GÖTEBORGS UNIVERSITET

Förstå gymnasieelevers begreppsförståelse
-Operationer med negativa tal-

Examensarbete i matematik för lärare vid Göteborgs universitet

Alexander Karlsson

Ämneslärarprogrammet med inriktning mot matematik och idrott och hälsa

Uppsats/examensarbete: 15hp
Kurs: LGMA1, Examensarbete 2 för gymnasielärare i matematik
Nivå: Avancerad nivå
Termin/år: VT 2016
Kursansvarig institution: Matematiska Vetenskaper
Handledare: Laura Fainsilber
Examinator: Mats Andersson
Kod: VT16-3001-004-LGMA1A

Nyckelord: Fokusanalys, avsiktsanalys, minustecknets betydelse, distributiva lagen, negativa tal, räkneoperationer, interaktivitet, matematiska begrepp, tröskelbegrepp, förståelse.

Abstract

The purpose of this essay is to give insight to how teachers can increase their competence when it comes to understanding a pupil's understanding. Therefore my two main questions are: *How do upper secondary school students understand calculation(s) with negative numbers?* And *how can a teacher become better at understanding a pupils understanding in the forms of thinking and communicating?* To answer these two questions I have analyzed four groups of students while they were performing calculations with negative numbers. The students were filmed during the process since my analysing method required that. In this essay I have chosen to present one of the four analyzed groups. The two analysing methods used to get an understanding of a pupil's understanding are *fokal analysis* and *pre occupational analysis*. Also I have been discussing and analysing the students in the group through other theories such as threshold concepts.

The study was done at an upper secondary school here in Gothenburg with students currently studying in second grade. The study showed that the three students in the group had different abilities regarding how to perform calculations with negative numbers. The pupils in the group did not manage to solve the tasks that were given to them. The pupils therefore did not have the proper understanding for calculations with negative numbers and other mathematical calculations needed for the two tasks. My analysis showed that the main reason why the pupils could not solve the tasks was the lack of usage of mathematical terms and threshold concepts. My analysis also showed that the pupils "*meant focus*" sometimes was not stable enough. A teacher can definitely use the two analysing methods *fokal analysis* and *pre occupational analysis* to understand a pupil's understanding in the forms of thinking and communicating.

Innehållsförteckning

1. Inledning

Negativa tal introduceras först på högstadiet och följer med eleverna ända in i postgymnasiala studier. Med andra ord behöver elever oavsett matematikkurs kunna behärska operationer innehållande negativa tal. Om jag ser tillbaka på mina VFU-perioder har negativa tal alltid varit ett svårt område att behärska för många elever. Eftersom negativa tal introduceras på högstadiet kan man ju tycka att det är något som gymnasieelever borde behärska. Detta belyser (Johansson, 1998) i sin artikel; att lärare på gymnasiet har uppfattningen av att de måste möta eleverna på en lägre nivå än vad de ska behöva göra och kanske framför allt inom algebran där operationer med negativa tal ingår "*Man kan misstänka att det har hänt något på gymnasiet, när jag talar med gymnasielärare så säger de i sin tur att de måste möta eleverna från nian på en lägre nivå*" (Johansson, 1998). Som blivande lärare blir det extra viktigt att kunna förstå en elevs förståelse för att kunna möta eleven på dennes nivå. För att kunna möta eleverna på deras nivå måste lärare kunna förstå elevers förståelse och tankegångar på ett bättre sätt. Det är just detta jag ämnar göra med min undersökning där de två analysmetoderna *fokusanalys* och *avsiktsanalys* ska ge mig en djupare förståelse för hur elever tänker i form av kommunikation.

I en tidigare kurs på utbildningen gjorde jag och två andra studenter en undersökning i form av en diagnos där vi testade gymnasielevers kunskap av negativa tal på en gymnasieskola i centrala Göteborg. Resultatet var väldigt oroväckande då kunskapen bland dessa elever var väldigt låg. Detta var en anledning till varför jag ville gå in mer på djupet för att kunna få en uppfattning om gymnasielevers förståelse för operationer med negativa tal. Det finns redan många uppsatser och rapporter som tar upp svårigheter för elever när det kommer till negativa tal i högstadiet men inte lika många finns för gymnasiet och detta var även en motiverande faktor för mig i mitt val av undersökning.

Relevansen av mitt arbete för min framtida roll som lärare är hög och målet med arbetet är att jag ska få en ökad förståelse kring gymnasieelevers förståelse av operationer med negativa tal. Slutligen är målet att som framtida lärare få en bättre inblick i hur man kan hjälpa elever att få en ökad förståelse av operationer med negativa tal. Eftersom många elever har problem med negativa tal blir det extra viktigt för mig att kunna förstå vilka svårigheter som föreligger hos eleverna.

1.1 Syfte och frågeställningar

Jag vill utveckla min kompetens när det kommer till att förstå en elevs förståelse samtidigt som jag vill kunna möta varje elev på den nivå eleven i fråga befinner sig på. För att kunna göra detta har jag valt ut ett analysverktyg som hjälper mig att se hur elever tänker kring och förstår ett matematiskt innehåll.
Syftet med mitt arbete är att kunna bilda sig en uppfattning för elevers förståelse av operationer med negativa tal. Att kunna få en bättre insikt i hur en lärare kan tolka en elevs förståelse i en lärandesituation. Ett syfte blir även för mig som blivande lärare att kunna bilda mig en bättre förståelse för hur elever tänker vid olika räkneoperationer för att momentant kunna gå in och hjälpa till vid uppkomna problem. Syftet mynnar ut till mina två huvudsakliga frågeställningar:

- *Hur förstår gymnasieelever räkneoperationer med negativa tal?*

- *Hur kan en lärare bli bättre på att förstå en elevs förståelse i form av tankar och kommunikation?*

2. Teoretisk bakgrund

2.1 De negativa talens historia

För de matematiker som verkade i Egypten och Grekland hade tal en mer geometrisk betydelse. Olika tal sågs här som ett instrument för att kunna mäta något. Det fanns ingen mening med begreppet negativa tal eftersom det inte kunde finnas någon negativ distans eller area. En linje som inte hade någon längd var inte en linje, så talet noll hade bara betydelsen i form av ”inget” (Seife, 2000). För de matematiker som verkade i Indien eller forna Babylon var tal inget som behövde ha en geometrisk betydelse utan istället något som bara hade ett kvantitativt värde (en mängd).

Gleaser, (1981) identifierade ca tjugo olika hinder till varför negativa tal inte kom att accepteras i tidig historia. Två av dessa hinder var

- *Svårigheter med att förstå en enhetlig tallinje, att kunna se en tallinje som en och samma linje med negativa tal, talet noll och positiva tal.*
- *Svårt att acceptera att talet noll hade två betydelser: talet noll som något absolut, där talet noll är förstått som ”ingenting”, det finns inget under talet noll och den andra betydelsen: talet noll som ett origo med relativ position, att talet noll är en punkt på en axel varifrån man kan gå två olika riktningar, negativ riktning samt positiv riktning.*

Innan 1800-talets slut undvek man ofta termen negativa tal; det fanns inget som var mindre än noll var en stark uppfattning. Till och med de första temperaturskalorna undvek att ha med negativa tal. I tidig historia användes negativa tal endast som något praktiskt för att till exempel beräkna skulder eller liknande (Kilhamn, 2011). Många matematiker genom historien ansåg att en lösning vars svar var negativt inte var en korrekt lösning. De tolkade istället det negativa resultatet som en skuld, ”by interpreting it as a debt, the negativity is removed from the number” (Heeffer, 2008). Om problemet är att försöka finna hur mycket pengar som är kvar, kommer svaret att bli negativt men om problemet är formulerat kring hur mycket skuld en person har till en annan person kommer svaret att bli positivt (Heeffer, 2008).

Det var först då matematiken symboliserades samtidigt som framväxten av algebra tog fart inom matematikens ramar som forskare och vetenskapsmän började ställa frågor kring negativa tals betydelse (Kilhamn, 2011). Peacock (1791-1858) ansåg att negativa tal endast tillhörde den symboliska algebran och alltså inte den aritmetiska algebran. Peacocks använding av den symboliska algebran rörande negativa tal blev ”*som ett bevis*” på att negativa tal var något annat än bara "*mindre än noll*". Framväxten av negativa tal som ett matematiskt objekt kom i samband med introduktionen av algebran. Tack vare att matematiken symboliserades mer och för att man började acceptera talet noll som ett eget tal kom negativa tal att accepteras mer och mer som ett matematiskt objekt. Det var först då som begreppet negativa tal togs på allvar inom matematiken (Kilhamn, 2011).

Weierstrass introducerade begreppet *absolutbelopp* vilket gjorde att vi nu kunde skilja på betydelsen av *absolutbelopp* och *talets storlek* för ett tal. Matematiker såg nu tal som något representativt och inte bara som en mängd kvantitet (Kilhamn, 2011). Eftersom minustecknet först bara hade representerat en kvantitet som skulle subtraheras blev detta ett stort genombrott för betydelsen av negativa tal. Slutligen fick negativa tal och talet noll en betydelse. Talet noll och negativa tal var inte längre någon kvantitet utan accepterades nu genom relationer och sammanlänkningar med andra matematiska identiteter (Kilhamn, 2011). Vill man läsa mer kring historien om negativa tal och dess utveckling hänvisas läsaren till doktorsavhandlingen skriven av Kilhamn, (2011) *Making Sense of Negative Numbers*.

2.2 Modern definition av negativa tal

Den matematiska grunden för negativa tal är baserad på en uppsättning av axiom för *naturliga tal*. Naturliga tal (**N**) är definierade med "mängdteori" och heltal (**Z**) är definierade som ekvivalensklasser av ordnade par av naturliga tal (Kilhamn, 2011). Nedan kommer jag att definiera negativa tal utifrån heltal.

Låt oss ta mängden av naturliga tal: **N**={1,2,3.....}. På mängden av naturliga tal har vi definierat operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division med villkoret att det måste produceras ett tal i **N.** Mängden **N** är "sluten" under addition och multiplikation, med vilket menas att all multiplikation och addition med element i **N** kommer att producera ett nytt element i **N**. Mängden **N** är däremot inte "sluten" under subtraktion och division. För att kunna åstadkomma detta måste vi utvidga talområdet. När mängden **N** utvidgas till en mängd av heltal **Z** blir det "slutet" under subtraktion och när en mängd av heltal **Z** utvidgas till en mängd av rationella tal **Q** blir det även "slutet" under division (Kilhamn, 2011).

2.2.1 Definition av heltal grundat på naturliga tal

Ekvationen $a + n = b$ där a, b är naturliga tal är lösbar med lösningen $n = b – a$ under villkoret b > a. Eftersom en lösning till $a + n = b$ bestäms av de två naturliga talen a och b, kan ett tal n definieras som det ordnade talparet (a, b). Samma n löser även andra ekvationer där (a, b) representerar olika talpar. Ta till exempel (a, b) = (58, 60) eller (a, b) = (1, 3), ekvationen $a + n = b$ har samma lösning för de båda talparen. Detta ger alla n $\in$ **N** för de talpar (a, b) där $b > a$. Vi kan även utnyttja samma princip för talpar (a, b) utan villkoret $b > a$ och då definiera nya objekt. En ekvivalensrelation betecknas med (~) är definierad på följande sätt: $(a, b) \sim (c, d)$ om och endast om $a +d = b + c$ (Kilhamn, 2011). Ekvivalensklasser av alla sådana ordnade par av naturliga tal definierar en mängd av heltal **Z**.

2.2.2 Definition av multiplikation, addition och subtraktion med heltal samt bevis av kommutativa lagen, associativa lagen och distributiva lagen

Eftersom addition och multiplikation är definierade i **N** kan vi utvidga addition och multiplikation till dessa talpar så som följer: för något talpar (a, b) och $(c, d) \in$ **Z**.
- Addition är definierat som: $(a, b) + (c. d) = (a+c , b+d) \in$ **Z.**
- Multiplikation är definierat som: $(a, b) * (c. d) = (ad + bc , bd + ac) \in$ **Z** (Kilhamn, 2011).

-*Kommutativa lagen* för addition: Ta talparen (a, b) och (c, d) för $a,b,c,d \in$ **N**. Låt talparet (a, b) = e och talparet (c, d) = f, då är $(a, b)+(c, d) = (c, d)+(a, b)$ och därmed $e + f = f + e$.

$(a, b) + (c, d) = \underline{(a+c, b+d)}$. $(c, d) + (a, b) = \underline{(c+a, d+b)}$. De två understrukna leden är lika och därmed är $e + f = f + e$.

-*Kommutativa lagen* för multiplikation: Ta talparen (a, b) och (c, d) för $a,b,c,d \in \mathbf{N}$. Låt talparet $(a, b) = e$ och talparet $(c, d) = f$, då är $(a, b)*(c, d) = (c, d)*(a, b)$ och därmed $e * f = f * e$. $(a, b) * (c, d) = \underline{(ad + bc , bd + ac)}$. $(c, d) * (a, b) = \underline{(cb + da , db + ca)}$. De två understrukna leden är lika och därmed är $e * f = f * e$.

-*Associativa lagen* för addition: Ta talparen (a, b), (c, d) och (e, f) för a,b,c,d,e,f $\in$ **N**. Vi vill visa att $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$. $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c , b + d) + (e, f) = \underline{(a + c + e , b + d + f)}$.
$(a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + (c + e , d + f) = \underline{(a + c + e , b + d + f)}$. De två understrukna leden är lika.

Associativa lagen för multiplikation: Ta talparen (a, b), (c, d) och (e, f) för a,b,c,d,e,f $\in$ **N.** Vi vill visa att $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, b) * ((c, d) * (e, f))$. $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ad + bc , bd + ac) * (e, f) = ((ad + bc) * f) + ((bd + ac) * e) , ((bd + ac) * f) + ((ad + bc) * e)) = \underline{(adf + bcf + bde + ace , bdf + acf + ade + bce)}$.

$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (cf + de , df + ce) = ((a * (df + ce)) + (b * (cf + de)) , (b * (df + ce)) + (a * (cf + de))) = \underline{(adf + ace + bcf + bde , bdf + bce + acf + ade)}$. De två understrukna leden är lika.

-*Distributiva lagen*: Ta talparen (a, b), (c, d) och (e, f) för $a,b,c,d,e,f \in \mathbf{N}$.
Vi vill visa att $(a, b) * ((c, d) + (e, f)) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$.
$(a, b)*((c, d) + (e, f)) = (a, b) * (c + e , d + f) = (a*(d + f) + b*(c + e) , a*(c + e) + b*(d + f)) = \underline{(ad + af + bc + be , ac + ae + bd + bf)}$.

$(a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) = (ad + bc , bd + ac) + (af + be , bf + ae) = \underline{(ad + bc + af + be , bd + ac + bf + ae)}$. De två understrukna leden är lika.

Vår sista uppgift blir att definiera subtraktion i **Z**. Ta $a,b,c,d \in \mathbf{N}$.
Subtraktion av $(a, b) - (c, d) = (a-c , b-d)$. För att visa att $(a-c , b-d) \in \mathbf{Z}$, måste vi vara säkra på att $a-c$ *och* $b-d \in \mathbf{N}$.
Istället för talparet (a, b) väljer vi det ekvivalenta ordnade talparet
$(a + c + d , b + c + d)$. $(a + c + d , b + c + d) - (c, d) = (a + c + d-c , b + c + d-d) = (a + d, b +c)$. Eftersom $a,b,c,d \in \mathbf{N}$ följer det att $a + d$ *och* $b + c \in \mathbf{N}$. Vilket bevisar att $(a + d , b + c) \in \mathbf{Z}$. Alltså är **Z** "sluten" under subtraktion.
- Subtraktion är definierat som: $(a, b) - (c, d) = (a + d , b + c)$ (Kilhamn, 2011).

2.2.3 Numeriska exempel

I sin doktorsavhandling *Making Sense of Negative Numbers* använder Kilhamn, (2011) sig av numeriska exempel för att belysa definitionerna ännu tydligare i form av praktisk användning inom matematiken. Nedan följer fem olika numeriska exempel:

- Addition: 5 + (-2):
Låt heltalen 5 och -2 representeras av de ordnade talparen (1, 6) och (3, 1).
(1, 6) + (3, 1) = [enligt definition] = (1 + 3 , 6 + 1) = (4, 7) vilket representerar heltalet 3 $\in$ **Z**.

- Multiplikation: 2 * 3:
Låt heltalen 2 och 3 vara representerade av de ordnade talparen (3, 5) och (4, 7).
(3, 5) * (4, 7) = [enligt definition] = (5 * 4 + 3 * 7 , 3 * 4 + 5 * 7) = (41, 47) vilket representerar heltalet 6 $\in$ **Z**.

- Multiplikation: (-2) * (-3):
Låt heltalen -2 och -3 vara representerade av de ordnade talparen (5, 3) och (7, 4).
(5, 3) * (7, 4) = [enligt definition] = (5 * 4 + 3 * 7 , 3 * 4 + 5 * 7) = (41, 47) vilket representerar heltalet 6 $\in$ **Z**.

- Subtraktion: 3 - (-5):
Låt heltalen 3 och -5 vara representerade av de ordnade talparen (10, 13) och (20, 15).
(10, 13) - (20, 15) = [enligt definition] = (10 + 15 , 13 + 20) = (25, 33) vilket representerar heltalet 8 $\in$ **Z**.

-Distributiva lagen: 2*(1 + 3):
Låt heltalen 2, 1 och 3 vara representerade av de ordnade talparen (2, 4), (1, 2) och (2, 5).
(2, 4) * ((1, 2) + (2, 5)) = [enligt definition] = (2, 4)*(1, 2) + (2, 4)*(2, 5) = (4 + 4 , 8 + 2) + (10 + 8 , 20 + 4) = (4 + 4 +10 + 8 , 8 + 2 + 20 + 4) = (26, 34) vilket representerar heltalet 8 $\in$ **Z**.

