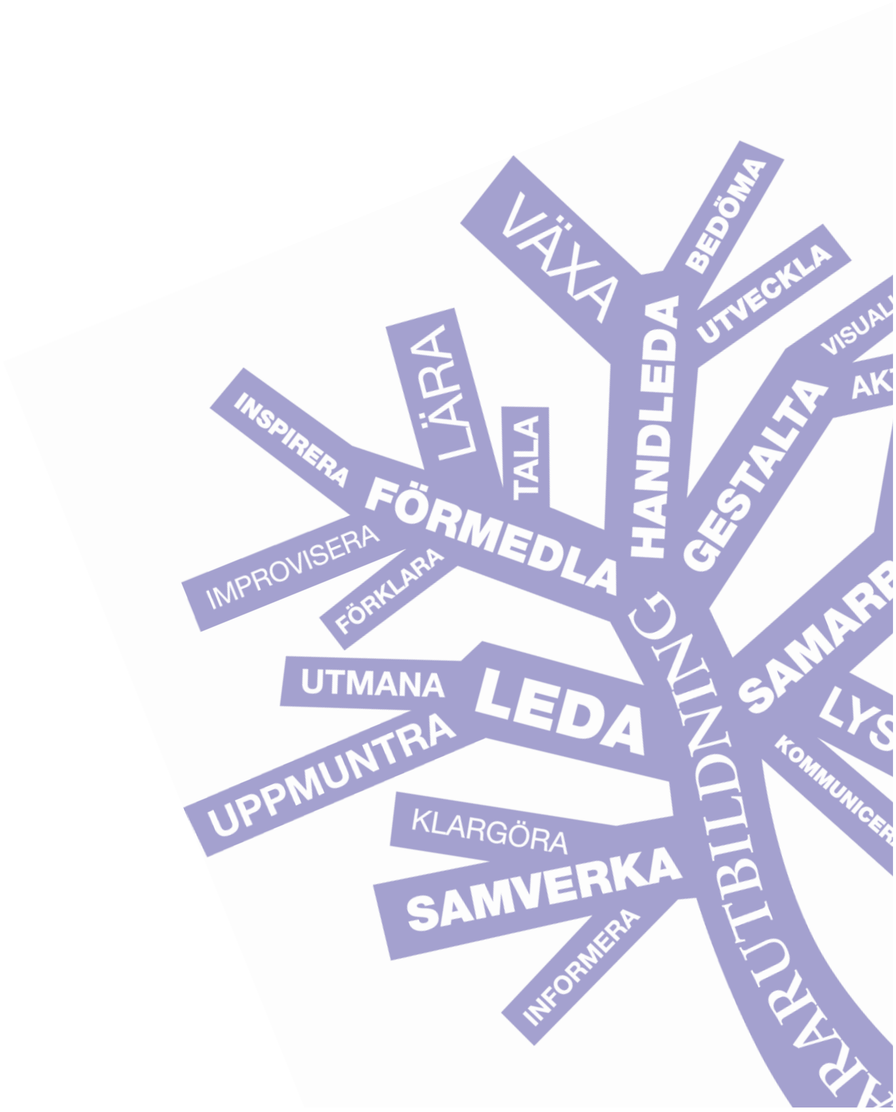
Geometriundervisning i skolan

Ett historiskt ämne i modern miljö



Monik Bekamp, Jesper Gegerfelt
& Daniel Green

Ämneslärarprorammet med
inriktning mot arbete i
gymnasieskolan

Abstract

Kurs: LGMA1G
Examensarbete, Grundnivå 15 hp, HT2016
Titel: Geometriundervisning i skolan – Ett historisk ämne i modern miljö
Författare: Monik Bekamp, Jesper Gegerfelt & Daniel Green
Kursansvarig institution: Matematiska Vetenskaper
Handledare: Johanna Pejlare
Examinator: Laura Fainsilber
Rapportnummer: HT16-3001-001-LGMA1G

Nyckelord: Euklidisk geometri. Geometriundervisning. Van Hiele. Inlärningsprocesser. Laborativ geometri. Pythagoras sats.

Sammanfattning
Detta arbete är en litteraturstudie och har som syfte att undersöka hur olika faktorer påverkar den svenska geometriundervisningen, med målet att få en bättre förståelse för vad som krävs för att bedriva en lyckad sådan. Arbetet tar upp teorier om hur barn lär sig geometri (Piagets och van Hieles teorier om utveckling genom karaktäriserade nivåer), olika former av undervisning (laborativ undervisning, läroboksstyrda lektioner, laborativa lektioner samt lektioner baserade på öppna problem), svenska styrdokument för gymnasieskolan som fokuserar på geometri samt laborativ geometri. Arbetet beskriver även geometrins och geometriundervisningens historia. Detta för att bättre förstå hur geometrins förekomst i olika samhälleliga och pedagogiska sammanhang påverkat skolan i historisk och modern tid. I texten presenteras även ett par bevis av Pythagoras sats då denna proposition kan anses utgöra en förbindelse mellan en upptäckt av stor historisk vikt och dagens skolmatematiska innehåll.

Keywords: Euclidean geometry. Geometry lesson. Van Hiele. Learning process. Laboratory of geometry. Pythagorean theorem.

Abstract
This paper is an overview of scientific literature that seeks to provide understanding of how different aspects affect Swedish geometry lessons, with the aim to give a better understanding of what is required in order to create a successful teaching in geometry. The paper consists of theories concerning how children learn geometry (Piaget's and van Hiele's theories about development through characterized levels), different types of geometry lessons (laboratory teaching, textbook centered lessons, laboratory lessons and lessons based on open problems), the geometry curriculum for Swedish Upper Secondary School as well as "hands on" geometry lessons. The paper also includes a historical description of geometry and teaching in geometry. This in order to better understand how the presence of geometry in different societal and pedagogical contexts has affected schools in historical and modern times. The text also presents two proofs of the Pythagorean theorem because this proposition can be considered a conjunction between a discovery of great historical importance and the mathematical content of today's schools.

Förord

Geometriskt tänkande är någonting som präglat samhällen sedan urminnes tider. Vi kan se exempel på geometrins betydelse och möjligheter i historiska lämningar, moderna miljöer och arkitektur ifrån alla tidsåldrar. Att geometri är grundläggande på många sätt inom flera olika kretsar skulle de flesta nog inte argumentera emot. Samtidigt upplevs geometriundervisning som svårbegriplig av både lärare och elever. Ämnets relevans tycks drunkna i ett hav av upplevda svårigheter och motivationsdödande framställningar. Situationen väcker frågor om hur detta kommit sig. Varför har ett ämne som utgör basen för matematik, filosofi och allmän skolbildning kunnat hamna i skymundan? Hur kan skolgeometrin återfå sin ställning som intresseväckande, verklighetsnära och relevant? Vad kan lärare och elever göra för att skapa en klassrumskultur som tillåter en sådan utveckling? Dessa och liknande frågor väckte vårt intresse och ligger till grund för arbetet.

Vi vill passa på att tacka Johanna Pejlare som handlett oss genom hela vår arbetsprocess och vars tålamod, vägledande idéer och konstruktiva återkoppling motiverat oss till att fortsätta utveckla och omarbeta texten tills dess att slutresultatet var uppnått. Tack vare hennes rådgivning kunde vi färdigställa denna uppsats på en nivå som vi kan känna oss stolta över och där innehållet både är relevant och utvecklande för vår framtida yrkesprofession. I samband med detta vill vi även säga stort tack till Laura Fainsilber som bidragit med specifik och värdefull formativ återkoppling som, tillsammans med underlag ifrån opponeringstillfället, användes i fullföljandet av arbetets avslutande revidering. Därför tackar vi också Rasmus Landers, Jonathan Carbe och Marija Deno för god opponering samt betydelsefull och uppskattad konstruktiv respons. Stort tack vill vi även säga till Sebastian Ingemarsson som tog sig tid att läsa uppsatsen och vars granskning av arbetets formalia och grammatik var mycket uppskattad. Slutligen tackar vi också NCM (Nationellt Centrum för Matematik), av vilka vi fick låna värdefull litteratur som var till stor nytta i flera delar av arbetet.

Innehållsförteckning

Figurförteckning

1 Introduktion

1.1 Bakgrund

Geometri är ett område inom matematiken som innefattar många olika begrepp, figurer, former, storlekar och konstruktioner. Undervisningen i geometri brukar börja med enkla begrepp så som linjer och vinklar, vilka utgör grunderna. Grunderna efterföljs sedan av geometriska figurer, till exempel trianglar med speciella egenskaper (rätvinklig triangel, likbent triangel, liksidig triangel, o.s.v.). I högre nivåer blir också bevis och generaliseringar allt mer förekommande och betydande. Enligt vår erfarenhet brukar elever i grundskolan tycka att geometri är ett intressant område inom matematik eftersom de själva kan utforska geometriska figurer, mönster och objekt genom lek och aktiviteter. De kan också återkoppla till vardagliga tillämpningar där de kan känna igen de geometriska formerna. Senare geometriundervisning i högstadiet och på gymnasiet belyser mer konkreta tillämpningar av geometrin.

Under VFU-perioden möttes vi av många elever i gymnasieskolan som saknade baskunskaper i geometri. När vi skulle undervisa om en av de klassiska geometriska satserna förstod inte eleverna innebörden i de begrepp som användes. Trots att många elever tyckte att geometri är ett intressant ämne så hade de flesta av dem svårigheter med ämnesområdet och uttryckte en uppfattning av geometrin som abstrakt och svårförstådd. Svårigheterna ligger kring ord och begrepp som förekommer i geometriundervisningen där eleverna förväntas förstå inbördes samband mellan figurer, strukturer, mönster och inse vikten av korrekta definitioner. Det är därför viktig att skapa förståelse och beskriva begreppen korrekt innan man börjar föra resonemang och lösa problem inom geometrin.

För att kunna undervisa i geometri behöver lärare förstå hur elever lär sig geometri innan man planerar undervisningen. Det nederländska forskarparet Dina och Pierre van Hiele (1959) beskriver i sin forskning hur varje individ genomgår olika nivåer i tur och ordning under sitt geometrilärande. Piaget, Inhelder & Szeminska (1981) skriver att barn upptäcker att geometri är topologiskt och att de kan känna igen rumsuppfattning samt se skillnaden mellan öppna och slutna figurer redan vid 3-års ålder. Piaget påpekar att undervisningen måste anpassas till det stadium där barnets tänkande befinner sig för att de ska kunna lära sig saker (Säljö, 2012). Vygotskij betonar att barnets lärande är beroende av deras sociala liv genom stöd och hjälp av de vuxna eller mer kompetenta kamraterna genom kommunikation (Säljö, 2012, s. 193). Deweys formulering ”learning by doing” har inspirerat lärare till att utveckla den praktiska delen som underlättar för elever att ta till sig nya kunskaper (Säljö, 2012, s. 176).

Lärare måste också planera undervisningen i geometri så att eleverna kan utveckla sina intressen och förståelsen för geometri. När det gäller undervisningen i matematik måste lärare anpassa sig till läroplanen och samtidigt planera undervisningen så att eleverna kan utveckla de matematiska förmågor som beskrivs i 2011 års läroplaner. De matematiska förmågor som lyfts fram i Lgr11 är problemlösningsförmåga, begreppsförmåga, räkneförmåga, resonemangsförmåga och kommunikationsförmåga. Förmågorna som ska tas hänsyn till i matematikundervisningen på gymnasiet (Lgy11) är begreppsförmåga, procedurförmåga, problemlösningsförmåga, modelleringsförmåga, resonemangsförmåga, kommunikationsförmåga och relevansförmåga (Skolverket, 2011). Berit Bergius (2014) påpekar att undervisning och lärande i geometri ska utveckla elevers förmåga att uppfatta, kommunicera och dra välgrundade slutsatser om geometrins begrepp och därefter använda förmågan för att skapa förståelse, reflektera och resonera i förhållande till den värld vi lever i. Samtidigt måste eleverna kunna se betydelsen av att ha goda kunskaper i geometri så att deras intresse för ämnet ökar.

1.2 Syfte och frågeställningar

Detta examensarbete syftar till att presentera olika aspekter av svensk skolgeometri för att bättre förstå vad som konstituerar effektiv och framgångsrik geometriundervisning och vars innehåll ligger i linje med aktuella styrdokument och didaktisk forskning. Våra frågeställningar är:

- Varför ska man lära sig geometri?
- Hur såg geometri ut i samhälle och skola historiskt sett jämfört med idag?
- Hur lär sig elever geometri?
- Vilka hjälpmedel och verktyg är tillgängliga för geometriundervisning?
- Hur planerar läraren geometriundervisning så att det väcker intresse hos eleverna?

1.3 Material och Metod

Detta examenarbete är en litteraturstudie av olika vetenskapliga artiklar rörande geometri, kurslitteratur med en matematikdidaktisk utgångspunkt samt kursplaner i matematik på gymnasie- och bitvis även grundskolenivå. Förhoppningen är att bättre begripa vad som kan verka potentiellt hämmande för undervisningen inom geometriämnet i skolan och genom relevant didaktisk forskning förklara hur detta sker samt härleda förslag på lösningar till sådana eventuella svårigheter.

I sammanställningen av detta arbete har artiklar och böcker av varierande ålder utnyttjats – dock är källorna i största allmänhet inte äldre än 100 år. Framför allt har moderna källor som diskuterar den historiska utvecklingen ifrån ett matematiskt såväl som ett matematikdidaktiskt perspektiv använts. Insamlingen av information ifrån olika historiska tidpunkter har möjliggjort en kontrastering mellan den matematiska och matematikdidaktiska filosofin i olika tider. En analys av didaktisk forskning har genomförts i syfte att klarlägga de komponenter som utgör ett mera fullständigt lärande av geometri hos eleverna. Denna teoretiska didaktiska överblick kompletteras av en sammanställning av relevanta lärandeteorier som i högre grad är kopplade till konkret undervisning inom geometriområdet. För att förbinda den historiska sammanställningen med dagens undervisning har en del av arbetet gått till att beskriva dagens styrdokument och filosofi rörande geometriundervisningen.

Fokus har även lagts på undersökandet av Euklidisk geometri då detta kan anses vara mest relevant för arbete i dagens svenska gymnasieskola. En översiktlig historisk sammanfattning över den kontrovers som rått kring parallellpostulatet, orsaken bakom dispyterna och försök till att bevisa postulatets riktighet har även gjorts. Här tangerar arbetet också den icke-euklidiska geometrins framväxt, men inte mer än så. Detta avsnitt tillsammans med två bevis för Pythagoras sats ger arbetet en koppling till ett matematikområde som kan anses vara betydelsefullt för gymnasieskolans geometriinnehåll.

För att sammanlänka de olika avsnitten har ingresser utnyttjats i syfte att ge läsaren en känsla av koherens i vad som annars skulle kunna upplevas som ett något ostrukturerat arbete. I diskussionsdelen av uppsatsen görs ytterligare kopplingar mellan historia, didaktisk forskning, aktuell utbildningsfilosofi, geometri och slutledningar, för att sammanfatta inbegripet stoff. Det faktum att så till synes många områden medräknats i litteraturöversikten ger förhoppningsvis en uppfattning av diskussionsdelens slutledningar som rigorösa och tillförlitliga när det kommer till vad som kan anses vara hållbar geometriundervisning. Diskussionsdelen eftersträvar således att presentera konklusioner som resulterat av en noggrann analys av arbetets alla stora avsnitt och syftar till att erbjuda läsaren handfasta sammanfattningar med nytta för undervisningspraktiken.

2 Varför ska man läsa geometri?

Detta arbete inleds med en sammanställning av några olika motiveringar till varför geometri kan anses vara betydelsefullt och angeläget att studera på gymnasiet. Dessa förhållningssätt till geometri lägger grunden för och motiverar arbetets efterföljande litteraturanalys och diskussion.

Samhällets uppfattningar av geometri och matematik i allmänhet har påverkat hur läroplanen ser ut (Dossey, 1992, s. 39). I en studie finner González & Herbst (2006) fyra olika argument för varför geometrin ska finnas i läroplanen. Dessa fyra argument är inte ideologier utan åsikter som många olika individer förespråkar (González & Herbst, 2006).

Det första argumentet kallas för det ***formella argumentet*** och menar på att man genom geometrin lär sig att resonera logiskt. Man skulle då kunna använda sig av de logiska resonemangen i andra ämnen och även i samhället. För att lära sig resonera logiskt så lägger man fokus på att kunna lära sig föra deduktiva slutledningar vid geometriska bevis, istället för den exempel-räknande delen av arbetet med geometri. Själva beviset ger inte så mycket åt eleverna, utan det är vägen till beviset som är det viktiga. Geometrin blir då centrum för logiken i skolan och ger eleverna ett unikt tillfälle för att träna sin logiska förmåga. Eleverna får inse vikten av resonemang och bevisföring som de aldrig skulle fått annars. Geometrin är det område inom matematiken som kan ge eleverna förståelse för logiska resonemang (González & Herbst, 2006).

Det andra argumentet, som kallas det ***matematiska argumentet***, menar på att geometriundervisningen är en chans för elever att arbeta som matematiker. Geometriundervisningen är en matematisk aktivitet där elever bland annat kan lära sig att skapa och bevisa samband inom den euklidiska geometrin. Att diskutera och bevisa olika satser är det viktigaste – man låter klassrummets diskussion styra undervisningen, inte läroboken. Geometrin är en aktivitet där elever får vara kreativa och använda sig av annat än enbart matematiska symboler och text. Geometrin elever ska läsa i gymnasiet ska spegla den geometri som matematiker arbetar med. En del av förespråkarna för detta argumentet vill ha en euklidisk geometri, en annan del vill ha icke-euklidisk geometri och en sista del vill ha en blandning. Det viktiga är dock att inblandade parter i undervisningen jobbar så som matematiker gör och att elever får använda sin kreativitet för att skapa bevis m.m. (González & Herbst, 2006).

Det tredje argumentet kallas ***nyttoargumentet*** och menar på att geometrin kommer ge eleverna verktyg som kan användas i framtida yrken och studier. Geometrin behövs i skolan för att elever ska vara förberedda för framtiden. Innehållet i undervisningen ska anpassas till elevernas framtida yrke samt hur samhället ser ut. Eleverna kanske inte ser det viktiga med geometrin i skolan, men som framtida yrkesutövare kommer innehållet vara relevant. Yrkesutövare och företag bör få vara med och skapa undervisningen i syfte att komma så nära elevernas framtida yrke så möjligt. Geometriundervisningen ska enbart innehålla geometrin och behöver inte vara en övning i logiskt tänkande eller algebra (González & Herbst, 2006). Här är bevisen och formler viktigare än vägen till dessa.

