GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematikundervisning i utveckling

En litteraturstudie om dynamisk geometri och förslag på tillämpningar

Cecilia Hällsten

Examensarbete i matematik för lärare, MMGL99, VT15.

Handledare: Ulf Persson

Examinator: Johanna Pejlare

Rapportnummer: VT15-3001-008-MMGL99

Abstrakt

Titel: Matematikundervisning i utveckling – En litteraturstudie om dynamisk geometri och förslag på tillämpningar

Författare: Cecilia Hällsten

Termin och år: VT 2015

Kursansvarig institution: Matematiska vetenskaper

Handledare: Ulf Persson

Examinator: Johanna Pejlare

Rapportnummer: VT15-3001-008-MMGL99

Nyckelord: IKT, digitala redskap, matematik, dynamisk geometri, laborativ undervisning, gymnasieskolan, grundskolan, matematikdidaktik, kognitiva förmågor

Sammanfattning
Arbetet grundar sig i vad geometri innebär och vad undervisningen i skolan ska ge eleverna möjlighet att utveckla inom området. Syftet med uppsatsen är att undersöka utifrån ett sociokulturellt perspektiv om datorer används i matematikundervisningen, hur användningen av digital programvara påverkar matematikundervisningen samt utgöra om digitala verktyg behövs för att illustrera dynamisk geometri. Uppsatsen är en kvalitativ litteraturstudie.

Resultatet tyder på att datorer aldrig eller sällan används i matematikundervisningen utan används främst i andra ämnen för informationsökning och att skriva med. Matematikundervisningen påpekas som bristfällig där eleverna lotsas genom läroböckerna och det finns utrymme för förändring där analytiska förmågor tränas. Användningsfrekvensen kan bero på brister i lärarutbildningen som inte ger lärarstudenterna kunskap om hur digitala programvara kan användas som ett medierande verktyg. Tidigare forskning som behandlar dynamisk programvara i undervisningen tyder på att eleverna på ett delaktigt sätt undersöker och laborerar med figurer och dess egenskaper. Den dynamiska programvaran skapar mer utrymme för eleverna att reflektera och analysera uppgifter.

Förord

Anledningen till att denna uppsats behandlar geometri i ett laborativt sammanhang beror på tre faktorer, baserade på mina egna erfarenheter; Först och främst anser jag att under mina år på lärarutbildningen läst få högskolepoäng inom geometri. För det andra beror uppsatsen på att jag under verksamhetsförlagda utbildningstillfällen upplever att den vanligast förekommande undervisningsmetoden utgår ifrån att läraren har en genomgång på tavlan efterföljt av att eleverna arbetar självständigt i den egna boken. Den tredje anledningen grundar sig i att det på universitetet talas mycket om *att* tekniska verktyg bör användas i undervisningen på grundskolor och gymnasiet, men universitetsutbildningen berör väldigt lite *hur* tekniska verktyg kan användas.

Jag hoppas att denna uppsats kan tillföra nya tankar och funderingar, hos kollegor och lärarstudenter, om den dynamiska geometrins roll i verksamheten med fokus på elevers utveckling.

Cecilia Hällsten

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1. Bakgrund

I detta avsnitt behandlas bakgrunden som uppsatsen tar avstamp i. Vidare presenteras arbetets syfte och frågeställningar och avslutningsvis introduceras dispositionen för resterande delar av arbetet.

1.1 Inledning

> ”Eleverna ska utan kostnad ha tillgång till böcker och andra lärverktyg som behövs för en tidsenlig utbildning…” (Skollagen kap10 §10; Skollagen Kap 15 §17)

Citatet är hämtat från skollagen, där det återfinns dels under grundskolans paragrafer och under avsnittet för gymnasieskolans verksamhet.[1] Den tidsenliga utbildningen beskrivs i läroplanen för grundskolan, där skolan ansvarar för att varje elev ska, efter att ha avslutat grundskolan, kunna använda modern teknik. Eleverna ska ha kunskap om och hur tekniska verktyg kan användas för att kommunicera i olika sammanhang, söka information och kunskap. Eleverna ska även utbildas i hur dessa verktyg används för skapande och som läroverktyg.[2] I gymnasieskolans övergripande mål framhävs vikten av hänsynstagande i relation till elevers olika behov och förutsättningar för att uppnå kursmålen. Även elevers olikheter gällande de olika kunskapsnivåer de befinner sig på ska beaktas, där alla elever ska ges det stöd som de behöver för att utvecklas i största möjliga mån. Undervisningen ska främja elevers kunskapsutveckling utifrån fakta, förståelse, färdighet samt förtrogenhet och ingen av dessa kunskapsformer får exkluderas från undervisningen.[3] Ämnet matematik syftar bland annat till att eleverna ska ges möjligheter att utveckla den egna förmågan att använda digitala verktyg, digital medier och även andra typer av verktyg.[4] I de övergripande målen och riktlinjerna för gymnasieskolan beskriver ett avsnitt med mål om att varje elev ska vilja ta eget ansvar för den egna utbildningen och vilja påverka sin arbetsmiljö. Utgångspunkter för lärare uttrycker att vi ”ska låta eleverna pröva på olika arbetsätt och arbetsformer, och tillsammans med eleverna planera och utvärdera undervisningen.”[5]

År 2008 formulerades ett regeringsuppdrag riktat till Skolverket. Vilket syftar till att Skolverket ska undersöka och utvärdera skolverksamheten för att vidare kunna bedöma om och hur utvecklingsbehovet ter sig gällande information – och kommunikationsteknik (IKT).[6] Resultatrapporten visar på problematiska faktorer som försvårar användandet av IKT, däribland brister inom datorsupport och tillgången på datorer. Skolverket formulerade kommande förändring i de nya styrdokumenten där digital kompetens ska klargöras. Resultatrapporten påpekar att det inom matematiken är ovanligt att eleverna arbetar med datorer under lektionerna.[7] Under 2012 gjorde Skolverket en uppföljning på uppdraget, där

[1] Skollagen (2010:800).
[2] Skolverket**.** *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*.
[3] Skolverket. *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. s. 6-11.
[4] Ibid. s. 63.
[5] Ibid. s. 13.
[6] Regeringsbeslut. *Uppdrag till Statens skolverk att främja användningen av informations- och kommunikationsteknik.*
[7] Skolverket. *Redovisning av uppdraget att bedöma verksamheters och huvudmäns utvecklingsbehov avseende IT-användningen inom förskola, skola och vuxenutbildning samt ge förslag på insatser*.

det framkom att tillgången på datorer för elever och lärare har ökat. Användningsfrekvensen inom matematikundervisningen är fortfarande låg.[8]

Teknikdelegationen gav år 2010 ut en resultatrapport baserat på ett regeringsuppdrag, vilket syftar till att öka intresset för matematik, naturvetenskap, teknik och IKT. I rapporten formuleras problematiken med att den digitala kompetensen aldrig mäts vid internationella provjämförelser i Programme for International Student Assessment (PISA) eller i Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). Analys av de svenska resultaten från TIMSS 2007 pekar på att undervisningen inte uppnår de ämnesspecifika kunskapskraven. Den kontextuella förståelsen hos eleverna framhävs som ett av de största problemen. Teknikdelegationen påpekar att ett av grundproblemen är att lärare främst lotsar eleverna genom läroboken, därmed ges inte eleverna möjligheter att öva på förmågorna att kommunicera och analysera det matematiska innehållet.[9]

1.2 Centrala begrepp

Här presenteras relevanta begrepp. Förklaringarna syftar till att underlätta för läsaren i redogörelsen för geometriavsnittet.

1.1.1 Axiom

Enligt Svenska akademins ordlista (SAOL) är axiom en självklar sats alternativt en obevisad sats i ett tankeresonemang.[10] Axiom utgör förutsättningar som verkar i ett visst sammanhang för att bygga upp teorin.[11]

1.1.2 Postulat

SAOL:s beskrivning av postulat innebär att det är ett obevisat men ändå självklart antagande som inte påverkas av någon vidare sats.[12] Ur ett historiskt perspektiv ansågs postulat och axiom som skilda begrepp, idag används postulat som en synonym till axiom. Idag används främst begreppet axiom inom matematiken.

1.1.3 Parallella räta linjer

Ordet parallell kommer från det grekiska ordet parállēlos vilket i sin tur kommer från de två orden, pará som betyder bredvid och ordet álleloi som betyder varandra. Parallella linjer kan antingen sammanfalla och därmed skära samma punkter i ett koordinatsystem eller så kan linjerna ligga parallellt med varandra och aldrig skära varandra eller samma punkter.

1.1.4 Dynamisk programvara

Dynamisk programvara tillåter användaren att bland annat konstruera figurer, grafer och tabeller. Användaren har möjlighet att laborera med figurerna genom att exempelvis dra i ett hörn för att förstora eller förminska.

---

[8] Skolverket. *It-användning och it-kompetens i skolan*. s. 6-14.
[9] Teknikdelegationen. *Vändpunkt Sverige : ett ökat intresse för matematik, naturvetenskap, teknik och IKT*. s.79-88.
[10] Svenska akademins ordlista, axiom.
[11] Kiselman & Mouwitz. *Matematiktermer för skolan*. s. 123.
[12] Svenska akademins ordlista, postulat.

1.3 Syfte och frågeställningar

Arbetet syftar till att uppdaga hur matematikundervisningen kommer till uttryck i grundskolans senare år och gymnasiet. Arbetet fokuserar på om, hur och varför dynamisk programvara används i matematikundervisningen för att illustrera geometri. Uppsatsen syftar till att besvara frågeställningarna:

- Används datorer i matematikundervisningen?
- Hur påverkar dynamisk programvara matematikundervisningen?
- Behövs digitala verktyg i undervisningen för illustration av dynamisk geometri?

1.4 Disposition

Avsnitt två förklarar metoder som använts i skapandet av detta arbete, arbetets metoder diskuteras samt validitets och reliabilitetsgranskas här. Det tredje avsnittet behandlar den teori som arbetet utgår från, den sociokulturella lärandeteorin samt teorin i relation till undervisning. Det fjärde avsnittet presenteras tidigare forskning fördelat på nationell respektive internationell nivå. Femte avsnittet behandlar geometri, vilket inleds med nedslag i matematikens historia som vidare övergår till den matematik vi använder idag. Här presenteras formler, satser och bevis för vissa geometriska objekt och dess egenskaper. Det sjätte avsnittet presenterar vad kursplanerna uttrycker att eleverna ska ges möjlighet att utveckla gällande geometri. Här förklaras även vad dynamisk geometriundervisning innebär. Sjunde avsnittet sammanför forskning och fakta i en litteraturanalys. Avslutningsvis i det åttonde avsnittet presenteras slutsatser utifrån mina nyvunna erfarenheter samt förslag på tillämpningar, avsnittet avrundas med summerande slutsatser.

2. Metod

I detta avsnitt presenteras de avgränsningar som gjorts under arbetets gång, metoder för val av material och vilken analysmetod som används för uppsatsen. Slutligen diskuteras tillvägagångssättet för uppsatsen och resonemang kring alternativa metoder förs.