2.3 Teoretiskt ramverk ”tänkande som kommunikation”

Sfard & Kieran beskriver i sin artikel *Looking at thinking as Communicating* (2002), synsättet "*tänkande som kommunikation*". Med synsättet vill Sfard & Kieran försöka komma åt och förstå elevers förståelse utifrån hur elever kommunicerar sett ur ett bredare perspektiv såsom kommunikation i form av bilder, gester och rörelser. Vidare beskriver Sfard & Kieran (2002) att synsättet "*tänkande som kommunikation*" ska försöka ge lärare en bättre förståelse kring hur elever generellt förstår ett innehåll i matematiska sammanhang genom en tvågrenad analyseringsmetod. Analysmetoderna som beskrivs i artikeln är *fokusanalys* och *avsiktsanalys* vilka jag kommer att använda mig av i min studie. Fokusanalys innebär att försöka hitta *"avsett fokus"* för diskursdeltagarna. *Avsett fokus* delas i sin tur upp i två lättare delar, *uttalat fokus och uppmärksamhetsfokus* (Sfard & Kieran, 2002). Det förstnämnda bygger på att försöka uppmärksamma vilka yttranden och ord som sägs av eleverna för att man som lärare lättare ska kunna hitta ett fokus, alltså var elevernas fokus befinner sig då de ställs inför ett problem som ska lösas. Det sistnämnda bygger på att försöka tolka elevernas uppmärksamhet, alltså på vad uppmärksamheten är riktad och vad eleven i fråga behandlar vid undersökningen.

Alla möjligheter som byggs upp av *uttalat fokus* och *uppmärksamhetsfokus* samlas och bildar då det *"Avsedda fokuset"* för diskursdeltagarna. Jag kommer i min analys försöka observera vad som sägs och vad den som kommunicerar tittar, lyssnar och pekar på. Nedan följer ett exempel på en tabell och ett utdrag som använts i artikeln för att beskriva en *fokusanalys* av två pojkar Ari och Gur (Sfard & Kieran, 2002).

Ari			Gur		
Pronounced	**Attended**	**Intended**	**Pronounced**	**Attended**	**Intended**
[11] [11a] "the slope" [11b] "the intercept" "the zero[II]"	**Table intercept**	**The intercept**			
			[12] "your.."	?	?
[13] [13a] "how many… in between each" [13b] "from zero[II] to"	**Table slope**	**The slope**			
			[14] "slope", "1"	**The reverse of table intercept[I]**	?
[15] [15a] "slope" [15b] "zero[II]"	**Table intercept**	**The intercept**			
			[16] [16a] "slope" [16b] "that zero[II]" "-5"	**Table intercept**	?

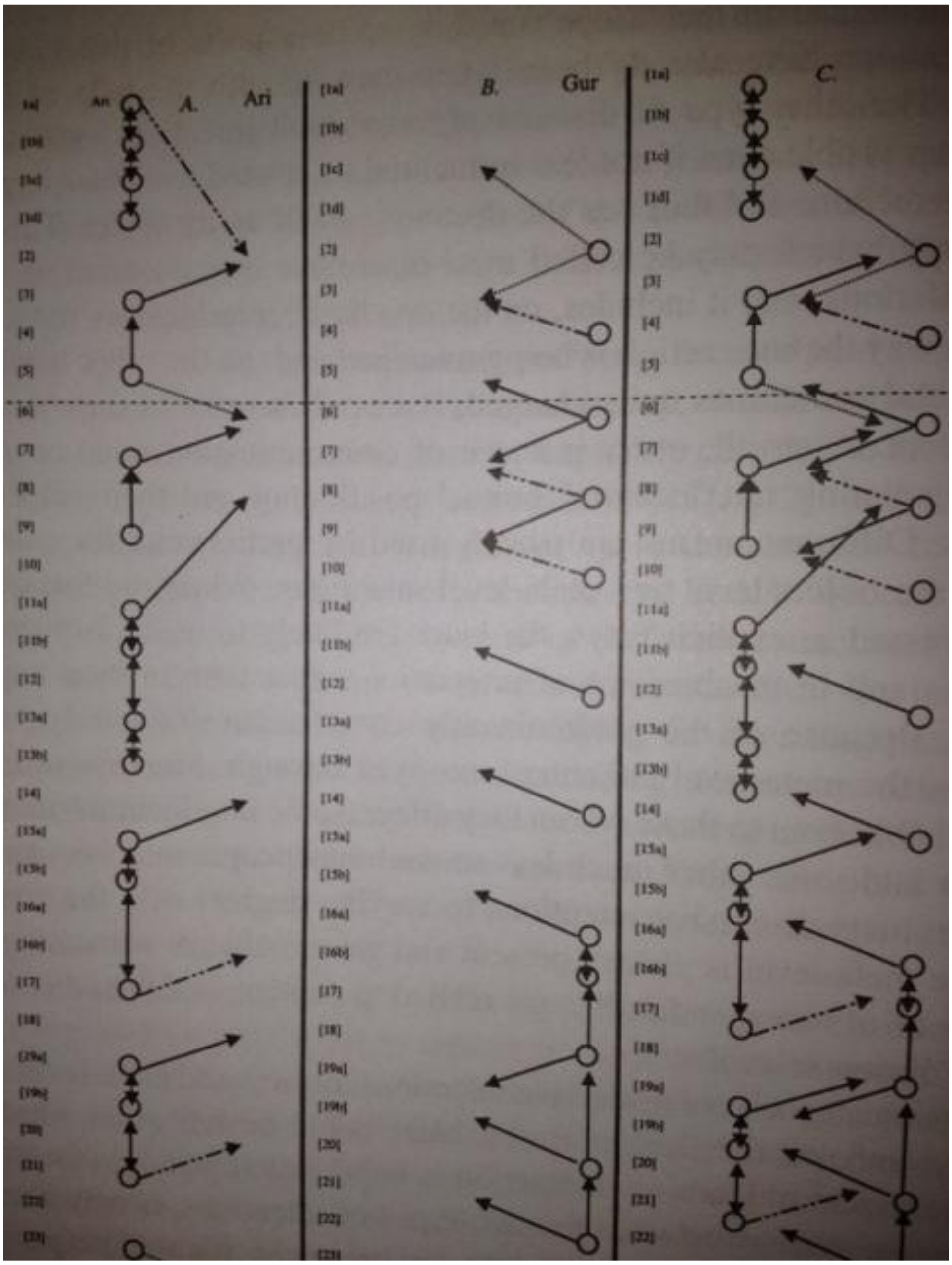
Figur 2: En tabell för fokusanalys (Sfard & Kieran, 2002).

"*For example, in Ari's utterance "Ah, no, the intercept is the zero" ([11b]) the pronounced focus is the words 'the intercept' and the attended focus is the scanning procedure he uses to locate the intercept in the table"* (Sfard & Kieran, 2002). *Uttalat fokus* i exemplet är orden "*the intercept*" och *uppmärksammat fokus* är diskursdeltagarens skanningsprocess för att hitta "*the intercept*" i tabellen.

Det kan vara svårt att uppfatta "*avsett fokus"*, speciellt för de som använder analysmetoden för första gången menar Sfard & Kieran (2002) och detta är något som jag själv märkte vid min undersökning.

Om vi ser till det andra analysverktyget "*avsiktsanalys"* menar Sfard & Kieran (2002) de avsikter bakom de yttranden varje diskursdeltagare gör. Avsikten är här att förstå vad diskursdeltagaren ägnar sig åt eller vad denne strävar efter att uppnå. En diskursdeltagares avsikt kan uppmärksammas på två olika nivåer, en *objektsnivå* eller på en *metanivå*. Med *objektsnivå* menas ämnesrelaterade avsikter medan en avsikt på *metanivå* kan handla om svåråtkomliga yttranden som diskursdeltagare gör (Sfard & Kieran, 2002). På *metanivå* kan avsikten hos en elev vara att göra ett uttalande som inte är direkt relaterat till att lösa ett visst problem utan snarare till att försöka påverka gruppens medlemmar. Ett exempel på ett uttalande på *metanivå* kan vara ”*jag förstår*” trots att diskursdeltagaren i fråga inte förstår. Sfard & Kieran (2002) menar att avsiktsfokus på *objektsnivå* och *metanivå* hela tiden kolliderar och att detta gör det svårt för diskursledaren att hitta rätt avsiktsfokus. Sfard & Kieran (2002) använder sig av ett "*flödesschema för interaktivitet*" för att kunna göra *avsiktsanalysen*. Verktyget är skapat för att kunna urskilja diskursdeltagarnas dialoger och för att kunna hitta vad diskursdeltagarna är mest intresserade av.

Sfard & Kieran (2002) skiljer på den interna och den externa dialogen diskursdeltagarna för under undersökningen. Nedan följer ett flödesschema som Sfard och Kieran använt sig av då de skulle analysera Ari och Gur när de två pojkarna skulle lösa en matematisk uppgift gällande funktioner.



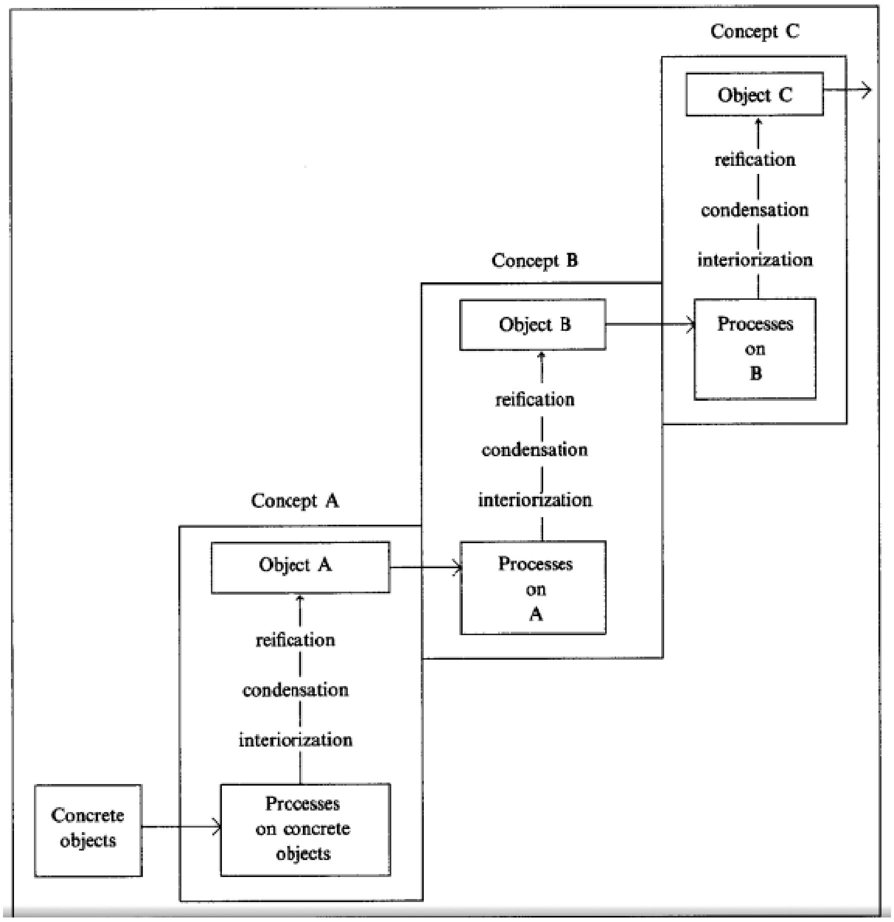
Figur 3: *Exempel på ett flödesschema för analys av interaktivitet mellan två pojkar. I kolumn A och B ser vi hur Ari och Gur interagerar vid lösning av uppgiften och i kolumn C är Ari och Gurs sammanlagda interaktivitet under uppgiftens gång. Pilar som är riktade uppåt eller snett uppåt är reaktiva pilar samtidigt som de pilar vars riktning är nedåt eller snett nedåt är proaktiva pilar* (Sfard & Kieran, 2002).

De nedåt och snett nedåt riktade pilarna som symboliserar proaktiva yttranden representerar yttranden som för gruppen av elever framåt i undersökningen. Alltså yttranden som proaktivt bidrar med något till lösningen eller försöker bidra till lösningen (Sfard & Kieran, 2002). De reaktiva pilarna i modellen som pekar uppåt eller snett uppåt symboliserar yttranden som avger en reaktion. Yttranden som "mm" eller "precis" är typiska reaktioner (Sfard & Kieran, 2002). Om vi ser till *figur 3* kan man även se att de pilar som är riktade mot en annan diskursdeltagare alltså ämnar svara på eller ge uttryck på en persons uttalande (Sfard & Kieran, 2002). Användningen av detta flödesschema för interaktivitet har en viktig roll i min analys. Att kunna se vilka typer av yttranden som eleverna i undersökningsgruppen gör är av stor vikt för att kunna få en förståelse av elevernas förståelse för det innehåll som undersöks men även för samtalets dynamik.

2.4 Processer och objekt som en del av en elevs förståelse

Sfard nämner i sin artikel *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin* två viktiga processer för att elever ska kunna förstå ett innehåll, strukturell process och operationell process. Den strukturella processen innebär att eleven kan se ett visst matematiskt område som ett fulländat objekt. Den operationella processen innebär att eleven med hjälp av stegvisa operationer kan komma att förstå innehållet som något strukturellt. Med negativa tal som exempel, gör eleven olika operationer i många övningar i hopp om att slutligen kunna se operationer med negativa tal som en helhet.

Vidare nämner Sfard, (1991) begreppen *condensation, interiorization* och *reification* som tre viktiga processer för att en elev ska kunna förstå ett område som en helhet. Vid processen *interiorization* blir eleven introducerad till en matematisk process för att sedan kunna se processen som ett begrepp, till exempel när en elev först lär sig att räkna vilket leder till förståelsen av naturliga tal. Eleven lär sig enkla beräkningsprocesser för att successivt kunna förstå ett visst matematiskt område. Vid processen *condensation* kan eleven mer och mer se en given process som en helhet. Eleven behöver inte gå in på detaljer i processen utan kan förbise dessa och ändå ha en bra förståelse av området i fråga. Eleven befinner sig i steget *condensation* inom negativa tal då eleven kan addera och multiplicera positiva och negativa tal och samtidigt förstå resultatet. Det slutliga steget i författarens tre processer är *reification,* här förstår eleven ett specifikt område så pass bra att eleven kan se något bekant som en grund för en helt ny process (Sfard, 1991). Nedan följer en generell modell för ett begrepp som förståelse i form av de tre ovanstående processerna som Sfard, (1991) har utvecklat.



Figur 1: *Sfards generella modell för ett begrepp som förståelse i form av processer. Processer på ett konkret objekt utförs, för att uppnå en helhetsförståelse på objektet går eleven igenom de tre processerna interiorization, condensation och reification. Processen från objekt A tar nu sin början och samma process utförs vidare på objekt B och C (Sfard, 1991).*

Bilden på den generella metoden kan illustreras med hjälp av negativa tal där tre olika begrepp måste förstås för att få en helhetsbild av hur man opererar med negativa tal. För att eleven ska kunna få en förståelse för varje begrepp krävs dessa tre steg (se ovan). De begrepp eleven måste förstå kan vara naturliga tal (objekt A), addition och multiplikation av naturliga tal (objekt B) och slutligen då kunna få en förståelse för operationer som innefattar negativa tal (objekt C) genom att processera objekt A och B. Dessa tre ovannämnda processer belyses mer tydligt i avsnittet *diskussion* där jag kommer att knyta samman olika teorier för att kunna analysera elevernas förståelse kring operationer med negativa tal. Jag kommer framförallt att använda mig av de tre begreppen *interiorization*, *condensation* och *reification* i min diskussion för att förhoppningsvis kunna se en tydlig linje i elevernas förståelse.

2.5 Tröskelbegrepp

Kerstin Pettersson (2010) belyser i sin artikel *Threshold concepts: A framework for research in university mathematics education* begreppet tröskelbegrepp. "*A threshold concept can be seen as a 'portal' or a 'conceptual gateway' that leads to a previously inaccessible, and initially troublesome, way of thinking about something. A new way of understanding may thus emerge – a transformed view of the subject*" (Pettersson, 2010). Författaren vill lyfta fram att ett tröskelbegrepp kan ses som en portal som kan ta eleven till en annan dimension av förståelse. Tröskelbegrepp är centrala och viktiga begrepp inom ett visst område. Exempel på tröskelbegrepp inom analysen är funktion, gränsvärde, derivata och integral. Främst har tröskelbegrepp använts för att studera universitetsstudenter men Pettersson (2010) menar att det även borde användas i gymnasiet och i grundskolans senare år. Begreppet tröskelbegrepp har använts i många olika ämnesstudier men Pettersson (2010) menar att man har störst användning av begreppet inom matematiken då ämnet är uppbyggt av definitioner och satser. Pettersson (2010) menar att användning av tröskelbegrepp inom matematiken kan leda till att elever får en bättre brygga mellan definition och förståelse.

Ett matematiskt begrepp ges av en beskrivning men det är upp till eleven att tolka och översätta beskrivningen till något mer än bara ytlig förståelse. Tröskelbegrepp har tre igenkännande karaktärsdrag, *transformativa*, *integrerande* och *irreversibla*. Med transformativt karaktärsdrag menas att förståelsen av ett tröskelbegrepp medför att hela ämnesområdet kan komma att ses från ett helt nytt perspektiv. De är integrerande i den mening att tröskelbegreppen binder samman kunskap från olika begrepp och om eleven behärskar dem kommer denne få en mer integrerad och djup förståelse. Med det sista karaktärsdraget irreversibla menar författaren att då man väl förstått tröskelbegreppen är det orimligt att man glömmer kunskapen igen (Pettersson, 2010).