Det fjärde argumentet kallas ***intuitiva argumentet*** och menar att geometrin ger eleverna ett språk att beskriva den riktiga världen med. Grunderna i geometrin ger elever sätt att beskriva former, areor m.m., medan mer avancerad geometri skulle behandla olika matematiska idéer om saker i vår omvärld. Geometrin är den enda delen inom matematiken som blandade empiriska kunskaper och abstrakta sätt att hantera kunskaperna med. Alla elever måste studera geometri då inte bara matematiker utan alla personer, oavsett yrke, behöver utveckla en rumsuppfattning. Undervisningen ska vara grundläggande och det är inte nödvändigt att lära sig matematiska bevis, utan istället bör utforskande prägla lärandeaktiviteterna så att elever får upptäcka samband på egen hand. Utan geometrin så skulle elever aldrig kunna tolka den verkliga världen fullt ut (González & Herbst, 2006).

3 Historia

I den här delen av arbetet ges en kortfattad historisk tillbakablick av geometrins härkomst och dess betydelse för en del historiska samhällen. Framställningen syftar till att sammanlänka motiveringar för geometrins roll och användbarhet inom matematikundervisning och samhälle med en förståelse för dess nytta, både i en historisk och en modern kontext.

3.1 Historisk tillbakablick på geometri och dess ursprung

Geometri ingick i grupperingen *quadrivium* (aritmetik, geometri, astronomi och musik) som tillsammans med *trivium* (grammatik, retorik och logik) utgjorde en framstående del i den läroplan som formade det antika Greklands utbildning. Matematiken, som under denna tid främst bestod av aritmetik och geometri, hade hög prestige och syftade bland annat till att utveckla och stärka intellektet och det politiska inflytandet hos en elitisk minoritet (Lundgren & Säljö, 2012, s. 30; Lehtinen, 2008, s. 31; Restivo, 1992, s. 11; Nilsson, 2005, s. 101). Grekisk geometri härstammade troligen från Egypten, där geometrin utvecklades som ett medel för mätning av mark i syfte att kunna beskatta markägarna. Vidare användes geometrin i det antika Egypten även för uppbyggnad av aktningsvärda konstruktioner så som pyramiderna (Lehtinen, 2008, s. 19; Griffiths, 1952; Malkevitch, 2009, s. 9; Sjöberg, 1996, s. 7). Överlag går det att se den tidiga geometrin som ett medel för hantering av verklighetsförankrade frågor rörande fältmätningar, konstruktioner och ingenjörskonst (Restivo, 1992, s. 10).

Den tidigaste geometrin var intuitiv, saknade djupare syfte och byggde på empiri genom prövning eller mätning. Exempel på samhällen som utnyttjade sådan geometri är Babylonien, Kina ca 1100 f.Kr., Indien och Romarriket. I synnerhet romarna hade intresse för matematiken som ett redskap för samhällsutveckling (Smith, 1953, s. 270; Sjöberg, 1996, s. 17). I Indien hade geometrin betydelse för förberedelsen av olika ritualer och religiösa föremål (Lehtinen, 2008, s. 14). Under Renässansen fick geometrin en ny användning i bland annat Italien och Tyskland i samband med konstruktionen av katedraler och palats samt noggrannare arkitektritningar (Malkevitch, 2009, s. 10). Också inom konsten fanns vid denna tid en stark koppling till matematiken (Lehtinen, 2008, s. 83f). Klassisk matematik arbetade sålunda med sådant som kan upplevas genom sinnena och det går på så sätt att uppleva matematiken i kulturella lämningar så som anmärkningsvärda byggnader eller katedraler (Restivo, 1992, s. 6, 8).

Det var först i Grekland som matematiken och därmed geometrin, utvecklades till mer av en vetenskap genom formulerandet av olika påståenden, satser och bevis (Sjöberg, 1996, s. 17; Smith, 1953, s. 271). Thales förde med sig babylonisk matematik till Grekland och utnyttjade den för att göra praktiska beräkningar och problemlösning (Kalimuthu, 2009, s. 16). Han anses vara den första betydande matematikern i det antika Grekland (och världen) och kan anses ha spelat en viktig roll i geometrins utveckling. Thales formulerade vissa satser, men gav inga ”euklidiska” bevis för dessa (Lehtinen, 2008, s. 30; Sjöberg, 1996, s. 21). De satser som Thales formulerade anses vara grundläggande (Smith, 1953, s. 271). Det är oklart hur bevisen för dessa satser var formulerade, men det är troligt att Thales stödde sina påståenden genom rationella argument (Lehtinen, 2008, s. 30). Grekerna formulerade emellertid formella, logiska argument för bevisföring som också relaterades till varandra, vilket kulminerade i författandet av Euklides *Elementa* (Restivo, 1992, s. 12). Euklides *Elementa* översattes av Adelard från Bath i England till Latin omkring 1100-talet och med införandet av tryckpressar blev Euklides verk kända redan under sent 1400-tal (Lehtinen, 2008, s. 75f; Sjöberg, 1996, s. 95; Smith, 1953, s. 272). Latin var vetenskapens språk och användes fram till 1700 – 1800-talet – före 1800-talet hade fokus i svensk utbildning legat på kyrkans lära och klassiska språk (Sjöberg, 1996, s. 94; Lundin, 2008, s. 205). Detta härstammar ifrån medeltida undervisning där ”Luthers lilla katekes" utgjorde det huvudsakliga läromedlet (Lundgren & Säljö, 2012, s. 45; Richardson, 2010, s. 13).

3.2 Geometriundervisningens historia – 1700- och 1800-talet

På 1700-talet var ytterligare en brännpunkt för den svenska skolan en militär samhällsnytta (Nilsson, 2005, s. 11). Under denna tid och fram till och med 1800-talet var i stort sett all geometriundervisning baserad på den axiomatiska Euklidiska geometrin och Euklides verk *Elementa* (Lundin, 2008, s. 227; Sjöberg, 1996, s. 33; Lehtinen, 2008, s. 47). Utvecklingen gick långsamt eftersom geometrin inte låg i fokus bland dåtidens stora matematiker (Lehtinen, 2009, s. 65). Euklides har genom historien haft stor betydelse för och inflytande på den efterföljande matematiken och matematikundervisningen då den la grunden för en mer abstrakt och utvecklad kunskap (Sjöberg, 1996, s. 18; Prytz, 2007, s. 9; Restivo, 1992, s. 17). Matematiker har genom tiderna byggt vidare på det material och de benämningar som tidigare generationer skapat och använt. Denna kontinuitet tyder på en särskild professionalisering av matematiken, vilket tillåtit en större grad av abstraktion genom historien och då i synnerhet från och med 1800-talet (Restivo, 1992, s. 8). I Sverige låg den euklidiska geometrin till grund för geometriundervisningen ända fram till 1960-talet (Lundin, 2008, s. 207). En del förändringar infördes emellertid på prov redan tidigare genom att till exempel omstrukturera ämnets upplägg eller utnyttja invertering, rotation och symmetri i syfte att underlätta bevisföring (Prytz, 2007, s. 84, 86, 87).

Under 1800-talet framhölls i flera västerländska länder geometrin som en del av en grundläggande och generell bildning. Det handlar då om arbete med klassisk geometri som ett sätt att få kunskap om verkligheten samt utveckla resonemangsförmågan, något som i sig kan appliceras utanför matematikämnet (Prytz, 2007, s. 35-39). Sådana argument levde kvar ända in på 1950-talet (Prytz, 2007, s. 75). Matematiska studier bidrog också på sina håll gradvis till meritokratiska system. Sveriges matematikundervisning påverkas av denna samhällsutveckling i andra länder och olika idéer så som det tyska bildningsbegreppet (Lundin, 2008, s. 206). Strax efter sekelskiftet 1800 uppstod i Sverige en efterfrågan på realbildande ämnen så som moderna språk, naturvetenskapligt orienterade ämnen och matematik (Lundin, 2008, s. 205). Det fanns nu en ambition hos politiker att, i nya styrdokument, distansera sig ifrån klassiska språk som tidigare dominerat och istället ge utrymme för de realbildande ämnena (Lundin, 2008, s. 205; Prytz, 2007, s. 11).

3.3 Geometriundervisning på 1900-talet

Under början på 1900-talet avskaffades det katekestvång som rått och "Luthers lilla katekes" ersattes i skolorna av det nya ämnet "biblisk historia" (Lundgren, 2012, s. 81). Det skedde också en utveckling av realämnena i läroverken, men inte utan motstånd. Opposition kom till exempel från staten då realprogrammet ansågs gagna privata intressen istället för att, som en mera humanistiskt inriktad utbildning, ge utbildning åt nya statliga företrädare (Prytz, 2007, s. 28; Richardson, 2010, s. 12). På 1900-talet skedde en viss förändring i synen på geometriutbildning i olika västerländska länder. Fokus skiftades nu från en rent matematisk till en mera applicerbar, praktisk och experimentell geometri i anknytning till teknologins framfart under denna tid. Syftet med fokusskiftet var att utbildningens innehåll skulle bli relevant för framtida yrken, vilket i sig förklarar relevansen av intuition, experiment och en skiftning i bevisförande (Prytz, 2007, s. 39-45). Denna utveckling speglar sig också i den tidens allmänna pedagogiska filosofi, där pragmatism fick allt starkare ställning (Säljö, 2012, s. 177). Samtidigt beskrevs ofta den svenska skolans geometri under första halvan av 1900-talet som "klassisk", "statisk" och "isolerad", men en systematisk undersökning av matematikundervisningen i Sverige under denna tid saknas (Prytz, 2007, s. 11). Detta uppfattande av svensk skola som vetenskapligt gammalmodig ledde under början på 1900-talets andra hälft till debatt med internationella influenser om den svenska skolgeometrin och där ett förespråkande för utfärdandet av Euklidisk geometri rådde. Reformeringar med grund i denna ståndpunkt misslyckades dock av ett antal anledningar (Prytz, 2007, s. 48). På så sätt genomgick geometrin en betydligt långsammare utveckling än till exempel algebran (Lundin, 2008, s. 207). När folkskolan utvecklades fram till mitten på 1900-talet så fick geometri större utrymme i och med att antalet matematiktimmar ökade. Detta orsakade emellertid protester på realskola och gymnasium, då 1933-års utbildningsplan inskränkte mängden matematik i båda skolformerna (Prytz, 2007, s. 64f). Ett tydligt exempel på de internationella influenser som kom att påverka Sverige under andra halvan av 1900-talet var den rymdkapplöpning som rådde mellan USA och Sovjetunionen, vilket ledde till en reformering av den amerikanska skolmatematiken. De här reformeringarna kom snart att påverka hela Norden genom en större grad av individuellt arbete, diagnostiska prövningar och flexibilitet (Nilsson, 2005, s. 29; Pettersson & Wester, 2012, s. 511f). Detta speglas även i den tidens övergripande didaktiska fokus på självverksamhet och fritt skapande (Selander, 2012, s. 205).

4 Euklidisk geometri

Här presenteras Euklides och hans verk Elementa *som historiskt sett legat till grund för en stor del av den västerländska skolgeometrin, men som även delvis finns kvar och influerar modern svensk undervisning. Avsikten är att koppla den historiska röda tråd som alstret kan anses utgöra, till aktuella svårigheter inom geometriundervisning. På så sätt utformas också här en grund för efterföljande diskussion rörande modern geometriundervisning.*

4.1 Euklides och den axiomatiska geometrin

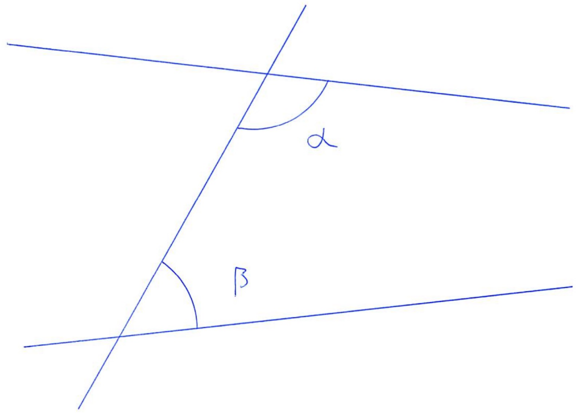
Euklides levde ungefär 300 f.Kr. Hans mest berömda verk är *Elementa* som består av 13 böcker och som översattes till svenska först år 1744 – och då endast de sex första böckerna (Sjöberg, 1996, s. 32). Verket har, som tidigare nämnts, använts i delar eller som utgångspunkt i svenska skolor ända fram till 1960-talet och kan ses som världens äldsta kontinuerligt använda matematiklärobok, men också som en sammanställning av det antika Greklands kunskap om geometri. *Elementa* är den första matematiska bok där innehållet framställs på ett axiomatiskt-deduktivt sätt, det vill säga innehållet byggs upp till en logisk struktur utifrån vissa grundläggande axiom. Det är inte Euklides själv som skapat allt det matematiska innehållet, men han krediteras det axiomatiska systemet och verkets sammanställning (Sjöberg, 1996, s. 33; Fitzpatrick, 2007, s. 4; Prytz, 2007, s. 158; Kalimuthu, 2009, s. 17). Presentationen av geometri på detta ideala vis kom att kallas ”euklidisk geometri” (Kalimuthu, 2009, s. 16) och den axiomatiskt-deduktiva metoden att presentera matematisk kunskap som *Elementa* bygger på, har kommit att bli standard i det matematiska etablissemanget. Med tanke på hur vitt spritt verket blivit genom historien går det att se opuset som den mest framgångsrika vetenskapliga skriften någonsin (Lehtinen, 2008, s. 47, 49; Halsted, 1920, s. x). *Elementa* innehåller framför allt plangeometri, aritmetik och rymdgeometri, som framställs logiskt genom definitioner, postulat, axiom, satser, konstruktioner och bevis. Alla konstruktioner som ingår kan uppritas med endast passare och en ograderad linjal (Sjöberg, 1996, s. 34f; Fitzpatrick, 2007, s. 4). Alstret innehåller dessutom en stor del aritmetik som inkluderas i bok 7, 8 och 9 och som delvis härstammar ifrån Pythagoréerna (Lehtinen, 2008, s. 48).

4.2 Parallellpostulatet

Det femte postulatet som beskrivs i bok 1 av Euklides *Elementa* är parallellpostulatet, även kallat parallellaxiomet (Parallel postulate, 2016, 18 juli). Det är ekvivalent med att det genom en punkt utanför en rät linje går att dra en annan linje som är parallell med den första på ett och endast ett sätt (Sjöberg, 1996, s. 38). Parallellpostulatet formuleras i Fitzpatricks version av *Elementa* som:

> And that if a straight-line falling across two (other) straight-lines makes internal angles on the same side (of itself whose sum is) less than two right-angles, then the two (other) straight-lines, being produced to infinity, meet on that side (of the original straight-line) that the (sum of the internal angles) is less than two right-angles (and do not meet on the other side). (Fitzpatrick, 2007, s. 7).

Detta innebär således att när en transversal skär två linjer och det bildas två vinklar mellan transversalen och linjerna, på samma sida om transversalen; vars vinkelsumma tillsammans är mindre än 180°, eller ”två räta vinklar”, så är de två linjerna inte parallella. Linjerna kommer alltså att mötas om de förlängs tillräckligt långt på den sida som vinklarna ligger. Detta illustreras i figur 1 nedan:



Figur 1: Parallellpostulatet säger att vinkelsumman av vinkeln α och vinkeln β, som bildas när transversalen skär de två linjerna, ska vara mindre än två räta vinklar (2R), det vill säga 180°, för att linjerna vid förlängning ska korsa varandra. Ekvivalent så innebär detta att det går att dra en och endast en linje genom en punkt utanför en given linje så att de båda linjerna blir parallella.

Parallellpostulatet kan sägas utgöra en röd tråd igenom geometrins historia sedan Euklides och har historiskt sett fått genomlida frekvent angripande och kritik (Smith, 1953, s. 282; Lewis, 1920, s. 16). Oklarheter kring det femte postulatet har funnits länge (Bağçe, 2005, s. 144). En huvudproblematik rörande detta postulat är huruvida det faktiskt är ett postulat och inte en sats. Flera matematiker genom historien har försökt ge enklare alternativ till postulatet och många försökte bevisa det som en sats, men misslyckades (Lehtinen, 2009, s. 69). Även Euklides själv sägs ha försökt bevisa påståendet innan han slutligen kallade det för postulat (Lewis, 1920, s. 16). Frågan som många matematiker ställt sig genom historien är alltså huruvida parallellpostulatet är sant, förutsatt att de föregående axiomen samt propositionerna som bygger på dessa, är sanna. Det vill säga, går det att härleda det femte postulatet ur de andra postulaten (Bağçe, 2005, s. 137; Lewis, 1920, s. 18). Uppfattningen att det skulle gå att bevisa parallellpostulatet som en sats med hjälp av axiomen, levde kvar ända fram till 1800-talet och framväxten av icke-Euklidisk geometri (Sjöberg, 1996, s. 38f; Lehtinen, 2008, s. 49f; Fitzpatrick, 2007, s. 7). I över 2000 år har olika försök gjorts för att bevisa det femte postulatet, eftersom det inte varit lika uppenbart som övriga axiom och redan de tidigaste skribenterna har uttryckt skepticism kring påståendet (Kalimuthu, 2009, s. 19; Lewis, 1920, s. 16).

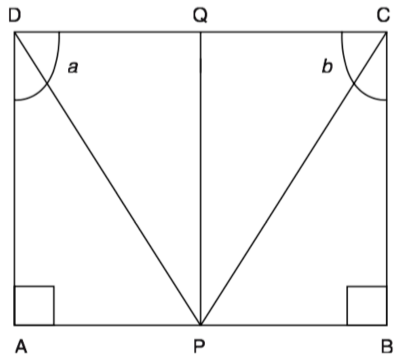
Tidiga försök till att ge klarhet kring parallellaxiomet skedde genom direkt härledning från de övriga postulaten. En annan metod som använts är att försöka ersätta eller omdefiniera axiomet med något enklare påstående eller nytt antagande, för att därefter härleda parallellaxiomet ur detta. Problemet är att denna metod inte är tillfredsställande eftersom nya antaganden ofta inte är mer uppenbara än de gamla (Bağçe, 2005, s. 144-145; Kalimuthu, 2009, s. 19; Lewis, 1920, s. 17; Halsted, 1920, s. ix, 7). Ptolemaios försökte redan för ca 2200 år sedan visa att det femte postulatet går att härleda ur övriga postulat. För ca 1500 år sedan genomförde Proklos ett korrekt bevis, men ersatte ett tvetydigt postulat med ett annat. Hans resonemang innefattade antaganden som kan tolkas som postulatet självt (Bağçe, 2005, s. 145; Lewis, 1920, s. 17). Han byggde sin skepticism på sina kunskaper om asymptoter och oron att postulatet skulle gå att tolkas som eller förknippas med dessa (Lewis, 1920, s. 16).