2.1 Avgränsningar

Avgränsningar av inriktning på arbetet har gjorts del i form av en inriktning/fördjupning baserat på geometrins område. Under geometriavsnittet har även gallring skett för att i största möjliga mån skala ner arbetet baserat på relevans. Motiveringar till dessa begränsningar har baserats på den tidigare forskning, teoretisk anknytning samt de kursplaner som används i skolverksamheten idag. Alla figurer i arbetet är konstruerade i Geogebra, en medveten avgränsning har gjorts på grund av den tidsmässiga aspekten. Att sätta sig in i flertalet matematiska program hade inte varit genomförbar.

2.2 Materialval

För att finna relevant litteratur har databaser använts, där MathEduc och Education Research Complete med sökorden; teaching, dynamic geometry, geometry, scaffolding. Annan litteratur har hittats med hjälp av handledare och sökningar på Göteborgs universitetsbibliotek respektive Chalmers bibliotek. Sökningar på gamla uppsatser har medfört att jag hittat mer relevant litteratur. Skolverket har nyttjas som rapportdatabas, där Skolverkets egna rapporter och uppdrag gällande skolverksamheten har hittats.

Programmet Geogebra, utgivet av International Geogebra Institute, har använts till att skapa alla figurer i arbetet. Programmet finns att hämta gratis på internet.

2.3 Analysmetod

Uppsatsen är en kvalitativ litteraturanalys som utgår från två strategier, dels att strategiskt ordna vad geometri är, vad dynamisk geometri innebär och vad tidigare forskning resulterat i. Inom denna strategi ingår även redogörelse av den teoretiska anknytningen till arbetet. Den andra delen baseras på att kritisk granska för och nackdelar av innehållet och sammanföra det under resultat.[13] Ett delavsnitt utgår från det egenproducerade material vilket analyseras för tillämpning i matematikundervisningen.

2.4 Metoddiskussion

Avgränsningarna gjordes för att inom tidsramarna hinna färdigställa uppsatsen med så tydlig struktur som möjligt. Stora delar av geometriavsnittet skalades bort för att enbart behålla det som har relevans till det som lyfts under tidigare forskning och dynamisk geometri. Här har stora delar av den grundläggande geometrin slopats eftersom läsaren förväntas ha förståelse för det mest grundläggande.

Jag har konstruerat figurerna i Geogebra för att själv få en djupare förståelse för programmets uppbyggnad och användningsområden. Anledningen till att jag valde Geogebra beror på att programmet i sig är användarvänligt vid introduktion till elever utan förkunskaper inom matematiska datorprogram. Geogebra är ett kostnadsfritt program som kan användas online

[13] Esaiasson et al. *Metodpraktikan*. s. 211.

eller laddas hem. Vilket medför att programmet alltid kan nyttjas i skolverksamheten, som ska vara kostnadsfri. Andra program som kan användas är exempelvis Mathematica och Maple för att konstruera geometriska figurer. Dessa datorprogram kräver mer matematisk förståelse samt grundläggande kunskaper inom programmering. Validiteten och reliabilitet tillgodoses genom aktuell litteratur samt granskning av flertalet källor som presenterar likadant innehåll. Reliabiliteten kan diskuteras i förhållande till utförandet, där tillförlitligheten till arbetet hade höjts med en analys mellan olika dynamiska programvaror i kombination med en verksamhetsundersökning.

3. Teoretisk anknytning

I kommande avsnitt presenteras arbetets teoretiska anknytning. Inledningsvis introduceras den sociokulturella lärandeteorins grundtankar för individutveckling. Vidare introduceras läsaren för hur den sociokulturella lärandeteorin kommer till uttryck i dagens matematikundervisning.

3.1 Sociokulturell lärandeteori.

I antologin Boken om pedagogerna förklarar Säljö psykologen Vygotskijs centrala utgångspunkter gällande den sociokulturella lärandeteorin som baseras på det sociala samspelet mellan människor. Den sociokulturella lärandeteorin är inte en mognadsteori. Klassiska mognadsteorier utgår från att elever befinner sig på olika utvecklingsstadier och om en elev som undervisas men inte är mogen att ta till sig kunskapen, spelar det ingen roll vad dennes lärare gör. Eleven kommer inte att kunna ta till sig kunskapen förens den egna mognade har utvecklats. Den sociokulturella lärandeteorin ser lärares handlingar som betydelsefulla för elevers utveckling, vilket inte är låsta utifrån olika stadier.[14]

Vygotskij talar om att det finns fysiska och psykologiska redskap. De fysiska utgörs av artefakter som vi skapat, mängden artefakter som vi människor omger oss av tenderar att öka ju längre fram i historien vi kommer. Där den sociokulturella utvecklingen har medfört nya och förbättrade verktyg anpassade till behoven i samhället. Inom den sociokulturella teorin påverkar detta vår utveckling och inlärning. Det viktigaste psykologiska redskapet är språket, vilket människan använder för att bli delaktig och delta i det sociala samspelet och verkar som länkar mellan samhället och individen men även som länk mellan den inre och yttre människan. Språket skapar möjligheter för människan att förstå och interagera med sin omvärld.[15] Det är med hjälp av språket som små barn inledningsvis blir delaktiga med omgivningen och i det sociokulturella samspelet. Enligt Vygotskij är skolan den plats som elever ges möjligheten att komma i kontakt med de delar av samhället som de annars inte möter i vardagen. Till exempel kan smala begrepp breddas utifrån det kommunikativa mötet med andras uppfattningar.[16]

Säljö skriver om Vygotskijs fundamentala tankar gällande barns utveckling i samspelet med andra, där människan konstant befinner sig i ett utvecklingsstadium. När vi tar till oss nya kunskaper i samspelet och gör kunskapen till vår egen benämns ofta som appropriering. När en människa utvecklar den egna kunskapen utgår individen ifrån det hon redan kan och vet när hon tar till sig nya kunskaper och approprierar dessa. Vygotskij förklarade utvecklingen hos människan genom olika zoner; Den zon som individen befinner sig i här och nu vad gällande kunskap och kompetens. En zon som berör framtida kompetens, vilket är kunskap som kan uppnås med hjälp av stöd. Mellan dessa två zoner finns den proximala utvecklingszonen, vilken beskrivs som avståndet till nyförvärvad kunskap. Vilket baseras på det individen kan klara på egen hand, utan stöd från andra och vad individen kan klara med

[14] Forsell. *Boken om pedagogerna*. s. 165.
[15] Forsell. *Boken om pedagogerna*. s.163f.
[16] Forsell. *Boken om pedagogerna*. s.168ff.

hjälp av stöd från mer kompetenta människor. När individen klara av att utföra uppgiften på egen hand innebär det at individen approprierat kunskapen till sin egen.[17]

3.2 Sociokulturellt lärande teori i undervisningen

Roger Säljö beskriver, i boken *Lärande i praktiken*, hur inlärningen sker utifrån ett sociokulturellt perspektiv. Enligt Roger Säljö befinner sig idag skolverksamheten i ett förändringsskede, där den traditionella lärarcentrerade undervisningen successivt förlorar sin ställning. Istället tar undervisning med tekniska verktyg som pedagogiskt redskap upp utrymme i undervisningen. Säljö belyser att de redskap som tillkommer i människors vardag även påverkar vår relation till omvärlden. I och med att redskap tillkommer medför detta att kraven på vad vi ska förstå, och kunna använda, hela tiden höjs. Den traditionella undervisningsmetoden handlade övergripande om att eleverna delgavs information vilket har övergått till att eleverna ska skapa praktiska erfarenheter utifrån kunskaper, kunskaper som ska vara användbara för dem i framtiden.[18] Vidare skriver Säljö om påverkan av nya redskap i samhället. En diskussion som präglats av en part som tror på stora pedagogiska omställningar och framsteg med hjälp av redskap och en annan part som glorifierade redskap vilket hotar de mänskliga lärformerna vilka utmärks av tyst kunskap, instinkt och mänsklig känsla. Utifrån det sociokulturella perspektivet handlar alltmer om att kunna behärska och känna förtrogenhet med artefakter i vardagen.[19]

[17] Säljö. *Lärande i praktiken*. s. 248.
[18] Säljö. *Lärande i praktiken*. s. 239f.
[19] Säljö. *Lärande i praktiken*. s. 248.

4. Tidigare forskning

I detta avsnitt presenteras den tidigare forskning som relaterar till arbetets syfte. Inledningsvis presenteras nationell forskning, därefter kommer den internationella forskningen presenteras.

4.1 Nationell forskning

4.1.1 Regeringsuppdrag samt respons

I slutet av år 2008 formulerades ett regeringsuppdrag till Skolverket. Uppdraget innefattar att Skolverket ska främja utvecklingen av Informations- och Kommunikationsteknik (IKT) i skolverksamheten samt även främja användningen av IKT. Regeringsuppdraget framhäver även att Skolverket ska bedöma och utvärdera verksamheters behov av utveckling inom den egna verksamheten där lärarnas användning av IKT skall kartläggas. Den användning som ska belysas är användning i pedagogisk mening där syftet är att utveckla undervisningen.[20] Denna rapport utvärderade verksamheten i relation till de då aktuella läroplanerna (Lpo 94/Lpf 94).

Skolverkets resultatrapport visar på att många svårigheter baserades på tillgången till datorer och support vid problem med datorer. Varken grundskolor eller gymnasieskolor kan upprätthålla en standard som gör att tekniken kan användas som ett pedagogiskt verktyg. I vidare utvärdering lyfter Skolverket att vid revidering av de befintliga styrdokumenten kommer det att integreras digital kompetens samt tydliggöra begreppet digital kompetens för skolverksamheten.[21]

Under 2012 gjordes ytterligare en uppföljning av Skolverket gällande användningen av digitala verktyg. Resultatet visar på att det är mycket som har förändrats i skolverksamheten vilket främst berör tillgången på tekniska redskap. Där antalet datorer per elev har nästan halverats vid jämförelse med antalet år 2008. Även lärarnas tillgång till egna datorer har markant ökat, enligt uppföljningen 2012 har nästan alla gymnasielärare en egen dator. År 2008 saknade en fjärdedel av alla gymnasielärare tillgång till en egen dator.[22] I rapporten särställs områden som inte har utvecklats under tidens gång, däribland nämns elevernas sätt att arbeta med datorer. Datorerna används främst för att söka information och för att producera text. När det kommer till användningen inom de olika skolämnena är användningsfrekvensen låg inom många ämnen. Inom matematiken är det fortsättningsvis ovanligt att eleverna använder sig av datorer under lektionerna.

Vid undersökningen som gjordes 2008 uppgav 90 % av eleverna att de sällan eller aldrig använder sig av it på matematiklektionerna. Eleverna som tillfrågades går i årskurs 7-9 eller på gymnasiet. Rapporten visar även på de pedagogiska program som finns att tillgå på skolorna, där de vanligaste programmen är skapade för att användas som pedagogiskt verktyg för antingen matematik, språk eller för att redigera ljud och/eller bilder. Av de deltagande skolorna har 40 % matematiska program som är tillgängliga för lärare och elever, för de kommunala gymnasieskolorna ligger siffran på 70 %.