Vidare belyser Pettersson (2010) i sin doktorsavhandling begreppet "*liminal space*". Liminal space är ett stadium som en elev kan befinna sig i. Vad som är igenkännande för detta stadium är att eleven plötsligt kan gå från att förstå till att inte förstå ett visst begrepp eller innehåll. "*This space could be compared with the period of adolescence; not yet being an adult, not quite a child. In this unstable state the learner may oscillate between old and new understandings just as adolescents move between acting as a child and as an adult"* (Pettersson, 2010). Vad som är tanken med tröskelbegrepp är att då en student befinner sig i ett liminalt stadium så kan tröskelbegreppet förhoppningsvis hjälpa eleven att komma ut från stadiet med en bra förståelse eller en *transformativ* förståelse av innehållet. Noterbart är att då en elev befinner sig i ett liminalt stadium finns det risk för att eleven fastnar här och då menar Pettersson, (2010) att eleven endast lär sig att lösa vissa problem systematiskt utan att egentligen ha någon djupare förståelse för innehållet.

Pettersson (2010) nämner inga konkreta tröskelbegrepp för området negativa tal eftersom hennes artikel fokuserar på analysens tröskelbegrepp men för att underlätta analysen av mitt resultat har jag kommit fram till tre viktiga tröskelbegrepp för området operationer med negativa tal**.** Dessa är *distributiva lagen, addition, subtraktion och multiplikation med negativa tal* samt *minustecknets olika betydelser*. Förståelsen av dessa tre tröskelbegrepp bedömer jag är av stor vikt för eleverna för att de ska kunna arbeta kompetent med operationer med negativa tal samt för att kunna lösa uppgifterna i min undersökning.

Jag kommer att använda mig av tröskelbegrepp och dess betydelse som ett komplement till Sfard & Kieran (2002) analysmetoder för att få en bättre insikt i elevernas förståelse av operationer med negativa tal. Något som ska tilläggas är att Pettersson, (2010) är tydlig i sin artikel med att det behövs ytterligare forskning på tröskelbegrepp inom ämnesområdet matematik. Detta är en bidragande orsak till varför jag använder tröskelbegrepp som ett komplement och inte som en fullständig analysmetod.

3. Metod

3.1 Urval

Studien genomfördes på en gymnasieskola i en storstad. De elever som medverkade i undersökningen gick alla i årskurs 2 på gymnasiet med inriktning samhäll och ekonomi. Valet av skola blev ganska självklart då jag skickade ut förfrågningar via mail till tre olika skolor. Min LLU sa att det inte var några problem att komma till dennes skola men en av de andra två lärarna jag haft kontakt med kunde anordna undersökningstillfället snabbare. Jag hade min LLU:s skola som säkerhet ifall jag inte skulle få tillräckligt med material med mig från första skolan jag besökte.

3.2 Genomförande

Jag fick komma ut till skolan under en förmiddag då eleverna hade en "ta i kapp" lektion. Läraren som jag haft kontakt med hade redan innan jag kom till skolan frågat eleverna i sin klass om de kunde tänka sig att ställa upp på undersökningen. Totalt hade 12 elever frivilligt anmält sig till att delta i min undersökning vilket jag var väldigt tacksam för. När jag kom till skolan mötte jag läraren i ett arbetsrum där vi pratade igenom lite saker angående undersökningen. Vi gick sedan till klassrummet tillsammans och väl inne i klassrummet presenterade jag mig och klargjorde för eleverna vad de hade att vänta sig av undersökningen och hur denna skulle gå till. Därefter fick jag gå in i ett litet grupprum som läraren hade bokat till mig på förhand. Läraren som var i klassrummet skickade ner elever i grupper om tre personer till mig i grupprummet för att genomföra undersökningen.

Eftersom den tidigare undersökning jag och två andra studenter gjort med negativa tal mest var av kvantitativt slag ville jag nu använda mig av en kvalitativ metod för att besvara frågan om hur några elever förstår sig på matematiska operationer med negativa tal.

Själva undersökningen gick till så att varje elevgrupp om tre personer fick två uppgifter rörande operationer med negativa tal. Eleverna i gruppen skulle lösa dessa två uppgifter tillsammans så att alla elever till slut förstod lösningen. Jag var närvarande i rummet under hela undersökningen med varje grupp men avbröt aldrig elevernas diskussion och gav inte heller någon hjälp. Eleverna filmades och spelades in så att jag kunde få med både det verbala och det visuella då gruppen försökte lösa uppgifterna. Anledningen till att jag ville filma eleverna var att min analysmetod krävde det för att kunna kombinera det verbala med det visuella till en helhetsanalys om elevernas förståelse.

De två uppgifter varje elevgrupp fick i uppgift att försöka lösa såg ut enligt följande:

Uppgifter till undersökningen:

1) Arbeta tillsammans och försök komma fram till en lösning av följande problem:

Om a = -7 och b = –3. Vad är då värdet av -2a + 3(2 – b)?

Ni är klara med uppgiften först då samtliga medlemmar i gruppen förstår lösningen. Förklara därför för varandra hur ni tänker.

2) Arbeta tillsammans och försök komma fram till en lösning av följande problem:

Förenkla: 2(x + y) − (2x − y) - (-3x+y)

Ni är klara med uppgiften först då samtliga medlemmar i gruppen förstår lösningen. Förklara därför för varandra hur ni tänker.

Lycka till!

Figur 4: *De två uppgifter som elever i grupper om tre tillsammans skulle försöka lösa.*

Jag ville att eleverna skulle diskutera sina idéer med varandra och slutligen lösa uppgiften så att alla i gruppen kunde förstå. Detta var anledningen till att jag valde att lägga till meningen *Ni är klara med uppgiften först då samtliga medlemmar i gruppen förstår lösningen. Förklara därför för varandra hur ni tänker.* Även för att Sfard & Kieran (2002) idé kring analys bygger på "*thinking as communicating*". Då jag först testade uppgifterna på en pilotgrupp märkte jag att en av eleverna tog kommandot och i princip löste uppgifterna själv. För att kunna få med de andra eleverna i gruppen i diskussionen valde jag därför att omformulera uppgiftsformuleringen enligt ovan.

3.3 Etik

Samtliga elever som ställde upp frivilligt i undersökningen hade fått information kring hur den skulle gå till i detalj. Jag var tydlig med att filmerna som jag skulle spela in på min mobiltelefon endast skulle ses av mig och ingen annan. Filmerna skulle överföras till min dator för vidare analys av materialet och jag var tydlig med att filmerna skulle läggas i en dold mapp tills det att analysen var klar. Därefter informerades eleverna om att jag skulle radera samtliga filmer från datorn då jag var klar med analysen, vilket nu också är gjort. Eleverna fick även information om att de skulle förbli helt anonyma i undersökningen. Detta såg jag till att göra genom att ersätta elevernas namn med *elev 1, elev 2 och elev 3*. Även skolan skulle förbli helt anonym vilket jag i mitt mail till läraren tydligt poängterade.

3.4 Validitet/reliabilitet

Begreppet reliabilitet kommer från det engelska verbet "*rely on*" vilket översatt på svenska blir "*lita på*". Vad reliabilitet handlar om är huruvida undersökningen är pålitlig; att den går att upprepa och då få samma resultat. Undersökningens reliabilitet svarar egentligen på frågan: Kan vi lita på att undersökningen ger samma resultat om vi upprepar den under så likartade förhållanden som möjligt? (Eliasson, 2013). En parallell till en våg dras av författaren för att exemplifiera reliabiliteten. En våg som hela tiden visar samma vikt om man ställer ett två kilos mjölkpaket på vågen har hög reliabilitet medan en våg som visar olika vikt för mjölkpaketet olika gånger inte har det (Eliasson, 2013).

Man kan konstatera rätt lätt att om en annan person hade utfört samma typ av undersökning på en annan skola med andra elever så hade personen i fråga fått andra diskussioner och inspelningar att transkribera och sätta sig in i. På så sätt är reliabiliteten låg eftersom undersökningen beror på vilka elever som deltar samt vilken skola undersökningen utförs på. Om en annan person skulle utföra undersökningen på exakt samma elever som jag gjorde hade personen fått in samma material eftersom eleverna hade haft liknande diskussioner. Dock kommer personen ifråga med allra största sannolikhet att analysera det inhämtade materialet annorlunda. Just att det är jag själv som valt vad som ska analyseras efter materialet spelats in försvagar naturligtvis reliabiliteten. Samma resultat fås men analysen av resultatet kan skilja.

Något annat som Eliasson, (2013) menar är viktigt för hög reliabilitet är att mätningarna (inspelningarna) görs på exakt samma sätt för alla deltagare i undersökningen. Detta var något som jag definitivt gjorde, samma utrustning och samma isolerade rum användes för samtliga fyra grupper i undersökningen. Systematiska fel minimerades även tack vare att det var ljudisolerat och att jag själv var närvarande vid undersökningen. Desto högre reliabilitet, desto bättre blir förutsättningarna till en hög validitet. Detta leder mig in på just begreppet validitet.

Begreppet validitet kommer från adjektivet *"valid"* som betyder giltig. Validitet handlar om huruvida undersökningen verkligen mäter det som det är meningen att den ska mäta. Även här drar Eliasson (2013) en parallell till vågen. Om man vill mäta sin vikt bör man naturligtvis använda en våg (med hög reliabilitet). Om man däremot vill mäta sin längd är vågen inget bra redskap eftersom vågen inte mäter det man vill mäta nämligen längden (Eliasson, 2013). För att få en hög validitet är det förutom att ha en hög reliabilitet också viktigt att vara tydlig med sin frågeställning och att man har planerat tydligt hur undersökningen ska gå till (Eliasson, 2013). Detta är två aspekter jag verkligen har fokuserat på vilket ökar validiteten av min undersökning.

Undersökningens sanningshalt är av stor vikt för den vetenskapliga trovärdigheten (Eliasson, 2013). Jag vet att det datamaterial som jag samlat in är giltigt eftersom jag medverkade i rummet då undersökningen tog plats. Jag anser även att jag har samlat in tillräckligt med information till det som krävs av min analysmetod då jag har transkriberat hela händelseförloppet under inspelningen, dels det som sägs men också det visuella. Något jag inte kan bedöma är hur mycket jag själv har påverkats av att vara med i rummet och lyssnat på alla elever. Kanske har jag redan innan jag börjat transkribera materialet en bild i huvudet av hur analysen kan komma att ske. Vidare anser jag att jag beskriver hur analysverktyget ska användas och att jag inte går utanför ramen i min analys av det inhämtade materialet.

Sammantaget bedömer jag min reliabilitet som ganska god och även min validitet som ganska god. Min undersökning mäter hur elever förstår operationer med negativa tal och andra begrepp såsom *distributiva lagen* med hjälp av de två analysmodeller som är beskrivna i *teoribakgrund* sedan är det upp till mig att försöka förhålla mig så mycket som möjligt till den kvalitativa analysmetod som jag valt att använda.

3.5 Analys/bearbetning

Bearbetning av undersökningsmaterialet gjordes med hjälp av en transkribering av materialet. Detta gjordes samma vecka som undersökningen tog sin start eftersom jag ville att transkriberingen skulle ske så tätt inpå undersökningen som möjligt. Jag transkriberade varje grupps händelseförlopp och tittade på vad som sades och vad som gjordes. Jag har sedan analyserat det transkriberade resultatet utifrån de analysmetoder som beskrivs i *bakgrunden*.

4. Resultat

Totalt deltog fyra grupper med tre elever i varje grupp i undersökningen. Några dagar innan själva undersökningen genomfördes hade jag testat mina undersökningsfrågor på en pilotgrupp. Jag fick bra gensvar från pilotgruppen och valde därför att inte ändra på något i min undersökning. Totalt medverkade alltså tolv elever indelade i fyra grupper och alla elever som ställde upp hade gjort det frivilligt. Efter att varje grupp kände sig klar ville eleverna veta hur man löste uppgifterna vilket jag också visade för eleverna innan de lämnade mig.

Grupp 1: Eleverna satt kring ett runt bord vända mot varandra. När gruppen gav sig på första uppgiften kändes det inte som att någon av de tre eleverna hade bra koll på området i fråga. Elev 1 i gruppen pratade väldigt mycket och det var oftast denne som förde diskussionerna framåt. Elev 2 diskuterade en del med och ville alltid ha något att komma med men i själva verket fungerade den här eleven mer som ett bollplank till elev 1. Den kvarvarande eleven i gruppen sade nästan ingenting under undersökningens gång och de få gånger denne yttrade något var när hen reagerade på något som de andra två eleverna hade sagt i from av ett "mm" eller ett "precis". Den här eleven var som sagt fåordig men hen verkade ändå intresserad av undersökningen. Den här gruppen kom fram till lösningar på båda uppgifterna i undersökningen; dock var ingen av lösningarna korrekta. Gruppen höll på i ca tretton minuter. Vad som var intressant med den här gruppen var att de verkligen försökte och mycket diskussioner och tankar flödade mellan eleverna i rummet. Jag hade lätt att följa elevernas resonemang och tankar på första uppgiften dock hade jag svårare för att göra detsamma under uppgift 2.

Grupp 2: Direkt när de hade satt igång fick jag en känsla av att de inte riktigt hade koll på matematiken överlag och framförallt inte när det kom till operationer med negativa tal och parentesuttryck. Ingen av de tre eleverna verkade bry sig speciellt mycket och det framkom tydligt i att det inte fördes så många diskussioner mellan eleverna. Eleverna satt mest o stirrade ner på uppgifterna. Efter ett tags tänkande försökte de till slut med att lösa uppgifterna utan vidare lyckat resultat. Eleverna i gruppen besatt tydliga brister i ämnet matematik vilket jag uppfattade väldigt tidigt. Efter ca 4 minuter gav de upp efter att ha försökt lösa uppgift 1 och utan att ha försökt med uppgift 2. Deras lösning var i hög grad felaktig och den var väldigt svår att följa då det förelåg brister inom ämnet matematik och framförallt inom aritmetik hos eleverna.

Grupp 3: Elev 1 tog kommandot direkt och visade på bra kunskaper medan de andra två eleverna mest satt bredvid och lyssnade. Även om jag tydligt i min frågeformulering hade nämnt att grupperna först var klara då samtliga elever i gruppen hade haft en chans att förstå valde den här eleven att exkludera de andra två eleverna. Självmant löste den här eleven uppgift 2 och denne gav även en lösning till uppgift 1 som dock var felaktig men det visade sig vara på grund av ett slarvfel. De andra två eleverna fick aldrig chansen att visa sina kunskaper vilket gjorde att elev 1 höll en monolog med sig själv fram till lösningen av de båda uppgifterna.

Grupp 4: Likt eleverna i grupp två uppvisade eleverna i den här gruppen tydliga brister inom ämnet matematik. Eleverna kom aldrig riktigt igång då de redan på första uttrycket i uppgift 1 körde fast. Redan på första uttrycket *-2a* hade eleverna problem med att förstå hur de skulle göra då de substituerat ut variabeln *a* till -7. Den här gruppen gav upp efter tre minuter utan att ens varit nära till att ge en lösning på uppgift 1.

Efter att ha satt mig in i alla gruppers resultat beslutade jag mig till slut för att analysera den första gruppens händelseförlopp. Anledningen till att jag valde just den första gruppen var att trots att de försökte i nästan tretton minuter med att lösa uppgifterna kom de inte fram till ett korrekt svar. Detta tyckte jag var väldigt intressant eftersom gruppen verkligen diskuterade med varandra och tillsammans försökte komma fram till lösningarna. Jag ville analysera gruppen i fråga just för att titta på vad det var som gjorde att de inte kom fram till rätta lösningar trots deras engagemang och vilja. En annan anledning till varför jag valde att analysera den första gruppen var just att diskussionerna var framträdande vilket skulle komma att ge mig ett större djup och bättre förståelse för elevernas förståelse. Jag har valt att kalla de tre gruppmedlemmarna för *elev 1, elev 2* och *elev 3*. *Elev 1, elev 2* och *elev 3* representeras av förkortningarna E1, E2 respektive E3 i tabellen för hela interaktiviteten under *bilaga 1*.

Nedan kommer jag att redogöra för händelseförloppet under den första gruppens försök till lösningar av de två uppgifterna i undersökningen. Händelseförloppet beskrivs i form av en tabell där det redogörs för vad som sades och vad som gjordes. Jag kommer endast att redogöra för de delar i interaktiviteten som har med de två uppgifterna att göra. Jag kommer inte att redogöra för hela tabellen nedan utan endast redogöra för den i form av en resulterande text. Vill man se hela tabellen med interaktivitet finns den under *bilaga 1* under rubriken **bilagor** längst ner i dokumentet.

Elev 1 börjar med att konstatera att gruppen fått ett värde för *a* och ett värde för *b*. *Elev 1* menar sedan att det första uttrycket *-2a* i uppgift 1 blir -2 och sen -7 och att dessa adderas genom uttalande [7] " *då blir det väl -2 va och sen -7 å de blir ju plus*". *Elev 1* och *elev 2* diskuterar nu mellan varandra huruvida uttalande [7] stämmer överens med vad de känner igen sedan tidigare. Slutligen är det *elev 1* tillsammans med *elev 2* som konstaterar att det första uttrycket inte kan bli något positivt. Detta kan man se tydligt i uttalande [14] och [17]. Samtidigt som *elev 1* och *elev 2* höll diskussion mellan varandra satt *elev 3* nästan helt tyst trots visad koncentration. Mellan händelseförloppet [20] - [33] försöker främst *elev 1* och *elev 2* komma fram till vad uttrycket inom parentesen blir. *Elev 2* menar först att " *det blir 2 minus 3*" i parentesen, [24]. Något som ska tilläggas är att *elev 3* känns mer närvarande nu än tidigare och kommer även med uttalandet att två minustecken blir plus, [28]. Gruppen kommer slutligen fram till att uttrycket i parentesen blir 5.