För cirka 1000 år sedan blev Ibn al-Haytham (965–1039) först med att utnyttja ett motsägelsebevis i syfte att bevisa parallellpostulatet (Kalimuthu, 2009, s. 19). Nasr Eddin al-Tusi (1201–1274) försökte även han under 1200-talet bevisa postulatet genom ett motsägelsebevis, men nådde inte fram till några slående resultat (Bağçe, 2005, s. 145; Smith, 1953, s. 283). Al-Tusis son skrev en bok baserat på sin fars tankar, vilket kom att utgöra en grund för Saccheris vidare arbete inom området (Kalimuthu, 2009, s. 20). På 1600-talet försökte John Wallis (1616–1703) bevisa postulatet genom att göra ett antagande, men de förutsättningar han använde var i sig inte mindre problematiska än själva postulatet. Han upptäckte att premisserna var ekvivalenta med parallellpostulatet, om något naturligare, och därmed förlorade beviset mening (Lehtinen, 2009, s. 69; Bağçe, 2005, s. 145).

Girolamo Saccheri (1667–1733) försökte liksom al-Tusi att ge ett indirekt bevis för postulatet genom att utgå ifrån tre hypotetiska fall, ett av fallen lyckades han inte motsäga (Lehtinen, 2009, s. 69; Lewis, 1920, s. 18; Halsted, 1920, s. xi). Det matematiska verket förutsätter inte parallellaxiomet utan syftar till att bevisa dess korrekthet (Duo, 1970, s. 385). Saccheri hade samma utgångspunkt som al-Tusi, men använde större noggrannhet och fick mer korrekta resultat (Kalimuthu, 2009, s. 20). Saccheris försök att klarlägga det tredje fallets oriktighet genom en logisk motsägelse misslyckas eftersom försöket i sig självt innehåller brister (Bağçe, 2005, s. 142). Den utgångspunkt i tre olika fall som Saccheri utnyttjade upptäcktes först av Omar Khayyám (1048–1131), då han försökte skapa ett icke-euklidiskt postulat. På så sätt blev han också först med att överväga elliptisk såväl som hyperbolisk geometri (Kalimuthu, 2009, s. 19). Senare upptäcktes också att Saccheris tre hypoteser svarade mot euklidisk, elliptisk respektive hyperbolisk geometri (Lewis, 1920, s. 19).

Enligt Saccheri fanns vissa ”fläckar” i det annars perfekta verket *Elementa*, varav den största är parallellaxiomet (Bağçe, 2005, s. 139; Lewis, 1920, s. 17; Halsted, 1920, s. 5). Saccheri utnyttjade klassisk euklidisk geometri i sin strävan att lösa oklarheten kring parallellaxiomet och befria *Elementa* ifrån denna ”fläck” i sitt verk *Euclides ab omni nævo vindicatus* (1733), eller på engelska, ”Euclid Freed of Every Flaw”. Han jobbade utifrån premissen att försvara Euklides verk, men kom i sitt arbete att lägga grunden för det som senare utvecklades till viktiga satser inom icke-euklidisk geometri (Bağçe, 2005, s. 138; Halsted; 1920). På så sätt kan Saccheri ses som en föregångare till den icke-euklidiska geometrins framväxt, ty hans relaterade upptäckter till detta område skedde oavsiktligt (Bağçe, 2005, s. 137).

Arbetet strukturerades logiskt och utnyttjade Saccheris egna påståenden och resultat som alla bygger på ett axiomatiskt tillvägagångssätt i euklidisk mening, då han accepterar de första fyra postulaten och 28 propositionerna i *Elementas* första bok (Bağçe, 2005, s. 139). Målet med arbetet var att försäkra parallellpostulatets riktighet och applicerbarhet i all geometri (Halsted, 1920, s. 9). De ”fall” som Saccheri arbetade kring var de som uppstod ur ”Saccheris fyrhörning”, en figur som Saccheri utgick ifrån i sitt arbete. Här uppstod några olika fall där vinklarna a och b (Figur 2) benämndes rät, trubbig eller spetsig (Bağçe, 2005, s. 140; Halsted, 1920, s. xxix; Duo, 1970, s. 386f).



Figur 2: I Saccheris fyrhörning är basen AB given med vinklarna vid A och B räta samt |AD| = |BC|. Genom att acceptera Euklides definitioner, fyra första postulat och 28 första propositioner så lyckas Saccheri visa att de markerade vinklarna a och b är lika stora. Saccheri ställde då upp tre fullständiga och uteslutande fall för vinkelsumman: $a + b = \pi$; $a + b > \pi$; $a + b < \pi$, där π är vinkelsumman i radianer (Bağçe, 2005, s. 140).

Saccheri visade genom sina axiom att fall 1 ($a + b = \pi$) var ekvivalent med Euklides postulat (Bağçe, 2005, s. 141). Fall 2 ($a + b > \pi$) och fall 3 ($a + b < \pi$), överensstämmer med elliptisk geometri respektive hyperbolisk geometri. Då Saccheri själv var övertygad om att den euklidiska geometrin var den enda rätta gjorde han en ansträngning att motbevisa fall 2 och fall 3. Han lyckades med detta för fall 2, men inte fall 3. Däremot lyckades han felaktigt intala sig själv att han lyckats även för fall 3, troligtvis för att rättfärdiga sitt arbete (Bağçe, 2005, s. 141; Lehtinen, 2009, s. 69; Halsted, 1920, s. xii). Vidare var tvivlade aldrig Saccheri på det femte postulatets eller den euklidiska geometrins korrekthet. Detta eftersom hans erfarenheter, i samband med den historiska och filosofiska bakgrund och tankegång som rådde, pekade mot deras riktighet (Duo, 1970, s. 398, 399, 404, 407). Denna övertygelse visar sig också tydligt i bokens texter (Duo, 1970, s. 405).

Bevisen som låg till grund för resultaten presenteras i Saccheris verk som proposition XIV och XXXIII (Halsted, 1920, s. 59, 61, 173, 175, 177). De bevis som presenteras är väldigt långa och innehåller till övervägande del korrekta resonemang. Den logiska felaktigheten ligger i antagandet av gränsers existens utan något bevis för detta (Duo, 1970, s. 391). Felaktigheten ligger således i grundandet på oriktiga antaganden om linjers egenskaper. Resultaten är dock ändå betydelsefulla då de ledde till viktiga upptäckter inom icke-euklidisk geometri (Bağçe, 2005, s. 142f; Lehtinen, 2009, s. 69; Duo, 1970, s. 395). Trots att bevisen utförs logiskt korrekt finns alltså skepticism mot huruvida vissa av antagandena är korrekta eller inte. Till exempel påpekar Duo (1970, s. 387) att beviset för fall 2 är felaktigt eftersom det antar en sats från *Elementa* som inte appliceras korrekt i sammanhanget. Saccheri diskuterar själv användningen av dessa satser, I.16-17 och I.27-28 från *Elementa*, och skiljer mellan användningen av olika par som mer eller mindre godtagbart (Halsted, 1920, s. 9; Duo, 1970, s. 388; Bağçe, 2005, s. 141). På så sätt förväxlar Saccheri två typer av definitioner (*nominales* och *reales*) – en sammanblandning som han själv varnar för (Halsted, 1920, s. xviii; Duo, 1970, s. 391; Bağçe, 2005, s. 143) och som är särskilt relevant för definierandet av parallella linjer (Duo, 1970, s. 395).

Saccheris tydliga uppdelning av motbeviset i tre hypotetiska fall kan ses som den historiskt första (Bağçe, 2005, s. 144). Hans handskande av problemet och applicerandet av klassisk euklidisk idélära ledde tillsammans med Saccheris fyrhörning till en revolutionerande omformulering och lösning av problemet, vilket hade stor inverkan på flera samtida och efterföljande geometriker, så som Lambert (1728–1777), Legendre (1752–1833), Bernoulli (1655–1705), Kant (1724–1804), Gauss (1777–1855) och Lobachevskij (1792–1856) (Bağçe, 2005, s. 147f; Lehtinen, 2009, s. 69f; Duo, 1970, s. 396). Till exempel ledde Gauss arbete till resultatet att parallellaxiomet inte går att bevisa med stöd från övriga geometriska axiom (Sjöberg, 1996, s. 176). Hur mycket Gauss stödde sig på Saccheris resultat är däremot svårt att veta (Duo, 1970, s. 396). Gauss studerade problemet och introducerade idéen kring ytkrökning, men valde att inte publicera sina upptäckter på grund av den då dominerande kulturen kring geometri (Kalimuthu, 2009, s. 20). Denna psykologiska aspekt gör också Gauss involvering i problematiken särskilt intressant. De slutsatser som Gauss gett uttryck för bekräftades i och med den icke-euklidiska geometrins framfart på 1800-talet (Lewis, 1920, s. 19; Duo, 1970, s. 397).

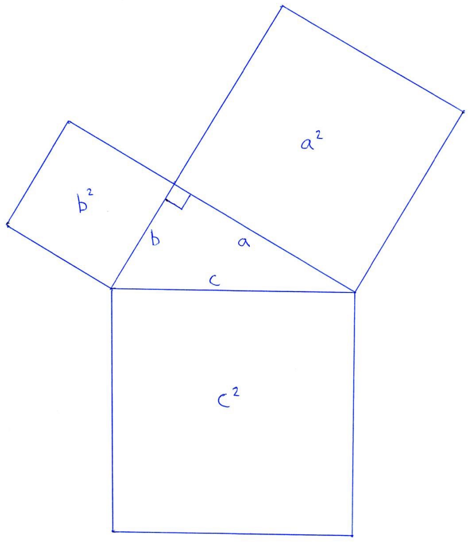
Beltrami (1835–1900) lyfte under andra halvan av 1800-talet den icke-euklidiska geometrin till samma ställning som den euklidiska, då Euklides fyra första postulat höll i hans modell, men inte det femte (Kalimuthu, 2009, s. 21; Lehtinen, 2009, s. 72). Parallellaxiomet svarar inom euklidisk geometri mot att vinkelsumman i en triangel är 180° (Sjöberg, 1996, s. 38; Kalimuthu, 2009, s. 19f). Legendre tydliggjorde denna relation på 1800-talet då han visade att om vinkelsumman i en triangel är 180° så gäller parallellpostulatet (Lewis, 1920, s. 18). För de elliptiska och hyperboliska icke-euklidiska geometrierna, där det femte postulatet inte stämmer, gäller att vinkelsumman i en triangel är större respektive mindre än 180° (Sjöberg, 1996, s. 176). Beroende på vilken geometri som utgås ifrån, så finns följaktligen inga (elliptisk), en (euklidisk) eller två (hyperbolisk) parallella linjer till varje linje (Duo, 1970, s. 386). En intressant följd som kom av parallellpostulatets svårigheter är att frågor om geometrins ställning som logiskt felfri väcktes och följaktligen påverkade andra grenar inom matematiken genom ökad granskning (Lewis, 1920, s. 21).

4.3 Oklarheter i *Elementa*

En svårighet som är påtaglig i *Elementa* är de definitioner som Euklides använt för att beskriva sådant som en ”punkt” och ”rät linje”. Svårigheten ligger i att beskriva dessa objekt utan att nyttja matematiskt odefinierade begrepp (Sjöberg, 1996, s. 40; Lehtinen, 2009, s. 73). Euklides första definition är den för en punkt och lyder: ”en punkt är något som inte kan delas”. Detta liknar den pythagoreiska definitionen ”en monad som har en position”, men med skillnaden att Euklides beskriver vad en punkt inte är. Därmed blir definitionen logiskt meningslös, eftersom den inte ger läsaren någon åskådlig bild av vad en punkt är. Också definitionen av en linje ”en linje är en längd utan bredd” har logiska brister då begreppen ”längd” och ”bredd” inte definierats. Definitionen är densamma som Platonisterna använde. (Sjöberg, 1996, s. 36; Smith, 1953, s. 274f; Fitzpatrick, 2007, s. 6). En annan brist är att *Elementa* använder postulat som förutsätter en spatial förmåga och Euklides drar flera slutsatser utifrån denna förutsatta spatiala intuition vilket utgör ytterligare ett skäl för skepticism hos många matematiker (Sjöberg, 1996, s. 40; Lewis, 1920, s. 21). En tydlig oklarhet som Kline (1972) påpekar rör likbenta trianglar. Med hjälp av Euklides definitioner och axiom bevisar Kline att alla tringlar är likbenta. Detta stämmer emellertid inte. Felaktigheten uppstår när skärningspunkten mellan en bisektris och den vinkelräta linje som går igenom mittpunkten på den motstående sidan antas ligga i triangeln. Om skärningen är inuti triangeln så stämmer det som Kline upptäckte – men, skärningen ligger i själva verket utanför triangeln, vilket gör att beviset faller (Kline, 1972, s. 1005-1007). Således är *Elementa* inte felfri i sin helhet och flera efterföljande matematiker har upptäckt ett flertal hål och felaktigheter i härledningarna (Lehtinen, 2008, s. 49).

4.4 Pythagoras sats

Pythagoras sats säger att kvadraten på hypotenusan är lika med summan av kvadraterna på kateterna i en rätvinklig triangel (Figur 3). Detta presenterar Euklides som den 47:e propositionen i *Elementas* första bok (Fitzpatrick, 2007, s. 46f; Tambour, 2002, s. 16; Persson & Böiers, 2010, s. 29).



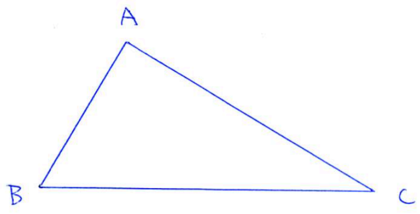
Figur 3: Pythagoras sats säger att summan av kvadraterna på kateterna är lika med summan av kvadraten på hypotenusan i en rätvinklig triangel. Algebraiskt kan detta uttryckas som $a^2 + b^2 = c^2$, där a och b betecknar de båda kateterna medan c betecknar hypotenusan.

Euklides poängterade att det omvända också gäller, vilket han presenterar som sats 48 i *Elementas* första bok (Fitzpatrick, 2007, s. 48). Satsen är applicerbar inom flera matematiska grenar och studerades redan långt före Euklides tid av bland andra babylonierna och egyptierna (Silverman, 2012, s. 13; Persson & Böiers, 2010, s. 29; Sjöberg, 1996, s. 14; Joyce, 2002). Pythagoras sats innehåller begrepp som måste definieras innan den får någon betydelse (Persson & Böiers, 2010, s. 29f). Exempelvis är hypotenusan den sida i en rätvinklig triangel som står mot den räta vinkeln och kateterna de andra två sidorna (Tambour, 2002, s. 15f; Persson & Böiers, 2010, s. 30). I *Elementa* har alla nödvändiga begrepp och procedurer som används i formuleringen av satsen och det presenterade beviset tagits upp enligt den axiomatiska uppställning som diskuterats ovan. Dessa är, utöver grundläggande definitioner och axiom, satserna 14, 31, 41 och 46 i *Elementas* första bok (Fitzpatrick, 2007, s. 6, 7, 19, 33, 41, 45; Mathematics Online, 2012). Det finns en mängd bevis för Pythagoras sats som utnyttjar många olika tillvägagångssätt (Tambour, 2002, s. 16). Euklides presenterar utöver beviset för Pythagoras sats även ett bevis för en relaterad sats, nämligen sats 31 i *Elementas* sjätte bok. Denna sats säger att en figur på hypotenusan har en area som motsvarar summan av samma figur på kateterna och satsen är således en generalisering av Pythagoras sats (Fitzpatrick, 2007, s. 189; Joyce, 2002). Här kan det också tänkas bli relevant att nämna pythagoreiska tripplar som ett sätt att bestämma nya mått till sidorna i en rätvinklig triangel (Silverman, 2012, s. 14).

4.5 Euklides klassiska bevis av Pythagoras sats

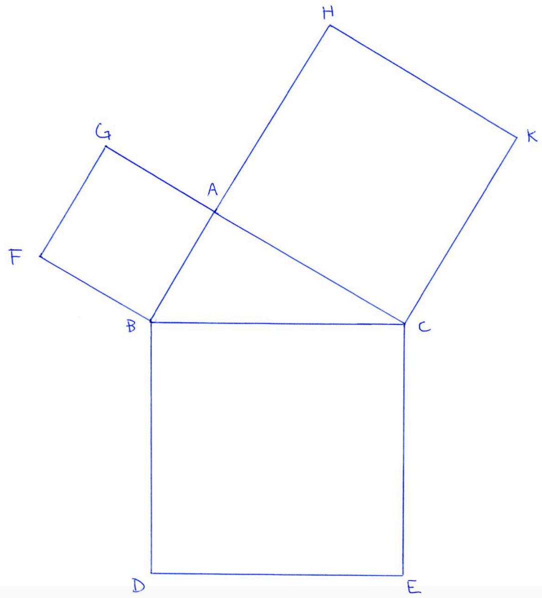
Det klassiska beviset för Pythagoras sats som introducerades kortfattat i stycket ovan bygger sålunda på grundläggande definitioner och axiom samt resultat ifrån redan presenterade propositioner i Euklides *Elementa*. Satsen utgör som tidigare nämnts proposition 47 i detta alster, (Fitzpatrick, 2007, s. 46f; Tambour, 2002, s. 17f) och beviset presenteras nedan.

Vi låter ABC vara en rätvinklig triangel där vinkeln BAC är rät (Figur 4) och vill visa att summan av kvadraten på sträckan BC är lika med summan av kvadraterna på sträckorna AB och AC.



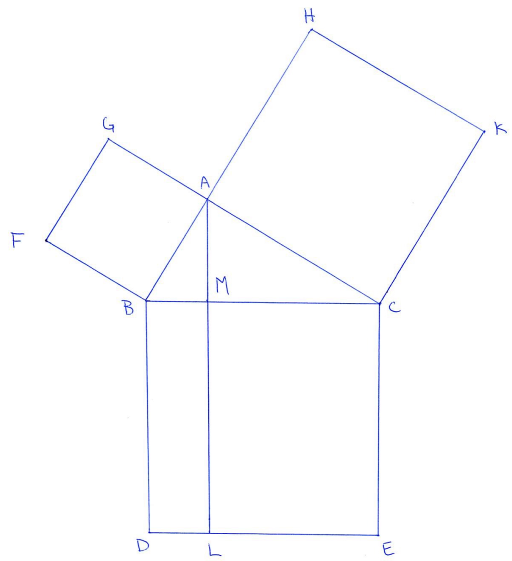
Figur 4: En rätvinklig triangel med den räta vinkeln BAC.

Vi konstruerar först kvadraten BDEC på sidan BC, kvadraten AGFB på sidan AB och kvadraten CKHA på sidan AC enligt Proposition I.46 (Figur 5).



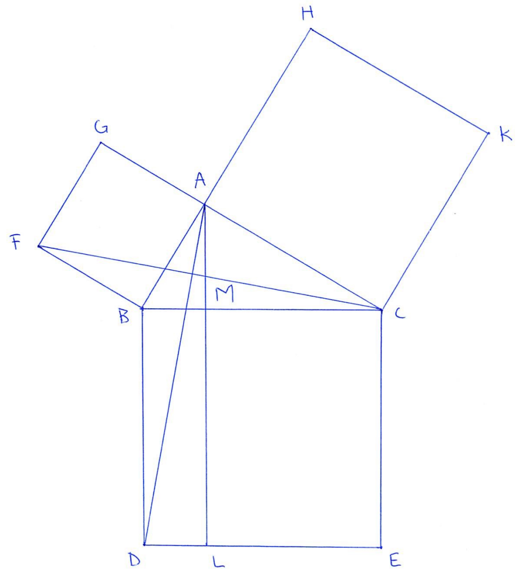
Figur 5: Kvadrater konstrueras mot varje sida på den rätvinkliga triangeln.

