vikten av båda faserna i undervisningen och drar paralleller till hur en pianist inte enbart lär sig spela genom att spela efter noter, utan behöver även behärska speciella färdigheter och tekniker.

Pólya (1945) tar upp heuristik och heuristisk metod i sin bok How to solve it. Enligt SAOL (2006) betyder heuristik metodlära. Heuristisk betyder enligt samma ordbok att vinna kunskap steg för steg genom egen tankeverksamhet. I Pólyas bok finns ett ”Heuristiskt lexikon” där en mängd olika strategier för problemlösning finns beskrivna. Där finns också frågor som problemlösaren kan ställa vid arbete med problemlösning. Pólya (1945) m.fl. betonar vikten av att läraren ställer rätt typ av frågor när han eller hon hjälper en elev. För mycket hjälp eller fel sorts frågor kan stjäla elevens tillfälle till att själv göra en matematisk upptäckt. Genom att läraren ställer frågor som Vad är det som efterfrågas?, Vad är givet?, Har du sett det förr?, Kan du lösa delar av problemet?, finns en möjlighet att eleven själv ställer sig samma frågor nästa gång han eller hon fastnar i ett problem (Pólya 1945).

4.4 Varför ska elever lösa problem?

Pólya (1945) menar att matematikens huvudsyfte är att lösa problem. En matematiker bör vara en god problemlösare och enligt Pólya kännetecknar en god problemlösare förmågan att kunna se tillbaka på sina gamla lösningar, förstå lösningen, samt att sedan kunna formulera likartade problem och även lösa dem.

Schoenfeld (1992, 1994) pratar mycket om meningsskapande (sense making) och att göra matematik (doing mathematics). Han menar att problemlösning är viktigt eftersom elever ofta har föreställningar om matematik som till exempel: att matematiska problem endast har ett korrekt svar, att det endast finns ett korrekt sätt att lösa matematiska problem på – då oftast det sättet som läraren har demonstrerat innan, att matematik är en individuell aktivitet som utförs av personer i isolation, att skolmatematiken har väldigt lite eller ingenting alls att göra med verkligheten, etc. Som exempel ger Schoenfeld en uppgift från ett nationellt prov där 1128 personer ska transporteras i bussar som rymmer 36 personer vardera och man ska beräkna hur många bussar som behövs. Upp emot 29% av eleverna hade svarat att det behövs ”31 med 12 i rest” antal bussar. Schoenfelds teori är att dessa elever inte kopplar problemet till verkligheten utan ser endast texten som kontext till det aritmetiska problem som finns undangömt bland orden. Elevens uppfattning om matematik är att man utför beräkningen och skriver ner svaret, punkt slut. Det spelar ingen roll ifall svaret inte är rimligt (Schoenfeld 1994). Schoenfeld (a.a.) ser matematiken som en väldigt levande vetenskap i ständig utveckling som går ut på att hitta mönster. Däremot framställs och uppfattas den ofta som en död disciplin där ämnets regler och modeller ska memoreras. Schoenfeld håller i egna problemlösningskurser på University of California. Där låter han klasserna fungera som små vetenskapliga samfund som gemensamt utvidgar klassens kunskapsbas. Detta gör han genom att låta klassen jobba med relevanta problem som öppnar för många diskussioner. Schoenfeld själv tar rollen som den som ifrågasätter allt, felaktiga men också korrekta idéer. Studenterna kan inte vända sig till honom för att få bekräftelse eller de korrekta lösningarna. De uppmuntras istället att vända sig till sina klasskamrater då han litar på att klassen gemensamt besitter tillräckliga kunskaper för att kunna bekräfta om en lösning är korrekt eller felaktig. Han betonar vikten av bevis, då det är ett sätt att få studenterna att tänka, kommunicera och skapa mening (a.a.).