---

[20] Regeringsuppdraget. Dnr 84-2008:3780.
[21] Skolverket. *Redovisning av uppdraget att bedöma verksamheters och huvudmäns utvecklingsbehov avseende IT-användningen inom förskola, skola och vuxenutbildning samt ge förslag på insatser*.
[22] Skolverket. Skolverket. *It-användning och it-kompetens i skolan.*

4.1.2 Vändpunkt Sverige

År 2010 gavs Vändpunkt Sverige ut, vilket är en undersökning konstruerad av Teknikdelegationen. Undersökningen har skapats i samförstånd med regeringsuppdrag gällande att skapa ett utökat intresse för matematik, naturvetenskap, teknik och IKT. Hela skolverksamhetens uppdrag beskrivs som att eleverna ska utbildas i takt med samhällets utveckling. Eleverna ska ges en grundläggande kompetens inom matematik, naturkunskap, teknik och IKT samt ska undervisningen skapa ett intresse för eleverna, i sådan utsträckning att de vill utbilda sig inom områdena.[23]

Teknikdelegationen framhäver problematiken i den svenska skolans resultat i nationella jämförelser, problematiken bygger på bland annat att teknikkompetensen aldrig mäts i PISA eller TIMSS. Analys av den svenska undervisningen, i relation till TIMSS-resultatet 2007 i matematik, visar på att den inte lever upp till de ämnesspecifika kunskapskraven. Svenska elever har främst problem med den kontextuella förståelsen, där ett grundproblem består i att lärarna främst lotsar eleverna genom läroboken utan att öva på kommunikativa och analytiska förmågor.[24] Teknikdelegationen framhäver ytterligare möjligheter till förbättringar inom matematikundervisningen, där hänsyn till elevernas behov och intresse bör beaktas. Ämnet bör diskutera om och hur tillämpningar i samhället kan ske inom olika områden och fundamentala vetenskapliga samband och dess begränsningar.

I teknikdelegationens undersökning granskas den svenska lärarutbildningen. Information till granskningen utgår ifrån en undersökning utförd av Högskoleverket 2007. Högskoleverkets rapport tyder på bristande innehåll för matematiklärare. Bristerna pekar bland annat på dåliga förkunskaper hos lärarstudenterna, bristande matematikdidaktik och [25] ”avsaknad av viktigt innehåll, t.ex. problemlösning, modellering, användning av digitala och laborativa hjälpmedel, genus och matematik, attityder till matematik, matematiksvårigheter, matematikhistoria.”[26]

4.2 Internationell forskning

4.2.1 TIMSS Advanced 2008

TIMSS Advanced 2008, är en internationell jämförande studie som gjorts i tio länder. Elevurvalet baserades på elever som gått naturvetenskapligt – och tekniskt program, eleverna hade läst minst matematik D respektive fysik B. Syftet med provet var att mäta kunnande och kognitiva förmågor.

Matematiken är uppdelad i tre områden; algebra, differential– och integralkalkyl samt geometri. Området Geometri innefattar bland annat problemlösning med geometriska figurer i två och tre dimensioner, skärningspunkter i koordinatsystem samt vektorer. Geometriområdet utgör 30 % av matematikdelen.

I TIMSS Advanced 2008 definieras de kognitiva förmågorna i tre delar;

[23] Teknikdelegationen. *Vändpunkt Sverige – ett ökat intresse för amtematik, naturkunskap, teknik och IKT*. s. 79.
[24] Ibid. s. 85-88.
[25] Ibid. s.91-99.
[26] Ibid. s. 100.

- Kunna; där ingår de fakta, begrepp och procedurer som eleverna behöver kunna.
- Tillämpa; ser till elevernas förmåga att använda sitt kunnande och den egna begreppsförståelsen vid problemlösning.
- Resonera; "går bortom att lösning av rutinproblem för att omfatta obekanta situationer, komplexa sammanhang och problem i flera steg.[27]

Provet har konstruerats med ett poängsystem för att utvärderas länderna emellan.

I resultat av TIMSS Advanced 2008 går det att utläsa att Sverige ligger under det internationella genomsnittet. Specificerad granskning av matematikdelen följer samma mönster där det totala resultatet av de tre matematiska områden ligger under det internationella snittet. De kognitiva förmågorna ligger även dem under det internationella genomsnittet, där de svenska eleverna uppdagas som relativt svaga när det handlar om förmågan att kunna men starkare när det handlar om att resonera.[28] Området geometri visar att lösningsproportionerna för de svenska eleverna, som löst uppgifterna, är 32 % kontra det internationella snittet 42 %. Vidare undersöker TIMSS Advanced 2008 hur matematikundervisningen upplevs och har genomförts. Lärare som undervisar i matematik har fått besvara frågor angående hur förberedda de anser sig vara inom olika delområden i matematikkurserna. Vid frågor angående geometri uppger svenska lärare att det finns flera moment som de känner sig mindre förberedda på i sin undervisning. Bland dessa påtalas egenskaper hos geometriska figurer samt cirklars egenskaper i ett ortogonalt koordinatsystem.

4.2.2 Dynamisk programvara i undervisning

En forskningsartikel skriven av Anthony Dove och Karen Hollenbrands behandlar elevers inlärning vid arbete med program som illustrerar dynamisk geometri. Studien utgår från tre lärare som undervisade på high school (elever i åldrarna 14-18) i samma område. Skolorna som de arbetar på ingår i ett 1:1 projekt, vilket innebär att alla elever har varsin laptop till sitt förfogande. Lärarna undervisade i geometri dagligen. Studien grundar sig i den sociokulturella lärandeteorin med scaffolding i fokus. Vilket baseras på vad en elev kan och vad denne kan lära sig med hjälp av stöd från någon annan. Dove och Hollenbrands förklarar scaffolding, vilket enligt dem kan delas in i två kategorier. Den första kategorin Soft innebär den typ av support som läraren kan bidra till studenterna under tiden de arbetar med problemet. Den andra kategorin namnges Hard, vilket innebär den handledning eleverna kan få i förväg, innan de ska arbeta med uppgiften. Dove och Hollenbrands studie fokuserar främst på Soft-kategorin.[29]

Efter varje lektion intervjuades läraren om lektionen de precis genomfört. Intervjun fokuserade på lektionsplanering, förväntad inlärning hos eleverna, lärarens egen reflektion och eventuella förändringar till nästa tillfälle samt hur tekniken användes under lektionen. Resultatet från studien visar på att lärarna ibland upplevde det som att de måste släppa

[27] Skolverket. *TIMSS Advanced 2008: svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv* s. 20ff.
[28] Skolverket. *TIMSS Advanced 2008. Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv.* s. 37f.
[29] Dove & Hollenbrands. *Teachers' scaffolding of students' learning of geometry while using a dynamic geometry program.*

kontrollen i klassrummet för att utrymme till samtal och rörelse. Fördelar som uppdagades var att eleverna utforskade möjligheter, experimenterar, söker nya vägar och testar egna teorier i sammanhanget. Elevsvaren på uppgifter blev fler, där eleverna hade egna ”kriterier”. Resultatet tyder också på att lärarna använder sig mest av studentcentrerad scaffolding.[30]

4.2.3 Möjligheterna till lärande i matematik

I en avhandling skriven av Lill Engström utvärderas användningen av dynamisk programvara i undervisningen. Elevernas inlärning i relation till dynamisk programvara står i fokus. Urvalet av lärare var ej slumpmässigt utan baserades på att lärarna skulle ha läst minst tre terminer universitetsmatematik samt ha arbetslivserfarenhet. Lärarna skulle ha ett eget intresse för att vilja använda ett datorprogram i undervisningen. Totalt deltog tre lärare varav en undervisar i Schweiz och två undervisar i Sverige.[31]

I resultatet av studien framgår det att lärarna anser att dynamiska datorprogram tillför elevernas förståelse, två av lärarna anser att beräkningar i boken ändå är av största vikt i sammanhanget. Gemensamt för lärarna är att alla tre anser att undervisning med dynamiska program tillför eleverna nyfikenhet, vilja att experimentera samt skapar förståelse och upptäcker samband. Vidare lektionsstudier som behandlar likformighet förklaras arbetssättet där en av lärarna inleder med en muntlig genomgång av vad eleverna ska göra. Lektionsanalysen beskriver att eleverna i förhand vet vad svaren ska bli och därmed minskas utrymmet för reflektion.

I avhandlingen analyseras lärarnas undervisning genom hur programvaran används och vilka tillämpningar som uppdagas. En av tre lärares elevuppgifter uppmanar eleverna till att experimentera och undersöka på eget initiativ, en av lärarna har få uppgifter som bygger på elevens egen utforskningsförmåga. Den tredje läraren konstruerade främst uppgifter som var mer slutna och färdigformulerade vilket lämnade mindre utrymme för eleverna att experimentera. Den sistnämnde ansåg att användning av boken och beräkningar är det viktigaste i matematikundervisningen medan de övriga ansåg att datorn var ytterligare ett verktyg för att bredda förståelsen. Lärarnas uppfattning om elevernas kunnande genom datoranvändning skiljer sig åt, två av tre lärare framhäver eleverna som mer kreativa när de undersöker samband samt att de utvecklar begreppsförståelsen. Den tredje läraren beskriver elevers utveckling genom förhöjd motivation och tilltro till sig själva samt att de hittar samband. [32]

---

[30] Ibid.
[31] Engström. *Möjligheter till lärande i matematik – Lärares problemformuleringar och dynamisk programvara*. s. 83f.
[32] Ibid. s. 168-176.

5. Nedslag i geometrins historia

I detta avsnitt kommer en redogörelse av vad geometri är samt nedslag i geometrins utveckling. Främst kommer det som är väsentligt i relation till uppsatsens syfte och frågeställningar att redogöras. Inledningsvis beskrivs delar av geometri ur ett historiskt perspektiv, vilket övergår till hur den matematik vi använder idag konstruerades.

5.1 Geometri i historien

Ordet geometri kommer från det grekiska ordet geōmetri′a, som översatt betyder lantmätarkonst.[33] Geometri handlar om att införskaffa kunskaper om och hur geometriska figurers egenskaper kommer till uttryck i ett rum. För att förstå figurernas egenskaper behövs begreppsförståelse om vad ett objekt är, vad ett axiom innebär och förståelse för definitioner.

De äldsta skrifter som berör geometri har sitt ursprung från Mesopotamien och Egypten. [34] Mesopotamien var ett land som låg mellan floderna Eufrat och Tigris och namnet Mesopotamien syftade främst till den norra delen av detta område och den södra delen benämndes Babylonien.[35] De båda områdena tillhör i modern tid Irak.

Det finns välbevarade historiska lertavlor från Babylonien som vittnar om det matematiska användandet. Dessa tavlor kommer främst från två tidsperioder, där de äldsta är från cirka 2000 f.Kr. och flertalet kommer från någon gång mellan 600 f.Kr. och 300 e.Kr. Det Babyloniska numeriska systemet är uppbyggt på basen 60.

Babyloniernas användning av geometri uppmärksammas inte i någon vidare utsträckning. Där många geometriska problem formulerades som algebraiska problem. Bevarat från epoken som tyder på geometriska beräkningar är formeln för att beräkna cirkelarea: $\mathrm{A} = \frac{c^2}{12}$, där c står för omkretsen. Denna formel utgår från användning av 3 istället för π.[36] Nedan visas exempel på en beräkning av en cirkels area med ett babyloniskt närmevärde på π respektive modern tids värde.