Därefter ritar vi in sträckan AL mellan punkten A och dess skärning L med sträckan DE så att AL blir parallell med BD och CE enligt Proposition I.31. Skärningen med linjen BC kallar vi M (Figur 6).



Figur 6: Sträckan AL konstrueras parallellt med sidorna BD och CE.

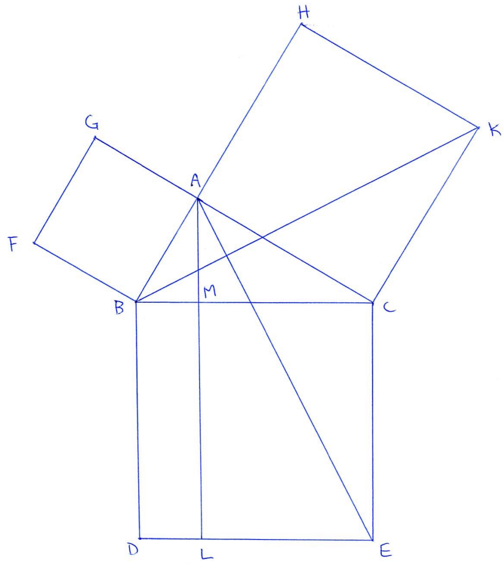
Vi förbind därefter punkt A med punkt D och punkt F med punkt C så att sträckorna AD och FC bildas.



Figur 7: Punkt A och D samt punkt F och C förbinds så att två trianglar – ABD och FBC – bildas.

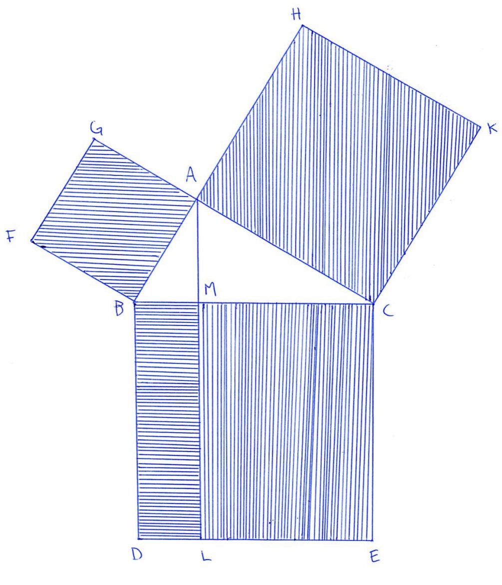
Vinklarna DBA och FBC är lika eftersom båda består av vinkeln ABC och en rät vinkel – ∟DBC respektive ∟FBA. Eftersom $|AB| \cong |FB|$ och $|BD| \cong |BC|$ och $\angle DBA \cong \angle FBC$ så får vi att $\Delta FBC \cong \Delta ABD$ enligt Proposition I.4. Vidare har vi att sidan FB || sidan GA. Dessutom är $\angle BAG \cong \angle BAC \cong$ ∟. Alltså är $\angle BAG + \angle BAC \cong$ ∟ + ∟ = 180°. Sträckorna AC och AG ligger således enligt Proposition I.14 på samma linje och vi har CG || BF. Kvadraten AGFB ligger mellan samma parallella linjer som triangeln FBC, vilket innebär att arean av kvadraten AGFB är dubbelt så stor som arean av triangeln FBC enligt Proposition I.41. Enligt samma proposition har vi att arean av rektangeln BDLM är dubbelt så stor som arean av triangeln ABD. Följaktligen får vi att rektangeln BDLM har samma area som kvadraten AGFB.

Vi får att arean av kvadraten CKHA är lika stor som arean av rektangeln MCEL genom att rita sträckan BK mellan punkt B och punkt K samt sträckan AE mellan punkt A och punkt E och applicera samma resonemang som innan (Figur 8).



Figur 8: Om sträckorna mellan punkt B och K respektive punkt A och E dras och samma resonemang som innan förs, så påvisas att arean av kvadraten CKHA är lika stor som arean på rektangeln MCEL.

Således har vi slutligen också att arean av kvadraten på sidan BC är lika med summan av arean av de båda kvadraterna på sidorna AB och AC (Figur 9).



Figur 9: Åskådning av kvadraterna på sidan BA och AC, vars sammanlagda area svarar mot den summerade arean av de rektanglar som tillsammans utgör kvadraten på sidan BC.

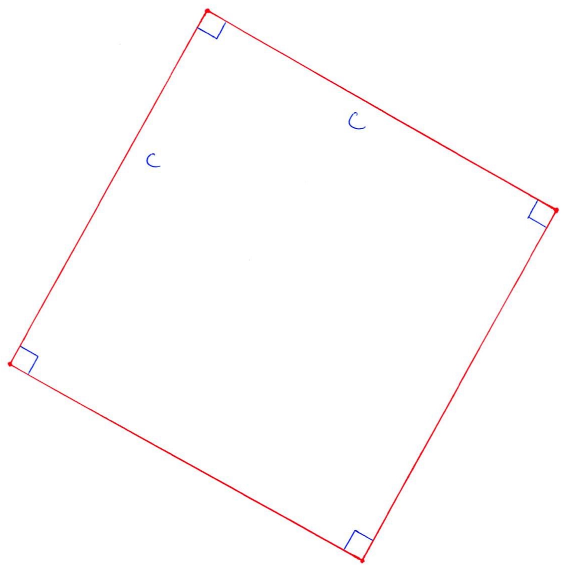
4.6 Pythagoras sats och bevisens roll i dagens skola

Pythagoras sats är ett av de teorem som idag och historiskt sett präglat matematikundervisning (Prytz, 2007, s. 167; Tambour, 2002, s. 17; Silverman, 2012, s. 13). Ur tidigare framställning av litteraturen kan vi konstatera att det råder en uppfattning hos elever om att argumentation och formella bevis inom geometri är svårt. Generalisering kan i stort anses vara något de inte känner sig säkra med (Kadej, 2008, s. 16). Det finns forskning som tyder på att elever har svårt att uttrycka sig utan hjälp och bekräftelse ifrån en lärare eller ett givet svar (Popescu & Koedinger, 2000, s.1) och att elever överlag kan tänkas ha svårt att lösa geometriproblem (Nilsson, 2005, s. 80). Vidare uppfattar också lärare det som utmanande att arbeta med bevis, eftersom de saknar erfarenhet av att undervisa bevisföring (Koi, 2008, s. 260). Bevisföring ser annorlunda ut i skolan i olika länder, vilket kan förklaras som en följd av att läroplanerna är utformade olika (Mariotti, Knipping, Küchemann & Nordström, 2005, s. 386). I Sverige och många andra länder har bevisens roll i skolan inskränkts nämnvärt sedan 1980-talet (Nordström & Löfwall, 2005, s. 448), vilket är oroväckande med tanke på bevisens roll inom matematiken (Lehtinen, 2008, s. 10). Redan på 1930-talet riktades kritik mot elever och lärare angående elevers svårigheter att utföra enkla bevis (Prytz, 2007, s. 183) och numera tycks bevis i allmänhet vara förbehållna några få högpresterande elever. Av de i läroböcker presenterade ämnesområdena tycks geometriavsnittet vara det som präglas av flest möjligheter till arbete med bevis (Nordström & Löfwall, 2005, s. 450, 454), vilket också kan anses motivera geometrins betydelse inom skolmatematiken ytterligare.

4.7 Ett modernt läroboksbevis av Pythagoras sats

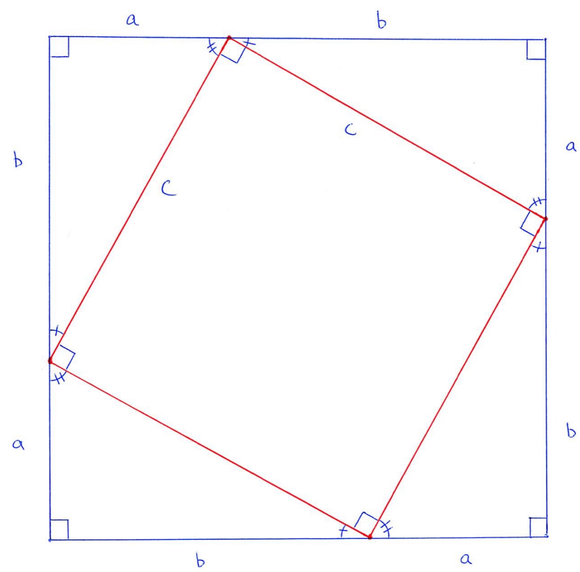
Nedanstående bevis används i läroboken Origo 1b (2011) och utnyttjar både geometri och algebra, till skillnad från det klassiska Euklidiska beviset som är helt geometriskt. En bild skapas med hjälp av geometriska figurer, varpå areor beräknas och algebra används för att förenkla det erhållna uttrycket, tills det att Pythagoras sats bevisats. Nedan framställs beviset stegvis.

Inled med att skapa en kvadrat med sidan c (Figur 10).



Figur 10: En kvadrat med sidan c.

Skapa sedan fyra rätvinkliga trianglar vars hypotenusa är kvadratens sidor. Två hörn i triangeln kommer vara placerade i kvadratens hörn. En större kvadrat skapas med hjälp av de trianglar som omsluter den mindre kvadraten. De omslutande trianglarna bildar en kvadrat eftersom de är kongruenta. Denna yttre figur är en kvadrat med räta vinklar eftersom vinkelsumman av den inre kvadratens hörn och de intilliggande vinklarna i trianglarna är 180° (se markerade vinklar i figur 11). Det går nu att beräkna den större kvadratens area på två olika sätt (Figur 11).



Figur 11: Kongruenta rätvinkliga trianglar skapas på kvadratens sidor. Detta skapar en större kvadrat som omsluter den mindre kvadraten med sidan c.

Genom att studera en av de sidorna som den större kvadraten har så kan vi uttrycka en sida som $a + b$. Arean för en kvadrat beräknas genom formeln s^2, vilket i detta fall leder till att arean är $(a + b)^2$. Detta kan skrivas om med hjälp av första kvadreringsregeln till $a^2 + b^2 + 2ab$.

Arean kan också beräknas genom att studera den mindre kvadraten samt trianglarna. Arean för den lilla kvadraten med sidan c är då c^2. En triangels area är $\frac{(b \cdot h)}{2}$ vilket i detta fall blir $\frac{(a \cdot b)}{2}$ eftersom det finns fyra trianglar så får vi arean för alla trianglar genom $4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$. Genom att addera dessa två areor så får vi den stora kvadratens area som får uttrycket $c^2 + 4 \cdot \frac{(a \cdot b)}{2}$ som kan förenklas till $c^2 + 2ab$.

Dessa två uttryck beskriver samma area, vilket gör det möjligt att ställa upp ekvationen $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$. Denna ekvation kan förenklas till $a^2 + b^2 = c^2$ vilket bevisar Pythagoras sats.

5 Geometrin i svensk skola – förr och idag

Syftet med denna del är att ge en överblick av skolgeometrins utformning och betydelse för dagens undervisning. Genom att presentera innehåll från läroplanen, ämnesplaner och kursplaner med koppling till geometriområdet ges en kontrastering av den historiska genomgången ovan mot moderna tankegångar om vad som idag är relevant undervisningsinnehåll. För att tydliggöra skillnaderna mellan dagens riktlinjer och vad som tidigare poängterats i svensk geometriundervisning inleds avsnittet med en sammanställning av tidigare svenska styrdokuments kommentarer om ämnet.

5.1 Geometrins framställning i tidigare svenska styrdokument

Före införandet av den nioåriga grundskolan i och med 1962-års banbrytande skolreform, fanns geometri uttryckt i folkskolans normalplaner och de efterföljande utbildningsplanerna (Prytz, 2007, s. 59). Geometrins betydelse, fokus och omfång har varierat genom historien för att slutligen leda fram till det som idag utgör läroplanerna för den svenska grund- och gymnasieskolan. Före utbildningsplanen 1919 klassificerades geometri som ett eget ämne, men kom så småningom att kombineras först med aritmetik och därefter andra delar av det som idag inkluderas i matematikämnet (Prytz, 2007, s. 55). I utbildningsplanen för folkskolan uppmanas läraren att låta elever själva utföra mätningar, skapa fysiska modeller genom klippning, vikning och dylikt. Stort fokus låg sålunda på ett praktiskt åskådliggörande inom geometriundervisningen för de yngre åldrarna (Prytz, 2007, s. 57). Vidare skulle elever få skapa geometriska konstruktioner som kan vara av användning i livssituationer genom att i fält göra iakttagelser och prövningar (Kungl. Skolöverstyrelsen, 1919, s. 69). Det fanns alltså klara direktiv för att de studerande skulle omsätta sin teoretiska kunskap i praktiken (Prytz, 2007, s. 71). Den teoretiska grunden för skolgeometrin fram till 1960-talet var emellertid Euklides elementa, vilket också påpekats i avsnitt 3.2.

Geometriundervisning har i Sverige varit en del av den moderna skolundervisningen sedan läroplanen 1962 – Lgr62. Lgr62 bestod av två delar, en allmän del med mål och riktlinjer och en del innehållande timplaner och kursplaner för varje ämne. Nilsson påpekar hur han under sin egen tid som lärare på 60-talet upplevt att den allmänna delen ofta förbisågs som mindre viktig (Nilsson, 2005, s. 21). Lgr62 poängterar att matematikundervisning ska ge eleven förtrogenhet i elementära geometriska begrepp och metoder, däremot är inte axiomatisk geometri och euklidiska konstruktioner lika framträdande som tidigare (Kungl. Skolöverstyrelsen, 1962, s. 164; Nilsson, 2005, s. 22). Detta innefattar i högstadiet sådant som behandling av cirkelns omkrets och area, rit- och mätövningar rörande geometriska figurer i plan, mätningar av vinklar och introduktion av viss volymberäkning av till exempel cylindrar, koner och klot. Vidare ska även ”viktiga geometriska satser” tas upp (Kungl. Skolöverstyrelsen, 1962, s. 165-169). Här uppmuntras också användningen av geometri för att förklara viss aritmetik och algebra (Kungl. Skolöverstyrelsen, 1962, s. 170). Sådan analytisk geometri arbetade bland annat René Descartes och Pierre de Fermat med redan på 1600-talet och Julius Plücker på 1800-talet (Sjöberg, 1996, s. 112; Restivo, 1992, s. 14; Lehtinen, 2009, s. 68).

I den efterföljande läroplanen Lgr69 finns kongruens, likformighet, vektorer, mätning, enhetsbyten, längd, area och volymberäkning alla uttryckta under högstadiets huvudmoment (Skolöverstyrelsen, 1969, s. 137). Även här uppmuntras undervisning som tydliggör sambandet mellan de olika grenarna inom matematiken och det poängteras att matematikundervisningen kan underlättas genom nyttjandet av ett gemensamt områdesövergripande språk (Skolöverstyrelsen, 1969, s. 138). Under kursplanen för matematik i läroplanen för gymnasieskolan 1970 återfinns bland annat vektorer, koordinatsystem i plan och rum samt area- och volymberäkning (Skolöverstyrelsen, 1970, 257-259). Även här förespråkas en integrerad matematikundervisning utan skarpa gränser inom ämnet eller kursen. Det skulle dessutom förekomma tillämpningar som var relevanta för det aktuella programmet (Skolöverstyrelsen, 1970, s. 259f).

5.2 Läroplanen för gymnasieskolan

För att skolan ska kunna förmedla kunskaper så krävs en diskussion om vad kunskap är och vilken kunskap som är viktig nu, men också i framtiden. Kunskapen kan även komma i olika former som bland annat fakta och färdigheter och undervisningen ska betona de olika kunskapsformerna (Skolverket, 2011, s. 8). Detta betyder att läraren måste genomföra en varierad undervisning där de kunskapsformerna behandlas.

Skolans uppdrag är att främja utvecklingen hos eleverna så att de aktivt deltar i yrkes och samhällslivet samt elevernas allsidiga utveckling. Eleverna ska också vilja lösa problem och utveckla sin förmåga att ta initiativ och ansvar. Elever ska dessutom lära sig att arbeta själva men också tillsammans med andra (Skolverket, 2011, s. 6f). Skolverket skriver också om vad eleverna ska kunna göra med sin kunskap.

> De ska kunna använda kunskapen för att:
> – formulera, analysera och pröva antaganden och lösa problem,
> – reflektera över sina erfarenheter och sitt eget sätt att lära,
> – kritiskt granska och värdera påståenden och förhållanden, och
> – lösa praktiska problem och arbetsuppgifter. (Skolverket, 2011, s. 9)

Detta blir svårt för eleverna att genomföra på en lektion där läraren inleder med en föreläsning, som sedan efterföljs av individuellt räknande i läroboken. Det kräver då att matematikundervisningen innehåller delar där man jobbar med till exempel öppna problem som gynnar eleverna på dessa punkter. Man måste också använda sig av formativ bedömning där eleverna bland annat får reflektera över erfarenheter och hur de lär sig. Öppna problem är också ett bra tillfälle för just formativ bedömning enligt skolverket i deras stödmaterial *Kunskapsbedömning i skolan* (2011).

5.3 Ämnesplanen för matematik

”Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.” (Skolverket, 2011, s. 90). Matematikundervisningen ska syfta till att utveckla elevernas matematiska förmåga, förståelse och strategier för att lösa problem. Eleverna ska även utmanas inom matematiska områden och genom detta få erfarenheter inom de olika matematiska områdena. Undervisningen ska vara varierad med olika arbetssätt och möjligheter till undersökande aktiviteter samt möjlighet till kommunikation genom olika uttrycksformer där också digital teknik ska innefattas (Skolverket, 2011, s. 90).

Skolverket specificerar sju förmågor som eleverna ska utveckla inom matematikens olika områden, till exempel geometri. Förmågorna är nödvändiga hjälpmedel och behövs för att uppfylla målen i stycket ovan, så som att de ska kunna kommunicera, lösa problem, föra matematiska resonemang och så vidare (Skolverket, 2011, s. 90f). Läraren måste då bedriva en undervisning som utvecklar dessa sju olika förmågor inom alla olika matematiska områden som ämnesplanen innehåller.

5.4 Kursplaner i matematik

Alla elever i gymnasieskolan läser matematik 1 men i de olika kurserna Ma1a, Ma1b och Ma1c. Matematik 1 bygger på den kunskap som ges i grundskolan, men det centrala innehållet varierar beroende på vilken av de tre kurserna som eleven läser (Skolverket, 2011, s. 91). Detta medför att alla elever inte jobbar med exakt samma delar av det geometriska innehållet utan viss variation finns.