Boaler (1998) har i sin studie jämfört två skolor i England med helt olika synsätt på matematikundervisning. Den ena skolan använde en klassisk lärobokscentrerad undervisning och den andra använde en projektbaserad undervisning där eleverna enbart arbetade med öppna problem. Resultaten av undersökningen visade att eleverna på skolan som använde läroboken utvecklade så kallad procedurell kunskap. När de löste uppgifter sökte de efter någon vink eller ledtråd som skulle hjälpa dem att välja rätt procedur eller metod. Läroböckerna är ofta designade på det viset att ”rätt” procedur eller metod kan hittas i det kapitel eller avsnitt som uppgiften ligger under. Eleverna hade dock större problem att applicera sina förvärvade kunskaper utanför arbetet i läroboken. De elever som gick i skolan som enbart arbetade med öppna problem var i jämförelsen bättre på att lösa både öppna och stängda uppgifter. Procedurerna som eleverna lärde sig blev mer som anpassningsbara verktyg som eleverna kunde använda sig av även i andra sammanhang. Attityden till matematik var även generellt mer positiv hos de eleverna som arbetade med öppna problem (Boaler 1998).

Romberg (1994) menar att skolmatematiken fokuserar på att träna färdigheter, oavsett om de kommer användas eller inte. Eleverna lär sig inga strategier och får aldrig ”spela spelet”. Han drar paralleller till en musiker eller basketspelare som tränar upp sina färdigheter med målet att bli bättre på att spela musik eller spela basket. Att lösa problem är matematikerns sätt att framträda eller spela match och därför bör matematikundervisningen ha en balans mellan att träna upp sina färdigheter och att lösa problem, menar Romberg (a.a.).

Enligt Lester (1996) finns det fyra grundläggande principer som är viktiga för utvecklingen av problemlösningsförmågan:

- Elever måste lösa många problem för att förbättra sin problemlösningsförmåga.
- Problemlösningsförmågan utvecklas långsamt och under en lång tid.
- Eleven måste tro på att deras lärare tycker att problemlösning är betydelsefullt för att de ska ta till sig undervisningen.
- De flesta elever tjänar på systematisk undervisning i problemlösning. (Lester 1996)

Lester betonar framförallt vikten av punkt nummer tre. Läraren behöver visa intresse för problemlösning och engagera sig i elevernas utveckling.

Taflin (2007) refererar till forskning som menar att det är direkt nödvändigt att ha matematikundervisning som är problemlösningsinriktad. Att arbeta med problemlösning utvecklar det egna tänkandet och själva problemlösningsprocessen blir ett lärande i sig. Vidare refererar hon till en jämförande studie där forskare tittat på amerikanska och japanska elever i år 4. Den japanska utbildningen är känd för att vara problemlösningsbaserad. Studien visade att 96% av de japanska eleverna svarade rätt på uppgifterna jämfört med 66% hos de amerikanska och de japanska eleverna använde mer avancerade lösningsmetoder och ett mer formellt matematiskt språk.

Taflin (2007) har i sin avhandling studerat vilka matematiska idéer som lärare och elever använder sig av när de arbetar med problemlösning samt vilka tillfällen till lärande som problemlösning öppnar upp för. Baserat på forskning och egna erfarenheter har hon formulerat sju kriterier för något som kallas ”rika problem”. Kriterierna är:

- Problemet ska introducera till matematiska idéer.
- Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
- Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
- Problemet ska kunna lösas med flera olika matematiska idéer.
- Problemet ska kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika matematiska idéer och representationer.
- Problemet ska kunna fungera som brobyggare mellan olika matematiska områden.
- Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem. (Taflin 2007, s. 98)

Dessa kriterier har Taflin sedan använt för att ta fram relevanta problem till sin forskning.

Matematiska idéer definierar Taflin (2007) i sin studie som begrepp och procedurer, konventioner, formler och strategier. Andra forskare använder bredare definitioner av matematiska idéer. Taflin har gjort den avgränsade definitionen av matematiska idéer för att lättare kunna mäta dem i empiriska undersökningar.