Detta kände jag själv var ett bra steg på vägen till en möjlig lösning av uppgift 1 trots att de i tidigare del redan hade förstått det första uttrycket fel. *Elev 3* fortsätter att vara fåordig men man märker tydligare nu att eleven känns mer intresserade av att hjälpa gruppen och inte bara verka koncentrerad för sig själv. Gruppen riktar nu tillbaka fokus på det första uttrycket *-2a*. Man märker att det i mångt och mycket är *elev 1* som sätter fart på gruppen och därmed styr vilket fokus gruppen har; detta kan man se i många uttalanden. Då gruppens fokus skiftar till det första uttrycket igen görs det då *elev 1* säger "*ehrm... då har vi kvar det andra*" [34]. Noterbart är att gruppen känner sig klar med det andra uttrycket utan att ha opererat bort parentesen vilket skulle komma att visa sig problematiskt.

Fokus på det första uttrycket varar inte länge utan det skiftar snabbt till att gruppen försöker lösa hela uppgiften genom att lägga ihop de två uttrycken och slutligen försöka komma fram till en lösning. Detta ser man tydligt genom händelseförloppet [36] - [43] där främst *elev 1* och *elev 2* försöker komma fram till den slutliga lösningen på uppgift 1 medan *elev 3* nu igen verkar lite ointresserad och endast svarar med "*mm*", [40]. Noterbart i detta händelseförlopp är att *elev 1* som ofta styr gruppens fokus verkar tro att talet 3 som står precis innan parentesen i uttrycket +3(2-b) figurerar som ett eget uttryck och alltså inte som ett sammansatt uttryck tillsammans med parentesen. Detta förstår man tydligt då *elev 1* uttalar sig i händelseförloppen [36], [38] och [39]. Eleven verkar inte förstå att det är en operation i form av multiplikation då vi ser till uttrycket +3(2-b). Även denna operation är något som eleverna i gruppen inte verkar ha förstått.

Då *elev 1* gör uttalande [44] samt [45] märker man att gruppen kommer komma fram till en felaktig lösning. Min förhoppning var att eleverna någon gång skulle tänka tillbaka på det första uttrycket och förstå att det var en operation innehållande två negativa tal multiplicerade med varandra men detta inträffade aldrig. Detta tydliggörs med ovanstående uttalanden där *elev 1* "styr" gruppen i fel riktning. *Elev 2* utgör startskottet för den slutliga lösningen på uppgift 1 genom att yttra " *jo för då blir det väl minus 9 plus 3 o då minus 6"* [46]. *Elev 2* menar här att det första uttrycket *-2a* blir -9 efter att de satt in variabeln *a* som -7 och att sen -9 + 3 (talet 3 innan parentesen) blir -6. *Elev 2* avslutar uppgift 1 med konstaterandet att -6 + 5 (talet 5 från operationen innanför parentesen) blir -1, [53]. Eleverna kände sig klara med uppgiften och deras lösning blev -1 vilket som sagt var felaktigt. Rätt svar på uppgift 1 skulle vara 29. *Elev 1* och *elev 2* var de två i gruppen som kom fram till lösningen även om *elev 1* var den mer styrande personen i gruppen. *Elev 3* var koncentrerad men bidrog inte direkt till något i gruppen och var väldigt tystlåten.

Nu började eleverna med att försöka lösa uppgift 2 på frågeformuläret och det var även här *elev 1* som fick gruppen att starta med uppgiften. Intressant i starten av arbetet med uppgift 2 är att *elev 1* yttrar ”*det här, det här är egentligen gånger ju*” [64] och ”*2 såhär parentes, de blir ju gånger*” [65] samtidigt som eleven pekar på det första uttrycket i uppgift 2, *2(x + y)*. Detta var något som gruppen inte lyckades förstå i uppgift 1 vilket jag kommer att beröra mer ingående i avsnittet *diskussion*. *Elev 1* börjar nu fundera på hur många *x* och hur många *y* de tre uttrycken totalt har gemensamt och man märker i händelseförloppet [68] - [75] att *elev 1* för en diskussion med sig själv. *Elev 3* är tystlåten som vanligt samtidigt som denne tittar ner på pappret medan *elev 2* verkar vara intresserad av att delta utan att inte riktigt få den chansen. Efter lite om och men yttrar slutligen *elev 2* " *förenkla är väl ändå smidigast om vi lägger ihop alla"*, [80], samtidigt som eleven pekar på och visar samtliga tre uttryck, ett efter ett för de andra två eleverna. *Elev 3* som inte verkar speciellt intresserad eller fokuserad svarar med ett "*a, mm"*, [81], medan *elev 1* vill veta hur *elev 2* tänker med sitt uttalande.

Mellan händelseförloppen [84] - [88] kommer *elev 1* som nu är med på spåret att förenkla uttrycken, tillsammans med *elev 2*, fram till att det totalt är 6*x* och 3*y* med samtliga tre uttryck inräknade. *Elev 3* sitter återigen tyst och tänker för sig själv. *Elev 2* säger bestämt att gruppen ska försöka få bort parenteserna, [89]. Yttrandena [95] och [96] från elev 2 respektive *elev 1* tyder ändå på att de besitter vissa kunskaper kring operationer med negativa tal i parentesuttryck och här kan man lätt tro att eleverna är något på spåren. Först vid uttalande

[100] från *elev 2,* började gruppen bearbeta varje parentesuttryck för sig. *Elev 2* började nu skriva om det första parentesuttrycket, *2(x + y)*. Detta gör *elev 2* med huvudräkning och påstår sig veta att uttrycket blir *2xy* [104]. Detta är felaktigt eftersom *elev 2* inte applicerar distributiva lagen för att slutligen få det korrekta uttrycket *2x + 2y*. Varken *elev 1* eller *elev 3* har några synpunkter på detta och eleverna fortsätter nu att jobba med de andra två parentesuttrycken.

Elev 1 tar nu på sig ansvaret att försöka tolka det andra parentesuttrycket, *- (2x - y)*. Efter snabba tankar för sig själv kommer *elev 1* lite osäkert fram till att det andra parentesuttrycket blir *2x - y*. *Elev 1* är lite osäker på svaret först men efter vaga bekräftelser från *elev 2* och *elev 3* som "*mm*" och "*jo*", [108] och [109], köper alla i gruppen svaret. Noterbart är att eleverna i gruppen inte förstår betydelsen av att ett minustecken står framför parentesen vilket gör att de får uttrycket till *2x - y* istället för det korrekta *-2x + y*. Trots att de nämnt i tidigare uttalande att minustecknet framför parentesen betyder att parentesuttrycket byter tecken. Tydligt är att eleverna inte har förstått detta fullt ut. *Elev 1* börjar nu med att försöka tolka det sista parentesuttrycket, [110] - [114], men detta är något som gruppen aldrig gör klart. Detta förstår man tydligt genom att *elev 1* yttrar "*men ska man skriva -3x + y?"*, [113]. Än en gång har de inte förstått innebörden av att ett minustecken befinner sig framför ett parentesuttryck. Eftersom *elev 1* så ofta styr var gruppens fokus ska ligga så blir det svårt för de andra att kunna ta sig in i diskussionen och säga något som kan förändra gruppens tankar.

Från och med uttalande [115] och fram till elevernas slutliga lösning var det lite svårt för mig att tyda och se vad gruppen menade med sina uttalanden samt vad de gjorde. Nedan kommer jag att redogöra för händelseförloppet från interaktivitet [115] och fram till [170] då eleverna kände sig klara med uppgift 2. Jag kommer här presentera resultatet i tabellform av den anledningen att läsaren lättare ska kunna följa händelseförloppet under denna interaktivitetsperiod då den var rätt svårtolkad och då framför allt för dem som inte kunnat se filminspelningen. Jag kommer även att redogöra för interaktivitetsperioden i form av en resulterande text som tidigare.

Interaktiviteten för vad som sades och vad som gjordes mellan [115] - [170]:

Vad görs?	**Vad sägs?**
[110]-[116] E1. försöker lösa den sista parentesen. E1. är lite tveksam i sin utläggning men E2. och E3. litar på E1. E1 får det sista parentesuttrycket till -3x + y. [] [] [] [] [] [] [117]-[132] E1. och E2. diskuterar sinsemellan om vilken betydelse minustecknen har i varje uttryck. De verkar inte komma fram till något specifikt utan är mest frågande till varandra. E3. ser lite vilsen ut och svarar med "mm". []	[115] E2: Mm o så bara lägger vi ihop dom. [116] E3: Mm, aa [117] E2: Osså har vi 2 minustecken där.. [118] E1: Vad var det du gjorde nu? [119] E1: A du gör så, så 2x, vänta 2xy sen blir det minus va [120] E2: Mm [121] E1 : Sen blir det minus va? [122] E1: Minus... [123] E2: 2xy [124] E1: Mm o sen minus y eller? På andra.. [125] E1: O sen plus eller [126] E2: A för det var två minustecken. [127] E1: A just de, mm [128] E1: Mm o sen blir de 3 bara då [129] E2: Mm [130] E1: O sen x plus y [131] E2: Mm [132] E3: Mm [133] E1: Då har, många x har vi för det första, vi har 6 styckna va? Eftersom att det är gånger nu [134] E2: Mm [135] E2: Den försvinner... [136] E1: Vilken? [137] E3: Hur menar du? [138] E2: Eller va? [139] E1: Asså den här 2xy o sen 2x men eftersom att det är gånger. [140] E1: Asså de är typ vilken som har mest o de är väl x [141] E2: Hur menar du? [142] E1: Ne men asså man, jag fick lära mig att man skulle ta, vad heter det de som har mest. [143] E1: Antingen x eller y typ, jag vet inte [144] E1: Eftersom att det är minus framför 2y blir det ju y [145] E1: Eller hur? [146] E2: Aa [147] E3: Mm [148] E1: O sen på x blir det ju... de blir 12x [149] E2: Hur får du det till 12? [150] E1: 2 asså gånger 2 får jag det till eller

[133]-[170] E1. och E2. för en väldigt svårtolkad diskussion kring hur de slutligen ska lösa uppgiften. E3. verkar inte alls intresserad längre men ställer ändå frågor som "hur menar du?". E1. och E2. resonerar fram o tillbaka, främst kring huruvida de ska använda gånger eller minus/plus i varje uttryck. De kommer slutligen fram till lösningen 3x + y. De är nu klara med båda uppgifterna. [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] []	är det att man ska plussa bara? [151] E2: Tror bara man ska plussa för jag..... [152] E1: Isåfall blir det ju... [153] E2: 2 minus 2 plus 3... x [154] E1: Isåfall blir de ju 7 [155] E1: Eller... [156] E3: 2 minus 2 plus 3... [157] E1: A just de är minus där [158] E2: De är väl 3x o y [159] E1: De blir bara 3x eftersom du satte minus [160] E1: Så då blir de väl 3x [161] E2: O, y [162] E1: Men vi måste ju ha något emellan, [163] E1: Plus eller minus? [164] E1: E de inte plus? Eller? [165] E1: Plus, plus y [166] E1: Hängde du med? [167] E3: Ja jag hängde med. [168] E1: Då var vi klara då.. [169] E3: Mm [170] E2: Tror de.

Tabell 1: *Vad görs? Vad sägs?*

Gruppen började nu försöka lägga ihop alla uttryck efter att de känt sig klara med de tre parentesuttrycken. Hela händelseförloppet mellan [119] - [132] var lite luddigt och eleverna visade inget tydligt fokus vare sig i språk eller i gester men tydligt är i alla fall att *elev 1* och *elev 2* har en diskussion mellan varandra angående minustecknens betydelse för varje uttryck. Uttalande [125] och [126] av *elev 2* respektive *elev 1* är svåra att tyda eftersom jag inte kunde se vart elevernas fokus låg men de verkar ju vara något på spåren. Detta var även något som eleverna i fråga inte hade förstått i tidigare händelseförlopp. Noterbart är att det är svårt att se och förstå huruvida eleverna har förstått att två minustecken leder till plus eftersom de i ena stunden kan säga det men i andra inte applicera det. Vidare försökte *elev 1* förklara för de andra eleverna att den variabeln *x* eller *y* som är störts ska på något sett ha en betydelse för den fortsatta lösningen vilket inte är fallet. *Elev 3* är tystlåten och man får en känsla av att eleven i fråga har gett upp. Man märker tydligt att eleverna är lite förvirrade av alla uttryck då *elev 1* nämner "*o sen på x blir det ju... de blir 12x*", [149].

Från att gå från en aning förvirrade till att helt plötsligt ha en lösning kändes konstigt för mig men gruppen kom tillslut fram till att lösningen på uppgift 2 blev $3x + y$. Det korrekta svaret på uppgift 2 skulle vara $3x + 2y$. Eleverna hade på något sätt kommit fram till en lösning trots att de visat upp bristande kunskaper kring hantering av parentesuttryck med negativa tal. Gruppen var nu klar med de två uppgifterna i undersökningen [170].

4.1 Fokusanalys

Nedan följer en tabell på vad eleverna för tillfället har för *avsett* och *uppmärksammat* fokus. Tabellen är gjord utifrån Anna Sfard och Carolyn Kierans utvecklade modell för fokusanalys som går att finna under avsnittet *teoribakgrund*. Varje elev i gruppen analyseras med hjälp av *uppmärksammat* fokus och *avsett* fokus. Med *avsett fokus* menar jag vad eleverna har för egentlig aviskt med ett uttalande och med *uppmärksammat fokus* menar jag var elevernas uppmärksamhet fokuseras på. Denna fokusanalys bygger just på att försöka hitta elevernas *avsedda fokus*. Jag kommer att använda mig av förkortningar och matematiska termer i tabellen.

Elev 1			Elev 2			Elev 3		
Uttalat	Uppmärks	Avsett	Uttalat	Uppmärks	Avsett	Uttalat	Uppmärks	Avsett
[7] "Då blir det väl -2 va och sen -7. Å de blir ju plus."	Uttrycket -2a	Utbyte av variabel a						
[14] "Men dom sitter inte bredvid varandra"	Uttrycket -2a	-2-7, minustecknen sitter inte bredvid varandra						
			[17] "Det är bara när dom sitter bredvid varandra då det är så.	Uttrycket-2a	-2-7 inte positivt			
			[24] "De blir 2 minus 3"	Uttrycket i parentesen	(2-3)			
						[28] "minus minus, plus plus"	Uttrycket i parentesen	(2--3)
[32] "de blir ju 5"	Uttrycket i parentesen	(2--3)						
[44] " Blir det inte att den sänker då?"	Uttrycket -2a	minus minus sänker						
			[46] " Jo för då blir det väl minus 9 plus 3 o då minus 6. "	Uttrycket -2a plus termen 3	-9+3			
			[53] " minus 6 plus 5 då blir det väl minus 1"	Alla uttryck	Slutlig beräkning			

[60] "Nästa då, här har vi ju ingen aning vad det är"	Uppgift två	Inget värde på x eller y						
[65] "2 så här parentes, de blir ju gånger"	Pekar på uppgiften	2(x+y)						
			[80] "Förenkla är väl ändå smidigast om vi lägger ihop alla"	Samtliga tre uttryck	Lägg ihop alla uttryck			
			[89] "Då ska vi då få bort parenteserna"	Alla parentesuttryck	Förenkla parentesut trycken			
			[95] " Skulle man byta tecken i parentesen eller hur var det?"	Uttrycken: -(2x-y) och -(-3x+y)	Få bort parenteser na			
[96] "Ja när man har ett minustecken framför parentesen"	Minustecknet framför parentesen	Byta tecken i parentesen						

[102] "Vi börjar med den då, 2 parentes x plus y "	Första uttrycket	Lösa alla parenteser för sig						
			[104] ": De blir ju 2xy eftersom det är gånger 2."	Första uttrycket	2(x+y) blir 2xy			
[106] "O här blir det då 2x minus y, eller?"	Andra uttrycket	-(2x-y) blir 2x-y						
[113] "Men ska man skriva minus 3x plus y?"	Elev 2	Lösa -(-3x+y)						
			[117] "Osså har vi 2 minustecken där.."	Två minustecken	-(-3x			
[133] "Då har många x har vi för det första, vi har 6 styckna va? Eftersom att det är gånger nu"	Alla uttrycken	Lägga ihop alla x						

[144] "Eftersom att det är minus framför 2y blir det ju y"	Hela uppgiften	?						
			[153] "2 minus 2 plus 3… X"	Alla uttryck	Lösa ut alla x			
			[158] "De är väl 3x o y"	Hela uppgiften	Lösa ut alla x och y			
[162] "Men vi måste ju ha något emellan. "	Elev 2	+ eller - mellan 3x och y						

Tabell 2: *Fokusflödesanalys*

I fokusflödestabellen ovan kan man se hur elevernas skiftande fokus och tankegångar har tagit dem fram till de två lösningar eleverna slutligen fick. Eleverna använder sig sällan av ett korrekt matematiskt språk vilket man tydligt kan se i *bilaga 1* och i *tabell 2*. Väldigt få matematiska termer används och elevernas språk kan uppfattas som ett mer vardagligt språk där matematiska termer nästan helt utelämnas (Sfard & Kieran, 2002). De tröskelbegrepp som jag ansåg vara viktiga används nästan aldrig vilket antagligen får konsekvensen att eleverna inte kommer fram till någon korrekt lösning. Det känns som att eleverna inte har kunnat skapa sig en helhetförståelse och därmed inte förstår området som något strukturellt (Sfard, 1991). En av de viktiga funktionerna som tröskelbegrepp har är just den integrerande faktorn. Hade eleverna använt sig mer av vad som kan vara tröskelbegrepp för uppgifterna kanske de hade fått en bättre helhetsförståelse och därmed kunnat integrera sin kunskap till en helhet och alltså då förstå innehållet som något strukturellt (Pettersson, 2010).