Elever som går yrkesprogram läser matematik 1a där fokus hamnar på matematiken inom de yrken de ska utbilda sig till. Detta görs bland annat genom att ha uppgifter som är knutna till yrket (Skolverket, 2011, s. 92). Det centrala innehållet som behandlar geometri är följande:

- Egenskaper hos och representationer av geometriska objekt, till exempel ritningar, praktiska konstruktioner och koordinatsystem.
- Geometriska begrepp valda utifrån karaktärsämnenas behov, till exempel skala, vektorer, likformighet, kongruens, sinus, cosinus, tangens och symmetrier.
- Metoder för mätning och beräkning av storheter som är centrala för karaktärsämnena.
- Enheter, enhetsbyten och behandling av mätetal som är centrala för karaktärsämnena samt hur man avrundar på ett för karaktärsämnena relevant sätt. (Skolverket, 2011, s. 92)

Elever som går på ekonomiprogrammet, estetiska programmet, humanistiska programmet och samhällsvetenskapsprogrammet läser kursen matematik 1b. Här knyts matematiken till flera olika delar så som andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria (Skolverket, 2011, s. 98). Det centrala innehållet som behandlar geometri är följande:

- Begreppet symmetri och olika typer av symmetriska transformationer av figurer i planet samt symmetriers förekomst i naturen och i konst från olika kulturer.
- Representationer av geometriska objekt och symmetrier med ord, praktiska konstruktioner och estetiska uttryckssätt.
- Matematisk argumentation med hjälp av grundläggande logik inklusive implikation och ekvivalens samt jämförelser med hur man argumenterar i vardagliga sammanhang och inom olika ämnesområden.
- Illustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma. (Skolverket, 2011, s. 98)

Den sista matematik 1-kursen är matematik 1c som elever från naturvetenskapliga och tekniska programmet läser. Det centrala innehållet som behandlar geometri är följande:

- Begreppen sinus, cosinus och tangens och metoder för beräkning av vinklar och längder i rätvinkliga trianglar.
- Begreppet vektor och dess representationer såsom riktad sträcka och punkt i ett koordinatsystem.
- Addition och subtraktion med vektorer och produkten av en skalär och en vektor.
- Matematisk argumentation med hjälp av grundläggande logik inklusive implikation och ekvivalens samt jämförelser med hur man argumenterar i vardagliga sammanhang och inom naturvetenskapliga ämnen.

- Illustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma. (Skolverket, 2011, s. 104)

Fortsättningskurser (så som Ma2b, Ma2c och Ma3c) innehåller också geometriska delar som oftast hamnar under samma centrala innehåll som algebra. Det geometriska innehållet är bland annat begrepp, satser, illustrationer och symmetrier. Elever ska också få möjlighet att kunna argumentera matematiskt och tolka olika representationer (Skolverket, 2011).

6 Olika former av undervisning

Detta kapitel beskriver några olika former av undervisning som just nu förekommer inom geometriundervisningen i den svenska gymnasieskolan. Genom att introducera olika metoder och verktyg som visat sig vara effektiva för lärarens arbete inom området, kan nästa steg tas mot att beskriva hur geometriundervisningen skulle kunna förbättras.

6.1 Läroboksstyrda lektioner

För många elever, men även lärare, är det centrala inom matematikundervisningen läroboken. (Skolverket, 2003, s. 24f). Lärare i studien av Svensson och Ståhl (2005) anger att de använder läroboken som det främsta verktyget vid planering och undervisning. Den typiska undervisningen består av två delar, en föreläsning av läraren som följs upp av enskilt arbete i läroboken.

Det centrala i övningsböckerna som undersöks av Svensson och Ståhl (2005) är övningsuppgifter där 60-90% av uppgifterna är beräkningsuppgifter. Av dessa uppgifter är även majoriteten abstrakta och binder inte ihop matematiken och elevernas verklighet. Detta konstaterar även Areskoug och Grevholm (1987) och påpekar att matematikböckernas uppgifter ger elever små möjligheter att koppla uppgifterna till sig själva vilket leder till en känsla av att problemet i uppgiften ej angår eleven. Matematikens historia presenteras i form av utspridda och korta inslag i de olika böcker som Svensson och Ståhl (2005) undersökte i sin studie, vilket enligt Areskoug och Grevholm (1987) kan ge intrycket att historien inte är särskilt viktig. Läroböckerna har också varierat geometriskt innehåll och motiverar geometrin på olika sätt (Svensson & Ståhl, 2005).

6.2 Laborativa lektioner

Laborativ matematikundervisning definieras som en verksamhet där elever jobbar både mentalt och praktiskt med material som har ett specifikt undervisningssyfte. Detta material kan både vara fysiskt och digitalt (Rystedt & Trygg, 2010). Laborativ matematikundervisning kan medföra positiva effekter så som ökat intresse, motivation och mer positiv syn på matematiken. Andra effekter kan vara att elever får jobba mer varierat, aktivera många sinnen och skapa en bro mellan konkreta ting och abstrakta symboler (Rystedt & Trygg, 2010). Utöver detta finns effekter så som utvecklandet av en analytisk förmåga och kritiskt tänkande samt en möjlighet för eleven att utveckla sin sociala kompetens och kommunikativa förmåga (Hult, 2000).

I en studie av Hermansson (2013) genomförs intervjuer med lärare om hur de jobbar med laborativa lektioner. En lärare tycker det är viktigt med bra material när man ska genomföra en lektion och att den laborativa matematiken enkelt kan kombineras med fysiken. Elever får också ett mer varierat arbetssätt där de lär sig att genomföra laborationer praktiskt och att komplicerade företeelser kan bli enklare, vilket även blir ett avbrott från att följa läroboken. Hermansson (2013) menar att laborativa uppgifter dessutom ställer krav på lärarens kommunikativa förmåga. Han fortsätter med att påpeka att laborativa lektioner oftast är tidskrävande och att de även kan vara en budgetfråga då material måste införskaffas.

6.3 Lektioner baserade på öppna problem

Forskning har visat att läraren spelar en viktig roll hos eleverna när de ska lösa problem. Ett öppet problem definieras genom att det uppfyller minst ett av följande kriterier:

- Problemet börjar öppet där eleverna får välja vilka aspekter av problemet de vill hantera.

- Problemet kan lösas på flera olika sätt där olika vägar kan ge samma svar.

- Problemet har flera olika svar som alla kan vara rätt. (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco, 2013)

Att blanda öppna problem och laborativ lektion under samma undervisningstillfälle är fullt möjligt, vilket går att se i studien av Hähkiöniemi, Leppäaho, & Francisco (2013) där de löser öppna problem med det digitala materialet som ges från GeoGebra. Öppna problem har visat sig ha positiva effekter som bland annat ökad kreativitet, ökad reflektionsförmåga och ökat intresse. Det finns modeller för hur problemlösningen går till, det mest kända är Pólya's (1945) modell som är uppdelat i fyra faser (Hähkiöniemi, Leppäaho, & Francisco, 2013). De fyra faserna är följande:

- Förstå problemet.
- Utforma en plan för att hantera problemet.
- Utföra planen och få en lösning på problemet.
- Reflektera över det man gjort.

Öppna problem ger eleverna möjlighet att utveckla sin kognitiva förmåga genom att öppna problem är mer komplexa än enkla proceduruppgifter. Ett tillåtande och bra klassrumsklimat har också en positiv påverkan på utvecklingen av den kognitiva förmågan. Att utveckla öppna problem och genomföra dem under en laborativ lektion är dock komplext då alla klasser och elever är unika, vilket kräver att undervisningen anpassas för att ge eleverna den bästa möjligheten att utveckla kunskaper inom geometrin, men även för att utveckla sin kognitiva förmåga (Lipowsky et al., 2009).

7 Teorier om lärande i geometriundervisning

En teori som har utvecklats och fått stor betydelse när det gäller att assistera lärare i sin förståelse för elevers geometriinlärning är den så kallade van Hiele-teorin. Denna teori utgår ifrån stadieteorin om kognitiv utveckling, vilken utvecklats av Jean Piaget. I syfte att bättre kunna förstå van Hieles teori inleds därför detta avsnitt med en kort genomgång av Piagets teorier, vilken följs av en utförlig genomgång av van Hieles teori för elevers tänkande i geometri.

7.1 Piagets teori om kognitivt lärande och barns uppfattningar om geometri

Det kognitiva lärandet är en lärandeprocess om hur vi tar till oss och bearbetar information och kunskaper samt hur vi använder dessa kunskaper i vårt liv och vår omgivning. Den schweiziske forskaren Jean Piaget (1896–1980) studerade hur barns tänkande utvecklades under uppväxten, vilket ledde till att han delade upp barns och ungdomars utveckling i fyra kognitiva stadier:

1. *Det sensomotoriska stadiet (0 – 2 år)*
   Barn utvecklar motoriska förmågor.
2. *Den preoperationella perioden (2 – 7 år)*
   Barn utvecklar sitt språk och lär sig hur de kan uttrycka och beskriva världen med språk.
3. *De konkreta operationernas period (7 – 11/12 år)*
   Barn utvecklar förmågan att tänka logiskt.
4. *De formella operationernas stadium (11/12 år –)*
   Barn utvecklar förmågor att analysera och resonera i abstrakt och symboliskt tänkande också med andra människor. (Säljö, 2011, s. 167f)

Säljö (2012) skriver att Piaget ansåg att det var viktigt att få förståelse för grundläggande kunskapsteoretiska frågor genom att studera barns utveckling. Piaget var intresserad av hur barns sätt att skapa förståelse och uppfattningar om världen utgår från den biologiska premissen. Han påpekade att barns lärandeprocesser måste anpassas till det stadium barnets tänkande befinner sig på.

Piaget använde termerna *assimilation* och *ackommodation* som grundläggande mekanismer för den konstruktivistiska teorin om barns utveckling. Assimilation innebär att ny information och nya erfarenheter kan införlivas med hjälp av redan existerande kunskaper, det vill säga att barn tar in kunskaper och därigenom berikar sina erfarenheter. Med ackommodation menas att barn ändrar sitt sätt att tänka baserat på tidigare erfarenheter, alltså att det sker en förändring av tänkande, när något orsakar en så kallad *kognitiv konflikt*. Både assimilation och ackommodation är närvarande samtidigt och ingår i barnets process att anpassa sig till sin omgivning (Säljö, 2012, s. 166f).

I boken *The child's conception of geometry* (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1981) och *The child's conception of space* (Piaget & Inhelder, 1963) behandlas problemet om barns förmatematiska föreställningar, speciellt om geometri. Piaget hävdar att barn vid 3-års ålder har försökt särskilja raka och krokiga linjer, figurer med vinklar och skillnaden mellan öppna och slutna figurer. För små barn är de topologiska egenskaper hos former i rummet mera meningsfulla än de euklidiska egenskaperna hos samma former. Enligt Piaget uppfattar de flesta barn vid 7-års ålder både euklidiska och topologiska egenskaper hos geometriska figurer. Det är viktigt att uppmuntra små barn till att utveckla sin egen geometriska förståelse genom att låta dem utforska och undersöka olika geometriska former samt involvera dessa i lek.

7.2 Van Hieles teori om lärande i geometri

Det nederländska forskarparet Pierre van Hiele (1909–2010) och Dina van Hiele-Geldof (1911–1958) utvecklade en teori som de lade fram i sina doktorsavhandlingar, vilka beskriver hur barn utvecklar sin förståelse av geometri. De hade upptäckt svårigheter som deras elever hade rörande geometri, speciellt gällande författandet av geometriska bevis (Mason, 1998, s. 4). Pierre van Hiele fortsatte arbeta vidare med teorin efter sin fru Dinas död strax efter sin doktorsdisputation (Hedrén, 1992).

Bergius (2014) skriver att enligt van Hieles teori genomgår varje individ, i sitt lärande, nivåerna i tur och ordning.

- *Nivå 1. Igenkännande, visualisering*
  Elever i denna nivå har kunskaper om och känner igen former och geometriska figurer men är omedvetna om deras egenskaper. Till exempel kan eleven känna igen en bild av en rektangel men upptäcker inte egenskapen att den har parallella sidor. Eleven ser en rektangel som ett objekt som liknar något, till exempel en dörr eller fönsterruta (Hedrén, 1992; Bergius, 2014).
- *Nivå 2. Analys*
  Eleven kan analysera geometriska figurer och räkna upp olika egenskaper genom att vika papper, mäta, rita på rutat papper eller använda geobräde. Men eleven kan inte se hur dessa egenskaper förhåller sig till varandra, till exempel kan eleven inte se kvadraten som en romb eller sambandet mellan rektanglar och rätvinkliga trianglar (Hedrén, 1992; Bergius, 2014).
- *Nivå 3. Abstraktion*
  På den tredje nivån kan eleven förstå logiska relationer och egenskaper i figurerna och samtidigt inse vikten av korrekta definitioner, till exempel att alla kvadrater är rektanglar men att alla rektanglar inte är kvadrater (Hedrén, 1992; Bergius, 2014).
- *Nivå 4. Deduktion*
  Eleven förstår betydelsen av deduktion och vikten av att kunna använda axiom, satser och bevis i geometrin. På denna nivå bör eleven kunna konstruera bevis som normalt återfinns i geometrin på gymnasiet (Hedrén, 1992; Mason, 1998).
- *Nivå 5. Stringens*
  När eleven jobbar med geometrins grunder förstår hon vikten av precision. Eleven kan konstruera bevis, utveckla teorier och analysera samt jämföra euklidisk och icke-euklidisk geometri (Hedrén, 1992; Bergius, 2014).

Den ursprungliga van Hiele-teorin använder olika nivåer för elevers tänkande i geometri från 0 – 4 medan den amerikanska versionen av teorin istället använder nivåerna 1 – 5 och där nivå 0 anses vara så kallad *pre-recognition* (Mason, 1998). Van Hiele hade den lägsta nivån som kallades nivå 0 i början för att beskriva den visuella och igenkännande nivån, ett förstadium av geometritänkande. Men senare ansåg han att förstadiet var lika viktig som övriga nivåer och därför kallade han denna nivå 1 istället (Hedrén, 1992).

För att lyckas på en nivå måste eleven gå igenom inlärningsprocess som omfattar olika faser. Dessa faser är olika utvecklings- och inlärningsfaser, som enligt van Hiele (1986, s. 53f), kan leda till att elever når en högre nivå av tänkande:

1. *Observation*
   Eleven gör en undersökning och observerar materialet eller föremålet som ska undersökas, eleven kan kommunicera med andra om materialet eller föremålet (van Hiele, 1959).
2. *Vägledd undersökning*
   Eleven är medveten om undervisningsmålet, ordnad följd av aktiviteter som gör att eleven blir medveten om egenskaperna för den nivå på vilken hon arbetar (Bergius, 2014).

3. *Klarhet*
Eleven lär sig att diskutera och berättar framför klassen om observationsmaterial eller föremål med hjälp av sina tidigare kunskaper och erfarenheter. Läraren hjälper eleven så att hon kan använda korrekt matematiskt språk och symboler (van Hiele, 1959).
4. *Fri undersökning*
Eleven förväntas hitta sin egen väg i uppgifter där området för undersökningen oftast är känd och som kan slutföras på olika sätt (van Hiele, 1959).
5. *Sammanfattning*
Återblick och summering av genomfört arbete görs gemensamt av lärare och elev. Sammanfattningen ger en överblick av begrepp och sammanhang, läraren sätter den nya kunskapen i ett vidare perspektiv utan att presentera något nytt (Bergius, 2014).

Bergius (2014) påpekar att eleven kan utveckla sin förmåga i varje nivå för att uttrycka sig och bli mer matematiskt korrekt, vilket enligt van Hiele får eleven att nå *stringens*, den högsta nivån. Bergius (2014) hävdar att det finns likheter mellan van Hieles och Vygotskijs tankar om att det mest effektiva lärandet sker när eleven ges utmaningar i svåra uppgifter som de måste lösa på egen hand och där elever kan få kontakt eller kommunicera med någon som har mera kunskaper.

Van Hiele (1986) påpekar att språket är ett viktigt redskap för tänkandet och det knyter an till Bergius påpekanden om värdet av att kunna uttrycka sig matematiskt korrekt. Läraren bör försöka hjälpa eleven utveckla sina språkliga symboler och sin begreppsinlärning. Läraren måste kunna förklara begrepp genom att först exemplifiera och därefter förklara dem, eftersom detta förbättrar elevernas förståelse för de nya koncepten (van Hiele, 1986, s. 57).

7.3 Van Hiele och Piaget
Van Hiele medgav att han var inspirerad av Piagets olika nivåer om barnets utveckling, fast med skillnaden att hans och Piagets teorier har olika inriktning. Piagets teori är inriktad på barnets utvecklingsprocesser medan van Hieles teori i större grad är inriktad på lärande. Van Hiele påpekar också att Piaget bara skiljde mellan två nivåer, de konkreta och formella operationernas stadium, och menade att det skulle bli lättare att förstå om Piaget hade haft fler nivåer. Han hade inte undersökt på vilket sätt läraren skulle hjälpa elever att gå från en nivå till nästa, vilket däremot van Hiele hade gjort (van Hiele, 1986, s. 5f; Hedrén, 1992, s. 30f). Piaget ansåg att språket inte spelade en viktig roll för att en elev ska lyckas passera från en nivå till nästa, och hävdar att det genom barnens handlanden gick att se om barnen hade förstått frågorna oavsett om man ställde frågor som barn generellt inte skulle förstå. Enligt Piaget framgick oförståelse genom barnens inställningar när de fick frågorna. Å andra sidan ansåg van Hiele att det var svårt att veta på vilken nivå barnen befinner sig, oberoende av huruvida de verkade förstå eller inte (van Hiele, 1986, s. 5f; Hedrén, 1992, s. 30f). Van Hiele hävdar att ett stort problem inom geometriundervisning är att läraren inte alltid kan anpassa språket så att eleverna förstår bättre – det vill säga att undervisningen inte läggs på den nivå som eleverna befinner sig (van Hiele, 1986, s. 39).

Till skillnad från Piagets teori om att ålder och biologisk intellektuell mognad är en serie stadier som passeras i lärandets utveckling så anser van Hiele att det är undervisning och erfarenhet som har starkaste inverkan på lärandet. Tänkandets utveckling kan sägas löpa genom olika nivåer där erfarenheter har en stor påverkan för hur utvecklingen av inlärningskurvan kommer att se ut. Detta är inte en linjär process utan passerar ett antal nivåer som kan sägas vara hierarkiskt ordnade och att vissa nivåer passeras snabbare än andra (Nilsson, 2005, s. 84).

7.4 Van Hiele-nivåernas betydelse för elevernas lärande

Enligt Mason (1998, s. 6) är det vanligt att gymnasielärares tankegång befinner sig på van Hiele-nivå 4 eller 5 medan gymnasieelevernas tänkande befinner sig på nivå 1 eller 2. När elever och lärare befinner sig på olika nivåer uppstår två problem. Det första är att elev och lärare inte använder ett gemensamt språk och eleven förstår då ingenting av lärarens undervisning. Det andra är att läraren trots alla förklaringar och argument inte lyckas att få eleverna att förstå undervisningen och läraren upplever då en känsla av hopplöshet. Hedrén (1992, s. 30) beskriver att varje nivå har sina egna språkliga symboler och därför är det viktigt att ha en korrekt förståelse på en nivå eftersom det kan ske modifikationer på en annan nivå. Hedrén anser vidare att den modell som van Hieles teori bygger på kan fungera inom andra matematiska områden än geometri.