Areaberäkning på en cirkel med radien 4 längdenheter och $\pi = 3$:
Omkretsen: $2\pi r = c \rightarrow\ 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
Area: $\frac{c^2}{12} = A \rightarrow \frac{24^2}{12} = \frac{576}{12} = 48$ areaenheter.
Areaberäkning på samma cirkel med moderns tids värde på π $(3{,}14159265\ldots)$[37]:
Area: $\pi 4^2 \approx 50{,}265$ areaenheter.

[33] Nationalencyklopedin, geometri.
[34] Katz. A history of mathematics s.10.
[35] Nationalencyklopedin, Mesopotamien.
[36] Kline. Mathematical thought from ancient to modern times. s.4-11.
[37] Wolframalpha, π.

Den Egyptiska civilisationen existerade redan innan 4000 f.Kr. och det finns papyrus från 1700 f.Kr. som vittnar om beräkningsproblem och lösningar till dem. Egypternas beräkningar utgår från basen 10. Beräkningar av geometriska problem särställs aldrig från aritmetiska, och geometrin används som ett redskap för beräkning av praktiska situationer. Dock framgår det att Egyptierna har utvecklat den babyloniska beräkningen av cirkelarea, till den mer exakta formeln: $A = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$, där d står för diameter. Beräkningen innebär att närmevärdet 3,1605 används istället för π. Egypterna hade även formler för att beräkna volymen för cylindrar, kuber och andra geometriska figurer.

Areaberäkning på en cirkel med radien 4 längdenheter och $\pi = 3{,}1605$:

Area: $\left(\frac{8d}{9}\right)^2 = A \rightarrow \left(\frac{8 \cdot 8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81} = 50{,}568$ areaenheter.

De grekiska framstegen och kunskaperna finns det betydligt mer dokumentation från jämfört med babylonierna och det gamla egyptiska samhället. Den grekiska civilisationen kom att ersätta stora delar av det hieroglyfiska skrivsystemet med det feniciska alfabetet. Det finns dokumentation som vittnar om att grekerna hade ett kunskapsutbyte med Egypten och Babylonien.[38] Thales, (ca 625-545 f.Kr.) från Miletos, anses ha influerat den moderna vetenskapen genom sin syn på att det mänskliga förnuftet kan förklara allting i omvärlden och gudarna behövs inte för att finna svaren. Han ansåg att vatten var ursprunget till allt liv

Pythagoras (ca 570-497 f.Kr.) var en grekisk matematiker och filosof som anges som upptäckaren av det matematiska sambandet mellan en spelsträngs längd och höjden på tonen. Upptäckten tillförde stor tro på att allting i omvärlden kan beskrivas genom matematiska beräkningar. Även om Pythagoras själv inte stod för iakttagelsen om relationen mellan två kateter och hypotenusa i en rätvinklig triangel, har han fått Pythagoras sats uppkallat efter sig.[39]

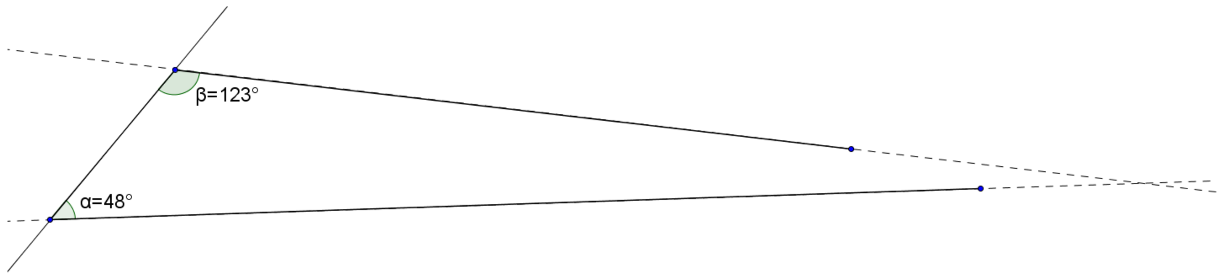
5.2 Euklides och Euklidisk geometri

Euklides kända verk Elementa från cirka 300 f.Kr. Elementa består av tretton böcker som ger bevis för de då befintliga matematiska satser genom resonemang och definitioner. I böckerna finns inga exempel, beräkningar eller beräkningar på bevisen.[40] De sex första böckerna behandlar plangeometri, i den första av dessa böcker definieras de fem första postulaten som betonar vad som bör antas som självklart:

- Det första postulatet säger att det mellan två punkter går att dra precis en linje.
- Det andra postulatet säger att om vi har en ändlig rät linje och förlänger den, kommer den fortsätta vara en rät linje.

[38] Kline. Mathematical thought from ancient to modern times. s. 16-24.
[39] Nationalencyklopedin, Pythagoras.
[40] Katz. A history of mathematics. s. 36ff.

- Det tredje postulatet säger att det går att rita cirklar med valfri medelpunkt och godtycklig radie.
- Det fjärde postulatet säger att alla räta vinklar är lika stora.
- Det femte postulatet (parallellpostulatet) säger att om två räta linjer skärs av en tredje rät linje, och de inre vinklarna är mindre är $180°$, så kommer de två räta linjerna, om de förlängs obegränsat, att skära varandra. Detta kommer att infalla på samma sida som de två inre vinklarna ligger.[41] Se exempel nedan där $\alpha + \beta = 48° + 123° = 171°$ och därav ses $171° < 180°$, vilket innebär att linjernas förlängning (de streckade linjerna) skär varandra.



Figur 1. Parallellpostulatet

Den Euklidiska geometrin bygger på de fem första postulaten och verkar i det Euklidiska rummet.[42] Det Euklidiska rummet är ett vektorrum som innefattas av en inre produkt (skalärprodukt) och sträcker sig över de reella talen. Med hjälp av skalärprodukten kan vinklar och avstånd beräknas på vektorer.[43]

Bok sju till och med nio behandlar talteori i Aristoteles anda. I den elfte och tolfte boken behandlas geometriska objekt i ett tredimensionellt rum. Slutligen i den trettonde boken definieras platoniska kroppar.[44] Många satser och begrepp som idag används i skolverksamheten återfinns i Euklides Elementa. Innehållsmässigt presenteras de geometriska, de talteoretiska och de algebraiska kunskaper som uppdagats under de trehundra åren innan.[45] Euklides Elementa användes som skollitteratur ända fram till slutet av 1800-talet.[46]

5.3 Satser som bygger på likformighet

Likformighet inom geometrin bygger på parallellpostulatet och innebär bland annat att figurer har likadan form men i olika skalor. Likadan form för två eller fler figurer innebär att det

[41] Nationalencyklopedin, geometri.
[42] Ibid.
[43] Nationalencyklopedin, euklidiskt rum.
[44] Katz. A history of mathematics. s. 36ff.
[45] Nationalencyklopedin, geometri.
[46] Euklidisk geometri. [Kompendie].

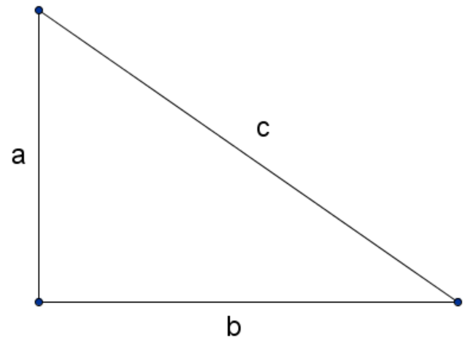
finns lika stora vinklar i ett motsvarande hörn. Exempelvis är två kvadrater alltid likformiga. Vid matematisk beräkning av likformighet tillkommer villkor för att avgöra huruvida två figurer är likformiga. Alla vinklar i en figur ska motsvara en unik vinkel i den andra figuren, då vet vi att dessa är likformiga. För att avgöra om två trianglar, ABC och DEF, är likformiga gället det att sträckorna $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$. Vilket innebär att kvoten mellan motsvarande sträckor i triangeln ABC och i DEF skall te sig lika stora. Likformighet kan baseras på vinklar, vilket härleds genom att $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ respektive $\angle C = \angle F$.

Det finns satser vars bevis bygger på egenskaper hos likformighet, däribland återfinns Pythagoras sats, bisektrissatsen samt kordasatsen.

5.3.1 Pythagoras sats

Enligt Katz är det svårt att för läsaren att tidigt se sammanhanget av Euklides Elementa.

I slutet av den första boken av Elementa, bevisar Euklides Pythagoras sats och det är först då som helheten av boken uppdagas för läsaren. Innehållet bygger genomgående upp till detta bevis, i den första boken under postulat 47 står följande: *"PROPOSITION I-47. In right-angeled triangels, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the legs."*[47] Citatet beskriver Pythagoras sats där en rätvinklig triangel, återges hypotenusan i kvadrat av summan av kateterna i kvadrat enligt formeln $a^2 + b^2 = c^2$.



Figur 2. Pythagoras sats

Pythagoras sats kan illustreras genom att skapa kvadrater vars sidor utgör de båda kateterna respektive hypotenusan, se Figur 3. Vi vill beräkna längden på hypotenusan med hjälp av kateter. Kvadrat A har en area på 2 areaenheter, för att få längden på en av kvadratens sidor:

$$\sqrt{A} = \sqrt{2}$$

Eftersom sidlängden även utgör katet a fås:

$$\sqrt{A} = \sqrt{2} = a$$

Vid insättning i Pythagoras sats ersätts a med det kända värdet enligt följande:

[47] Katz. A history of mathematics. s. 38

Pythagoras sats: $a^2 + b^2 = c^2$

Känt värde ersätter a: $\sqrt{2}^2 + b^2 = c^2$

$$2 + b^2 = c^2$$

Fortsättningsvis beräknas längden på katet b enligt samma metod.

Beräkning på exemplet ger:

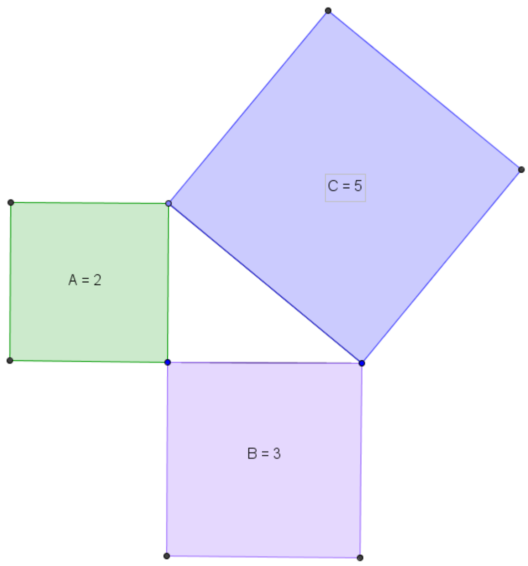
$$\sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 = c^2$$

$$2 + 3 = c^2$$

$$\sqrt{2+3} = c$$

$$\sqrt{5} = c$$

Vilket vi kan se stämmer i det fallet nedan. Där kvadraten C har en area på 5 areaenheter och hypotenusans längd utgörs av $\sqrt{5}$.



Figur 3. Illustration Pythagoras sats

Observera att detta endast är en av många varianter att illustrera Pythagoras sats på.