Ett exempel på ett viktigt tröskelbegrepp för uppgifterna som jag ansåg viktig var *distributiva lagen*. Man kan se att *elev 1* inte använder sig av ett matematiskt språk i uttalande [65] ”*2 såhär parentes, de blir ju gånger*”. Eleven syftar på uttrycket *2(x+y)* i uppgift 2. Hade *elev 1* istället för att yttra [65] använt sig av tröskelbegreppet *distributiva lagen* hade möjligen de andra två eleverna kunnat koppla detta tröskelbegrepp till tidigare inlärd kunskap och då kanske förstått hur räkneoperationen skulle utförts (Pettersson, 2010). Istället fick de uttrycket *2(x+y)* till *2xy* vilket kom att hindra deras chans att lösa uppgift 2 korrekt. Något som *elev 1* och *elev 2* verkar ha förstått i viss mån är *minustecknets betydelse* framför ett parentesuttryck. Detta ser man tydligt i *tabell 2* i uttalande [95] och [96] då eleverna i fråga har en diskussion mellan varandra angående detta. Eftersom att det oftast är elev 1 som styr vilket *avsett fokus* gruppen har får detta konsekvensen att de andra två elevernas *uppmärksammade fokus* blir kretsande kring *elev 1*. Vikten av att använda sig av tröskelbegrepp och ett matematiskt språk blir därför stor för *elev 1*. Eftersom *elev 1* nästan aldrig använder sig av ett matematiskt språk och dess termer som kan vara tröskelbegrepp styrs de andra två eleverna in i ett mer vardagligt språk (Sfard & Kieran, 2002).

Eftersom uppmärksammat fokus ofta skiftar och nästan aldrig är stabilt för *elev 1* tyder detta på att eleven inte har tillgodogjort sig tillräckligt med kunskap för de olika begreppen som krävs för att kunna förstå räkneoperationerna (Sfard & Kieran, 2002). Detta ser man tydligt i *tabell 2* då *elev 1* ofta måste få en bekräftelse på det denne yttrar. I uttalande [106] och [113] till exempel är eleven inte riktigt säker på vad hen tänker och uttalar sig därför i en mer frågande form där *elev 1* väntar på en reaktion ifrån framförallt *elev 2*. *Elev 3* och i viss mån *elev 2* litar på att *uppmärksamhetsfokus* och *uttalat fokus* för *elev 1* står i linje med varandra då framförallt *elev 3* saknar stabiliteten i *avsett fokus* för att kunna driva gruppen framåt (Sfard & Kieran, 2002). *Elev 2* är mer deltagande än vad *elev 3* är och för ofta gruppens *avsedda fokus* framåt då *elev 1* inte göra detta.

Det syns tydligt i fokusflödesanalysen att det är *elev 1* som ofta styr gruppens *avsedda fokus* även om *elev 2* ibland också kan styra detta. Om vi ser till vad eleverna uttrycker för att förstå i form av ”*tänkande som kommunikation*” får man reda på att även om *elev 1* uttrycker sig ofta vilket vi skall se tydligt i det interaktiva flödesschemat (*bilaga 2*) så är elevens kunskap fragmenterad där alla bitar inte riktigt fallit på plats (Pettersson, 2010). *Elev 2* uttrycker sig inte lika ofta men visar på en bättre kunskap kring räkneoperationer med negativa tal vilket man kan se genom uttalande [17], [80], [89], och [95] i *tabell 2* där elevens *avsedda fokus* är i rätt spår. Uttalandena visar kanske inte direkt på konkret kunskap och förståelse men det gör att gruppen får rätt riktat *uppmärksamhetsfokus* och *avsett fokus* (Sfard & Kieran, 2002). När det kommer till att försöka förstå *elev 3* förståelse blir det svårare då *elev 3* nästan aldrig uttrycker sig förutom de gånger då eleven ger av sig reaktioner i form av ”*mm*” och ”*a*”. Med verktyget ”*tänkande som kommunikation*” krävs det att en elev är aktiv i gruppens diskussion för att man ska kunna analysera elevens förståelse vilket som sagt blir svårt för *elev 3* (Sfard & Kieran, 2002).

Uttalande [96] och [106] från *elev 1* kan tyda på att eleven befinner sig i det ”*liminala rummet*” då eleven i uttalande [96] yttrar ”*Ja när man har ett minustecken framför parentesen*” vilket eleven då korrekt menar att tecknet i parentesen byts från plus till minus och vice versa om ett minustecken står framför ett parentesuttryck. Detta är något eleven sedan inte visar kunskap på i uttalande [106] *”O här blir det då 2x minus y, eller?”* där eleven menar att uttrycket $-(2x - y)$ i uppgift 2 blir $2x - y$ och därmed inte förstår betydelsen av ett minustecken framför ett parentesuttryck. Detta är som sagt ett tydligt tecken på att eleven kan befinna sig i det ”*liminala rummet*” (Pettersson, 2010).

Två av de tröskelbegrepp som jag ansåg vara viktiga för de två uppgifterna var *minustecknets betydelse* och *distributiva lagen* och dessa begrepp skulle visa sig ha en avgörande roll till varför eleverna inte kunde finna de korrekta lösningarna till uppgifterna. Som vi ser i ovanstående exempel med uttalande [96] och [106] behärskar inte *elev 1 minustecknets betydelse* till fullo vilket får konsekvenser för deras kommande lösning på uppgift 2 då gruppens *avsedda fokus* oftast styrs av *elev 1*. Eleverna behärskar inte heller begreppet *distributiva lagen* till fullo vilket man tydligare kan se i uttalande [65] där eleven inte använder sig av *distributiva lagen* för att förenkla parentesuttrycket rätt. Hade eleverna och framförallt *elev 1* använt sig av de tröskelbegrepp som jag ansåg viktiga för uppgifterna så hade gruppen kanske kunnat tillgodogöra sig en integrerande kunskap som just tröskelbegrepp ämnar bidra med (Pettersson, 2010).

4.2 Avsiktsanalys

Avsiktsanalysen är gjord utifrån det interaktiva flödesschema som går att finna i *bilaga 2.* I flödesschemat ser man tydligt att *elev 1* har en stor mängd uttalanden och kommentarer vilket vi även kan se i *bilaga 1.* Eftersom vi konstaterade i fokusanalysen att *elev 1* inte ofta använde sig av matematiska termer och matematiska begrepp visar avsiktsanalysen att eleven ofta har avsikter på *metanivå* (Sfard & Kieran, 2002). Detta kan vi se tydligt i uttalanden [65] och [68] i början av uppgift 2. Eleven går från att i uttalande [65] tänka på vad det första uttrycket blir till att i uttalande [68] helt vända fokus på att försöka samla ihop alla uttryck som innehåller termen *x.* Eleven gör även uttalanden som avses vara på *objektsnivå* men eftersom elevens språk är så vardagligt kan det lätt uppfattas som att även dessa uttalanden är på *metanivå* (Sfard & Kieran, 2002); se till exempel uttalande [60] och [133]. Detta är det Sfard & Kieran (2002) menar är svårt att uppfatta. Att avsikter på *objektsnivå* och *metanivå* lätt kan kolidera. Även om elev 1 uttalanden både är av *proaktiv* och *reaktiv* karaktär får man en känsla av att eleven ibland bara vill att gruppen ska gå framåt i snabb takt för att kunna finna en lösning. *Elev 1* vill nog få det att synas som om hen kan mer än vad hen egentligen kan (Sfard & Kieran, 2002).

Elev 1 har på många ställen en stark vertikal linje mellan sina uttalanden vilket vi kan se i det interaktiva flödesschemat. Detta är en indikator på att eleven inte är speciellt intresserad av de andra två elevernas förståelse (Sfard & Kieran, 2002). Även om vissa uttalanden från *elev 1* är i form av en fråga som sökes bekräftelse på blir det lätt att eleven tänker en kort stund för att sedan svara på sitt egna påstående. Detta syns tydligt i uttalande [9], [12] och [14] i *bilaga 1* där eleven i uttalande [9] yttrar påståendet ”*Nä men asså det är ju minus här o sen är det minus där, blir det inte plus då?*”. Här känner sig *elev 1* inte riktigt säker på sitt påstående och yttrar därför påståendet som en fråga. *Elev 2* svarar *reaktivt* med ”*Hmm?*”, [10] och *elev 3* svarar något förvirrande med det reaktiva ”*minus minus*”, [11]. *Elev 1* får inte något klart svar från de andra två eleverna men fortsätter ändå med uttalande [12] och [14] vilket som sagt tyder på att eleven inte direkt är intresserad av att låta de andra eleverna komma in i diskussionen (Sfard & Kieran, 2002). Ett annat tydligt exempel på detta är händelseförloppet [142] – [145].

Man kan tydligt se i det interaktiva flödesschemat (*bilaga 2*) att *elev 2* ofta uttrycker sig *reaktivt* gentemot vad *elev 1* påstår. Detta ser vi genom att *elev 2* i sin spalt har många snett uppåt riktade pilar mot de påståenden *elev 1* yttrat (Sfard & Kieran, 2002). *Elev 2* yttrar sig inte bara *reaktivt* mot vad *elev 1* säger och gör utan har även en del *poraktiva yttranden*. De *proaktiva yttranden* som *elev 2* gör är oftast mer givande än vad *elev 1 proaktiva yttranden* är för gruppens framfart i uppgifterna. Ett exempel på detta är uttalande [80] och [89] rörande uppgift 2. Dessa två påståenden ”*Förenkla är väl ändå smidigast om vi lägger ihop alla*”, [80] och ”*Då ska vi då få bort parenteserna*”, [89] gör att gruppens fokus hamnar på rätt spår gällande hur man ska gå tillväga för att lösa uppgift 2. Även om de slutligen inte löser uppgiften är det värt att notera dessa uttalanden från *elev 2*. Eleven visar härmed att hen har avsikter på *objektsnivå.* Detta ser man också tydligt i flödesschemat där spalten för *elev 2* visar många *proaktiva* pilar som är riktade snett nedåt och som oftast inte besvaras av sig själv (Sfard & Kieran, 2002). Detta är ett tecken på att *elev 2* är fokuserad på att lösa uppgifterna samt att eleven visar intresse för vad de andra eleverna har att säga.

Elev 3 gör få uttalanden vilket man återigen tydligt kan se i det interaktiva flödesschemat. Även om eleven verkade vara koncentrerad i större delar av undersökningen (med undantag ifrån de sista två minuterna) avslöjar flödesschemat att *elev 3* inte är intresserad av att *proaktivt* bidra framåt i undersökningen (Sfard & Kieran, 2002). *Elev 3* ger nästan bara av sig reaktiva uttalanden (svar) på de andra två elevernas uttalanden vilket vi tydligt kan se i det interaktiva flödesschemat där spalten för *elev 3* nästan bara innehåller snett uppåt riktade pilar (Sfard & Kieran, 2002). Man ser det extra tydligt då *elev 3* nästan helt blir exkluderad ifrån händelseförloppet då *elev 1* och *elev 2* nästan under hela undersökningen för en diskussion mellan varandra vilket går att se i flödesschemat där *elev 1* och *elev 2* har väldigt många interaktiva pilar riktade mot varandra (Sfard & Kieran, 2002).

Vad jag fått reda på sammantaget med hjälp av de två analysmetoderna *fokusanalys* samt *avsiktanalys*:

Elev 1 är aktiv och gör väldigt många uttalanden och även om eleven gör många *proaktiva* uttalanden så är det mestadels i form av frågor. Eleven använder väldigt sällan korrekta matematiska termer och tröskelbegrepp. Detta är tydliga tecken på att eleven har en begränsad förståelse för de operationer som krävs för uppgifterna. Eleven har till exempel inte tillgodogjort sig tröskelbegreppen *distributiva lagen* och i viss mån inte heller *minustecknets betydelse* samt *addition, multiplikation och subtraktion med negativa tal*. Det pekar även på att eleven försöker ge sken av att hen kan mer än vad hen egentligen kan. Eleven gör rätt ofta uttalanden på *metanivå* vilket är en indikator på att eleven i fråga inte är speciellt intresserad av de andra elevernas förståelse samt att hen vill att gruppen snabbt ska ta sig igenom uppgifterna (Sfard & Kieran, 2002). Eleven bidrar ändå till att försöka ge gruppen nya perspektiv även om de ibland är felaktiga. Elevens *avsedda fokus* blir i mångt och mycket det gruppen rättar sig till.

Elev 2 är också aktiv i undersökningen och gör inte lika många *proaktiva* uttalanden som *elev 1* men det är uttalanden som i sin tur är mer *proaktiva* i den mån att de för gruppen framåt i rätt riktning och därmed ibland skiftar det *avsedda fokus* som *elev 1* satt upp till något korrekt som gruppen borde följa. Elev 2 svarar ofta *reaktivt* på vad *elev 1* yttrar vilket är en indikator på att *uppmärksammat fokus* för *elev 2* oftast är riktat mot vad *elev 1* yttrar (Sfard & Kieran, 2002). *Avsiktsanalysen* och *fokusanalysen* visar på att *elev 2* har mer avsikter på *objektsnivå* än vad *elev 1* har vilket tyder på att *avsett fokus* för *elev 2* mer är riktat mot det faktiska innehållet i uppgifterna (Sfard & Kieran, 2002). Även *elev 2* försöker bidra till gruppens framfart och gör det mer korrekt än vad *elev 1* gör. Sammantaget känns det som att *elev 2* hålls tillbaka lite av *elev 1*. En del uttalanden från *elev 2* tyder på att eleven kanske kan mer än vad som framhålls såsom i uttalande [29], [80] och [126].

Elev 3 yttrar sig få gånger vilket det interaktiva flödeschemat tydligt avslöjar samtidigt som de få uttalanden eleven gör är av *reaktiv* karaktär. Elevens pilar är riktade snett uppåt mot de andra två eleverna vilket tyder på att eleven inte kommer med några *proaktiva* uttalanden. Detta pekar på att eleven ofta bara är intresserad av att ”flyta” med i händelseförloppet. Jag får ingen direkt känsla av att eleven överhuvudtaget har någon förståelse för de räkneoperationer som krävs för att lösa de två uppgifterna. Eleven visar heller inte någon förståelse för de tröskelbegrepp som jag ansåg viktiga för uppgifterna. Sammantaget går det inte med hjälp av de två analysmetoderna *fokusanalys* och *avsiktsanalys* att bilda sig en förståelse för elevens förståelse kring räkneoperationer med negativa tal.

5. Diskussion

5.1 Resultatdiskussion

Även om mitt arbete har fokus på räkneoperationer med negativa tal kom jag att hitta andra viktiga begrepp då de två analysmetoderna användes. En punkt som kom fram ur analysen var begreppet *distributiva lagen* som har hjälpt mig ännu mer till att få en förståelse för elevernas förståelse. Begreppet *distributiva lagen* som jag även ansåg som ett viktigt tröskelbegrepp var en av anledningarna till varför eleverna i gruppen inte kunde komma fram till korrekta lösningar.

Det första som slog mig var att elva av tolv elever som deltog i undersöknigen inte besatt de kunskaper som krävdes för att lösa de två uppgifterna. Med tanke på att elever som går årskurs två på gymnasiet ska kunna behandla dessa räkneoperationer känns det oroväckande. Jag kan inte hindras ifrån att dra en parallell till Johanssons (1998) artikel om förkunskapsbrister i gymnasiet. Den lärare som arbetar och kommer att arbeta med den grupp av elever som deltog i min undersökning kommer att behöva möta eleverna på en lägre nivå än vad de ska behöva göra (Johansson, 1998). Den grupp av elever som analyserades hade ingen djup och förankrad kunskap kring de räkneoperationer som uppgifterna innehöll. Jag märkte tydligt att eleverna inte skulle klara någon av de två uppgifterna då deras ”*avsedda fokus*” oftast inte var stabilt nog. Detta är något som kan kopplas till begreppet ”*liminialt stadium*”. *Elev 1* var den elev som oftast styrde gruppens ”*avsedda fokus*” men eftersom *elev 1* ibland kunde hamna i ett ”liminalt stadium” där eleven i ena stunden verkade förstå något men i andra inte blev de andra två eleverna i gruppen osäkra på vad som egentligen stämde (Pettersson, 2010).

Något som jag tror hade kunnat hjälpa gruppen i deras lösningar är tröskelbegrepp. En av de egenskaper begreppet ”*tröskelbegrepp”* har är just den integrerande faktorn. Ett tröskelbegrepp såsom *minustecknets olika betydelser* eller *distributiva lagen* hade kanske kunna förankra elevernas nuvarande kunskaper med vad de lärt sig tidigare och på så sätt kunna erhålla sig en bättre förståelse (Pettersson, 2010). Eleverna använde sig väldigt sällan av matematiska termer vilket ledde till att användningen av tröskelbegrepp nästan helt uteslöts. För att ge ett exempel på vad användandet av termen ”tröskelbegrepp” hade kunnat bidra med kan vi se till ett uttalande från *elev 1* ”*2 såhär parentes, de blir ju gånger*”, [65]. Om eleven istället hade uttalat sig i mer matematiska termer samt använt sig av tröskelbegreppet *distributiva lagen* tror jag att gruppen vid detta tillfälle hade förstått sig på räkneoperationen bättre.