Övergång från en nivå till den nästa sker oberoende av elevens ålder och är mer beroende av undervisningen. Hedrén (1992, s. 29) hävdar att undervisningen både kan underlätta och försvåra elevens övergång men det finns ingen metod för undervisning som gör det möjlig för eleven att hoppa över en nivå. Enligt van Hiele (1986, s. 62f) är elevens utveckling beroende av möjligheter till att diskutera sin metod och tankegång samt att läraren inte ska ge alla instruktioner då detta kan hindra elevens inlärning. Elevens tankar ska komma från sitt eget resonerande, inte från sin lärares kunskaper.

Hedrén (1992, s. 29) påpekar att eleven som går i förskolan och lågstadiet börjar sin träning på nivå 1 där hon kan uttrycka geometriska figurer. Till exempel kan eleven känna igen en romb på grund av att hon har lärt sig att figuren kallas för en romb. Eleven som befinner sig på nivå 2 kan upptäcka vissa egenskaper hos en romb – att den kan beskrivas som en fyrhörning med fyra lika långa sidor, och så vidare. En elev på nivå 3 förstår redan att en kvadrat har samma egenskaper som en romb och kan påpeka att en kvadrat också är en romb. Hedrén hävdar att enligt van Hieles teori börjar den elementära geometrin att bli teoretiskt på nivå 2 eller 3. Hedrén (1992, s. 30) påpekar att läraren måste ta hänsyn till den van Hiele-nivå som eleverna befinner sig på, att fler än en nivå kan förekomma i en klass samt att enskilda elever kan befinna sig på olika nivåer inom olika moment i ämnet geometri. Det är därför viktigt för lärare att veta vilken nivå eleverna befinner sig på, eftersom eleverna kan ha helt andra geometriska begrepp i sina tankar under geometriundervisning än vad läraren har.

8 Didaktik och didaktiska processer vid geometriinlärning

Detta avsnitt tar upp olika sätt att bearbeta geometri utifrån ett didaktiskt perspektiv. Avsikten med detta val av exempel är att skapa viss förståelse för den mer abstrakta delen av geometriinlärning hos elever. I och med denna förståelse uppstår ett tillfälle för läraren att förstärka praktiska undervisningsmöjligheter med en vetenskapligt välförankrad matematikdidaktik.

Geometrin utnyttjar olika begrepp för att kunna förstå spatiala relationer mera precist och den geometriska tankegången bygger på att uppfatta saker och ting som föreställningar. För att kunna manipulera dessa föreställningar behövs spatialt resonemang (Battista, 2007, s. 843). Battista diskuterar vad han anser vara fem grundläggande objekt inom geometriskt och spatialt tänkande.

- Ett *physical object* är ett fysiskt föremål, så som en låda, boll, ritning eller interaktiv bild.
- Ett *sensory object* är en sensorisk aktivering som väcks vid åsynen av ett physical object.
- Ett *perceptual object* är den mentala entitet som en person skapar i samband med att hon ser ett physical object.
- Ett *conceptual object (conceptulization)* är den specifika tankegång och medvetna betydelse som ett perceptual object väcker hos en person genom minnet, någon definition eller andra conceptual objects.
- *Concept definition* är en explicit matematisk specifikation (verbalt eller skrivet) av ett conceptual object.

Ett *objekt* är en mental föreställning som en individ resonerar kring och en *representation* är någonting som "står för" någonting annat (Battista, 2007, s. 844). Här kan en koppling göras till det som Lingefjärd (2015) kallar interna och externa representationer. Han ger en bild av *interna representationer* som kan liknas med det som Battista kallar för *perceptual object*. Likaså kan de *externa representationerna* påminna om Battistas *physical objects*. Lingefjärd (2015, s. 1) poängterar att när en individ har en *intern representation* av någonting så använder hon denna för att identifiera den externa representationen nästa gång den dyker upp. Detta kan också länkas till den holländska matematikern och matematikdidaktikern Hans Freudenthal (1905–1990) och realistisk matematikundervisning som fokuserar på elevernas föreställda verklighet och där en utgångspunkt är de sammanhang som eleverna kan föreställa sig (Skott et al., 2010, 350).

Representationer av objekt kan se olika ut. De kan exempelvis vara fysiska, bildliga, grafiska, verbala, numeriska eller symboliska (Jönsson & Lingefjärd, 2012, s. 21). Battista skriver om *Fuzzy* och *Formal Categories* (de vardagliga odefinierade objekten, respektive de explicit definierade). Kategorierna ämnar understödja diskussionen rörande kategorisering som ett sätt att underlätta vår förståelse för olika objekt och kan tänkas passa in i sammanhanget med externa representationer (Battista, 2007, s. 863). Även Vygotskij gör denna distinktion mellan spontant utvecklade och grundläggande vardagliga begrepp som saknar systematik eller ”abstraktion” och vetenskapliga begrepp som introduceras formellt genom definitioner och som får betydelse genom användning (Skott et al., 2010, s. 91f; Säljö, 2012, s. 192). Detta uttrycker Battista (2007, s. 864) när han beskriver hur barn är medvetna om spontana koncept före formella, vilka ofta introduceras genom verbala definitioner. Begreppsbildning är enligt Vygotskij helt beroende av språket som medierande medel (Skott et al., 2010, s. 90). Att lärare och elever ibland pratar olika språk kan därför verka hämmande för elever (Kadej, 2008, s. 14).

Samtidigt spelar språklig mediering via vuxna en viktig roll i förebyggandet av missuppfattningar hos elever (Iannece & Tortora, 2008, s. 61). Vidare karaktäriseras hjärnan av en naturlig plasticitet (Iannece & Tortora, 2008, s. 63) vilket motiverar utnyttjandet av visuella såväl som analytiska representationer i geometriundervisningen (Tóth, 2008).

Vid geometriska resonemang resonerar man *om* objekt *med* representationer (Battista, 2007, s. 844) och elever som arbetar med geometri utvecklar således både en visuell och en analytisk förmåga (Markkanen, 2014, s. 17). *Physical objects* utgör en representation av ett abstrakt matematiskt koncept (Battista, 2007, s. 846). När olika representationsformer används för att beskriva något matematiskt begrepp kan muntlig kommunikation mellan parterna i klassrummet vara fördelaktigt, eftersom de olika klassrumsaktörerna kan ha olika *interna representationer*, eller *perceptual objects*, av ett visst begrepp (Jönsson & Lingefjärd, 2012, s. 23; Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997, s. 45). Att elever lär sig en viss metod, ofta den de först kommer i kontakt med (så kallad *imprinting*), i ett stadium kan bli problematiskt i ett senare. Detta eftersom informationen i efterföljande undervisning kan verka kontraproduktivt i relation till den redan existerande kunskapen (Kadej, 2008, s. 12, 16). Detta kan kopplas till Lingefjärd (2015, s. 3) som menar att det är viktigt att kunna växla mellan representationsformer, kunna översätta dem sinsemellan samt kontrastera och se samband mellan de olika representationsformerna. Representationer kan sägas ha olika komposanter så som form, funktion och mening. Att kunna skifta mellan olika representationer ger den studerande tillgång till alla komponenter (Taflin, 2007, s. 28).

Abstraktion är ett begrepp som Battista (2007, s. 859) tar upp och diskuterar. Det innebär att en viss erfarenhet isoleras och behandlas som ett avskilt objekt. Detta kan ske perceptuellt i form av *perceptuell abstraktion* där egenskaper hos en erfarenhet isoleras och används för att utveckla uppfattningen om just den erfarenheten. Här kan en koppling göras till Piaget och konstruktivism där varje individ baserar sin verklighetsbild på egna erfarenheter och där elever genom att arbeta tillsammans kan övervinna kognitiva konflikter (d.v.s. bristande erfarenhet) (Säljö, 2012, s. 167, 169). Det kan anses fördelaktigt för eleverna att ha en lärare som skapar diversifierade länkar mellan individuell kognition, social kultur och realitet genom en dynamisk växling mellan det abstrakta och konkreta. Abstraktioner som utgår från perceptuella erfarenheter kan också underlätta informationsväxling mellan olika situationer (Iannece & Tortora, 2008, s. 66f).

Internalisering är ett närbesläktat begrepp till abstraktion och innebär att material har abstraherats till en nivå där det kan presenteras utan perceptuellt input. Detta innebär att ett abstrakt begrepp kan uppfattas utan att presentera någon representation för det i form av ett fysiskt objekt (Battista, 2007, s. 859). *Mental images* är ett begrepp som är nära förbundet med barns lärande och som formas av konstruktiv aktivitet hos eleven via personliga erfarenheter och kunskaper. De kräver inget perceptuellt stimulus för att väckas och ersätter ett geometriskt objekt genom en mental representation. Begreppet *Mental image* är således synonymt med mentala representationer. De två begreppen används dock av olika författare. I syfte att undvika förvirring kommer begreppet mentala representationer att användas framöver. För alla barn utgör visuella representationer en betydande roll i utvecklandet av dessa mentala representationer (Tóth, 2008, s. 251; Koi, 2008, s. 260; Battista, 2007, s. 862).

9 Digitala hjälpmedel

Verktyg i form av digitala hjälpmedel framförs i nyttjad litteratur som ett gynnsamt tillskott i geometriundervisning eftersom det genererar en potential som tillåter implementering av didaktiska metoder och teorier på ett sätt som annars är problematiskt. På så sätt ämnar avsnittet att bilda en brygga mellan teori och praktik på ett greppbart och konkretiserbart vis.

9.1 Geometriundervisning med stöd av digitala hjälpmedel

Som tidigare nämnts har praktisk omsättning av den teoretiska geometriundervisningen poängterats historiskt sett. Manuella förtydliganden genom klippning, vikning, ritande, mätande och fältarbete har framhållits som ett gynnsamt sätt att åskådliggöra undervisningen för eleverna (Nilsson, 2005, s. 15; Prytz, 2007, s. 57, 71; Kungl. Skolöverstyrelsen, 1919, s. 69). Detta arbetssätt stöds även av modernare forskning (Koi, 2008, s. 264). De hjälpmedel som kommer av detta arbetssätt kan utifrån Battistas definition ses som *physical objects*, eller som Lingefjärd (2015, s. 1) beskriver det, *externa representationer*. Även Taflin (2007, s. 28) diskuterar representationsformer med benämningen *yttre representationer* för fysiska, verbala, grafiska, etc. representationer samt *inre representationer* för individuella mentala konstruktioner.

I modernare tid har olika datorprogram gjort inträde i skolor runt om i världen, i form av till exempel cognitive tutors, interaktiv programvara och SMART-tavlor (Popescu & Koedinger, 2000; Battista, 2007; Hall & Lingefjärd, 2014; Markkanen, 2014; Miller & Glover, 2010). Vissa forskare har dessutom uttryckt positiva attityder till kombinerandet av fysiskt material och digital teknik i syfte att förstärka lärandet inom en del områden, så som volym- och areaberäkning (Girouard et al., 2007; Markkanen, 2014, s. 17). Datormiljöerna fordrar att eleverna utnyttjar en viss konceptuell och representativ tydlighet för att skapa ”ritningar” (någonting materiellt) vilket i sin tur kan leda till reflektion och abstraktion av de geometriska koncepten på van Hiele nivå 2 (Battista, 2007, s. 844, 865). Att arbeta med interaktiv programvara i geometriundervisningen ger förutsättningar att engagera eleverna, möjliggöra egna undersökningar och pröva hypoteser effektivt, något som Lingefjärd (2015, s. 4) menar förstärker begreppsförmågan och interna representationer. Battista (2007, s. 859) stöder detta när han diskuterar lärande som ett resultat av fysiska och mentala reflektioner och abstraktioner. Dessa leder så småningom till mer utvecklade och sofistikerade *mentala modeller*, det vill säga mentala (icke-verbala) representationer som aktiveras vid situationsbundet resonerande (Battista, 2007, s. 860). Arbete med dynamisk geometrimjukvara skapar dessutom utrymme för variabilitet, vilket också gör konstruktionerna mer rigorösa (Candeias & Ponte, 2008, s. 387).

Lärande genom kollaborativt arbete kan hjälpa elever att gå från visuella till mer formella metoder för problemlösning (Oner & Stahl, 2016, s. 1). Detta stöds även av Alqahtani och Powell (2016, s. 77) som konstaterade att samarbete mellan programmets användare hjälpte dem att förstå vissa funktioner i programvaran. Även manuellt arbete i grupper kan leda till att eleverna vågar utforska mer än de skulle individuellt och tillsammans nå bättre resultat (Koi, 2008, s. 268f). Elevers geometriska undersökande via det interaktiva hjälpmedlet kan ske på olika sätt. I litteraturen beskrivs exempelvis hur en analyserande utgång kan leda till specifika teorier via en *ascending process* och tvärtom, i en *descending process* utnyttja en teori för att förklara någonting specifikt. Det går alltså att både undersöka ritningar för att försöka hitta mönster och validera särskilda egenskaper (Alqahtani & Powell, 2016, s. 73; Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco, 2013, s. 51). Oavsett tillvägagångssätt har arbete av undersökande karaktär, där eleverna själva får ”skapa” matematik, en positiv effekt på elevernas minne av undervisningens innehåll, då de minns sådant som de skapat själva i en problemlösande process längre än sådant som enbart presenterats av en auktoritär lärare (Tóth, 2008, s. 255). De lösningar som eleverna skapar grundar sig i tidigare erfarenheter (mentala modeller) vilket kan leda till flera diversifierade förklaringsmodeller som kan diskuteras och leda till bättre förståelse för alla deltagande (Koi, 2008, s. 267). Ett gemensamt vokabulär kan skapas genom gemensamma aktiviteter och berättelser och därmed väcka intresse hos eleverna och motverka den hämmande effekt som tidigare nämnts (Kadej, 2008, s. 14).

9.2 Problematik i samband med nyttjande av digitala hjälpmedel

Ett problem med fysiska representationer av geometriska objekt är att elever kan tilldela ett geometriskt begrepp irrelevanta egenskaper, exempelvis orienteringen av en geometrisk figur (Battista, 2007, s. 846). För att kunna resonera på ett riktigt sätt om en mental representation så måste individen konstruera en mental modell där spatial struktur ingår. Först när figurerna uppfattas som spatiala geometriska relationer uppstår en formell geometrisk tankegång (Battista, 2007, s. 863). Detta kan underlättas i och med interaktiv programvara, då programmen erbjuder såväl läraren som eleven en möjlighet att förändra de visuella representationer som används i syfte att utveckla elevers mentala representationer via perceptuell abstraktion (Markkanen, 2014, s. 61, 62, 66, 69; Battista, 2007, s. 866).

Det blir nu relevant att diskutera det som Alqahtani & Powell (2016) resonerar kring, nämligen teknikanvändarens förmåga och färdighet att nyttja verktyget i samband med problemlösning. Författarna talar om *instrumentell genes*, vilket kan ses som interaktionen mellan ett instruments verkan på användaren och användarens förtrogenhet med instrumentet som verktyg (Alqahtani & Powell, 2016, s. 73). En definition som förstärks genom Jönsson & Lingefjärd (2012, s. 13f), vilka definierar instrumentell genes som den lärandeprocess genom vilken ett verktyg utvecklas till ett instrument för användaren. Instrument i detta sammanhang är en artefakt med en psykologisk aspekt i form av *instrumentationsscheman*. Instrumentationsscheman är någonting som utvecklas hos användaren av ett verktyg och innefattar både grundläggande kunskaper om hur det specifika artefakt används samt instrumentets inneboende möjligheter (Alqahtani & Powell, 2016, s. 73; Jönsson & Lingefjärd, 2012, s. 13).

I modellerande uppgifter stödjer lärarna eleverna genom att hjälpa dem förstå problemet samt skapa och förklara sina representationer (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco, 2013, s. 48). Lärare kan genom användandet av teknik rikta undervisningen mot resonemang, istället för något absolut svar (Markkanen, 2014, 76) och genom *scaffolding* stödja eleven medelst förklaringar, ledning, vägledande frågor och lyhördhet (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco, 2013, s. 50). Att läraren är aktiv och ger lämpliga instruktioner vid datorlaborationer har stor betydelse, ty annars finns en risk att eleverna enbart prövar sig fram utan att någon riktig förståelse uppstår (Battista, 2007, s. 866). Scaffolding blir på så sätt en lämplig didaktisk metod för datoriserade geometrilaborationer då en lärare som uppmuntrar eleverna till att resonera och förklara sitt tillvägagångssätt kan förbättra elevens förståelse (Popescu & Koedinger, 2000, s. 1). Detta är också bakgrunden till utvecklandet av en del datorprogram (cognitive tutors) som syftar till att få eleverna att förklara sina resonemang då det, utöver bättre förståelse, även leder till upptäckandet av bra problemlösningsmetoder (Aleven, Popescu & Koedinger, 2001, s. 1).

Det kan vara passande att åter nämna Vygotskij som poängterar att lärande sker genom deltagande i en lokalt utvecklad social praxis där språkliga redskap utnyttjas (Skott et al., 2010, s. 107). Både scaffolding och det som Vygotskij kallar för *Zone of Proximal Development* (ZPD) bygger på språklig kommunikation, vilket banar väg för elevens egen utveckling av och förmåga till ett abstrakt tänkande (Hähkiöniemi, Leppäaho & Francisco, 2013, s. 50; Skott et al., s. 104f; Säljö, 2012, s. 193f). Här kan en relaterad problematik vara det höjda tempo som teknikanvändning kan leda till, vilket i sin tur kan leda till ytliga frågor ifrån läraren, anpassade efter tekniken (Markkanen, 2014, s. 24). Ytterligare en reflektion rörande det verbala utbytet mellan klassrumsaktörer är att felaktig, irrelevant eller begränsad respons åt eleven kan bli förvirrande, en fråga som beaktats under utvecklandet av datorprogram ämnade att ge respons till elevens svar (Aleven, Popescu & Koedinger, 2001, s. 2). Samtidigt är en aktiv mediering ifrån läraren helt nödvändigt för att undvika missuppfattningar som annars kan uppstå (Iannece & Tortora, 2008, s. 61). Att interaktiv programvara kan leda till ett egenupptäckande hos användaren (Alqahtani & Powell, 2016, s. 75) innebär, som Oner & Stahl (2016, s. 1, 6) konstaterat, att resonerande med en expert inte är det enda sättet att utveckla sin matematiska diskurs på.