5.3.2 Bisektrissatsen

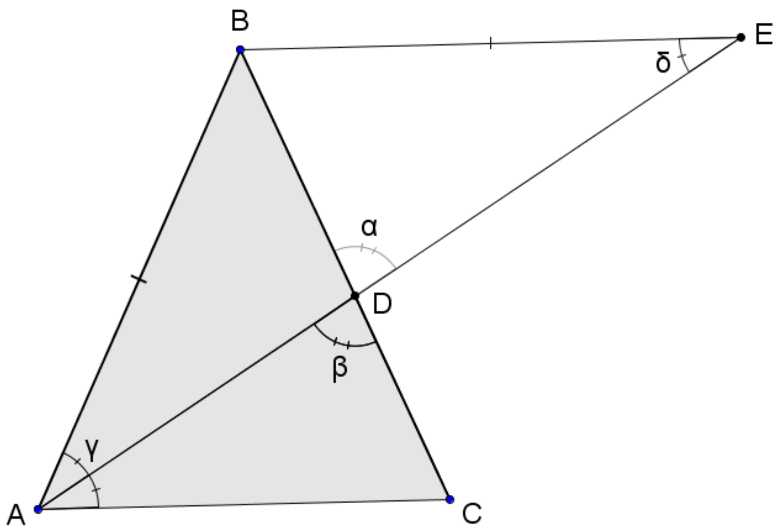
En bisektris delar en vinkel mitt i tu. Vi förutsätter att varje vinkel i en triangel ska delas av en bisektris, med andra ord kommer alla tre vinklar att delas av varsin bisektrislinje. För en godtycklig triangel ABC dras en bisektris mellan sträckorna AB och AC, se Figur 4. Förhållandet mellan triangeln ovanför bisektrisen och den under triangeln kommer erhållas genom:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

För att bevisa bisektrissatsen förlängs bisektrisen till en punkt E. Punktens placering bestäms i det här fallet av sträckan AB, så att sträckan $AB = BE$.

Nu återfinns vertikalvinklar sådana att $\alpha = \beta$ och allting ovanför bisektrislinjen utgör en likbent triangel, alltså vet vi basvinklarna $\gamma = \delta$. Två motsvarande vinklar återfinns vilket medför att trianglarna är likformiga och därmed fås förhållandet mellan sträckorna:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



Figur 4. Bisektrissatsen

5.3.3 Kordasatsen

En korda är en rät linje som går mellan två punkter på en cirkelbåge eller på en kurva. Vid beräkning med kordor används likformighet hos trianglar för att finna en lösning. I Figur 5 ses två kordor, AB och CD, inritade i cirkeln. Kordornas längd kan beräknas genom kordasatsen som säger: $a \cdot b = c \cdot d$. Där produkten av delarna i den ena kordan är lika med produkten av den andra kordans delar.

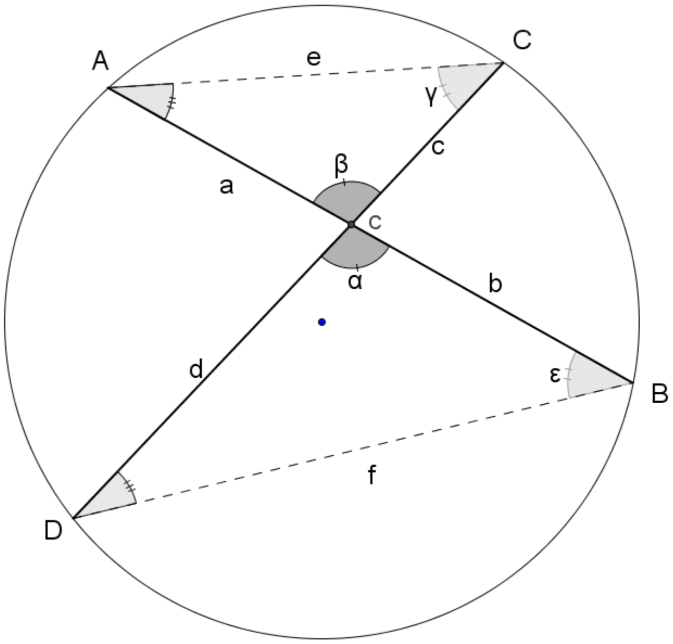
För att bevisa kordasatsen konstaterar vi först att det finns vertikalvinklar, vilket innebär de motstående vinklarna är lika stora där två linjer skär varandra. Alltså fås $\alpha = \beta$.

För att kunna använda likformigheten hos trianglar ritas ytterligare två kordor, e och f in. Samtliga kordor konstruerar nu två trianglar i cirkeln.

I triangeln som består av sidorna a, c och e fås nu en vinkel γ. Eftersom att randvinklar som ligger på samma cirkelbåge är lika stora fås även en motsvarande vinkel i den andra triangeln. I och med att båda randvinklar ligger på samma cirkelbåge fås $\gamma = \varepsilon$.

Nu har vi två lika stora vinklar i de båda trianglarna vi kan därmed dra slutsatsen att de båda trianglarna är likformiga. Detta medför att även den tredje vinkeln i respektive triangeln kommer att vara lika stor och likformighet ger:

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{b} \leftrightarrow a \cdot b = c \cdot d$$



Figur 5. Kordasatsen

5.4 Icke-euklidisk geometri

Under slutet av 1800-talet gjordes granskningar av Elementas validitet. Den icke-euklidiska geometrin kom till genom tvivel gentemot Euklides femte postulat, det postulat som berör de parallella linjernas egenskaper. Euklides själv försökte långt tidigare att med hjälp av de fyra första postulaten bevisa det femte men utan framgång.[48] Under 1700-talet upptäcktes hyperboliska satser men det dröjde till 1820-talet innan den hyperboliska geometrin utvecklades till att bli en självständig gren inom geometrin.[49]

Det femte postulatet har under århundraden intresserat matematiker, som har försökt att bevisa postulatet utifrån de fyra första postulaten. En italiensk matematiker vid namn Giovanni Girolamo Saccheri försökte bevisa parallellpostulatet genom motsägelsebevis,[50] vilket han ansåg sig ha gjort och gav ut en avhandling men titeln *Euclides ab omni nævo vindicatus*. Beviset utgår från en fyrhörning vars vinklar antas vara trubbiga och visade att antagandet leder till en motsägelse.[51] Johann Lambert kom senare att studera Saccheris arbete

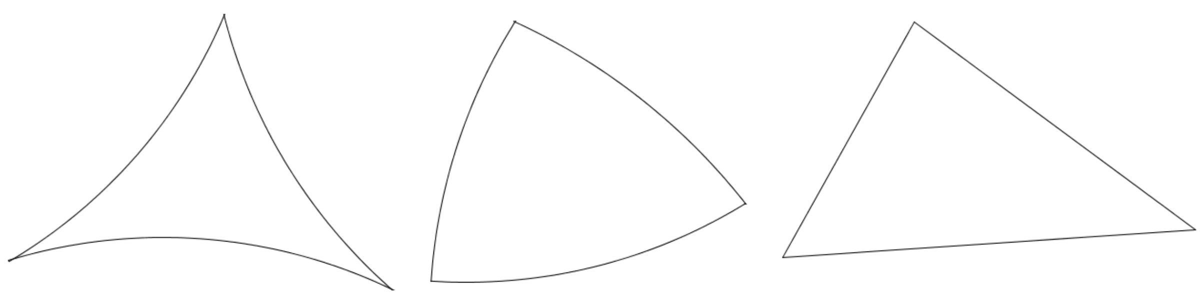
[48] Kline. *Mathematical thought from ancient to modern times*. s. 868-880.
[49] Nationalencyklopedin, geometri.
[50] Katz. *A history of mathematics* s. 476ff.
[51] Nationalencyklopedin, geometri.

i ett försök till att vidareutveckla resonemanget. Hans arbete om parallellpostulatet, *Theory of Parallell Lines,* färdigställdes 1766 men publiceras inte under Lamberts livstid. Anmärkningsvärda upptäckter som Lambert bidrog med var bland annat formeln för att beräkna hyperboliska trianglar.[52] Det dröjde till 1786 innan Lamberts arbete publicerades.[53]

Ett antal matematiker kom på, oberoende av varandra, att alla försök till att lösa postulatproblemet berodde på att det egentligen inte var lösbart. Bland annat går det att bygga hyperbolisk geometri med hjälp av de fyra första postulaten eftersom det finns oändligt med parallella linjer till varje linje. Tre matematiker nämns återkommande i sammanhanget; Carl Friedrich Gauss, en man som aldrig kom att publicera sina upptäckter. Nikolaj Ivanovitj Lobatjevskij och János Bolyai skrev oberoende av varandra om icke-euklidisk geometri, dock fick ingen av dessa män någon uppskattning för sina verk under livets gång. Inte långt efter de båda männens bortgång, på 1860-talet kom matematiker förstå och uppskatta Lobatjevskij och Bolyais matematiska framsteg.[54] Den hyperbolisk geometri involverar många egenskaper som även återfinns i Euklidisk geometri, skillnaden ligger i de satser som bygger på parallellpostulaten. I den hyperboliska geometrin är varje plan sadelformat och till en given linje finns det mer än en parallell linje genom en given punkt. Vid beräkningar på trianglar inom den hyperboliska geometrin framträder tydliga olikheter i egenskaperna. Två trianglar som klassas som hyperboliska och har motsvarande lika stora vinklar är då kongruenta med varandra. Inom den hyperboliska geometrin talar man inte om likformighet utan figurerna är kongruenta. Hyperboliska trianglar har även andra egenskaper när det kommer dess vinkelsummor, vilken är mindre än eller väldigt nära 180°. Om de hyperboliska trianglarna förstoras så kommer så kommer vinkelsumman att gå mot noll. Triangelarean kan beräknas genom:

$$\left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) \mathrm{k}^2 \left(180^\circ - A - B - C\right)$$

Där A, B och C är triangelns vinklar och $k = \frac{1}{\sqrt{-k}}$ där $k < 0$ är krökningen av det hyperboliska planet. Utmärkande för dessa trianglar är att sidorna har en böjning.[55]



Figur 6. Hyperbolisk-, elliptisk- och euklidisk triangel

[52] Katz. *A history of mathematics.* s. 392ff.
[53] Nationalencyklopedin, geometri.
[54] Euklidisk geometri.[Kompendie]
[55] Kline. *Mathematical thought from ancient to modern time*. s. 868-880.

Den elliptiska geometrin tillhör den icke-euklidiska geometrin. Arean för en triangel, inom elliptisk geometri, är summan av dess sidor subtraherat med π. Alltså areaberäkning på en triangel ABC: $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-\pi$. Inom elliptisk geometri finns inga parallella linjer och alla icke-parallella linjer skär varandra i precis en punkt. Trianglar inom elliptiska geometrin har en vinkelsumma som är större än $180°$.

Den absoluta geometrin baseras på de fyra första postulaten i Euklides Elementa, men bygger inte på något postulat som berör parallella räta linjer. Med andra ord så påverkas inte den absoluta geometrin av Euklides femte postulat eller det hyperboliska parallellpostulatet och medför att satser gäller i det hyperboliska rummet likväl som i det euklidiska rummet.

5.5 Projektiv geometri

I början av 1600-talet uppfanns teleskopet och mikroskopet vilket gav upphov till nya matematiska problem. Detta eftersom att projektionen av uppfinningarnas linser gav nya avbildningar. Helt plötsligt kunde inte de gamla grekernas kunskaper generalisera omvärlden så till nästan varje sats lades en specifik metod till.[56] Den projektiva geometrin skiljer sig från den euklidiska geometrin bland annat genom att det inom projektiv geometri inte finns några parallella linjer och det projektiva planet är en begränsad yta, vars avgränsning baseras på punkterna i planet.