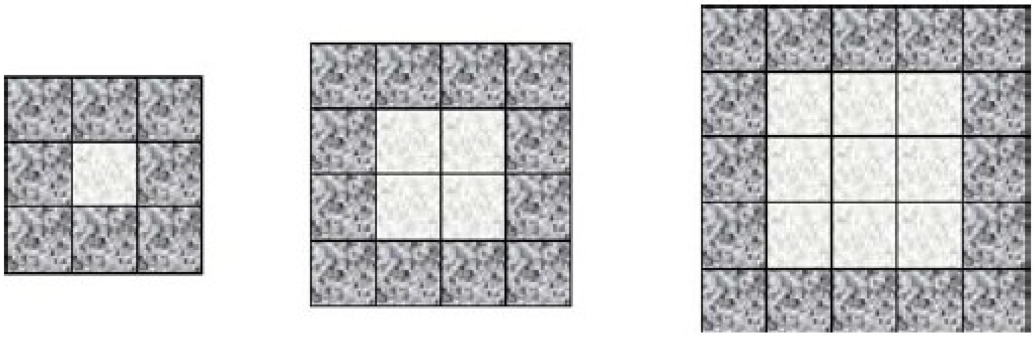
Att använda problemlösning i undervisningen utvecklar inte enbart elevernas logiska tänkande. Det ger även kontext till matematiken, eleverna får möjlighet att tillämpa sina kunskaper i ovana situationer samt konstruera sina egna matematiska idéer (Taflin 2007).

Följande problem är hämtat ur Taflins (2007) avhandling.

Stenplattor

Ett mönster läggs med hjälp av kvadratiska stenplattor, mörka och ljusa.

Så här ser mönstret ut:



figur 1 figur 2 figur 3

a) Hur många plattor går det åt till figur 5?
Hur många av dem är ljusa och hur många är mörka?
b) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur 15?
c) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur 100?
d) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur *n*?
e) Skapa ett liknande problem. Lös det.

Problemet ingick i en större studie som kallades RIMA (Rika problem i matematikundervisningen) där fyra klasser följdes under år 7-9. Klasserna fick kontinuerligt jobba med rika problem likt ovanstående. Studien visade att en mängd matematiska idéer användes, bland annat strategier som att klippa, rita, göra en tabell, etc., begrepp som area och procedurer som addition och multiplikation vid beräkning av areor.

I Taflins (2007) studie upptäckte hon att elever ofta kommer fram till specifika matematiska idéer när de talar sinsemellan men också vid samtal med läraren eller då de hör läraren prata med en annan elev. Taflin refererar i sin studie till den ryska psykologen, pedagogen och filosofen Vygotsky och hans teori om den närmaste proximala utvecklingszonen. Teorin går i stora drag ut på att det finns en skillnad mellan vad en elev kan lära sig själv och med hjälp av andra. Den skillnaden kallar Vygotsky för den närmaste proximala utvecklingszonen, en zon där elever är särskilt öppna för lärande. Vygotskys kunskapssyn är sociokulturell, det vill säga elever bygger upp kunskap genom att ta in intryck från omgivningen för att sedan göra egna tolkningar av intrycken. Taflin (2007) drar paralleller mellan Vygotskys teorier och problemlösande aktiviteter med rika problem. Eleverna jobbar fokuserat med att lösa problemet enligt den matematiska kunskap och de matematiska idéer de själv besitter. Med hjälp av intryck från läraren eller från klasskamrater får eleven nya matematiska idéer att processa. De nya idéerna tolkas och byggs ihop med elevens tidigare kunskaper och idéer, vilket leder till lärande.

I Skolverkets fortbildningsprojekt Matematiklyftet finns problemlösning med som en av modulerna där lärare kan hitta didaktiskt stödmaterial och inspiration för skolutveckling.

Modulen om problemlösning tar upp hur lärare kan utforma sin undervisning så att lärandet sker genom problemlösning. En problemlösningslektion kan enligt Skolverket delas in i fyra faser: introduktion, enskilt arbete, arbete och diskussioner i smågrupper/par och sist klassdiskussion. Under introduktionen är det viktigt att alla elever har förstått problemet och vet vad de ska göra. Sedan följer en fas där varje elev först får tänka igenom problemet på egen hand och kanske börja spåna på en lösning. Detta är viktigt för att alla elever ska få möjlighet att bidra till de gemensamma diskussionerna och lösningarna. I nästa fas arbetar eleverna i små grupper eller parvis med att diskutera problemet och ta fram gemensamma lösningar. Till sist avslutas lektionen med en klassdiskussion där elevernas lösningar lyfts fram och diskuteras gemensamt i hela klassen. För att få till givande helklassdiskussioner rekommenderar Skolverket en modell i fem steg som kan användas som stöd för att planera och genomföra helklassdiskussioner. Steg ett är att försöka förutse vilka möjliga lösningar som klassen troligtvis kommer att komma fram till. I steg två gäller det att läraren går runt och överblickar elevernas arbete för att få en känsla för vilka lösningar som växer fram. Steg tre handlar om att välja ut ett antal lösningar som ska presenteras för hela klassen. I steg fyra ska de utvalda lösningarna ordnas efter kvalitet så att en röd tråd på ett lättare sätt kan urskiljas. Till sist, i steg fem, handlar det om att koppla ihop de olika lösningarna för att visa att ett och samma problem kan lösas på många olika sätt. Även eventuella felaktiga lösningar kan diskuteras i helklass (Skolverket 2014).