När elever först introducerats för interaktiva geometriprogram så är det möjligt att de inte alltid tänker på att datorkonstruktionerna besitter särskilda egenskaper eller att det faktiskt är representationer av och inte de geometriska objekten själva som manipuleras (Battista, 2007, s. 866). Det kan också vara så att vissa begrepp har någon avvikande användning i och utanför programmet, vilket kan förvirra eleven (Oner & Stahl, 2016, s. 6). Läraren utgör i dessa fall, som tidigare diskuterats, en viktig komponent i det hela. Beaktansvärt är att forskning har visat att många lärare saknar pedagogisk kompetens när det gäller interaktiv programvara. Det innebär med andra ord att teknologin inte utnyttjas till sin fulla pedagogiska potential, utan i större utsträckning som ett presentationsmedel (Miller & Glover, 2010, s. 254). Detta måste däremot inte nödvändigtvis stämma i alla sammanhang då det finns exempel där elever engageras på ett sätt som leder till fördjupad matematisk diskussion och bättre förståelse (Battista, 2007, s. 877; Markkanen, 2014, s. 79). Här finns en potentiellt tydlig förbindelse till det ovan presenterade stycket rörande instrumentell genes och instrumentationsscheman, eftersom nyttjandet i detta fall anpassas till det användaren tror är verktygets tillämpningsområde (Jönsson & Lingefjärd, 2012, s. 14).

Ett annat problem som litteraturen lyfter är att en interaktiv miljö kan tänkas försvaga de formella bevisens ställning och roll i skolan (Battista, 2007, s. 873, 879). Elever kan ofta tro att berättigande av ett påstående genom empiriska undersökningar är godtagbart som formellt bevis (Oner & Stahl, 2016, s. 6). Även här finns motexempel där läraren använt interaktiv programvara för att skapa ett sammanhang och en möjlighet till formulerandet av frågeställningar rörande matematiska bevis (Markkanen, 2014, s. 73-75). Sätt att motverka pedagogisk okunskap rörande digitala verktyg är att göra lärarna familjära med hjälpmedlet, låta specialister instruera mindre kunniga inom området eller att lärare själva interagerar i syfte att öka självförtroende, kompetens och identifiera svårigheter kring teknikanvändande (Miller & Glover, 2010, s. 255).

10 Diskussion och slutsatser

I denna del av arbetet görs kopplingar mellan tidigare avsnitt och områden med grund i genomgången litteratur. Denna analys ligger till grund för våra egna slutsatser och syftar till att ge en klar förståelse för vad som skapar bra geometriundervisning. För att påminna läsaren om vilka frågeställningar som nyttjats och hur dessa besvarats i huvudtexten inleds denna del av arbetet med en rekapitulering av arbetets bakomliggande syfte. Vår förhoppning är att läsaren, efter detta kapitel, ska få en grund att stå på i ett undervisningssammanhang samt känna allmän trygghet för ämnet i fråga.

I arbetets inledning ställdes vissa frågeställningar som besvarats på ett mer eller mindre explicit sätt genom texten ovan. Avsnitten kan alla anses vara relevanta för arbetets bakomliggande syfte och ofta finns svaren till frågeställningarna implicit beskrivna i dessa. Vi har skrivit om olika motiveringar till att läsa geometri, historiska och aktuella svenska styrdokuments behandling av ämnet samt en historisk tillbakablick på geometri och geometriundervisning. De här delarna bidrog alla till att besvara frågan om varför geometri bör inkluderas i svensk skolmatematik. Historieöversikten i samband med geometrins framställning i styrdokumenten och en överblick av olika undervisningsformer erbjöd en inblick i hur geometri i svensk skola ser ut idag jämfört med tidigare. Avsnitten om olika konkreta lärandeteorier samt didaktiska processer, där också områdesspecifik terminologi introducerats, gav en förklaring till hur eleverna lär sig geometri. Den avslutande övergången till framställning av digitala hjälpmedel hjälpte oss därefter att förstå vilka hjälpmedel och verktyg som finns att tillgå. Detta i samband med de inledande ämnesberättigandena gav oss förståelse för vad som enligt forskningen skapar entusiasm hos elever och gör lärandesituationen till en intressant upplevelse.

Avsnittet om Euklidisk geometri och bevisens roll i sammanhanget bidrog till att stärka den historiska förståelsen ytterligare. Detta anser vi vara en viktig grund, då vi tror att mycket kan läras genom att analysera historiska skeenden, resonemang, försök, lyckanden och misslyckanden. Att förstå den euklidiska geometrin och Euklides *Elementa* bättre innebär att bättre förstå hur skolgeometri utvecklats genom århundradena. I och med den historiska presentationen upptäckte vi även att bevis är ett problematiskt område i dagens skola. Genom att erbjuda ett par bevis med historisk och modern koppling exponerades även en tydlig länk mellan historia och nutid.

10.1 Vad kan vi lära av historien?

Littereraturöversikten har gett vetenskapliga stöd för påståendet att barn lär sig geometri bäst genom att själva aktivt delta i lärandet via fysisk manipulering av objekt, vilket även klarlagts genom historiska exempel. Detta har exempelvis lett till det historiska införandet av rotation, symmetri och inverteringar i bevisföring i syfte att enklare kunna följa abstrakta resonemang. Reformer har skiftat didaktiskt fokus mot självverksamhet och skapande, medan en mer praktiskt applicerbar och experimentell geometri också har fått större utrymme. I den historiska överblicken av äldre styrdokument belystes en pedagogisk filosofi som uppmuntrat handfast arbete med påtagliga modeller i klassrummet samt en områdesmässigt integrerad matematikundervisning (Skolöverstyrelsen; Prytz; m.fl.). Denna uppfattning genomsyrar fortfarande synen på lärande i dagens geometriundervisning då en varierad och integrerad lärandemiljö uppmanas ta spjärn mot elevers erfarenheter genom att applicera dessa i öppna problem (Skolverket, 2011). Antydanden i litteraturen har stött vår egen uppfattning om att matematik i allmänhet är svårmotiverat för skolelever. Detta delvis eftersom människor i största allmänhet klarar sig bra i vardagen utan förståelse för mycket av den matematik som undervisas i skolan (Lundin, 2008, s. 46f). Bearbetning av denna aspekt i litteraturöversikten presenterade en del redskap för att hjälpa läraren motivera innehållet och därmed även underlätta det uppdrag som beskrivs i moderna styrdokument. Denna kunskap, i kombination med integrerandet av digitala hjälpmedel i undervisningen, har stor potential att väcka både intresse och entusiasm hos eleverna. Därigenom kan processen uppfylla både det utbildningskrav som råder, men också det bildningsideal vars historiska betydelse framhävts i avsnitt 3.2. Detta kan även kopplas längre till frågan om formativ bedömning och språklig mediering från läraren som ett sätt att utveckla elevers lärande och uppmuntra en långsiktig och funktionell förståelse.

En viktig punkt som framhållits historiskt sett när det gäller geometriundervisningen är åskådlighet. En koppling kan göras mellan den historiska diskussionen om åskådlighet och den litteraturstudie som vi själva genomfört, där teori om objekt, representationer, internalisering, abstraktion och liknande tagits upp. Det finns, utifrån framhållna resonemang, goda grunder att uppfatta teknikens inträde i skolan som revolutionerande och positivt när det gäller de rådande undervisningsmöjligheterna. Det går att kontrastera de geometriinriktade lärandeteorier som tagits upp mot de historiska möjligheter som funnits för att utveckla spatial förmåga, begreppsuppfattning och förståelse för geometriska objekt. Det blir då tydligt att de digitala trender som poängteras i senare forskning erbjuder ett historiskt unikt tillfälle. Också detta har framhållits i studier som markerar de särskilda möjligheter som modern interaktiv datorteknik tillåter.

10.2 Lärandeteorier för kartläggning av kunskap

Van Hieles teori utgår från situationer i geometriundervisning. För att undervisning i geometri ska lyckas måste en elev gå igenom van Hieles nivåer i ordning, där varje nivå präglas av ett eget språk, symboler och begrepp. Van Hiele argumenterade för att språket är det största problemet i geometriundervisningen eftersom lärare inte kan anpassa språket och lägga undervisningen på elevernas nivå (van Hiele, 1986, s. 39). Frågan är hur läraren vet vilken kunskapsnivå eleverna ligger på i geometri. Van Hiele anser också att undervisning spelar en viktig roll för elevers geometrilärande. En betydelsefull fråga blir då huruvida läraren själv vet vilken nivå hennes undervisning ligger på. Detta väcker förmaningen att som lärare själv reflektera över sina kunskaper inom geometri och i vilken mån dessa överensstämmer med elevernas förståelse. Vi anser därför att en diagnos av något slag (muntlig, skriftlig, i grupp, enskilt, eller liknande) är ett användbart redskap för läraren när det gäller att undersöka vilken nivå eleverna befinner sig på. Detta förutsätter emellertid att innehållet består av öppna problem där olika van Hiele-nivåer kan upptäckas. Resultaten av en sådan diagnos kan följaktligen hjälpa läraren att planera undervisningen i geometri bättre, anpassa sitt språk så att eleverna får en bättre förståelse samt i och med detta öka undervisningens möjligheter att uppfylla de krav som finns angivna i svenska styrdokument.

10.3 Digitala hjälpmedel skapar nya möjligheter

Eftersom de omedelbara manipulationer som möjliggörs genom interaktiv teknik kan främja elevers förståelse för avancerade spatiala koncept (Girouard et al., 2007, s. 183) finns det anledning att uppfatta tekniken som värdefull. Vidare kan sådan programvara även tänkas underlätta möjligheterna att integrera öppna problem och problemlösande aktiviteter, då den undersökande aspekten av sådana uppgifter kräver utrymme för att snabbt och effektivt kunna pröva olika tankar och metoder, i syfte att effektivt finna en lösning på det givna problemet. Exempelvis kan en koppling göras mellan mentala representationer av olika fysiska föremål och resultaten av vissa studier (ex. Markkanen, 2014) som pekar mot att digitala hjälpmedel kan underlätta elevers förståelse för spatiala relationer. Samtidigt skulle ett återinförande av fler manuella metoder, till exempel klippning, vikning, ritande, m.m., för att åskådliggöra olika begrepp och geometriska objekt kunna bidra med ytterligare en dimension som annars delvis går förlorad.

Oavsett hur det praktiskt undersökande arbetet presenteras finns forskning som tyder på att den utforskande karaktären hos innehållet är det som ger positiva resultat på elevers lärande och förståelse (ex. Tóth, 2012). Detta kan följaktligen innebära att det finns en möjlighet för alla lärare att utföra laborativa lektioner och öppna problem, oavsett skolans resurser, lärares förtrogenheter med digitala hjälpmedel, eller elevers ämnesmässiga erfarenheter – ty ett sådant fokus kräver inte nödvändigtvis tillgång till ny teknik. Ett problem som tagits upp är just det rörande lärares bristande kunskaper när det kommer till användandet av digitala hjälpmedel. Otillräcklig kunskap gör att lärare bara använder verktygen som presentationsmedel eller i de områden de har förståelse för. Detta kan relateras till det Nilsson (2005, s. 123) påpekar när han säger att lärare ofta bara har förståelse för ett sätt att undervisa på. För att motverka ett sådant potentiellt utfall hos blivande lärare vill vi framhäva betydelsen av att bli förtrogen med existerande lärandeteorier, olika matematiska förmågor och ett laborativt arbetssätt, något som vi upplever överensstämmer med vår analys av angelägen litteratur.

Vi har också framhållit litteraturens resonemang om lärarens aktiva engagemang i och med datorlaborationer. Vissa menar på att otillräckligt stöd åt eleverna leder till att de inte utvecklar någon verklig förståelse. Detta eftersom elevernas resultat erhålls genom planlösa metoder och därigenom uppstår som ett resultat av tur snarare än kunskap. Samtidigt finns en risk att läraren hjälper de studerande för mycket och på så sätt lotsar dem fram till ett svar, vilket i sin tur förgör syftet med en sådan undersökande aktivitet. En koppling kan här göras till historiska didaktiker så som Vygotskij, Dewey och Piaget, som diskuterar språklig interaktion mellan klassrumsaktörer och presenterar greppbara teoretiska påståenden om denna problematik. På så sätt uppstår en konkret koppling mellan abstrakta teorier och en praktisk problematik som lärare kan tänkas möta i sin yrkesutövning. Med stöd i dessa vetenskapliga perspektiv skulle ett sätt att hantera denna potentiella riskfaktor på, vara att arbeta i grupper eller par där interaktion uppmuntras. Läraren tar då samtidigt rollen som moderator, har uppsikt över elevernas resonemang och korrigerar felaktiga eller irrelevanta resonemang. På så sätt skulle diskussionen om samarbete och kollaborativt arbete som presenterats i litteraturöversikten kunna fungera som ett konkretiserat överbryggande medel mellan teori och praktik. Resonemangen kring interaktiva programvarors möjligheter som medierande verktyg gör det möjligt att uppfatta digitala verktyg som ett komplement till den språkliga mediering som Vygotskij förespråkar.

Vidare har vi sett litteratur som antyder ett behov av stöd hos användaren i och med inledande nyttjande av interaktiva datorprogram. Detta ger skäl att misstänka ett behov även hos elever i och med initierandet av ny teknik. Yttrandena är i harmoni med den i litteraturöversikten nämnda oro som bland andra Battista (2007) uttrycker rörande elever som inte når djupare förståelse och istället förlitar sig på godtyckliga lösningsmetoder och chansartade resultat i sitt arbete. Relevansen tydliggörs i Alqahtani & Powell (2016) som poängterar att det tar tid att utveckla förståelse för och bli förtrogen med användningen av ett instrument. Därför tror vi också att såväl elever som lärare behöver utveckla sin digitala förtrogenhet innan de aktade fördelar som diskuterats kan komma till uttryck. I samband med dessa penséer väcktes tanken om vår egen förståelse för digitala hjälpmedel och huruvida det, som Miller & Glover (2010) antyder, är problematiskt att många lärare endast tycks kunna nyttja programmen som presentationsmedel. Till skillnad från Miller & Glover (2010) framhäver Markkanen (2014) digitala hjälpmedel som ett bra sätt att presentera geometriskt ämnesstoff på, just på grund av dess interaktiva möjligheter. Vidare uttrycker han en explicit entusiasm hos eleverna i samband med presentationerna, vilket tyder på ökat engagemang hos de studerande, som i sin tur leder till bättre förståelse hos dessa. Detta insinuerar att eleverna inte alltid måste använda digitala hjälpmedel i applicerad problemlösning för att verktygen ska få effekt på elevernas lärande.

10.4 Införande av laborativ undervisning i en rådande klassrumskultur

Lärare idag står inför många utmaningar när de ska planera och genomföra lektioner. Lärare ska inte bara tänka på innehåll och matematiska förmågor utan även sånt som tidsåtgång, material, intresse och kunskapsnivå hos eleverna, m.m. Så hur ska lärare gå till väga för att klara av att genomföra en bra geometriundervisning?

En av de viktigaste delarna i geometriundervisningen är att arbeta med olika arbetssätt. Detta är något som flera artiklar såväl som läroplanen tagit upp. Genom att variera sina lektioner får eleverna flera olika sätt att bemöta geometrin på. En lektion kan bestå av en laborativ del där eleverna får undersöka själva och läraren håller sig mer i bakgrunden, men ändå finns där som stöd. Denna lektion kan träna vissa förmågor som potentiellt kan missas när endast läroboken följs. Elever uppmuntras att kommunicera i laborativa lektioner men också själva försöka beskriva geometriska formler utan att få dem direkt ur en bok. Att genomföra en laborativ lektion kan emellertid vara svårt. Om läraren vet hur klassen och eleverna fungerar underlättas genomförandet av lektionen, då större anpassning av materialet kan ske innan lektionen börjar. För att kunna höja elevernas intresse måste läraren länka samman geometrin och elevernas inriktning på deras gymnasieprogram. I en klass som till exempel går fordon och transport kan det tänkas att man som lärare kan dra nytta av motorer för att beräkna volym eller att genomföra olika beräkningar med cirklar genom att använda däck.

Varför håller sig då lärare till läroboken när majoriteten av forskningen visar på att öppna problem och laborativa lektioner behöver finnas med? Delar av svaret hittar man i de olika intervjuer som vi har tagit del av (ex. Svensson & Ståhl, 2005; Markkanen, 2014), där många nämner tidsbrist som en bakomliggande orsak. Lärare som anser att tiden inte räcker till att genomföra en laborativ lektion lutar sig mot läroboken där ett färdigt koncept för hur man ska behandla den geometriska delen redan finns. Elever delar ofta åsikten om att räkning i en lärobok är det viktiga och att antal tal som räknas under en lektion visar på en elevs förståelse. Detta kan också leda till att laborativa lektioner i större utsträckning upplevs som ”en rolig grej” snarare än ett undervisningstillfälle, vilket då gör att eleverna inte tar möjligheten att utveckla sina geometriska förmågor genom laborationen. Klassrumsklimatet kan också vara en faktor som gör det svårare att genomföra laborativa delar. Detta eftersom elever oftast inte är säkra på vad de gjort och känner en rädsla för att göra fel – en rädsla som förstärks när det saknas ett facit som visar om det man gjort är korrekt eller inte. Vi anser därför att lärare måste vara noga med att förklara varför laborationer genomförs och poängtera att det viktiga inte är rätt svar, utan snarare den arbetsprocess de utnyttjar för att nå fram till svaret.

”Varför ska vi lära oss geometri?” är en fråga som många lärare stöter på i undervisningen, men som de flesta saknar ett bra svar på. Det går att bemöta frågan genom att citera ur ämnesplaner och kursplaner där främst nyttoargumentet framhävs. Vi tror att det är viktigt att visa upp geometri inom olika yrkessituationer genom att ha laborativa lektioner och öppna problem som berör de yrken eleverna utbildar sig till. Att motivera geometrin med det formella argumentet, kan anses vara svårt då man idag inte lägger mycket fokus på sådan bildande logik överlag. Vi föreslår istället att eleverna själva får försöka visa att geometrin inte finns i eller är relevant för deras kommande yrken, varpå läraren ger motexempel och därefter förklarar hur geometrin förekommer och kan användas inom olika yrkessysselsättningar.

10.5 Lärare, elever och variationer i klassrumskultur

Viktigt att ha i åtanke är att undervisning är mer än bara fokus på ett visst ämnesområde. Det finns många faktorer som spelar in i hur eleverna lär sig, exempelvis kultur i klassrummet, kommunikationen mellan klassrumsaktörer eller mat- och sovvanor hos eleverna (Scott et al., 2010; Hooper, Mullis & Martin, 2013; Kadej, 2008). Arbete med geometri går på så sätt också utöver de specifika didaktiska modeller och det ämnesspecifika innehåll som presenteras. Trots detta kan och bör – i vår och Skolverkets (2011) mening – läraren skapa bästa möjliga förutsättningar för eleverna att ta till sig kunskap. Vi ser stora fördelar med att arbeta i grupper då det både gör undervisningen roligare, skapar möjligheter åt eleverna att själva upptäcka sina tankegångar genom diskussion. Att denna slutsats också underbyggs av den vetenskapliga litteratur som utnyttjats ger särskild tyng åt detta antagande.