Ändlig geometri, även kallad Desarguesk geometri, tillhör den projektiva geometrin. En självlärd man vid namn Girard Desargues (1591-1661) blev publicerad i en bilaga i boken *Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective.* Denna text kom att bli grunden till det vi idag benämner som metoder för projektiv geometri. Desargues sats hävdar att två trianglar med en gemensam ursprungspunkt, O, kommer ha sina sidförlängningar på gemensamma punkter. Dessa punkter kommer att ligga på en gemensam linje. Detta kan illustreras genom att det från O, objektsperspektivet till triangeln ABC kommer att skapa en projektion av triangeln $\mathrm{A'B'C'}$. Själva satsen statuerar att: Paren motsvarar en projektion enligt: AB och $\mathrm{A'B'}$, BC och $\mathrm{B'C'}$ samt CA och $\mathrm{A'C'}$.

Om man ser till de tre räta linjerna som möts i O, på linjerna återfinns A och $\mathrm{A'}$ på en av de räta linjerna, B och $\mathrm{B'}$ på en linje respektive C och $\mathrm{C'}$ på en linje, se Figur 7.

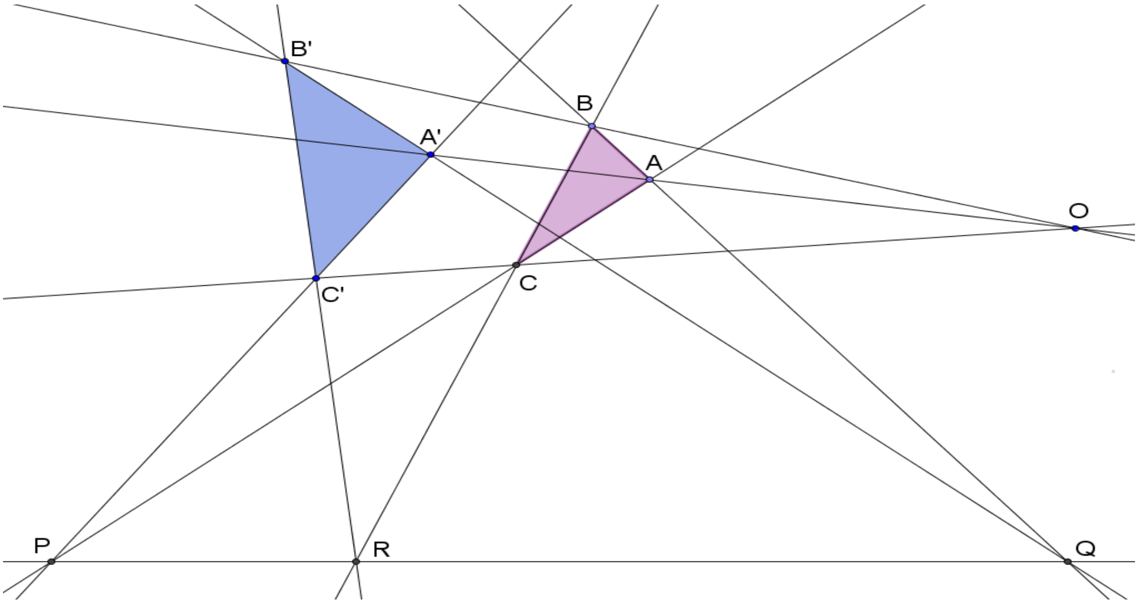
Sidorna AC och $\mathrm{A'C'}$ möts i P

AB och $\mathrm{A'B'}$ möts i Q

BC och $\mathrm{B'C'}$ möts i R

Punkterna P, Q, R ligger på en rät linje. Och denna sats är sann om trianglarna ligger på samma eller i olika plan. Vilket Desargues bevisade att teoremet är applicerbart i både två och tre dimensioner. [57]

[56] Kline. Mathematical thought from ancient to modern time. s. 285ff.
[57] Ibid. s. 287-291.



Figur 7. Desarguesk sats

Affin geometri anses vara undersökningar mellan den Euklidiska geometrin och den projektiva geometrin. Exempelvis genom analys av en godtycklig rät linje sammansatt med en translation. Satser för affin geometri återfinns i den första boken av Euklides Elementa.[58] Affina avbildningar används exempelvis vid matrisberäkningar, där om det finns en matris A och en vektor b så är f en affin avbildning enligt $f(x) = Ax + b$.

[58] Nationalencyklopedin, geometri.

6. Geometri i undervisningen

I detta avsnitt beskrivs innehållet i kursplaner för matematik i grundskolan respektive gymnasieskolan. Därefter förklaras laborativ undervisning med fokus på dynamisk geometri.

6.1 Kursplaner

I de aktuella kursplanerna för ämnet matematik för gymnasiet (Gy 11) respektive grundskolan (lgr11) tydliggörs de förmågor som eleverna ska utveckla under utbildningens gång.

I grundskolan ska eleverna ges möjligheten att utveckla fem matematiska förmågor. De fem förmågorna innefattar bland annat att eleverna ska kunna lösa problem genom att välja lösningsmetoder och kunna värdera de metoder och strategier de valt. Eleverna ska utveckla förmågan att använda och att analysera matematiska begrepp och vilka samband som finns mellan olika begrepp. Eleverna ska också ges möjlighet att utveckla förmågan att föra och följa resonemang samt kunna föra matematiska samtal och argumentera för beräkningar. Det centrala innehållet i kursplanen för matematik för grundskolans senare år (7-9) beskriver vad undervisningen ska sträva mot, där varje elev ska få individuellt stöd för att utöka den egna kunskapen. Specifikt för geometri ska eleverna undervisas för att utöka kunskapen gällande geometriska objekt, objektens egenskaper, hur dessa konstrueras och metoder för beräkning av area, volym och omkrets. Eleverna ska även undervisas med avseende på skala för två respektive tredimensionella objekt, likformighet och fördjupande kunskap om satser och formler som berör de geometriska objekten.[59]

Gymnasiets förmågor utökas ytterligare med bland annat bedömning av resonemang samt kunna relatera matematikens betydelse utifrån ett historiskt, yrkesrelaterat och samhälligt perspektiv. Det centrala innehållet mellan olika kurserna varierar på gymnasiet. I kursplanen för gymnasiekurserna matematik 1a, 1b, och 1c ingår praktiska konstruktioner, arbete med skala och likformighet samt enhetsbyten. I de två sistnämnda kurserna ingår illustration av satser, bevis och definitioner där Pythagoras sats och vinkelsumman i en triangel uttrycks som specifika exempel. Fortsättningsvis (matematik 2b/2c) ska eleverna undervisas i att använda sig av klassiska satser i geometri som involverar likformighet, vinklar och kongruensräkning. Högre matematikkurser bygger vidare dessa punkter i det centrala innehållet, däribland genom att eleverna utvecklar det egna kunnandet för att använda enhetscirkeln för att kunna definiera trigonometriska begrepp och formler, komplexa talplanets uppbyggnad och användningsområden. Eleverna ska även undervisas i varför och hur absolutbelopp används i olika sammanhang samt hur man använder cosinus-, sinus- och areasatsen för beräkning på en godtycklig triangel.[60]

6.2 Dynamisk geometri

Dynamisk geometri är ett sätt att arbeta med laborativa hjälpmedel. Enligt Nationellt centrum för matematik (NCM) innebär laborativa arbetssätt en möjlighet att låta alla elever delta utifrån den nivå de själva befinner sig på. I sammanhanget brukar man tala om induktiv

[59] Skolverket. Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.
[60] Skolverket. Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskolan 2011.

respektive deduktiv metod. Där ett induktivt arbetssätt utgår från många problematiserade fall och eleverna får arbeta med många olika typer av material för att experimentera och undersöka och därefter dra slutsatser. Det deduktiva tillvägagångssättet utgå från en lärarledd demonstration eller förklaringar i exempelvis lärobok, av exempelvis satser eller formler. Därefter ska eleverna själva beräkna liknande matematiska problem för att få förståelse för problemet. Enligt Lena Trygg förklaras undervisningen att den ska går från den konkreta matematiken till det mer abstrakta, men vi lärare bör vara öppna för att man även kan börja med det abstrakta och övergå till det mer konkreta. [61]

NCM beskriver laborativt material som går att hantera, ta på, flytta och manipulera. Den laborativa undervisningen kan syfta till att ge eleverna förståelse för abstrakta begrepp som kan vara svåra att anknyta till vardagslivet. Vilket kan påverka de matematiska begrepp som inte har någon naturlig vardaglig anknytning[62] som till exempel komplexa tal som består av en real del och en imaginär i ett ortogonalt koordinatsystem.

Vid undervisning av dynamisk geometri med hjälp av tekniska verktyg kan olika matematiska program användas, exempelvis Geogebra, Mathematica, Maple och/eller Cabri géomètre

[61] NCM. *Matematikundervisning i praktiken*. s. 176-183.
[62] Rystedt & Trygg. *Laborativ matematikundervisning: vad vet vi?* s. 9-11.

7. Litteraturanalys

Under litteraturanalysavsnittet presenteras de relationer mellan geometrin, dynamisk geometri, tidigare forskning samt den sociokulturella lärandeteorin som uppdagats under arbetet.

7.1 Utvärdering skola

I TIMSS Advanced 2008 framgår att de svenska elevernas kognitiva förmågor ligger under snittet, där eleverna är svaga när det kommer till att förstå begrepp och procedurer. I samma rapport framgår undervisande lärares uppfattningar. Där flertalet lärare uppger att det finns moment inom geometrin som de inte känner sig trygga i att undervisa.[63] Detta kan komma till uttryck i undervisningen så att elever förlorar väsentliga fragment. Lärare som inte känner tillit till den egna förmågan kan förlita sig på läroboken och därmed bara lotsa eleverna genom boken. Vilken framhävs av Teknikdelegationen, att problematiken i den svenska undervisningen bland annat grundar sig i att eleverna inte har den kontextuella förståelsen i ämnet matematik.[64]

I kursplanerna i matematik för grundskola och gymnasieskolan framgår att eleverna ska utveckla förmågan att kunna föra matematiska resonemang samt kunna motivera det valda tillvägagångssättet.[65][66] Den nationella kunskapsundersökningen visar på att svenska elever är svaga när det handlar om förståelsen för begrepp och procedurer.[67] Vilket kan bero på det som Teknikdelegationen beskriver som brister i svenska matematikundervisningen, eftersom eleverna lotsas genom matematikboken erhålls ingen bredare förståelse. Bristerna påvisar även att det finns utrymme i undervisningen att se till elevers olika behov för utveckling.[68]

Lärarresponsen tyder på att flertalet lärare känner sig osäkra inför att undervisa vissa moment i matematiken, där geometri anges som momentet som svenska lärare känner sig mest osäkra på.[69] Påverkande faktorer kan vara de brister som klargjorts inom lärarutbildningen, däribland att studenterna har dåliga förkunskaper när de påbörjar utbildningen och att viktigt innehåll som problemlösning, användning av laborativa hjälpmedel och matematikhistoria saknas i utbildningen.