Något annat som var intressant att upptäcka var elevernas olika avsikter med varje uttalande. *Elev 1* yttrade många uttalanden med avsikter på *metanivå* medan *elev 2* hade mer avsikter på *objektsnivå (*Sfard & Kieran, 2002*)*. Just avsikten eleverna har med sina uttalanden säger en del om hur de tänker. *Elev 1* var mer fokuserad på att klara uppgiften på så kort tid som möjligt än att faktiskt förstå de räkneoperationer som utförts medan *elev 2* hade mer fokus på att förstå innehållet. Hade *elev 1* haft mer avsikter på *objektsnivå* kanske gruppen hade haft en större chans till att klara uppgifterna. Som sagt användes väldigt få matematiska termer och begrepp vilket gav känslan av att eleverna inte riktigt visste vad de höll på med stundtals (Sfard & Kieran, 2002). Detta märks framförallt i sista delen av undersökningen då eleverna helt plötsligt kommer fram till en lösning av uppgift 2. Vad som var synd var att jag inte riktigt kunde förstå vissa delar av det sista händelseförloppet vilket gjorde det svårare för mig att sätta sig in i elevernas tankar under denna period.

Att eleverna aldrig använde sig av tröskelbegreppet ”*distributiva lagen*” var för mig väldigt förvånande. Något annat som förvånade mig var just att eleverna i gruppen inte lyckades förstå det första uttrycket i uppgift 1 -*2a* korrekt. Eleverna fick uttrycket till -9 då det egentligen ska vara 14. Som jag förstått det var det de två minustecknen som ställde till med problem för eleverna. Eleverna förstod inte att det var en räkneoperation innehållande *multiplikation* av två negativa tal utan såg uttrycket istället som en *subtraktion* av två negativa tal. Intressant här är att eleverna antagligen hade förstått uttrycket korrekt om det hade varit två positiva tal.

Ur det interaktiva flödesschemat var det intressant att se hur interaktiviteten fram till de två lösningarna såg ut för varje elev. Ur flödesschemat kan man se att *elev 1* och *elev 2* ständigt höll en diskussion med varandra även om *elev 1* ibland använde *elev 2* som ett ”bollplank” medan *elev 3* helt var utesluten. Intressant här är att försöka bilda sig en uppfattning kring hur det hade kunnat se ut i en annan grupp av elever där kanske samtliga tre elever bidrar med *proaktiva* uttalanden. Jag har fått en tydligare förståelse för hur en interaktivitet mellan elever i en lärandesituation kan se ut och därmed skapat mig ett verktyg som kan hjälpa mig i mitt framtida yrke som lärare.

Om vi ser till de tre processerna *interiorization*, *condensation* och *reification* som Sfard, (1991) belyser i sin artikel ville jag kunna hitta en tydlig linje i elevernas tankeprocesser. Dock var detta något som jag inte riktigt kunde se för någon av de tre eleverna i gruppen. Eleverna blev introducerade till två problem men kunde aldrig förstå de två problemen som någon helhet. Det uppkom många hinder på vägen och jag vill påstå att eleverna ofta fastnade i processen *condensation.* Eleverna kunde inte utföra korrekta räkneoperationer med negativa tal vilket gjorde att eleverna inte heller kunde nå den slutliga processen *reification*. Eleverna kunde inte skapa sig en helhetsförståelse för räkneoperationerna och därmed inte se problemen som något bekant och tillämpningsbart (Sfard, 1991). Detta var synd eftersom min förhoppning var att jag tydligt skulle kunna följa varje elevs förståelse genom de tre processerna *interiorization*, *condensation* och *reification*. Man kan sammanfatta det som att eleverna kämpade på i den *operationella* processen utan att aldrig lyckats nå den *strukturella* fasen då eleverna kan förstå räkneoperationer med negativa tal som en helhet (Sfard, 1991).

5.2 Metoddiskussion

Något som jag hade kunnat göra annorlunda i min undersökning skulle kunna vara att poängtera betydelsen av samarbete på en tydligare nivå. Även om *elev 1* och *elev 2* ofta samarbetade så lämnades *elev 3* helt utanför vilket gjorde att jag inte kunde analysera *elev 3* med hjälp av de två analysmetoderna. Jag beskrev det tydligt i konstruktionen av uppgifterna men jag hade även kunnat vara tydligare med det innan eleverna började arbeta med uppgifterna. Nu kan det ha varit som så att *elev 3* rent av inte hade några kunskaper kring operationer med negativa tal vilket jag tror var fallet men detta är något jag inte kan säga med säkerhet. Då jag konstruerade mina uppgifter tänkte jag först ha med en modelleringsuppgift vilket antagligen hade gett mig mer insikt i elevernas tankegångar men detta var något som jag slutligen ansåg vara för svårt för eleverna. Hade jag gjort undersökningen på nytt tror jag däremot jag hade velat testa att ha med en sådan uppgift. En annan sak jag hade valt att göra annorlunda är att använda mig av två eller tre olika pilotgrupper för att kunna testa flera olika uppgifter.

Jag hade även velat ha med elever ifrån olika klasser i min undersökning istället för elever med samma inriktning. Det hade gett mig ett bredare urval att analysera utifrån men detta var något som hade tagit alldeles för mycket tid. Att analysera en grupp med tre elever har varit tillräckligt mycket med jobb men hade jag haft ytterligare två månader på mig hade det varit en intressant idé. Överlag är jag nöjd med min undersökning och hur den artade sig då jag känner att jag fått tillräckligt med material för att kunna göra en djup *fokus* samt *avsiktsanalys*.

5.3 Didaktisk diskussion

De två analysmetoderna har hjälpt mig att förbättra min förståelse av en elevs förståelse avsevärt. Jag har även förstått vikten av att använda sig av matematiska termer när det kommer till verbala yttranden mellan lärare och elever. Det är viktigt att inte uttrycka sig i vardagliga termer då eleverna kan få det svårare att förstå. Användningen av tröskelbegrepp är något som jag kommer ha stor nytta av i mitt framtida yrke som lärare. Jag har förstått hur viktigt olika begrepp kan vara för elever då de behöver en ”extra push” för att kunna förstå ett innehåll. I den här gruppen av elever kom *distributiva lagen* och *minustecknets olika betydelser* att vara viktiga men i andra matematiska områden såsom derivata och integraler kommer andra viktiga tröskelbegrepp att vara till stor nytta. Att momentant kunna gå in i en lärandesituation och hjälpa eleverna att utveckla sin egna förståelse är något jag kunnat ta med mig från detta arbete då mina två analysmetoder har hjälpt mig att förstå en elevs förståelse i form av ”tänkande som kommunikation”. Synsättet ”*tänkande som kommunikation*” är något som eleverna använder sig av i en lärandesituation. Då en elev tänker och yttrar sig till en kompis eller till en lärare kan det ibland vara svårt att tolka vad eleven menar men med hjälp av de två analysmetoderna *fokusanalys* och *avsiktsanalys* har jag kunnat skapa mig ett verktyg som hjälper mig att förstå en elevs förståelse tydligare.

Just synsättet ”*tänkande som kommunikation*” är något som jag definitivt kan arbeta med i min framtida roll som lärare. Vad som blir problematiskt är att jag antagligen inte har tid att analysera varje elev för sig då analysverktygen är rätt tidskrävande men min undersökning har gett mig en bra grund att utgå ifrån. Något annat som både jag samt Sfard & Kieran (2002) menar blir problematiskt är att försöka förstå vilket *avsett fokus* en elev har med ett uttalande. Ibland är det lätt att förstå *avsett fokus* men i en hetsig lärandesituation kan det bli svårare att förstå detta.

5.4 Framtida forskning

Efter att ha använt mig av de två analysmetoderna *fokusanalys* och *avsiktsanalys* för att försöka förstå en elevs förståelse i form av ”*tänkande som kommunikation”* slog det mig att det hade varit väldigt intressant och givande att gräva ner sig djupt i och försöka förstå hur en grupp fungerar. Att kunna ha en bättre förståelse för gruppdynamik tror jag hade varit väldigt användbart och givande vid användning av de två analysmetoder jag valt. Jag märkte att varje elev i gruppen hade sin egen identitet, elev 1 var den mer styrande eleven medan elev 2 fungerade mer som ett ”bollplank” till elev 1 och där då tyvärr elev 3 nästan helt blev exkluderad. Vad jag kunde se med hjälp av de två analysmetoderna var att gruppen hade gynnats mer om elev 2 varit den mer styrande eleven. Som sagt har jag inte fördjupat mig i gruppdynamikens världar men det hade varit väldigt intressant att kombinera gruppdynamik med de två analysmetoderna som ett framtida forskningsprojekt.

Jag tror även att mer forskning kring tröskelbegrepp behövs, något som även Pettersson, (2010) menar. Jag har förstått vikten av att använda sig av tröskelbegrepp i en lärandesituation men det behövs fortfarande mer forskning kring detta. Framförallt tröskelbegrepp i en kombination med analysverktygen *fokusanalys* och *avsiktsanalys*.

6. Slutsatser

Utifrån analysen av elevernas interaktivitet kan man tolka elevers matematiska förståelse utifrån hur de kommunicerar och tänker. Så länge en grupps avsedda fokus är stabilt samtidigt som uppmärksammat fokus och uttalat fokus ligger i korrelation med varandra bör eleverna vara på god väg till en lösning av ett problem. För den analyserade gruppen var så inte fallet vilket var en bidragande orsak till varför gruppen aldrig lyckades finna en korrekt lösning. Det som är viktigt för en elevs förståelse är användningen av matematiska termer samt tröskelbegrepp. Framförallt för den grupp som analyserades i min undersökning hade användning av tröskelbegrepp och ett korrekt matematiskt språk gynnat eleverna avsevärt. Synsättet ”tänkande som kommunikation” används till att försöka tolka en elevs förståelse ur dennes yttranden och det interaktiva flödesschemat ämnar till att hitta rätt avsikt för en elevs uttalande. Men hjälp av de två verktygen *fokusanalys* samt *avsiktsanalys* har jag just kunnat se avsaknaden av matematiska termer och tröskelbegrepp.

Slutligen tycker jag att jag har bildat mig en förståelse för mina två frågeställningar:

- *Hur förstår gymnasieelever räkneoperationer med negativa tal?*

- *Hur kan en lärare bli bättre på att förstå en elevs förståelse i form av tankar och kommunikation?*

Jag har med hjälp av de två analysverktygen och andra teorier såsom tröskelbegrepp fått en bättre förståelse för hur en elev förstår ett matematiskt innehåll, inte heller bara för ämnet matematik utan även för lärande generellt. Min förhoppning är att detta arbete ska ha gett mig ett nytt verktyg som jag kan använda till att göra momentana bedömningar i olika lärandesituationer såväl i matematiken som inom andra ämnen.

Tack

Tack till de elever som ställt upp frivilligt i min undersökning och tack till de lärare som har gjort att min undersökning gått att utföra. Ett tack riktas även till de elever som deltog i pilotundersökningen och till den skola som tog emot mig. Vidare vill jag tacka min handledare Laura Fainsilber för den hjälp du har gett mig under arbetets gång.

Referenslista

Eliasson, A (2013). *Kvantitativ metod från början*. 3:e upplagan. Studentlitteratur (160 sidor).

Glaeser, A. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didáctique des mathématique*, 2(3), 303-346.

Heeffer, A. (2008). Negative numbers as an epistemic difficult concept: Some lessons from history. In C. Tzanakis (Ed.), *History and pedagogy of mathematics conference. Satellite meeting of international congress on mathematical education* (CD-ROM, Section I-13, pp. 1-13). Mexico City, México.

Johansson, B (1998). *Förkunskapsproblem i matematik*? Rapport inst f. ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

Kieran, C. ,Forman, E. & Sfard, A (2002). *Learning Discourse*. AA Dordrecht: Kluwer Academics Publishers. (s. 1-50).

Kilhamn, C. (2011). *Making Sense of Negative Numbers*. Göteborgs universitet: Doktorsavhandling.

Pettersons, K. (2010). Threshold concepts**:** *A framework for research in university mathematics education*: https://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/14/CERME7-WG14-Paper---Petterson-REVISED-Dec2010.pdf , (2012-05-18).

Seife, C. (2000). *Zero: The biography of a dangerous idea*. New York: Penguin Books Ltd.

Sfard, A (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics, *22*(1), 1-36.

Bilagor

Bilaga 1.

Vad görs?	**Vad sägs?**
[4] Undersökningen tar sin början med uppgift 1 på frågeformuläret. [6]-[13] E1. Försöker ersätta variabeln a i uppgiften med -7 och antyder då att det blir plus. E2. och E3. lyssnar mest på E1. [] [] [] [] [] [] [] [14]-[19] E1. påstår nu att minustecknen måste sitta bredvid varandra (--) för att det skall bli + och pekar på uttrycket -2a. [] [] [] [] [] [20] Gruppen börjar fokusera på uttrycket i parentesen. [20]-[33] E2. påstår att uttrycket i parentesen blir (2--3). E1. följer tankarna hos E2. E3. hänger mest bara med. [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [33] E1. och E2. konstaterar att uttrycket i parentesen blir plus 5. E3. Sitter nästintill tyst och yttrar tillslut ett "mm".	[1] E1: Har ni läst båda. [2] E2: Aa. [3] E3: Mm. [4] E1: Så vi börjar då. [5] E2: Aa. [6] E1: Så vi har redan fått veta vad a och b är. [7] E1: Då blir det väl -2 va och sen -7. Å de blir ju plus. [8] E2: Hur menar du nu? [9] E1: Nämen asså det är ju minus här o sen är det minus där, blir det inte plus då? [10] E2: Hmm? [11] E3: minus minus [12] E1: De blir ju alltid plus [13] E2: Aa de blir de väl [14] E1: Men dom sitter inte bredvid varandra [15] E2: Ne så jag tror inte det är.. [16] E1: Nä [17] E2: Det är bara när dom sitter bredvid varandra då det är så. [18] E3: Mm [19] E3: Annars är det inte det [20] E2: Ehrm.. man börjar ju inom parentesen [21] E3: Precis [22] E2: Aa [23] E1: Ja men jag skriver bara upp det och skriver ut [24] E2: De blir 2 minus 3 [25] E1: A just de minus... det e ett till minus [26] E2: I parentesen [27] E1: Blir det inte plus? [28] E3: minus minus, plus plus [29] E2: Då blir det väl 2 plus 3 [30] E3: Mm [31] E1: A det blir de [32] E1: de blir ju 5 [33] E2: Mm [34] E1: Ehrm.. då har vi kvar det andra [35] E2: -2a, a var minus 7 [36] E1: Sen plus 3 [37] E2: Mm

[34]-[35] E1. fokuserar nu på det första uttrycket igen (-2a). E2. påminner gruppen om att a var -7. [36]-[43] E1. nämner inget mer om det första uttrycket utan försöker nu istället komma fram till en lösning av hela uppgiften. E1. Blickar ner på uttrycket +3(2-b) och påstår att det blir +3 och sedan +5 i parentesen då de ersätter variabeln b med -3. E2. fungerar lite som ett bollplank till E1. medan E3. sitter tyst och svarar endast med "mm" och "precis". [] [44] E1. riktar tillbaka fokus på det första uttrycket (-2a). E2. och E3. fokuserar nu också på uttrycket. [] [45]-[50] E1. och E2. försöker tillsammans komma fram till lösningen medan E3. i princip sitter tyst. E1. yttrar att första uttrycket blir -9. E2. påstår sedan att -9 och +3 innan parentesen blir -6 samtidigt som han ständigt tittar på E1. E3. följer med i diskussionen genom att säga "mm". [] [51]-[59] E1. pekar på uttrycket i parentesen och försöker nu delvis tillsammans med E2. komma fram till slutliga lösningen. Samtliga är överens om att lösningen blir -1. [] [60] Eleverna börjar med uppgift 2 på frågeformuläret. [] [] [] [64]-[67] E1. pekar på första uttrycket i uppgift två och pekar på att det ska vara gånger mellan 2:an och parentesen. E2. och E3. svarar med "mm". [] [68]-[75] E1. och E2. diskuterar emellan varandra angående hur många x och y det finns samt hur man ska försöka tänka när det kommer till räkneoperationer med parenteser och negativa tal. E3. sitter bredvid och mest kollar. [] [76] E1. vill fokusera på första uttrycket 2(x+y). [77]-[83] E2. vill fokusera på att försöka förenkla uttrycken, gruppens fokus hamnar på	[38] E1: Sen blir det väl plus 5 [39] E1: Eller? För vi har ju fått fram vad parentesen är [40] E3: Mm [41] E1: Då borde det va plus 5 också [42] E3: Precis [43] E2: Det blir ju i slutet där [44] E1: Blir det inte att den sänker då? [45] E1: Asså från minus 2 till minus 7, asså att man sänker nedåt. [46] E2: Jo för då blir det väl minus 9 plus 3 o då minus 6. [47] E3: Mm [48] E1: Minus 6 sa du va? [49] E1: Då blir det väl 5 eller plus 5. [50] E2: Ehrm.. vad sa du nu? [51] E1: Kolla, vi har ju minus 6 och 5 och då blir det väl plus. [52] E3: minus 6 plus 5 menar hon. [53] E2: minus 6 plus 5 då blir det väl minus 1 [54] E3: Ja de blir det [55] E1: Mm [56] E1: Ska vi köra nästa uppgift då eller? [57] E2: Men då enna minus 1 [58] E1: Mm [59] E3: A det blir det. [60] E1: Nästa då, här har vi ju ingen aning vad det är [61] E1: Vi har ju inte x o y vad det är för något [62] E1: Men jag skriver upp det iallafall. [63] E3: Mm [64] E1: De här, de här är ju egentligen gånger ju [65] E1: 2 så här parentes, de blir ju gånger [66] E3: Mm [67] E2: Mm [68] E1: Asså hur många x har vi, vi har 3 styckna eller nej det kanske vi inte har. [69] E1: Det e 3 styckna y [70] E2: Ska det inte vara ett gånger där med [71] E1: Jo för att de e ju.... [72] E2: Jo jo det e jag som tänkte konstigt. [73] E1: Jag satte gånger där också [74] E1: O om man hade tagit bort parentesen hade det ju blivit plus här. [75] E3: Mm [76] E1: Men om man ska lösa första då. [77] E2: Men om man gör en ekvation av det, att man ställer upp...