Om en lösningsmetod blir för rotad hos en elev kan det skapa problem senare eftersom de blir låsta i sin tankegång och således begränsas i sina möjligheter att utveckla mentala representationer och lösa problem. Den historiska tillbakablicken visade på att geometriundervisningen har existerat i ett relativt oförändrat tillstånd förrän väldigt nyligen. En koppling kan dras till Lewis (1920) som menar på att en fara med geometriundervisningen är att läraren låser sig till alltför strikta traditionella metoder när det gäller sin presentation av det geometriskt innehållet och på så sätt hämmar vissa potentiellt briljanta elever från att utvecklas. Att koppla det som Lewis påstår med historien anser vi ger rigoröst stöd åt konceptet att utnyttja olika representationsformer och matematiska förmågor i undervisningen i samband med öppna diskussioner.

Det blir nu relevant att återkoppla till det tidigare introducerade begreppet *imprinting* och den förknippade problematiken kring en elevs etablerade information eller arbetssätt. Vi ser det därför som helt nödvändigt att reflektera över innehållet ifrån olika utgångspunkter och därigenom erbjuda eleverna olika representationsformer för samma innehåll. På så sätt kan eleverna utveckla mentala representationer som går att nyttja och anpassa i olika situationer – med målet att skapa omfattande mentala modeller. Hjärnans naturliga plasticitet som tagits upp i kapitel 8 stödjer utnyttjandet av visuella såväl som analytiska representationer i geometriundervisningen ytterligare. Detta är ett bra sätt att förhindra eleverna från att bli hämmade av en undervisning som blivit låst i vissa idéer och mönster, vilket också Dou (1970, s. 398, 402) framhäver. Att ett nytt arbetssätt kan skapa behov för ett nytt utvärderingssystem leder återigen tillbaka till formativ bedömning som en del av den moderna undervisningen.

10.6 Skolgeometrins intressen och möjligheter

Studerande av Euklidisk geometri i en skolmiljö kan tänkas vara av särskilt intresse då det exempelvis inte krävs många hjälpmedel för att konstruera figurer. Däremot finns stora möjligheter att utveckla undervisningen vidare med hjälp av digitala verktyg eller grupparbete och på så sätt inkludera många av de fördelar som interaktiva hjälpmedel för med sig. Vi har också sett uppmuntran att kombinera olika ämnesområden i matematiken både i historisk och modern tid, vilket i sig kan skapa möjligheter att införa olika representationsformer och inkludera relevanta matematiska förmågor. En vidare koppling är att såväl historiska exempel som modern forskning antyder att elever (och lärares) förmåga att utföra bevis är allvarligt nedsatt. Att fokus i modern matematikundervisning ligger på procedurer snarare än bevis, gör att läraren inte har tillräcklig kunskap om de möjligheter som problemlösning och bevisföring kan erbjuda (Taflin, 2007; Koi, 2008; Nunes, 2008).

En tanke är att mer utvecklat arbete kring bevis i skolan skulle bana väg för de fördelar som diskuterats ovan och leda till bättre och långvarigare förståelse hos eleverna. Å andra sidan finns stöd för att elever inte nödvändigtvis lär sig mer genom att bevisa någonting än de gör genom att åskådliggöra saker och ting – till exempel genom fysiska eller digitala manipulationer av en extern representation. Lewis (1920) menar på att bevis kan försvåra människors förmåga att applicera sin geometri i vardagliga sammanhang och uttrycker istället en önskan om att låta elever undersöka, i förhoppning om att de själva ska utveckla en nyfikenhet som inte uppstår genom reproduktion av bevis. Detta är relevant då vi sett tecken på att dagens inställning till utbildning präglas av ett ekonomiskt marknadstänk där nyfikenhet är avgörande för klassrumsverksamheten. Vi ser här att det inte är helt klart om bevis ska användas i undervisningen eller inte. Vår slutsats, med grund i den genomgångna litteraturen, är att bevis kan bidra till ökad förståelse hos eleverna om de appliceras i ett öppet klassrumsklimat där laborativa övningar tillämpas och diskussion uppmuntras.

10.7 Förslag till vidare forskning

Vi har framställt en rad olika aspekter av skolgeometri. Det finns många sätt att se och förstå geometriundervisning på. Detta väcker också frågor om vad som kan vara användbart för framställande av ytterligare material, i syfte att ge lärare påtagligt underlag för vidareutveckling av sin geometriundervisning. Vi har lyft fram litteratur som tyder på att laborativt arbete och inkorporering av digitala hjälpmedel i lärandesituationer är ett beprövat sätt att utveckla arbete med geometri. Någonting som dock inte framhållits lika tydligt i den genomgångna litteraturen är manuellt laborativt arbete. Ett område som kan ligga till grund för framtida forskning skulle därför kunna vara någon form av jämförelse mellan användningen av digitala kontra manuella hjälpmedel i klassrumsmiljöer. I och med sådana studier skulle också ett relaterat område kunna vara undersökandet av vilka effekter laborativa lektioner har på lärandet, kanske i ett längre tidsperspektiv.

Tidigare i diskussionen har vi talat varmt om de möjligheter som skapas genom historiska jämförelser. Detta skulle kunna dras vidare genom att utgöra grunden till ett praktiskt orienterat examensarbete. Ett förslag är att se hur olika historiska källor kan användas i ett undervisningssammanhang och huruvida detta bidrar med någon nyans som potentiellt kan underlätta elevers lärande. Att analysera resultatet utifrån de didaktiska processer som diskuterats i ett sådant arbete, skulle eventuellt mynna i fascinerande slutledningar om hur historien har möjlighet att påverka förståelse och motivation hos dagens gymnasieelever. Vidare skulle även någonting rörande teorin om van Hiele-nivåerna vara angeläget att genomföra i en praktisk skolmiljö. Till exempel hur för-test kan konstrueras så att van Hiele-nivåerna belyses samt hur detta i sin tur påverkar efterföljande lärararbete, exempelvis planering, innehåll, senare resultat och så vidare.

Referenser

Aleven, V., Popescu, O., & Koedinger, K. R. (2001). A tutorial dialogue system with knowledge-based understanding and classification of student explanations. I *Working Notes of 2nd IJCAI Workshop on Knowledge and Reasoning in Practical Dialogue Systems*.

Alqahtani, M. M., & Powell, A. B. (2016). Instrumental appropriation of a collaborative, dynamic-geometry environment and geometrical understanding. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *4*(2), (s. 72–83).

Areskoug, M. & Grevholm, B. (1987). *Matematikgranskning* (Rapport 1987:3). Stockholm: Statens institut för läromedel.

Bağçe, S. (2005). A Study on the Heuristic of Saccheri's *Euclides* - A Methodological-cum-Historical Approach. I G. Irzik, & G. Güzeldere (Red.), *Turkish Studies in the History and Philosophy of Science - Boston Studies in the Philosophy of Science (244)* (s. 137–150). Dordrecht: Springer Netherlands.

Battista, M.T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. I F.K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 843–908). New York: Age Publicing Inc.

Bergius B. (2014) Undervisning och lärande i geometri. I Nationellt centrum för matematikutbildning. (2014). *Matematikundervisning i praktiken* (1. uppl. ed.). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

Bergsten, C., Häggström, J., Lindberg, L. (1997). *Nämnaren Tema Algebra för alla*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, Göteborgs universitet.

Bjessmo, L. Danström K. Edblom O. (Red). (2011). *Matematik Origo 1b*. Stockholm: Bonniers Utbildning AB.

Bråting, K., Sollervall, H., & Stadler, E. (2013). *Geometri för lärare* (1. uppl. ed.). Lund: Studentlitteratur.

Candeias, N., & Ponte, J.P. (2008). Geometry Learning: The Role of Tasks, Workning Models, and Dynamic Geometry Software. I B. Czarnocha (Red.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment-a Tool for Teacher-researchers* (s. 387–395). University of Rzeszów.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (s. 39–48).

Dou, A. M. (1970). Logical and historical remarks on Saccheri's geometry. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *11*(4), (s. 385–415). doi: 10.1305/ndjfl/1093894070

Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid's Elements of Geometry*. ISBN: 978-0-6151-7984-1

Girouard, A., Solovey, E. T., Hirshfield, L. M., Ecott, S., Shaer, O., & Jacob, R. J. (2007, February). Smart Blocks: a tangible mathematical manipulative. In *Proceedings of the 1st international conference on Tangible and embedded interaction* (s. 183–186). ACM.

González, G., & Herbst, P. G. (2006). Competing arguments for the geometry course: Why were American high school students supposed to study geometry in the twentieth century?. *International Journal for the History of Mathematics Education*, *1* (s. 7–33).

Griffiths, J. G. (1952). Herodotus and Aristotle on Egyptian Geometry. *The Classical Review (New Series)*, *2*(01), (s. 10–11).

Hall, J., & Lingefjärd, T. (2014). *Handbok för matematisk modellering med GeoGebra – Att undervisa mot förmågorna*. Lund: Studentlitteratur.

Halsted, G.B. (1920). *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus*. Chicago: The Open Court Publishing Company. Hämtad 2016-09-21 från https://archive.org/details/giroeuclvindicat00saccrich

Hedrén, R. (1992). Van Hiele-nivåer och deras betydelse för geometriundervisningen. I Emanuelsson, G., Johansson, B., & Ryding, R. (Red.) (1992). *Geometri och statistik*. Stockholm; Lund: Studentlitteratur.

Hermansson, R. (2013). *Laborativ geometriundervisning i olika åldersgrupper: En intervjustudie med lärare från förskola till gymnasium*. (Examensarbete – Umeå universitet, Instituationen för matematik och matematisk statistik). Umeå: Umeå Universitet.

Hooper, M., Mullis, I.V.S., & Martin, O.M. (2013). TIMMS 2015 Context Questionnaire Framework. I I.V.S Mullis, & M.O. Martin (Red.), *TIMMS 2015 Assessment Frameworks* (s. 61–82). Chestnut Hill, MA, USA: TIMMS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Hult, H. (2000). Laborationen – myt eller verklighet. *En kunskapsöversikt över laborationer inom teknisk och naturvetenskaplig utbildning CUP rapport*, (6).

Hähkiöniemi, M., Leppäaho, H., & Francisco, J. (2013). Teacher-assisted open problem-solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18*(2), (s. 47–69).

Iannece, D., & Tortora, R. (2008). Resonance: A Key Word in Mathematics Teaching-Research. I B. Czarnocha (Red.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment-a Tool for Teacher-researchers* (s. 59–70). University of Rzeszów.

Joyce, D.E. (2002). *Euclids Elements. Book VI. Proposition 31.* Hämtad 2016-09-20 från http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookVI/propVI31.html

Jönsson, P., & Lingefjärd, T. (2012). *IKT i grund- och gymnasieskolans matematikundervisning*. Lund: Studentlitteratur.

Kadej, C. (2008). Researching our own Teaching. I B. Czarnocha (Red.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment-a Tool for Teacher-researchers* (s. 7–17). University of Rzeszów.

Kalimuthu, S. (2009). The parallel postulate-return of the roaring lion. *Indian Journal of Science and Technology*, *2*(4), (s. 16–22).

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times – Volume 3*. New York; Oxford: Oxford University Press.

Koi, B. (2008). Teaching Proof to Ninth-Graders. I B. Czarnocha (Red.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment-a Tool for Teacher-researchers* (s. 259–272). University of Rzeszów.

Kungliga Skolöverstyrelsen. (1919). *Undervisningsplan för rikets folkskolor*. Stockholm.

Kungliga Skolöverstyrelsen. (1963). *Läroplan för grundskolan*. Stockholm: Emil Kihlströms tryckeri AB.

Lehtinen, M. (2008). *Events in Mathematics – Part 1*. Riga: University of Latvia.

Lehtinen, M. (2009). *Events in Mathematics – Part 2*. Riga: University of Latvia.

Lewis, F. P. (1920). History of the parallel postulate. *The American Mathematical Monthly*, *27*(1), (s. 16–23). doi: 10.2307/2973238

Lingefjärd, T. (2015). Representationer och lärande. Ifrån lärportalen för matematik – grundskola åk 4-6. Modul: Geometri. Del 3: Representationer och lärande. Skolverket.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., & Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students' understanding of the Pythagorean Theorem. *Learning and instruction*, *19*(6), (s. 527–537).

Lundgren, U.P. (2012). En gemensam skola – utbildning blir en nödvändighet för alla. I U.P. Lundgren, R. Säljö, & C. Liberg (Red.), *Lärande skola bildning – Grundbok för lärare* (s. 77–100). Stockholm: Natur & Kultur.

Lundgren, U.P., & Säljö, R. (2012). Skolans tidiga historia och utveckling – från skrivarskola till folkskola. I U.P. Lundgren, R. Säljö, & C. Liberg (Red.), *Lärande skola bildning – Grundbok för lärare* (s. 23–54). Stockholm: Natur & Kultur.

Lundin, S. (2008). *Skolans matematik: en kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling*. (Doctoral Thesis – University of Uppsala, Studier i utbildnings- och kultursociologi, 2). Uppsala: Uppsala Universitet.

Malkevitch, J. (2009). What Is Geometry? I Craine, T., & Rubenstein, R. (Red.) *Understanding geometry for a Changing World* (s. 3–17). National Council of Teachers of Mathematics. Danvers, MA, USA: Clearance Center, Inc.

Mariotti, M.A., Knipping, C., Küchemann, D., & Nordström, K. (2005). Argumentation and Proof. *I Proceedings of the 4th congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME4)* (s. 385–390).

Markkanen, P. (2014). *Tekniken utan en lärare är ingenting: En studie om användande av teknik i geometriundervisning*. (Licentiatavhandling – Linnéuniversitetet, Fakulteten för teknik, 26). Växjö: Linnéuniversitetet.

Mason M. (1998) *The Van Hiele levels of geometric understanding. Professional handbook for teachers. Geometry: Explorations and Applications*. Boston: McDougal Inc. Hämtad 2016-09-10 från http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT8990/GEOMETRY/Mason,%20Marguerite.%20The%20van%20Hiele%20Levels%20of%20Geometric%20Understanding.%202002.pdf

Mathematics Online [mathematicsonline]. (2012, 29 december). *(I. 47) Pythagorean Theorem, Euclid's Proof*. Hämtad 2016-09-20 från https://www.youtube.com/watch?v=nxi8gV6_50o

Miller, D., & Glover, D. (2010). Presentation or mediation: is there a need for 'interactive whiteboard technology-proficient'teachers in secondary mathematics? *Technology, Pedagogy and Education*, *19*(2), (s. 253–259).

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International Results in Mathematics*. Chestnut Hill, MA, USA: TIMMS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College

Nilsson, G. (2005). *Att äga π – Praxisnära studier av lärarstudenters arbete med geometrilaborationer*. (Doctoral thesis, Gothenburg Studies in Educational Sciences, 228). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Nordström, K., & Löfwall, C. (2005). Proof in Swedish upper secondary school mathematics textbooks—the issue of transparency. I *Proceedings of the 4th congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME4)* (s. 448–457).

Nunes, C.C. (2008). Developing a New Assessment Culture. I B. Czarnocha (Red.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment-a Tool for Teacher-researchers* (s. 377–385). University of Rzeszów.

Oner, D. & Stahl, G. (2016). Tracing the change in discourse in a collaborative dynamic geometry environment: From visual to more mathematical. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *11*(1), (s. 59–88).

Parallel postulate. (2016, 18 juli). I *Wikipedia*. Hämtad 2016-09-08 från https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_postulate

Persson, A., & Böiers, L.C. (2010). *Analys i en variabel*. Lund: Studentlitteratur.

Petterson, D., & Wester, A. (2012). Skolan i världen – internationella kunskapsmätningar. I U.P. Lundgren, R. Säljö, & C. Liberg (Red.), *Lärande skola bildning – Grundbok för lärare* (s. 503–528). Stockholm: Natur & Kultur.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). The child's conception of space (2. imp. ed.). London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1981). *The child's conception of geometry*. New York: Norton.

Popescu, O., & Koedinger, K. R. (2000). Towards understanding geometry explanations. *Reason*, *676*(30).

Prytz, J. (2007). *Speaking of Geometry: A study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates*. (Uppsala dissertations in Mathematics – Uppsala University, Department of Mathematics, 49). Uppsala: Uppsala universitet.

Restivo, S. (1992). *Mathematics in Society and History*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Richardson, G. (2010). *Svensk utbildningshistoria – Skola och samhälle förr och nu*. Lund: Studentlitteratur.

Rystedt, E., & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning: vad vet vi?.* Göteborg: Litorapid AB

Selander, S. (2012). Didaktik – undervisning och lärande. I U.P. Lundgren, R. Säljö, & C. Liberg (Red.), *Lärande skola bildning – Grundbok för lärare* (s. 199–216). Stockholm: Natur & Kultur.

Silverman, J.H. (2013). *A Friendly Introduction to Number Theory*. U.S.A., NJ: Pearson Education, Inc.

Sjöberg, B. (1996). *Från Euklides till Hilbert – Historien om matematikens utveckling under tvåtusen år*. Åbo: Åbo Akademis förlag.

Skolverket. (2003). Nationella kvalitetsgranskningar *Lusten att lära: med fokus på matematik* 2001-2002. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola.* Hämtad 2013-10-21 från : http://www.skolverket.se/publikationer?id=2705

Skolverket. (2011). *Om ämnet Matematik*. Hämtad 2016-08-20 från: http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat/comment.pdf?subjectCode=MAT&commentCode=ALL&lang=sv

Skolöverstyrelsen. (1969) *Läroplan för grundskolan – allmän del*. Stockholm: Svenska Utbildningsförlaget Liber AB.

Skolöverstyrelsen. (1970) *Läroplan för gymnasieskolan – supplement*. Stockholm: Svenska Utbildningsförlaget Liber AB.

Skott, J., Jess, K., Hansen, H.C., & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare- Delta Didaktik.* Malmö: Gleerups.

Smith, D.E. (1953) *History of Mathematics – Volume II*. New York, U.S.A: Dover Publications, Inc..

Svensson, A. & Ståhl, M. (2005) *Geometri i gymnasiematematiken – En jämförande studie av svenska och finska matematikböcker*. Tsunami (3).

Säljö, R. (2011). Lärande och lärandemiljöer. I S. Hansén, & L. Forsman (Red.), *Allmändidaktik: Vetenskap för lärare* (1. uppl. ed.) (s. 155–157). Lund: Studentlitteratur.

Säljö, R. (2012). Den lärande människan – teoretiska traditioner. I U.P. Lundgren, R. Säljö, & C. Liberg (Red.), *Lärande skola bildning – Grundbok för lärare* (s. 139–198). Stockholm: Natur & Kultur.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* (Doctoral Thesis – University of Umeå, Department of mathematics, 39). Umeå: Umeå Universitet.

Tambour, T. (2002). *Euklidisk geometri*. Stockholm: Stockholms Universitet.

Tóth, M. (2008). Teaching Isometries in Grade 7 (Develepmental Teaching Experiment). I B. Czarnocha (Red.), *Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment-a Tool for Teacher-researchers* (s. 247–258). University of Rzeszów.

Van Hiele, P. M. (1959). *The child's thought and geometry*. English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, (s. 243–252).

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*, London: Academic press Inc.