4.5 Diskussion

När man läser artiklar om problemlösning börjar författaren ofta med att definiera vad problemlösning är. Ibland går de till och med tillbaka till och diskuterar vad matematik är, och vad matematiker gör. Många forskare (bl.a. Polya 1945; Schoenfeld 1992; Lester 1996) pekar på att själva kärnan i matematiken ligger i att lösa problem, och att det matematiker sysslar med, är att lösa problem. Därför borde skolmatematiken också kretsa kring problemlösning, menar de. Frågan är hur man ska jobba med det. Taflin (2007) diskuterar skillnaderna mellan matematikundervisning för problemlösning, matematikundervisning om problemlösning och matematikundervisning via problemlösning. Med synsättet matematikundervisningen för problemlösning kretsar undervisningen kring att eleverna ska lära sig matematik med målet att de ska kunna lösa problem. Eleverna måste då kunna transferera den förvärvade kunskapen till andra kontexter. Den här synen på matematikundervisning presenterades i läroplaner fram till Lgr-69. Matematikundervisning om problemlösning handlar om att lära sig strategier för att kunna lösa problem. Olika modeller lärs ut som om de vore metoder. Matematikundervisning via problemlösning handlar om att lära sig matematik med problemet som utgångspunkt. Problemen kan användas som introduktion till vissa matematiska områden. Eleverna utgår från en konkret situation och ska därefter matematisera situationen till en symbolisk representation, en matematisk modell. Detta ska leda till att de upptäcker matematiska samband och lär sig att resonera och argumentera för sin lösningsmetod. Problemlösning beskrevs på det här sättet redan i Lpo-94, enligt Taflin (a.a.). Jag gick själv på mellanstadiet när Lpo-94 släpptes och upplevde inte att problemlösning användes på det sättet, för att introducera nya områden. Snarare var det något som slängdes in som extraövningar ifall man var klar med kapitlet i läroboken. Under min praktikperiod föreslog jag att vi skulle prova att inleda ett nytt område med något passande problem. Men läraren var orolig för att eleverna inte skulle klara av att lösa problemet pga. att de inte hade rätt verktyg. Under mina praktikperioder har jag följt minst sex olika matematiklärare, och endast en gång har jag sett att problem används för att introducera ett nytt område. Den gången använde vi burkar och snören för att undersöka kopplingen mellan cirkelns diameter och omkrets. Övningen var tagen från läroboken. Annars var det kutym att introducera ett nytt område med en eller flera genomgångar och problemlösning användes som extraövningar eller under 'problemlösningsfredag'. Även Taflin (2007) beskriver att det är så problemlösning används av många lärare. Ifall det som Taflin (2007) skriver stämmer, att kursplanen beskriver att undervisningen ska bedrivas *via* problemlösning, då verkar det som att lärarna inte har förstått det. Och inte enbart lärarna, även läroboksförfattarna. Alla läroböcker jag bläddrat i har introducerat nya områden genom att först gå igenom relevanta begrepp och metoder, för att sedan komma in på övningsuppgifter och sist problem. Av det jag sett och hört är mycket av matematikundervisningen också väldigt lärobokscentrerad. Boalers (1998) studie visade på goda effekter av att använda projektbaserad undervisning med större öppna problem i motsats till den traditionella lärobokscentrerade undervisningen. Schoenfeld (1992) menar att det finns ett mervärde i att låta elever upptäcka saker själv. En elev som exempelvis på egen hand upptäcker en matematisk regel kommer på ett helt annat sätt förstå var regeln kommer ifrån, jämfört med ifall regeln bara hade memorerats från läroboken. Boalers (1998) studie visade också att de elever som hade en lärobokscentrerad undervisning var av uppfattningen att matematiken till stora delar gick ut på att memorera saker.