att försöka göra just detta. E1. och E2. har en diskussion mellan varandra angående hur många x och y som finns i de olika uttrycken. E3. bekräftar bara vad som sägs och svarar ibland med "mm". [] [84]-[88] E1. och E2. tittar på de olika uttryck som finns i uppgiften och får det till att det finns 6x och 3y. E3. svarar med "mm". [] [89]-[99] E1. och E2. diskuterar kring hur de ska göra för att få bort parenteserna. Speciellt då man har ett minustecken framför en parentes. E1. poängterar även i vilken ordning de olika räknelagarna räknas. E3. följer med som vanligt och svarar med "mm" och "precis". [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [100]-[105] E2. föreslår att de ska försöka lösa varje parentes för sig. E2. börjar med den första parentesen och får uttrycket till 2xy. E1. och E3. har inga invändningar. [] [106]-[109] E1. försöker lösa andra parentesen och får uttrycket till 2x-y. E2. och E3. svara med "jo" och "mm". [] [] [] [110]-[116] E1. försöker lösa den sista parentesen. E1. är lite tveksam i sin utläggning men E2. och E3. litar på E1. E1 får det sista parentesuttrycket till -3x + y. [] [] [] [] [] [] [] [] []	[78] E2: Vi har 6 styckna x [79] E3: 6 stycken x ja [80] E2: Förenkla är väl ändå smidigast om vi lägger ihop alla [81] E3: A, mm [82] E1: Menar du alla x då eller [83] E2: Både x och y [84] E1: Och då var det 6x och [85] E2: 3y [86] E3: Mm [87] E1: Blir det plus 3 y då [88] E1: Men 3y, mm [89] E2: Då ska vi då få bort parenteserna [90] E1: Mm [91] E3: Japp [92] E2: Vad var det man skulle ändra för att få bort parentesen [93] E1: Vänta lite, vänta lite. Hur fick du det till 6x, de är ju minus där... [94] E3: Få bort parenteserna.... [95] E2: Skulle man byta tecken i parentesen eller hur var det? [96] E1: Ja när man har ett minustecken framför parentesen [97] E3: Mm, precis [98] E1: I vanlig ordning är det ju såhär, parentes, gånger, delat med o sen plus o minus. [99] E1: Men är det inte i det härа.. att plus o minus kommer före parentesen? [100] E2: Men ska vi försöka lösa varje parentes för sig. [101] E3: Mm [102] E1: Vi börjar med den då, 2 parentes x plus y [103] E3: Aa [104] E2: De blir ju 2xy eftersom det är gånger 2. [105] E1: A just de ja. [106] E1: O här blir det då 2x minus y, eller? [107] E1: E det inte så, 2x minus y? [108] E3: Mm [109] E2: Jo [110] E1: Men sista då [111] E1: där är det ju minus 3 [112] E3: Aa minus 3 [113] E1: Men ska man skriva minus 3x plus y? [114] E1: Om vi skriver det så får vi ju bort alla parenteser. [115] E2: Mm o så bara lägger vi ihop dom.

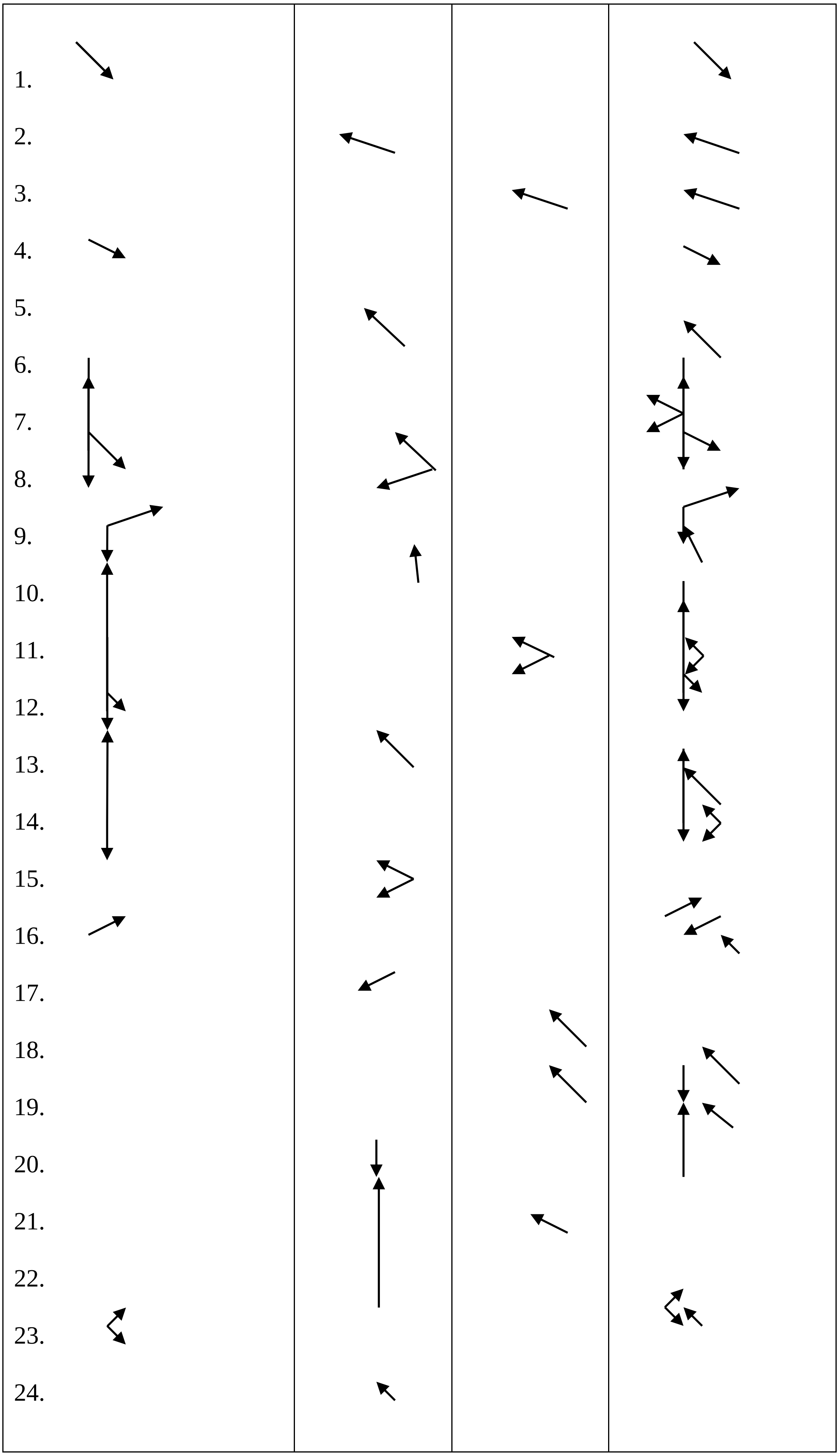
[]	[116] E3: Mm, aa
[]	[117] E2:Osså har vi 2 minustecken där..
[]	[118] E1: Vad var det du gjorde nu?
[] []	[119] E1: A du gör så, så 2x, vänta 2xy sen blir det minus va
[]	[120] E2: Mm
[]	[121] E1 : Sen blir det minus va?
[]	[122] E1: Minus...
[]	[123] E2: 2xy
[]	[124] E1: Mm o sen minus y eller? På andra..
[117]-[132] E1. och E2. diskuterar sinsemellan om vilken betydelse minustecknen har i varje uttryck. De verkar inte komma fram till något specifikt utan är mest frågande till varandra. E3. ser lite vilsen ut och svara med svaga "mm".	[125] E1: O sen plus eller [126] E2: A för det var två minustecken. [127] E1: A just de, mm [128] E1: Mm o sen blir de 3 bara då [129] E2: Mm [130] E1: O sen x plus y
[]	[131] E2: Mm
[]	[132] E3: Mm
[] [] []	[133] E1: Då har många x har vi för det första, vi har 6 styckna va? Eftersom att det är gånger nu
[]	[134] E2: Mm
[]	[135] E2: Den försvinner...
[]	[136] E1: Vilken?
[]	[137] E3: Hur menar du?
[]	[138] E2: Eller va?
[] []	[139] E1: Asså den här 2xy o sen 2x men eftersom att det är gånger.
[] []	[140] E1: Asså de är typ vilken som har mest o de är väl x
[]	[141] E2: Hur menar du?
[] [] []	[142] E1: Ne men asså man, jag fick lära mig att man skulle ta, vad heter det de som har mest.
[]	[143] E1: Antingen x eller y typ, jag vet inte
[] []	[144] E1: Eftersom att det är minus framför 2y blir det ju y
[133]-[170] E1. och E2. för en väldigt svårtolkad diskussion kring hur de slutligen ska lösa uppgiften. E3. verkar inte alls intresserad längre men ställer ändå frågor som "hur menar du?". E1. och E2. resonerar fram o tillbaka, främst kring huruvida de ska använda gånger eller minus/plus i varje uttryck. De kommer slutligen fram till lösningen 3x + y. De är nu klara med båda uppgifterna.	[145] E1: Eller hur? [146] E2: Aa [147] E3: Mm [148] E1: O sen på x blir det ju... de blir 12x [149] E2: Hur får du det till 12? [150] E1: 2 asså gånger 2 får jag det till eller är det att man ska plussa bara? [151] E2: Tror bara man ska plussa för jag..... [152] E1: Isåfall blir det ju...
[]	[153] E2: 2 minus 2 plus 3... x
[]	[154] E1: Isåfall blir de ju 7
[]	[155] E1: Eller...
[]	[156] E3: 2 minus 2 plus 3...

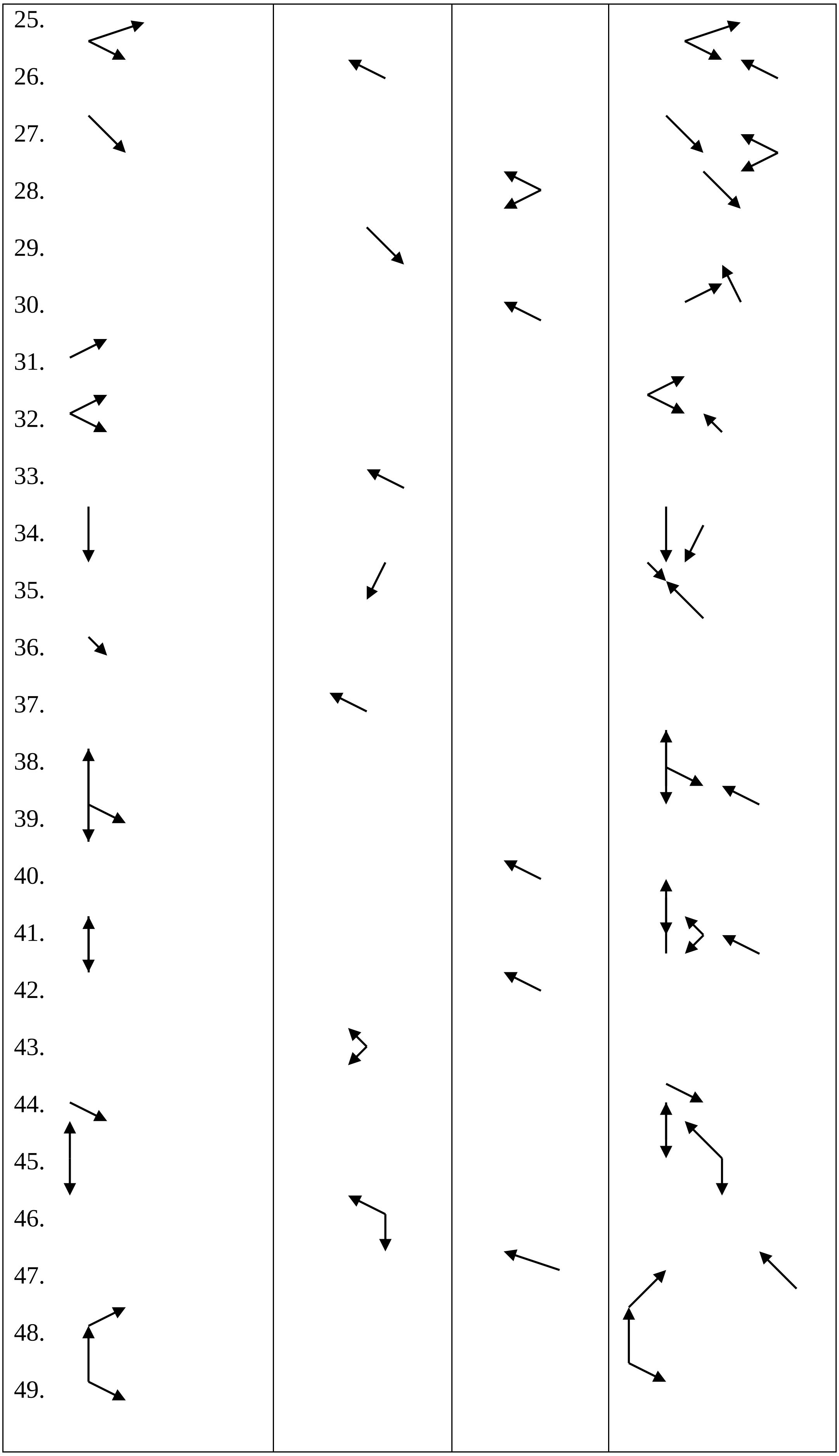
[]	[157] E1: A just de är minus där
[]	[158] E2: De är väl 3x o y
[]	[159] E1: De blir bara 3x eftersom du satte
[]	minus
[]	[160] E1: Så då blir de väl 3x
[]	[161] E2: O y
[]	[162] E1: Men vi måste ju ha något emellan,
[]	[163] E1: Plus eller minus?
[]	[164] E1: E de inte plus? Eller?
[]	[165] E1: Plus, plus y
[]	[166] E1: Hängde du med?
[]	[167] E3: Ja jag hängde med.
[]	[168] E1: Då var vi klara då..
[]	[169] E3: Mm
[]	[170] E2: Tror de.

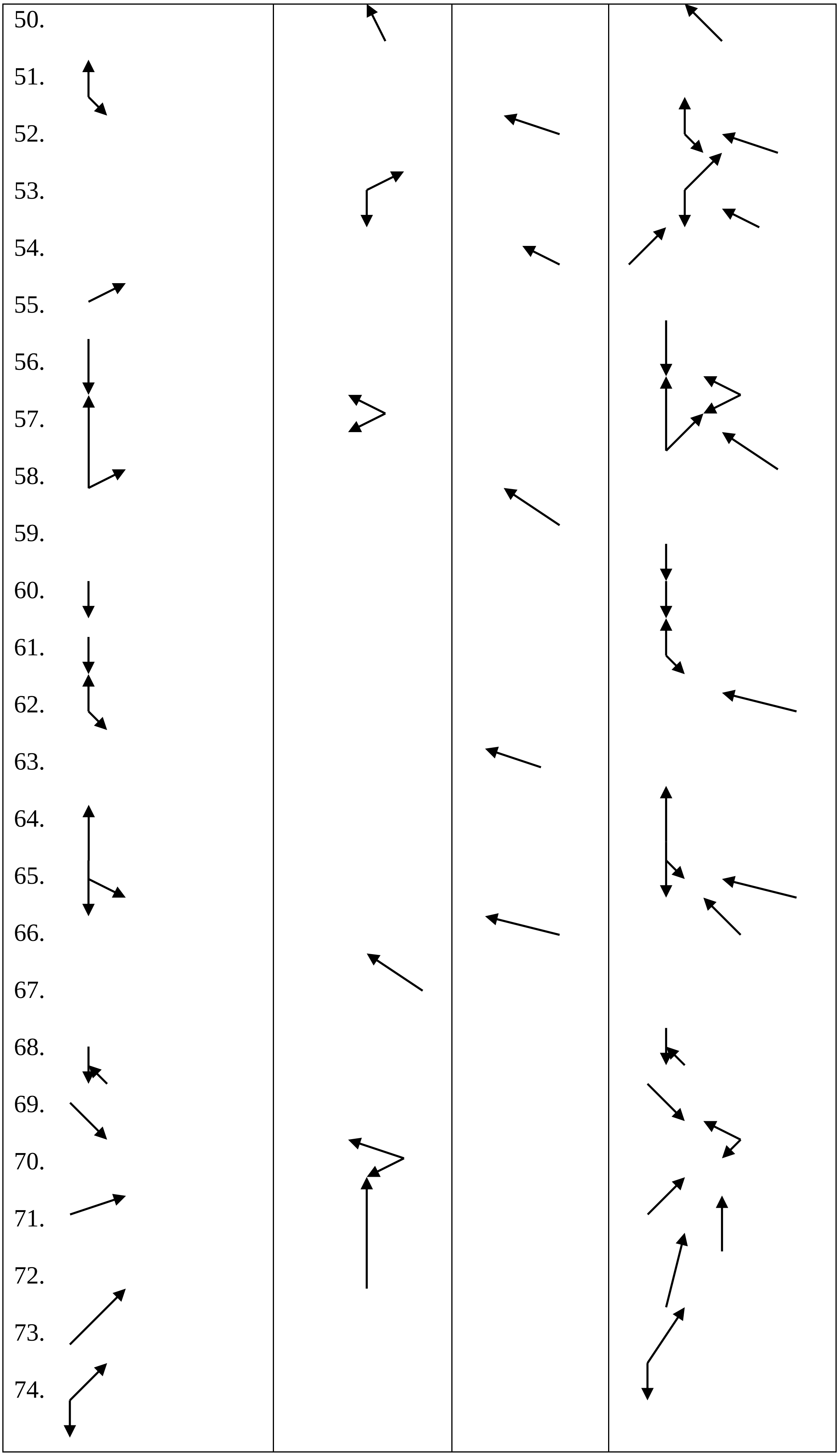
Vad görs? Vad sägs?