I Dove och Hollenbrands studie om dynamisk geometri och Engströms avhandling tyder på liknande resultat. Enligt de lärare som deltog i studierna synliggörs elevernas arbetssätt och interaktioner. Eleverna tenderar att experimentera med figurer och objekt samt utforska dess

---

[63] Skolverket. *TIMSS Advanced 2008: svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*.
[64] Teknikdelegationen. *Vändpunkt Sverige : ett ökat intresse för matematik, naturvetenskap, teknik och IKT*.
[65] Skolverket. *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*.
[66] Skolverket, *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*.
[67] Skolverket. *TIMSS Advanced 2008: svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*
[68] Teknikdelegationen. *Vändpunkt Sverige : ett ökat intresse för matematik, naturvetenskap, teknik och IKT*.
[69] Skolverket. *TIMSS Advanced 2008: svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*.

egenskaper och begränsningar. Där eleverna visar på en vilja att förstå relationer och samband.[70] [71]

7.2 Dynamisk geometri

Regeringsuppdraget formulerades i syfte att öka användningen i skolverksamheten med tekniken som pedagogiskt syfte. Resultatet hävdade att skolorna inte lyckats nyttja tekniken till att utveckla undervisningen. Uppföljningen av uppdraget under 2012 lyfte fram att vissa saker inte har förändrats under tidens gång. Elevernas arbetssätt med datorer har inte förändrats, där eleverna först och främst använder datorerna till att söka information och skriva uppgifter. Elevresponsen påvisar en låg användningsfrekvens av datorer i matematiklektioner. I responsen från regeringsuppdraget framkom majoriteten av eleverna aldrig använder tekniska redskap under matematiklektionerna. Att digitala verktyg inte används någon vidare utsträckning kan bero på brister inom lärarutbildningen, där studenterna inte utbildas till att modeller och använda digitala verktyg i ett matematikdidaktiskt sammanhang. En stor påverkande faktor uppges vara lärarens intresse för teknik[72], vilket medför en varierad undervisning även på en och samma skola mellan olika lärare. De breda formuleringarna i läroplanen skapar förutsättningar för användning av dynamisk programvara men skapar även möjligheter att välja andra undervisningsmetoder.

Som den sociokulturella lärandeteorin förklarar att kunskaper utvecklas i samspelet med andra människor. Vägledning, handledning och stöttning hjälper elever vidare till den proximala utvecklingszonen. Säljö hävdar att i takt med utvecklingen måste människan klara av att hantera fler artefakter. Vid arbete med dynamisk geometri är datorn och programmet som används artefakter, eleven behöver förstå hur man använder datorer med alla dess tillbehör och även förstå det specifika programmet som ska användas. Den proximala utvecklingszonen är individuell och utgår ifrån det eleven redan kan, vilket även redogörs i kursplanerna och beskrivs som att alla elever ska ges de förutsättningar de behöver för att kunna utvecklas så långt som möjligt. Induktiva och deduktiva arbetsmetoder kan användas med varierad ingång, där eleverna i somliga fall introduceras till moment genom lärarledd demonstration eller genom att få problematiserade uppgifter för att själva undersöka och finna samband.[73]

I grundskolans kursplan gällande ämnet matematik ingår att eleverna ska undervisas i hur olika objekt konstrueras och olika egenskaper. Med hjälp av programvara för dynamisk geometri kan konstruktioner skapas. Där lärarstödet tillkommer som en handledning genom hela processen och användning av dynamisk programvara kan ske utifrån elevernas egna nivåer.

Sammantaget lyfts det laborativa arbetssättet som ett positivt arbetssätt. Regeringen anser att mer kunskap i att använda modern teknik ska involveras i skolverksamheten. Skolverket framhäver att det behövs vidareutveckling för att lärare ska kunna förstå och använda IKT

[70] Dove & Hollenbrands. *Teachers' scaffolding of students' learning of geometry while using a dynamic geometry*.
[71] Engström. *Möjligheter till lärande i matematik – Lärares problemformuleringar och dynamisk programvara*.
[72] Regeringsbeslut. *Uppdrag till Statens skolverk att främja användningen av informations- och kommunikationsteknik.*
[73] NCM. *Matematikundervisning i praktiken*. s. 176-168.

som ett pedagogiskt verktyg i verksamheten. Kompetensutveckling av IT-kompetensen för lärare samt tidsaspektliga reformer för att skapa förutsättningar för lärarna att klara av att möta kraven för en utvecklande skola. Enligt Skolverkets respons på regeringsuppdraget bör gemensam kraft läggas på att utveckla lärares möjlighet att använda sig av varierande arbetssätt för att få med så många som möjligt. Dock räcker det inte med enstaka utbildningsdagar utan djupgående skapa förutsättningar för lärare att lära sig använda olika verktyg. [74]

[74] Regeringsbeslut. *Uppdrag till Statens skolverk att främja användningen av informations- och kommunikationsteknik.*

8. Diskussion

Här diskuteras arbetets litteraturinnehåll med nedslag av egna åsikter om påverkan på matematikundervisningen i skolverksamheten. Här presenteras även förslag på tillämpningar vid arbete med dynamisk undervisning inom geometri.

8.1 Påverkan på undervisningen

Generellt när det kommer till undervisningsmetoder i skolverksamheten, anser jag att lärare inte bör låsa tillvägagångssätt till strikt deduktiv metod. Vilket syftar på klassisk katederundervisning, där läraren har en genomgång som efterföljs av att eleverna arbetar självstädigt med matematikböckerna. Eleverna bör istället uppmuntras till varierande och kreativa arbetsmetoder. Att återkommande använda kateterundervisningen upplever jag inte lämpligt i enlighet med skolverksamhetens styrdokument eftersom detta inte bäst lämpat för varje elevers individuella inlärning, vilket vi som lärare ansvarar för genom att eleverna ska ges största möjliga att utvecklas så långt som det är möjligt. Här kan dynamisk undervisning tillföra att eleverna ökar förståelsen för matematiska problem och eventuellt medföra bland annat ett intresse för att laborera och undersöka matematiska egenskaper.

För att genomföra lektioner med dynamisk geometri som pedagogiskt verktyg anser jag att det är av största vikt att ha tydliga och uttalade syften och mål med lektionerna. Där relationen till kursplanerna inledningsvis kan beskrivas. Där läraren själv behöver ha god kompetens om verktygen som ska användas. Vilket kan medföra problematik i verksamheten, där grundlig fotbildning kan anses ta för mycket tid från planering, undervisning och bedömningsuppgifter. Lärarutbildningen bör innehålla kurser som ger studenterna förståelse av hur olika program fungerar och kan tillämpas. Enligt egen erfarenhet är de obligatoriska matematiklaborationerna formuleras i att studenterna ska lämna in uppgifter som uppvisar ett korrekt resultat snarare än att ha laborationer som tillför studenterna förståelse för användningsområden i deras framtida yrkesroll.

Under tidigare forskning och i litteraturanalysen förklaras lärares bristande tillit på sig själv som en faktor till att eleverna mer eller mindre lotsas genom läroboken. Frågan är om det är en sådan stor faktor. I relation till egen erfarenhet innebär det att flertalet av de matematiklärare jag mött har en sådan bristande tillit. Personligen tror jag att mycket handlar om vilket typ av undervisning man själv har fått genom åren. Med tanke på att de jag mött som utbildar sig till matematiklärare brukar ha en positiv inställning till matematik och inte helt osannolikt klarat matematiken i grundskola och gymnasiet utan vidare problem. För dessa studenter kan det ha fungerat utmärkt med klassisk katederundervisning och därmed kanske man kopierar ett, för en själv, fungerande koncept. Andra anledningar kan bero på bristande tillit, där man helt enkelt ser läroboken som en lektionsguide och följer den. Andra lärare kanske inte riktigt vet hur man kan undervisa med hjälp av laborativa verktyg och det är svårt att hitta något som passar den aktuella klassen. Anledningarna kan vara många men oavsett anser jag att elevbehovet förbises och vår skyldighet till varje elev, att låta var och en utvecklas utifrån egna förutsättningar. Jag menar här inte att lösningen är dynamisk geometri, jag menar på att varierade arbetssätt kan skapa klarhet hos elever som har svårt att se samband mellan exempelvis likformighet hos figurer. Samtidigt är det viktigt att belysa att dynamisk programvara kanske inte lämpar sig alls för somliga, där datorprogram kan bidra till att göra problemställningar ännu mera abstrakt.

Användningen av Geogebra i undervisningssammanhang ser jag som verktyg som kan medföra positiva eller negativa konsekvenser för elevers utveckling. Vissa funktioner i programmet återfinns som snabbknappar, eleverna kan exempelvis konstruera en bisektris utan någon förståelse för vad en bisektris är eller hur en bisektris konstrueras med hjälp av passare och linjal. Uppgifter som formuleras så att eleverna får resonera om hur objekt konstrueras och diskutera vilka egenskaper som finns, medför en utveckling som förhoppningsvis bygger vidare på den befintliga elevkunskapen. Med uppgifter som medför negativa konsekvenser menar jag sådana som formuleras så att eleverna följer en instruktion liknanden; Rita två linjer som korsar varandra, tryck på knappen Bisektris och markera de två linjerna. Instruktionsuppgifter kommer att resultera i exakt likadana elevframställningar men jag tror att elevförståelsen knappast utökas för varken geometriska egenskaper eller hur tekniska verktyg kan användas som läromedel.

Enligt egen erfarenhet kan jag anta att det är svårt att införa liknande arbetssätt. Mycket beror på det jargong som finns inom den redan inetsade matematikundervisningen. Eleverna baserar sin prestation på provresultat och sidnummer i boken. Att hinna göra klart uppgifter är viktigare än att förstå dem och en lektion utan matematikboken medför en ökad stress från elever som inte kommer hinna. För elever som är invanda med att arbeta i läroboken under varje lektion kan behöva en direktkoppling till boken och det aktuella kapitlet och ha en planering som inte är baserad på sidnummer/uppgifter i läroboken som ska betas av.

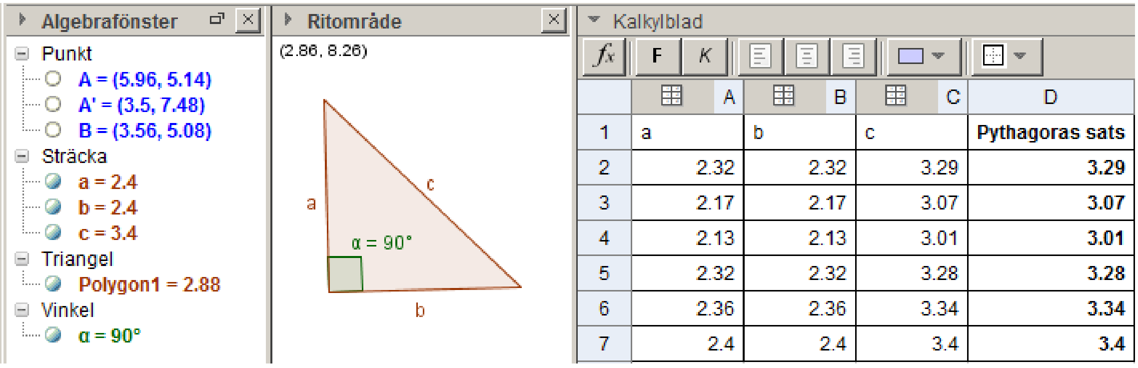
Det behövs dock mycket stöd och motivation uppifrån från rektorer och beslutsfattare, vilket kan resultera i fortbildning och avsatt tid för att ge lärare möjligheten att sätta sig in i datorprogram eller andra laborativa hjälpmedel för att använda dem som pedagogiska verktyg.