Man kan tänka sig att förändringar tar några år att genomföra. Men när vi sitter här, 20 år senare, med en undervisning som ser mer eller mindre likadan ut nu som den gjorde då jag själv gick i högstadiet. Ja, då känns det som att Skolverket har haft svårt att förmedla hur de vill att lärarna ska arbeta med problemlösning. Kilpatrick (2009) diskuterar just problemet med förändringar i kursplanen. Den avsedda kursplanen går inte direkt från kursplansförfattarna, via lärarna, till eleverna. Både lärarna och eleverna gör egna tolkningar av kursplanen. I praktiken blir det avsedda i kursplanen inte alltid samma som det som implementeras av lärarna och det som implementeras av lärarna blir inte alltid samma som det eleverna i slutändan lär sig. Han diskuterar även vikten av att få med lärarna i förändringsarbetet. Ifall lärarna inte förstår förändringarna, finns risken att de agerar utefter sin egen tolkning.

Man kan också ifrågasätta varför Skolverket valde att lyfta ut problemlösning som ett eget centralt innehåll i kursplanen. Deras egen analys av uppgifterna i PISA och ämnesprovet visar att en uppgift aldrig enbart kan klassas som problemlösning, det kopplas alltid ihop med något annat innehåll (Skolverket 2015). Då känns det konstigt att problemlösning har en egen rubrik under det centrala innehållet, istället för att vara mer integrerat bland det andra innehållet som i exempelvis den finska kursplanen. Det faktum att Lgr 11 beskriver problemlösning både som en förmåga och ett centralt innehåll kan skapa förvirring. Om man ser det centrala innehållet i kursplanen som en lista på stoff som ska behandlas under utbildningen. Då blir det undervisning *om* problemlösning istället för undervisning *via* problemlösning. Kanske är det därför lärare ofta lyfter ut problemlösning ur sitt sammanhang. Under mina praktikperioder såg jag ofta elever som fick arbeta med problem som inte hade någon koppling till området de arbetade med.

Både Taflin (2007) och Lester (1996) är inne på att problemlösning kräver mycket av läraren. Det krävs bland annat goda förberedelser för att läraren ska vara någorlunda förberedd på olika lösningsförlag från eleverna. Läraren behöver dessutom vara kvicktänkt när eleverna framför en lösning som läraren själv inte tänkt på. Jag tror att det är just ovissheten runt problemlösningsaktiviteter som är anledningen till att fler lärare inte använder sådana upplägg oftare. Det kan kännas otryggt för läraren att inte veta exakt vad som kommer hända under lektionen. Kanske väljer läraren då ett lektionsupplägg som han eller hon känner sig trygg med. Även eleverna kan behöva en tid för omställning ifall de är vana vid ett visst typ av arbetssätt. Där tänker jag mig att läraren behöver vara extra tydlig med instruktioner och motivera varför klassen ska arbeta med problemlösning.

I diskussionen till det förra avsnittet skrev jag att lärare i den svenska grundskolan har ganska lite tid till förberedelser och självstudier. Detta påverkar lärarnas möjligheter att utveckla det som Ma (1999) kallar för djup förståelse för grundläggande matematik. Problemlösningsaktiviteter är inte enbart en utmaning för eleverna, utan även för lärarna, vilket skulle kunna betyda att de också är mer utvecklande för lärare än aktiviteter som lärarna redan känner sig trygga med. Jahnke (2014) diskuterar i sin avhandling ”oron för det oförutsedda och människans okunskap” (Jahnke 2014, s. 300). Hon grundar sina teorier i två missuppfattningar från upplysningstidens ideal, som kan sammanfattas av René Descartes välkända sats ”jag tänker, alltså är jag till”. Ifall man inte klara av att tänka, och därmed är ”okunnig”, finns man då lite mindre som människa, är man mindre värd, frågar sig Jahnke. Okunnighet kan ge känslan av att man är mindre värd som människa. Att påpeka brister hos andra, menar Jahnke vara samma sak som säga att den personen är mindre värd. ”Att blotta sin egen okunskap innebär att säga att jag själv är mindre värd” (Jahnke 2014, s. 300). Jag tror att det ligger mycket i det som Jahnke skriver. Människor, och speciellt lärare, är nog väldigt oroliga för att visa sin okunskap. Det har åtminstone jag själv känt, då jag varit ute på praktik. Man vill kunna svara på alla frågor som eleverna ställer. Ifall jag inte kunde svara på en fråga direkt, kunde jag få skamkänslor. Jahnke (2014) kommer in på den andra missuppfattningen om Descartes. ”Tankarna bestod ju inte av tydliga och färdiga slutsatser, utan handlade om tvivel, misstag och okunskap” (Jahnke 2014, ss. 300-301). Descartes ska ha uttryckt att han tänkt fel lika ofta som någon annan. Han lärde sig genom att undersöka och reflektera över sina fel, inte genom att undvika dem.