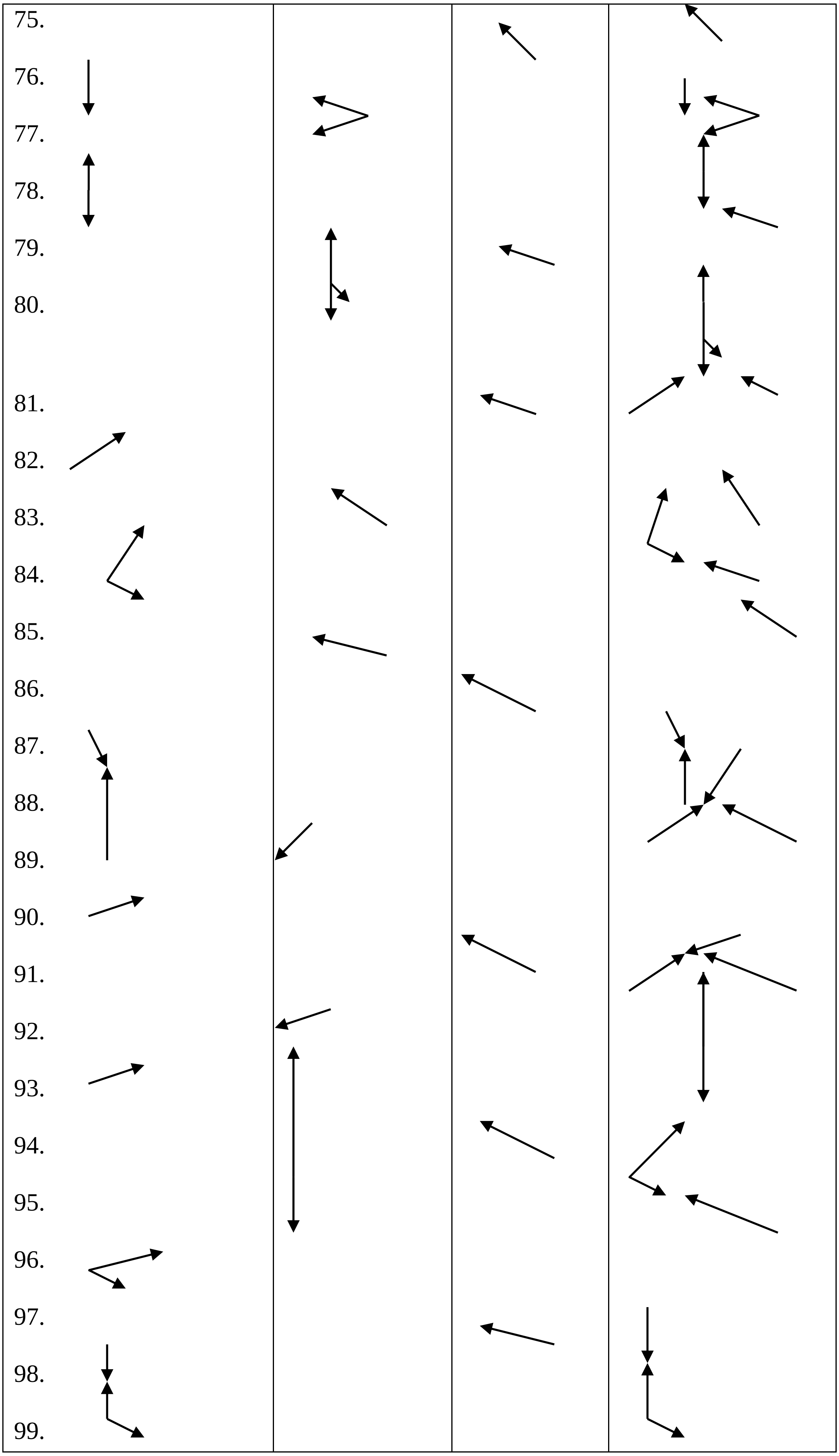
Bilaga 2.

(Interaktivt flödesschema) Spalten till vänster representerar *elev 1*, spalten i mitten representerar *elev 2* och spalten till höger representerar *elev 3*. Spalten längst till höger representerar en summering av samtliga tre elevers uttalanden.

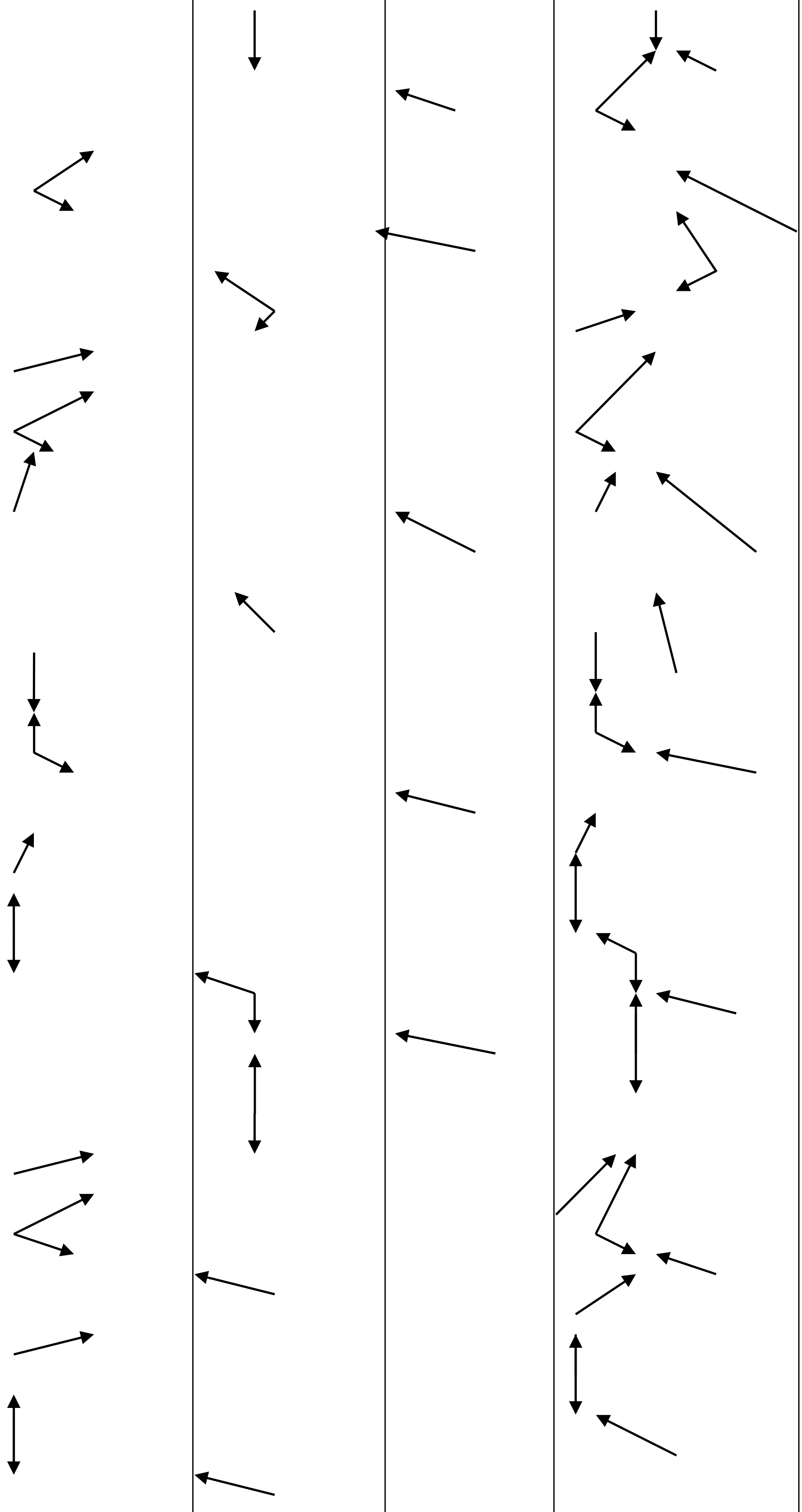

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.


25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.

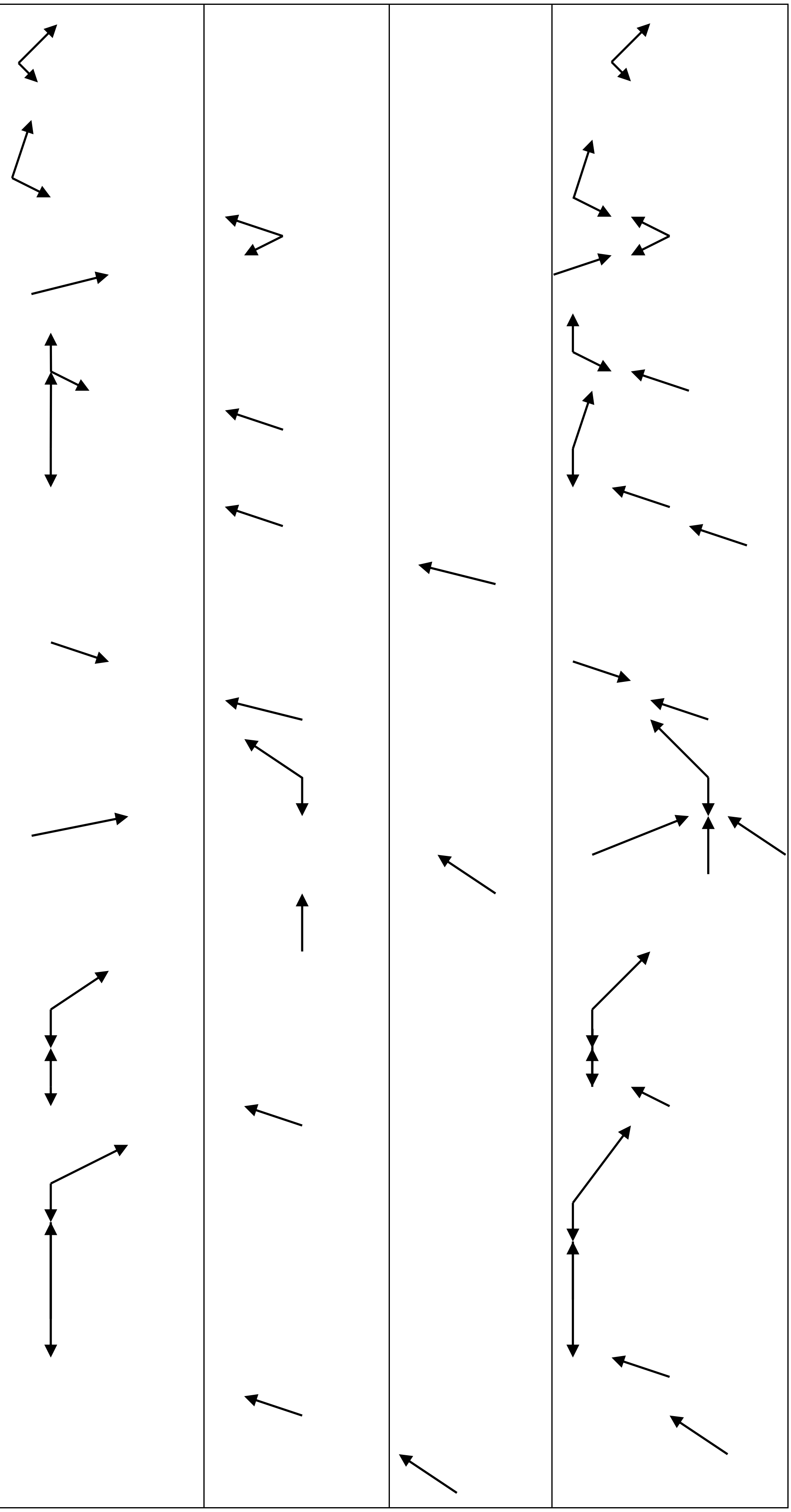

50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.

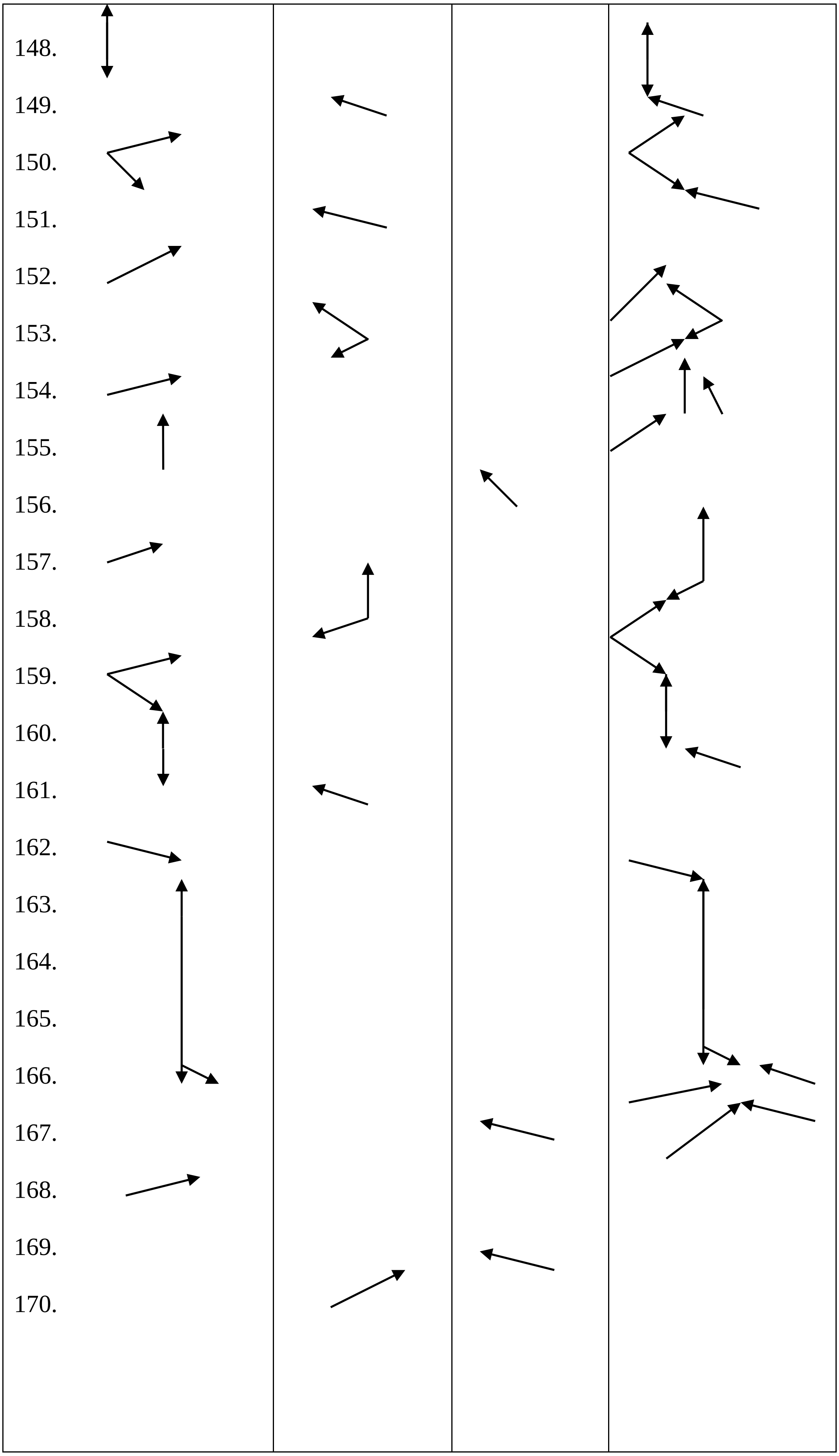

75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.

100.			
101.			
102.			
103.			
104.			
105.			
106.			
107.			
108.			
109.			
110.			
111.			
112.			
113.			
114.			
115.			
116.			
117.			
118.			
119.			
120.			
121.			
122.			
123.			



124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.
141.
142.
143.
144.
145.
146.
147.




148.
149.
150.
151.
152.
153.
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.
163.
164.
165.
166.
167.
168.
169.
170.

Bilaga 3.

Missivbrev

Hej!

Jag är en student från ämneslärarutbildningen på Göteborgs universitet och är inne på min sista termin och då även i full gång med att skriva mitt examensarbete inom ämnet matematik. Mitt valde ämne är: Gymnasielevers begreppsförståelse med fokus på *Räkneoperationer med negativa tal*.

Syftet med detta arbete är att jag som blivande lärare ska försöka bilda mig en förståelse för elevers förståelser av räkneoperationer med negativa tal. Jag har fördjupat mig i forskning och litteratur kring det aktuella ämnet men har också för avsikt att ta hjälp av elevundersökningar. Därmed undrar jag om er skola kan ta emot mig för utförandet av dessa undersökningar. Undersökningen kommer att bestå av två uppgifter där eleverna tillsammans ska försöka lösa dessa. Eleverna kommer att spelas in under tiden som de arbetar då min analys av materialet kräver detta.

Vid undersökningen kommer jag att ta hänsyn till Vetenskapsrådets forskningsetiska principer. Detta innebär att deltagandet är frivilligt och om eleverna så skulle vilja avbryta undersökningen kan de göra detta när de vill och även då tas bort ifrån undersökningen. Elevernas deltagande kommer att behandlas konfidentiellt och resultatet kommer enbart att användas i forskningsändamål.

Om ni har några frågor eller funderingar är ni välkomna att kontakta mig eller min handledare för mer information.

Hoppas vi ses!

Med vänliga hälsningar

Alexander Karlsson, guskaralj@student.gu.se

Laura Fainsilber, laura@chalmers.se