8.2 Förslag på tillämpningar i undervisningen

De figurer som återfinns i arbetet har alla konstruerats i Geogebra. Dessa figurer kan användas i undervisningen för att ge eleverna möjlighet att utforska och konstruera egna figurer. Med hjälp av programmets funktion kan eleverna laborera med figurernas egenskaper. Tillämpning kan ske genom att eleverna ges arbetsblad som förklarar vad som ska konstrueras eller att läroboken används som utgångspunkt för att illustrera figurer, med resonemang om hur objekt ter sig i fokus.

Parallellpostulatet, Figur 1, kan med fördel introduceras i grundskolan. Själva konstruktionen är inte avancerad och tillåter eleverna att undersöka vinkelsummor. Parallellpostulatet visar på att om den inre vinkelsumman för två vinklar är mindre än $180°$ så kommer linjernas förlängningar att korsas. Här kan eleverna justera linjerna och upptäcka huruvida detta stämmer. När linjerna korsar bildar dessa tre linjer en triangel och när någon linje förflyttas (förutsatt att de två inre vinklarna fortfarande är mindre än $180°$) kommer fotfarande en triangel att framträda vilket ger eleverna möjlighet att uppdaga samband mellan olika trianglar och den gemensamma vinkelsumman. Parallellpostulatet kan presenteras med en historisk anknytning till Euklides Elementa. På gymnasienivå framhävs det uttryckligen, i flertalet kursplaner, att illustration av vinkelsummor ska ingår i undervisningen.

För Pythagoras sats finns flertalet möjligheter för att visa att satsen stämmer. I Figur 2 respektive i Figur 3 presenteras satsen. Ett förenklat inledande exempel baseras på att en rätvinklig triangel ritas ut, programmet kommer i algebrafönstret att visa längden på katetrar respektive hypotenusa. Värden från ritområdet kommer att skrivas ut i algebrafönstret, dessa värden kan användaren välja att exportera till kalkylbladet. Detta görs en gång, därefter kommer kolumnerna att fyllas i automatiskt när figuren förändras. Varje triangelsida representeras av en kolumn i kalkylarket med motsvarande bokstav. I exemplet nedan har ytterligare en kolumn lagts till, Pythagoras sats, den kolumnen har givits formeln $\sqrt{a^2+b^2}$, (eftersom $a^2{+}b^2 = c^2 \leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = c$) för att få värdet på c. Vilket i kalkylbladet stämmer. Här syftar illustrationen till att visa utskrivna värden, baserat på figurkonstruktionen men även en jämförelse för att eleverna ska förstå vad de faktiskt räknar på.



Figur 8. Exempel tillämpning i undervisning

För illustration av beviset med kvadrater, se Figur 3, kan användaren själv dra i triangelns eller i någon av kvadraternas hörn för att konstruera en mindre respektive större triangel. I Figur 8 ovan är längden på triangelns sidor givna, vilket de inte behöver vara vid tillämpning i undervisningen.

Vid arbete med kordasatsen kan eleverna arbeta med att konstruera kordor och bevisa satsen, genom att inledningsvis börja med att rita ut två godtyckliga kordor och därefter stegvis härleda beviset så som i tidigare avsnitt. Här kan algebrafönstret och kalkylbladet även vara till användning. Där exempelvis alla sex vinklar kan representeras i en kolumn för att visa på att varje vinkel i den ena triangeln har en motsvarande vinkel i den andra. Fördelen med Geogebra är att användaren tillåts experimentera med figuren, så att eleverna kan förändra de ursprungliga kordorna och upptäcka att oavsett hur kordorna dras i cirkeln så kommer satsen att gälla. Elever i lägre åldrar kan arbeta med redan färdig konstruktioner för att laborera genom att förflytta kordorna på cirkelbågen med syfte att upptäcka mönster som gäller oavsett var och när kordorna korsar varandra i cirkeln.

Syftet med dessa tillämpningsexempel är att eleverna ska ges möjlighet att med ett laborativt arbetssätt upptäcka och ges möjlighet att analysera de samband och egenskaper olika figurer eller satser har. Och därmed utveckla förmågan att kommunicera och resonera.

8.3 Slutsatser

Undersökningar tyder på att många skolor har tillgång till matematiska program men att de sällan används under matematiklektioner. Eleverna uppger att de sällan eller aldrig använder sig av dator under matematikundervisningen. De lärare som deltagit i undersökningarna om dynamisk geometri har haft ett gediget intresse för digitala verktyg, vilket troligtvis medför engagerade lärare som undervisar med engagemang. Huruvida digitala verktyg behövs för att skapa förståelse om geometriska objekt låter jag vara osagt. Elever ska undervisas och stöttas för att utvecklas så långt som möjligt, vilket medför att ett undervisningssätt inte är anpassat för alla.

Effekten av dynamisk programvara beror på hur den används, vilket kan bidra till ökad elevförståelse om tekniken används på rätt sätt. Vilket kan vara en anledning till att undersökningsresultat pekar på att svenska lärare inte använder dessa speciellt ofta inom ämnet matematik, lärarna vet exempelvis inte hur datorer kan bidra till elevers utveckling. Lärare väljer eventuellt medvetet att hellre avstå än att pröva nya undervisningsmetoder. Jag förmodar att mycket styrs av intresse, där lärare med ett personligt intresse för IKT gärna involverar detta i undervisningen. Tidigare forskning visar på att eleverna tenderar att experiment och visar en vilja att undersöka egenskaper, vilket bland annat kan bero på en högre motivation när katederundervisningen byts mot laborativ undervisning.

Avslutningsvis vill jag trycka på läromedelseffekter. Jag menar inte att läroböcker är överflödiga och datorer ska ersätta dem i undervisningen, utan vill framföra att verktyg är vad man gör det till. I skolverksamheten finns mängder av pedagogiska redskap och förslag på lektionsaktiviteter. För att skapa en fungerande undervisning anser jag att det handlar mycket om att känna sina elevgrupper, ha klara mål med lektionerna, dels för läraren själv men även för eleverna. En varierad undervisning med inslag av diskussioner och analyser ger eleverna möjlighet att stärka den egna förmågan att resonera om matematik, vilket förhoppningsvis kan bidra till bredare förståelse och ge eleverna en rättvis chans att öva förmågor som går förlorad vid enbart tyst räkning i läroböckerna. Elever som arbetar själv i läroboken ges inte möjligheten att öva på att diskutera matematiska resonemang och argumentera för sina metoder vilket även ska bedömas och betygssättas. Geometri kan illustreras genom dynamisk programvara och utifrån lektionsplaneringsupplägg även bidra till mer samtal om bland annat förtydliga samband och egenskaper hos geometriska figurer.

Jag anser att vidare forskning på fältet behövs, där olika dynamiska programvaror och konkreta uppgifter av varierande karaktär ställs mot varandra för att se till likheter och skillnader. Undersökningar som lyfter fram intressanta aspekter om vilka förkunskapskrav användaren behöver för att kunna nyttja programmen, vilka kognitiva förmågor som utvecklas och elevers självreflektion om hur dynamisk programvara påverkar deras utveckling.

Referenser

Dove, Anthony. & Hollenbrands, Karen. Teachers' scaffolding of students' learning of geometry while using a dynamic geometry program. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* Vol. 45, No 5, (2014): 668-681.

Engström, Lill. *Möjligheter till lärande i matematik: lärares problemformuleringar och dynamisk programvara*. HLS förlag, Stockholms universitet, Stockholm, 2006.

Esaiasson, Peter, Gilljam, Mikael, Oscarsson, Henrik & Wängnerud, Lena (red.). *Metodpraktikan: konsten att studera samhälle, individ och marknad*. 4., [rev.] uppl., Norstedts juridik, Stockholm, 2012.

Euklidisk geometri.(u.å) [Kompendie]. Hämtad 2015-05-15, från http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/LMA100/V06-2B/geom.pdf

Forssell, Anna (red.). *Boken om pedagogerna*. 6., [omarb.] uppl., Liber, Stockholm, 2011.

Katz, Victor J. *The history of mathematics: brief version*. Addison-Wesley, Boston, Mass., 2004.

Kiselman, Christer O. & Mouwitz, Lars. *Matematiktermer för skolan*. 1. uppl., Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet, Göteborg, 2008.

Kline, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford U. P., New York, 1972.

Nationalencyklopedin, euklidiskt rum, hämtad 2015-05-26, från http://www.ne.se.ezproxy.ub.gu.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/euklidiskt-rum

Nationalencyklopedin, geometri, hämtad 2015-03-26, från http://www.ne.se.ezproxy.ub.gu.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/geometri

Nationalencyklopedin, Pythagoras, hämtad 2015-05-26, från http://www.ne.se.ezproxy.ub.gu.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/pythagoras

Nationalencyklopedin, Mesopotamien, hämtad 2015-04-07, från http://www.ne.se.ezproxy.ub.gu.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/mesopotamien

Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM). *Matematikundervisning i praktiken*. 1. uppl., Göteborgs universitet, Göteborg, 2014.

Regeringsbeslut. Dnr 84-2008:3780. *Uppdrag till Statens skolverk att främja användningen av informations- och kommunikationsteknik.*

Rystedt, Elisabeth & Trygg, Lena. *Laborativ matematikundervisning: vad vet vi?*. 1. uppl., Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet, Göteborg, 2010.

Skolverket. *It-användning och it-kompetens i skolan [Elektronisk resurs]*. Stockholm, 2013, Hämtad 2015-04-12, från
http://www.skolverket.se/publikationer?id=3005

Skolverket. *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm, 2011, hämtad 2015-03-26, från
http://www.skolverket.se/publikationer?id=2575

Skolverket. *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm, 2011, hämtad 2015-03-26, från
http://www.skolverket.se/publikationer?id=2705

Skolverket. *Redovisning av uppdraget att bedöma verksamheters och huvudmäns utvecklingsbehov avseende IT-användningen inom förskola, skola och vuxenutbildning samt ge förslag på insatser*. Stockholm, 2009.

Skolverket. *TIMSS Advanced 2008: svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*. Stockholm, 2009, hämtad 2015-03-28, från
http://www.skolverket.se/publikationer?id=2291

Svenska akademien. *Svenska akademiens ordlista över svenska språket [Elektronisk resurs]*. 13. uppl., Stockholm, 2006, hämtad 2015-05-10, från
http://www.svenskaakademien.se/ordlista

Säljö, Roger. *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*. 1. uppl., Norstedts akademiska förlag, Stockholm, 2005.

Teknikdelegationen. *Vändpunkt Sverige: ett ökat intresse för matematik, naturvetenskap, teknik och IKT*. Stockholm, 2010.

Utbildningsdepartementet. SFS 2010:800. *Skollag*.

Wolframalpha, π, hämtad 2015-04-02, från
http://www.wolframalpha.com/input/?i=pi