Vidare diskuterar Jahnke (2014) att oron för det oförutsedda kan bero på att ”vi i för hög grad formulerar oss i termer av mål i skolan” (Jahnke 2014, s. 303). Hon refererar till bland annat Dewey som hävdade att vi ofta ser växandet som något som har ett mål, istället för att låta växandet vara ett mål i sig, vilket leder till en fruktan för det ovissa och okända. Även Aristoteles skilde på handlingar med bestämda mål (poiesis) och handlingar där handlingen i sig är målet (praxis). För att komma tillbaka till läro- och kursplanerna så känns det som att Skolverket velat förändra synen på utbildning till att just se växandet som målet i Lgr 11. Detta kan man se i hur kunskapskraven är formulerade. Inga fasta kunskapsmål finns beskrivna utan eleverna bedöms nu enbart efter olika förmågor. Det ger bilden av att själva utbildningen ska vara målet. Där förmågorna kontinuerligt ska kunna utvecklas, inte enbart inom skolans ramar utan hela livet igenom, ett livslångt lärande. I praktiken tror jag dock att kunskapskraven i Lgr 11 ter sig som kunskapsmål, eftersom det är dem eleverna bedöms efter.

5 Slutsats

Matematikuppgifterna i PISA-proven testar elevers förmåga att lösa matematiska problem i verklighetsbaserade kontexter. Varje uppgift innehåller information i form av text och eventuellt en figur eller ett diagram. Informationen måste först tolkas och matematiseras, innan beräkningar kan utföras. Svaret måste sedan tolkas tillbaka till det ursprungliga problemet. Många matematikforskare menar att problemlösning är själva meningen med matematik, att man lär sig matematik för att i slutändan kunna lösa problem.

Ser man på kursplanen Lgr 11 så finns problemlösning med där och man får uppfattningen av att Skolverket tycker att det är viktigt. Problemlösning har fått en större roll bland det centrala innehållet i kursplanen jämfört med Lpo 94. Däremot får man inte riktigt grepp om hur Skolverket vill att lärarna och eleverna ska arbeta med problemlösning. Jämför man med Finland och Kina så är problemlösning mer integrerat bland det övriga innehållet. Man ser klara och konkreta linjer på hur de vill arbeta med problemlösning i de finska och kinesiska skolorna.

Beskrivet i forskningen och av egen erfarenhet används problemlösning ofta som extrauppgifter i undervisningen. Under mina praktikperioder har jag fått uppfattningen att det fortfarande är väldigt vanligt att eleverna sitter och räknar i läroböckerna för sig själv. Forskning visar på att elever som enbart arbetar i läroböcker utvecklar procedurell kunskap som inte är särskilt anpassningsbar. Detta kan påverka elevernas möjligheter att prestera bra på mer öppna och kontextuella uppgifter där det gäller att välja rätt metod eller modell, som exempelvis uppgifterna i PISA.

Genom att skriva det här arbetet har jag lärt mig att elever kan lära sig mycket genom att arbeta med problemlösning. Alla förmågor kan kopplas till arbetet med problemlösning. Det är viktigt att hitta problem som är relevanta till det område man arbetar med och som kan knyta an till olika områden inom matematiken. Att arbeta med problemlösning ger även eleverna tillfälle att öva på alla förmågor, utöver problemlösningsförmågan. När jag börjar arbeta kommer jag försöka hitta en god balans mellan olika former av lektionsupplägg, där välplanerade problemlösningslektioner är ett återkommande inslag. Jag tycker att det är viktigt att variera undervisningen då alla elever lär sig på olika sätt.

5.1 Vidare forskning

Att undersöka kursplaner förtäljer endast en liten bit av hur det egentligen ser ut i klassrummen. Därför hade det varit intressant att titta närmare på hur själva undervisningen ser ut i de olika länderna.

En annan intressant fråga som jag inte haft utrymme att titta på inom ramarna för det här arbetet är hur lärare ser på problemlösning samt deras tolkning av kursplanens sätt att beskriva problemlösning. Det hade också varit intressant att titta på hur lärarna lägger upp en problemlösningslektion, men även att höra med eleverna om hur de upplever arbetssättet.

6 Referenslista

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(1), ss. 41-62.

Henriksson, W. (2010). Kunskapsprövningar i klassrummet – att bedöma elever. I Lundgren, U. P., Säljö, R. & Liberg, C. (red.) *Lärande skola bildning.* Stockholm: Natur & Kultur, ss. 295-337.

Holm, S. (2012). Vad gör man i PISA egentligen? *Qvintensen,* (2), ss. 13-14.

Jahnke, A. (2014). *Insegel till dialog. Skolans matematikutbildning – en studie i fyra praktiker*. Diss. Bodö: Universitetet i Nordland.

Kilpatrick, J. (2009). The mathematics teacher and curriculum change. *PNA, 3*(3), ss. 107-121.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (red.) *Nämnaren Tema: Matematik – ett kommunikationsämne.* Göteborg: NCM Göteborgs Universitet. ss. 85-91.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* New York: Routledge.

Ministry of Education (2004). *Mathematics Curriculum Standards.* http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/kinagrund.pdf

Niss, M. & Jensen, T. H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematikläring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Köpenhamn: Undervisningsministeriet.

The Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) (2012). *PISA 2009 Technical Report*. Paris: OECD Headquarters.

OECD (2013). *PISA 2012 Results: Ready to learn. Students' engagement, drive and self-beliefs. Volume III.* Paris: OECD Headquarters.

OECD (2015). *PISA FAQ*. Paris: OECD Headquarters. http://www.oecd.org/pisa/pisafaq/

Pólya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method.* Harmondsworth: Penguin Books.

Romberg, T. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving: connections between theory and practice. I Schoenfeld, A. H. (red.) *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, N.J: Erlbaum. ss. 287-301.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I Grouws, D. (red.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* NewYork: Macmillan. ss. 334-370.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. I Schoenfeld, A. H. (red.) *Mathematical thinking and problem solving.* Hillsdale, N.J: Erlbaum. ss. 53-68.

Sjøberg, S. (2012). PISA: Politics, fundamental problems and intriguing results. *La Revue, Recherches en Education*, (14).

Skolverket (2005). *Uppgifter i matematik i PISA 2003* (Rapport 2004:254). Stockholm: Skolverkets huvudkontor.

Skolverket (2006). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet Lpo 94.* Stockholm: Skolverkets huvudkontor.

Skolverket (2008). *Grundskolan – kursplaner och betygskriterier.* Stockholm: Skolverkets huvudkontor.

Skolverket (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverkets huvudkontor.

Skolverket (2011b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik.* Stockholm: Skolverkets huvudkontor.

Skolverket (2012). *Frisläppta uppgifter matematik PISA 2012.* Stockholm: Skolverkets huvudkontor. http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.211234!/Menu/article/attachment/matematikuppgifter_2012.pdf

Skolverket (2013). *PISA 2012 – 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap* (Rapport 2013:398). Stockholm: Skolverkets huvudkontor.

Skolverket (2014). *Lärportalen för matematik – Problemlösning.* Stockholm: Skolverkets huvudkontor. https://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/faces/training/ak7-9/newlink843?_adf.ctrl-state=9f69g7ny7_4&_afrLoop=3619423361384976

Svenska Akademien (2006). *Svenska Akademiens ordlista över svenska språket.* Stockholm: Norstedts.

Svensson, G. (2002). Matematik och språk. *Nämnaren,* (3), ss. 13-17.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Diss. Umeå: Umeå Universitet.

Utbildningsstyrelsen (2004). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen 2004.* Vammala: Vammalan kirjapaino.

Välijärvi, J., Linnakylä, P., Kupari, P., Reinikainen, P. & Arffman, I. (2002). *The Finnish Success in PISA—And Some Reasons behind It: PISA 2000.* Jyväskylä: Inst. for Educational Research.